МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Інститут інноваційної та післядипломної освіти

Бойцова І. А.

К У Р С Л Е К Ц І Й

з дисципліни

Ч И С Е Л Ь Н І М Е Т О Д И

Одеса – 2015

Курс лекцій з дисципліни "Чисельні методи" для студентів коледжу економіки та соціальної роботи освітньо-кваліфікаційного рівня "Молодший спеціаліст" спеціальності 5.04030101 "Прикладна математика"

Укладач: **Бойцова І. А.**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри економічної кібернетики та інформаційних технологій ІІПО ОНУ імені І. І. Мечникова

Рецензенти: **Усов А. В.**, доктор технічних наук, професор, завідуючий кафедрою вищої математики та моделювання систем Одеського національного політехнічного університету

Шпинарьова І. М., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного забезпечення комп'ютерних систем ІМЕМ ОНУ імені І. І. Мечникова

Вітавецька Л. А., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики Одеського державного екологічного університету

Викладено основні чисельні методи розв'язування прикладних задач, що орієнтовані на використання комп'ютерної техніки. Наведено алгоритми методів та визначено похибки застосування відповідних методів для розв'язування задач.

Для студентів коледжу економіки та соціальної роботи освітньо-кваліфікаційного рівня "Молодший спеціаліст" спеціальності 5.04030101 "Прикладна математика"

Рекомендовано до друку Вченою радою ІІПО ОНУ імені І. І. Мечникова
Протокол № 9 від 24 червня 2015р.

ЗМІСТ

1. ВСТУП ДО ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ 6
1.1. Етапи розв'язування задач чисельними методами 6
1.1.1. Постановка задачі та її математична модель 6
1.1.2. Вибір обчислювального методу 8
1.1.3. Побудова алгоритму розв'язування задачі 9
1.1.4. Реалізація методу обчислень 11
1.2. Оцінка похибки результату при розв'язуванні задач чисельними методами 11
1.2.1. Джерела виникнення похибок 11
1.2.2. Похибки вхідних даних 12
1.2.3. Похибки при арифметичних діях з наближеними числами 15
1.2.4. Похибки при обчисленні функції одної змінної 18
1.2.5. Похибки при обчисленні функції декількох змінних 20
1.2.6. Похибки обчислювальних методів 21
2. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ 22
2.1. Постановка задачі розв'язування нелінійних алгебраїчних рівнянь 22
2.2. Відокремлення коренів рівняння 22
2.2.1. Умови відокремлення коренів рівняння 22
2.2.2. Графічний метод відокремлення коренів рівняння 24
2.2.3. Відокремлення коренів рівняння методом проб 25
2.2.4. Метод відокремлення інтервалів монотонності 26
2.3. Методи послідовного наближення до кореня рівняння 27
2.3.1. Метод половинного розподілу 27
2.3.2. Метод простих ітерацій 29
2.3.3. Метод хорд 32
2.3.4. Метод дотичних (метод Ньютона) 35
2.3.5. Комбінований метод 38
3. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ 40
3.1. Поняття про систему лінійних алгебраїчних рівнянь 40
3.2. Точні методи розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь 41
3.2.1. Метод Гауса послідовного виключення невідомих 41
3.2.2. Метод Гауса з вибором головного елементу 44
3.3. Наближені методи розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь 45
3.3.1. Метод простих ітерацій 45
3.3.2. Метод Зейделя 49
3.3.3. Зведення системи лінійних алгебраїчних рівнянь до виду, що задовольняє умовам збіжності методів 50
4. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ЗНАХОДЖЕННЯ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ ТА ВЛАСНИХ ВЕКТОРІВ МАТРИЦІ 51
4.1. Власні значення і власні вектори матриці 51

4.2. Метод Данилевського знаходження власних значень матриці 52
4.3. Метод скалярних добутків знаходження максимального власного значення симетричної матриці 54
5. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ 58
5.1. Постановка задачі інтерполяції 58
5.2. Інтерполяційний многочлен Лагранжа 59
5.3. Кінцеві різниці для таблично заданої функції 61
5.3.1. Визначення кінцевих різниць 61
5.3.2. Властивості кінцевих різниць 63
5.4. Інтерполяційний многочлен Ньютона 65
5.4.1. Перша інтерполяційна формула Ньютона 65
5.4.2. Друга інтерполяційна формула Ньютона 67
5.5. Порівняння інтерполяційних многочленів 68
5.6. Багатоінтервальна інтерполяція 69
5.6.1. Лінійна багатоінтервальна інтерполяція 70
5.6.2. Квадратична багатоінтервальна інтерполяція 70
5.6.3. Кубічна багатоінтервальна інтерполяція 71
6. СПЛАЙН-ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ 72
6.1. Постановка задачі сплайн-інтерполяції 72
6.2. Лінійний сплайн 72
6.3. Квадратичний сплайн 73
6.4. Кубічний сплайн 76
7. АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ 79
7.1. Постановка задачі апроксимації і метод найменших квадратів 79
7.2. Лінійна апроксимація 80
7.3. Квадратична апроксимація 81
7.4. Степенева апроксимація 82
7.5. Показникова апроксимація 83
7.6. Логарифмічна апроксимація 84
7.7. Дробово-лінійна апроксимація 84
7.8. Гіперболічна апроксимація 85
7.9. Дробово-раціональна апроксимація 86
8. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ 87
8.1. Загальні відомості. Постановка задачі 87
8.2. Метод Ейлера розв'язування диференціального рівняння першого порядку 88
8.3. Модифікований метод Ейлера розв'язування диференціального рівняння першого порядку 91
8.4. Удосконалений метод Ейлера розв'язування диференціального рівняння першого порядку (метод Ейлера-Коші) 93
8.5. Методи Рунге–Кутта розв'язування звичайних диференціальних рівнянь першого порядку 95
8.5.1. Метод Рунге-Кутта першого порядку 96
8.5.2. Методи Рунге-Кутта другого порядку 96

8.5.3. Методи Рунге-Кутта третього порядку 99
8.5.4. Методи Рунге-Кутта четвертого порядку..... 100
8.5.5. Методи Рунге-Кутта більш високих порядків 101
8.6. Методи Рунге–Кутта розв'язування систем диференціальних рівнянь першого порядку 102
8.7. Метод кінцевих різниць розв'язування звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку 103
8.7.1. Метод кінцевих різниць розв'язування задачі Коші для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку..... 103
8.7.2. Метод кінцевих різниць розв'язування задачі Коші для нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку..... 106
8.7.3. Метод кінцевих різниць розв'язування крайових задач для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку..... 107
8.7.4. Метод кінцевих різниць розв'язування крайових задач для нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку..... 109
9. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ..... 110
9.1. Характеристика методу кінцевих різниць для розв'язування рівнянь математичної фізики 110
9.2. Метод кінцевих різниць розв'язування задачі Дирихле в прямокутній області..... 111
9.3. Ітераційний метод розв'язування системи кінцево-різницевих рівнянь 115
9.4. Метод кінцевих різниць для розв'язування рівнянь параболічного типу 116
9.5. Метод кінцевих різниць для розв'язування рівнянь гіперболічного типу 121
9.6. Розв'язування крайових задач для криволінійних областей..... 125
ЛІТЕРАТУРА 126

1. ВСТУП ДО ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ

1.1. Етапи розв'язування задач чисельними методами

Більшість прикладних задач (інженерних, економічних, біологічних і ін.), результат яких повинен представляти числову інформацію, зводяться до математичних, які розв'язуються різними обчислювальними методами. Процес розв'язування таких задач можна надати у вигляді наступних етапів.

1. Постановка задачі.
2. Побудова математичної моделі задачі.
3. Вибір обчислювального методу.
4. Вивчення (або складання) алгоритму розв'язування задачі.
5. Реалізація алгоритму за допомогою обчислювальних засобів.
6. Аналіз отриманих результатів.

1.1.1. Постановка задачі та її математична модель

Постановка задачі визначає словесне формулювання задачі, умов, яким вона повинна задовольняти, і вимог, запропонованих до розв'язування.

Наприклад:

а) розв'язати квадратне рівняння;

б) визначити зміну швидкості при падінні тіла, враховуючи опір середовища;

в) знайти площу заданої ділянки землі;

г) вибрати найкращий денний раціон відгодівлі худоби.

У *процесі формулювання задачі* необхідно відповісти на запитання:

1) чи зрозуміла термінологія, що використовується у постановці задачі?
2) що є вхідними даними для розв'язування задачі?
3) що потрібно знайти при розв'язуванні задачі?
4) як визначити розв'язок?
5) яких даних не вистачає і чи всі запропоновані дані потрібні?
6) які можна зробити припущення?

Математична модель – це математичний опис співвідношень у постановці задачі.

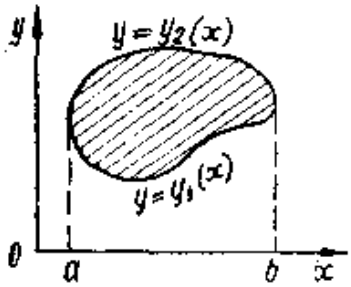
Коли будується модель, потрібно звернути увагу на запитання:

1) чи розв'язувалися аналогічні задачі?
2) які математичні структури найбільше підходять для розв'язування даної задачі?
3) які математичні величини визначають вхідні дані?
4) які математичні величини визначають результат?
5) які математичні співвідношення існують між об'єктами моделі?
6) як працювати з обраною моделлю?

В одних випадках запис математичної моделі не викликає труднощів, а в інших потребує уточнення постановки задачі, виділення головних факторів, відкидання умов, що мало впливають на результат.

Для задачі а) математична модель очевидна. Розв'язати рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, де a, b, c – задані дійсні числа, причому $a \neq 0$, x – невідоме, яке потрібно знайти.

В задачі б) припускаємо, що тіло є матеріальною точкою маси *m*, на яке діють сила тяжіння $F_1 = mg$ та сила опору, що пропорційна швидкості падіння $F_2 = -kv$, тоді, на підставі законів механіки, одержимо рівняння $ma = mg - kv$, або $\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v$. Це диференціальне рівняння з урахуванням початкової умови $v(t_0) = v_0$ є математичною моделлю задачі для визначення функції $v(t)$.



В задачі в) варто з'ясувати форму ділянки землі, її границі, зобразити її в системі координат у відповідному масштабі. Тоді задача зведеться до обчислення інтегралу $\int_a^b (y_2(x) - y_1(x))dx$, що і буде математичною моделлю даної задачі.

Постановка задачі г) повинна містити перелік кормів денного раціону, денну норму споживання речовин, і розкритий зміст поняття «найкращий раціон».

Денний раціон складається із двох видів кормів, середній денний запас яких дорівнює відповідно b_1, b_2. У раціон повинні входити три поживних речовини, щоденна норма споживання яких становить a_1, a_2, a_3. Вміст цих речовин в одиниці кожного із двох видів кормів відповідно a_{11}, a_{12}, a_{13} і a_{21}, a_{22}, a_{23}. Якщо позначити через x_1, x_2 кількість одиниць розглянутих видів кормів, а через p_1, p_2 відповідно задані вартості одиниці кожного корму, то математичну модель задачі сформулюється так:

знайти найменше значення функції

$$r = p_1x_1 + p_2x_2$$

при обмеженнях

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \geq a_1,$$
$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \geq a_2,$$
$$a_{13}x_1 + a_{23}x_2 \geq a_3,$$
$$0 \leq x_1 \leq b_1,\ 0 \leq x_2 \leq b_2.$$

Таким чином, всі поставлені задачі відображено в математичних співвідношеннях і зведено вже до чисто математичних задач.

Складання математичної моделі у прикладних задачах є найбільш складним і відповідальним етапом розв’язування і, як правило, виконується спільно математиком і фахівцем у даній галузі. Що ж стосується математичної задачі (наприклад, задачі а)), то її модель міститься в самій постановці.

1.1.2. Вибір обчислювального методу

Математична задача абстрагована від конкретної сутності прикладної задачі. Для її розв’язування створюються спеціальні обчислювальні методи. Зокрема, *до однієї і тієї ж математичної моделі* можна звести абсолютно різні прикладні задачі.

Так, задача б) зведена до диференціального рівняння, яке може бути моделлю і для багатьох інших задач (зміна швидкості при пружних лінійних коливаннях, зміна струму в найпростішому електричному колі, зміна швидкості при розмноженні бактерій).

Для розв’язування задачі в) необхідно обчислити визначений інтеграл. До обчислення визначених інтегралів приходять і при обчисленні об'єму тіла або довжини дуги плоскої кривої, обчисленні статичного моменту або моменту інерції, розрахунку роботи змінної сили та у інших задачах.

Математична модель задачі г) приведена до системи лінійних нерівностей, яка задовольняє деякій умові, розв’язування якої зводиться до багаторазового розв’язування систем лінійних рівнянь. Лінійні системи розв’язують і у багатьох інших прикладних задачах.

Розв’язування математичної моделі задачі здійснюється обчислювальним методом, зокрема, *ту ж саму задачу можна розв’язувати декількома методами*. Вибір методу для даної задачі – важливий елемент процесу розв'язування, що істотно впливає на результат.

Методи обчислень поділяють на точні та наближені.

Точні методи дозволяють після скінченного числа дій отримати точний результат за умови, що обчислення проводять без округлення чисел.

Наближені методи дозволяють отримати результат з деякою похибкою. При виборі наближеного методу істотними є обсяг обчислень, швидкість збіжності (як швидко виходить результат) і інші фактори. Вибір методу, зокрема, залежить і від вхідних даних. Крім того, на вибір методу впливають засоби його реалізації (ручний розрахунок, обчислювальна техніка, наявність готової програми і т.п.). Так, якщо використовують швидкодіючий комп’ютер і готову програму, то обсяг обчислень не повинен бентежити виконавця і бути визначальним фактором при виборі методу. При ручному розрахунку варто віддати перевагу методу, що вимагає певних попередніх досліджень, з меншим числом обчислень.

Наприклад, для розв’язування задачі а) краще використати точний метод, тобто формулу

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

але можна застосувати і інші засоби, наприклад, різні наближені методи.

Диференціальне рівняння задачі б) краще розв’язувати, розділивши змінні, тобто привести його до вигляду

$$\frac{m \cdot dv}{mg - kv} = dt.$$

Однак його можна розглядати і як лінійне рівняння, або розв’язувати наближеними методами.

При розв’язуванні задачі в) варто користуватися методами наближеного обчислення визначеного інтегралу, зокрема можна застосувати найбільш простий з них – метод прямокутників, оскільки постановка задачі не вимагає високої точності розв'язування.

Що ж стосується розв’язування систем лінійних рівнянь, то вже зі шкільного курсу математики відомо точні методи: метод підстановки, метод алгебраїчного додавання, метод визначників. Однак для лінійних систем високого порядку вони виявляються неефективними, тому для їхнього розв'язування частіше використовуються наближені методи.

1.1.3. Побудова алгоритму розв'язування задачі

Алгоритмом називається система правил, що задає строго визначену послідовність операцій, які приводять, при заданих початкових даних, до результату (точного або наближеного).

З визначення випливають *основні властивості алгоритму*:

1. *Дискретність алгоритму* – представлення алгоритму у вигляді послідовності окремих етапів, елементарних операцій, які виконуються у строго визначеному порядку.
2. *Визначеність алгоритму* – кожний етап алгоритму повинен бути описаний за допомогою певної системи правил так, щоб виконавець його сприймав однозначно, без невизначеностей.
3. *Результативність алгоритму* – через скінченний час алгоритм повинен привести до результату або до повідомлення про його відсутність.
4. *Масовість алгоритму* – алгоритм, складений для розв’язування однієї задачі, повинен застосовуватися для розв’язування аналогічних задач при всіх допустимих значеннях вхідних даних.

Способи опису алгоритмів:

- словесно-формульний опис алгоритму;
- графічний опис алгоритму у вигляді блок-схеми;
- опис алгоритму алгоритмічною мовою.

Словесно-формульний опис алгоритму – це опис алгоритму за допомогою слів і формул, представлений у вигляді перенумерованих етапів, які виконуються один за одним. Якщо необхідно змінити порядок виконання етапів, варто вказати це явно.

Блок-схемою алгоритму називається графічне зображення послідовності дій обчислювального процесу.

Серед множини різноманітних алгоритмів можна виділити три основних види алгоритмів:

- лінійні;
- розгалужені;
- циклічні.

Розмаїтість алгоритмів визначається тим, що будь-який алгоритм розпадається на частини, фрагменти і кожний фрагмент є алгоритмом одного із зазначених видів.

Лінійним називається *алгоритм*, у якому всі етапи розв'язування задачі виконуються строго послідовно.

Розгалуженим алгоритмом називається алгоритм, у якому обирається один із двох можливих шляхів обчислювального процесу в залежності від того, виконується чи ні задана для цього умова.

Циклічним називається *алгоритм*, у якому отримання результату забезпечується багаторазовим виконанням тих самих операцій. Циклічний алгоритм зображується за допомогою *циклічної структури з відомим числом повторень, циклічної структури з поза умовою* або *циклічної структури з передумовою.* Кожна з перелічених структур обирається залежно від умов організації циклічного процесу і умов виходу з нього.

Якщо кількість *ітерацій* (однотипних операцій, що повторюються багато разів) визначається значенням заданої змінної, то використовують *циклічну структуру з відомим числом повторень*. Таку структуру також застосовують при роботі з елементами масиву, над якими виконують однотипні операції.

Якщо вихід із циклічного процесу відбувається на деякій ітерації при виконанні умови виходу, що визначає досягнення заданої точності обчислень, то використовують *циклічні структури з позаумовою* або *передумовою.* Вибір структури з умовою залежить від того, де необхідно перевіряти умову виходу: на початку ітерації або наприкінці. Варто звернути увагу на те, що коли використовується *структура з позаумовою*, то циклічний процес буде виконуватися хоча б один раз. Якщо ж використовується *структура з передумовою*, то циклічна структура за певних умов може не виконатися жодного разу. Саме цю особливість варто враховувати при виборі циклічної структури з умовою.

При розробці складних алгоритмів використовують *структурний підхід*, основними складовими якого є: спадне покрокове проектування, структурне програмування, модульне програмування, структурний контроль. Принцип спадного покрокового проектування, що застосовується для розв'язування складних задач, передбачає розробку більш крупних блок-схем, що містять блоки, які можна винести окремо для більш докладної деталізації дій. Блок-схеми кожного рівня деталізації повинні бути структурними, тобто складатися з алгоритмічних структур з одним входом і одним виходом. Якщо блок-схема містить тільки елементарні блоки, тобто блоки, які не можуть бути далі деталізовані, то така блок-схема є докладною.

Алгоритмічна мова – це засіб для запису алгоритмів в аналітичному вигляді, що є проміжним між записом алгоритму природною мовою і записом мовою програмування. Для запису алгоритму використовують обмежений набір термінів, більш строгі правила запису операцій для забезпечення однозначності розуміння алгоритму.

1.1.4. Реалізація методу обчислень

Обчислення за алгоритмами здійснюються за допомогою різних обчислювальних засобів.

При ручному (безпосередньому) розрахунку звичайно використовують найпростіші обчислювальні засоби: таблиці, калькулятори і т.п. Результати дій кожного етапу алгоритму записують в спеціальний розрахунковий бланк.

Наявність комп'ютера дозволяє реалізувати обчислення автоматично, під керівництвом програми. При цьому, можливо, що для обраного методу існує готова (стандартна) програма, за якою здійснюють розрахунок. Якщо ж задача не є типовою, а має свої особливості, то за розробленим алгоритмом потрібно скласти програму. В якій у строгій послідовності вказують дії алгоритму з використанням вхідних даних задачі.

Важливим є контроль обчислень, що проводять за *контрольним прикладом*. Результат контрольного прикладу або очевидний, або його заздалегідь знаходять яким-небудь іншим способом. При ручному розрахунку контроль рекомендується проводити поетапно. При розрахунках на комп'ютері за складеною програмою контрольний приклад заздалегідь прораховують вручну.

Останнім етапом розв'язування прикладної задачі є видача конкретних рекомендацій на підставі отриманих результатів розрахунку.

1.2. Оцінка похибки результату при розв'язуванні задач чисельними методами

1.2.1. Джерела виникнення похибок

Розв'язування прикладних і математичних задач, як правило, пов'язане з наближеними значеннями величин, з використанням наближених методів розв'язування і наближених обчислень.

Математична модель задачі – це вже наближене подання реального об'єкту. Вхідні дані, які одержано з експерименту, можна визначити лише приблизно. Навіть точні числа, такі, як $\pi, e, \sqrt{3}, \frac{6}{7}$ і т.п., при обчисленнях заміняють десятковими дробами, залишаючи певне число знаків після коми.

Похибка, яку допускають при переході від постановки задачі до відповідної математичної моделі, і похибка вхідних даних разом утворюють *недопустиму похибку*.

Обчислювальні методи частіше також є наближеними і тому утворять *похибку обчислювальних методів*.

Навіть при використанні найпростішої формули результат, як правило, одержують наближеним, тому що арифметичні дії виконують над наближеними значеннями. При цьому утворюється *обчислювальна похибка*.

Похибка результату при розв'язуванні задачі з використанням чисельних методів складається із суми:

– недопустимої похибки;
– похибки обчислювального методу;
– обчислювальної похибки.

Тому, перш ніж приступитися до вивчення обчислювальних методів, варто ознайомитися з різними видами похибок, загальними правилами дій над наближеними числами і оцінкою похибок при обчисленнях.

1.2.2. Похибки вхідних даних

Абсолютна похибка наближеного числа. Якщо a_0 – деяке число (відоме точно або не відоме), a – число, взяте за наближене значення числа a_0, то число $\Delta(a) > 0$, що задовольняє нерівності

$$|a_0 - a| \le \Delta(a),$$

називається *абсолютною похибкою* (точніше *граничною абсолютною похибкою)* наближеного числа a.

Таке визначення абсолютної похибки не є однозначним. Так, якщо $a_0 = \pi$, а за наближене значення взяти a = 3,14, то, враховуючі, що 3,140<π<3,142, можна записати

$$|\pi - a| < 0{,}002, \qquad |\pi - a| < 0{,}01, \qquad |\pi - a| < 0{,}1.$$

Кожне із чисел 0,002, 0,01, 0,1 буде абсолютною похибкою числа *a*. Але чим ближче між собою числа $|a_0 - a|$ та $\Delta(a)$, тим точніше абсолютна похибка оцінює фактичну помилку.

За *абсолютну похибку* $\Delta(a)$ наближеного числа *a* беруть за можливістю *найменше із чисел*, що задовольняє наведеній нерівності, тобто відповідає подвійній нерівності

$$a - \Delta(a) \le a_0 \le a + \Delta(a),$$

яку умовно записують наступним чином:

$$a_0 = a \pm \Delta(a),$$

тобто a_0 приблизно дорівнює *a* з абсолютною похибкою $\Delta(a)$.

Так, у попередньому прикладі можна записати π = 3,14 $\pm$0,002.

Абсолютна похибка є оцінкою точності числа.

Відносна похибка наближеного числа. Абсолютна похибка $\Delta(a)$ числа *a*, взятого за наближене значення числа a_0, не завжди є зручною характеристикою степені точності *a,* як наближення до a_0. Похибка в одному разі є дуже грубою помилкою при вимірюванні довжини приміщення, але її можна розглядати як малу помилку при вимірюванні відстані між двома точками земної поверхні.

Отже, крім величини абсолютної похибки, необхідно ще знати її відношення до вимірюваної (або обчислюваної) величини, яке частіше відображається у відсотках.

Відносною похибкою $\delta(a)$ наближеного числа *a* називається відношення абсолютної похибки $\Delta(a)$ до модуля цього числа

$$\delta(a)=\frac{\Delta(a)}{|a|} \qquad \text{або в відсотках} \qquad \delta(a)=\frac{\Delta(a)}{|a|}\cdot 100\%.$$

Так, відносна похибка числа 3,14, взятого за наближене значення числа π, при $\Delta(3{,}14) = 0{,}002$ дорівнює

$$\delta(3{,}14)=\frac{0{,}002}{3{,}14}=0{,}00064, \text{ або } 0{,}064\%.$$

У технічних розрахунках точність вимірювань характеризують відносною похибкою. Результат вважають гарним, якщо відносна похибка не перевищує 0,1 %.

З визначення відносної похибки випливає, що

$$\Delta(a)=|a|\cdot\delta(a).$$

Правило округлення чисел. Округлення числа полягає у відкиданні в ньому всіх цифр, що знаходяться за деяким розрядом. При цьому, якщо округлене число ціле, то відкинуті цифри цілої частини заміняють нулями.

Округлення частіше виконують за наступним *правилом*:

- якщо перша цифра, що відкидається, менша п'яти, то остання цифра, що залишається, не змінюється;
- якщо перша цифра, що відкидається, більша п'яти, то остання цифра, що залишається, збільшується на одиницю;
- якщо перша цифра, що відкидається, дорівнює п'яти, то придатне кожне із зазначених правил, але найчастіше округлюють *за правилом парної цифри*: якщо остання цифра, що зберігається, непарна, то до неї додають одиницю, якщо ж парна, то залишають без змін.

Приклад 1. Округлити число $\pi = 3{,}14159...$ до:

а) одного; б) трьох; в) чотирьох десяткових знаків.

Розв'язування.

а) $3{,}14159 \approx 3{,}1$ (округлення до 0,1);

б) $3{,}14159 \approx 3{,}142$ (округлення до 0,001);

в) $3{,}14159 \approx 3{,}1416$ (округлення до 0,0001).

Якщо при округленні числа останні цифри, що зберігаються, нулі, то їх потрібно записувати явно.

Так, число 1,2997, округлене до 0,001, набирає вигляд 1,300.

Приклад 2. Округлити число 246250 до:

а) сотень тисяч; б) десятків тисяч; в) сотень.

Розв'язування.

а) $246\ 250 \approx 2 \cdot 10^5$ (округлення до 10^5);

б) $246\ 250 \approx 25 \cdot 10^4$ (округлення до 10^4);

в) $246\ 250 \approx 2462 \cdot 10^2$ (округлення до 10^2).

При округленні цілих чисел частіше замість відкинутих цифр записують не нулі, а число 10 у відповідному степені. Степінь числа 10 указує на число округлених знаків.

При округленні наближеного числа виникає додаткова похибка – *похибка округлення* $\Delta_0(a)$, що не перевершує половини одиниці розряду останньої цифри, що зберігається, (або п'яти одиниць першого відкинутого розряду).

Так, у прикладах 1, 2 маємо наступні похибки округлення:

$$\Delta_0(3{,}1) = 0{,}04159 \le 0{,}05,\ \Delta_0(3{,}142) = 0{,}00041 \le 0{,}0005;$$

$$\Delta_0\ (25 \bullet 10^4) = 3750 \le 0{,}5 \bullet 10^4.$$

Абсолютна похибка округленого числа є сума його абсолютної похибки та похибки округлення.

Наприклад, нехай $\Delta(3{,}142) = 0{,}2$, при округленні 3,142 до 0,1 одержуємо 3,1 і $\Delta_0(3{,}1) = 0{,}042$, тоді $\Delta(3{,}1) = 0{,}2 + 0{,}042 = 0{,}242$.

Абсолютну та відносну похибки округляють до однієї, рідше до двох цифр, відмінних від нуля. *Округлення похибок виконують тільки убік збільшення до тих же розрядів, що й наближене число.*

Так, при $\Delta(3{,}1) = 0{,}242$ беруть $\Delta(3{,}1) = 0{,}3$.

Значущі, вірні і сумнівні цифри.

Значущою цифрою наближеного числа називають будь-яку його цифру, починаючи з першої ненульової (рахуючи зліва направо).

Наприклад, у числі 0,00030900 перші чотири нулі не є значущими цифрами. Всі інші цифри (включаючи і наступні три нулі) – значущі.

У цілому округленому числі значущими вважають всі збережені цифри. Так, в округленому числі $120 \bullet 10^3$ цифри 1, 2, 0 – значущі.

Вірною цифрою (вірним знаком) наближеного числа *a* називається будь-яка його значуща цифра, для якої абсолютна похибка $\Delta(a)$ не перевершує половини розряду цієї цифри. Інші значущі цифри числа *a* називаються *сумнівними.*

Таким чином, якщо $\Delta(a) \le 0{,}5 \bullet 10^{-n}$, то цифри числа *a,* починаючи з першої значущої та закінчуючи цифрою, що знаходиться в *n*-му розряді після коми, – вірні, а розташовані далі – сумнівні. Наприклад, число 647,326 при $\Delta(a) = 0{,}03 \le 0{,}5 \bullet 10^{-1}$ має чотири вірні цифри 6, 4, 7, 3 і дві сумнівні 2, 6.

У математичних таблицях значень функцій наводяться тільки вірні цифри. Абсолютна похибка табличних значень, наприклад, у тризначних таблицях, не перевершує $0{,}5 \bullet 10^{-3}$, у семизначних – $0{,}5 \bullet 10^{-7}$.

Точність наближеного числа залежить не від кількості значущих цифр, а від кількості вірних цифр.

Остаточний наближений результат частіше округлюють до його вірних цифр, залишаючи одну сумнівну.

При розрахунках з наближеними числами в проміжних результатах зберігають одну, дві, а іноді і три сумнівні цифри.

Приклад 3. Задані числа з абсолютною похибкою округлити до вірних цифр. Визначити абсолютну похибку результату:

1) $a_1 = 2{,}6219$, $\Delta(a_1) = 0{,}024$;
2) $a_2 = 47{,}35$, $\Delta(a_2) = 1{,}3$;
3) $a_3 = 6{,}9971$, $\Delta(a_3) = 0{,}0009$;
4) $a_4 = 0{,}648$, $\Delta(a_4) = 0{,}04$.

Розв'язування.

1) Оскільки 0,024 < 0,05, то число a_1 потрібно округлити до 0,1. Одержимо число $a_1 \approx 2{,}6$ із двома вірними цифрами.

   Визначимо абсолютну похибку результату

$$\Delta(2{,}6) = 0{,}024 + |2{,}6219 - 2{,}6| = 0{,}0459 \approx 0{,}05.$$

2) Оскільки 1,3 < 0,5 • 10^1, то число a_2 потрібно округлити до десятків. Одержимо число $a_2 \approx 5 \bullet 10$ з одною вірною цифрою. Абсолютна похибка результату

$$\Delta(5 \bullet 10) = 1{,}3 + 2{,}65 = 3{,}95 \approx 4.$$

3) Оскільки 0,0009 < 0,005, то округлення числа виконуємо до 0,01. Одержимо число $a_3 \approx 7{,}00$ із трьома вірними цифрами. Абсолютна похибка результату

$$\Delta(a_3) = 0{,}0009 + |7{,}00 - 6{,}9971| = 0{,}0038 \approx 0{,}004.$$

   У числі 7,00 записані нулі свідчать про три його вірні знаки і цей запис відрізняється від 7 або 7,0.

4) Оскільки 0,04 < 0,05, то число a_4, округлюємо до 0,1. Одержимо число $a_4 \approx 0{,}6$ з одною вірною цифрою. Абсолютна похибка результату

$$\Delta(0{,}6) = 0{,}04 + 0{,}048 = 0{,}088 > 0{,}05,$$

   тобто цифра 6 уже сумнівна. Тому при округленні рекомендується залишати одну-дві сумнівні цифри, тобто

$$a_4 \approx 0{,}65,\ \Delta(0{,}65) = 0{,}042 \approx 0{,}05.$$

Зауважимо, що термін "вірні цифри" не слід розуміти буквально. Так, у числі 7,00, що заміняє число 6,9971, всі знаки вірні $|6{,}9971 - 7{,}00| < 0{,}005$, але жодна із цифр чисел 6,9971 і 7,00 не збігається. Однак вірні знаки наближеного числа часто збігаються з відповідними цифрами точного числа.

1.2.3. Похибки при арифметичних діях з наближеними числами

Похибки при арифметичних діях з наближеними числами визначаються через похибки вхідних величин.

1. *Абсолютна похибка алгебраїчної суми декількох чисел дорівнює сумі абсолютних похибок її доданків*:

$$\Delta(a_1 + \ldots + a_n) = \Delta(a_1) + \ldots + \Delta(a_n).$$

З рівності випливає наступне: якщо всі доданки $a_1,...,a_n$ (незалежно від їхніх знаків) мають ту саму абсолютну похибку $\Delta(a)$, то

$$\Delta(a_1+...+a_n)=n\cdot\Delta(a).$$

Однак, при великій кількості доданків ця формула дає дуже завищені результати, оскільки відхилення доданків від їхніх точних значень можуть мати різні знаки і в сумі великої кількості доданків частково компенсуватися.

У теорії ймовірностей доведено *правило Чеботарьова*, за яким абсолютна похибка суми великої кількості доданків $(n>10)$ *з однаковою абсолютною похибкою* визначається за формулою

$$\Delta(a_1+...+a_n)=\sqrt{3n}\cdot\Delta(a).$$

Якщо ж доданки мають різні абсолютні похибки, то абсолютна похибка суми наближених чисел не менша за найбільшу з абсолютних похибок *доданків*. Тому при обчисленні суми наближених чисел всі доданки потрібно округляти до кількості десяткових знаків числа з найбільшою абсолютною похибкою, залишаючи один сумнівний знак (а при великій кількості доданків – два).

Приклад 4. В трикутнику сторони a = 17,3см, b = 23,6см, с = 14,2см, крім того $\Delta(a)$ = $\Delta(b)$= $\Delta(c)$ = 0,1см. Визначити периметр p и $\Delta(p)$.

Розв'язування.

$$p = 17{,}3 + 23{,}6 + 14{,}2 = 55{,}1 \text{ (см)},$$

$$\Delta(55{,}1) = 3 \bullet 0{,}1 = 0{,}3 \text{ (см)}.$$

В числі p = 55,1 остання цифра сумнівна. Результат можна записати у вигляді p = 55,1 ± 0,3 (см).

2. *Відносна похибка суми декількох чисел* визначається за формулою

$$\delta(a_1+...+a_n)=\frac{\Delta(a_1+...+a_n)}{|a_1+...+a_n|}=\frac{\Delta(a_1)+...+\Delta(a_n)}{|a_1+...+a_n|}.$$

Якщо $a_1,...,a_n$ – числа одного знаку, то *відносна похибка* $\delta(a_1+...+a_n)$ *знаходиться між найменшою* та *найбільшою* з відносних похибок доданків:

$$\min\{\delta(a_1),...,\delta(a_n)\}\le\delta(a_1+...+a_n)\le\max\{\delta(a_1),...,\delta(a_n)\}.$$

Так, в попередньому прикладі

$$\delta(a)=0{,}58\%,\qquad \delta(b)=0{,}42\%,\qquad \delta(c)=0{,}70\%,\qquad 0{,}42\%\le\delta(p)\le0{,}70\%.$$

В дійсності

$$\delta(p)=\frac{0{,}3}{55{,}1}\cdot100\%=0{,}54\%.$$

При відніманні двох чисел одного знака відносна похибка різниці

$$\delta(a_1-a_2)=\frac{\Delta(a_1-a_2)}{|a_1-a_2|}=\frac{\Delta(a_1)+\Delta(a_2)}{|a_1-a_2|}$$

може виявитися значно більшою за відносних похибок кожного з даних чисел. Це частіше буває, якщо $|a_1-a_2|$ – мале число.

Приклад 5. Обчислити абсолютну і відносну похибки різниці чисел a_1=9,78, $\Delta(a_1) = 0{,}01$ і $a_2 = 9{,}22$, $\Delta(a_2) = 0{,}01$.

Розв'язування.

$$a_1 - a_2 = 0{,}56, \qquad \Delta(a_1 - a_2) = 0{,}01 + 0{,}01 = 0{,}02,$$

$$\delta(a_1 - a_2) = \frac{0{,}02}{0{,}56} \cdot 100\% \approx 3{,}57\%,$$

хоча

$$\delta(a_1) = \frac{0{,}01}{9{,}78} \cdot 100\% \approx 0{,}102\%, \quad \delta(a_2) = \frac{0{,}01}{9{,}22} \cdot 100\% \approx 0{,}108\%.$$

Звичайно, знаходження різниці близьких чисел намагаються уникнути, замінюючи її, за можливістю, іншими діями.

3. *Відносна похибка добутку декількох чисел дорівнює сумі відносних похибок його співмножників:*

$$\delta(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) = \delta(a_1) + \ldots + \delta(a_n).$$

4. *Абсолютна похибка добутку* обчислюють за формулою

$$\Delta(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) = |a_1 \cdot \ldots \cdot a_n| \cdot \delta(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n).$$

Зокрема, якщо в добутку ca число c точне, то $\delta(c) = 0$ и $\delta(ca) = \delta(a)$; $\Delta(ca) = |ca \cdot \delta(a)| = |c| \cdot \Delta(a)$. Звідки одержимо

$$\Delta(c_1 a_1 + \ldots + c_n a_n) = |c_1| \cdot \Delta(a_1) + \ldots + |c_n| \cdot \Delta(a_n).$$

Приклад 6. Нехай a = 4,3см, b = 1,6см, c = 2,8см – ребра прямокутного паралелепіпеда, причому

$$\Delta(a) = \Delta(b) = \Delta(c) = 0{,}1.$$

Знайти об'єм паралелепіпеда, відносну і абсолютну похибки результату.

Розв'язування.

Об'єм прямокутного паралелепіпеда

$$V = abc = 19{,}264\,(\text{см}^2).$$

Відносну похибку знаходимо за формулою

$$\delta(V) = \delta(19{,}264) = \frac{0{,}1}{4{,}3} + \frac{0{,}1}{1{,}6} + \frac{0{,}1}{2{,}8} \approx 0{,}121.$$

Абсолютну похибку обчислюємо за формулою

$$\Delta\ (19{,}264) = 19{,}264 \cdot 0{,}121 \approx 2{,}330$$

(похибки округлялися до тих же розрядів, що й *V)*. Тому що $2{,}330 < 0{,}5 \bullet 10^1$, то в числі 19,264 вірна лише цифра десятків, а інші цифри сумнівні. Округляємо *V,* залишивши два сумнівних знаки, і одержимо

$$V \approx 19{,}3\,\text{см}^3, \qquad \Delta(V) = 2{,}4\,(\text{см}), \quad \delta(V) = 12{,}5\%.$$

5. *Відносна похибка частки від ділення дорівнює сумі відносних похибок діленого і дільника*:

$$\delta\left(\frac{a_1}{a_2}\right) = \delta(a_1) + \delta(a_2).$$

Зокрема, $$\delta\left(\frac{1}{a}\right) = \delta(a).$$

6. *Абсолютну похибку частки від ділення* визначають за формулою

$$\Delta\left(\frac{a_1}{a_2}\right)=\left|\frac{a_1}{a_2}\right|\cdot\delta\left(\frac{a_1}{a_2}\right).$$

Якщо кількість чисел у добутку або відношенні велика, а відносна похибка кожного числа приблизно однакова (дорівнює $\delta(a)$), то відносна похибка результату обчислюється за *формулою Чеботарьова*

$$\delta(a_1a_2...a_n)=\sqrt{3n}\cdot\delta(a) \qquad (n>10),$$

$$\delta\left(\frac{a_1a_2...a_n}{b_1b_2...b_m}\right)=\sqrt{3(n+m)}\cdot\delta(a) \qquad (n+m>10).$$

Приклад 7. Катети прямокутного трикутника $a=2{,}6$см, $b=3{,}4$см обчислені з абсолютною похибкою $\Delta(a)=\Delta(b)=0{,}1$см. Визначити $tg(B)$ та $\Delta(tg(B))$, $\delta(tg(B))$.

Розв'язування.

$$tg(B)=\frac{b}{a}, \qquad tg(B)=\frac{3{,}4}{2{,}6}\approx 1{,}308.$$

Знаходимо відносну похибку

$$\delta(tg(B))=\delta(b)+\delta(a),\quad \delta(1{,}308)=\delta(3{,}4)+\delta(2{,}6)=\frac{0{,}1}{3{,}4}+\frac{0{,}1}{2{,}6}\approx 0{,}067.$$

Абсолютну похибку обчислюємо за формулою

$$\Delta(tg(B))=|tg(B)|\cdot\delta(tg(B)),$$

$$\Delta(1{,}308)=1{,}308\cdot 0{,}067\approx 0{,}088.$$

Оскільки 0,088 < 0,5, то у числі 1,308 вірними є лише цифри цілої частини, тобто один знак, а інші сумнівні. Округляємо результат, залишивши один сумнівний знак, тому одержимо

$$tg(B)\approx 1{,}3,\ \Delta(tg(B))=0{,}1, \qquad \delta(tg(B))=7{,}7\%.$$

При наявності декількох співмножників, у одного з яких відносна похибка у багато разів більше, ніж в інших (він обчислений найменш точно), *відносна похибка добутку буде визначатися саме за цією похибкою*. Тому число вірних знаків в інших співмножниках треба обирати за найменш точним числом, залишаючи один сумнівний. Аналогічно діємо і при діленні.

1.2.4. Похибки при обчисленні функції одної змінної

Нехай задана деяка функція $y=f(x)$, для якої в кожній точці існує похідна, та x-наближене значення аргументу x_0.

Наближеним значенням y функції y_0 вважають то значення, яке вона набирає при наближеному значенні аргументу, тобто $y=f(x)$, а $y_0=f(x_0)$. Виникає питання про похибку цього наближення. Як відомо з курсу математичного аналізу, при досить малому зрості аргументу $\Delta(x)$ приріст функції $\Delta(y)$ приблизно дорівнює її диференціалу:

$$\Delta(y)=f(x)-f(x_0)\approx f'(x)\cdot\Delta(x).$$

Якщо відома абсолютна похибка аргументу $\Delta(x) > |x - x_0|$, то *абсолютну похибку функції* можна визначити за формулою

$$\Delta(y) = |f'(x)| \cdot \Delta(x).$$

Відносна похибка функції, визначається за формулою

$$\delta(y) = \frac{\Delta(y)}{|y|} = \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| \cdot \Delta(x).$$

Визначимо абсолютні і відносні похибки деяких основних елементарних функцій.

1) *Логарифмічна функція* $f(x) = \log_a(x)$.

Абсолютна похибка логарифмічної функції має вигляд

$$\Delta(\log_a(x)) = \frac{1}{|x|} \cdot |\log_a(e)| \cdot \Delta(x) = |\log_a(e)| \cdot \frac{\Delta(x)}{|x|} = |\log_a(e)| \cdot \delta(x),$$

$$\text{де} \qquad \delta(x) = \frac{\Delta(x)}{|x|}.$$

Зокрема, якщо $a = 10$, то $\lg(e) \approx 0{,}5$ і $\Delta(\lg(x)) \approx 0{,}5 \cdot \delta(x)$, якщо ж $a = e$, то $\Delta(\ln(x)) = \delta(x)$ $(\ln(e) = 1)$. Абсолютна похибка логарифмічної функції з підстановкою e дорівнює відносній похибці аргументу. Відносну похибку функції знаходимо за формулою

$$\delta(\log_a(x)) = \left|\frac{\log_a(e)}{\log_a(x)}\right| \cdot \delta(x).$$

2) *Степенева функція* $f(x) = x^a$, (a – довільне дійсне число).

$$\Delta(x^a) = |a \cdot x^{a-1}| \cdot \Delta(x),$$

$$\delta(x^a) = \left|\frac{ax^{a-1}}{x^a}\right| \cdot \Delta(x) = |a| \cdot \frac{\Delta(x)}{|x|} = |a| \cdot \delta(x).$$

Отже, відносна похибка степеневої функції пропорційна відносній похибці аргументу. Зокрема,

$$\delta(x^2) = 2\delta(x),$$
$$\delta(x^3) = 3\delta(x),$$
$$\delta(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\delta(x),$$
$$\delta(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{3}\delta(x).$$

3) *Показникова функція* $f(x) = a^x$.

$$\Delta(a^x) = a^x |\ln(a)| \cdot \Delta(x),$$
$$\delta(a^x) = |\ln(a)| \cdot \Delta(x).$$

4) *Тригонометричні функції* $f(x)=\sin(x)$, $f(x)=\cos(x)$.

$$\Delta(\sin x)=|\cos x|\cdot\Delta(x)\le\Delta(x),$$
$$\Delta(\cos x)=|\sin x|\cdot\Delta(x)\le\Delta(x).$$

Отже, абсолютні похибки функцій синус і косинус не перевершують абсолютної похибки свого аргументу. Відносні похибки можна оцінити за формулами

$$\delta(\sin x)=|ctgx|\cdot\Delta(x),$$
$$\delta(\cos x)=|tgx|\cdot\Delta(x).$$

1.2.5. Похибки при обчисленні функції декількох змінних

Розглянемо функцію, що диференціюється, наприклад, трьох змінних $u=f(x,y,z)$. Нехай x, y, z – наближені значення аргументів x_0, y_0, z_0, що обчислені з абсолютними похибками $\Delta(x)$, $\Delta(y)$, $\Delta(z)$. Наближеним значенням u функції u_0 вважають то значення, яке вона набирає при наближених значеннях аргументів $u=f(x,y,z)$, а точним значенням вважають $u_0=f(x_0,y_0,z_0)$. Для визначення похибок, як і у випадку функції однієї змінної, скористаємося формулою диференціала, замінивши їм приріст функції:

$$\Delta u=f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)\approx\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\Delta z.$$

Абсолютну похибку $\Delta(u)$ функції при відомих абсолютних похибках аргументів $\Delta(x)$, $\Delta(y)$, $\Delta(z)$ знаходимо за формулою

$$\Delta(u)=\left|\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right|\Delta x+\left|\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\right|\Delta y+\left|\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right|\Delta z.$$

Відносну похибку визначимо наступним виразом

$$\delta(u)=\frac{\Delta(u)}{|u|}.$$

Приклад 8. Обчислити абсолютну і відносну похибки функції $u=xyz$.

Розв'язування. Оскільки $\frac{\partial u}{\partial x}=yz$, $\frac{\partial u}{\partial y}=xz$, $\frac{\partial u}{\partial z}=xy$, то абсолютна похибка обчислюється за формулою

$$\Delta(u)=|yz|\cdot\Delta x+|xz|\cdot\Delta y+|xy|\cdot\Delta z,$$

а відносна похибка за формулою

$$\delta(u)=\frac{|yz|\cdot\Delta x+|xz|\cdot\Delta y+|xy|\cdot\Delta z}{|xyz|}=\frac{\Delta x}{|x|}+\frac{\Delta y}{|y|}+\frac{\Delta z}{|z|}=$$
$$=\delta(x)+\delta(y)+\delta(z)$$

Отримана формула є формулою відносної похибки добутку.

1.2.6. Похибки обчислювальних методів

Похибки, що виникають при розв'язуванні математичних задач чисельними методами, можна поділити на дві групи. Першу групу складають похибки, що не залежать від конкретного змісту задачі, а також похибки, що викликані діями над наближеними числами. До другої групи належать похибки, що виникають за рахунок того, що математична задача, як правило, заміняється спрощеною, близькою за результатами наближеною задачею. Ці похибки *(похибки методу)* визначаються залежно від характеру задачі.

Надалі, в основному, для кожної задачі буде розглянуто і похибки методу для її розв'язування.

2. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

2.1. Постановка задачі розв'язування нелінійних алгебраїчних рівнянь

Задача розв'язування нелінійного алгебраїчного рівняння найчастіше зустрічається при вивченні загальнотехнічних і спеціальних дисциплін, в інженерній практиці. Знайти точне значення кореня рівняння можливо лише в деяких рідких окремих випадках, та навіть у цих випадках формули знаходження коренів настільки громіздкі, що ними важко користуватися. Крім того, часто константи, що входять у рівняння, мають наближені значення. Тому при розв'язуванні рівнянь широко використовують методи, що дозволяють одержати наближений розв'язок з будь-якою заданою точністю.

Нехай задане рівняння

$$f(x)=0,$$

де функція $y=f(x)$ визначена і неперервна на деякому відрізку й має в ньому неперервні першу $f'(x)$ й другу $f''(x)$ похідні. Корні заданого рівняння є нулями функції $y=f(x)$ і геометрично представляють собою точки перетину її графіка з віссю Ox.

Розглянемо задачу знаходження наближених значень дійсного кореня заданого рівняння з будь-якою заданою точністю. Процес розв'язування задачі складається із двох етапів.

1. *Відокремлення кореня*, тобто знаходження відрізка $[a;b]$, що належить області визначення функції $y=f(x)$, на якому знаходиться один і тільки один корінь рівняння $f(x)=0$.
2. *Уточнення значення кореня* із заданою точністю.

2.2. Відокремлення коренів рівняння

2.2.1. Умови відокремлення коренів рівняння

Перша умова заснована на поведінці функції в околі кореня та пов’язана з тим, що на кінцях відрізка $[a;b]$ функція має значення різних знаків, тобто

$$f(a)\cdot f(b)<0.$$

Відомо, що при цьому усередині відрізка $[a;b]$ є, принаймні, один корінь рівняння $f(x)=0$. Геометрично це означає, що графік функції $y=f(x)$ в точках a і b перебуває по різні сторони від осі Ox і, отже, усередині відрізка $[a;b]$ обов'язково повинен перетинати вісь Ox. Однак ця умова не гарантує існування єдиного кореня на цьому відрізку.

Так, наприклад, на рисунку 2.1 графік функції проходить таким чином, що $f(\alpha)>0$, $f(\beta)<0$, тобто $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, а усередині відрізка $[\alpha;\beta]$ знаходяться два різні корені.

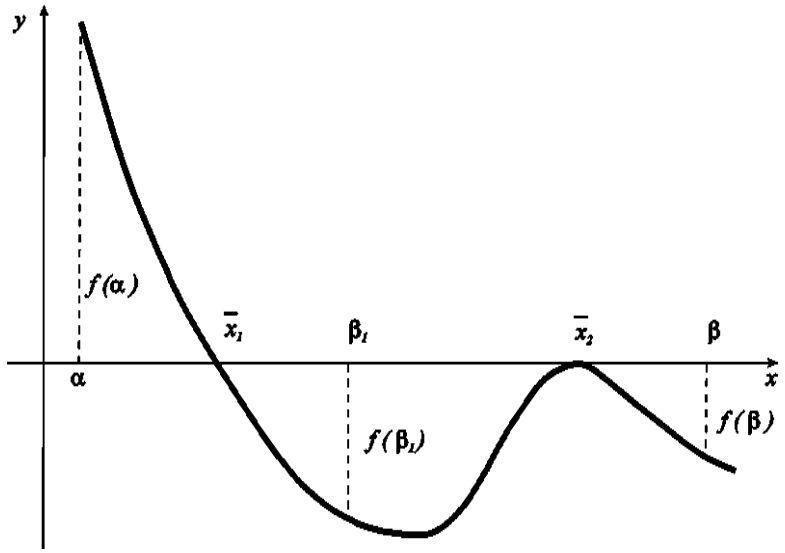


Рисунок 2.1 – Розміщення коренів рівняння $f(x)=0$

Помітимо, якщо на кінцях відрізка значення функції мають однаковий знак, то це зовсім не означає, що корінь відсутній. Наприклад, відрізок $[\beta_1;\beta]$ містить корінь, але $f(\beta_1)<0$ і $f(\beta)<0$, тому $f(\beta_1)\cdot f(\beta)>0$. Точка $\bar{x}_2$ в цьому випадку є кратним коренем рівняння $f(x)=0$. Надалі такий корінь розглядати не будемо.

Друга умова. Для існування єдиного кореня на відрізку $[a;b]$ повинна виконуватися ще одна умова. На відрізку $[a;b]$ функція $y=f(x)$ повинна бути монотонною, тобто її похідна $f'(x)$ не повинна змінювати знак на $[a;b]$.

Обидві умови є достатніми для існування єдиного кореня рівняння $f(x)=0$. З рисунка 2.1 бачимо, що обом умовам задовольняє відрізок $[\alpha;\beta_1]$, а на відрізку $[\alpha;\beta]$ функція не є монотонною.

Задача відокремлення кореня рівняння $f(x)=0$ полягає в знаходженні відрізка $[a;b]$ з області визначення функції $y=f(x)$, на якому виконано наступні три умови:

1) $f(a)\cdot f(b)<0$;
2) $f'(x)$ не змінює знак для $x\in[a;b]$;
3) $f''(x)$ не змінює знак для $x\in[a;b]$.

Третя умова означає, що графік функції або тільки опуклий, або тільки вигнутий на відрізку $[a;b]$.

Відрізок $[a;b]$ при виконанні умов 1)–3) для функції $y=f(x)$ називають *відрізком, що відокремлює корінь даного рівняння.*

Розглянемо всі можливі варіанти (рис. 2.2) зображення графіка функції на відрізку $[a;b]$, якщо виконуються умови 1)–3). При цьому для $x \in [a;b]$ похідна $f'(x) > 0$ на рисунках *а*) і *г)*, і $f'(x) < 0$ на рисунках *б)* і *в)*. Друга ж похідна $f''(x) > 0$ на рисунках *а*) і *б)* і $f''(x) < 0$ на рисунках *в)* і *г)* для всіх $x \in [a;b]$.

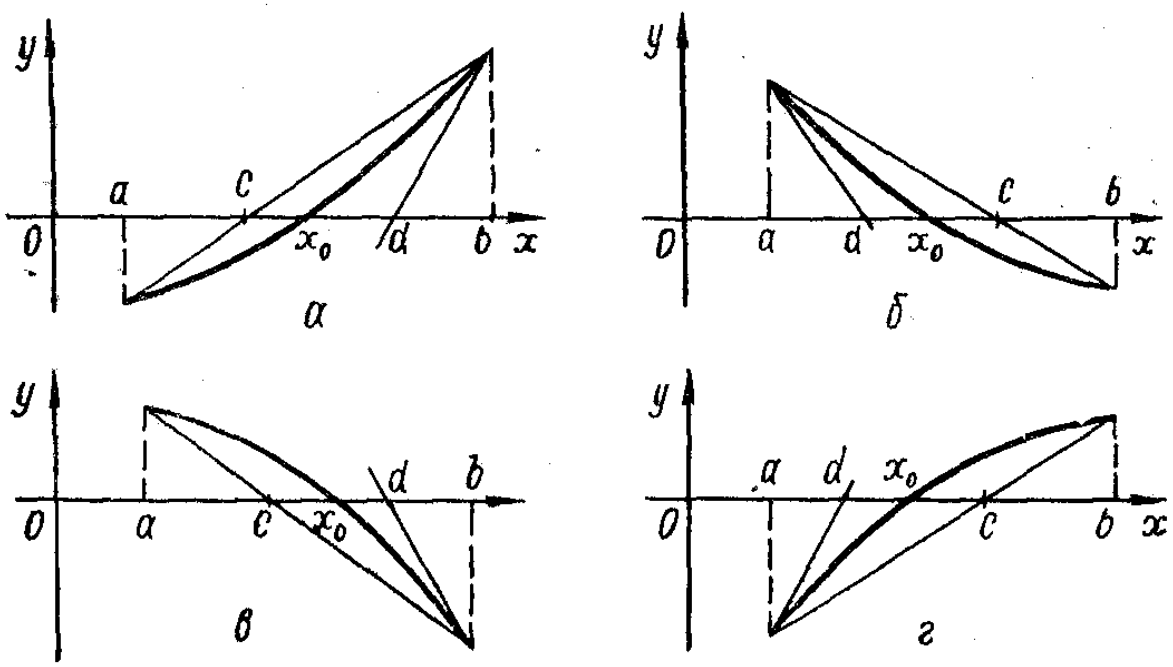


Рисунок 2.2 – Виконання умов відокремлення кореня рівняння

Відокремлення кореня можна робити як аналітично, так і графічно.

2.2.2. Графічний метод відокремлення коренів рівняння

Графічно корні рівняння $f(x) = 0$ можна відокремити, побудувавши графік функції $y = f(x)$ і приблизно визначивши точки його перетину з віссю Ox. Однак задача побудови графіка не завжди проста. Звичайне рівняння

$$f(x) = 0$$

заміняють еквівалентним рівнянням

$$\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = 0,$$

де $$f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x),$$

або $$\varphi_1(x) = \varphi_2(x),$$

добираючи функції $y = \varphi_1(x)$ і $y = \varphi_2(x)$ так, щоб будувати їх графіки було простіше, ніж графік функції $y = f(x)$. Абсциси точок перетину графіків $y = \varphi_1(x)$ і $y = \varphi_2(x)$ є коренями заданого рівняння (рис. 2.3).

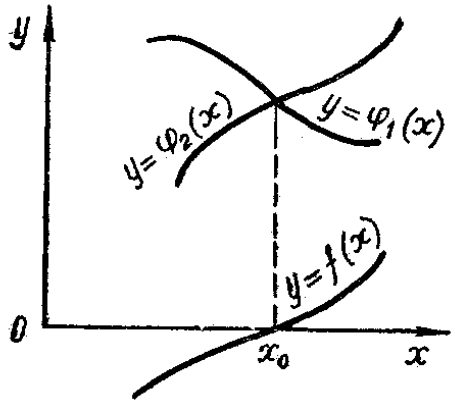


Рисунок 2.3 – Графічне відділення кореня

Приклад 1. Відокремити графічним методом коріння рівняння

$$e^{-x} - 2 + x^2 = 0.$$

Розв'язування. Запишемо дане рівняння у вигляді

$$e^{-x} = 2 - x^2$$

і розглянемо дві функції $y = e^{-x}$ й $y = 2 - x^2$. Побудуємо графіки цих функцій і визначимо абсциси точок їх перетину (рис. 2.4).

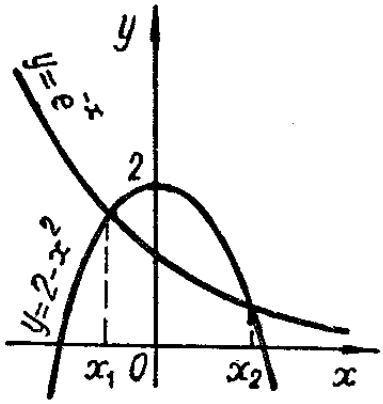


Рисунок 2.4 – Графічне відокремлення кореня рівняння $e^{-x} - 2 + x^2 = 0$

Як бачимо з рисунка 2.4, задане рівняння має два дійсних кореня (графіки перетинаються у двох точках), причому один з коренів від'ємний, а другий – додатний. Обидва кореня по абсолютному значенню не перевершують числа $\sqrt{2}$, а саме $-\sqrt{2} < x_1 < 0$ і $0 < x_2 < \sqrt{2}$.

2.2.3. Відокремлення коренів рівняння методом проб

Цей метод полягає в тому, що навмання обирають точку $x = a$ з області визначення функції (або з більш вузької області), знаходять знак $f(a)$, а потім добирають точку $x = b$ так, щоб значення функції $f(b)$ мало знак, протилежний знаку $f(a)$.

Далі визначають знак $f'(x)$ на відрізку $[a;b]$. Якщо $f'(x)$ не змінює знак на $[a;b]$, то корінь відокремлений, а якщо ні, то відрізок $[a;b]$ звужують, обравши точку $c=\frac{a+b}{2}$, що лежить посередині відрізка $[a;b]$. Визначають знак $f(c)$ і в якості нового відрізка розглядають або $[a;c]$ (якщо $f(a)\cdot f(c)<0$), або $[c;b]$ (якщо $f(c)\cdot f(b)<0$).

Позначивши новий відрізок через $[a_1;b_1]$, повторюють ті ж дії, що й на відрізку $[a;b]$, доки не буде знайдений відрізок $[a_n;b_n]$, що відокремлює корінь заданого рівняння.

Приклад 2. Методом проб відокремити додатний корінь рівняння

$$x^4+x^3-36x-20=0.$$

Розв'язування. Функція $f(x)=x^4+x^3-36x-20$ визначена на всій числовій прямій. Оскільки потрібно відокремити додатний корінь рівняння, розглянемо напівінтервал $[0;+\infty)$.

Знаходимо $f(0)=-20<0$. Потім обираємо будь-яку точку, наприклад $x=1$, і обчислюємо $f(1)=-54<0$. Тому що $f(0)\cdot f(1)>0$, то нічого про відрізок $[0;1]$ сказати не можна. Треба підібрати точку $x=b$ так, щоб було $f(b)>0$, а для цього x^4+x^3 повинне бути більше, ніж $36x+20$. Оберемо, наприклад, $x=4$, тоді $f(4)=156>0$, а отже, на відрізку $[1;4]$ є корінь, $f(1)\cdot f(4)<0$.

Оскільки $f'(x)=4x^3+3x^2-36=4(x^3-9)+3x^2$, то перевіркою переконуємося, що на відрізку $[1;4]$ похідна $f'(x)$ змінює знак, тому що $f'(1)=-29<0$ і $f'(4)=268>0$.

Звужуємо відрізок $[1;4]$. Оберемо, наприклад, точку $x=3$. Тоді $f(3)=-20<0$ і $f(3)\cdot f(4)<0$. Отже, на відрізку $[3;4]$ є корінь. Перевіряємо знак $f'(x)$. Маємо $f'(3)=99>0$, а для $x>3$ похідна зростає, тому залишається додатною. На відрізку $[3;4]$ знаходиться додатний дійсний корінь рівняння. Помітимо, що $f''(x)=12x^2+6x>0$ для всіх $x\in[3;4]$.

Функція $f(x)=x^4+x^3-36x-20$ на проміжку $x\in[3;4]$ задовольняє всім умовам відокремлення кореня.

2.2.4. Метод відокремлення інтервалів монотонності

Цей метод полягає в тому, що спочатку визначаємо інтервали монотонності функції $y=f(x)$ (якщо це не складно), тобто інтервали області визначення функції, у яких $f'(x)$ зберігає знак. Потім обчислюємо знаки $y=f(x)$ на кінцях цих інтервалів і визначаємо інтервал $[a;b]$, на якому $f'(x)$ зберігає знак і $f(a)\cdot f(b)<0$. Задача відокремлення кореня виконана. Таким способом можна відокремити всі дійсні корені рівняння $f(x)=0$.

Якщо ж серед інтервалів монотонності функції $y = f(x)$ не існує інтервалу, на кінцях якого функція має різні знаки, то це означає, що або рівняння $f(x) = 0$ не має дійсного кореня, або такими є границі інтервалів монотонності, тобто для цих точок $f'(x) = 0$ і $f(x) = 0$. Це вже так звані кратні корені.

Приклад 3. Відокремити дійсні корені рівняння

$$x - \sin x - 1 = 0.$$

Розв'язування. Розглянемо функцію $f(x) = x - \sin x - 1$, яка визначена на всій числовій прямій. Знаходимо першу похідну і інтервали монотонності функції. Одержуємо

$$f'(x) = 1 - \cos x,$$

звідки $$1 - \cos x = 0, \qquad \cos x = 1,$$

$$x = 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

тому інтервалами монотонності функції є всі інтервали виду $[2\pi n; 2\pi(n+1)]$.

Визначаємо знаки функції в граничних точках інтервалів монотонності. Обравши відрізок $[0; 2\pi]$, знаходимо

$$f(0) = -1 < 0, \qquad f(2\pi) = 2\pi - 1 > 0.$$

і переконуємося, що на цьому відрізку є один корінь рівняння. За видом функції робимо висновок, що для $x > 2\pi$ буде $f(x) > 0$ (тому що $\sin x \le 1$ і $x > \sin x + 1$), а для $x < 0$ буде $f(x) < 0$ (тому що $\sin x \ge -1$ і $\sin x > -1 + x$). Отже, в інших інтервалах монотонності функція $y = f(x)$ знака не змінює. Рівняння має єдиний корінь, який знаходиться на відрізку $[0; 2\pi]$.

Враховуючи третю умову, знаходимо другу похідну $f''(x) = \sin x$, яка на відрізку $[0; 2\pi]$ змінює знак. Тому відрізком, що відокремлює корінь, буде $[0; \pi]$, оскільки

1) $f(0) = -1 < 0$, $f(\pi) = \pi - 1 > 0$, $f(0) \cdot f(\pi) < 0$;
2) $f'(x)$ не змінює знака на $[0; \pi]$;
3) $f''(x)$ не змінює знака на $[0; \pi]$.

Функція $f(x) = x - \sin x - 1$ на проміжку $x \in [0; \pi]$ задовольняє всім умовам відокремлення кореня.

2.3. Методи послідовного наближення до кореня рівняння

Існують різні методи послідовних наближень при знаходженні дійсного кореня рівняння на проміжку, на якому виконані умови відділення кореня.

2.3.1. Метод половинного розподілу

Метод половинного розподілу називають ще методом розподілу відрізка навпіл або методом дихотомії. Метод досить простий, тому що не вимагає виконання обмежуючих умов для першої і другої похідних, але його реалізація пов'язана із тривалими обчисленнями (більшим числом ітерацій).

Нехай відомо, що на відрізку $[a;b]$ знаходиться один дійсний корінь рівняння $f(x)=0$, тому $f(a)\cdot f(b)<0$. Треба визначити цей корінь із заданою точністю ε.

Суть методу полягає в тому, що відрізок $[a;b]$ ділимо навпіл точкою $x_1=\dfrac{a+b}{2}$ (перше наближення) і розглядаємо той з відрізків $[a;x_1]$ або $[x_1;b]$, який містить потрібний корінь. Для цього перевіряємо умову $f(a)\cdot f(x_1)<0$, якщо умова виконується, то обираємо відрізок $[a;x_1]$, якщо ні – $[x_1;b]$.

Позначивши цей відрізок через $[a_1;b_1]$, де $|b_1-a_1|=\dfrac{1}{2}|b-a|$, визначаємо точку $x_2=\dfrac{a_1+b_1}{2}$ (друге наближення) і розглядаємо відрізок $[a_1;x_2]$ або $[x_2;b_1]$, що містить потрібний корінь, тобто $[a_2;b_2]$, де $|b_2-a_2|=\dfrac{1}{2^2}|b-a|$, і т.д. доки не одержимо відрізок $[a_n;b_n]$, що містить потрібний корінь x^*, для якого

$$|b_n-a_n|=\frac{1}{2^n}|b-a|<\varepsilon .$$

Точку $x_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}=\bar{x}$ беремо за наближене значення кореня x^*, при цьому виконується нерівність $|x^*-\bar{x}|<\varepsilon$.

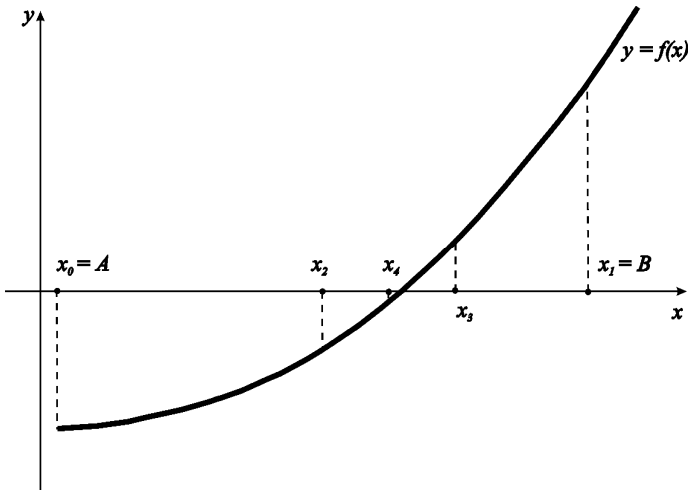


Рисунок 2.5 – Графічна ілюстрація методу половинного розподілу

Алгоритм. Нехай відомий відрізок $[a;b]$, для якого $f(a)\cdot f(b)<0$, і рівняння $f(x)=0$ має на цьому відрізку тільки один корінь (виконання умов 2), 3) відділення кореня для цього методу не обов'язково), задана точність наближення до кореня $\varepsilon>0$.

1. Позначимо $a_0=a$, $b_0=b$, $k=0$.

2. Нехай визначений відрізок $[a_k; b_k]$. Знаходимо $x_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}$. Обчислюємо $f(x_{k+1})$.

3. Якщо $f(x_{k+1}) = 0$, то $\bar{x} = x_{k+1}$ – корінь заданого рівняння. А якщо ні, то визначаємо знак добутку $f(a_k) \cdot f(x_{k+1})$.

4. Якщо $f(a_k) \cdot f(x_{k+1}) < 0$, то позначаємо $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_{k+1}$ і переходимо до дії 6.

5. Якщо $f(a_k) \cdot f(x_{k+1}) > 0$, то позначаємо $a_{k+1} = x_{k+1}$, $b_{k+1} = b_k$ і переходимо до дії 6.

6. Якщо $| b_{k+1} - a_{k+1} | < \varepsilon$, то $\bar{x} = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$ – наближений корінь заданого рівняння, а якщо ні, то вважаємо $k = k + 1$ і переходимо до дії 2.

2.3.2. Метод простих ітерацій

Розглянемо рівняння

$$f(x) = 0.$$

Нехай відомо, що на відрізку $[a; b]$ знаходиться один корінь рівняння x^*, тобто $f(x^*) = 0$, і на цьому відрізку виконуються всі умови відокремлення кореня. Потрібно визначити цей корінь із заданою точністю ε.

Замість заданого рівняння розглянемо еквівалентне рівняння

$$x = \varphi(x),$$

яке виходить із заданого наступними перетвореннями

$$\lambda \cdot f(x) = 0, \qquad \text{де} \qquad \lambda = const, \quad \lambda \neq 0,$$

$$x = x + \lambda \cdot f(x),$$

тоді

$$\varphi(x) = x + \lambda \cdot f(x).$$

Отримане еквівалентне рівняння $x = \varphi(x)$ має той же корінь $x^* \in [a; b]$, тобто виконується рівність $x^* = \varphi(x^*)$, а $[a; b]$ – відрізок, що відокремлює корінь і цього рівняння.

Обираємо довільну точку $x_0 \in [a; b]$ і першим наближенням до розв'язку назвемо число x_1, де $x_1 = \varphi(x_0)$, по першому наближенню будуємо друге $x_2 = \varphi(x_1)$ і т.д.

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

У такий спосіб будується послідовність наближень

$$x_0, x_1, ..., x_n, ...$$

Якщо отримана послідовність збігається та

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x^*,$$

то за скінченне число ітерацій буде отримано x_n, що є наближеним значенням кореня із заданою точністю ε, тобто $| x_n - x^* | < \varepsilon$.

З'ясуємо геометричний зміст процесу і його збіжності (рис. 2.6).

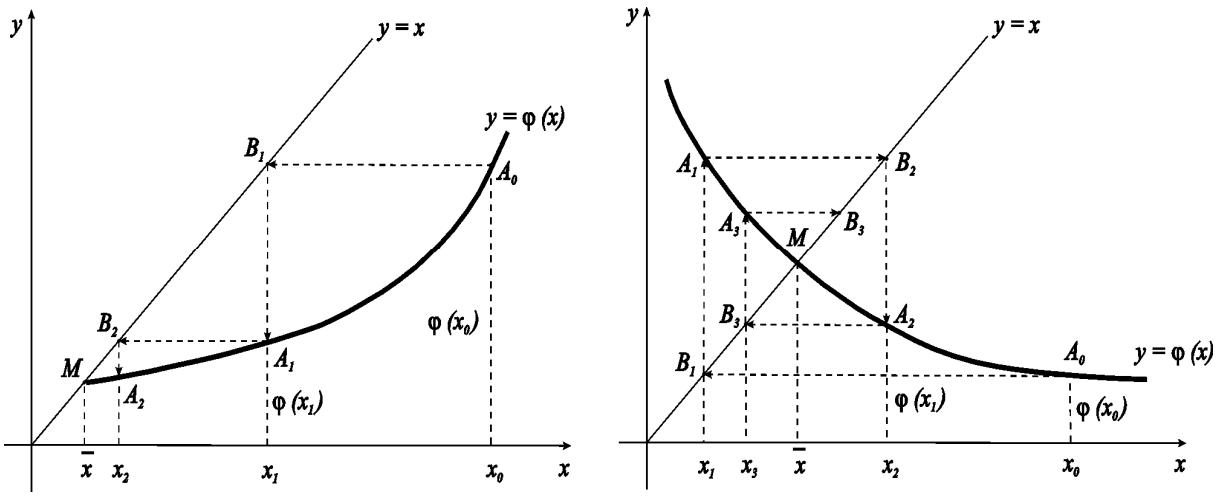


Рисунок 2.6 – Геометрична ілюстрація методу простих ітерацій

Корінь рівняння $x = \varphi(x)$ – це абсциса x^* точки перетину прямої $y = x$ і графіка функції $y = \varphi(x)$. Точка x_0 – довільна точка проміжку $[a; b]$, x_1 – абсциса точки B_1 – точки перетину прямих $y = x$ і $y = \varphi(x_0)$. З x_1 визначаємо x_2 – абсцису точки B_2 – точки перетину прямих $y = x$ і $y = \varphi(x_1)$ і т.д. На рисунках показана послідовність $x_0, x_1, ..., x_n, ...$, яка прямує до кореня рівняння.

Встановимо умови збіжності методу. Оскільки x^* – точне значення кореня рівняння, то $x^* = \varphi(x^*)$, а послідовність будується за формулами $x_n = \varphi(x_{n-1})$, тоді

$$\left| x_n - x^* \right| = \left| \varphi(x_{n-1}) - \varphi(x^*) \right| = \left|\varphi'(\xi)\right| \cdot \left| x_{n-1} - x^* \right| \le M \cdot \left| x_{n-1} - x^* \right|,$$

де $\xi \in \left[x_{n-1}; x^* \right]$, а $\left| \varphi'(\xi) \right| \le M$.

Послідовно застосовуючи отримане співвідношення, приходимо до нерівності

$$\left| x_n - x^* \right| \le M \cdot \left| x_{n-1} - x^* \right| \le M^2 \cdot \left| x_{n-2} - x^* \right| \le ... \le M^n \cdot \left| x_0 - x^* \right|,$$

яка задовольняє співвідношенню

$$\lim_{n \to \infty} \left| x_n - x^* \right| = Const \cdot \lim_{n \to \infty} M^n = 0$$

за умови, що $\left| \varphi'(\xi) \right| \le M < 1$. У цьому випадку отримаємо, що побудована послідовність $x_0, x_1, ..., x_n, ...$ прямує до розв'язку рівняння x^*.

Умову збіжності методу можна виконати за рахунок вибору значення параметру λ, що входить у вираз для функції $\varphi(x) = x + \lambda \cdot f(x)$. Одержуємо

$$\left|\varphi'(x)\right| < 1 \quad \text{для всіх} \quad x \in [a; b] \quad \text{або}$$

$$\left| 1 + \lambda \cdot f'(x) \right| < 1 \quad \text{для всіх} \quad x \in [a; b],$$

$$-1 < 1 + \lambda \cdot f'(x) < 1 \quad \text{або} \quad -2 < \lambda \cdot f'(x) < 0.$$

При $f'(x)>0$ обираємо λ з умови $-\dfrac{2}{f'(x)}<\lambda<0$.

При $f'(x)<0$ обираємо λ з умови $0<\lambda<-\dfrac{2}{f'(x)}$.

Якщо функція $y=f(x)$ має на $[a;b]$ обмежену похідну $|f'(x)|\le C$, то при $f'(x)>0$ обираємо $-\dfrac{2}{C}<\lambda<0$, при $f'(x)<0$ обираємо $0<\lambda<\dfrac{2}{C}$. При цьому виконуються умови збіжності методу простої ітерації.

Алгоритм. Нехай на відрізку $[a;b]$ відокремлено корінь рівняння $f(x)=0$ і задана точність обчислень $\varepsilon>0$.

1. Замінюємо рівняння $f(x)=0$ на еквівалентне $x=x+\lambda\cdot f(x)$ і обираємо λ так, щоб була виконана умова $|1+\lambda\cdot f'(x)|<1$. Обираємо $x_0\in[a;b]$.
2. Нехай визначене $(n-1)$-ше наближення x_{n-1}. Обчислюємо
$$x_n=x_{n-1}+\lambda\cdot f(x_{n-1})$$
3. Якщо $|x_n-x_{n-1}|<\varepsilon$, то корінь рівняння знайдений $x^*=x_n$. Якщо ж $|x_n-x_{n-1}|\ge\varepsilon$, то вважаємо $n=n+1$ і переходимо до шагу 2.

Приклад 4. Рівняння $2\ln x-\dfrac{1}{x}=0$ перетворити до вигляду, що допускає застосування методу ітерацій. Відомо, що корінь знаходиться на відрізку [1; 2].

Розв'язування. Перетворимо рівняння до вигляду
$$x=x+\lambda\cdot\left(2\ln x-\frac{1}{x}\right).$$

Тоді $\varphi(x)=x+\lambda\cdot\left(2\ln x-\dfrac{1}{x}\right)$. Оберемо λ так, щоб $|\varphi'(x)|<1$ для всіх $x\in[1;2]$. Маємо $\varphi'(x)=1+\lambda\cdot\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$. Звідси $\left|1+\lambda\cdot\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)\right|<1$. Розв’язуючи цю нерівність, одержуємо
$$-1<1+\lambda\cdot\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)<1,\qquad -2<\lambda\cdot\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)<0.$$

Функція $2<\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\le 3$ обмежена при $x\in[1;2]$, то $-2<3\lambda<0$, $-\dfrac{2}{3}<\lambda<0$. Нехай $\lambda=-\dfrac{1}{3}$, тоді будуємо збіжну до розв'язку послідовність
$$x_n=x_{n-1}-\frac{1}{3}\cdot\left(2\ln x_{n-1}-\frac{1}{x_{n-1}}\right)$$
доки не виконається нерівність $|x_n-x_{n-1}|<\varepsilon$.

2.3.3. Метод хорд

Розглянемо рівняння

$$f(x)=0.$$

Нехай відомо, що на відрізку $[a;b]$ знаходиться єдиний корінь рівняння x^*, тобто $f(x^*)=0$, і на цьому відрізку виконуються всі умови відокремлення кореня. Потрібно визначити цей корінь із заданою точністю ε.

Ідея методу полягає в тому, що на відрізку $[a;b]$ будується хорда *AB*, що стягує кінці дуги графіка функції $y=f(x)$, і в якості наближеного значення кореня x^* обирається число x, що є абсцисою точки перетину цієї хорди з віссю *Ox* (рис. 2.7).

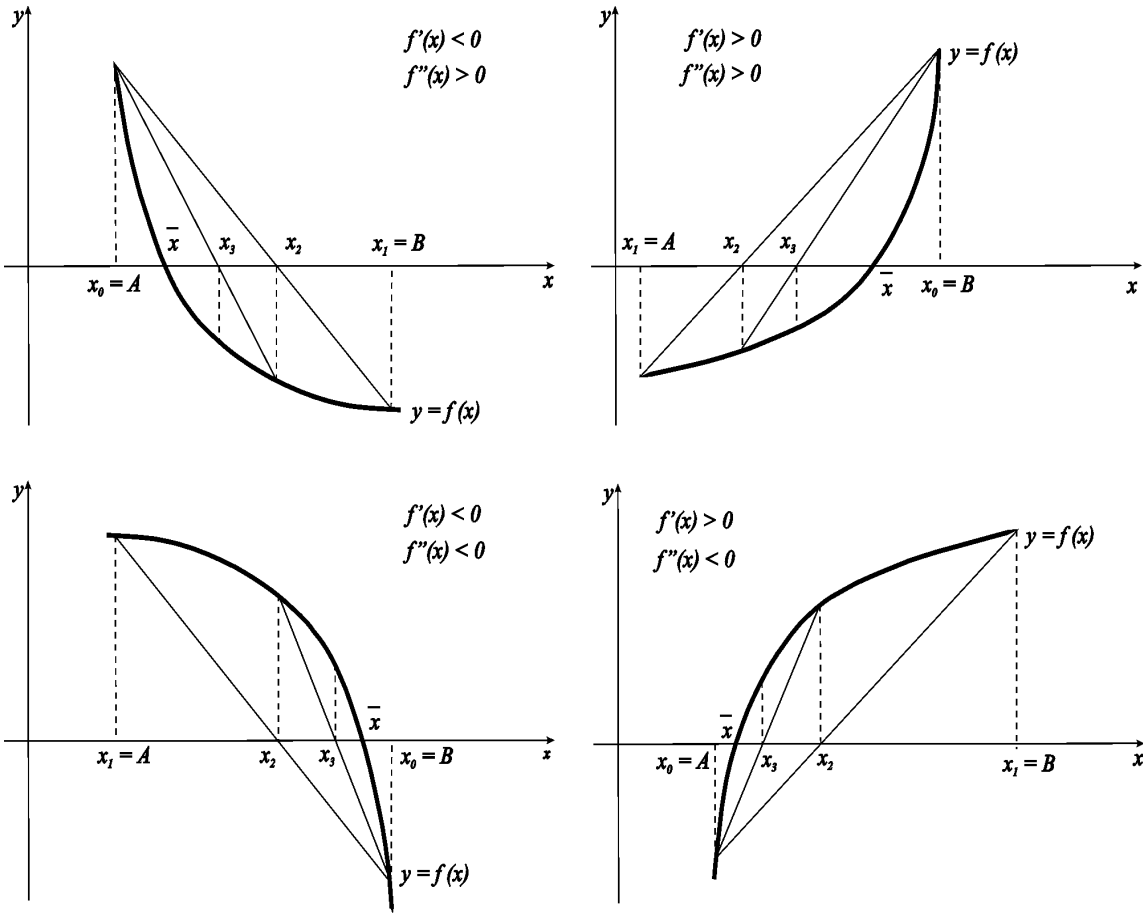


Рисунок 2.7 – Графічна ілюстрація методу хорд

Проаналізуємо різні варіанти поведінки функції на проміжку $[a;b]$ залежно від знаків похідних $f'(x)$ і $f''(x)$.

На рисунку бачимо, що для побудови послідовності точок перетину хорд із віссю абсцис, що прямує до розв'язку рівняння, треба, щоб одна із точок заданого проміжку залишалася нерухливою. У випадку, коли $f'(x)$ й $f''(x)$ мають протилежні знаки (тобто $f'(x)\cdot f''(x)<0$), нерухливою буде точка *A*, зафіксуємо її абсцису як початкову $x_0=a$, тоді абсцису другої точки *B* позначимо як $x_1=b$. Якщо ж $f'(x)$ і $f''(x)$ мають однакові знаки (тобто

$f'(x)\cdot f''(x)>0$), то нерухливою залишається точка *B*, зафіксуємо її абсцису як початкову $x_0=b$, тоді $x_1=a$.

Отримані дві точки з координатами $(x_0, f(x_0))$ й $(x_1, f(x_1))$ з'єднаємо хордою й знайдемо точку перетину хорди з віссю *Ox*. Для цього складемо рівняння прямої, що проходить через ці дві точки

$$\frac{x-x_1}{x_0-x_1}=\frac{y-f(x_1)}{f(x_0)-f(x_1)}.$$

Поклавши $y=0, x=x_2$, одержимо абсцису точки перетину першої хорди з віссю *Ox*

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f(x_1)-f(x_0)}\cdot(x_1-x_0).$$

Далі через точки з координатами $(x_0, f(x_0))$ і $(x_2, f(x_2))$ знову проводимо хорду і знаходимо точку її перетину з віссю абсцис і т.д.

У результаті одержимо ітераційну формулу для побудови послідовності x_n, що прямує до розв'язку рівняння

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f(x_n)-f(x_0)}\cdot(x_n-x_0).$$

Процес припиняємо тоді, коли оцінка отриманого наближення задовольняє заданої точності. Для спрощення обчислень задають деяке досить мале число $\varepsilon>0$. Процес припиняють тоді, коли абсолютна величина різниці між двома послідовними наближеннями задовольняє нерівності:

$$|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon.$$

Значення x_{n+1} вважають за наближене значення кореня, тобто $x^*=x_{n+1}$.

Переконаємося, що побудована послідовність $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ прямує до розв'язку заданого рівняння. Дійсно, послідовність є монотонною й обмеженою, тому що при $f'(x)\cdot f''(x)<0$ маємо $x_1>x_2>...>x_n>...>x^*$, а при $f'(x)\cdot f''(x)>0$ маємо $x_1<x_2<...<x_n<...<x^*$, отже, послідовність прямує до деякого граничного значення

$$\lim_{n\to\infty} x_n=c.$$

Визначимо числове значення границі послідовності, для цього визначимо граничні значення в ітераційній формулі:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f(x_n)-f(x_0)}\cdot(x_n-x_0), \qquad n\to\infty,$$

$$c=c-\frac{f(c)}{f(c)-f(x_0)}\cdot(c-x_0),$$

$$\frac{f(c)}{f(c)-f(x_0)}\cdot(c-x_0)=0,$$

звідки випливає, що $f(c)=0$, тому що $c\neq x_0$, $f(c)\neq f(x_0)$, а це означає, що c – корінь рівняння.

Довели, що

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*,$$

а це означає, що за скінченне число ітерацій буде отримано x_n, що представляє наближене значення кореня із заданою точністю ε

$$\left| x_n - x^* \right| < \varepsilon .$$

Алгоритм. Нехай на відрізку $[a;b]$ відділений корінь рівняння $f(x)=0$ та задана точність обчислень $\varepsilon > 0$.

1. Визначаємо знак добутку $f'(x)\cdot f''(x)$ для деякого $x\in[a;b]$. Якщо $f'(x)\cdot f''(x)<0$, то позначаємо $x_0 = a$, $x_1 = b$. А якщо ні, то при $f'(x)\cdot f''(x)>0$, позначаємо $x_0 = b$, $x_1 = a$. Знаходимо $f(x_0)$, а x_1 будемо вважати першим наближенням до розв'язку.
2. Нехай визначене x_n, тобто n-е наближення до розв'язку. Обчислюємо $f(x_n)$, а потім $(n+1)$-е наближення за формулою
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n)-f(x_0)}\cdot(x_n - x_0).$$
3. Обчислюємо $|x_{n+1} - x_n|$. Якщо $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, то процес припиняємо й вважаємо $x^* = x_{n+1}$. А якщо ні, то, при $|x_{n+1} - x_n| \ge \varepsilon$, повторюємо дії 2, 3, замінивши x_{n+1} на x_n.

Приклад 5. Використовуючи метод хорд, уточнити корінь рівняння $x^4 + x^3 - 36x - 20 = 0$, який відокремлено на відрізку [3; 4].

Розв'язування. Згідно з умовою, маємо $f(x) = x^4 + x^3 - 36x - 20$, $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 36$, $f''(x) = 12x^2 + 6x$.

Уточнення кореня будемо проводити за описаним алгоритмом.

1. Для $x\in[3,4]$ маємо $f'(x)>0$, $f''(x)>0$, тому $f'(x)\cdot f''(x)>0$, отже, позначаємо $x_0 = 4$, $x_1 = 3$.

   Знаходимо $f(x_0) = f(4) = 4^4 + 4^3 - 36\cdot 4 - 20 = 156$, а $x_1 = 3$ вважаємо першим наближенням до розв'язку.
2. Скористаємося формулою $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f(x_n)-f(x_0)}\cdot(x_n - x_0)$ для знаходження наступних наближень.

   2а. Знайдемо друге наближення x_2 до розв'язку при $n=1$. Обчислимо $f(x_1) = 3^4 + 3^3 - 36\cdot 3 - 20 = -20$, а потім
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1)-f(x_0)}\cdot(x_1 - x_0) = 3 - \frac{-20}{-20-156}\cdot(3-4) = 3{,}1136.$$

   2б. Знайдемо третє наближення x_3 до розв'язку при $n=2$.
$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2)-f(x_0)}\cdot(x_2 - x_0) = 3{,}1564.$$

2в. Знайдемо четверте наближення x_4 до розв'язку при $n = 3$.

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f(x_3) - f(x_0)} \cdot (x_3 - x_0) = 3{,}1719 .$$

Отже, корінь знаходиться на відрізку [3,1719; 4].

2.3.4. Метод дотичних (метод Ньютона)

Розглянемо рівняння

$$f(x) = 0 .$$

Нехай відомо, що на відрізку $[a; b]$ знаходиться єдиний корінь рівняння x^*, тобто $f(x^*) = 0$, і на цьому відрізку виконуються всі умови відокремлення кореня. Потрібно визначити цей корінь із заданою точністю ε.

Ідея методу полягає в тому, що в одному з кінців дуги *AB* графіка функції $y = f(x)$ проводиться дотична до цієї дуги і у якості наближеного значення кореня x^* обирається число x – абсциса точки перетину цієї дотичної з віссю *Ox* (рис. 2.8).

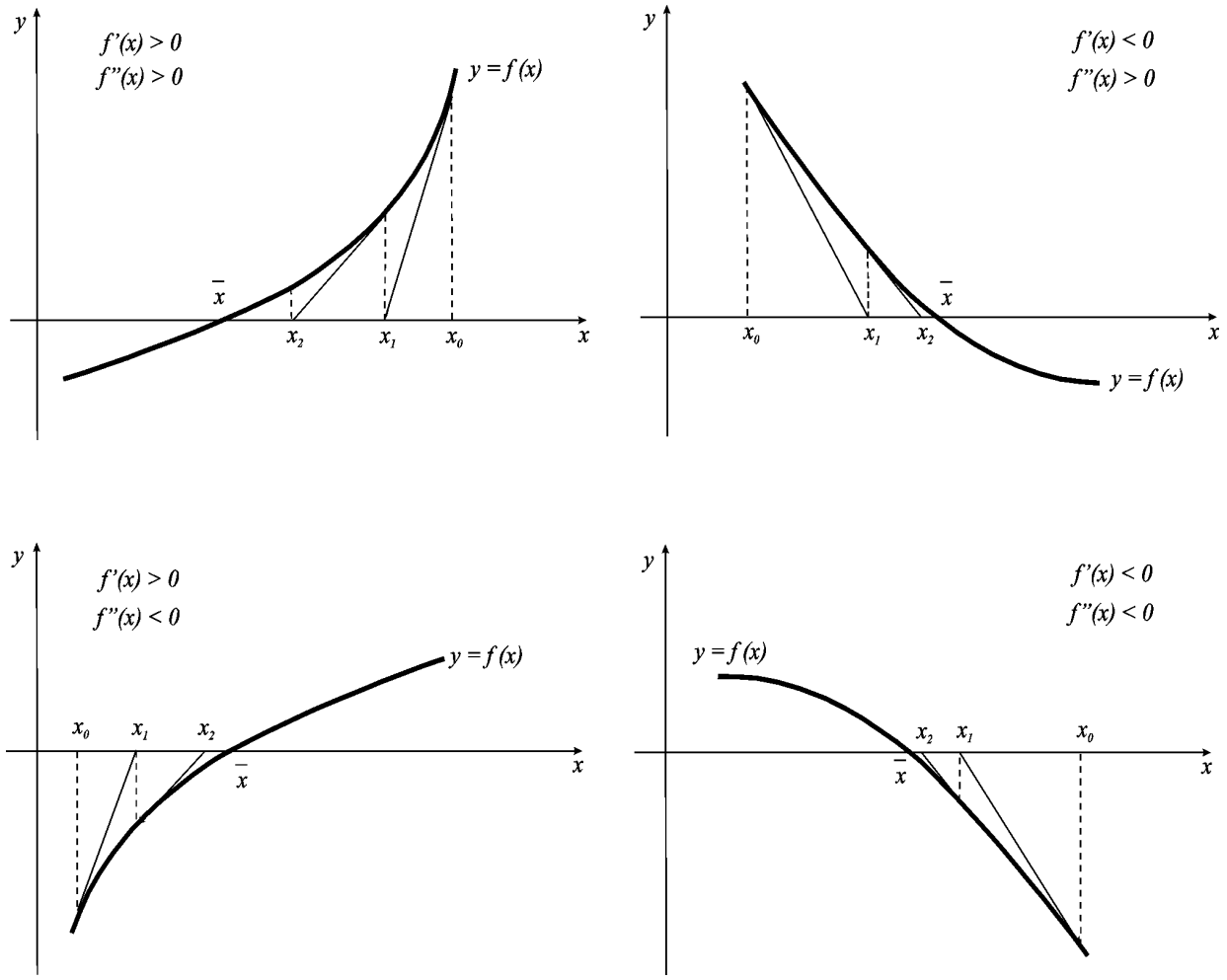


Рисунок 2.8 – Графічна ілюстрація методу дотичних

Проаналізуємо різні варіанти поведінки функції на проміжку $[a;b]$ залежно від знаків похідних $f'(x)$ і $f''(x)$ на цьому проміжку, і визначимо, яку із граничних точок проміжку $[a;b]$ треба обрати в якості початкової для побудови дотичної до графіка функції. Початкова точка обирається так, щоб абсциса точки перетину дотичної з віссю *Ox* належала проміжку $[a;b]$.

З рисунку бачимо, що для отримання послідовності точок перетину дотичних з віссю абсцис, що прямує до розв'язку рівняння, треба в якості початкової точки обрати точку $x_0 = a$, якщо $f'(x)$ й $f''(x)$ мають протилежні знаки (тобто $f'(x)\cdot f''(x) < 0$), або точку $x_0 = b$, якщо $f'(x)$ й $f''(x)$ мають однакові знаки (тобто $f'(x)\cdot f''(x) > 0$).

У точці $(x_0, f(x_0))$ записуємо рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

Поклавши $y = 0$, $x = x_1$, визначаємо абсцису точки перетину дотичної з віссю *Ox:*

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Бачимо, що точка $(x_1, 0)$ знаходитися з боку опуклості кривої. Далі через точку $(x_1, f(x_1))$ проводимо наступну дотичну й знаходимо точку її перетину з віссю абсцис і т.д.

У результаті одержимо ітераційну формулу для побудови послідовності x_n, що наближається до розв'язку рівняння

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Процес припиняємо тоді, коли оцінка отриманого наближення задовольняє заданої точності. Для спрощення обчислень звичайно задають деяке досить мале число $\varepsilon > 0$. Процес припиняють тоді, коли абсолютна величина різниці між двома наступними наближеннями задовольняє нерівності:

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon.$$

Знайдене значення x_{n+1} вважають за наближене значення кореня, тобто

$$x^* = x_{n+1}.$$

Покажемо, що послідовність $x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...$ збіжна й має своєю границею значення кореня x^*. Відзначимо, що при $f'(x)\cdot f''(x) < 0$ маємо послідовність $x_0 < x_1 < ... < x_n < ... < x^*$, а при $f'(x)\cdot f''(x) > 0$ маємо $x_0 > x_1 > ... > x_n > ... > x^*$. При цьому послідовність $x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...$ монотонна та обмежена. Отже, існує

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c.$$

Перейдемо до границі в ітераційній формулі

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n \to \infty,$$

$$c = c - \frac{f(c)}{f'(c)}, \qquad \text{тобто} \qquad \frac{f(c)}{f'(c)} = 0,$$

звідки випливає, що $f(c) = 0$, а це означає, що c – корінь рівняння. Отримали

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*,$$

а це означає, що за скінченне число ітерацій буде отримано x_n, що представляє наближене значення кореня із заданою точністю ε

$$\left| x_n - x^* \right| < \varepsilon.$$

Алгоритм. Нехай відомо відрізок $[a;b]$, що відокремлює корінь рівняння $f(x) = 0$, і задана точність обчислень $\varepsilon > 0$.

1. Визначаємо знак добутку $f'(x) \cdot f''(x)$ для деякого $x \in [a;b]$. Якщо $f'(x) \cdot f''(x) < 0$, то визначаємо $x_0 = a$, якщо ж $f'(x) \cdot f''(x) > 0$, то визначаємо $x_0 = b$. Значення x_0 будемо вважати нульовим наближенням до розв'язку.

2. Нехай визначене x_n, тобто n-е наближення. Обчислюємо $f(x_n)$ й $f'(x_n)$, а потім $(n+1)$-ше наближення за формулою

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

3. Обчислюємо $|x_{n+1} - x_n|$. Якщо $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, то процес припиняємо й вважаємо $x^* = x_{n+1}$. А якщо ні, то, при $|x_{n+1} - x_n| \geq \varepsilon$, повторюємо дії 2, 3, замінивши x_{n+1} на x_n.

Приклад 6. Користуючись методом дотичних, уточнити корінь рівняння $x^4 + x^3 - 36x - 20 = 0$, який відокремлено на відрізку [3; 4].

Розв'язування. Згідно з умовою, маємо $f(x) = x^4 + x^3 - 36x - 20$, $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 36$, $f''(x) = 12x^2 + 6x$. Уточнення кореня будемо проводити за описаним алгоритмом.

1. Для $x \in [3,4]$ буде $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, тому $f'(x) \cdot f''(x) > 0$, то вважаємо $x_0 = b = 4$.

2. Скористаємося формулою

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

для знаходження наступних наближень.

2а. Маємо нульове наближення x_0. Обчислюємо послідовно $f(x_0) = 4^4 + 4^3 - 36 \cdot 4 - 20 = 156$, $\quad f'(x_0) = 4 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 - 36 = 268$.

Визначаємо перше наближення за формулою

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 4 - \frac{156}{268} = 3{,}4179.$$

2б. Визначаємо друге наближення за формулою

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 3{,}2078.$$

2в. Аналогічно знаходимо третє наближення

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 3{,}1809$$

3. Обчислюємо $|x_3 - x_2| = |3{,}1809 - 3{,}2078| = 0{,}0269 \approx 0{,}03$. Третє наближення $x_3 = 3{,}1809$ є наближеним значенням кореня з точністю $\varepsilon \approx 0{,}03$.

2.3.5. Комбінований метод

Ідея методу полягає в об'єднанні методу хорд і методу дотичних. З описів цих методів і відповідних рисунків бачимо, що наближення $\hat{x}_n$, що обчислюються за методом хорд, прямує до кореня x^* з боку вогнутості кривої, а наближення $\bar{x}_n$, що обчислюються за методом дотичних, – з боку опуклості кривої. При цьому для будь-якого наближення маємо

$$\hat{x}_n < x^* < \bar{x}_n \text{ при } f'(x)\cdot f''(x) > 0,$$

$$\bar{x}_n < x^* < \hat{x}_n \text{ при } f'(x)\cdot f''(x) < 0.$$

Отже, комбінуючи ці два методи і визначаючи числа $\hat{x}_n$ й $\bar{x}_n$, послідовно на кожному кроці звужуємо із двох сторін відрізок, усередині якого знаходиться корінь x^*. Процес припиняємо тоді, коли $|\hat{x}_n - \bar{x}_n| < \varepsilon$, де ε – задана точність наближення.

За наближене значення кореня беремо точку, що належить середині відрізка, тобто

$$\tilde{x} = \frac{\hat{x}_n + \bar{x}_n}{2},$$

так що $|x^* - \tilde{x}| \le |\hat{x}_n - \bar{x}_n| < \varepsilon$.

Алгоритм. Нехай на відрізку $[a;b]$ відокремлено корінь рівняння $f(x) = 0$ і задана точність обчислень $\varepsilon > 0$.

Визначаємо знак добутку $f'(x)\cdot f''(x)$ для деякого $x \in [a;b]$. Якщо $f'(x)\cdot f''(x) < 0$, то позначаємо $\hat{x}_0 = b$, $\bar{x}_0 = a$. А при $f'(x)\cdot f''(x) > 0$, позначаємо $\hat{x}_0 = a$, $\bar{x}_0 = b$.

Нехай відомими є $\hat{x}_n$ й $\bar{x}_n$, що визначають n-е наближення до розв'язку і задають кінці відрізка, що відокремлює корінь рівняння. Визначимо $(n+1)$-ий відрізок за формулами

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{x}_n - \frac{f(\hat{x}_n)}{f(\hat{x}_n) - f(\bar{x}_m)}\cdot(\hat{x}_n - \bar{x}_m), \qquad \bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)}.$$

Оцінюємо різницю $\left|\hat{x}_{n+1} - \overline{x}_{n+1}\right|$. Якщо $\left|\hat{x}_{n+1} - \overline{x}_{n+1}\right| < \varepsilon$, то процес припиняємо і знаходимо $\tilde{x} = \dfrac{\hat{x}_{n+1} + \overline{x}_{n+1}}{2}$; якщо ж $\left|\hat{x}_{n+1} - \overline{x}_{n+1}\right| \geq \varepsilon$, то повторюємо дії 2, 3, вважаючи значення $\hat{x}_{n+1}$ й $\overline{x}_{n+1}$ відомими кінцями наступного відрізка, що відокремлює корінь рівняння.

Зауваження. Виконуючи обчислення з наближеними числами, можна пропустити корінь через округлення наближень. Тому ліві кінці відрізків слід округляти з недоліком, а праві – з надлишком. Контролем на кожному кроці обчислень може служити те, що знаки $f\left(\hat{x}_0\right)$ й $f\left(\overline{x}_0\right)$ повинні бути відповідними до знаків $f\left(\hat{x}_{n+1}\right)$ й $f\left(\overline{x}_{n+1}\right)$.

3. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

3.1. Поняття про систему лінійних алгебраїчних рівнянь

Система n лінійних рівнянь з n невідомими має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ..... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

числа $a_{11}, a_{12}, ..., a_{nn}$ – називають коефіцієнтами при невідомих, $x_1, x_2, x_3,..., x_n$ – невідомими, а $b_1, b_2, ... , b_n$ – вільними членами системи.

Система може бути записана скорочено

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (j = 1,2,...,n).$$

Розв'язком системи називається будь-яка сукупність чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,..., \alpha_n$, така, що при її підстановці замість $x_1, x_2, x_3, x_4,..., x_n$ в рівняння цієї системи вони перетворюються в тотожності.

Система лінійних рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має розв'язок, а якщо немає розв'язку – *несумісною* або *суперечливою*.

Сумісна система, що має один розв'язок, називається *визначеною*, а якщо декілька розв'язків – *невизначеною*.

В матричному виді систему можна записати так

$$AX=B,$$

користуючись матричними позначеннями

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ..... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ ... \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Для розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь традиційно використовують дві групи чисельних методів:

- *точні* – методи, які дозволяють отримати точний розв'язок системи за відповідну кількість операцій перетворення без урахування похибок заокруглення (метод Гауса, метод Гауса з вибором головного елементу та інші модифікації методу Гауса, метод Крамера);
- *наближені* – методи, які дозволяють отримати розв'язок системи у вигляді послідовності векторів, яка збігається до точного розв'язку системи (метод послідовних ітерацій, метод Гауса-Зейделя, метод векторів зміщень).

3.2. Точні методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

3.2.1. Метод Гауса послідовного виключення невідомих

Розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь точними методами засновано на елементарних перетвореннях, до яких відносяться:

- множення обох частин рівняння на будь-яке ненульове число;
- перестановка рівнянь системи місцями;
- додавання до обох частин одного рівняння відповідних частин іншого рівняння, помноженого на будь-яке ненульове число.

Нехай задана система лінійних алгебраїчних рівнянь третього порядку

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24}, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34}. \end{cases}$$

Метод Гауса послідовного виключення невідомих складається з двох етапів.

Перший етап – *прямий хід*, тобто зведення системи за допомогою елементарних перетворень до трикутного виду. При цьому в кожному рівнянні, крім першого виключається змінна так, що останнє рівняння містить лише одну змінну.

Другий етап – *зворотний хід*, тобто знаходження значень змінних, починаючи з останньої.

Розглянемо *прямий хід* методу Гауса. Нехай k – номер перетворення, який визначає номер провідного рівняння та провідної змінної.

Нехай k=1 – виконуємо перше перетворення при умові $a_{кк} \neq 0$.

Розділимо провідне рівняння на провідний коефіцієнт a_{11}

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{a_{14}}{a_{11}}.$$

Розв'яжемо рівняння відносно провідної змінної x_1

$$x_1 = \frac{a_{14}}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3$$

і підставимо його в усі рівняння нижче провідного

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{a_{14}}{a_{11}}, \\ a_{21}(\frac{a_{14}}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3) + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24}, \\ a_{31}(\frac{a_{14}}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3) + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34}. \end{cases}$$

Виконаємо перетворення в системі

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3 = \dfrac{a_{14}}{a_{11}}, \\ (a_{22} - \dfrac{a_{21} \cdot a_{12}}{a_{11}}) x_2 + (a_{23} - \dfrac{a_{21} \cdot a_{13}}{a_{11}}) x_3 = (a_{24} - \dfrac{a_{21} \cdot a_{14}}{a_{11}}), \\ (a_{32} - \dfrac{a_{31} \cdot a_{12}}{a_{11}}) x_2 + (a_{33} - \dfrac{a_{31} \cdot a_{13}}{a_{11}}) x_3 = (a_{34} - \dfrac{a_{31} \cdot a_{14}}{a_{11}}). \end{cases}$$

Запишемо систему в зручній формі

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12} x_2 + a'_{13} x_3 = a'_{14}, \\ \qquad a'_{22} x_2 + a'_{23} x_3 = a'_{24}, \\ \qquad a'_{32} x_2 + a'_{33} x_3 = a'_{34}, \end{cases}$$

$$a'_{kj} = \frac{a_{k\,j}}{a_{k\,k}}; \qquad k=1;\ j=k+1,...,n+1;$$

$$a'_{ij} = a_{i\,j} - \frac{a_{i\,k} \cdot a_{k\,j}}{a_{k\,k}};\ i=k+1,..., n;\ j=k+1,..., n+1;$$

Виконаємо друге перетворення: k=2 при умові $a'_{22} \neq 0$.

Розділимо провідне рівняння на провідний коефіцієнт $\grave{a}'_{22}$

$$x_2 + \frac{a'_{23}}{a'_{22}} x_3 = \frac{a'_{24}}{a'_{22}}.$$

Розв’яжемо рівняння відносно провідного елемента x_2

$$x_2 = \frac{a'_{24}}{a'_{22}} - \frac{a'_{23}}{a'_{22}} x_3$$

і підставимо в усі рівняння нижче провідного

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12} x_2 + a'_{13} x_3 = a'_{14}, \\ \qquad x_2 + \dfrac{a'_{23}}{a'_{22}} x_3 = \dfrac{a'_{24}}{a'_{22}}, \\ \qquad a'_{32} (\dfrac{a'_{24}}{a'_{22}} - \dfrac{a'_{23}}{a'_{22}} x_3) + a'_{33} x_3 = a'_{34}. \end{cases}$$

Виконаємо перетворення

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 = a'_{14}, \\ \qquad x_2 + \dfrac{a'_{23}}{a'_{22}}x_3 = \dfrac{a'_{24}}{a'_{22}}, \\ \qquad (a'_{33} - \dfrac{a'_{32}\cdot a'_{23}}{a'_{22}})x_3 = a'_{34} - \dfrac{a'_{32}\cdot a'_{24}}{a'_{22}}. \end{cases}$$

Запишемо систему в іншій формі

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 = a'_{14}, \\ \qquad x_2 + a''_{23}x_3 = a''_{24}, \\ \qquad a''_{33}x_3 = a''_{34}. \end{cases}$$

Виконаємо перетворення k=3, $a''_{33} \neq 0$.

$$x_3 = \frac{a''_{34}}{a''_{33}}, \qquad x_3 = a'''_{34}.$$

Виведемо загальні залежності прямого ходу:

1. Для провідного рівняння $a_{k\,j} = \dfrac{a_{k\,j}}{a_{k\,k}}$; $j=k+1,\ldots,n+1$;
2. Для послідуючих рівнянь $a_{i\,j} = a_{i\,j} - \dfrac{a_{i\,k}\cdot a_{k\,j}}{a_{k\,k}}$,

$i=k+1,\ldots, n;\quad j=k+1,\ldots, n+1.$

Зворотний хід починається з обчислення останнього невідомого системи лінійних рівнянь і закінчується обчисленням першого невідомого.

Елемент $a_{n\,n+1}$ дає значення x_n. Далі невідомі x_{n-1} , x_{n-2}, ... і аж до x_1 знаходяться відніманням від вільного члена відповідного рядка суми добутків коефіцієнтів на раніше обчислені невідомі.

$$x_3 = a'''_{34}$$
$$x_2 + a''_{23}\cdot x_3 = a''_{24}$$
$$x_2 = a''_{24} - a''_{23}x_3$$
$$x_2 = a'''_{24}$$
$$x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 = a'_{14}$$
$$x_1 = a'_{14} - a'_{12}x_2 - a'_{13}x_3$$
$$x_1 = a'_{14} - a'_{12}\cdot a'''_{24} - a'_{13}\cdot a'''_{34}$$
$$x_1 = a'''_{14}$$

Формули зворотного ходу $x_n = a_{n\,n+1}$; $x_i = a_{i\,n+1} - \sum_{j=1}^{n-1} a_{i\,j}x_j$ $i=n-1,\ldots,1$.

3.2.2. Метод Гауса з вибором головного елементу

При розв'язуванні системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$A \cdot X = F$$

може виявитися, що система має єдиний розв'язок, хоча який-небудь із кутових мінорів матриці $\boldsymbol{A}$ дорівнює нулю. У цьому випадку звичайний метод Гауса виявляється непридатним, але може бути застосований *метод Гауса з вибором головного елементу.*

Основна ідея методу полягає в тому, щоб на черговому кроці виключати не наступне по номеру невідоме, а те невідоме, коефіцієнт при якому є найбільшим по модулю. Таким чином, у якості провідного елемента тут обирається *головний*, тобто *найбільший по модулю елемент*. Тим самим, якщо $|A| \neq 0$, то в процесі обчислень не буде відбуватися ділення на нуль.

Різні варіанти методу Гауса з вибором головного елементу проілюструємо на прикладі системи із двох рівнянь

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = f_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = f_2.$$

Будемо вважати, що $|a_{12}| > |a_{11}|$. Тому на першому кроці будемо виключати змінне x_2. Таке припущення еквівалентне тому, що система прийме вид

$$a_{12}x_2 + a_{11}x_1 = f_1,$$
$$a_{22}x_2 + a_{21}x_1 = f_2,$$

і до отриманої системи застосуємо перший крок звичайного методу Гауса. Зазначений спосіб виключення називається *методом Гауса з вибором головного елемента по рядку.* Він еквівалентний застосуванню звичайного методу Гауса до системи, у якій на кожному кроці виключення проводиться відповідна перенумерація змінних.

Застосовується також *метод Гауса з вибором головного елемента по стовпцю*. Будемо вважати, що $|a_{21}| > |a_{11}|$. Перепишемо систему у вигляді

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = f_2,$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = f_1,$$

і до нової системи застосуємо на першому кроці звичайний метод Гауса. Таким чином, *метод Гауса з вибором головного елемента по стовпцю* еквівалентний застосуванню звичайного методу Гауса до системи, у якій на кожному кроці виключення проводиться відповідна перенумерація рівнянь.

Іноді застосовується *метод Гауса з вибором головного елемента по всій матриці,* коли в якості ведучого обирається максимальний за модулем елемент серед усіх елементів матриці системи.

3.3. Наближені методи розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Наближені методи розв’язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь дозволяють обчислити значення розв'язків системи із заданою точністю у вигляді послідовності деяких векторів (метод ітерацій, метод Зейделя та інші). Процес побудови такої послідовності називають *ітераційним процесом*. Ефективність використання наближених методів залежить від вдалого вибору початкового вектора та швидкості збіжності обраного процесу.

3.3.1. Метод простих ітерацій

Нехай задана система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Запишемо систему в матричному виді

$$A \cdot X = B$$

де
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Вважаючи, що діагональні елементи $a_{ii} \neq 0$ (i=1,2,3,…,n), виразимо x_1 через перше рівняння системи, x_2 – через друге і так далі. В результаті ми отримаємо систему, еквівалентну заданій

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} - \left(\dfrac{a_{12}}{a_{11}} \cdot x_2 + \dfrac{a_{13}}{a_{11}} \cdot x_3 + \ldots + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \cdot x_n \right) \\ x_2 = \dfrac{b_2}{a_{22}} - \left(\dfrac{a_{21}}{a_{22}} \cdot x_1 + \dfrac{a_{23}}{a_{22}} \cdot x_3 + \ldots + \dfrac{a_{2n}}{a_{22}} \cdot x_n \right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} - \left(\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} \cdot x_1 + \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} \cdot x_2 + \dfrac{a_{n3}}{a_{nn}} \cdot x_3 + \ldots + \dfrac{a_{n\,n-1}}{a_{nn}} \cdot x_{n-1} \right) \end{cases}$$

Якщо позначити $\dfrac{b_i}{a_{ii}} = \beta_i$; $-\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} = \alpha_{ij}$, де i, j=1, 2, 3,..., n, то систему можна записати так:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + ... + \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + ... + \alpha_{2n}x_n \\ ..... \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + ... + \alpha_{n\,n-1}x_{n-1} \end{cases}$$

Отримана система є *системою, приведеною до нормального виду*.

Якщо ввести позначення

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & ... & \alpha_{2n} \\ ..... \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & ... & \alpha_{nn} \end{bmatrix}; \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ ... \\ \beta_n \end{bmatrix},$$

то систему можна записати в матричній формі

$$X = \beta + \alpha \cdot X .$$

Розв'яжемо систему методом простих ітерацій. За нульове наближення приймемо стовпець вільних членів. На наступному кроці використаємо значення нульового наближення та отримаємо перше наближення

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ ... \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ ... \\ \beta_n \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ ... \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ ... \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & ... & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & ... & \alpha_{3n} \\ ..... \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & ... & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ ... \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

друге наближення

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \\ ... \\ x_n^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ ... \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & ... & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & ... & \alpha_{3n} \\ ..... \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & ... & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ ... \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

Взагалі, будь-яке $(\kappa+1)$ наближення обчислюють за формулою

$$X^{(k+1)} = \beta + \alpha \cdot X^{(k)}, \quad \kappa=0,1,2,...,n.$$

Якщо послідовність $X^{(0)}, X^{(1)}, X^{(2)},..., X^{(k)}$ має границю $X = \lim\limits_{k\to\infty} X^{(k)}$, то ця границя є розв'язком системи, тому що за властивостями границі $\lim\limits_{k\to\infty} X^{(k+1)} = \beta + \alpha \lim\limits_{k\to\infty} X^{(k)}$, тобто

$$X = \beta + \alpha \cdot X .$$

Для зручності програмування методу ітерацій із заданою точністю розглянемо систему з іншого боку.

Приймемо за нульове наближення стовпець вільних членів і обчислимо значення коренів на першому кроці, підставивши $x_i^{(0)}$ в усі рівняння.

Перевіримо умову досягнення точності по всім змінним

$$|x_i^{(0)} - x_i^{(1)}| \le \varepsilon \quad , (i=1, 2, 3,..., n).$$

Якщо по будь-якому кореню не виконується умова, наближення обчислюються знову, підставляючи до формул $x_i^{(1)}$.

Загальною формулою обчислення будь-якого розв'язку буде вираз

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left(b_i - (\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) \right),$$

з якого бачимо, що для виконання обчислень необхідно мати два масиви для збереження попередніх і наступних значень розв'язків системи. Окрім того, необхідно ввести признак досягнення точності.

Визначимо *умови збіжності методу простих ітерацій*. Нехай дана система приведена до нормального виду $X = \beta + \alpha \cdot X$. Ітераційний процес і його збіжність залежить від величини елементів матриці α таким чином: *якщо сума модулів елементів рядків або сума модулів елементів стовпців менше одиниці, то метод простих ітерацій для даної системи сходиться до єдиного розв'язку незалежно від вибору початкового вектора.*

Умову збіжності можна записати так

$$\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1 \quad \text{(i=1, 2, 3,..., n)}$$

або

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1 \quad \text{(j=1, 2, 3,..., n).}$$

Наприклад. Дана система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 26 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 3{,}25 - 0{,}125\, x_2 - 0{,}125\, x_3 \\ x_2 = 1{,}4 - 0{,}2x_1 + 0{,}2x_3 \\ x_3 = 1{,}4 - 0{,}2x_1 + 0{,}2x_2 \end{cases}$$

Ітераційний процес сходиться, тому що

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}125 & -0{,}125 \\ -0{,}2 & 0 & 0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}2 & 0 \end{bmatrix}$$

Збіжність ітераційного процесу має зв'язок з нормами матриці α такими співвідношеннями, якщо:

$$\|\alpha\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1 \quad \text{(перша норма),}$$

$$\|\alpha\|_2 = \max_i \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1 \quad \text{(друга норма),}$$

$$\|\alpha\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ij}|^2} < 1, \text{ (третя норма)},$$

то метод простих ітерацій сходиться до єдиного розв'язку.

Оцінимо похибку методу простих ітерацій. Нехай задана допустима похибка обчислень ε та X_i – вектор точних значень невідомих лінійної системи, а $x_i^{(k)}$ є ***к***-і наближення значень невідомих, обчислених за методом простих ітерацій, то для оцінки похибки $\|x_i - x_i^{(k)}\| \le \varepsilon$ методу використовується формула

$$\|x_i - x_i^{(k)}\| \le \frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1-\|\alpha\|} \cdot \|\beta\|,$$

де $\|\alpha\|$ - одна із трьох норм матриці α, $\|\beta\|$ – та ж норма вектора β, а ***к*** – число ітерацій, необхідне для досягнення заданої точності.

Приклад. Показати, що для системи

$$\begin{cases} 9{,}9x_1 - 1{,}5x_2 + 2{,}6x_3 = 0 \\ 0{,}4x_1 + 13{,}6x_2 - 4{,}2x_3 = 8{,}2 \\ 0{,}7x_1 + 0{,}4x_2 + 7{,}1x_3 = -1{,}3 \end{cases}$$

ітераційний процес сходиться, і обчислити, скільки ітерацій необхідно виконати, щоб знайти розв'язок системи з точністю до $\varepsilon = 10^{-4}$.

Розв'язування.

1) Приведемо систему до нормального виду

$$\begin{cases} 10x_1 = 0{,}1x_1 + 1{,}5x_2 - 2{,}6x_3 \\ 20x_2 = -0{,}4x_1 + 6{,}4x_2 + 4{,}2x_3 + 8{,}2 \\ 10x_3 = -0{,}7x_1 - 0{,}4x_2 + 2{,}9x_3 - 1{,}3 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}01x_1 + 0{,}15x_2 - 0{,}26x_3 \\ x_2 = -0{,}02x_1 + 0{,}32x_2 + 0{,}21x_3 + 0{,}41 \\ x_3 = -0{,}07x_1 - 0{,}04x_2 + 0{,}29x_3 - 0{,}13 \end{cases}$$

2) Матриця системи

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0{,}01 & 0{,}15 & -0{,}26 \\ -0{,}02 & 0{,}32 & 0{,}21 \\ -0{,}07 & 0{,}32 & 0{,}29 \end{bmatrix}$$

$\|\alpha\|_2 = \max(0{,}1; 0{,}51; 0{,}76) = 0{,}76 < 1$ – метод сходиться.

3) $\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}41 \\ -0{,}13 \end{bmatrix}$ $\|\beta\|_2 = 0 + 0{,}41 + 0{,}13 = 0{,}54$;

4) $\|x - x^{(k)}\| \le \dfrac{\|\alpha\|_2^{k+1} \cdot \|\beta\|}{1-\|\alpha\|_2} = \dfrac{0{,}76^{k+1} \cdot 0{,}54}{0{,}24} \le 10^{-4}$;

$$0{,}76^{k+1} \cdot 0{,}54 \le 10^{-4} \cdot 0{,}24;$$

$$0{,}76^{k+1} \le \frac{10^{-4} \cdot 0{,}24}{0{,}54}; \qquad \text{(k+1)lg 0,76<= lg 24 – lg 54 – 4;}$$

$$-\text{(k+1)}\cdot 0{,}1192 \le 1{,}3802 - 1{,}7324 - 4;$$

$$-\text{(k+1)}\cdot 0{,}1192 \le -4{,}3522;\ \text{(k+1)} > \frac{4{,}3522}{0{,}1192} = 36{,}5.$$

Після логарифмування $k+1 > 36{,}5 \quad k = 36$.

3.3.2. Метод Зейделя

Метод Зейделя є модифікацією метода простих ітерацій. В цьому методі при обчисленні (k+1)-го наближення невідомого x_i враховуються вже знайдені раніше (k+1)-ші наближення невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$.

Нехай дана лінійна система у нормальній формі

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{n\,n}x_n \end{cases}$$

Обираємо довільно початкове наближення коренів $x^{(0)}{}_1, x^{(0)}{}_2, \ldots, x^{(0)}{}_n$ та підставляємо в перше рівняння системи.

$$x^{(1)}{}_1 = \beta_1 + \alpha_{11}x^{(0)}{}_1 + \alpha_{12}x^{(0)}{}_2 + \ldots + \alpha_{1n}x^{(0)}{}_n;$$

отримане перше наближення $x^{(1)}{}_1$ підставимо в друге рівняння системи:

$$x^{(1)}{}_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x^{(1)}{}_1 + \alpha_{22}x^{(0)}{}_2 + \ldots + \alpha_{2n}x^{(0)}{}_n;$$

отримані перші наближення $x^{(1)}{}_1$ та $x^{(1)}{}_2$ підставимо в третє рівняння системи:

$$x^{(1)}{}_3 = \beta_3 + \alpha_{31}x^{(1)}{}_1 + \alpha_{32}x^{(1)}{}_2 + \ldots + \alpha_{3n}x^{(0)}{}_n$$

і т. і. Нарешті

$$x^{(1)}{}_n = \beta_n + \alpha_{n1}x^{(1)}{}_1 + \alpha_{n2}x^{(1)}{}_2 + \ldots + \alpha_{n,n-1}x^{(1)}{}_{n-1} + \alpha_{n,n}x^{(0)}{}_n.$$

Аналогічно будуємо другі, треті та наступні ітерації.

Таким чином, припускаючи, що k-те наближення розв'язків $x^{(k)}{}_i$ відомі, методом Зейделя будуємо (k+1)-ше наближення з використанням наступних формул:

$$x^{(k+1)}{}_1 = \beta_1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j}x^{(k)}{}_j,$$

$$x^{(k+1)}{}_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x^{(k+1)}{}_1 + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{2j}x^{(k)}{}_j,$$

$$x^{(k+1)}{}_n = \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj}x^{(k+1)}{}_j + \alpha_{nn}x^{(k)}{}_n,$$

де k= 0, 1, 2, …, n.

Процес Зейделя для лінійної системи $X=\beta+\alpha X$, як і процес послідовних наближень методу простих ітерацій, збігається до єдиного розв'язку для будь-якого початкового наближення, якщо будь-яка з норм матриці α менше одиниці, тобто, якщо

$$\|\alpha\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1,$$

$$\|\alpha\|_2 = \max_i \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1,$$

$$\|\alpha\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|^2} < 1.$$

Процес Зейделя збігається до єдиного розв'язку системи швидше, ніж процес простих ітерацій. Оцінимо похибку методу Зейделя.

Якщо X_i – точне значення розв'язку лінійної системи, а $X^{(k)}_i$ – k-е наближення, що обчислене методом Зейделя, то для *оцінки похибки* цього методу застосовується формула

$$\|X - X^{(k)}\| \le \frac{\|\alpha\|_1^{k+1}}{1-\|\alpha\|_1} \cdot \|X^{(1)} - X^{(0)}\|_1 .$$

3.3.3. Зведення системи лінійних алгебраїчних рівнянь до виду, що задовольняє умовам збіжності методів

Метод простих ітерацій та метод Зейделя для лінійної системи $X = \beta + \alpha \cdot X$ збігаються до єдиного розв'язку незалежно від вибору початкового вектора, якщо

$$\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1 \ (i=1, 2, \ldots, n) \text{ або } \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1 \ (j=1, 2, \ldots, n).$$

Таким чином для збіжності ітераційних процесів достатньо, щоб значення елементів α_{ij} матриці α при $i \neq j$ були невеликими по модулю. Це рівнозначно тому, що для лінійної системи $AX=B$ модулі діагональних коефіцієнтів кожного рівняння системи повинні бути більше суми модулів всіх інших коефіцієнтів (не враховуючи вільних членів). В цьому випадку ітераційні процеси для цієї системи збігаються, тобто, якщо ми маємо систему $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b, (\mathrm{i} = 1, 2, ..., \mathrm{n})$, для якої $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i}^{n} |a_{ij}|$, то розглянуті процеси для даної системи збігаються.

Застосовуючи елементарні перетворення, лінійну систему $AX=B$ можливо замінити такою еквівалентною системою $X=\beta+\alpha X$, для якої умови збіжності виконано.

4. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ЗНАХОДЖЕННЯ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ ТА ВЛАСНИХ ВЕКТОРІВ МАТРИЦІ

4.1. Власні значення і власні вектори матриці

Нехай задана квадратна матриця n-го порядку с дійсними елементами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Число λ називається *власним значенням матриці A*, якщо існує ненульовий вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, що задовольняє рівність

$$Ax = \lambda x$$

та називається *власним вектором матриці A*, відповідним до власного значення λ.

Перепишемо рівняння з визначення у вигляді

$$(A - \lambda E)x = 0, \qquad x \neq 0.$$

Для існування нетривіального розв'язку системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь повинна виконуватися умова

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Цей визначник

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

представляє собою многочлен n-ої степені відносно λ; його називають *характеристичним многочленом*. Тому, існує n власних значень – коренів відповідного *характеристичного рівняння*, серед яких можуть бути однакові (кратні) та комплексні значення.

При розв'язуванні теоретичних і практичних задач часто виникає потреба визначення власних значень даної матриці A, а також знаходження відповідних власних векторів матриці A. Друга задача є більш простішою, оскільки знаходження власних векторів за відомими коренями характеристичного рівняння зводиться до знаходження ненульових розв'язків однорідних лінійних систем. Тому в першу чергу будемо займатися першою задачею – знаходженням коренів характеристичного рівняння.

Для цього застосовуються два прийоми:

1) розгортання визначника в поліном n-ої степені

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

з подальшим розв'язуванням рівняння $D(\lambda) = 0$ одним з відомих наближених методів;

2) наближене визначення коренів характеристичного рівняння (найчастіше найбільших по модулю) без попереднього розгортання визначника. Розглянемо деякі з таких методів.

4.2. Метод Данилевського знаходження власних значень матриці

Суть методу А. М. Данилевського полягає в зведенні визначника $\det(A-\lambda E)$ до так званого нормального виду визначника Фробеніуса

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} p_1-\lambda & p_2 & p_3 & \dots & p_1 \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Розклавши визначник Фробеніуса за елементами першого рядка, отримаємо:

$$D(\lambda) = (p_1-\lambda)(-\lambda)^{n-1} - p_2(-\lambda)^{n-2} + p_3(-\lambda)^{n-3} - \dots + (-1)^{n-1}p_n$$

або

$$D(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - p_3\lambda^{n-3} - \dots - p_n).$$

Таким чином, розгортання вікового визначника, записаного в нормальній формі, не представляє труднощів. Позначимо через

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

дану матрицю, а через

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

подібну їй матрицю Фробеніуса, тобто

$$P = S^{-1}AS,$$

де S – особлива матриця.

Оскільки подібні матриці володіють однаковими характеристичними поліномами, то маємо:

$$\det(A-\lambda E) = \det(P-\lambda E).$$

Тому для обґрунтування методу досить показати, яким чином, виходячи з матриці A, будується матриця P. Згідно методу А. М. Данилевського, перехід від матриці A до подібної до неї матриці P здійснюється за допомогою $n-1$ перетворення подібності, що послідовно перетворюють рядки матриці A, починаючи з останньої, у відповідні рядки матриці P.

Покажемо початок процесу. Нам необхідно рядок

$$a_{n1}\ a_{n2}\ \dots\ a_{n,n-1}\ a_{nn}$$

перевести в рядок 0 0 ... 1 0. Припускаючи, що $a_{n,n-1} \neq 0$, поділимо всі елементи $(n-1)$-го стовпця матриці A на $a_{n,n-1}$. Тоді її n-й рядок прийме вигляд

$$a_{n1}\ a_{n2}\ \dots\ 1\ a_{nn}.$$

Потім віднімемо $(n-1)$-й стовпець перетвореної матриці, помножений відповідно на числа $a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}$, зі всієї решти її стовпців.

В результаті одержимо матрицю, останній рядок якої має бажаний вигляд 0 0 ... 1 0. Вказані операції є елементарними перетвореннями, що здійснюються над стовпцями матриці A. Виконавши ці ж перетворення над одиничною матрицею, одержимо матрицю

$$M_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & \dots & m_{n-1,n-1} & m_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

де

$$m_{n-1,i} = -\frac{a_{ni}}{a_{n,n-1}} \quad \text{при } i \neq n-1$$

$$m_{n-1,n-1} = \frac{1}{a_{n,n-1}}.$$

Звідси робимо висновок, що проведені операції рівносильні множенню справа матриці M_{n-1} на матрицю A, тобто після вказаних перетворень одержимо матрицю

$$AM_{n-1} = B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,n-1} & b_{1,n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2,n-1} & b_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \dots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Використовуючи правило множення матриць, знаходимо, що елементи матриці B обчислюються за наступними формулами:

$$b_{ij} = a_{ij} + a_{i,n-1} m_{n-1,j} \text{ при } 1 \mathcal{Я} i \mathcal{Я} n; j \neq n-1;$$

$$b_{i,n-1} = a_{i,n-1} m_{n-1,n-1} \text{ при } 1 \mathcal{Я} i \mathcal{Я} n.$$

Проте побудована матриця $B = AM_{n-1}$ не буде подібна матриці A. Для того щоб мати перетворення подібності, потрібно обернену матрицю M_{n-1}^{-1} зліва помножити на матрицю B:

$$M_{n-1}^{-1} A M_{n-1} = M_{n-1}^{-1} B.$$

Безпосередньою перевіркою легко переконатися, що обернена матриця M_{n-1}^{-1} має вигляд

$$M_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Нехай $M_{n-1}^{-1} A M_{n-1} = C.$

Отже $C = M_{n-1}^{-1} B.$

Оскільки множення зліва матриці M_{n-1}^{-1} на матрицю B не змінює перетвореного рядка останньої, то матриця C має вигляд

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1,n-1} & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2,n-1} & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Перемножуючи матриці M_{n-1}^{-1} і B, матимемо:

$$c_{i,j} = b_{ij} \text{ при } 1 \vartheta i \vartheta n - 2.$$

$$c_{n-1,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{nk} b_{kj}$$

Таким чином, множення M_{n-1}^{-1} на матрицю B змінює лише $(n-1)$-й рядок матриці B.

Одержана матриця C подібна матриці A і має один зведений рядок. Цим закінчується перший етап процесу.

Далі, якщо $c_{n-1,n-2} \neq 0$, то над матрицею C можна повторити аналогічні операції, узявши за основу $(n-2)$-й її рядок. В результаті одержимо матрицю

$$D = M_{n-2}^{-1} C M_{n-2}$$

з двома зведеними рядками. Над останньою матрицею проробляємо ті ж операції. Продовжуючи цей процес, ми, нарешті, одержимо матрицю Фробеніуса

$$P = M_1^{-1} \dots M_{n-2}^{-1} M_{n-1}^{-1} A M_{n-1} M_{n-2} \dots M_1,$$

якщо, звичайно, всі $n-1$ проміжних перетворень є можливими.

4.3. Метод скалярних добутків знаходження максимального власного значення симетричної матриці

Для знаходження першого власного значення λ_1 дійсної матриці A можна вказати дещо інший ітераційний процес, що є іноді є більш вигідним. Метод скалярних добутків заснований на утворенні скалярних добутків

$$\left(A^k y_0, A'^k y_0\right) \text{ і } \left(A^{k-1} y_0, A'^k y_0\right), (k = 1,2,\dots),$$

де A' – матриця, транспонована до матриці A, і y_0 – обраний яким-небудь чином початковий вектор.

Перейдемо до викладення самого методу.

Нехай A – дійсна матриця і $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – її власні значення, які є різними та задовольняють умову

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Візьмемо деякий ненульовий вектор y_0 і за допомогою матриці A побудуємо послідовність значень

$$y_k = Ay_{k-1} \ (k = 1, 2, \ldots).$$

Для вектора y_0 утворюємо також за допомогою транспонованої матриці A' другу послідовність значень

$$y'_k = A'y'_{k-1} \ (k = 1, 2, \ldots),$$

де $y'_0 = y_0$.

В просторі E_n оберемо два власні базиси $\{x_j\}$ і $\{x'_j\}$ відповідно для матриць A і A', що задовольняють умовам біортонормування:

$$(x_i, x'_j) = \delta_{ij},$$

де $Ax_i = \lambda_i x_i$ і $A'x'_j = \lambda'_j x'_j \ (i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Позначимо координати вектора y_0 в базисі $\{x_j\}$ через $a_1, \ldots, a_n$,, а в базисі $\{x'_j\}$ – через $b_1, \ldots, b_n$, тобто

$$y_0 = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n \text{ і } y_0 = b_1 x'_1 + \ldots + b_n x'_n.$$

Звідси

$$y_k = A^k y_0 = \sum_{i=1}^{n} a_j \lambda_j^k x_j$$

$$y'_k = A'^k y_0 = \sum_{i=1}^{n} b_j \lambda_j^{*k} x'_j$$

Складемо скалярний добуток

$$(y_k, y'_k) = \left(A^k y_0, A'^k y_0\right) = \left(y_0, A'^{2k} y_0\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \sum_{j=1}^{n} b_j \lambda_j^{*2k} x'_j\right).$$

Звідси через умову ортонормування знаходимо:

$$(y_k, y'_k) = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j^* \lambda_j^{2k} = a_1 b_1^* \lambda_1^{2k} + a_2 b_2^* \lambda_2^{2k} + \ldots + a_n b_n^* \lambda_n^{2k}.$$

Аналогічно

$$(y_{k-1}, y'_k) = a_1 b_1^* \lambda_1^{2k-1} + a_2 b_2^* \lambda_2^{2k-1} + \ldots + a_n b_n^* \lambda_n^{2k-1}.$$

Отже, при $a_1 b_1^* \neq 0$ маємо:

$$\frac{(y_k, y'_k)}{(y_{k-1}, y'_k)} = \frac{a_1 b_1^* \lambda_1^{2k} + a_2 b_2^* \lambda_2^{2k} + \ldots + a_n b_n^* \lambda_n^{2k}}{a_1 b_1^* \lambda_1^{2k-1} + a_2 b_2^* \lambda_2^{2k-1} + \ldots + a_n b_n^* \lambda_n^{2k-1}} = \lambda_1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k}\right).$$

Таким чином,

$$\lambda_1 \approx \frac{(y_k, y'_k)}{(y_{k-1}, y'_k)} = \frac{\left(A^k y_0, A'^k y_0\right)}{\left(A^{k-1} y_0, A'^k y_0\right)},$$

Цей метод особливо зручний для симетричної матриці A, оскільки тоді $A'=A$, і ми маємо

$$\lambda_1 \approx \frac{\left(A^k y_0, A^k y_0\right)}{\left(A^{k-1} y_0, A^k y_0\right)},$$

отже, потрібно побудувати тільки одну послідовність $y_k = A^k y_0 \ (k = 1, 2, \ldots)$.

Приклад. Методом скалярних добутків знайти найбільше власне значення матриці

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язування. Оскільки матриця A – симетрична, то треба побудувати лише одну послідовність значень $A^k y_0 \ (k = 1, 2, \ldots)$.

Обираючи початковий вектор

$$y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

обчислюємо при $k = 5$ і $k = 6$:

$$A^5 y_0 = \begin{bmatrix} 2\,268 \\ 1\,089 \\ 333 \end{bmatrix} \text{ і } A^6 y_0 = \begin{bmatrix} 10\,161 \\ 4\,779 \\ 1\,422 \end{bmatrix}.$$

Звідси

$$\left(A^5 y_0, A^6 y_0\right) = 2268 \cdot 10\,161 + 1089 \cdot 4779 + 333 \cdot 1422 = 28\,723\,005,$$

$$\left(A^6 y_0, A^6 y_0\right) = 10\,161^2 + 4779^2 + 1422^2 = 128\,106\,846.$$

Отже,

$$\lambda_1 \approx \frac{\left(A^6 y_0, A^6 y_0\right)}{\left(A^5 y_0, A^6 y_0\right)} = \frac{128\,106\,846}{28\,723\,005} = 4{,}46,$$

що відповідає дійсності.

Зауваження. Методи знаходження найбільшого по модулю кореня характеристичного рівняння можна використовувати для знаходження найбільшого по модулю кореня алгебраїчного рівняння

$$x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n = 0.$$

Дійсно, рівняння, як легко безпосередньо перевірити, є віковим для матриці

$$P = \begin{bmatrix} -p_1 & -p_2 & \cdots & -p_{n-1} & -p_n \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

тобто еквівалентно рівнянню

$$\det\left(xP - E\right) = 0.$$

Якщо рівняння не має нульового кореня, то аналогічним способом може бути визначений найменший за модулем корінь цього рівняння, а саме, при $p_n \neq 0$, вважаючи $\frac{1}{x} = y$, одержимо:

$$y^n + \frac{p_{n-1}}{p_n} y^n + \ldots + \frac{1}{p_n} = 0$$

Обернена величина найбільшого за модулем кореня першого рівняння дає найменший за модулем корінь даного рівняння.

Знаходження другого власного значення матриці і другого власного вектора.

Нехай власні значення $\lambda_j \left(j = 1, 2, ..., n \right)$ матриці A такі, що

$$\left|\lambda_1\right| > \left|\lambda_2\right| > \left|\lambda_3\right| \geq ... \geq \left|\lambda_n\right|$$

тобто є два відмінних один від одного, найбільших по модулю власних значення λ_1 і λ_2 матриці A. У такому разі прийомом, аналогічним наведеному вище, можна приблизно знайти друге власне значення λ_2 і власний вектор $x^{(2)}$, що відповідає йому.

З формули маємо:

$$A^m y = c_1 \lambda_1^m x^{(1)} + c_2 \lambda_2^m x^{(2)} + \ldots + c_n \lambda_n^m x^{(n)},$$

$$A^{m+1} y = c_1 \lambda_1^{m+1} x^{(1)} + c_2 \lambda_2^{m+1} x^{(2)} + \ldots + c_n \lambda_n^{m+1} x^{(n)}.$$

Виключимо з формул члени, що містять λ_1. В результаті буде:

$$A^{m+1} y - \lambda_1 A^m y = c_2 \lambda_2^m \left(\lambda_2 - \lambda_1\right) x^{(2)} + \ldots + c_n \lambda_n^m \left(\lambda_n - \lambda_1\right) x^{(n)}.$$

Введемо позначення

$$\Delta_\lambda A^m y = A^{m+1} y - \lambda A^m y,$$

причому вираз будемо називати λ- різницею від $A^m y$. Якщо $c_2 \neq 0$, то перший доданок в правій частині рівності є її головним членом при $m \to \infty$, і маємо наближену рівність

$$\Delta_{\lambda_1} A^m y \approx c_2 \lambda_2^m \left(\lambda_2 - \lambda_1\right) x^{(2)}.$$

Звідси

$$\Delta_{\lambda_1} A^{m-1} y \approx c_2 \lambda_2^{m-1} \left(\lambda_2 - \lambda_1\right) x^{(2)}.$$

Нехай

$$A^m y = y^{(m)} = \begin{bmatrix} y_1^{(m)} \\ y_2^{(m)} \\ \vdots \\ y_n^{(m)} \end{bmatrix}.$$

Буде:

$$\lambda_2 \approx \frac{\Delta_{\lambda_1} y_i^{(m)}}{\Delta_{\lambda_1} y_i^{(m-1)}} = \frac{y_i^{(m+1)} - \lambda_1 y_i^{(m)}}{y_i^{(m)} - \lambda_1 y_i^{(m-1)}} \qquad \left(i = 1, 2, \ldots n\right).$$

Користуючись формулою, можна приблизно обчислити друге власне значення λ_2.

Що стосується власного вектора $x^{(2)}$, то можна покласти:

$$x^{(2)} \approx \Delta_{\lambda_1} y^{(k)}.$$

Існує розповсюдження даного методу на випадок кратного кореня характеристичного рівняння.

5. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ

5.1. Постановка задачі інтерполяції

Нехай функція $y = f(x)$ задана у вигляді таблиці:

x_0	x_1	…	x_n
y_0	y_1	…	y_n

тобто на відрізку $[a, b]$ в $n+1$ точці $x_0 < x_1 < ... < x_n$ відомими є значення:

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad ... \quad , \quad y_n = f(x_n),$$

точки $x_0, x_1, ..., x_n$ називають вузлами інтерполяції, а $y_0, y_1, ..., y_n$ – значеннями функції у вузлах.

Задача інтерполяції полягає у знаходженні значення таблично заданої функції $y = f(x)$ в точці $x \in [a, b]$, що не збігається с вузловими точками.

Для розв'язування задачі інтерполяції потрібно побудувати *інтерполяційну функцію* $y = F(x)$:

1) що належить класу неперервних функцій;
2) та приймає в заданих вузлових точках x_i значення $F(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n}$, які задано таблицею.

Тоді значення таблично заданої функції $y = f(x)$ в деякій точці $x \in [a, b]$ приблизно беруть рівним значенню інтерполяційної функції у цій точці $f(x) \approx F(x)$.

Інтерполяційну функцію знаходять серед многочленів $P_n(x)$, степінь яких не перевищує числа n за умови, що в таблиці заданий $n+1$ вузол. Многочлен $P_n(x)$, що набирає у вузлових точках значення $P_n(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n}$, що задано таблицею, називають інтерполяційним многочленом для функції $y = f(x)$.

Доведено, що існує тільки один многочлен $P_n(x)$ степені не вище n, що є інтерполяційним многочленом для $y = f(x)$.

Заміна функції її інтерполяційним многочленом $f(x) \approx P_n(x)$ при $x \in [a, b]$ називається *інтерполяцією функції*. Звичайно, при цьому виникає запитання про оцінку похибок такої заміни.

Геометричний зміст інтерполяції полягає в подаванні функції $y = f(x)$ у вигляді параболи $y = P_n(x)$ степені n, яка проходить через задані таблицею точки $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, …, $(x_n; y_n)$.

Формулу одержання значення функції в точці $x \in [x_0, x_n]$, що знаходиться між вузлами інтерполяції, вважають *інтерполяційною*, якщо ж $x \notin [x_0, x_n]$, тобто знаходиться поза відрізком, то формулу називають *екстраполяційною*. Однак, надалі це розходження не враховується.

5.2. Інтерполяційний многочлен Лагранжа

Нехай функція представлена у вигляді таблиці

x_0	x_1	$\dots$	x_n
y_0	y_1	$\dots$	y_n

Для зручності допустимо, що $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Побудуємо інтерполяційний многочлен $P_n(x)$ степені n, що має в заданих $n+1$ вузлі інтерполяції ті ж значення, що й задана функція

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n}.$$

Для цього спочатку побудуємо допоміжні многочлени степені n, визначені наступним чином:

$$L_n(x, x_i) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}.$$

Многочлен $L_n(x_k, x_i)$ має наступні властивості:

1) є многочленом n-ої степені, тому що в чисельнику знаходиться n множників, що містять змінну x;
2) при $x = x_k$, $k \neq i$ многочлен $L_n(x_k, x_i)$ перетворюється на нуль, тому що, в чисельнику дробі один з множників $(x_k - x_k) = 0$;
3) при $x = x_i$ многочлен $L_n(x_i, x_i)$ дорівнює 1, тому що всі множники чисельника скоротяться з відповідними множниками знаменника.

Отримали, що

$$L_n(x_k, x_i) = \begin{cases} 0, & k \neq i, \\ 1, & k = i. \end{cases}$$

Якщо тепер записати шуканий многочлен $P_n(x)$ у вигляді

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_n(x, x_i) \cdot y_i = L_n(x, x_0) \cdot y_0 + L_n(x, x_1) \cdot y_1 + \dots + L_n(x, x_n) \cdot y_n =$$

$$= \frac{(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)\dots(x_0-x_n)} \cdot y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} \cdot y_1 +$$

$$+ \dots + \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\dots(x_n-x_{n-1})} \cdot y_n,$$

то одержимо інтерполяційний многочлен Лагранжа, що є розв'язком поставленої задачі інтерполяції, тому що є многочленом степені n, що набирає у вузлових точках задані в таблиці значення $P_n(x_i) = y_i$, $i = \overline{0, n}$.

Представимо многочлен Лагранжа в більш компактному вигляді, зручному для програмування

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{k=0, k \neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right) \cdot y_i.$$

Розглянемо деякі представлення многочлена Лагранжа.

1) Нехай $n=1$, тобто задані два вузла інтерполяції x_0 и x_1, тоді

$$P_1(x)=L_1(x,x_0)\cdot y_0+L_1(x,x_1)\cdot y_1=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot y_1$$

є *інтерполяційним многочленом Лагранжа першої степені*. Заміна таблично заданої функції $y=f(x)$ многочленом $P_1(x)$ є *лінійною інтерполяцією*. Геометрично це означає, що через точки з координатами (x_0, y_0) та (x_1, y_1) на площині проводиться єдина пряма, яка і визначає значення функції в будь-якій проміжній точці.

2) Нехай $n=2$, тобто задані три вузла інтерполяції x_0, x_1 та x_2, тоді

$$P_2(x)=L_2(x,x_0)\cdot y_0+L_2(x,x_1)\cdot y_1+L_3(x,x_2)\cdot y_2=$$

$$=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\cdot y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\cdot y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\cdot y_2$$

є *інтерполяційним многочленом Лагранжа другої степені*. Заміна табличної функції многочленом $P_2(x)$ є *квадратичною інтерполяцією*. Геометрично це означає, що через точки з координатами (x_0, y_0), (x_1, y_1) і (x_2, y_2) на площині проводиться єдина парабола, яка і визначає значення функції в будь-якій проміжній точці.

Ясно, що в кожній точці $x\in[a,b]$, яка не є вузлом інтерполяції, задана функція $y=f(x)$ відрізняється від інтерполяційного многочлена $P_n(x)$. Позначимо

$$R_n(x)=|f(x)-P_n(x)|.$$

Функція $R_n(x)$ називається похибкою інтерполяції в точці x. З теорії обчислювальних методів відома оцінка для $R_n(x)$: якщо функція $y=f(x)$ $n+1$ раз є диференційованою на відрізку $[a,b]$, що містить всі вузли інтерполяції $x_0<x_1<...<x_n$ та точку x, то

$$R_n(x)\le M_{n+1}\cdot\frac{|(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)|}{(n+1)!},\quad \text{де}\quad M_{n+1}=\max_{a\le x\le b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|.$$

Приклад 1. Побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа для функції $f(x)=\sqrt[3]{x}$ з вузлами інтерполяції $x_0=1$, $x_1=2$, $x_2=3$. Оцінити похибку інтерполяційного многочлена при $x=2{,}5$.

Розв'язування. Вхідні дані представимо у вигляді таблиці

x_i	1	2	3
$y_i=\sqrt[3]{x_i}$	1,000	1,260	1,442

Тут $n=2$, тоді інтерполяційний многочлен запишеться у вигляді:

$$P_2(x)=\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}\cdot 1{,}000+\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}\cdot 1{,}260+\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}\cdot 1{,}442=$$

$$=-0{,}039x^2+0{,}377x+0{,}662.$$

Оцінимо похибку інтерполяції, використавши формулу

$$R_2(x)\le M_3\cdot\frac{|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|}{3!},$$

де $\quad M_3=\max\limits_{1\le x\le 3}|f'''(x)|.$

За умовою $f(x)=\sqrt[3]{x}$, тоді $\quad f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, \qquad f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}},$

$$f'''(x)=\frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}=\frac{10}{27x^2\cdot\sqrt[3]{x}}.$$

На відрізку $x\in[1,3]$ функція $f'''(x)$ додатна і спадаюча.

Отже, $\qquad M_3=\max\limits_{1\le x\le 3}|f'''(x)|=f'''(1)=\frac{10}{27}\approx 0{,}37,\qquad$ тоді

$$R_2(2{,}5)\le 0{,}37\cdot\frac{|(2{,}5-1)(2{,}5-2)(2{,}5-3)|}{3!}\le 0{,}023.$$

5.3. Кінцеві різниці для таблично заданої функції

5.3.1. Визначення кінцевих різниць

Нехай функція $y=f(x)$ задана таблицею

x_0	x_1	…	x_n
y_0	y_1	…	y_n

Вузли інтерполяції є рівновіддаленими з шагом h, тобто для кожного $i=\overline{1,n}\qquad x_i-x_{i-1}=h$. Звідки випливає, що

$$x_1=x_0+h,\qquad x_2=x_1+h=x_0+2h,\qquad \ldots\qquad x_n=x_{n-1}+h=x_0+nh.$$

Складемо різниці між значеннями функції з таблиці

$$y_1-y_0=\Delta y_0,$$
$$y_2-y_1=\Delta y_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_{i+1}-y_i=\Delta y_i,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n-y_{n-1}=\Delta y_{n-1}.$$

і назвемо їх *кінцевими різницями першого порядку*.

Різниці перших кінцевих різниць

$$\Delta y_1 - \Delta y_0 = \Delta^2 y_0,$$
$$\Delta y_2 - \Delta y_1 = \Delta^2 y_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta y_{i+1} - \Delta y_i = \Delta^2 y_i,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} = \Delta^2 y_{n-2}.$$

називають *кінцевими різницями другого порядку.*

Кінцеві різниці k*-го порядку* визначаються через кінцеві різниці $(k-1)$-го порядку за формулами

$$\Delta^{k-1} y_1 - \Delta^{k-1} y_0 = \Delta^k y_0,$$
$$\Delta^{k-1} y_2 - \Delta^{k-1} y_1 = \Delta^k y_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i = \Delta^k y_i,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta^{k-1} y_{n-k+1} - \Delta^{k-1} y_{n-k} = \Delta^k y_{n-k}.$$

при цьому $k = \overline{1, n}$; $i = \overline{0, n-k}$.

Кінцева різниця n*-го порядку* тільки одна і визначається через кінцеві різниці $(n-1)$-го порядку за формулою

$$\Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0 = \Delta^n y_0.$$

Послідовні різниці зазвичай записують у вигляді таблиці. Найчастіше їх розташовують у формі діагональної таблиці, у якій різниці записані в одному рядку з від'ємниками.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
$x_1 = x_0 + h$	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$
$x_2 = x_0 + 2h$	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	…
$x_3 = x_0 + 3h$	y_3	Δy_3	…	
$x_4 = x_0 + 4h$	y_4	…		
…	…			

Приклад 2. Скласти таблицю кінцевих різниць до третього порядку для функції $y = e^x$ на відрізку $x \in [1; 2]$ з шагом $h = 0{,}2$.

Розв'язування. Відповідні обчислення представлені в таблиці.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1,0	2,718	0,602	0,133	0,030
1,2	3,320	0,735	0,163	0,036
1,4	4,055	0,898	0,199	0,043
1,6	4,953	1,097	0,242	
1,8	6,050	1,339		
2,0	7,389			

5.3.2. Властивості кінцевих різниць

1) *Вираз кінцевих різниць через значення функцій*.

За визначенням кінцеві різниці k-го порядку отримуються через кінцеві різниці $(k-1)$-го порядку. Однак послідовні різниці можна виразити і безпосередньо через значення функції. Дійсно,

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i .$$

Далі, знаходимо

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i ,$$

$$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i = (y_{i+3} - 2y_{i+2} + y_{i+1}) - (y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i) =$$

$$= y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i$$

Кінцева різниця $\Delta^k y_i$ дорівнює сумі $(k+1)$ значення функції, взяті з біноміальними коефіцієнтами і знаками, що чергуються

$$\Delta^k y_i = y_{i+k} - k \cdot y_{i+k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} \cdot y_{i+k-2} - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \cdot y_{i+k-3} + \ldots + (-1)^k \cdot y_i .$$

2) *Вираз значень функції через кінцеві різниці*.

З визначення кінцевих різниць першого порядку випливає, що

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 ,$$

аналогічно

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = (y_0 + \Delta y_0) + \Delta y_1 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta y_1 - \Delta y_0 =$$

$$= y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0 .$$

Також можна визначити значення y_k при кожному k через y_0 та різниці до k-го порядку

$$y_k = y_0 + k \cdot \Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \cdot \Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \cdot \Delta^3 y_0 + \ldots + \Delta^k y_0 .$$

3) *Кінцеві різниці для многочленів*.

Якщо $P_n(x)$ – многочлен степені n, то

– для $k < n$ кінцеві різниці $\Delta^k P_n(x_i)$ є многочленами степені $n-k$;

– кінцеві різниці n-го порядку сталі, тобто $\Delta^n P_n(x_i) = const$;

– для кожного $k > n$ кінцеві різниці $\Delta^k P_n(x_i) = 0$.

Справедливе і *зворотне твердження*: якщо n-і кінцеві різниці функції, що утворені для рівновіддалених значень аргументу, сталі $\Delta^n f(x_i) = const$, то функція є многочленом степені n, тобто $f(x) = P_n(x)$. Це означає: якщо для функції $y = f(x)$ кінцеві різниці n-го порядку є сталими, то функцію можна представити многочленом степені n.

Приклад 3. Скласти таблицю кінцевих різниць для многочлена другої степені $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $x \in [1; 2{,}8]$ з шагом $h = 0{,}2$.

Розв'язування. Всі обчислення наведені в таблиці.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1,0	0,00	–0,16	0,08	0,00
1,2	–0,16	–0,08	0,08	0,00
1,4	–0,24	0,00	0,08	0,00
1,6	–0,24	0,08	0,08	0,00
1,8	–0,16	0,16	0,08	0,00
2,0	0,00	0,24	0,08	0,00
2,2	0,24	0,32	0,08	0,00
2,4	0,56	0,40	0,08	
2,6	0,96	0,48		
2,8	1,44			

Як бачимо з таблиці, кінцеві різниці другого порядку є сталими, а кінцеві різниці третього порядку дорівнюють нулю.

Приклад 4. Функція задана таблицею. За допомогою послідовних кінцевих різниць визначити степінь многочлена, яким можна інтерполювати дану функцію.

Розв'язування. Послідовні обчислення наведені в таблиці.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0,30	1,0313	–0,0330	–0,0038	0,0006
0,35	0,9983	–0,0368	–0,0032	0,0005
0,40	0,9615	–0,0400	–0,0027	0,0004
0,45	0,9215	–0,0427	–0,0023	0,0007
0,50	0,8788	–0,0450	–0,0016	0,0005
0,55	0,8338	–0,0466	–0,0011	0,0006
0,60	0,7872	–0,0477	–0,0005	
0,65	0,7395	–0,0482		
0,70	0,6913			

Кінцеві різниці третього порядку можна вважати практично сталими, а кінцеві різниці четвертого порядку рівними нулю. Отже, на розглянутому проміжку функцію доцільно інтерполювати многочленом третьої степені.

4) *Зв'язок кінцевих різниць із похідними.*

Припустимо, що функція $y = f(x)$ достатнє число раз неперервно диференційована на відрізку $x \in [\, a, b \,]$, що містить всі вузли інтерполяції.

Зв'язок між кінцевими різницями і похідними того ж порядку встановлюється за допомогою формули кінцевих приростів Лагранжа

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(\xi)(x_{i+1} - x_i), \qquad x_i < \xi < x_{i+1},$$

яку запишемо в позначеннях кінцевих різниць

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(\xi) \cdot h,$$

$$x_i < \xi < x_{i+1}, \qquad h = x_{i+1} - x_i.$$

Двічі застосовуючи формулу кінцевих приростів Лагранжа, одержимо співвідношення між другою кінцевою різницею і похідною другого порядку

$$\Delta^2 y_i = f''(\xi) \cdot h^2, \quad x_i < \xi < x_{i+2}.$$

Аналогічно одержимо

$$\Delta^k y_i = f^{(k)}(\xi) \cdot h^k, \quad x_i < \xi < x_{i+k}.$$

З формул випливає, що при малому шагу h можна приблизно обчислювати похідні від таблично заданих функцій через кінцеві різниці на відповідних ділянках таблиці

$$f'(\xi) \approx \frac{\Delta y_i}{h}, \quad x_i < \xi < x_{i+1},$$

$$f''(\xi) \approx \frac{\Delta^2 y_i}{h^2}, \quad x_i < \xi < x_{i+2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f^{(k)}(\xi) \approx \frac{\Delta^k y_i}{h^k}, \quad x_i < \xi < x_{i+k}.$$

Однак для $k > 2$ формули застосовувати не рекомендується, тому що зростає похибка. З ростом порядку кінцевих різниць точність їхніх обчислень швидко спадає. Це відбувається за рахунок того, що абсолютна похибка різниць зростає, а їх абсолютні значення спадають. Дійсно, якщо $\Delta y = \varepsilon$ – абсолютна похибка значень функції, то похибка першої кінцевої різниці $\Delta(\Delta y) = 2\varepsilon$, похибка другої кінцевої різниці $\Delta(\Delta^2 y) = 4\varepsilon$.

5.4. Інтерполяційний многочлен Ньютона

5.4.1. Перша інтерполяційна формула Ньютона

Нехай функція $y = f(x)$ задана таблицею

x_0	x_1	$\dots$	x_n
y_0	y_1	$\dots$	y_n

Вузли інтерполяції є рівновіддаленими з кроком h, тобто для кожного $i=\overline{1,n}$, $x_i - x_{i-1} = h$. Звідси випливає, що

$$x_1 = x_0 + h, \qquad x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h, \quad \ldots \quad x_n = x_{n-1} + h = x_0 + nh.$$

Розглянемо многочлен степені n, записаний у вигляді

$$P_n(x) = q_0 + q_1(x - x_0) + \ldots + q_k(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1}) + \ldots +$$
$$+ q_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

і визначимо його коефіцієнти $q_0, q_1, \ldots, q_n$ так, щоб у вузлах інтерполяції значення многочлена збігалися зі значеннями, заданими в таблиці, тобто $P_n(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0,n}$.

$P_n(x_0) = y_0$, звідки $q_0 = y_0$.

$P_n(x_1) = y_1$, тобто $q_0 + q_1(x_1 - x_0) = y_1$, $y_0 + q_1 h = y_1$, звідки $q_1 = \dfrac{\Delta y_0}{h}$.

$P_n(x_2) = y_2$, тобто $q_0 + q_1(x_2 - x_0) + q_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2$,

$$y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} \cdot 2h + q_2 2h^2 = y_2, \; q_2 = \frac{y_2 - 2 \cdot \Delta y_0 + y_0}{2h^2}, \text{ звідки } q_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}.$$

Продовжуючи далі, одержимо

$$q_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}, \; \ldots, \; q_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!h^k}, \; \ldots, \; q_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}.$$

Підставимо всі отримані коефіцієнти у формулу для многочлена

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots +$$
$$+ \frac{\Delta^k y_0}{k!h^k}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1}) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Це і буде *перша інтерполяційна формула Ньютона.*

Отриману формулу називають інтерполяційною формулою для *інтерполяції вперед*, тому що вона будується з використанням значення функції і її різниць у початковому вузлі інтерполяції x_0. Її звичайно застосовують при інтерполяції в точках x, близьких до x_0 (для зменшення похибки інтерполяції).

Оцінка похибки використання інтерполяційної формули Ньютона визначається так само, як і для многочлена Лагранжа.

Однак, якщо вузли інтерполяції рівновіддалені та є відомим додатковий вузол інтерполяції x_{n+1}, то для оцінки похибки $R_n(x)$ можна скористатися формулою

$$R_n(x) \le \left| \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h^{n+1}} \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)}{(n+1)!} \right|.$$

Приклад 5. Побудувати інтерполяційний многочлен Ньютона для функції $f(x) = \sqrt[3]{x}$ з вузлами інтерполяції $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Порівняти результат з результатом Приклада 1 з п. 2.2.

Розв'язування. Вузлів інтерполяції три, так що будемо будувати многочлен Ньютона другого порядку. Для цього обчислимо відповідні кінцеві різниці, результати наведемо в таблиці.

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	1	1,000	0,260	-0,078
1	2	1,260	0,182	
2	3	1,442		

Підставимо отримані значення в інтерполяційну формулу Ньютона, враховуючи, що $h = 1$, одержимо

$$P_2(x) = 1 + 0.260 \cdot (x-1) - \frac{0.078}{2} \cdot (x-1) \cdot (x-2) = -0.039x^2 + 0.377x + 0.662.$$

Отриманий многочлен тотожно збігається з інтерполяційним многочленом Лагранжа. Додатковий вузол не заданий, тому похибка визначається за тією ж формулою, що і для многочлена Лагранжа.

5.4.2. Друга інтерполяційна формула Ньютона

Нехай функція $y = f(x)$ задана таблицею

x_0	x_1	…	x_n
y_0	y_1	…	y_n

Вузли інтерполяції є рівновіддаленими з кроком h, тобто для кожного $i = \overline{1, n}$, $x_i - x_{i-1} = h$. Звідки випливає, що $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h$, … $x_n = x_{n-1} + h = x_0 + nh$.

Якщо необхідно знайти значення функції в точках x, близьких до вузла інтерполяції x_n, то краще користуватися так званою формулою для *інтерполяції назад*.

Для отримання цієї формули представимо многочлен $P_n(x)$ у вигляді

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x - x_n) + \ldots + b_k(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_{n-(k-1)}) + \ldots +$$
$$+ b_n(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1)$$

і визначимо його коефіцієнти $b_0, b_1, \ldots, b_n$ так, щоб у вузлах інтерполяції значення многочлена збігалося зі значеннями, заданими в таблиці, тобто

$P_n(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n}$.

$P_n(x_n) = y_n$, звідки $b_0 = y_n$.

$P_n(x_{n-1}) = y_{n-1}$, тобто $b_0 + b_1(x_{n-1} - x_n) = y_{n-1}$, звідки $b_1 = \dfrac{\Delta y_{n-1}}{h}$.

$P_n(x_{n-2}) = y_{n-2}$, $b_0 + b_1(x_{n-2} - x_n) + b_2(x_{n-2} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1}) = y_{n-2}$,

$$y_n - \frac{\Delta y_{n-1}}{h} \cdot 2h + b_2 2h^2 = y_{n-2},\ b_2 = \frac{y_n - 2 \cdot \Delta y_{n-1} + y_{n-2}}{2h^2},\ \text{звідки}\ b_2 = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2h^2}.$$

Продовжуючи аналогічно, одержимо

$$b_3 = \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!h^3},\ \ldots,\ b_k = \frac{\Delta^k y_{n-k}}{k!h^k},\ \ldots,\ b_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}.$$

Підставимо всі отримані коефіцієнти у формулу для многочлена

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots +$$

$$+ \frac{\Delta^k y_{n-k}}{k!h^k}(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_{n-(k-1)}) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1)$$

Це і буде *друга інтерполяційна формула Ньютона.*

Оцінка похибки використання інтерполяційної формули Ньютона визначається так само, як і для многочлена Лагранжа.

Однак, якщо відомий додатковий вузол інтерполяції x_{n+1}, для оцінки похибки $R_n(x)$, як і в першій формулі Ньютона, можна скористатися співвідношенням

$$R_n(x) \le \left| \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h^{n+1}} \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)}{(n+1)!} \right|.$$

Інтерполяційні формули Ньютона можна представити в більш компактному вигляді, зручному для програмування.

Перша інтерполяційна формула Ньютона

$$P_n(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\Delta^k y_0}{k!h^k} \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) \right).$$

Друга інтерполяційна формула Ньютона

$$P_n(x) = y_n + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\Delta^k y_{n-k}}{k!h^k} \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_{n-i}) \right).$$

5.5. Порівняння інтерполяційних многочленів

Приведемо порівняльну характеристику розглянутих інтерполяційних многочленів Лагранжа, першої, другої формул Ньютона:

1. Інтерполяційні многочлени Лагранжа та Ньютона мають степінь, не вище n за умови, що визначення многочленів виконується за таблицею, у якій заданий $n+1$ вузол. При отриманні многочлена Лагранжа вузли можуть бути розташовані довільно, при отриманні многочленів Ньютона вузли повинні бути рівновіддаленими.
2. Многочлен Лагранжа складається із суми рівноправних доданків, кожний з яких є многочленом n-ої степені і повинен брати участь в усіх обчисленнях. У многочленів Ньютона степені їхніх доданків постійно підвищуються, починаючи від нульової в першому доданку до n-ої в

останньому. Крім того, у формулах Ньютона знаменники коефіцієнтів містять величину $k!$ Ці числа зі збільшенням k швидко зростають, отже, коефіцієнти зменшуються і при обчисленнях, починаючи з деякого номера, останніми доданками більш високої степені можна зневажити.

3. При додаванні додаткового вузла в таблицю кожний доданок многочлена Лагранжа змінюється, що впливає на значення многочлена в цілому. Додавання ж нового вузла інтерполяції у формулах Ньютона додасть лише новий доданок, але не змінить всіх попередніх доданків.
4. Якщо при отриманні многочленів Лагранжа і Ньютона вузли інтерполяції збігаються, то многочлени є тотожно рівними, тобто рівними є коефіцієнти при однакових степенях. Це випливає з існування тільки одного многочлена степені n за умови проходження функції через задані точки. Зазначені многочлени відрізняються лише способом їхньої побудови.

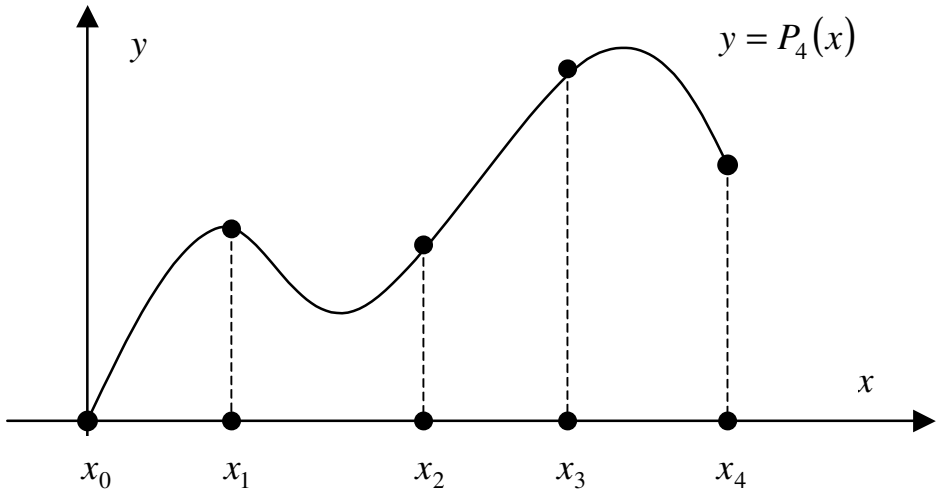


Рисунок 5.1 – Поведінка інтерполяційної функції

5.6. Багатоінтервальна інтерполяція

Якщо при розв'язуванні задачі інтерполяції в таблиці задана велика кількість вузлів, то доводиться будувати інтерполяційний многочлен досить високої степені, що приводить до великої кількості обчислень, нагромадженню похибок обчислень, збільшенню кількості машинного часу, необхідного для розв'язування задачі. Все це сильно ускладнює розв'язування задачі інтерполяції.

Щоб позбутися зазначених недоліків при розв'язуванні задачі, використовують багатоінтервальну інтерполяцію, що дозволяє знайти значення функції в заданій точці за допомогою лінійної або квадратичної функції, побудованої на значеннях, заданих у сусідніх вузлах.

5.6.1. Лінійна багатоінтервальна інтерполяція

Нехай функція задана у вигляді таблиці

x_0	x_1	…	x_n
y_0	y_1	…	y_n

Будемо вважати, що $x_0 < x_1 < ... < x_n$. Побудуємо інтерполяційну функцію $P_1(x)$, що складається з відрізків лінійних функцій $L_1^i(x)$, $i = \overline{1, n}$, побудованих на значеннях, заданих у послідовних вузлах.

Нехай $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, на кожному такому проміжку побудуємо многочлен Лагранжа першої степені вигляду

$$L_1^i(x) = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} \cdot y_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot y_i .$$

Сукупність многочленів Лагранжа першої степені, побудованих на всіх часткових проміжках, і є інтерполяційна функція $P_1(x)$. З геометричної точки зору інтерполяційна функція – це ломана лінія, що з'єднує точки площини, координати яких задані таблицею.

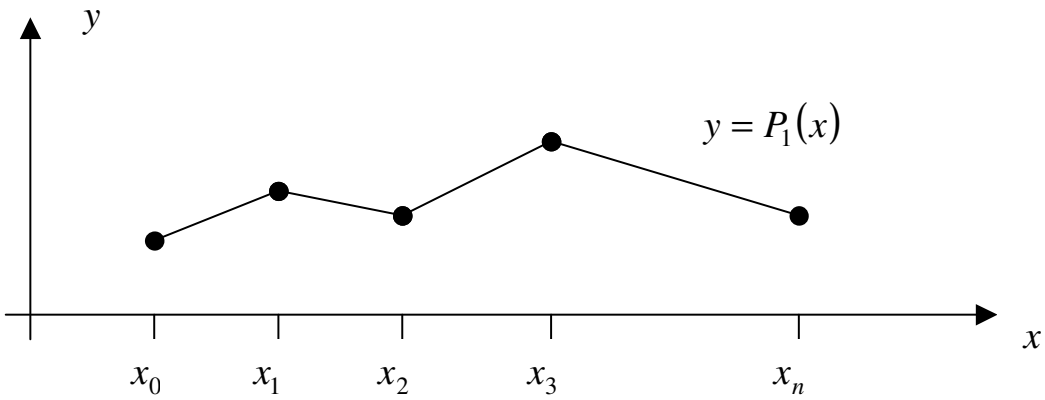


Рисунок 5.2 – Лінійна багатоінтервальна інтерполяція

5.6.2. Квадратична багатоінтервальна інтерполяція

Для таблично заданої функції

x_0	x_1	…	x_n
y_0	y_1	…	y_n

побудуємо інтерполяційну функцію $P_2(x)$, що складається з послідовності квадратичних функцій $L_2^i(x)$, $i = 1, 3, ..., n-1$, побудованих на трьох послідовних значеннях з таблиці.

Нехай $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$, $i = 1, 3, 5, ..., n-1$, де n – парне число. На кожному проміжку побудуємо многочлен Лагранжа другої степені вигляду

$$L_2^i(x)=\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}\cdot y_{i-1}+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}\cdot y_i+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}\cdot y_{i+1}$$

З геометричної точки зору інтерполяційна функція є сукупністю парабол, проведених за трьома послідовними точками на площині, координати яких визначені таблицею.

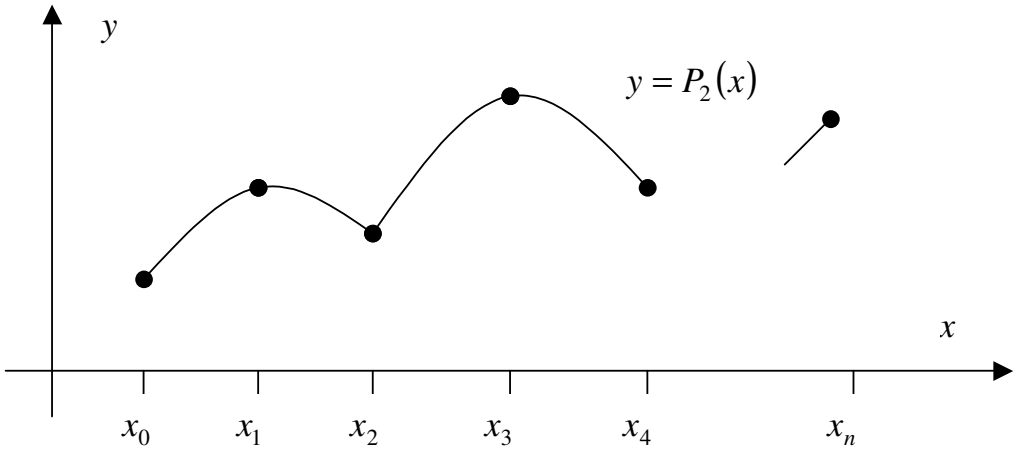


Рисунок 5.3 – Квадратична багатоінтервальна інтерполяція

5.6.3. Кубічна багатоінтервальна інтерполяція

Для таблично заданої функції

x_0	x_1	…	x_n
y_0	y_1	…	y_n

побудуємо інтерполяційну функцію $P_3(x)$, що складається з послідовності кубічних функцій $L_3^i(x)$, $i=2,5,...,n-1$, побудованих за чотирма послідовними значеннями з таблиці.

Нехай $x\in[x_{i-2},x_{i+1}]$, $i=2,5,...,n-1$, де n – кратне трьом. На кожному такому проміжку побудуємо многочлен Лагранжа третьої степені

$$L_3^i(x)=\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-2}-x_{i-1})(x_{i-2}-x_i)(x_{i-2}-x_{i+1})}\cdot y_{i-2}+\frac{(x-x_{i-2})(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_{i-2})(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}\cdot y_{i-1}+$$
$$+\frac{(x-x_{i-2})(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-2})(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}\cdot y_i+\frac{(x-x_{i-2})(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-2})(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}\cdot y_{i+1}$$

З геометричної точки зору інтерполяційна функція є сукупністю кубічних парабол, проведених за чотирма послідовними точками на площині, координати яких визначені таблицею.

Особливістю багатоінтервальних інтерполяційних функцій є те, що вони складаються із частин лінійних, квадратичних або кубічних функцій, поєднаних в загальних точках. Ці функції є функціями неперервними, однак в загальних точках поєднання у цих функцій не існує похідної, тобто в цих точках не існує дотичної до графіка функції.

6. СПЛАЙН-ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ

6.1. Постановка задачі сплайн-інтерполяції

Нехай функція задана у вигляді таблиці

x_0	x_1	$\ldots$	x_n
y_0	y_1	$\ldots$	y_n

Якщо таблиця значень функції містить велику кількість вузлів, то при розв'язуванні задачі інтерполяції потрібно будувати многочлени Лагранжа або Ньютона досить високої степені, що приводить до великого об'єму обчислень і накопиченню похибок.

Якщо для розв'язування задачі інтерполяції з великою кількістю вузлів використати багатоінтервальну інтерполяцію, то в точках поєднання лінійних, квадратичних або кубічних функцій не буде існувати похідна.

Вказаних недоліків можна уникнути, якщо у якості інтерполяційної функції взяти інтерполяційний сплайн.

Інтерполяційним сплайном називається функція, яка гладко склеєна з частин функцій деякого класу і яка у вузлових точках приймає значення з таблиці. Для побудови інтерполяційного сплайну на практиці використовують многочлени першої $y = P_1(x)$, другої $y = P_2(x)$ або третьої $y = P_3(x)$ степені.

Функцію $y = S_k(x)$ будемо називати *інтерполяційним сплайном k-ої степені* , якщо вона задовольняє умовам:

1) на кожному i-ому частковому проміжку сплайн є многочленом k-ої степені, тобто $S_k(x) = P_k^i(x)$ для $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$;
2) сплайн $y = S_k(x)$ є функцією неперервною разом зі своїми похідними до $(k-1)$-го порядку;
3) у вузлових точках сплайн повинен приймати значення, що задані таблицею, тобто $S_k(x_i) = y_i$, $i = \overline{0, n}$.

Гладке поєднання окремих функцій досягається за рахунок неперервності похідних до $(k-1)$-го порядку у вузлових точках.

6.2. Лінійний сплайн

Нехай функція задана таблицею

x_0	x_1	$\ldots$	x_n
y_0	y_1	$\ldots$	y_n

Побудуємо сплайн-інтерполяційну функцію, що називається *лінійним сплайном*, тобто на кожному i-ому частковому проміжку вона є многочленом першої степені

$$S_1(x) = P_1^i(x) \qquad \text{для } x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, n}.$$

Крім того, лінійний сплайн повинен бути неперервним і мати неперервні похідні нульового порядку. Похідна нульового порядку від лінійного сплайну – це сама функція, яка і так є неперервною.

Сплайн-інтерполяційну функцію отримаємо у вигляді

$$P_1^i(x) = a_i + b_i \cdot (x - x_{i-1}) \qquad \text{якщо } x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, n}.$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів a_i, b_i, $i = \overline{1, n}$ скористаємося умовою, що у вузлових точках кожного часткового проміжку сплайн повинен набирати значення, що задані таблицею

$$P_1^i(x_{i-1}) = y_{i-1}, \qquad a_i + b_i \cdot (x_{i-1} - x_{i-1}) = y_{i-1}, \qquad a_i = y_{i-1}, \qquad i = \overline{1, n}.$$

$$P_1^i(x_i) = y_i \qquad a_i + b_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = y_i, \qquad b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \qquad i = \overline{1, n}.$$

На кожному частковому проміжку сплайн-інтерполяційна функція складається з лінійних функцій вигляду

$$P_1^i(x) = y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot (x - x_{i-1}), \qquad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, n}.$$

Похідна нульового порядку від лінійної функції – це сама функція, тому гладкого поєднання функцій не відбудеться і тому лінійний сплайн повністю збігається з інтерполяційною функцією, побудованою за допомогою лінійної багатоінтервальної інтерполяції.

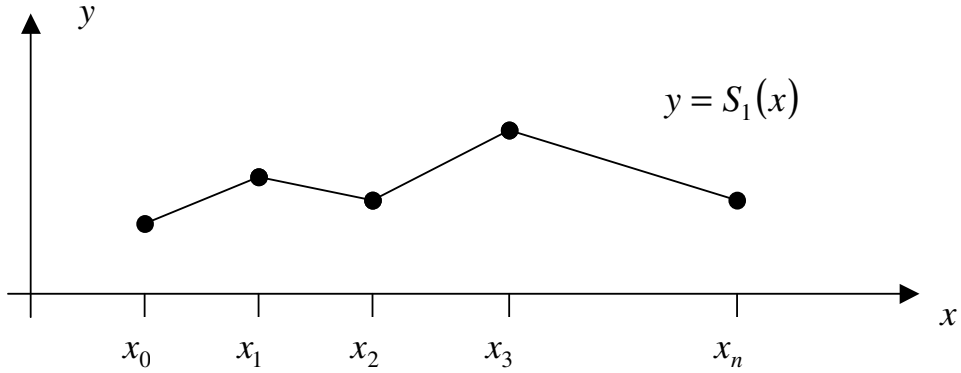


Рисунок 6.1 – Лінійний сплайн

6.3. Квадратичний сплайн

Нехай функція задана таблицею

x_0	x_1	…	x_n
y_0	y_1	…	y_n

Побудуємо *квадратичний* сплайн, тобто сплайн-інтерполяційну функцію, яка на кожному i-ому частковому проміжку є многочленом другої степені

$$S_2(x) = P_2^i(x) \qquad \text{для } x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, n}.$$

Сплайн-інтерполяційну функцію на кожному частковому проміжку представимо у вигляді

$$P_2^i(x) = a_i + b_i \cdot (x - x_{i-1}) + c_i \cdot (x - x_{i-1})^2 \qquad \text{якщо } x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, n}.$$

Введемо позначення $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$.

Для знаходження невідомих коефіцієнтів a_i, b_i, c_i, $i = \overline{1, n}$ скористаємося тими умовами, що квадратичний сплайн має бути неперервним і мати неперервну похідну першого порядку.

Неперервність функції забезпечується тим, що квадратичний сплайн у вузлових точках кожного проміжку повинен приймати значення, задані таблицею

$$P_2^i(x_{i-1}) = y_{i-1}, \qquad a_i + b_i \cdot (x_{i-1} - x_{i-1}) + c_i \cdot (x_{i-1} - x_{i-1})^2 = y_{i-1},$$

$$\text{звідки} \qquad a_i = y_{i-1}, \qquad i = \overline{1, n}.$$

$$P_2^i(x_i) = y_i \qquad a_i + b_i \cdot (x_i - x_{i-1}) + c_i \cdot (x_i - x_{i-1})^2 = y_i,$$

$$\text{звідки} \qquad b_i \cdot h_i + c_i \cdot h_i^2 = y_i - y_{i-1}, \qquad i = \overline{1, n}.$$

Для того, щоб поєднання квадратичних функцій відбувалося гладко, потрібно щоб похідна першого порядку інтерполяційної функції була неперервною, тобто щоб у внутрішніх вузлових точках виконувалася умова

$$\lim_{x \to x_i - 0} S_2'(x) = \lim_{x \to x_i + 0} S_2'(x), \qquad i = \overline{1, n-1}$$

або

$$\left(P_2^i(x_i - 0)\right)' = \left(P_2^{i+1}(x_i + 0)\right)', \qquad i = \overline{1, n-1}.$$

Одержимо вираз для похідної від інтерполяційної функції

$$\left(P_2^i(x)\right)' = b_i + 2c_i \cdot (x - x_{i-1}), \qquad i = \overline{1, n}.$$

Граничні значення похідної ліворуч і праворуч від внутрішньої вузлової точки залежать від того, з якого проміжку відбувається підхід до граничної точки

$$\left(P_2^i(x_i - 0)\right)' = b_i + 2c_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = b_i + 2c_i h_i,$$

$$\left(P_2^{i+1}(x_i + 0)\right)' = b_{i+1} + 2c_{i+1} \cdot (x_i - x_i) = b_{i+1}.$$

Порівняємо отримані вирази

$$b_i + 2c_i h_i = b_{i+1}, \qquad i = \overline{1, n-1}.$$

Для однозначного визначення всіх коефіцієнтів необхідно отримати ще одну рівність. Вона може бути отримана, якщо припустити, що на першому проміжку парабола має лінійне продовження. Цього можна

досягти, якщо кривизну на лівому кінці першого проміжку вважати рівною нулю, що визначається рівністю

$$S''(x_0)=0,$$

це означає, що

$$\left(P_2^1(x_0)\right)''=0,$$

$$\left(a_1+b_1\cdot(x-x_0)+c_1\cdot(x-x_0)^2\right)''\Big|_{x=x_0}=0,$$

$$\left(b_1+2c_1\cdot(x-x_0)\right)'\Big|_{x=x_0}=0,$$

$$c_1=0.$$

Отже, на кожному частковому проміжку квадратичний сплайн складається з функцій вигляду

$$P_2^i(x)=a_i+b_i\cdot(x-x_{i-1})+c_i\cdot(x-x_{i-1})^2 \qquad \text{якщо } x\in[x_{i-1},x_i],\quad i=\overline{1,n},$$

де коефіцієнти a_i, b_i, c_i, $i=\overline{1,n}$ є розв'язком системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_i=y_{i-1}, & i=\overline{1,n},\\ b_i\cdot h_i+c_i\cdot h_i^2=y_i-y_{i-1}, & i=\overline{1,n},\\ b_i+2c_ih_i=b_{i+1}, & i=\overline{1,n-1},\\ c_1=0. \end{cases}$$

Приклад 1. Побудувати квадратичний сплайн для функції $f(x)=\sqrt[3]{x}$ з вузлами інтерполяції $x_0=1$, $x_1=2$, $x_2=3$.

Розв'язування. Вхідні дані представимо у вигляді таблиці

x_i	1	2	3
$y_i=\sqrt[3]{x_i}$	1,000	1,260	1,442

У таблиці задано два проміжки $x\in[1,2]$ і $x\in[2,3]$, $n=2$, на кожному із проміжків побудуємо квадратичні функції так, щоб вони утворювали сплайн. Квадратичний сплайн представимо у вигляді

$$S_2(x)=\begin{cases} a_1+b_1(x-x_0)+c_1(x-x_0)^2, & x\in[x_0,x_1];\\ a_2+b_2(x-x_1)+c_2(x-x_1)^2, & x\in[x_1,x_2]. \end{cases}$$

або

$$S_2(x)=\begin{cases} a_1+b_1(x-1)+c_1(x-1)^2, & x\in[1,2];\\ a_2+b_2(x-2)+c_2(x-2)^2, & x\in[2,3]. \end{cases}$$

Невідомі коефіцієнти визначимо як розв'язки системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ при умові, що $h_1=x_1-x_0=1$, $h_2=x_2-x_1=1$.

$$\begin{cases} a_i = y_{i-1}, & i = \overline{1,2}, \\ b_i \cdot h_i + c_i \cdot h_i^2 = y_i - y_{i-1}, & i = \overline{1,2}, \\ b_i + 2c_i h_i = b_{i+1}, & i = 1, \\ c_1 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = y_0, \\ a_2 = y_1, \\ b_1 \cdot h_1 + c_1 \cdot h_1^2 = y_1 - y_0, \\ b_2 \cdot h_2 + c_2 \cdot h_2^2 = y_2 - y_1, \\ b_1 + 2c_1 h_1 = b_2, \\ c_1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 1{,}000, \\ a_2 = 1{,}260, \\ b_1 \cdot 1 + c_1 \cdot 1^2 = 1{,}260 - 1{,}000, \\ b_2 \cdot 1 + c_2 \cdot 1^2 = 1{,}442 - 1{,}260, \\ b_1 + 2c_1 \cdot 1 = b_2, \\ c_1 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 1{,}000, \\ a_2 = 1{,}260, \\ b_1 = 0{,}260, \\ b_2 = 0{,}260, \\ c_1 = 0, \\ c_2 = -0{,}078. \end{cases}$$

Одержали квадратичний сплайн у вигляді

$$S_2(x) = \begin{cases} 1{,}000 + 0{,}260 \cdot (x-1), & x \in [1, 2]; \\ 1{,}260 + 0{,}260 \cdot (x-2) - 0{,}078 \cdot (x-2)^2, & x \in [2, 3]. \end{cases}$$

який складається з лінійної функції на першому проміжку і квадратичної функції на другому проміжку, при цьому поєднання цих функцій відбувається гладко. Проілюструємо це графічно.

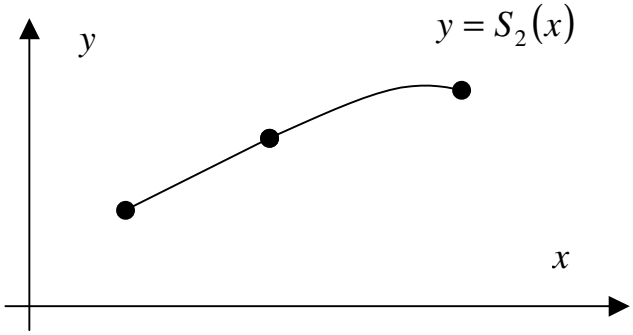


Рисунок 6.2 – Квадратичний сплайн з лінійним продовженням

6.4. Кубічний сплайн

Нехай функція задана таблицею

x_0	x_1	…	x_n
y_0	y_1	…	y_n

Побудуємо сплайн-інтерполяційну функцію, що називається *кубічним сплайном*, тобто на кожному i-ому частковому проміжку будемо представляти її многочленом третьої степені

$$S_3(x) = P_3^i(x) \qquad \text{для } x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, n}.$$

Сплайн-інтерполяційну функцію на кожному частковому проміжку $x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, n}$ будемо шукати у вигляді

$$P_3^i(x) = a_i + b_i \cdot (x - x_{i-1}) + c_i \cdot (x - x_{i-1})^2 + d_i \cdot (x - x_{i-1})^3.$$

Введемо позначення $h_i = x_i - x_{i-1}, \; i = \overline{1, n}$.

Для знаходження невідомих коефіцієнтів $a_i, b_i, c_i, d_i, \quad i = \overline{1, n}$ скористаємося умовою, що кубічний сплайн повинен бути неперервним і мати неперервні першу і другу похідні.

Неперервність функції забезпечується тим, що кубічний сплайн у вузлових точках кожного проміжку повинен приймати значення, задані таблицею

$P_3^i(x_{i-1}) = y_{i-1}, \qquad a_i + b_i \cdot (x_{i-1} - x_{i-1}) + c_i \cdot (x_{i-1} - x_{i-1})^2 + d_i \cdot (x_{i-1} - x_{i-1})^3 = y_{i-1},$

звідки $\quad a_i = y_{i-1}, \quad i = \overline{1, n}$.

$P_3^i(x_i) = y_i \qquad a_i + b_i \cdot (x_i - x_{i-1}) + c_i \cdot (x_i - x_{i-1})^2 + d_i \cdot (x_i - x_{i-1})^3 = y_i,$

звідки $\quad b_i \cdot h_i + c_i \cdot h_i^2 + d_i \cdot h_i^3 = y_i - y_{i-1}, \qquad i = \overline{1, n}$.

Неперервність першої похідної інтерполяційної функції забезпечується рівністю границь ліворуч і праворуч від всіх внутрішніх вузлових точок

$$\lim_{x \to x_i - 0} S_3'(x) = \lim_{x \to x_i + 0} S_3'(x), \qquad i = \overline{1, n-1}$$

або

$$\left(P_3^i(x_i - 0)\right)' = \left(P_3^{i+1}(x_i + 0)\right)', \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Одержимо вираз для похідної від інтерполяційної функції

$$\left(P_3^i(x)\right)' = b_i + 2c_i \cdot (x - x_{i-1}) + 3d_i \cdot (x - x_{i-1})^2, \qquad i = \overline{1, n}.$$

Граничні значення ліворуч і праворуч від внутрішньої вузлової точки визначаються виразами

$$\left(P_3^i(x_i - 0)\right)' = b_i + 2c_i \cdot (x_i - x_{i-1}) + 3d_i \cdot (x_i - x_{i-1})^2 = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2,$$

$$\left(P_3^{i+1}(x_i + 0)\right)' = b_{i+1} + 2c_{i+1} \cdot (x_i - x_i) + 3d_{i+1} \cdot (x_i - x_i)^2 = b_{i+1}.$$

Порівняємо отримані вирази

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1}, \qquad i = \overline{1, n-1}.$$

Неперервність другої похідної інтерполяційної функції забезпечується рівністю

$$\lim_{x \to x_i - 0} S_3''(x) = \lim_{x \to x_i + 0} S_3''(x), \qquad i = \overline{1, n-1}$$

або

$$\left(P_3^i(x_i - 0)\right)'' = \left(P_3^{i+1}(x_i + 0)\right)'', \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Одержимо вираз для другої похідної

$$\left(P_3^i(x)\right)'' = 2c_i + 6d_i \cdot (x - x_{i-1}), \qquad i = \overline{1, n}.$$

Граничні значення ліворуч і праворуч від внутрішньої вузлової точки визначаються виразами

$$\left(P_3^i\left(x_i-0\right)\right)'' = 2c_i + 6d_i \cdot \left(x_i - x_{i-1}\right) = 2c_i + 6d_i h_i,$$

$$\left(P_3^{i+1}\left(x_i+0\right)\right)' = 2c_{i+1} + 6d_{i+1} \cdot \left(x_i - x_i\right)^2 = 2c_{i+1}.$$

Порівняємо отримані вирази

$$c_i + 3d_i h_i = c_{i+1}, \qquad i = \overline{1, n-1}.$$

Виконаємо лінійне продовження кубічного сплайна на обох кінцях проміжку інтерполяції. Для цього задамо нульову кривизну в точках $x = x_0$ і $x = x_n$, обумовлену значеннями другої похідної в цих точках

$$S''(x_0) = 0 \quad \text{і} \qquad S''(x_n) = 0.$$

Додаткові умови дозволяють однозначно визначити всі коефіцієнти кубічного сплайну

$$\left(P_3^1\left(x_0\right)\right)'' = 2c_1 + 6d_1 \cdot \left(x_0 - x_0\right), \qquad \text{звідки} \qquad c_1 = 0,$$

$$\left(P_3^n\left(x_n\right)\right)'' = 2c_n + 6d_n \cdot \left(x_n - x_{n-1}\right), \qquad \text{звідки} \qquad c_n + 3d_n h_n = 0.$$

Отже, на кожному частковому проміжку $x \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$, $i = \overline{1, n}$ кубічний сплайн складається з функцій вигляду

$$P_3^i(x) = a_i + b_i \cdot \left(x - x_{i-1}\right) + c_i \cdot \left(x - x_{i-1}\right)^2 + d_i \cdot \left(x - x_{i-1}\right)^3,$$

де коефіцієнти a_i, b_i, c_i, d_i, $i = \overline{1, n}$ є розв'язками системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_i = y_{i-1}, & i = \overline{1, n}, \\ b_i \cdot h_i + c_i \cdot h_i^2 + d_i \cdot h_i^3 = y_i - y_{i-1}, & i = \overline{1, n}, \\ b_i + 2c_i h_i + 3d_i \cdot h_i^2 = b_{i+1}, & i = \overline{1, n-1}, \\ c_i + 3d_i h_i = c_{i+1}, & i = \overline{1, n-1}, \\ c_1 = 0, \\ c_n + 3d_n h_n = 0. \end{cases}$$

7. АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ

7.1. Постановка задачі апроксимації і метод найменших квадратів

Нехай результати спостережень представлені у вигляді таблиці

x_1	x_2	…	x_n
y_1	y_2	…	y_n

Задача апроксимації полягає в тому, що на основі даних спостережень двох кількісних ознак x і y потрібно визначити вигляд функціональної залежності однієї з них від іншої для подальшої обробки експериментальних даних.

Для розв'язування задачі апроксимації потрібно побудувати *апроксимаційну функцію*, що відображає характер залежності випадкових величин y і x, згладивши випадкові відхилення, які обумовлені різного роду похибками спостережень.

Функція $y = F(x)$ називається *апроксимаційною*, якщо вона задовольняє умовам:

1) є неперервною;
2) не обов'язково проходить через всі задані таблицею точки;
3) відображає загальну поведінку множини точок, заданих таблицею, згладжуючи випадкові відхилення.

З теоретичного аналізу задачі або за видом поля розсіювання потрібно обрати вид апроксимаційної функції, що згладжує випадкові відхилення. Це може бути лінійна, квадратична, показникова, дробово-раціональна або будь-яка інша функція, що найбільш точно відображає поле розсіювання точок на площині, заданих таблицею.

Після того, як вигляд залежності обрано, ставиться задача знаходження параметрів цієї залежності, які і визначають апроксимаційну функцію $y = F(x)$.

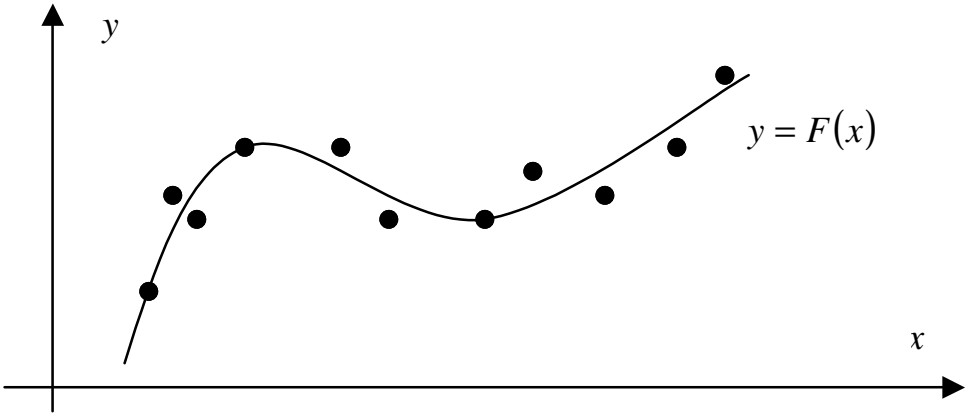


Рисунок 7.1 – Апроксимаційна функція

Однозначність побудови апроксимаційної функції визначається за методом найменших квадратів.

Відповідно до принципу максимальної правдоподібності необхідно обрати функцію виду $y = F(x, a_1, a_2, ..., a_k)$, що визначається параметрами $a_1, a_2, ..., a_k$ так, щоб сума квадратів відхилень значень функції $y = F(x_i)$ від спостережених значень y_i, $i = \overline{1, n}$, була мінімальною

$$\Phi(a_1, a_2, ..., a_k) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - F(x_i, a_1, a_2, ..., a_k))^2 \to \min .$$

Для знаходження невідомих параметрів $a_1, a_2, ..., a_k$ потрібно скористатися необхідною умовою існування екстремуму функції багатьох змінних, для цього прирівняти до нуля частинні похідні функції $y = \Phi(a_1, a_2, ..., a_k)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi(a_1, ..., a_k)}{\partial a_1} = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi(a_1, ..., a_k)}{\partial a_2} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial \Phi(a_1, ..., a_k)}{\partial a_k} = 0. \end{cases}$$

і розв'язати систему k алгебраїчних рівнянь відносно k невідомих параметрів $a_1, a_2, ..., a_k$.

Функція $y = F(x, a_1, a_2, ..., a_k)$ зі знайденими значеннями параметрів є апроксимаційною функцією і також розв'язком задачі апроксимації.

7.2. Лінійна апроксимація

Нехай апроксимаційна крива є прямою лінією, рівняння якої визначається двома параметрами

$$F(x, a, b) = ax + b .$$

За даними спостережень (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n) знайдемо такі значення параметрів a і b, щоб точки (x_i, y_i), $i = \overline{1, n}$, побудовані на площині xOy (поле розсіювання), якнайближче розташовувалися до апроксимаційної прямої, тобто сума квадратів відхилень $(y_i - (ax_i + b))$ була мінімальною

$$\Phi(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 \to \min .$$

Скористаємося необхідною умовою існування екстремуму і прирівняємо до нуля частинні похідні функції

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial a} = -2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) x_i = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial b} = -2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) = 0. \end{cases}$$

Тоді параметри a та b знайдемо як розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(x_i y_i - a x_i^2 - b x_i \right) = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - a x_i - b) = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - b \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i - a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - nb = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \dfrac{1}{n} \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i - a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \right), \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \dfrac{1}{n} \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i - a \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \right) \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \dfrac{1}{n} \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i - a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \right), \\ n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - an \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} y_i + a \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \right)^2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} y_i - n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \right)^2 - n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}, \\ b = \dfrac{1}{n} \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i - a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \right). \end{cases}$$

Отримані значення параметрів визначають лінійну апроксимаційну функцію $y = ax + b$.

7.3. Квадратична апроксимація

Нехай апроксимаційна крива буде квадратичною параболою, рівняння якої визначається трьома параметрами

$$F(x, a, b, c) = ax^2 + bx + c,$$

то за допомогою методу найменших квадратів одержимо систему алгебраїчних рівнянь для визначення параметрів a, b та c за даними спостережень (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n).

$$\Phi(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - ax_i^2 - bx_i - c\right)^2 \to \min,$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial a} = -2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \left(y_i - ax_i^2 - bx_i - c\right) x_i^2 = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial b} = -2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \left(y_i - ax_i^2 - bx_i - c\right) x_i = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial c} = -2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \left(y_i - ax_i^2 - bx_i - c\right) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(x_i^2 y_i - ax_i^4 - bx_i^3 - cx_i^2\right) = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \left(x_i y_i - ax_i^3 - bx_i^2 - cx_i\right) = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \left(y_i - ax_i^2 - bx_i - c\right) = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Значення параметрів a b і c, що є розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь, визначають квадратичну апроксимаційну функцію $y = ax^2 + bx + c$.

7.4. Степенева апроксимація

Нехай апроксимаційна функція належить до класу степеневих функцій і визначається двома параметрами a та m

$$F(x, a, m) = a \cdot x^m.$$

Візьмемо логарифм від обох частин рівності

$$\ln F(x, a, m) = \ln a + m \cdot \ln x$$

і одержимо лінійну залежність $\ln F$ від $\ln x$.

Функцію, що мінімізуємо, представимо у вигляді

$$\Phi(a, m) = \sum_{i=1}^{n} \left(\ln y_i - \ln a - m \ln x_i\right)^2 \to \min$$

і застосуємо до неї необхідну умову існування екстремуму

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial a} = -\dfrac{2}{a} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\ln y_i - m \ln x_i - \ln a\right) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial m} = -2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\ln y_i - m \ln x_i - \ln a\right) \ln x_i = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\left(\ln y_i - m\ln x_i - \ln a\right) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n}\left(\ln y_i - m\ln x_i - \ln a\right)\ln x_i = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\ln y_i - m\cdot\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - n\cdot\ln a = 0, \\ \sum_{i=1}^{n}\ln x_i \ln y_i - m\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\ln x_i\right)^2 - \ln a\cdot\sum_{i=1}^{n}\ln x_i = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\cdot\sum_{i=1}^{n}\ln y_i - n\cdot\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\cdot\ln y_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)^2 - n\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\ln x_i\right)^2}, \\ a = \exp\left[\dfrac{1}{n}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\ln y_i - m\cdot\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)\right]. \end{cases}$$

Отримані значення параметрів a та m визначають степеневу апроксимаційну функцію $y = a\cdot x^m$.

У ряді випадків, коли апроксимаційна крива не є многочленом першої або другої степені, можна за допомогою заміни змінних звести її до відповідного многочлена.

Формули знаходження значень параметрів степеневої апроксимаційної функції можуть бути отримані з формул лінійної апроксимації, якщо змінну y замінити на вираз $\ln y$, змінну x замінити на $\ln x$, параметр a замінити на m, параметр b замінити на $\ln a$.

7.5. Показникова апроксимація

Нехай апроксимаційна функція належить до класу показникових функцій, тобто має вигляд

$$F(x, a, m) = a\cdot e^{mx}$$

і характеризується двома параметрами a та m.

Візьмемо логарифм від обох частин рівності та одержимо

$$\ln F(x, a, m) = \ln a + m\cdot x,$$

що представляє собою лінійну залежність $\ln F$ від x.

Формули знаходження значень параметрів показникової апроксимаційної функції можна отримати з формул лінійної апроксимації, якщо змінну y замінити на вираз $\ln y$, параметр a замінити на m, параметр b замінити на $\ln a$, змінну x залишити без змін.

$$\begin{cases} m = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \ln y_i - n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \ln y_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i)^2}, \\ a = \exp\left[\dfrac{1}{n} \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \ln y_i - m \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)\right]. \end{cases}$$

Отримані значення параметрів a і m визначають показникову апроксимаційну функцію $y = a \cdot e^{mx}$.

7.6. Логарифмічна апроксимація

Нехай апроксимаційна функція належить класу логарифмічних функцій, тобто має вигляд

$$F(x, a, b) = a \cdot \ln x + b$$

і характеризується двома параметрами a та b.

Формули знаходження значень параметрів логарифмічної апроксимаційної функції можна отримати з формул лінійної апроксимації, якщо змінну x замінити на вираз $\ln x$.

$$\begin{cases} a = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} \ln x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} y_i - n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \ln x_i \cdot y_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \ln x_i\right)^2 - n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} (\ln x_i)^2}, \\ b = \dfrac{1}{n} \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i - a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \ln x_i\right). \end{cases}$$

Отримані значення параметрів a та b визначають логарифмічну апроксимаційну функцію $y = a \cdot \ln x + b$.

7.7. Дробово-лінійна апроксимація

Нехай апроксимаційна функція належить до класу дробово-лінійних функцій, тобто має вигляд

$$F(x, a, b) = \frac{1}{ax + b}$$

і характеризується двома параметрами a й b.

Розглянемо функцію, зворотну до обраної,

$$\frac{1}{F(x, a, b)} = ax + b$$

і одержимо лінійну залежність виразу $\dfrac{1}{F}$ від змінної x.

Формули знаходження значень параметрів дробово-лінійної апроксимаційної функції можна отримати з формул лінійної апроксимації, якщо змінну y замінити на вираз $\frac{1}{y}$.

$$\begin{cases} a = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{y_i} - n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{y_i}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}, \\ b = \dfrac{1}{n} \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{y_i} - a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right). \end{cases}$$

Отримані значення параметрів a та b визначають дробово-лінійну апроксимаційну функцію $y = \frac{1}{ax+b}$.

7.8. Гіперболічна апроксимація

Нехай апроксимаційна функція належить до класу гіперболічних функцій, тобто має вигляд

$$F(x,a,b) = \frac{a}{x} + b \qquad \text{або} \qquad F(x,a,b) = a \cdot \frac{1}{x} + b,$$

описується двома параметрами a та b, і є лінійною функцією F від $\frac{1}{x}$.

Формули знаходження значень параметрів гіперболічної апроксимаційної функції можна отримати з формул лінійної апроксимації, якщо змінну x замінити на вираз $\frac{1}{x}$.

$$\begin{cases} a = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} y_i - n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{y_i}{x_i}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i}\right)^2 - n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{1}{x_i}\right)^2}, \\ b = \dfrac{1}{n} \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i - a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i}\right). \end{cases}$$

Отримані значення параметрів a та b визначають гіперболічну апроксимаційну функцію $y = \frac{a}{x} + b$.

7.9. Дробово-раціональна апроксимація

Нехай апроксимаційна функція належить до класу дробово-раціональних функцій, тобто має вигляд

$$F(x,a,b)=\frac{x}{ax+b}$$

і описується двома параметрами a та b.

Розглянемо функцію, зворотну до обраної,

$$\frac{1}{F(x,a,b)}=a+b\cdot\frac{1}{x}$$

і одержимо лінійну залежність $\frac{1}{F}$ від $\frac{1}{x}$.

Формули знаходження значень параметрів дробово-раціональної апроксимаційної функції можна отримати з формул лінійної апроксимації, якщо змінну y замінити на вираз $\frac{1}{y}$, змінну x замінити на вираз $\frac{1}{x}$, коефіцієнти a та b поміняти місцями.

$$\begin{cases} b=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{y_i}-n\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i y_i}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}\right)^2-n\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{1}{x_i}\right)^2}, \\ a=\dfrac{1}{n}\cdot\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{y_i}-b\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}\right). \end{cases}$$

Отримані значення параметрів a та b визначають дробово-раціональну апроксимаційну функцію $y=\frac{x}{ax+b}$.

8. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ

8.1. Загальні відомості. Постановка задачі

Багато інженерних задач потребують знаходження розв'язку диференціального рівняння, що задовольняє певним початковим умовам. Однак одержати точний розв'язок вдається лише в окремих спеціальних випадках, але при цьому часто одержують вираз, що містить потрібну функцію в неявному вигляді, що ускладнює використання такого розв'язку.

Тому в інженерній практиці доводиться користуватися наближеними методами інтегрування диференціальних рівнянь. Ці методи умовно поділяються на *аналітичні* (методи побудови наближених формул), *чисельні* (розв'язок одержують у табличному вигляді) і *графічні*. Ми зупинимося на вивченні чисельних методів. Для початку згадаємо основні постановки задач.

Задачею Коші (або початковою задачею) для диференціального рівняння першого порядку називається задача знаходження розв'язку диференціального рівняння

$$y' = f(x, y)$$

при заданій початковій умові

$$y(x_0) = y_0 .$$

Розв'язком задачі Коші вважається функція $y = y(x)$, що є розв'язком диференціального рівняння, графік якої проходить через точку з координатами (x_0, y_0).

Задачею Коші для диференційного рівняння n-го порядку називається задача знаходження розв'язку диференціального рівняння

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x)\right)$$

при заданих початкових умовах

$$y(x_0) = a_1, \quad y'(x_0) = a_2, \ \ldots, \qquad y^{(n-1)}(x_0) = a_n .$$

Розв'язком задачі Коші вважається функція $y = y(x)$, що є розв'язком диференціального рівняння та задовольняє всім початковим умовам $y(x_0) = a_1, \quad y'(x_0) = a_2, \ \ldots, \qquad y^{(n-1)}(x_0) = a_n \ldots$

Задачею Коші для системи диференціальних рівнянь першого порядку називається задача знаходження розв'язку системи рівнянь вигляду

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases}$$

при заданих початкових умовах

$$y_1(x_0) = a_1, \qquad y_2(x_0) = a_2, \ldots, \qquad y_n(x_0) = a_n .$$

Розв'язком задачі Коші вважаються функції $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$, що є розв'язком системи рівнянь і задовольняють початковим умовам $y_1(x_0)=a_1$, $y_2(x_0)=a_2$, …, $y_n(x_0)=a_n$.

При розв'язуванні диференціальних рівнянь n-го порядку чисельними методами потрібно перетворювати їх у відповідні системи диференціальних рівнянь першого порядку.

Наведемо алгоритм такого перетворення. Для цього розглянемо задачу Коші для рівняння n-го порядку

$$y^{(n)}(x)=f\left(x, y(x), y'(x),..., y^{(n-1)}(x)\right),$$

$$y(x_0)=a_1,\quad y'(x_0)=a_2,\ \ldots,\quad y^{(n-1)}(x_0)=a_n.$$

Введемо до розгляду допоміжні функції

$$z_1(x)=y(x),\qquad z_2(x)=y'(x),\qquad \ldots,\qquad z_n(x)=y^{(n-1)}(x).$$

Знайдемо від них похідні

$$z_1'(x)=y'(x),\qquad z_2'(x)=y''(x),\qquad \ldots,\qquad z_n'(x)=y^{(n)}(x)$$

і запишемо їх через нові змінні

$$z_1'(x)=z_2(x),\qquad z_2'(x)=z_3(x),\qquad \ldots,\qquad z_n'(x)=f(x, z_1(x), z_2(x),..., z_n(x)).$$

З врахуванням введених позначень, запишемо початкові умови

$$z_1(x_0)=a_1,\ z_2(x_0)=a_2,\ldots,\qquad z_n(x_0)=a_n.$$

Поєднуючи отримані рівності, запишемо задачу Коші для системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} z_1'(x)=z_2(x), & z_1(x_0)=a_1, \\ z_2'(x)=z_3(x), & z_2(x_0)=a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n'(x)=f(x, z_1(x), z_2(x),..., z_n(x)), & z_n(x_0)=a_n, \end{cases}$$

еквівалентну задачі Коші для диференціального рівняння n-го порядку. Розв'язком системи з початковими умовами є функції $z_1(x)$, $z_2(x)$, …, $z_n(x)$, які дозволяють визначити розв'язок диференціального рівняння n-го порядку у вигляді функції $y(x)=z_1(x)$.

При розв'язуванні диференціальних рівнянь та їх систем на практиці будемо застосовувати чисельні методи, які дозволяють визначити потрібні функції в табличному вигляді.

8.2. Метод Ейлера розв'язування диференціального рівняння першого порядку

Розглянемо задачу розв'язування диференціального рівняння

$$y'=f(x, y)$$

при заданій початковій умові

$$y(x_0)=y_0$$

на відрізку $x\in[a; b]$.

Для знаходження чисельного розв'язку задачі розіб'ємо проміжок інтегрування $[a; b]$ на n рівних частин, довжина яких $h = (b-a)/n$.

Число h називається *шагом інтегрування*. Значення функції $y = y(x)$ будемо визначати в точках розбиття

$$x_0 = a, \quad x_i = x_0 + i \cdot h, \quad i = \overline{1,n}, \quad x_n = b.$$

Метод Ейлера найбільш простий з усіх методів чисельного розв'язування диференціальних рівнянь. Геометрично він полягає в тому, що на малому відрізку $x \in [x_k; x_{k+1}]$ розв'язок $y = y(x)$ диференціального рівняння заміняється відрізком її дотичної в точці $(x_k; y(x_k))$ (рис. 8.1).

На першому відрізку $x \in [x_0; x_1]$ проводимо дотичну до графіка потрібної функції $y = y(x)$ в точці з координатами $(x_0; y_0)$, тобто пряму з кутовим коефіцієнтом $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, рівняння якої

$$y - y_0 = f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0).$$

Визначимо значення $y = y_1$ на дотичній в точці $x = x_1$, при цьому одержимо

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot (x_1 - x_0) \quad \text{або} \quad y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot h.$$

Число y_1 вважаємо наближеним значенням розв'язку в точці x_1.

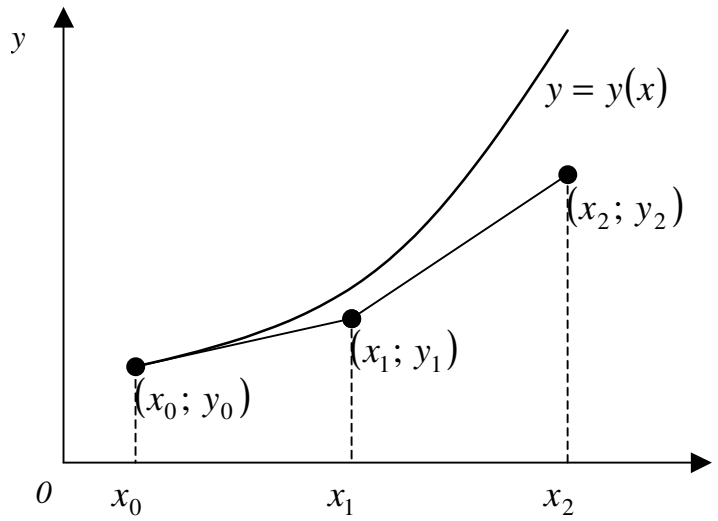


Рисунок 8.1 – Графічна ілюстрація методу Ейлера

Повторюємо ту ж процедуру на відрізку $x \in [x_1; x_2]$. А саме, будуємо дотичну до графіка функції, що проходить через точку з координатами $(x_1; y_1)$, тобто пряму з кутовим коефіцієнтом $y'(x_1) = f(x_1, y_1)$, рівняння якої

$$y - y_1 = f(x_1, y_1) \cdot (x - x_1),$$

і знаходимо ординату y_2 точки $(x_2; y_2)$, що лежить на цій прямій,

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1) \cdot (x_2 - x_1) \quad \text{або} \quad y_2 = y_1 + f(x_1, y_1) \cdot h.$$

Число y_2 вважаємо наближеним значенням розв'язку в точці x_2.

Продовжуємо цю процедуру доти, поки не одержимо відрізок $x \in [x_{n-1}; x_n]$ і не визначимо

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1}) \cdot h.$$

Число y_n вважаємо наближеним значенням розв'язку в точці x_n.

Тим самим, за допомогою методу Ейлера одержимо множину значень аргументу $x_0, x_1, ..., x_n$ і відповідну множину значень функції $y_0, y_1, ..., y_n$, які є чисельним розв'язком диференціального рівняння в табличному вигляді.

З'єднавши точки $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, …, $(x_n; y_n)$ відрізками прямих, одержимо ламану лінію, що відображає наближений графік функції, яка є розв'язком диференціального рівняння із заданою початковою умовою. Цю ламану лінію називають *ламаною Ейлера.* Ця ламана є кусково-лінійною функцією і наближеним розв'язком задачі на відрізку $x \in [a; b]$.

Алгоритм методу Ейлера.

Нехай відомі:

– функція $f(x, y)$ з диференціального рівняння $y' = f(x, y)$,
– початкові значення x_0, y_0,
– проміжок інтегрування $[a; b]$.

1. Задамо число n точок розподілу відрізка $[a; b]$ на частини та обчислимо шаг інтегрування $h = \dfrac{b-a}{n}$. Візьмемо $k = 0$.
2. На k-ому кроці виконаємо обчислення по ітераційних формулах методу Ейлера
$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot h,$$
$$x_{k+1} = x_k + h,$$
$$k = k + 1.$$
3. Якщо $k < n$, то переходимо до пункту 2, інакше до пункту 4.
4. Отримані значення $y_0, y_1, ..., y_n$ є значеннями розв'язку рівняння в точках $x_0, x_1, ..., x_n$.

Обчислення за методом Ейлера доцільно оформляти у вигляді таблиці. Для наочності можна побудувати ламану Ейлера, що приблизно є інтегральною кривою задачі Коші.

У теорії диференціальних рівнянь доводиться, що якщо функція $f(x, y)$ в диференціальному рівнянні, задовольняє умовам Коші, то послідовність ламаних Ейлера при необмеженому збільшенні числа точок розбиття ($n \to \infty$) прямує до граничної функції $y = y(x)$, що є єдиним розв'язком задачі Коші.

Похибка при заміні розв'язку $y = y(x)$ ламаною Ейлера, що обчислюється в точці x_n, має порядок $\dfrac{1}{n}$ або h. Тому, чим менше шаг інтегрування h, тим краще наближений розв'язок відповідає точному.

Частіше для оцінки точності наближеного розв'язку y_n в точці x_n, отриманого із шагом h, повторюють обчислення з подвоєним шагом $2h$ і визначають абсолютну похибку $\Delta(y_n)$ за формулою
$$\Delta(y_n) = | y_n - \hat{y}_n |,$$
де $\hat{y}_n$ – наближений розв'язок в точці x_n, отриманий з шагом $2h$.

Приклад. Знайти чисельний розв'язок диференціального рівняння $y' = \frac{1}{2}xy$; $y(0) = 1$; $x \in [0; 1]$; $n = 5$.

Розв'язування. Розв'язком рівняння є функція $y = y(x)$, що одержана за методом Ейлера у вигляді таблиці, де $h = 0.2$:

$k = 0$, $x_0 = 0.0$, $y_0 = 1.000000$;

$k = 1$, $x_1 = 0.2$, $y_1 = y_0 + 0.5x_0y_0h$, $y_1 = 1.000000$;

$k = 2$, $x_2 = 0.4$, $y_2 = y_1 + 0.5x_1y_1h$, $y_2 = 1.020000$;

$k = 3$, $x_3 = 0.6$, $y_3 = y_2 + 0.5x_2y_2h$, $y_3 = 1.060800$;

$k = 4$, $x_4 = 0.8$, $y_4 = y_3 + 0.5x_3y_3h$, $y_4 = 1.124448$;

$k = 5$, $x_5 = 1.0$, $y_5 = y_4 + 0.5x_4y_4h$, $y_5 = 1.214404$.

8.3. Модифікований метод Ейлера розв'язування диференціального рівняння першого порядку

Розглянемо модифікацію методу Ейлера, суть якої полягає в тому, що на малому відрізку $x \in [x_k; x_{k+1}]$ розв'язок $y = y(x)$ диференціального рівняння замінюється відрізком прямої лінії, що проходить через точку $(x_k; y(x_k))$, але з кутовим коефіцієнтом, обраним з урахуванням поводження функції в задачі $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

Нехай відрізок $x \in [a; b]$ розділений на n рівних частин з шагом $h = (b-a)/n$ точками розподілу $x_0 = a$, $x_i = x_0 + i \cdot h$, $i = \overline{1, n}$, $x_n = b$ та нехай знайдені $y_0, y_1, ..., y_k$ – наближені значення розв'язку відповідно до точок $x_0, x_1, ..., x_k$. Розглянемо відрізок $x \in [x_k; x_{k+1}]$ і для визначення y_{k+1} використаємо наступний геометричний аналіз (рис. 8.2).

До графіка функції $y = y(x)$ проведемо дотичну в точці (x_k, y_k), тобто пряму з кутовим коефіцієнтом $\alpha_1 = f(x_k, y_k)$, рівняння якої

$$y - y_k = f(x_k, y_k) \cdot (x - x_k).$$

На дотичній визначимо додаткове значення y^*, відповідне до $x^* = x_k + \frac{h}{2}$:

$$y^* = y_k + f(x_k, y_k) \cdot (x^* - x_k) \quad \text{або} \quad y^* = y_k + f(x_k, y_k) \cdot \frac{h}{2}.$$

У точці (x^*, y^*) визначимо кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $\alpha_2 = f(x^*, y^*)$, і із точки (x_k, y_k) проведемо пряму в цьому напрямку

$$y - y_k = f(x^*, y^*) \cdot (x - x_k).$$

На отриманій прямій визначимо значення $y = y_{k+1}$, відповідне до значення $x = x_{k+1}$:

$$y_{k+1} = y_k + f(x^*, y^*) \cdot h.$$

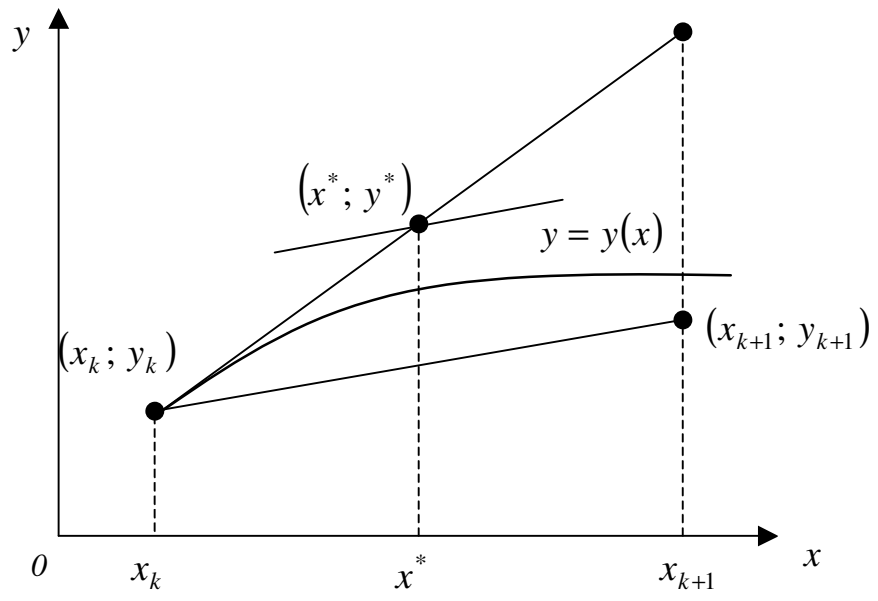


Рисунок 8.2 – Графічна ілюстрація модифікованого методу Ейлера

Випишемо ітераційні формули модифікованого методу Ейлера:

$$\alpha_1 = f(x_k, y_k),$$

$$\alpha_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \alpha_1 \cdot \frac{h}{2}\right),$$

$$y_{k+1} = y_k + \alpha_2 \cdot h,$$

$$x_{k+1} = x_k + h.$$

Алгоритм модифікованого методу Ейлера.

Нехай відомі:

– функція $f(x, y)$ з диференціального рівняння $y' = f(x, y)$,
– початкові значення x_0, y_0,
– проміжок інтегрування $[a; b]$.

1. Задамо число n точок розподілу відрізка $[a; b]$ на частинні і обчислимо шаг інтегрування $h = \dfrac{b-a}{n}$. Візьмемо $k = 0$.
2. На k-ому кроці виконаємо обчислення за ітераційними формулами модифікованого методу Ейлера

$$\alpha_1 = f(x_k, y_k),$$

$$\alpha_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \alpha_1 \cdot \frac{h}{2}\right),$$

$$y_{k+1} = y_k + \alpha_2 \cdot h,$$

$$x_{k+1} = x_k + h,$$

$$k = k + 1.$$

3. Якщо $k < n$, то переходимо до пункту 2, інакше до пункту 4.
4. Отримані значення $y_0, y_1, ..., y_n$ є наближеними значеннями розв'язку рівняння в точках $x_0, x_1, ..., x_n$.

Обчислення доцільно оформляти у вигляді таблиці.

Знаходячи наближений розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку модифікованим методом Ейлера, ми на кожному кроці уточнюємо кутовий коефіцієнт відрізків ламаної лінії й одержуємо розв'язок точніше, ніж за методом Ейлера. З теорії наближених методів відомо, що різниця між наближеним значенням y_k у точці x_k і точним значенням $y(x_k)$ оцінюється нерівністю

$$|y_k - y(x_k)| < Ch^3.$$

Ця похибка має порядок h^3 на кожному кроці (тобто при переході від y_k до y_{k+1}). Однак з кожним кроком відбувається накопичення похибки, і в точці $x_n = b$ похибка вже буде мати порядок h^2 (точніше, ніж за методом Ейлера, де похибка порядку h).

Для оцінки похибки наближеного розв'язку y_n в точці x_n, отриманого з шагом h, повторюють обчислення із кроком $2h$, і абсолютну похибку $\Delta(y_n)$ беруть рівною

$$\Delta(y_n) = \frac{1}{3}|y_n - \widehat{y}_n|.$$

де $\widehat{y}_n$ – наближене розв'язок в точці x_n з шагом $2h$.

Ця оцінка – є оцінкою модифікованого методу Ейлера і не враховує похибку, одержану за рахунок округлення чисел при обчисленнях.

8.4. Удосконалений метод Ейлера розв'язування диференціального рівняння першого порядку (метод Ейлера-Коші)

Розглянемо задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Нехай відрізок $x \in [a; b]$ розділений на n рівних частин ($h = (b-a)/n$) точками $x_0 = a$, $x_i = x_0 + i \cdot h$, $i = \overline{1,n}$, $x_n = b$ і знайдені $y_0, y_1, ..., y_k$ – наближені значення розв'язку відповідно у точках $x_0, x_1, ..., x_k$. Розглянемо відрізок $x \in [x_k; x_{k+1}]$ і визначимо y_{k+1} наступним чином.

До графіка функції $y = y(x)$ проведемо дотичну в точці (x_k, y_k), тобто пряму з кутовим коефіцієнтом $\alpha_1 = f(x_k, y_k)$, рівняння якої

$$y - y_k = f(x_k, y_k) \cdot (x - x_k).$$

На дотичній визначимо допоміжне значення y^* в точці x_{k+1}:

$$y^* = y_k + f(x_k, y_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) \qquad \text{або} \qquad y^* = y_k + f(x_k, y_k) \cdot h.$$

В точці (x_{k+1}, y^*) визначимо кутовий коефіцієнт дотичної до графіку функції $\alpha_2 = f(x_{k+1}, y^*)$.

З точки (x_k, y_k) проведемо пряму в напрямку $\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$, враховуючи поводження функції $y = y(x)$ на поточному і наступному проміжках

$$y - y_k = \alpha \cdot (x - x_k).$$

На отриманій прямій визначимо значення $y = y_{k+1}$, в точці $x = x_{k+1}$ (рис. 8.3):

$$y_{k+1} - y_k = \alpha \cdot (x_{k+1} - x_k) \qquad \text{або} \qquad y_{k+1} = y_k + \alpha \cdot h.$$

Випишемо ітераційні формули удосконаленого методу Ейлера (методу Ейлера-Коші):

$$\alpha_1 = f(x_k, y_k), \quad \alpha_2 = f(x_k + h, y_k + \alpha_1 \cdot h),$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \cdot h,$$

$$x_{k+1} = x_k + h.$$

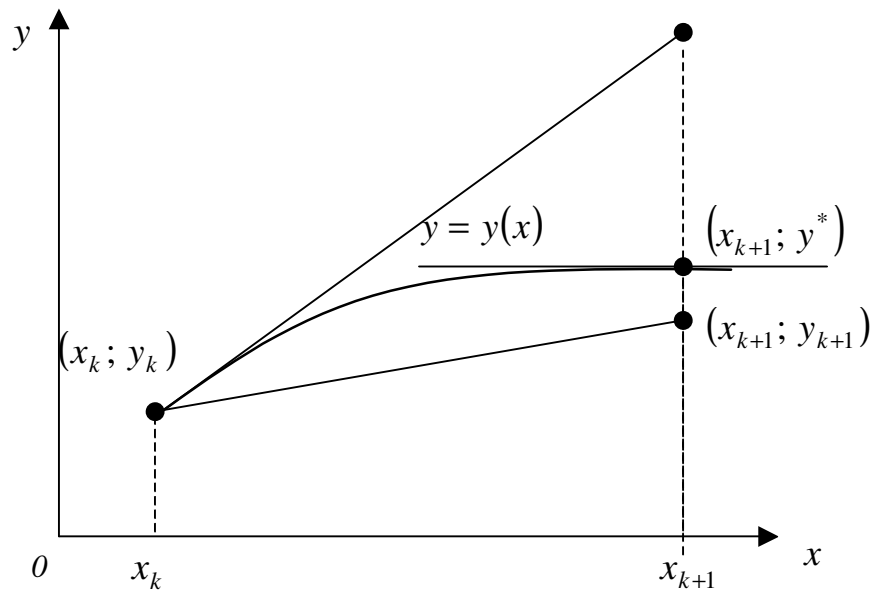


Рисунок 8.3 – Графічна ілюстрація удосконаленого методу Ейлера

Алгоритм *удосконаленого методу Ейлера.*

Нехай відомі:

– функція $f(x, y)$ з диференціального рівняння $y' = f(x, y)$,
– початкові значення x_0, y_0,
– проміжок інтегрування $[a; b]$.

1. Задамо число n точок розподілу відрізка $[a; b]$ на часткові й обчислимо шаг інтегрування $h = (b - a)/n$. Візьмемо $k = 0$.
2. На k-ому кроці виконаємо обчислення за ітераційними формулами удосконаленого методу Ейлера (методу Ейлера-Коші)

$$\alpha_1 = f(x_k, y_k), \quad \alpha_2 = f(x_k + h, y_k + \alpha_1 \cdot h),$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \cdot h,$$

$$x_{k+1} = x_k + h, \qquad k = k + 1.$$

3. Якщо $k < n$, то переходимо до пункту 2, інакше до пункту 4.
4. Отримані значення $y_0, y_1, ..., y_n$ є наближеними значеннями розв'язку рівняння в точках $x_0, x_1, ..., x_n$.

Оцінка похибки розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку удосконаленим методом Ейлера виконується як і в модифікованому методі Ейлера.

8.5. Методи Рунге–Кутта розв'язування звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

Група методів Рунге-Кутта дозволяє одержати розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку із заданим степенем точності залежно від обраного порядку методу. Ітераційні формули методів можна отримати за загальною схемою, що пропонується до розгляду.

Для диференціального рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y)$$

при заданій початковій умові

$$y(x_0) = y_0$$

потрібно одержати ітераційні формули для знаходження значення $y(x+h)$ за відомими значеннями x, $y(x)$ та h.

Необхідне значення будемо шукати у вигляді

$$y(x+h) \approx y(x) + p_1 \cdot k_1(h) + p_2 \cdot k_2(h) + ... + p_q \cdot k_q(h),$$

де

$$k_1(h) = h \cdot f(x, y),$$
$$k_2(h) = h \cdot f(x + a_2 \cdot h,\ y + b_{21} \cdot k_1(h)),$$
$$k_3(h) = h \cdot f(x + a_3 \cdot h,\ y + b_{31} \cdot k_1(h) + b_{32} \cdot k_2(h)),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$k_q(h) = h \cdot f(x + a_q \cdot h,\ y + b_{q1} \cdot k_1(h) + ... + b_{q,q-1} \cdot k_{q-1}(h)).$$

У наведених формулах $k_1(h), k_2(h), ..., k_q(h)$ – допоміжні напрямки, які використовуються на кожному кроці інтегрування для одержання значення $y(x+h)$ за відомим значенням $y(x)$, що дозволяє найбільш точно дослідити поведінку потрібної функції на проміжку довжиною h.

При цьому кількість обраних допоміжних напрямків визначає число q – *порядок ітераційного методу*.

Параметри $p_1, p_2, ..., p_q$, $a_2, a_3, ..., a_q$, $b_{21}, b_{31}, b_{32}, ..., b_{q,q-1}$ доки невідомі. Для їх визначення розглянемо ще одну функцію

$$R(h) = y(x+h) - y(x) - p_1 \cdot k_1(h) - p_2 \cdot k_2(h) - ... - p_q \cdot k_q(h),$$

що визначає різницю між точним значенням невідомої функції та значенням, отриманим за допомогою методу Рунге-Кутта.

Якщо похибка $R(h)$ задовольняє умовам

$$R(0) = 0, \quad R'(0) = 0, \quad \ldots, \quad R^{(s)}(0) = 0, \qquad R^{(s+1)}(0) \neq 0,$$

то найвищий порядок похідної, що дорівнює нулю, тобто число s, називається *порядком похибки ітераційного методу,* це означає, що похибка обраного методу Рунге-Кутта визначається величиною h^s.

8.5.1. Метод Рунге-Кутта першого порядку

Розглянемо метод Рунге-Кутта при $q=1$ і одержимо ітераційні формули методів першого порядку

$$y(x+h) \approx y(x) + p_1 \cdot k_1(h), \qquad \text{де} \qquad k_1(h) = h \cdot f(x, y),$$

звідки

$$y(x+h) \approx y(x) + p_1 \cdot h \cdot f(x, y).$$

Перевіримо виконання умов для похибки методу $R(h)$:

$R(h) = y(x+h) - y(x) - p_1 \cdot h \cdot f(x, y).$

$R(0) = y(x+0) - y(x) - p_1 \cdot 0 \cdot f(x, y) = 0$ для кожного $f(x, y) \neq 0$.

$R'(h) = y'(x+h) - p_1 \cdot f(x, y).$

$R'(0) = y'(x+0) - p_1 \cdot f(x, y) = f(x, y) - p_1 \cdot f(x, y) = (1 - p_1) \cdot f(x, y) = 0,$

звідки $p_1 = 1$ для кожного $f(x, y) \neq 0$.

$R''(h) = y''(x+h).$

$R''(0) = y''(x+0) = f'_x + f'_y \cdot f(x, y) \neq 0.$

Одержали виконання умов

$$R(0) = 0, \quad R'(0) = 0, \quad R''(0) \neq 0.$$

Це означає, що похибка методу Рунге-Кутта першого порядку визначається величиною h, тобто порядок похибки дорівнює $s = 1$.

При знайденому значенні $p_1 = 1$ ітераційні формули методу Рунге-Кутта першого порядку набирають вигляду

$$y(x+h) \approx y(x) + h \cdot f(x, y)$$

або

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot h,$$
$$x_{k+1} = x_k + h.$$

Отримані формули відповідають ітераційним формулам методу Ейлера. Можна зробити висновок, що метод Ейлера є методом першого порядку і при його застосуванні допускається похибка, що визначена величиною h, а порядок похибки дорівнює $s = 1$.

8.5.2. Методи Рунге-Кутта другого порядку

Розглянемо методи Рунге-Кутта при $q = 2$ і одержимо ітераційні формули методів другого порядку

$$y(x+h) \approx y(x) + p_1 \cdot k_1(h) + p_2 \cdot k_2(h),$$

де

$$k_1(h) = h \cdot f(x, y),$$
$$k_2(h) = h \cdot f(x + a_2 \cdot h,\ y + b_{21} \cdot k_1(h)),$$

звідки

$$y(x+h) \approx y(x) + p_1 \cdot h \cdot f(x, y) + p_2 \cdot h \cdot f(x + a_2 \cdot h,\ y + b_{21} \cdot h \cdot f(x, y)).$$

Перевіримо виконання умов для похибки методу $R(h)$:

$$R(h) = y(x+h) - y(x) - p_1 \cdot h \cdot f(x, y) - p_2 \cdot h \cdot f(x + a_2 \cdot h,\ y + b_{21} \cdot h \cdot f(x, y)).$$

$$R(0) = y(x+0) - y(x) - p_1 \cdot 0 \cdot f(x, y) - p_2 \cdot 0 \cdot f(x,\ y) = 0.$$

$$R'(h) = y'(x+h) - p_1 \cdot f(x, y) - p_2 \cdot f(x + a_2 \cdot h,\ y + b_{21} \cdot h \cdot f(x, y)) -$$
$$- p_2 \cdot h \cdot \left(f'_x \cdot a_2 + f'_y \cdot b_{21} \cdot f(x, y)\right).$$

$$R'(0) = y'(x+0) - p_1 \cdot f(x, y) - p_2 \cdot f(x,\ y) - p_2 \cdot 0 =$$
$$= f(x, y) - p_1 \cdot f(x, y) - p_2 \cdot f(x, y) =$$
$$= (1 - p_1 - p_2) \cdot f(x, y) = 0,$$

звідки $p_1 + p_2 = 1$ для кожного $f(x, y) \neq 0$.

$$R''(h) = y''(x+h) - 2p_2 \cdot \left(f'_x \cdot a_2 + f'_y \cdot b_{21} \cdot f(x, y)\right) -$$
$$- p_2 \cdot h \cdot \left(f'_x \cdot a_2 + f'_y \cdot b_{21} \cdot f(x, y)\right)'.$$

$$R''(0) = y''(x+0) - 2p_2 \cdot \left(f'_x \cdot a_2 + f'_y \cdot b_{21} \cdot f(x, y)\right) - p_2 \cdot 0 =$$
$$= f'_x + f'_y \cdot f(x, y) - 2p_2 \cdot \left(f'_x \cdot a_2 + f'_y \cdot f(x, y) \cdot b_{21}\right) =$$
$$= (1 - 2p_2 a_2) \cdot f'_x + (1 - 2p_2 b_{21}) \cdot f'_y \cdot f(x, y) = 0.$$

З останньої рівності одержимо систему ще двох рівнянь для визначення невідомих параметрів

$$\begin{cases} 1 - 2p_2 a_2 = 0, \\ 1 - 2p_2 b_{21} = 0. \end{cases}$$

Як би ми не підбирали значення параметрів, третю похідну

$$R'''(0) = \left(1 - 3p_2 a_2^2\right) \cdot f''_{xx} + 2 \cdot (1 - 3p_2 a_2 b_{21}) \cdot f \cdot f''_{xy} + \left(1 - 3p_2 b_{21}^2\right) \cdot f \cdot f''_{yy} +$$
$$+ \left(f'_x + f \cdot f'_y\right) \cdot f'_y$$

перетворити на нуль неможливо $R'''(0) \neq 0$ для довільної функції $f(x, y) \neq 0$ через останній доданок.

Одержали виконання умов

$$R(0) = 0, \quad R'(0) = 0, \quad R''(0) = 0, \quad R'''(0) \neq 0.$$

Це означає, що похибка методів Рунге-Кутта другого порядку визначається величиною h^2, тобто порядок похибки дорівнює $s = 2$.

Для визначення невідомих параметрів одержали систему рівнянь

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 1, \\ 1 - 2p_2 a_2 = 0, \\ 1 - 2p_2 b_{21} = 0. \end{cases}$$

Довільно задаючи значення одного з параметрів і визначаючи значення інших параметрів із системи, ми будемо одержувати різні методи Рунге-Кутта другого порядку з порядком похибки $s = 2$.

1) Нехай $p_1 = 0$, тоді $p_2 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $b_{21} = \frac{1}{2}$.

Ітераційні формули одного з методів Рунге-Кутта другого порядку набирають вигляду

$$k_1(h) = h \cdot f(x, y),$$

$$k_2(h) = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2},\ y + \frac{k_1(h)}{2}\right),$$

звідки

$$y(x+h) \approx y(x) + h \cdot f\left(x + \frac{h}{2},\ y + \frac{h}{2} \cdot f(x, y)\right)$$

або

$$k_1 = h \cdot f(x_k,\ y_k),$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$y_{k+1} = y_k + k_2,$$

$$x_{k+1} = x_k + h.$$

Отримані формули збігаються з ітераційними формулами модифікованого методу Ейлера, що і є одним з методів Рунге-Кутта другого порядку і при його застосуванні допускається похибка, що визначається величиною h^2, а порядок похибки $s = 2$.

2) Нехай $p_1 = \frac{1}{2}$, тоді $p_2 = \frac{1}{2}$, $a_2 = 1$, $b_{21} = 1$.

Ітераційні формули ще одного методу Рунге-Кутта другого порядку набирають вигляду

$$k_1(h) = h \cdot f(x, y),$$

$$k_2(h) = h \cdot f(x + h,\ y + k_1(h)),$$

звідки

$$y(x+h) \approx y(x) + \frac{h}{2} \cdot f(x, y) + \frac{h}{2} \cdot f(x + h,\ y + h \cdot f(x, y))$$

або

$$k_1 = h \cdot f(x_k,\ y_k),$$

$$k_2 = h \cdot f(x_k + h,\ y_k + k_1),$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{k_1 + k_2}{2},$$

$$x_{k+1} = x_k + h.$$

Отримані формули збігаються з ітераційними формулами удосконаленого методу Ейлера, що також є методом Рунге-Кутта другого порядку і при його застосуванні допускається похибка, що визначається величиною h^2, а порядок похибки $s = 2$.

3) Розглянемо ще одну модифікацію методу Рунге-Кутта другого порядку. Нехай $p_1 = \frac{1}{4}$, тоді $p_2 = \frac{3}{4}$, $a_2 = \frac{2}{3}$, $b_{21} = \frac{2}{3}$.

Ітераційні формули ще одного методу Рунге-Кутта другого порядку набирають вигляду

$$k_1(h) = h \cdot f(x, y),$$

$$k_2(h) = h \cdot f\left(x + \frac{2}{3} \cdot h,\ y + \frac{2}{3} \cdot k_1(h)\right),$$

звідки

$$y(x+h) \approx y(x) + \frac{h}{4} \cdot f(x, y) + \frac{3h}{4} \cdot f\left(x + \frac{2}{3} \cdot h,\ y + \frac{2h}{3} \cdot f(x, y)\right)$$

або

$$k_1 = h \cdot f(x_k,\ y_k),$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_k + \frac{2}{3} \cdot h,\ y_k + \frac{2}{3} \cdot k_1\right),$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{4} \cdot k_1 + \frac{3}{4} \cdot k_2,$$

$$x_{k+1} = x_k + h.$$

Представлено ітераційні формули ще одного з методів Рунге-Кутта другого порядку, при його застосуванні допускається похибка порядку h^2, де порядок похибки $s = 2$.

Різних модифікацій методів Рунге-Кутта другого порядку може бути отримано багато, який з них краще застосувати при розв'язуванні того або іншого диференціального рівняння залежить від особливостей самого рівняння.

8.5.3. Методи Рунге-Кутта третього порядку

Розглянемо методи Рунге-Кутта при $q = 3$ і одержимо ітераційні формули методів третього порядку

$$y(x+h) \approx y(x) + p_1 \cdot k_1(h) + p_2 \cdot k_2(h) + p_3 \cdot k_3(h),$$

де

$$k_1(h) = h \cdot f(x, y),$$

$$k_2(h) = h \cdot f(x + a_2 \cdot h,\ y + b_{21} \cdot k_1(h)),$$

$$k_3(h) = h \cdot f(x + a_3 \cdot h,\ y + b_{31} \cdot k_1(h) + b_{32} \cdot k_2(h)).$$

Для знаходження восьми невідомих параметрів, що входять у рівності, будемо використовувати умови

$$R(0) = 0, \quad R'(0) = 0, \quad R'''(0) = 0, \quad R^{IV}(0) \neq 0,$$

з яких одержимо систему із шести рівнянь

$$\begin{cases} a_2 & = b_{21}, \\ a_3 & = b_{31} + b_{32}, \\ p_1 + p_2 + p_3 & = 1, \\ 2 \cdot (p_2 a_2 + p_3 a_3) & = 1, \\ 3 \cdot (p_2 a_2^2 + p_3 a_3^2) & = 1, \\ 6 a_2 p_3 b_{32} & = 1. \end{cases}$$

Ця система має два сімейства розв'язків: двопараметричне з вільними параметрами a_2, a_3, причому $a_2 \neq a_3$ і $a_2 \neq \frac{2}{3}$, та однопараметричне з вільним параметром b_{32} (при $a_2 = a_3 = \frac{2}{3}$).

Розглядаючи різні варіанти розв'язування системи, можна визначити числові значення параметрів для одержання ітераційних формул методів Рунге-Кутта третього порядку. При цьому буде допускатися похибка, обумовлена величиною h^3, а порядок похибки буде дорівнювати $s = 3$.

Нехай $a_2 = 0.5$, $a_3 = 1$, тоді

$$p_1 = \frac{1}{6}, \qquad p_2 = \frac{2}{3}, \qquad p_3 = \frac{1}{6}, \qquad b_{21} = \frac{1}{2}, \qquad b_{31} = -1, \qquad b_{32} = 2.$$

Ітераційні формули метода приймають вигляд

$$k_1 = h \cdot f(x_k, y_k),$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_k + \frac{1}{2} \cdot h, y_k + \frac{1}{2} \cdot k_1\right),$$

$$k_3 = h \cdot f(x_k + h, y_k - k_1 + 2k_2),$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 4 \cdot k_2 + k_3),$$

$$x_{k+1} = x_k + h.$$

Отримані рівності є квадратурними формулами методу Симпсона, які мають похибку, обумовлену величиною h^4, а порядок похибки $s = 4$. У розглянутому окремому випадку порядок похибки методу більш високий, чим для інших методів третього порядку, у яких похибка визначається величиною h^3 при $s = 3$.

8.5.4. Методи Рунге-Кутта четвертого порядку

Існують методи Рунге-Кутта четвертого порядку, для яких $q = 4$, $s = 4$. Ці методи є найбільш поширеними при розв'язуванні диференціальних рівнянь першого порядку за співвідношенням кількості обчислень і похибки, що допускається при цьому та визначається величиною h^4.

Приведемо ітераційні формули класичного методу Рунге-Кутта четвертого порядку

$$k_1 = h \cdot f(x_k,\, y_k),$$
$$k_2 = h \cdot f\left(x_k + \frac{1}{2} \cdot h,\, y_k + \frac{1}{2} \cdot k_1\right),$$
$$k_3 = h \cdot f\left(x_k + \frac{1}{2} \cdot h,\, y_k + \frac{1}{2} \cdot k_2\right),$$
$$k_4 = h \cdot f(x_k + h,\, y_k + k_3),$$
$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4),$$
$$x_{k+1} = x_k + h.$$

Графічна інтерпретація методу Рунге-Кутта четвертого порядку показує, як обираються допоміжні напрямки для побудови основного напрямку, у якому і визначається наступне значення функції.

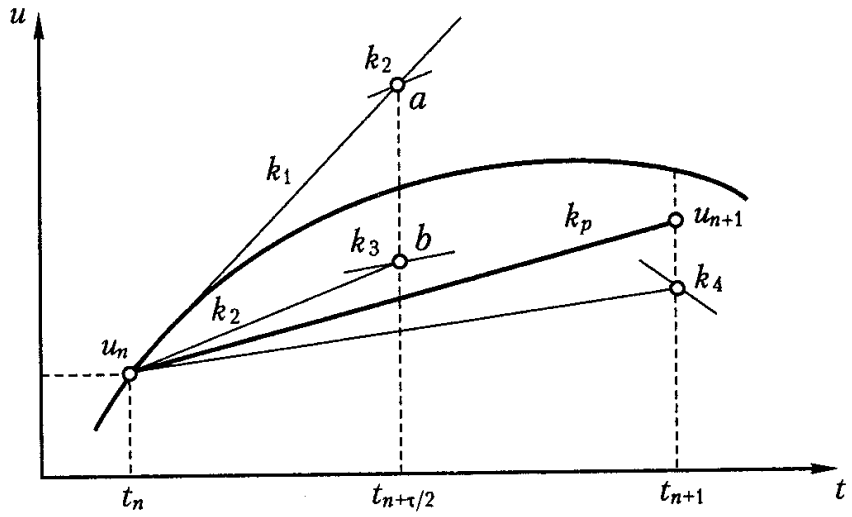


Рисунок 8.4 – Графічна інтерпретація методу Рунге-Кутта IV порядку

Напрямок $k_p = \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ є зваженим середнім чотирьох допоміжних напрямків k_1, k_2, k_3, k_4, в якому і обчислюється наступне значення $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6} \cdot k_p$.

8.5.5. Методи Рунге-Кутта більш високих порядків

Приведемо ітераційні формули модифікації методу Рунге-Кутта, що запропонував Мерсон. Метод Рунге-Кутта-Мерсона є методом п'ятого порядку $q = 5$, при його застосуванні допускається похибка, обумовлена величиною h^5, а порядок похибки $s = 5$.

$$k_1 = h \cdot f(x_k,\, y_k),$$
$$k_2 = h \cdot f\left(x_k + \frac{1}{3} \cdot h,\, y_k + \frac{1}{3} \cdot k_1\right),$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_k + \frac{1}{3} \cdot h,\ y_k + \frac{1}{6} \cdot k_1 + \frac{1}{6} \cdot k_2 \right),$$

$$k_4 = h \cdot f\left(x_k + \frac{1}{2} \cdot h,\ y_k + \frac{1}{8} \cdot k_1 + \frac{3}{8} \cdot k_3 \right),$$

$$k_5 = h \cdot f\left(x_k + h,\ y_k + \frac{1}{2} \cdot k_1 - \frac{3}{2} \cdot k_3 + 2k_4 \right)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 4 \cdot k_4 + k_5),$$

$$x_{k+1} = x_k + h.$$

Приведемо ітераційні формули ще однієї модифікації методу Рунге-Кутта, що запропонував Фельберг. Метод Рунге-Кутта-Фельберга є методом шостого порядку $q = 6$, однак при його застосуванні допускається похибка, обумовлена величиною h^5, а порядок похибки $s = 5$.

$$k_1 = h \cdot f(x_k,\ y_k),$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_k + \frac{2}{9} \cdot h,\ y_k + \frac{2}{9} \cdot k_1 \right),$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_k + \frac{1}{3} \cdot h,\ y_k + \frac{1}{12} \cdot k_1 + \frac{1}{4} \cdot k_2 \right),$$

$$k_4 = h \cdot f\left(x_k + \frac{3}{4} \cdot h,\ y_k + \frac{69}{128} \cdot k_1 - \frac{143}{128} \cdot k_2 + \frac{135}{64} \cdot k_3 \right),$$

$$k_5 = h \cdot f\left(x_k + h,\ y_k - \frac{17}{12} \cdot k_1 + \frac{27}{4} \cdot k_2 - \frac{27}{5} \cdot k_3 + \frac{16}{15} k_4 \right),$$

$$k_6 = h \cdot f\left(x_k + \frac{5}{6} \cdot h,\ y_k + \frac{65}{432} \cdot k_1 - \frac{5}{16} \cdot k_2 + \frac{13}{16} \cdot k_3 + \frac{4}{27} k_4 + \frac{5}{144} k_5 \right),$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 4 \cdot k_4 + k_5),$$

$$x_{k+1} = x_k + h.$$

8.6. Методи Рунге–Кутта розв'язування систем диференціальних рівнянь першого порядку

Наведені формули методів Рунге-Кутта застосовуються також для розв'язування систем звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases}$$

при заданих початкових умовах

$$y_1(x_0) = c_1,\ y_2(x_0) = c_2,\ \dots,\ y_n(x_0) = c_n.$$

Розв'язком задачі є функції $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$, що задовольняють всім рівнянням системи і заданим початковим умовам. Використовуючи методи Рунге-Кутта, потрібні функції одержують у вигляді таблиць, що містять значення всіх функцій у точках $x_k = x_0 + k \cdot h$, $k = \overline{1, m}$.

Введемо в розгляд наступні векторні позначення

$$\mathbf{y}(x) = (y_1(x),\ y_2(x), ...,\ y_n(x)),$$
$$\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = (f_1(x, \mathbf{y}),\ f_2(x, \mathbf{y}), ...,\ f_n(x, \mathbf{y})),$$
$$\mathbf{c} = (c_1, c_2, ..., c_n),$$

де незалежна змінна $x \in [x_0, x_m]$, тоді систему диференційних рівнянь можна записати у векторному вигляді

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}),$$

з початковими умовами вигляду

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{c}.$$

Припустимо, що відомими є значення x, $\mathbf{y}(x)$ та h. Тоді значення $\mathbf{y}(x+h)$ будемо шукати у вигляді

$$\mathbf{y}(x+h) \approx \mathbf{y}(x) + p_1 \cdot \mathbf{k}_1(h) + p_2 \cdot \mathbf{k}_2(h) + ... + p_q \cdot \mathbf{k}_q(h),$$

де

$$\mathbf{k}_1(h) = h \cdot \mathbf{f}(x, \mathbf{y}),$$
$$\mathbf{k}_2(h) = h \cdot \mathbf{f}(x + a_2 \cdot h,\ \mathbf{y} + b_{21} \cdot \mathbf{k}_1(h)),$$
$$\mathbf{k}_3(h) = h \cdot \mathbf{f}(x + a_3 \cdot h,\ \mathbf{y} + b_{31} \cdot \mathbf{k}_1(h) + b_{32} \cdot \mathbf{k}_2(h)),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathbf{k}_q(h) = h \cdot \mathbf{f}(x + a_q \cdot h,\ \mathbf{y} + b_{q1} \cdot \mathbf{k}_1(h) + ... + b_{q,q-1} \cdot \mathbf{k}_{q-1}(h)).$$

Для розв'язування системи диференціальних рівнянь можна обрати метод Рунге-Кутта будь-якого порядку, застосувавши відповідні формули до векторного виду системи. Для цього всі обчислення потрібно проводити з використанням циклічних процесів за всіма компонентами векторів, що беруть участь у формулах.

8.7. Метод кінцевих різниць розв'язування звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку

8.7.1. Метод кінцевих різниць розв'язування задачі Коші для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку

Застосуємо метод кінцевих різниць для розв'язування лінійного диференціального рівняння другого порядку

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f(x)$$

з заданими початковими умовами

$$y(x_0) = c_1, \quad y'(x_0) = c_2.$$

Тут $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – задані неперервні функції при $x \in [a, b]$, c_1, c_2 – задані постійні.

Потрібно знайти функцію $y = y(x)$ на проміжку $x \in [a, b]$, що задовольняє заданому рівнянню й початковим умовам. Розв'язок будемо шукати у вигляді таблиці значень функції $y_i = y(x_i)$ в точках

$$x_i = x_0 + i \cdot h,\ i = \overline{1, n}, \text{ де } x_0 = a,\ h = \frac{b-a}{n},\ h \text{ – шаг інтегрування.}$$

Суть методу кінцевих різниць стосовно до задачі Коші полягає в тому, що всі похідні в диференціальному рівнянні і початкових умовах замінюються на кінцеві різниці відповідних порядків. Це дозволяє одержати розрахункові ітераційні формули для визначення всіх значень функції $y_i = y(x_i)$ в точках $x_i \in [a, b]$.

Розглянемо першу початкову умову.

$y(x_0) = c_1$ це означає, що $y_0 = c_1$.

Розглянемо другу початкову умову, у якій похідну виразимо через кінцеву різницю першого порядку в точці x_0.

$$y'(x_0) = c_2, \qquad \frac{y_1 - y_0}{h} = c_2, \qquad \text{звідки} \qquad y_1 = y_0 + c_2 \cdot h.$$

Всі інші значення функції ми одержимо із заданого диференціального рівняння. Для цього скористаємося одним з наступних представлень похідних першого порядку через кінцеві різниці.

$y'(x_i) = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h}$ (використовується кінцева різниця вперед),

$y'(x_i) = \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h}$ (використовується кінцева різниця назад),

$y'(x_i) = \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$ (використовується центральна кінцева різниця).

Для похідної другого порядку скористаємося її представленням через кінцеву різницю другого порядку

$$y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

Замінимо задане диференціальне рівняння на відповідне кінцево-різницеве. Для цього першу похідну представимо за допомогою кінцевої різниці вперед

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p(x_i) \cdot \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + q(x_i) \cdot y_i = f(x_i).$$

Виразимо y_{i+1} через інші значення, помноживши обидві частини на $h^2 \neq 0$:

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + p(x_i) \cdot h \cdot (y_{i+1} - y_i) + q(x_i) \cdot h^2 \cdot y_i = h^2 \cdot f(x_i),$$

$$y_{i+1} \cdot (1 + p(x_i) \cdot h) = y_i \cdot \left(2 + p(x_i) \cdot h - q(x_i) \cdot h^2\right) - y_{i-1} + h^2 \cdot f(x_i),$$

$$y_{i+1} = \frac{y_i \cdot \left(2 + p(x_i) \cdot h - q(x_i) \cdot h^2\right) - y_{i-1} + h^2 \cdot f(x_i)}{(1 + p(x_i) \cdot h)}.$$

Враховуючи, що y_0 і y_1 визначено з початкових умов, наведена ітераційна формула дозволяє обчислити всі невідомі значення функції, починаючи з y_2, при цьому $i = \overline{1, n-1}$.

Така схема обчислень є явною схемою одержання розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку.

Аналогічно можна одержати ітераційні формули знаходження розв'язку, якщо першу похідну представити за допомогою кінцевої різниці назад

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p(x_i) \cdot \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + q(x_i) \cdot y_i = f(x_i),$$

звідки

$$y_{i+1} = y_i \cdot \left(2 - p(x_i) \cdot h - q(x_i) \cdot h^2\right) - y_{i-1} \cdot \left(1 - p(x_i) \cdot h\right) + h^2 \cdot f(x_i),$$
$$i = \overline{1, n-1}.$$

Більш точні результати виходять, якщо першу похідну в диференціальному рівнянні представити за допомогою центральної кінцевої різниці

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p(x_i) \cdot \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q(x_i) \cdot y_i = f(x_i),$$

звідки

$$y_{i+1} = \frac{y_i \cdot \left(4 - 2q(x_i) \cdot h^2\right) - y_{i-1} \cdot \left(2 - p(x_i) \cdot h\right) + 2h^2 \cdot f(x_i)}{\left(2 + p(x_i) \cdot h\right)}.$$
$$i = \overline{1, n-1}.$$

Вибір однієї з наведених схем для розв'язування задачі Коші визначається особливостями задачі або вимогами, пропонованими до її розв'язування.

Оцінка похибки методу кінцевих різниць для розглянутої задачі Коші визначається величиною

$$\Delta y(x) \le \frac{h^2 M_4}{96}(b-a)^2, \qquad \text{де} \qquad M_4 = \max_{[a,b]} | y^{(4)}(x) |.$$

Приклад. Методом кінцевих різниць знайти розв'язок наступної задачі Коші на проміжку $x \in [\,1.0; 1.4\,]$ із шагом інтегрування $h = 0.1$

$$x^2 y'' + xy' = 1, \qquad y(1) = 0, \qquad y'(1) = 0.0566.$$

Розв'язування. Розв'язок задачі будемо шукати у вигляді таблиці.

Скористаємося початковими умовами.

$y(1) = 0$.

Отже $\quad x_0 = 1.0, \qquad y_0 = 0.0$.

$y'(1) = 0.0566$.

Отже $\quad x_1 = x_0 + h = 1.1, \qquad y_1 = y_0 + 0.0566 \cdot h = 0.00566$.

Для визначення інших значень скористаємося центральними кінцево-різницевими відношеннями для похідних, підставимо їх у задане рівняння

$$x_i^2 \cdot \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + x_i \cdot \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = 1, \qquad i = \overline{1, n-1}$$

і одержимо

$$y_{i+1} = \frac{4x_i^2 y_i - \left(2x_i^2 - x_i h\right) \cdot y_{i-1} + 2h^2}{2x_i^2 + x_i h}, i = \overline{1, n-1}.$$

Звідки

$i = 1$, $\quad x_2 = x_1 + h = 1.2 \quad y_2 = 0.01873$.

$i = 2$, $\quad x_3 = x_2 + h = 1.3 \quad y_3 = 0.03743$.

$i = 3$, $\quad x_4 = x_3 + h = 1.4 \quad y_4 = 0.06043$.

У практичних задачах зустрічаються рівняння, у яких функції $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ задані таблично з деяким шагом h. Природно такі рівняння розв'язувати кінцево-різницевим методом з даним шагом h.

8.7.2. Метод кінцевих різниць розв'язування задачі Коші для нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку

Застосуємо метод кінцевих різниць для розв'язування нелінійного диференціального рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y, y')$$

з заданими початковими умовами

$$y(x_0) = c_1, \quad y'(x_0) = c_2.$$

Розв'язок задачі Коші будемо шукати на проміжку $x \in [a, b]$ у вигляді таблиці значень функції $y_i = y(x_i)$ в точках $x_i = x_0 + i \cdot h$, $i = \overline{1, n}$, де $x_0 = a$, $h = \dfrac{b-a}{n}$, h – шаг інтегрування.

Як і у випадку розв'язування лінійного рівняння, початкові умови дозволяють визначити значення y_0 і y_1:

$y(x_0) = c_1$, $\quad$ отже $\quad y_0 = c_1$,

$y'(x_0) = c_2$, $\quad$ отже $\quad y_1 = y_0 + c_2 \cdot h$.

Заміняючи похідні їхніми виразами через кінцеві різниці, рівняння можна записати одним з наступних способів:

1) $\dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = f\left(x_i, y_i, \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h}\right)$,

2) $\dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = f\left(x_i, y_i, \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h}\right)$,

3) $\dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = f\left(x_i, y_i, \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right)$.

В обраному варіанті рівність розв'язується відносно y_{i+1} і отримуються розрахункові формули для визначення всіх значень невідомої функції в точках $x_i \in [a, b], \quad i = \overline{1, n}$.

Метод кінцевих різниць можна застосовувати для розв'язування задачі Коші для диференціальних рівнянь довільного порядку. При цьому похідні більш високих порядків заміняються їхніми представленнями через кінцеві різниці відповідних порядків.

8.7.3. Метод кінцевих різниць розв'язування крайових задач для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f(x)$$

з лінійними крайовими умовами

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A,$$
$$\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B.$$

Тут $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – задані неперервні функції при $x \in [a, b]$, α_0, α_1, β_0, β_1, A, B – задані постійні, причому $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$ та $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$. Якщо $A = B = 0$, то крайові умови називаються однорідними.

Потрібно знайти функцію $y = y(x)$ на проміжку $x \in [a, b]$, що задовольняє заданому рівнянню і крайовим умовам.

Розв'язок будемо шукати у вигляді таблиці значень функції $y_i = y(x_i)$ в точках $x_i = x_0 + i \cdot h$, $i = \overline{1, n}$, де $x_0 = a$, $h = \dfrac{b-a}{n}$, h – шаг інтегрування.

Замінимо приблизно у кожному внутрішньому вузлі похідні $y'(x_i)$, $y''(x_i)$ кінцево-різницевими відношеннями

$$y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \qquad y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2},$$

а на кінцях проміжку візьмемо

$$y'(a) = \frac{y_1 - y_0}{h}, \qquad y'(b) = \frac{y_n - y_{n-1}}{h}.$$

Використовуючи наведені формули, замінимо диференціальне рівняння та крайові умови системою кінцево-різницевих рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p(x_i)\dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} + q(x_i)y_i = f(x_i), & i = \overline{1, n-1}, \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \dfrac{y_1 - y_0}{h} = A, & \beta_0 y_n + \beta_1 \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \end{cases}$$

Більш точні формули виходять, якщо замінити $y'(x_i)$, $y''(x_i)$ центрально-різницевими відношеннями

$$y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \qquad y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2},$$

Тоді одержуємо систему

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+p(x_i)\dfrac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+q(x_i)y_i=f(x_i), & i=\overline{1,n-1}, \\ \alpha_0 y_0+\alpha_1\dfrac{y_1-y_0}{h}=A, & \beta_0 y_n+\beta_1\dfrac{y_n-y_{n-1}}{h}=B. \end{cases}$$

Застосовуючи метод кінцевих різниць для розв'язування крайової задачі, одержимо лінійну алгебраїчну систему $n+1$ рівняння з $n+1$ невідомим. Розв'язавши її, одержимо таблицю наближених значень функції $y_i=y(x_i)$ в точках $x_i=x_0+i\cdot h$, $i=\overline{0,n}$.

Саме в цьому є принципова відмінність застосування методу кінцевих різниць до задачі Коші, де вдається одержати ітераційні формули для знаходження невідомих значень функції по вже знайдених значеннях.

Приклад. Методом кінцевих різниць знайти розв'язок наступної крайової задачі на проміжку $x\in[1.0;1.4]$ із шагом інтегрування $h=0.1$

$$x^2y''+xy'=1, \qquad y(1)=0, \qquad y(1.4)=0.06043$$

Розв'язування Розв'язок задачі будемо шукати як розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

$$\begin{cases} x_i^2\cdot\dfrac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+x_i\cdot\dfrac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}=1, & i=\overline{1,3}, \\ y_0=0, \qquad y_4=0.06043, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x_i\cdot(2x_i+h)\cdot y_{i+1}-4x_i^2y_i+x_i\cdot(2x_i-h)\cdot y_{i-1}=2h^2, & i=\overline{1,3}, \\ y_0=0, \qquad y_4=0.06043. \end{cases}$$

Враховуючи, що $x_0=1.0$, $x_1=1.1$, $x_2=1.2$, $x_3=1.3$, $x_4=1.4$, розпишемо всі рівняння отриманої системи.

$$\begin{cases} y_0 & =0, \\ 2.31y_0-4.84y_1+2.53y_2 & =0.02, \\ 2.76y_1-5.76y_2+3.00y_3 & =0.02, \\ 3.25y_2-6.76y_3+3.51y_4 & =0.02, \\ y_4 & =0.06043. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему яким-небудь відомим методом, одержимо наступні значення

$$y_0=0.0,\ y_1=0.00566,\ y_2=0.01873,\ y_3=0.03742,\ y_4=0.06043,$$

які і будуть значеннями шуканої функції в точках

$$x_0=1.0, \qquad x_1=1.1, \qquad x_2=1.2, \qquad x_3=1.3, \qquad x_4=1.4.$$

Розв'язування систем, отриманих за допомогою методу кінцевих різниць, при великому n стає досить громіздким. Існують методи, наприклад, методом прогону, що розроблені спеціально для розв'язування таких систем.

8.7.4. Метод кінцевих різниць розв'язування крайових задач для нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку

Розглянемо нелінійне диференціальне рівняння

$$y'' = f(x, y, y')$$

з крайовими умовами

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \quad \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B.$$

Візьмемо на відрізку $x \in [a, b]$ систему рівновіддалених вузлів $x_0 = a$, $x_i = x_0 + i \cdot h$, $i = \overline{1, n}$, з деяким шагом $h = \dfrac{b-a}{n}$ і замінимо наближено диференціальне рівняння та крайові умови на систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = f\left(x_i, y_i, \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right), & i = \overline{1, n-1}, \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \dfrac{y_1 - y_0}{h} = A, & \beta_0 y_n + \beta_1 \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \end{cases}$$

Одержимо нелінійну систему $n+1$ рівняння із $n+1$ невідомим y_i, $i = \overline{0, n}$. Розв'язок системи знайдемо методом ітерацій за наступними формулами:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1}^{(k+1)} - 2y_i^{(k+1)} + y_{i-1}^{(k+1)}}{h^2} = f\left(x_i, y_i^{(k)}, \dfrac{y_{i+1}^{(k)} - y_{i-1}^{(k)}}{2h}\right), & i = \overline{1, n-1}, \\ \alpha_0 y_0^{(k+1)} + \alpha_1 \dfrac{y_1^{(k+1)} - y_0^{(k+1)}}{h} = A, & \beta_0 y_n^{(k+1)} + \beta_1 \dfrac{y_n^{(k+1)} - y_{n-1}^{(k+1)}}{h} = B. \end{cases}$$

Тут індекс k зверху означає номер наближення. На кожному кроці ітерацій доводиться розв’язувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

Використовуючи спеціальний вид цієї системи, можна одержати її розв'язок в явному вигляді:

$$y_i^{(k+1)} = \frac{h}{\Delta}[A\beta_0(b-a) + A\beta_1 + \alpha_1 B] + \frac{i}{\Delta}(\alpha_0 B - A\beta_0) + h^2 \sum_{j=1}^{n-1} g_{ji} f_j^{(k)},$$

де числа $a, b, A, B, \alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ є відомими, а Δ та g_{ji} обчислюються за формулами

$$\Delta = \frac{1}{h}[\alpha_0\beta_0(b-a) + \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0],$$

$$g_{ji} = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta}\left(j\alpha_0 + \dfrac{\alpha_1}{h}\right)\left(i\beta_0 - \beta_0 n - \dfrac{\beta_1}{h}\right), & \text{если} \quad j \le i, \\ \dfrac{1}{\Delta}\left(i\alpha_0 + \dfrac{\alpha_1}{h}\right)\left(j\beta_0 - \beta_0 n - \dfrac{\beta_1}{h}\right), & \text{если} \quad j > i. \end{cases}$$

Помітимо, що в формулах тільки $f_j^{(k)}$ залежить від номера ітерації.

Таким чином, знаходження розв'язку системи зводиться до досить простої ітераційної схеми.

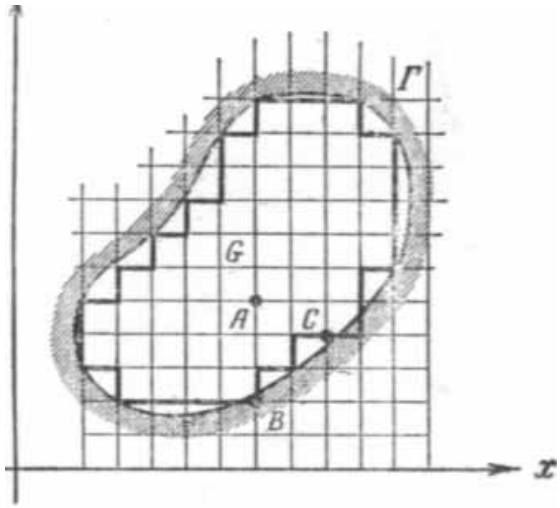
9. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

9.1. Характеристика методу кінцевих різниць для розв'язування рівнянь математичної фізики

Метод кінцевих різниць, або метод сіток, є одним з найпоширеніших методів чисельного розв'язку крайових задач для рівнянь математичної фізики, які описуються диференціальними рівняннями другого порядку в частинних похідних. В основі методу лежить ідея заміни частинних похідних відповідними кінцево-різницевими відношеннями.

Ми обмежимося розглядом невідомих функцій, що залежать від двох незалежних змінних. Нехай у площині xOy є деяка область G із границею Γ. Побудуємо на площині xOy два сімейства паралельних прямих:

$$x = x_0 + i \cdot h_1, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$y = y_0 + j \cdot h_2, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots.$$



Точки перетину цих прямих назвемо *вузлами сітки*.

Два вузли називаються *сусідніми*, якщо вони віддалені один від одного в напрямку осі Ox або Oy на відстань, що дорівнює кроку сітки h_1 або h_2 відповідно.

Виділимо вузли, що належать області $G + \Gamma$, а також деякі вузли, що не належать цієї області, але розташовані на відстані, меншої, ніж крок, від границі Γ.

Такі вузли, для яких усі чотири сусідні вузли належать виділеній множині вузлів, називаються *внутрішніми* (вузол *A*). Виділені вузли, що залишилися, називаються *граничними* (вузли *B*, *C*).

Значення функції $u = u(x, y)$ у вузлах сітки будемо позначати через $u_{ij} = u(x_i, y_j)$. У кожному внутрішньому вузлі (x_i, y_j), де $x_i = x_0 + i \cdot h_1$, $y_j = y_0 + j \cdot h_2$ замінимо частинні похідні першого порядку центральними кінцево-різницевими відношеннями:

$$\frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_1}, \qquad \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_2},$$

у граничних точках ми вимушені користуватися менш точними формулами

$$\frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_1}, \qquad \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_2},$$

Аналогічно заміняються частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2}, \qquad \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2}.$$

Зазначені заміни похідних у кожному вузлі сітки дозволяють звести розв'язок рівнянь у частинних похідних до розв'язку системи різницевих рівнянь.

9.2. Метод кінцевих різниць розв'язування задачі Дирихле в прямокутній області

Розглянемо крайову задачу для диференціального рівняння в частинних похідних другого порядку, що відноситься до еліптичного типу.

Задача Дирихлє полягає в знаходженні функції $u(x, y)$, що задовольняє усередині деякої заданої області G рівнянню Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

або рівнянню Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

а на границі області Γ граничним умовам

$$u(x, y)\big|_{\Gamma} = \varphi(x, y),$$

де $\varphi(x, y)$ – задана неперервна функція.

Розглянемо прямокутну область змінних $G = \{(x, y), a \le x \le b, c \le y \le d\}$, а граничні умови задамо на кожній стороні прямокутної області:

$$u(a, y) = \varphi_1(y), \qquad u(b, y) = \varphi_2(y), \qquad y \in [c, d],$$
$$u(x, c) = \psi_1(x), \qquad u(x, d) = \psi_2(x), \qquad x \in [a, b].$$

Для розв'язку крайової задачі застосуємо метод кінцевих різниць. Для цього в області $G = \{(x, y), a \le x \le b, c \le y \le d\}$ побудуємо два сімейства паралельних прямих (рис. 9.1), що проходять через точки $x_i = a + ih_1$, $i = \overline{0, n}$, $y_j = c + jh_2$, $j = \overline{0, m}$ на осях координат, де $h_1 = \dfrac{b-a}{n}$, $h_2 = \dfrac{d-c}{m}$.

Значення невідомої функції $u = u(x, y)$ у вузлах сітки позначимо через $u_{ij} = u(x_i, y_j), i = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, m}$.

Значення невідомої функції в граничних точках визначимо із заданих граничних умов (рис. 9.2).

Гранична умова

$$u(a, y) = \varphi_1(y), \qquad y \in [c, d]$$

виконується для $x = x_0$ і всіх $y = y_j$, де $y_j \in [y_0, y_m]$: $u(x_0, y_j) = \varphi_1(y_j)$,

або $$u_{0j} = \varphi_1(y_j), \qquad j = \overline{0, m}.$$

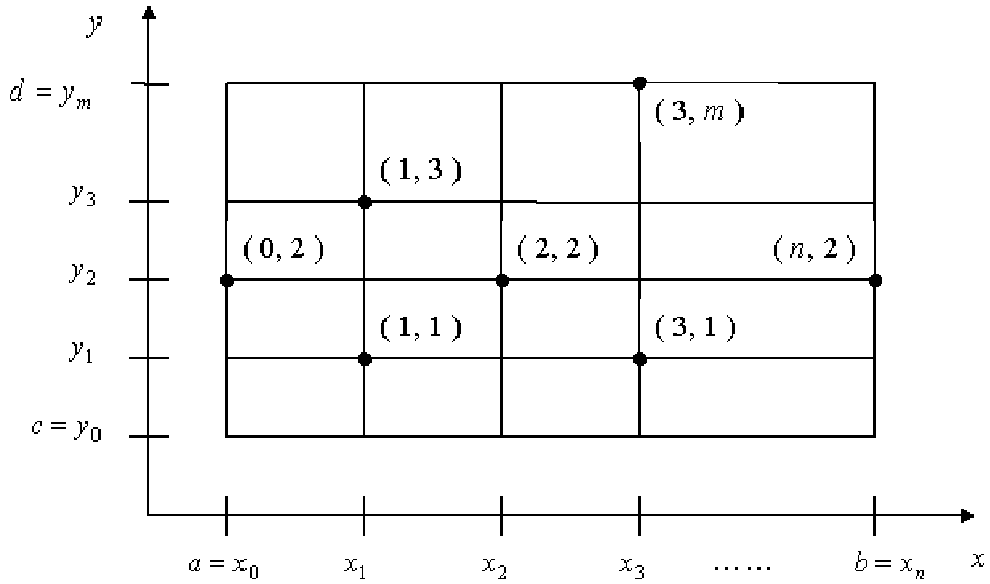


Рисунок 9.1 – Область визначення невідомої функції

Гранична умова

$$u(b, y) = \varphi_2(y), \qquad y \in [c, d]$$

виконується для $x = x_n$ і всіх $y = y_j$, де $y_j \in [y_0, y_m]$: $u(x_n, y_j) = \varphi_2(y_j)$,

або $$u_{nj} = \varphi_2(y_j), \qquad j = \overline{0, m}.$$

Гранична умова

$$u(x, c) = \psi_1(x), \qquad x \in [a, b]$$

виконується для $y = y_0$ і всіх $x = x_i$, де $x_i \in [x_0, x_n]$: $u(x_i, y_0) = \psi_1(x_i)$,

або $$u_{i0} = \psi_1(x_i), \qquad i = \overline{0, n}.$$

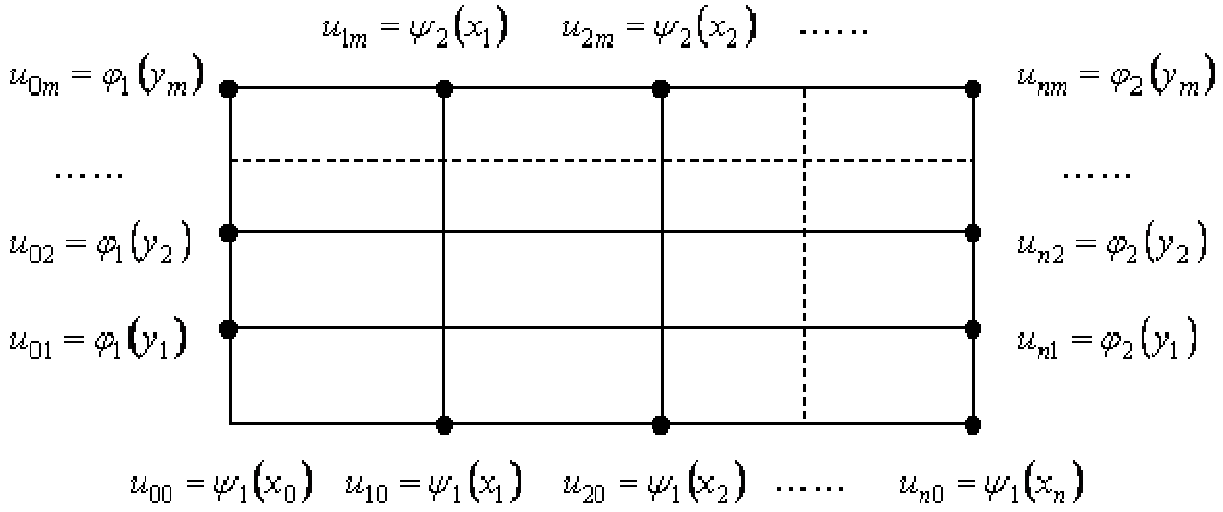


Рисунок 9.2 – Визначення функції у граничних вузлах

Гранична умова

$$u(x, d) = \psi_2(x), \qquad x \in [a, b]$$

виконується для $y = y_m$ і всіх $x = x_i$, де $x_i \in [x_0, x_n]$: $u(x_i, y_m) = \psi_2(x_i)$,
або $$u_{im} = \psi_2(x_i), \qquad i = \overline{0, n}.$$

Значення невідомої функції у внутрішніх точках області визначимо із заданого рівняння, замінивши похідні їх виразами через кінцеві різниці

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2}, \qquad \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2}.$$

Однак, замість диференціального рівняння в частинних похідних одержимо відповідне кінцево-різницеве рівняння

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} = f(x_i, y_j)$$

для рівняння Пуассона і

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} = 0$$

для рівняння Лапласа.

Отримані рівності виконуються для всіх $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{1, m-1}$ і разом із граничними умовами утворюють систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо значень функції $u_{ij} = u(x_i, y_j)$ у внутрішніх вузлах сітки, а значення в граничних вузлах дорівнюють значенням заданих граничних функцій.

У кожному такому рівнянні використовуються значення невідомої функції у вузлах, обумовлених наступної схемою (рис. 9.3).

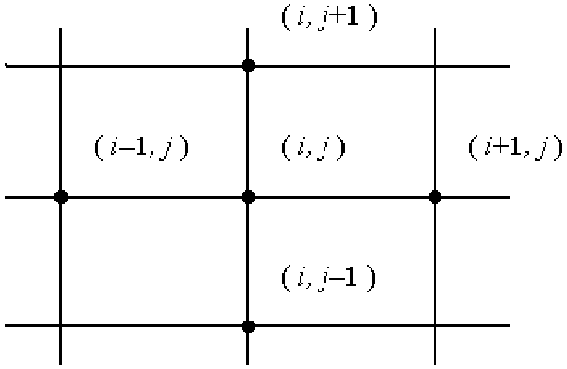


Рисунок 9.3 – Схема визначення невідомої функції у задачі Дирихле

Найбільш простий вигляд ця система приймає, якщо крок розбиття області по осі *OX* буде дорівнювати кроку розбиття області по осі *OУ*

$$h_1 = h_2 = h.$$

У цьому випадку кінцево-різницеві рівняння приймуть вигляд:

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = h^2 f(x_i, y_j)$$

для рівняння Пуассона і

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0$$

для рівняння Лапласа, якщо $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{1, m-1}$.

Похибка заміни диференціального рівняння кінцево-різницевим рівнянням оцінюється величиною

$$\left| R(x_i, y_j) \right| \le \frac{h^2}{6} M_4, \qquad \text{де} \qquad M_4 = \max_{(x_i, y_j) \in G} \left\{ \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|, \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right| \right\}.$$

Однак похибка наближеного розв'язку, отриманого кінцево-різницевим методом, складається з трьох видів похибок:

1) похибки заміни диференціального рівняння кінцево-різницевим;
2) похибки апроксимації крайових умов;
3) похибки, отримані в результаті того, що система кінцево-різницевих рівнянь розв’язується наближеним методом.

Приклад. Розглянемо задачу про стаціонарний розподіл тепла в плоскій квадратній ізольованій пластині зі стороною, що дорівнює 1, якщо на границі пластинки підтримується постійна температура.

Нехай функція $u(x, y)$, що задає розподіл температури в пластині, є розв'язком рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Значення функції в граничних точках області показані на рисунку 9.4.

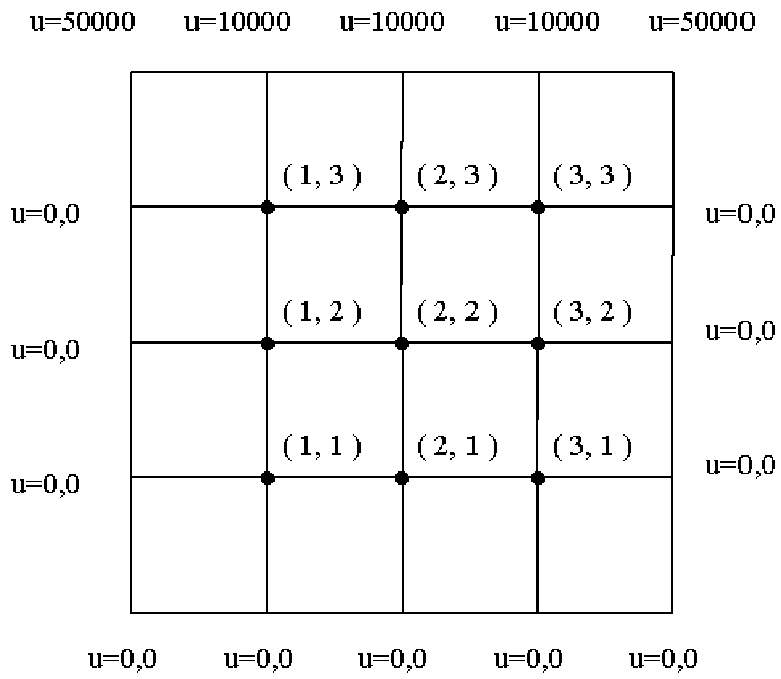


Рисунок 9.4 – Значення функції у граничних вузлах

Розв'язування. Побудуємо сітку із кроком $h = 1/4$. Одержимо дев'ять внутрішніх вузлів, у яких необхідно визначити значення функції. Для цих вузлів запишемо кінцево-різницеві рівняння.

Враховуючи симетрію граничних умов, маємо:

$$u_{11} = u_{31} \qquad u_{12} = u_{32} \qquad u_{13} = u_{33},$$

що скорочує кількість невідомих значень функції у внутрішніх вузлах до шести. Таким чином, у вузлах (3, 1), (3,2), (3, 3) кінцево-різницеві рівняння записувати не потрібно. А для інших шести внутрішніх вузлів (1, 1), (2, 1), (1,2), (2,2), (1,3), (2, 3) одержуємо відповідно шість рівнянь:

$$\left.\begin{array}{ll} u_{01}+u_{21}+u_{10}+u_{12}-4u_{11}=0, & u_{11}+u_{31}+u_{20}+u_{22}-4u_{21}=0, \\ u_{02}+u_{22}+u_{11}+u_{13}-4u_{12}=0, & u_{12}+u_{32}+u_{21}+u_{23}-4u_{22}=0, \\ u_{03}+u_{23}+u_{12}+u_{14}-4u_{13}=0, & u_{13}+u_{33}+u_{22}+u_{24}-4u_{23}=0. \end{array}\right\}$$

Крім невідомих значень у внутрішніх вузлах у ці рівняння входять ще 12 значень функції в граничних точках. Ці значення слід узяти із крайових умов

$$\left.\begin{array}{ll} u_{i0}=0, & i=1,2,3, \\ u_{0j}=0, & j=1,2,3, \\ u_{14}=u_{24}=u_{34}=10000. & \end{array}\right\}$$

Помітимо, що в інших вузлах граничні умови не використовуються. Остаточно, система рівнянь прийме вигляд

$$\begin{array}{ll} u_{21}+u_{12}-4u_{11}=0, & 2u_{11}+u_{22}-4u_{21}=0, \\ u_{22}+u_{11}+u_{13}-4u_{12}=0, & 2u_{12}+u_{21}+u_{23}-4u_{22}=0, \\ u_{23}+u_{12}-4u_{13}=-10000, & 2u_{13}+u_{22}-4u_{23}=-10000. \end{array}$$

Розв'язавши цю систему методом Гауса, одержимо

$$u_{11}=714,\quad u_{21}=928,\quad u_{12}=1875,\quad u_{22}=2500,\quad u_{13}=4286,\quad u_{23}=5268.$$

9.3. Ітераційний метод розв'язування системи кінцево-різницевих рівнянь

Безпосереднє розв'язування системи кінцево-різницевих рівнянь методами послідовного виключення при великій кількості вузлів виявляється занадто громіздким. Тут більш зручні ітераційні методи розв'язування, які враховують спеціальний вигляд таких систем і виявляються зручними для реалізації на ЕОМ.

Розглянемо один з найбільш простих методів – процес усереднення Лібмана для систем. Згідно з методом Лібмана обчислення проводяться в такий спосіб: вибравши початкові наближення $u_{ij}^{(0)}$, послідовні наближення $u_{ij}^{(k+1)}$ для внутрішніх вузлів сіткової області $i=\overline{1,n-1}$, $j=\overline{1,m-1}$ визначаємо за формулами:

$$u_{i,j}^{(k+1)}=\frac{1}{4}\left[u_{i+1,j}^{(k)}+u_{i-1,j}^{(k)}+u_{i,j+1}^{(k)}+u_{i,j-1}^{(k)}-h^2 f\left(x_i^{(k)},y_j^{(k)}\right)\right],\qquad k=0,1,2,...$$

для рівняння Пуассона і

$$u_{i,j}^{(k+1)}=\frac{1}{4}\left[u_{i+1,j}^{(k)}+u_{i-1,j}^{(k)}+u_{i,j+1}^{(k)}+u_{i,j-1}^{(k)}\right],\qquad k=0,1,2,...$$

для рівняння Лапласа, які випливають із кінцево-різницевих рівнянь.

Для одержання початкових наближень можна вказати два способи:

1) значення $u_{ij}^{(0)}$ у внутрішніх вузлах одержують шляхом інтерполяції, що використовує відомі граничні умови;
2) становлять систему кінцево-різницевих рівнянь для сітки з більшим кроком і розв'язують її методом виключення, а потім отримані значення інтерполюють на вузли даної сітки.

Доведено, що для будь-якого кроку h процес Лібмана сходиться до точного розв'язку незалежно від вибору початкових значень.

Ітераційний процес буде сходитися значно швидше, якщо при обчисленні наступних середніх арифметичних використовувати не тільки значення попереднього наближення, але й тільки що знайдені значення. Звичайно ітерації продовжують доти, поки у двох послідовних наближеннях не збіжиться необхідна кількість десяткових знаків.

9.4. Метод кінцевих різниць для розв'язування рівнянь параболічного типу

Розглянемо крайову задачу для диференціального рівняння в частинних похідних другого порядку параболічного типу. Задача полягає в знаходженні функції $u(x,t)$, що задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t),$$

початковій умові

$$u(x,0) = f(x), \qquad x \in [0, s]$$

і граничним умовам

$$u(0,t) = \varphi(t), \qquad u(s,t) = \psi(t), \qquad t \geq 0.$$

Якщо $F(x,t) \neq 0$, то розглядається крайова задача для неоднорідного рівняння, якщо $F(x,t) = 0$ – крайова задача для однорідного рівняння.

Задана задача, зокрема, є задачею теплопровідності, тобто задачею про поширення тепла в однорідному стержні довжини s. Початкові умови задають розподіл тепла в стержні в початковий момент часу $t = 0$. Граничні умови задають закони зміни температури із часом у граничних точках стержня $x = 0$ й $x = s$. Функція $F(x,t)$ визначає наявність усередині стержня теплових джерел. Якщо $F(x,t) = 0$, то внутрішні теплові джерела в стержні відсутні.

Для розв'язування крайової задачі застосуємо метод кінцевих різниць. Для цього в області $t \geq 0,\ 0 \leq x \leq s$ побудуємо два сімейства паралельних прямих, що проходять через точки $x_i = ih_1,\ i = \overline{0,n},\quad t_j = jh_2,\ j = 0, 1, 2, 3, ...$ на осях координат (рис 9.5).

Значення невідомої функції $u = u(x,t)$ у вузлах сітки позначимо через $u_{ij} = u(x_i, t_j), i = \overline{0,n},\quad j = 0, 1, 2, ...$

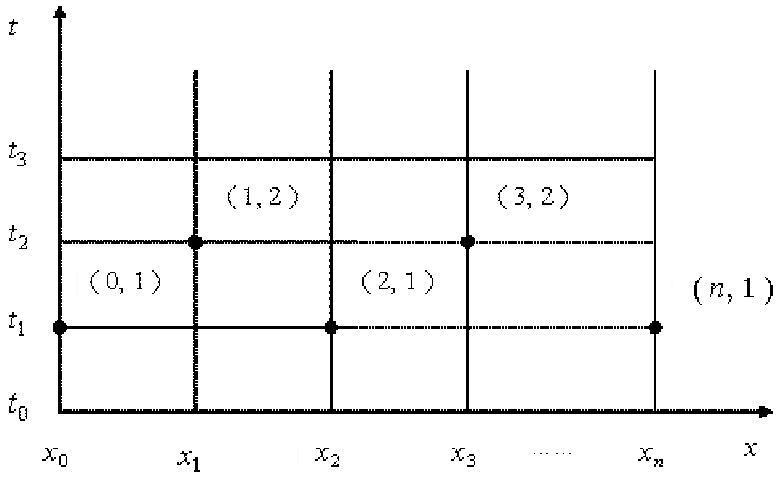


Рисунок 9.5 – Область визначення функції у параболічному рівнянні

Для знаходження значень невідомої функції на границях заданої області скористаємося заданими крайовими умовами.

З початкових умов

$$u(x, 0) = f(x), \qquad x \in [0, s]$$

випливає, що вони виконуються для $t = t_0$ й усіх $x = x_i$, де $x_i \in [\, x_0, x_n \,]$:

$$u(x_i, t_0) = f(x_i), \qquad i = \overline{0, n}$$

або

$$u_{i0} = f(x_i), \qquad i = \overline{0, n}.$$

Із граничних умов

$$u(0, t) = \varphi(t), \qquad u(s, t) = \psi(t), \qquad t \geq 0$$

випливає, що вони виконуються для всіх $t = t_j$, де $t_j \in \lfloor t_0, t_m \rfloor$. Перша умова виконується для $x = x_0$, а друга – для $x = x_n$:

$$u(x_0, t_j) = \varphi(t_j), \qquad u(x_n, t_j) = \psi(t_j), \qquad j = 0, 1, 2, ...$$

або

$$u_{0j} = \varphi(t_j), \qquad u_{nj} = \psi(t_j), \qquad j = 0, 1, 2, ...,$$

як показано на рисунку 9.6.

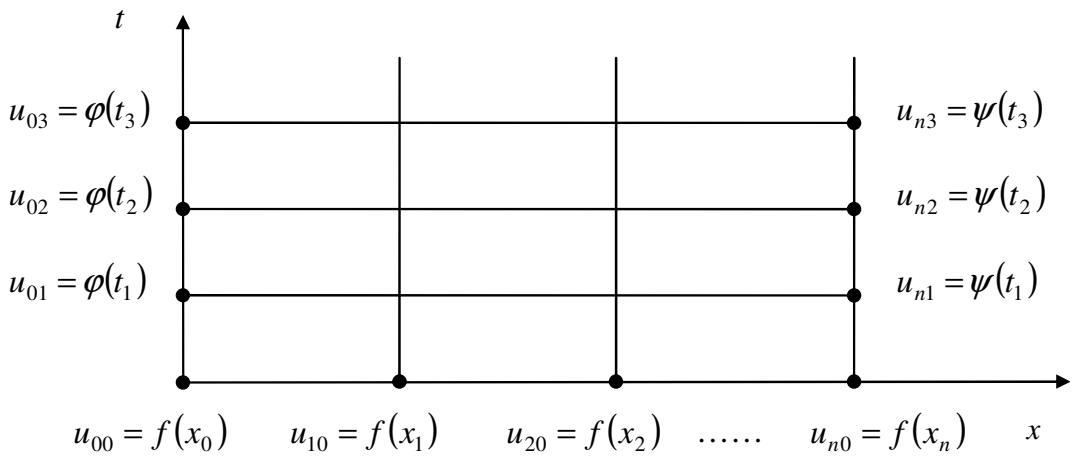


Рисунок 9.6 – Визначення крайових умов

Для знаходження значень невідомої функції у внутрішніх вузлах області скористаємося заданим рівнянням, у якому похідну $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в кожному внутрішньому вузлі приблизно замінимо різницевим відношенням

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2},$$

а похідну $\frac{\partial u}{\partial t}$ – одним на два різницевих відношення:

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_2} \quad \text{або} \quad \frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_2}.$$

Тоді для диференціального рівняння одержимо два типи кінцево-різницевих рівнянь при $i = \overline{1, n-1}$, $j = 1, 2, \ldots$:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + F(x_i, t_j)$$

або

$$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + F(x_i, t_j).$$

Після домноження рівнянь на $h_2 \neq 0$ одержимо

$$u_{i,j+1} - u_{i,j} = \frac{h_2}{h_1^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + h_2 F(x_i, t_j)$$

або

$$u_{i,j} - u_{i,j-1} = \frac{h_2}{h_1^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + h_2 F(x_i, t_j).$$

Позначивши $\sigma = \frac{h_2}{h_1^2}$, приводимо ці рівняння при $i = \overline{1, n-1}$, $j = 1, 2, \ldots$ до вигляду

$$u_{i,j+1} = (1 - 2\sigma)u_{i,j} + \sigma(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + h_2 F(x_i, t_j)$$

або

$$(1 + 2\sigma)u_{i,j} - \sigma(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} = h_2 F(x_i, t_j).$$

Відзначимо, що для складання першого рівняння була використана явна схема вузлів, а для другого рівняння – неявна схема (рис. 9.7).

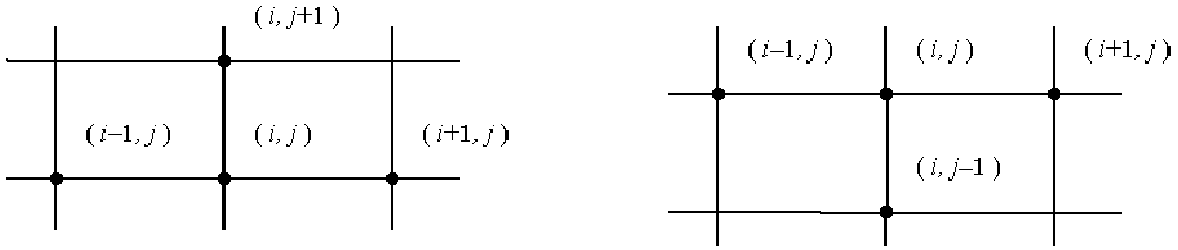


Рисунок 9.7 – Схеми визначення функції у параболічному рівнянні

При виборі числа σ у рівняннях слід враховувати дві обставини:

1) похибка заміни диференціального рівняння різницевим рівнянням повинна бути найменшою;
2) різницеве рівняння повинне бути стійким.

Доведено, що рівняння з явною схемою вузлів буде стійким, якщо $0 \le \sigma \le 1/2$, а рівняння з неявною схемою вузлів – при кожному σ.

Найбільш зручний вигляд перше рівняння з явною схемою вузлів має при $\sigma = 1/2$:

$$u_{i,j+1} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{2} + h_2 F\left(x_i, t_j\right), \qquad i = \overline{1, n-1},\ j = 1, 2, ...$$

і при $\sigma = 1/6$:

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6}\left(u_{i-1,j} + 4u_{i,j} + u_{i+1,j}\right) + h_2 F\left(x_i, t_j\right), \qquad i = \overline{1, n-1},\ j = 1, 2, \dots .$$

Оцінки похибок наближених розв'язків отриманих кінцево-різницевих рівнянь у області $0 \le x \le s$, $0 \le t \le T$ мають вигляд

$$\Delta u \le \frac{T}{4}\left(M_2 + \frac{1}{3}M_4\right)h_1^2, \qquad \text{для явної схеми вузлів при } \sigma = 1/2,$$

$$\Delta u \le \frac{T}{72}\left(\frac{1}{3}M_2 + \frac{1}{5}M_4\right)h_1^4, \qquad \text{для явної схеми вузлів при } \sigma = 1/6,$$

$$\Delta u \le \frac{T}{72}\left(\frac{1}{3}M_2 + \frac{1}{5}M_4\right)h_1^4, \qquad \text{для неявної схеми вузлів,}$$

де

$$M_2 = \max\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|, \quad M_3 = \max\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right|, \quad M_4 = \max\left|\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\right|, \quad M_6 = \max\left|\frac{\partial^6 u}{\partial t^6}\right|,$$

Порівнюючи отримані кінцево-різницеві співвідношення для визначення невідомої функції і наведені оцінки похибок можна зробити наступний висновок:

1) перше рівняння з явною схемою вузлів при $\sigma = 1/2$ має найпростіший вигляд і дозволяє обчислити всі значення невідомої функції, якщо відомо значення на початковому рівні, при цьому співвідношення між кроками інтегрування $h_2 = \frac{h_1^2}{2}$, похибка формули визначається величиною h_1^2;
2) перше рівняння з явною схемою вузлів при $\sigma = 1/6$ більш громіздке, співвідношення між кроками $h_2 = \frac{h_1^2}{6}$ означає, що крок за часом t повинен бути значно менше кроку по змінній x, що приводить до більшого об'єму обчислень, однак ця формула має більш високу точність одержаних значень у порівнянні з іншими формулами;

3) друга формула з неявною схемою вузлів приводить до розв'язку системи рівнянь щодо невідомих значень функції, дає меншу точність, однак кроки інтегрування вибираються довільно, незалежно одне від одного.

Приклад. Знайти наближений розв'язок рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

що задовільняє умовам

$$u(x,0) = \sin \pi x, \qquad x \in [0;1],$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad t \in [0;0{,}06].$$

Розв'язування. Будемо використовувати явну схему вузлів з $\sigma = 1/2$. Оберемо за аргументом x крок $h_1 = 0{,}2$. Тому що $\sigma = 1/2$, одержуємо за аргументом t крок $h_2 = h_1^2/2 = 0{,}02$. Розіб'ємо проміжок $x \in [0;1]$ на частини точками ділення $x_i = ih_1$, $i = \overline{0,5}$, а проміжок $t \in [0;0{,}06]$ точками $t_j = jh_2$, $j = \overline{0,3}$. Тоді

$x_0 = 0{,}0$; $x_1 = 0{,}2$; $x_2 = 0{,}4$; $x_3 = 0{,}6$; $x_4 = 0{,}8$; $x_5 = 1{,}0$.

$t_0 = 0{,}0$; $t_1 = 0{,}02$; $t_2 = 0{,}04$; $t_3 = 0{,}06$.

Скористаємося початковими умовами й визначимо значення функції $u(x,t)$ на початковому рівні за формулами:

$$t_0 = 0{,}0; \qquad u_{i0} = \sin(\pi \cdot x_i), \qquad i = \overline{0,5}.$$

Одержимо

$$u_{00} = \sin(\pi \cdot 0{,}0) = 0{,}0; \qquad u_{10} = \sin(\pi \cdot 0{,}2) = 0{,}5878;$$
$$u_{20} = \sin(\pi \cdot 0{,}4) = 0{,}9511; \qquad u_{30} = \sin(\pi \cdot 0{,}6) = 0{,}9511;$$
$$u_{40} = \sin(\pi \cdot 0{,}8) = 0{,}5878; \qquad u_{50} = \sin(\pi \cdot 1{,}0) = 0{,}0;$$

Скористаємося граничними умовами й визначимо значення функції $u(x,t)$ на лівій і правої границях області за формулами:

$$x_0 = 0{,}0; \qquad u_{0j} = 0{,}0; \qquad j = \overline{0,3};$$
$$x_5 = 1{,}0; \qquad u_{5j} = 0{,}0; \qquad j = \overline{0,3}.$$

Значення функції $u(x,t)$ на першому рівні при $t_1 = 0{,}02$ знаходимо за формулою з явною схемою вузлів, якщо $\sigma = 1/2$, при $j = 0$:

$$u_{i,1} = \frac{u_{i+1,0} + u_{i-1,0}}{2}; \qquad i = \overline{1,4};$$

При цьому використовуються значення функції на початковому рівні й граничні значення. Таким чином, одержуємо

$$u_{11} = \frac{1}{2}(u_{20} + u_{00}) = \frac{1}{2}(0{,}9511 + 0{,}0) = 0{,}4755;$$

$$u_{21} = \frac{1}{2}(u_{30} + u_{10}) = \frac{1}{2}(0{,}9511 + 0{,}5878) = 0{,}7694;$$

$$u_{31} = \frac{1}{2}(u_{40} + u_{20}) = \frac{1}{2}(0{,}5878 + 0{,}9511) = 0{,}7694;$$

$$u_{41} = \frac{1}{2}(u_{50} + u_{30}) = \frac{1}{2}(0{,}0 + 0{,}9511) = 0{,}4755;$$

Значення функції $u(x,t)$ на другому рівні при $t_1 = 0{,}04$, $j = 1$ знаходимо за формулою:

$$u_{i,2} = \frac{u_{i+1,1} + u_{i-1,1}}{2}; \qquad i = \overline{1, 4}$$

і т.д.

У результаті одержимо наступні значення:

3	0,06		0	0,3112	0,5036	0,5036	0,3112	0
2	0,04		0	0,3847	0,6225	0,6225	0,3847	0
1	0,02		0	0,4755	0,7694	0,7694	0,4755	0
0	0		0	0,5878	0,9511	0,9511	0,5878	0
j	t							
		x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
		i	0	1	2	3	4	5

9.5. Метод кінцевих різниць для розв'язування рівнянь гіперболічного типу

Розглянемо крайову задачу для диференціального рівняння в частинних похідних другого порядку гіперболічного типу. Задача полягає в знаходженні функції $u(x, t)$, що задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + F(x, t)$$

початковим умовам

$$u(x, 0) = f(x), \qquad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x), \qquad x \in [0, s]$$

і граничним умовам

$$u(0, t) = \varphi(t), \qquad u(s, t) = \psi(t), \qquad t \geq 0.$$

Якщо $F(x, t) \neq 0$, то розглядається крайова задача для неоднорідного рівняння, якщо $F(x, t) = 0$ – крайова задача для однорідного рівняння.

Сформульована задача, зокрема, описує коливання струни, функція $u(x, t)$ визначає положення кожної точки струни в момент часу t. Початкові умови для кожної точки струни описують початкове положення й початкову швидкість. Граничні умови описують зміну положення граничних точок струни $x = 0$ й $x = s$ із часом. Функція $F(x, t)$ визначає наявність збудливих сил, що діють на струну.

Для розв'язування крайової задачі застосуємо метод кінцевих різниць. Для цього в області $t \geq 0,\ 0 \leq x \leq s$ побудуємо два сімейства паралельних прямих, що проходять через точки $x_i = ih_1,\ i = \overline{0, n},\quad t_j = jh_2,\ j = 0, 1, 2, 3, ...$ на осях координат. Значення невідомої функції $u = u(x, t)$ у вузлах сітки позначимо через $u_{ij} = u(x_i, t_j),\ i = \overline{0, n},\ j = 0, 1, 2, ...$

Для знаходження значень невідомої функції на границях заданої області скористаємося заданими крайовими умовами (рис. 9.8).

Із граничних умов

$$u(0, t) = \varphi(t), \qquad u(s, t) = \psi(t), \qquad t \geq 0$$

випливає

$$u_{0j} = \varphi(t_j), \qquad u_{nj} = \psi(t_j), \qquad j = 0, 1, 2, ...,$$

З першої початкової умови

$$u(x, 0) = f(x), \qquad x \in [0, s]$$

випливає

$$u_{i0} = f(x_i), \qquad i = \overline{0, n}.$$

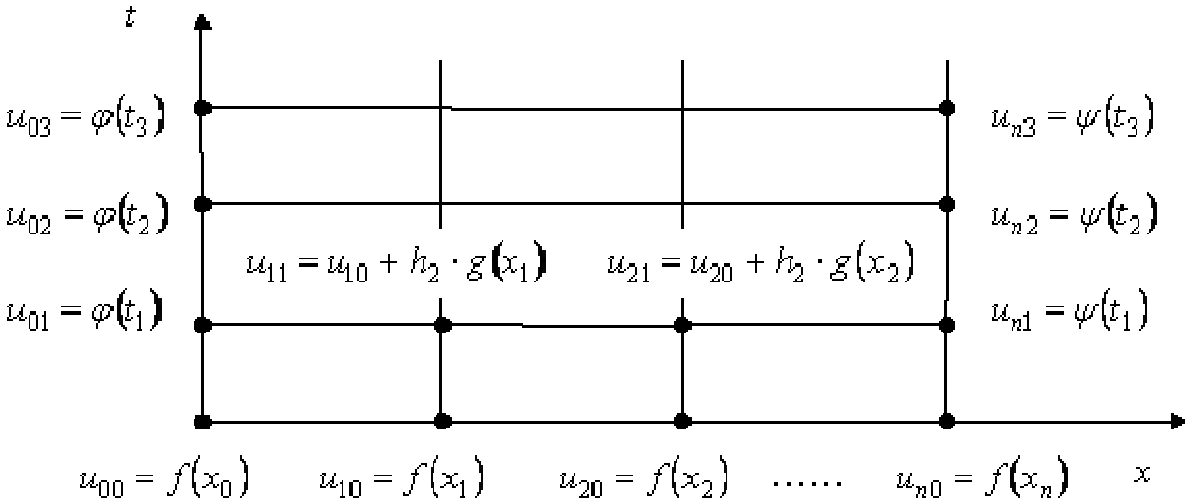


Рисунок 9.8 – Визначення крайових умов у задачі гіперболічного типу

Зупинимося докладніше на другій початковій умові

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x), \qquad x \in [0, s],$$

яка виконується для $t = t_0$ й усіх $x = x_i$, де $x_i \in [\, x_0, x_n \,]$:

$$\frac{\partial u(x_i, t_0)}{\partial t} = g(x_i), \qquad i = \overline{0, n}.$$

Частинну похідну за часом представимо через відповідну кінцеву різницю

$$\frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{h_2} = g(x_i), \qquad i = \overline{0, n},$$

звідки випливає, що

$$u_{i,1} = u_{i,0} + h_2 \cdot g(x_i), \qquad i = \overline{0, n}.$$

Отримана формула дозволяє обчислити значення невідомої функції при $t = t_1$. Отже, початкові умови дозволяють обчислити значення функції на перших двох рівнях сітки.

Усі інші значення одержуємо з рівняння, заміною в ньому частинні похідні відповідними виразами через кінцеві різниці при $i = \overline{1, n-1}$, $j = 1, 2, ...$

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + F\left(x_i, t_j\right)$$

Після домноження рівняння на $h_2^2 \neq 0$ одержимо

$$u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = \frac{h_2^2}{h_1^2}\left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right) + h_2^2 F\left(x_i, t_j\right),$$
$$i = \overline{1, n-1}, \ j = 1, 2, ...$$

Позначивши $\sigma = \dfrac{h_2}{h_1}$, приводимо ці рівняння до вигляду

$$u_{i,j+1} = 2u_{i,j} - u_{i,j-1} + \sigma^2\left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right) + h_2^2 F\left(x_i, t_j\right),$$
$$i = \overline{1, n-1}, \ j = 1, 2, ...$$

Відзначимо, що в отриманій рівності використовується явна схема вузлів, тому що дозволяє знайти значення функції $u(x, t)$ на рівні $j+1$, якщо відомі значення на двох попередніх рівнях (рис. 9.9).

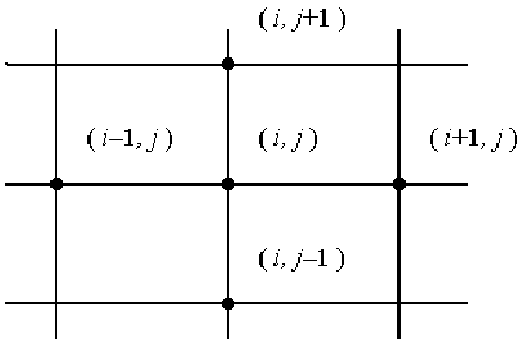


Рисунок 9.9 – Схема визначення функції у рівнянні гіперболічного типу

Дві початкові умови дали можливість знайти наближене значення невідомої функції на двох початкових рівнях сітки, що дозволяє використовувати отриману рівність для знаходження значень функції, починаючи із другого рівня при $j = 1$.

Доведено, що при $\sigma \leq 1$ отримане різницеве рівняння стійке.

Зокрема, при $\sigma = 1$ рівність має найбільш простий вигляд:

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} - u_{i,j-1} + u_{i-1,j} + h_2^2 F\left(x_i, t_j\right), \quad i = \overline{1, n-1}, \ j = 1, 2, ...$$

Оцінка похибки наближеного розв'язку, отриманого з кінцево-різницевого рівняння в області $0 \leq x \leq s$, $0 \leq t \leq T$ має вигляд

$$\Delta u \le \frac{h_1^2}{12}\left((M_4 h_1 + 2M_3)T + T^2 M_4\right),$$

$$M_2 = \max\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|, \quad M_3 = \max\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right|, \quad M_4 = \max\left|\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\right|, \quad M_6 = \max\left|\frac{\partial^6 u}{\partial t^6}\right|,$$

Приклад. Знайти наближений розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

що задовольняє умовам

$$u(x,0) = \sin \pi x, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \qquad x \in [0;1],$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad t \in [0;1].$$

Розв'язування. Будемо використовувати кінцево-різницеву рівність при $\sigma = 1$. Оберемо за аргументом x крок $h_1 = 0{,}2$. Тому що $\sigma = 1$, одержуємо за аргументом t крок $h_2 = h_1 = 0{,}2$. Розіб'ємо проміжок $x \in [0;1]$ на частини точками розподілу $x_i = ih_1$, $i = \overline{0,5}$, а проміжок $t \in [0;1]$ точками $t_j = jh_2$, $j = \overline{0,5}$. Тоді

$$x_0 = 0{,}0;\ x_1 = 0{,}2;\ x_2 = 0{,}4;\ x_3 = 0{,}6;\ x_4 = 0{,}8;\ x_5 = 1{,}0.$$

$$t_0 = 0{,}0;\ t_1 = 0{,}2;\ t_2 = 0{,}4;\ t_3 = 0{,}6;\ t_4 = 0{,}8;\ t_5 = 1{,}0.$$

Скористаємося першою початковою умовою й визначимо значення функції $u(x,t)$ на нульовому рівні за формулами:

$$t_0 = 0{,}0; \qquad u_{i0} = \sin(\pi \cdot x_i), \qquad i = \overline{0,5}.$$

Одержимо

$u_{00} = \sin(\pi \cdot 0{,}0) = 0{,}0$; $\qquad u_{10} = \sin(\pi \cdot 0{,}2) = 0{,}5878$;

$u_{20} = \sin(\pi \cdot 0{,}4) = 0{,}9511$; $\qquad u_{30} = \sin(\pi \cdot 0{,}6) = 0{,}9511$;

$u_{40} = \sin(\pi \cdot 0{,}8) = 0{,}5878$; $\qquad u_{50} = \sin(\pi \cdot 1{,}0) = 0{,}0$.

Скористаємося другою початковою умовою й визначимо значення функції $u(x,t)$ на першому рівні за формулами:

$$t_1 = 0{,}2; \qquad u_{i,1} = u_{i,0} + h_2 \cdot 0, \qquad i = \overline{0,5}.$$

Одержимо

$u_{01} = 0{,}0$; $\qquad u_{11} = 0{,}5878$; $\qquad u_{21} = 0{,}9511$;

$u_{31} = 0{,}9511$; $\qquad u_{41} = 0{,}5878$; $\qquad u_{51} = 0{,}0$.

Скористаємося граничними умовами й визначимо значення функції $u(x,t)$ на лівій і правої границях області за формулами:

$x_0 = 0{,}0$; $\qquad u_{0j} = 0{,}0$; $\qquad j = \overline{0,5}$;

$x_5 = 1{,}0$; $\qquad u_{5j} = 0{,}0$; $\qquad j = \overline{0,5}$.

Обчислюємо значення u_{ij} на наступних рівнях $j = \overline{1,4}$ за формулою

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} - u_{i,j-1} + u_{i-1,j}, \qquad i = \overline{1,4}.$$

При $j=1$ для $t_2=0{,}4$ послідовно одержуємо

$u_{12}=u_{21}-u_{10}+u_{01}=0{,}9511-0{,}5878+0{,}0=0{,}3633$;

$u_{22}=u_{31}-u_{20}+u_{11}=0{,}9511-0{,}9511+0{,}5878=0{,}5878$;

$u_{32}=u_{41}-u_{30}+u_{21}=0{,}5878-0{,}9511+0{,}9511=0{,}5878$;

$u_{42}=u_{51}-u_{40}+u_{31}=0{,}0-0{,}5878+0{,}9511=0{,}3633$;

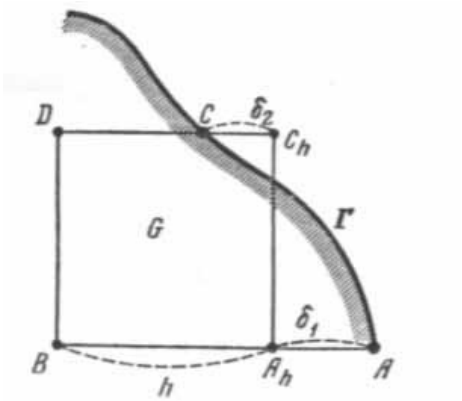
і т.д.

У результаті одержимо наступні значення:

j	t							
10	2		0	0,5878	0,9511	0,9511	0,5878	0
9	1,8		0	0,3633	0,5878	0,5878	0,3633	0
8	1,6		0	0	0	0	0	0
7	1,4		0	-0,363	-0,588	-0,588	-0,363	0
6	1,2		0	-0,588	-0,951	-0,951	-0,588	0
5	1		0	-0,588	-0,951	-0,951	-0,588	0
4	0,8		0	-0,363	-0,588	-0,588	-0,363	0
3	0,6		0	0	0	0	0	0
2	0,4		0	0,3633	0,5878	0,5878	0,3633	0
1	0,2		0	0,5878	0,9511	0,9511	0,5878	0
0	0		0	0,5878	0,9511	0,9511	0,5878	0
		x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
		i	0	1	2	3	4	5

9.6. Розв'язування крайових задач для криволінійних областей

Якщо границя Г області G криволінійна, то значення $u_{i,j}$ для граничних вузлів одержують шляхом переносу значень із точок границі Г. Похибку, що одержана в результаті такого переносу, можна значно зменшити, якщо для кожного граничного вузла становити рівняння наступного вигляду:



1) для вузла A_h: $u_{A_h}=\dfrac{\delta_1\cdot u_B+h\cdot u_A}{\delta_1+h}$;

2) для вузла C_h: $u_{C_h}=\dfrac{\delta_2\cdot u_D-h\cdot u_C}{\delta_2-h}$.

Одержавши одне з таких рівнянь для кожного граничного вузла й приєднавши їх до відповідних алгебраїчних рівнянь щодо значень $u_{i,j}$ у вузлах сітки, ми одержимо розв'язок задачі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Фельдман Л.П. Чисельні методи в інформатиці. – Підручник. К., 2006. – 480с.
2. Сулима И.М., Гавриленко С.И., Радчик И.А., Юдицкий Я.А.. Основные численные методы и их реализация на микрокалькуляторах. – К: Вища школа, 1987.
3. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М: Наука, 1972.
4. Волков Е.А. Численные методы. – М.: Наука, 1982.
5. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1977.
6. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. – М.: Наука, 1972.
7. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1980.
8. Заварыкин В.М., Житомирский В.Г., Лапчик М.П. Численные методы. – М.: Просвещение, 1990.