МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Інститут інноваційної та післядипломної освіти

Кафедра економічної кібернетики та інформаційних технологій

Бойцова І.А.

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ**

до виконання самостійної роботи з дисципліни

# «ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ»

(розділ "Моделі задач лінійного та нелінійного програмування, методи розв'язування та аналізу")

для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «Бакалавр» спеціальності 6.030502 «Економічна кібернетика»

Одеса – 2015

Методичні рекомендації до виконання самостійної роботи з дисципліни "Оптимізаційні методи та моделі" (розділ "Моделі задач лінійного та нелінійного програмування, методи розв'язування та аналізу") для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня "Бакалавр" спеціальності 6.030502 "Економічна кібернетика"

Укладач: **Бойцова І. А.**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри економічної кібернетики та інформаційних технологій ІІПО ОНУ імені І. І. Мечникова

Рецензенти: **Шпінарева І. М.,** кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного забезпечення комп’ютерних систем ІМЕМ ОНУ імені І. І. Мечникова

**Вербіцький В. В.,** кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри економічної кібернетики та інформаційних технологій ІІПО ОНУ імені І. І. Мечникова

Рекомендовано до друку Вченою радою ІІПО ОНУ імені І. І. Мечникова Протокол № 3 від 17 листопада 2015р.

СОДЕРЖАНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Студент экономических специальностей, изучивший дисциплины "Исследование операций" и "Оптимизационные методы и модели", должен знать основные экономические проблемы, при решении которых возникает необходимость в математическом инструментарии. Он должен ориентироваться в экономической постановке задачи и определять по ней, в каком разделе исследования операций следует искать средства ее решения; должен уметь формализовать экономическую задачу, т.е. описать ее с помощью известной математической модели, провести расчеты и получить количественные результаты. Однако самое главное – студент должен уметь анализировать эти результаты и делать выводы, адекватные поставленной экономической задаче.

# ТЕМА 1. ОПТИМИЗАЦИЯ ПЛАНА ПРОИЗВОДСТВА

*Общая постановка задачи планирования производства*: необходимо определить план производства одного или нескольких видов продукции, который обеспечивает наиболее рациональное использование имеющихся материальных, финансовых и других видов ресурсов. Такой план должен быть оптимальным с точки зрения выбранного критерия – максимума прибыли, минимума затрат на производство и т.д.

## Математическая модель задачи

Введем обозначения:

$n$ – количество выпускаемых продуктов;

$x_j$ – объем выпуска $j$-го продукта, неизвестные величины, которые требуется определить;

$c_j$ – прибыль от выпуска и реализации единицы $j$-го продукта;

$m$ – количество используемых производственных ресурсов (производственные мощности, сырье, рабочая сила);

$b_i$ – количество имеющегося $i$-го ресурса;

$a_{ij}$ – объем затрат $i$-го ресурса на выпуск единицы $j$-й продукции.

Задача оптимизации производственной программы может быть описана с помощью следующей *модели линейного программирования*:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, 2, ..., m, \tag{2}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{3}$$

Задача (1) – (3) называется *задачей линейного программирования в стандартной форме на максимум*, в которой:

– (1) – целевая функция, которая определяет максимальное значение прибыли от реализации произведенной продукции;
– (2) – основные ограничения, которые определяют объем ресурсов, необходимых для производства продукции, и которые не должны превышать имеющееся количество ресурсов;
– (3) – прямые ограничения, которые означают, что количество производимой продукции не может принимать отрицательные значения.

С каждой задачей линейного программирования в стандартной форме на максимум связывается *двойственная к ней задача*. Пусть:

$m$ – количество используемых производственных ресурсов (производственные мощности, сырье, рабочая сила);

$y_i$ – цена единицы $i$-го ресурса, неизвестные величины, которые требуется определить;

$b_i$ – количество имеющегося $i$-го ресурса;

$n$ – количество выпускаемых продуктов;

$c_j$ – прибыль от выпуска и реализации единицы $j$-го продукта;

$a_{ij}$ – объем затрат $i$-го ресурса на выпуск единицы $j$-й продукции.

*Двойственная задача* к задаче (1) – (3) имеет вид

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min, \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i \ge c_j, \quad j = 1, 2, ..., n, \qquad (5)$$

$$y_i \ge 0, \quad i = 1, 2, ..., m. \qquad (6)$$

и называется *задачей линейного программирования в стандартной форме на минимум*, в которой:

– (4) – целевая функция, которая определяет минимально возможные общие затраты на производство продукции или общую стоимость использованных ресурсов;
– (5) – основные ограничения, которые определяют затраты всех ресурсов на изготовление единицы продукции $j$-го вида и не должны быть меньше стоимости самого продукта;
– (6) – прямые ограничения, которые означают, что стоимость единицы ресурса не может принимать отрицательные значения.

Требуется определить цены на все ресурсы, удовлетворяющие ограничениям (5), на которых минимизируются суммарные затраты на производство. Переменные $y_i$ двойственной задачи называют *теневыми ценами*.

*Оптимальное решение* $y_i^*$ двойственной задачи (4) – (6) показывает на сколько увеличится прибыль от реализации всей продукции, если расход $i$-го ресурса увеличить на единицу.

Проанализируем, как повлияет изменение имеющегося количества $i$-го ресурса на оптимальное решение $y^*$ двойственной задачи (4) – (6). Пусть $b_i' \le b_i \le b_i''$ определяет промежуток значений для $b_i$, при котором оптимальное решение $y^*$ двойственной задачи (4) – (6) не изменится, тогда этот промежуток является промежутком *устойчивости* по правой части ограничений исходной задачи (1) – (3).

Проанализируем, как повлияет изменение прибыли от реализации $j$-го продукта на оптимальное решение $x^*$ исходной задачи (1) – (3). Пусть $c_j' \le c_j \le c_j''$ определяет промежуток значений для $c_j$, при котором оптимальное решение $x^*$ исходной задачи (1) – (3) не изменится, тогда этот промежуток является промежутком *устойчивости* по коэффициенту целевой функции исходной задачи.

## Индивидуальные задания

**Задача 1.** Нефтеперерабатывающая установка может работать в двух различных режимах. При работе в первом режиме из одной тонны нефти производится 300 кг темных и 600 кг светлых нефтепродуктов; при работе во втором режиме – 700 кг темных и 200 кг светлых нефтепродуктов. Ежедневно на этой установке необходимо производить 110 т темных и 70 т светлых нефтепродуктов. Это плановое задание необходимо ежедневно выполнять, расходуя минимальное количество нефти.

*Ответить на вопросы*:

1. Сколько тонн нефти следует ежедневно перерабатывать в первом режиме?
2. Сколько тонн нефти следует ежедневно перерабатывать во втором режиме?
3. Каков минимальный ежедневный расход нефти?
4. На сколько тонн увеличится ежедневный минимальный расход нефти, если потребуется производить в день 80 т светлых нефтепродуктов?

**Задача 2.** Фирма «Television» производит два вида телевизоров: «Астро» и «Космо». В цехе 1 производят телевизионные трубки. На производство одной трубки к телевизору «Астро» требуется потратить 1,2 человеко-часа, а на производство трубки к «Космо» – 1,8 человеко-часа. В настоящее время в цехе 1 на производство трубок к обеим маркам телевизоров может быть затрачено не более 120 человеко-часов в день.

В цехе 2 производят шасси с электронной схемой телевизора. На производство шасси для телевизора любой марки требуется затратить 1 человеко-час. На производство шасси к обеим маркам телевизоров в цехе 2 может быть затрачено не более 90 человеко-часов в день.

Продажа каждого телевизора марки «Астро» обеспечивает прибыль в размере 1500 грн., а марки «Космо» — 2000 грн. Фирма заинтересована в максимизации прибыли.

*Ответить на вопросы:*

1. Сколько телевизоров «Астро» следует производить ежедневно?
2. Какова максимальная ежедневная прибыль телевизионной компании?
3. На сколько гривен в день увеличится прибыль, если ресурс времени в цехе 2 возрастет на 5 человеко-часов?
4. Следует ли изменить план производства, если прибыль от телевизора «Космо» увеличится до 2200 гривен?

**Задача 3.** Чулочно-носочная фирма производит и продает два вида товаров: мужские носки и женские чулки. Фирма получает прибыль в размере 10 грн. от производства и продажи одной пары чулок и в размере 4 грн. от производства и продажи одной пары носков.

Производство каждого изделия осуществляется на трех участках. Затраты труда (в часах) на производство одной пары указаны в следующей таблице для каждого участка:

| Участок производства | Чулки | Носки |
|---|---|---|
| 1 | 0,02 | 0,01 |
| 2 | 0,03 | 0,01 |
| 3 | 0,03 | 0,02 |

Руководство рассчитало, что в следующем месяце фирма ежедневно будет располагать следующими ресурсами рабочего времени на каждом из участков: 60 ч на участке 1; 70 ч на участке 2 и 100 ч на участке 3. Фирма хочет максимизировать прибыль.

*Ответить на вопросы*:

1. Сколько пар носков следует производить ежедневно?
2. Какую максимальную прибыль фирма может получать ежедневно?
3. На сколько увеличится прибыль, если ресурс времени на участке 1 увеличится на 10 ч?
4. На сколько увеличится прибыль, если ресурс времени на участке 2 увеличится на 10 ч?

**Задача 4.** Владелец небольшого мебельного цеха производит столы трех моделей: *A, B* и *C*. Каждая модель требует определенных затрат времени на выполнение трех операций: производство заготовок, сборка изделия и покраска собранного изделия.

Имеется возможность продавать все столы, которые он изготовит. Более того, модель *C* может быть продана и без покраски (модель *C б.п.*). При этом прибыль уменьшается на 200 грн. за штуку. Рабочие в цеху работают по совместительству, так что количество часов, отводимое на каждый вид работ, изменяется от месяца к месяцу.

Найти такую программу выпуска продукции, чтобы прибыль в следующем месяце была максимальной. Предполагается, что по каждому виду работ возможны трудозатраты до 100 ч. В следующей таблице указаны время (в часах), необходимое для выполнения операций по производству столов каждой модели, и прибыль (в грн.), которая может быть получена от реализации каждого изделия:

| Модель | Производство заготовок | Сборка | Покраска | Прибыль |
|---|---|---|---|---|
| *A* | 5 | 2 | 5 | 450 |
| *B* | 1 | 2 | 5 | 400 |
| *C* | 7 | 5 | 6 | 500 |

*Ответить на вопросы*:

1. Какую максимальную прибыль можно получить в течение месяца?
2. Сколько столов модели *A* следует производить?
3. Следует ли продавать неокрашенные столы модели *C*?
4. На сколько увеличится максимальная прибыль, если допустимый объем трудозатрат на этапе сборки возрастет на 10%?
5. На какую минимальную величину должна возрасти прибыль от производства и продажи окрашенного стола модели *C*, чтобы стало выгодно их производить?

**Задача 5.** После предпринятой рекламной кампании фирма «Давидко» испытывает необыкновенный рост спроса на два типа мангалов для приготовления шашлыков на открытом воздухе – газовые и угольные. Фирма заключила контракт на ежемесячную поставку в магазины 300 угольных и 300 газовых мангалов.

Производство мангалов ограничивается мощностью следующих трех участков: производства деталей, сборки и упаковки изделия. В таблице показано, сколько человеко-часов затрачивается на каждом участке на каждую единицу продукции, а также приведен допустимый ежемесячный объем трудозатрат:

| Участок | Трудозатраты на производство одного мангала, ч | | Фонд времени, человеко-часы |
|---|---|---|---|
| | угольного | газового | |
| Производство | 5 | 8 | 2600 |
| Сборка | 0,8 | 1,2 | 400 |
| Упаковка | 0,5 | 0,5 | 200 |

Фирма «Давидко» не может обеспечить выполнение контракта своими силами. Поэтому она провела переговоры с другим производителем, который в настоящее время располагает избыточными мощностями. Этот производитель согласился поставлять фирме «Давидко» угольные мангалы по 3 тыс. грн. за штуку и газовые мангалы по 5 тыс. грн. за штуку. Эти цены превышают себестоимость мангалов на заводе фирмы «Давидко» на 1,5 тыс. грн. за каждый угольный мангал и на 2 тыс. грн. за каждый газовый мангал. Задача фирмы «Давидко» состоит в том, чтобы найти такое соотношение закупаемых и производимых мангалов, которое обеспечило бы выполнение контракта с минимальными общими затратами.

*Ответить на вопросы*:

1. Каковы минимальные издержки на выполнение контракта?
2. Сколько угольных мангалов следует ежемесячно производить фирме «Давидко»?
3. Сколько газовых мангалов следует ежемесячно производить?
4. Сколько газовых мангалов следует приобретать?
5. Следует ли сохранить объемы закупок газовых мангалов, если компания, выполняющая заказы для фирмы «Давидко», поднимет цену на них до 5,5 тыс. грн.?

## ТЕМА 2. ОПТИМАЛЬНОЕ СМЕШЕНИЕ

*Задача оптимального смешения*: необходимо получить наилучший способ смешения исходных ингредиентов для получения смеси с заданными свойствами. Смесь должна иметь требуемые свойства, которые определяются количеством компонентов, входящих в состав исходных ингредиентов. Если известны стоимостные характеристики ингредиентов, то искомую смесь требуется получить с наименьшими затратами. Для многопродуктовых задач, в которых требуется получить несколько смесей, характерным является критерий максимизации прибыли.

### Математические модели задачи

#### *Модель А. Однопродуктовая модель оптимального смешения*

Введем обозначения:

$n$ – количество исходных ингредиентов;

$x_j$ – количество $j$-го ингредиента, входящего в смесь, которое требуется определить;

$c_j$ – стоимость единицы $j$-го ингредиента;

$m$ – количество компонентов в смеси;

$b_i$ – количество $i$-го компонента в смеси;

$a_{ij}$ – количество $i$-го компонента в $j$-м ингредиенте.

Тогда *однопродуктовая модель оптимального смешения* имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \quad i = 1, 2, ..., m, \tag{8}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{9}$$

– (7) – целевая функция (минимум затрат на получение смеси);
– (8) –ограничения, определяющие содержание компонентов в смеси;
– (9) – ограничения на неотрицательность переменных.

Оптимальное решение $x^*$ задачи (7) – (9) называют *рецептом приготовления смеси* или *рецептом смешения*.

### *Модель B. Однопродуктовая модель смешения с дополнительными ограничениями*

Введем обозначения:

$n$ – количество исходных ингредиентов;

$x_j$ – количество $j$-го ингредиента, входящего в смесь, которое требуется определить;

$c_j$ – стоимость единицы $j$-го ингредиента;

$m$ – количество компонентов в смеси;

$b_i$ – количество $i$-го компонента в смеси;

$a_{ij}$ – количество $i$-го компонента в $j$-м ингредиенте;

$w$ – число условий, отражающих содержание ингредиентов в смеси;

$d_{rj}$ – коэффициент, отражающий условие $r$ на содержание $j$-го ингредиента в смеси.

Тогда однопродуктовая модель оптимального смешения с *дополнительными ограничениями* имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - b_i) x_j \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., m, \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_{rj} x_j \geq 0, \quad r = 1, 2, ..., w, \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \tag{13}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{14}$$

- (10) – целевая функция (минимум затрат на получение смеси);
- (11) –ограничения, определяющие содержание компонентов в смеси;
- (12) – ограничения на содержание ингредиентов в смеси.
- (13) – ограничение на количество смеси;
- (14) – ограничения на неотрицательность переменных.

### *Модель С. Многопродуктовая модель оптимального смешения*

В *многопродуктовых задачах* ингредиенты используются для приготовления не одной, а нескольких смесей. Критерий оптимальности задачи – максимизация прибыли.

Введем обозначения:

$n$ – количество исходных ингредиентов;

$s$ – количество смесей;

$x_{kj}$ – количество $j$-го ингредиента, входящего в $k$-ю смесь;

$c_j$ – стоимость единицы $j$-го ингредиента;

$p_k$ – стоимость единицы $k$-ой смеси;

$m$ – количество компонентов в смеси;

$a_{ij}$ – количество $i$-го компонента в $j$-м ингредиенте;

$b_{ik}$ – минимально допустимое количество $i$-го компонента в $k$-ой смеси;

$w$ – число условий, отражающих содержание $j$-го ингредиента в смеси;

$d_{rkj}$ – коэффициент, отражающий условие $r$ на содержание $j$-го ингредиента в $k$-ой смеси;

$u_j$ – количество имеющегося $j$-го ингредиента.

Тогда *многопродуктовая модель оптимального смешения* имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}\left(p_k - c_j\right)x_{kj} \to \max, \tag{15}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij} - b_{ik}\right)x_{kj} \ge 0, \quad i = 1, 2, ..., m, \quad k = 1, 2, ..., s, \tag{16}$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_{rkj}x_{kj} \ge 0, \quad r = 1, 2, ..., w, \quad k = 1, 2, ..., s, \tag{17}$$

$$\sum_{k=1}^{s} x_{kj} \le u_j, \quad j = 1, 2, ..., n, \tag{18}$$

$$x_{kj} \ge 0, \quad j = 1, 2, ..., n, \quad k = 1, 2, ..., s. \tag{19}$$

- (15) – целевая функция (максимум прибыли);
- (16) –ограничения, определяющие содержание компонентов в смеси;
- (17) – ограничения на содержание ингредиентов в смеси;
- (18) – ограничения на количество ингредиентов;
- (19) – ограничения на неотрицательность переменных.

## Индивидуальные задания

**Задача 1.** Животноводческая ферма имеет возможность закупать корма четырех видов по различным ценам. В кормах содержатся питательные вещества трех видов, необходимые для кормления коров.

Данные, необходимые для составления рациона, приведены в таблице (содержание веществ в кормах указано в килограммах на тонну):

| Корм / Вещество | 1 | 2 | 3 | 4 | Норма содержания веществ в ежедневном рационе коровы, кг |
|---|---|---|---|---|---|
| *A* | 20 | 40 | 60 | 10 | Не менее 5 |
| *B* | 30 | 10 | 0 | 20 | Не менее 3, не более 4 |
| *C* | 50 | 90 | 40 | 60 | Не менее 8, не более 10 |
| Цена 1 т корма, грн. | 180 | 200 | 250 | 100 | |

Составьте еженедельный рацион кормления коровы, обеспечивающий с минимальными затратами нормы содержания питательных веществ.

*Ответить на вопросы*:

1. Какое количество корма 1 следует закупить для составления еженедельного рациона кормления коровы?
2. Какое количество корма 4 следует закупить для составления еженедельного рациона кормления коровы?
3. Каков общий вес еженедельного рациона коровы?
4. Каковы минимальные затраты на покупку кормов для еженедельного рациона одной коровы?
5. На сколько возрастут затраты, если еженедельный рацион должен содержать не менее 6 кг вещества А?
6. До какой величины должна возрасти цена на корм 4, чтобы использование этого корма оказалось невыгодным?

**Задача 2.** В аптеке продаются поливитамины пяти наименований. Каждый поливитамин содержит витамины и вещества, наиболее важные для человека, перенесшего простудное заболевание. Необходимо определить, какие поливитамины и в каком количестве ему следует принимать для восстановления нормальной работоспособности.

| Поливитамины / Витамин | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Необходимо |
|---|---|---|---|---|---|---|
| А | 1,1 | 1,2 | 1,8 | 1,1 | 1,3 | 250 |
| В | 0,9 | 1,1 | 0,7 | 1 | 1,1 | 128 |
| С | 50 | 60 | 40 | 30 | 60 | 7 000 |
| Железо | 24 | 45 | 18 | 12 | 37 | 3 700 |
| Кальций | 210 | 340 | 150 | 260 | 300 | 32 000 |
| Цена, грн. | 3,4 | 4,3 | 2,4 | 2,2 | 3,7 | |

В таблице указано количество витаминов и веществ (в мг), которое он должен получить за весь курс лечения, а также данные о содержании витаминов и веществ в поливитаминах (в мг на 1 г) и цены за 1 г поливитаминов (в грн.). Определите, какие поливитамины следует принимать, чтобы с минимальными затратами пройти курс лечения.

*Ответить на вопросы*:

1. Какое количество поливитамина 1 следует принять?
2. Какое количество поливитамина 4 следует принять?
3. Какое общее количество поливитаминов следует принять?
4. Какова минимальная стоимость курса лечения?
5. До какого значения должна снизиться цена на поливитамин 2, чтобы его следовало включить в курс лечения?
6. На сколько снизится стоимость курса лечения, если необходимое содержание кальция в поливитаминах снизить на 100 мг на г?

**Задача 3.** Мощности завода позволяют произвести в текущем месяце ингредиенты для производства удобрений в следующем количестве: 10 т нитратов, 15 т фосфатов и 12 т поташа. В результате смешения этих активных ингредиентов с инертными ингредиентами, запасы которых не ограничены, на заводе могут быть получены четыре типа удобрений.

Удобрение 1 содержит 5% нитратов, 10% фосфатов и 5% поташа.

Удобрение 2 содержит 5% нитратов, 10% фосфатов и 10% поташа.

Удобрение 3 содержит 10% нитратов, 10% фосфатов и 10% поташа.

Удобрение 4 содержит 10% нитратов, 5% фосфатов и 5% поташа.

Цены на удобрения соответственно 400, 500, 400 и 450 грн. за тонну. Объем спроса на удобрения практически не ограничен. Стоимость производства одной тонны нитратов составляют 360 грн., фосфатов – 240 грн. и поташа – 200 грн. Инертные ингредиенты закупаются заводом по цене 100 грн. за тонну. На текущий месяц завод уже заключил контракт на поставку

10 т удобрения 3. Определите, какие удобрения и в каком количестве следует производить, чтобы в текущем месяце завод получил максимальную прибыль.

*Ответить на вопросы*:

1. Сколько удобрения 1 следует производить?
2. Сколько удобрения 4 следует производить?
3. Сколько всего следует производить удобрений?
4. Какова максимальная прибыль от производства удобрений?
5. На сколько изменилась бы прибыль, если бы заказчик отказался от контракта на поставку удобрения 3?
6. Изменится ли план производства, если мощности завода позволят выпускать 15 т нитратов?

**Задача 4.** На кондитерской фабрике изготовляют два вида продуктов – восточные сладости, для которых используют орехи: миндаль, фундук и арахис. Миндаль фабрика закупает по цене 75 грн. за килограмм, фундук – 60 грн., а арахис – 45 грн. Продукт 1 должен содержать не менее 12% миндаля и не более 18% фундука, продукт 2 – не менее 25% миндаля.

Цены готовых продуктов 1 и 2 соответственно 70 и 65 грн. за килограмм. Ежедневно фабрика получает следующее количество орехов: миндаля – 33 кг, фундука – 80 кг, арахиса – 60 кг. Найти ежедневный план производства продуктов, чтобы фабрика получала максимальную прибыль.

*Ответить на вопросы*:

1. Какое количество фундука следует использовать при производстве продукта 1?
2. Какое количество продукта 2 следует производить ежедневно?
3. Каков общий объем ежедневно производимой продукции?
4. Какова ежедневная максимальная прибыль фабрики?
5. Как увеличится прибыль, если увеличить закупки миндаля на 5 кг?

6. Изменится ли план производства продукции, если закупки арахиса увеличить до 70 кг?

**Задача 5.** Таировский винзавод производит три марки сухого вина: «Черный лекарь», «Букет роз» и «Белые ночи». Оптовые цены, по которым реализуется готовая продукция, соответственно 68, 57 и 60 грн. за литр. Ингредиентами для приготовления этих вин являются белое, розовое и красное сухие вина. Эти вина стоят соответственно 70, 50 и 40 грн. за литр. В среднем на винзавод поставляется ежедневно 2000 л белого, 2500 л розового и 1200 л красного вина.

В вине «Черный лекарь» должно содержаться не менее 60% белого вина и не более 20% красного. Вино «Букет роз» должно содержать не более 60% красного и не менее 15% белого. Суммарное содержание красного и розового вина в вине «Белые ночи» не должно превышать 90%.

Определите рецепты смешения ингредиентов для производства вин «Черный лекарь» и «Букет роз», обеспечивающие заводу максимальную прибыль.

*Ответить на вопросы*:

1. Какую максимальную прибыль можно получить за один день?
2. Сколько литров вина «Черный лекарь» следует производить ежедневно?
3. Сколько процентов белого вина должен содержать «Черный лекарь»?
4. Сколько литров вина «Букет роз» следует производить ежедневно?
5. Сколько литров вина «Белые ночи» следует производить ежедневно?
6. Сколько процентов розового вина должны содержать «Белые ночи»?
7. На сколько возрастет прибыль винзавода, если поставки красного вина удастся увеличить до 1300 л в день?
8. На сколько грн. уменьшится прибыль винзавода, если поставки белого вина сократятся до 1800 л в день?

# ТЕМА 3. ОПТИМАЛЬНЫЙ РАСКРОЙ

Большинство материалов, используемых в промышленности, поступает на производство в виде стандартных форм. Непосредственное использование таких материалов, как правило, невозможно. Предварительно их разделяют на заготовки необходимых размеров. Это можно сделать, используя различные способы раскроя материала.

*Задача оптимального раскроя* состоит в том, чтобы выбрать один или несколько способов раскроя материала и определить, какое количество материала следует раскраивать, применяя каждый из выбранных способов. Задачи такого типа возникают в металлургии и машиностроении, лесной, лесообрабатывающей, легкой промышленности.

Выделяют *два этапа* решения задачи оптимального раскроя. На первом этапе определяются *рациональные способы раскроя материала*, на втором – решается задача линейного программирования для *определения интенсивности использования рациональных способов раскроя*.

## Математические модели задачи

### *Этап 1. Определение рациональных способов раскроя материала*

В задачах оптимального раскроя рассматриваются так называемые рациональные (оптимальные по Парето) способы раскроя. Предположим, что из единицы материала можно изготовить заготовки нескольких видов.

*Способ раскроя* единицы материала называется *рациональным (оптимальным по Парето)*, если увеличение числа заготовок одного вида возможно только за счет сокращения числа заготовок другого вида.

Пусть $k$ – индекс вида заготовки, $k = 1,2,...,q$; $i$ – индекс способа раскроя единицы материала, $i = 1,2,..., p$; $a_{ik}$ – количество заготовок $k$-го вида, полученных при раскрое единицы материала $i$-м способом.

*Способ раскроя* $v$ называется *рациональным (оптимальным по Парето)*, если для любого другого способа раскроя $i$ из соотношений $a_{ik} \geq a_{vk}$, $k = 1,2,...,q$ следуют соотношения $a_{ik} = a_{vk}$, $k = 1,2,...,q$.

### *Этап 2. Определение интенсивности использования рациональных способов раскроя*

Введем обозначения:

$j$ – индекс материала, $j = 1,2,...,n$;

$i$ – индекс способа раскроя единицы материала, $i = 1,2,..., p$;

$x_{ji}$ – количество единиц $j$-го материала, раскраиваемых по $i$-му способу (интенсивность использования способа раскроя);

$k$ – индекс вида заготовки, $k = 1,2,...,q$;

$a_{ijk}$ – количество заготовок $k$-го вида, полученных при раскрое единицы $j$-го материала $i$-м способом;

$c_{ji}$ – величина отхода, полученного при раскрое единицы $j$-го материала по $i$-му способу;

$b_k$ – число заготовок $k$-го вида в комплекте, поставляемом заказчику;

$d_j$ – количество материала $j$-го вида;

$y$ – число комплектов заготовок различного вида, поставляемых заказчику.

### *Модель А раскроя с минимальным расходом материалов*

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} x_{ji} \to \min, \tag{20}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} a_{jik} x_{ji} \geq b_k, \quad k = 1, 2, ..., q, \tag{21}$$

$$x_{ji} \geq 0, \quad j = 1, 2, ..., n, \quad i = 1, 2, ..., p. \tag{22}$$

– (20) – целевая функция (минимум используемых материалов);

– (21) – система ограничений, определяющих количество заготовок, необходимое для выполнения заказа;
– (22) – условия неотрицательности переменных.

**_Модель В раскроя с минимальными отходами_**

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} c_{ji} x_{ji} \to \min, \tag{23}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} a_{jik} x_{ji} = b_k, \quad k = 1, 2, ..., q, \tag{24}$$

$$x_{ji} \ge 0, \quad j = 1, 2, ..., n, \quad i = 1, 2, ..., p. \tag{25}$$

– (23) – целевая функция (минимум отходов при раскрое материалов);
– (24) – система ограничений, определяющих количество заготовок, необходимое для выполнения заказа;
– (25) – условия неотрицательности переменных.

**_Модель С раскроя с учетом комплектации_**

$$y \to \max, \tag{26}$$

$$\sum_{i=1}^{p} x_{ji} \le d_j, \quad j = 1,2,...,n, \tag{27}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} a_{jik} x_{ji} \ge b_k y, \quad k = 1, 2, ..., q, \tag{28}$$

$$y \ge 0, \quad x_{ji} \ge 0, \quad j = 1, 2, ..., n, \quad i = 1, 2, ..., p. \tag{29}$$

– (26) – целевая функция (максимум комплектов, включающих заготовки различных видов);
– (27) – ограничения по количеству материалов;
– (28) – система ограничений, определяющих количество заготовок, необходимое для формирования комплектов;
– (29) – условия неотрицательности переменных.

## Индивидуальные задания

**Задача 1.** Из прямоугольного листа железа размером 100 х 60 см необходимо изготовить квадратные заготовки со сторонами 50, 40 и 20 см. Эти заготовки нужны в качестве перегородок при изготовлении пластмассовых коробок для хранения инструментов. Чтобы сделать одну коробку, нужно иметь четыре заготовки со стороной 50 см, шесть заготовок со стороной 40 см и двенадцать – со стороной 20 см. На складе находится 100 листов материала.

*Ответить на вопросы*:

1. Сколько существует рациональных способов раскроя?
2. Какое максимальное количество коробок можно изготовить при условии, что оставшиеся заготовки можно использовать для следующей партии коробок?
3. Сколько рациональных способов раскроя и какие следует использовать?
4. Сколько листов материала нужно, чтобы изготовить одну коробку?

**Задача 2.** Существует три рациональных способа раскроя единицы материала *A* на заготовки трех типов. Эти же заготовки могут быть получены двумя рациональными способами при раскрое единицы материала *B*. Количество заготовок, получаемых каждым из этих способов, показано в следующей таблице:

| Заготовка | Материал *A* | | | Материал *B* | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Способ 1 | Способ 2 | Способ 3 | Способ 4 | Способ 5 |
| 1 | 0 | 2 | 9 | 1 | 5 |
| 2 | 4 | 3 | 2 | 5 | 4 |
| 3 | 10 | 6 | 0 | 8 | 0 |

Заготовки используются для производства бытовой техники. В комплект поставки входят четыре заготовки первого типа, три заготовки второго типа и семь – третьего типа. На складе имеется 100 единиц материала *A* и 300 единиц материала *B*.

*Ответить на вопросы*:

1. Сколько рациональных способов раскроя следует использовать?
2. Какое максимальное число комплектов заготовок можно изготовить из имеющегося материала в предположении, что оставшиеся заготовки можно использовать при выполнении следующего заказа?
3. Сколько единиц материала *A* следует раскраивать третьим способом?
4. Какое максимальное число комплектов заготовок можно изготовить из имеющегося материала, если число заготовок второго типа в комплекте увеличится до семи?

**Задача 3.** При раскрое деталей для производства единственного изделия на швейной фабрике используются два артикула ткани. Ширина ткани 1 м. Изделие собирается из двух деталей, причем каждая из них может быть получена путем раскроя ткани любого типа. Ткани можно раскраивать тремя способами, количество деталей каждого вида, полученных из одного погонного метра ткани, указано в следующей таблице:

| Деталь | Ткань 1 | | | Ткань 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Способ 1 | Способ 2 | Способ 3 | Способ 4 | Способ 5 | Способ 6 |
| 1 | 8 | 0 | 4 | 12 | 0 | 6 |
| 2 | 0 | 3 | 1 | 0 | 5 | 2 |

Ткани 1 поступает на фабрику в 2 раза больше (по длине), чем ткани 2. Количество готовых изделий должно быть максимальным.

*Ответить на вопросы*:

1. Сколько способов раскроя ткани 1 и какие следует использовать?
2. Какая часть (в %) ткани 1 должна быть раскроена способом 1?
3. На сколько (в %) изменится выход готовых изделий по сравнению с первоначальным, если на фабрику будет поступать равное количество обеих тканей?

**Задача 4.** На производство поступила партия стержней длиной 250 и 190 см. Необходимо получить 470 заготовок длиной 120 см и 450 заготовок длиной 80 см. Отходы должны быть минимальны.

*Ответить на вопросы*:

1. Какое количество стержней длиной 250 см надо разрезать?
2. Какое количество стержней длиной 190 см надо разрезать?
3. Какова величина отходов (в см)?
4. Оказалось, что количество стержней длиной 250 см ограничено и равно 200 шт. Какое количество стержней длиной 190 см надо разрезать в этом случае?
5. На сколько при этом увеличатся отходы (в см)?

**Задача 5.** Завод заключил договор на поставку комплектов стержней длиной 18, 23 и 32 см. Причем количество стержней разной длины в комплекте должно быть в соотношении 1:5:3. На сегодняшний день имеется 80 стержней длиной по 89 см. Как их следует разрезать, чтобы количество комплектов было максимальным?

*Ответить на вопросы*:

1. Сколько существует рациональных способов раскроя?
2. Сколько комплектов стержней будет выпущено?
3. Какова при этом величина отходов (в см)?

# ТЕМА 4. ПЛАНИРОВАНИЕ ФИНАНСОВ

При определенных предположениях становится возможным *выбрать такие способы вложения денег под проценты, совокупность которых позволяет минимизировать первоначальный вклад,* необходимый для выплаты займа, или *максимизировать доход*. При решении задач финансового планирования можно учитывать риск и другие факторы, влияющие на выбор способов вложения денег.

## Математические модели задачи

### *Модель А минимизации целевого фонда*

Предположим, что в определенные моменты времени необходимо выплачивать известные суммы денег по взятому ранее займу. Чтобы накопить эти суммы, можно заранее создать целевой фонд, а средства из этого фонда использовать для срочных вкладов. Каждый срочный вклад характеризуется моментом времени вложения, сроком погашения и доходностью. Задача состоит в том, чтобы *определить минимальный размер целевого фонда и выбрать те виды срочных вкладов, которые следует использовать, чтобы сделать выплату по займу*.

Введем обозначения:

$y$ – размер целевого фонда, создаваемого в нулевой момент времени;

$t$ – текущий момент времени, $t = 0,1,...,T$;

$d_t$ – размер выплаты по займу, которую надо произвести в момент времени $t = 0,1,...,T$;

$j$ – индекс срочного вклада, $j = 1, 2, ..., n$;

$x_j$ – объем вложений по $j$-му срочному вкладу;

$v_j$ – момент времени вложения по $j$-му срочному вкладу;

$w_j$ – срок выплаты по $j$-му срочному вкладу;

$r_j$ – доходность $j$-го срочного вклада (процент по вкладу).

Предполагается, что для любого $j$-го срочного вклада момент $v_j$ времени вложения фиксирован. Если по $j$-му срочному вкладу сделаны вложения в размере $x_j$, то через $w_j$ единиц времени вкладчику выплачивается сумма $(1+r_j)x_j$. Без ограничения общности можно считать, что для любого момента времени существует такой вклад, выплата по которому производится в следующий момент времени. При этом доходность такого вклада может быть нулевая. Использование вклада с нулевой доходностью означает, что деньги остаются на руках у владельца.

Пусть $G_t$ – множество индексов $j$ таких, что $t = v_j$, т.е. по $j$-му вкладу сделано вложение в момент времени $t$;

$Q_t$ – множество индексов $j$ таких, что $t = v_j + w_j$, т.е. по $j$-му вкладу получена выплата в момент времени $t$.

Заметим, что для любого $t$ множества $G_t$ и $Q_t$ известны. Тогда модель имеет следующий вид:

$$y \to \min, \tag{30}$$

$$y - \sum_{j \in G_t} x_j = 0, \quad t = 0, \tag{31}$$

$$\sum_{j \in G_t} (1+r_j) x_j - \sum_{j \in G_t} x_j = d_t, \quad t = 1,2,...,T-1, \tag{32}$$

$$\sum_{j \in G_t} (1+r_j) x_j = d_t, \quad t = T, \tag{33}$$

$$y \ge 0, \quad x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{34}$$

(30) – целевая функция (минимальный размер целевого фонда);

– (31) – условие, характеризующее распределение целевого фонда по вкладам в нулевой момент времени;
– (32) – соотношения, устанавливающие баланс между выплатами и вложениями;
– (33) – условие, обеспечивающее выплату по займу;
– (34) – условия неотрицательности переменных.

### *Модель В максимизации дохода*

Предположим теперь, что вкладчик собирается делать вклады для того, чтобы через определенный период времени получить максимальный доход. Задача состоит в том, чтобы *определить величину максимального дохода при фиксированном размере целевого фонда и выбрать те виды срочных вкладов, которые следует использовать*.

Сохраним принятые ранее обозначения и введем новые:
$z$ – размер дохода, который может получить вкладчик в момент $T$;
$u_t$ –размер вклада в момент времени $t = 0,1,...,T-1$.

Тогда модель имеет следующий вид:

$$z \to \max, \tag{35}$$

$$\sum_{j \in G_t} x_j = u_t, \quad t = 0, \tag{36}$$

$$\sum_{j \in G_t} x_j - \sum_{j \in G_t} (1 + r_j) x_j = u_t, \quad t = 1,2,...,T-1, \tag{37}$$

$$\sum_{j \in G_t} (1 + r_j) x_j - z = 0, \quad t = T, \tag{38}$$

$$z \geq 0, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{39}$$

– (35) – целевая функция (максимальная величина дохода);
– (36) – условие, характеризующее распределение вклада в нулевой момент времени;

– (37) – соотношения, устанавливающие баланс между выплатами и вложениями;
– (38) – условие, определяющее величину дохода;
– (39) – условия неотрицательности переменных.

## Индивидуальные задания

**Задача 1.** Компания «Золотой колос» специализируется на выпуске пива. Компания закупила оборудование для выпуска популярного сорта пива «Двойное золотое». Стоимость оборудования 900 тыс. грн. В соответствии с условиями контракта 200 тыс. грн. необходимо выплатить через два месяца, когда оборудование будет поставлено, а оставшиеся 700 тыс. грн. – через шесть месяцев, когда оборудование будет смонтировано.

Чтобы расплатиться полностью, управляющий компании предполагает тотчас же образовать целевой фонд, который можно использовать для инвестиций. Поскольку такие инвестиции породят дополнительную наличность к тому времени, когда придется вносить деньги за оборудование, управляющий знает, что ему следует отложить меньше чем 900 тыс. грн. А сколько именно – зависит от имеющихся возможностей инвестирования. Управляющий решил сосредоточиться на 12 возможностях инвестирования. Данные для задачи финансового планирования представлены в следующей таблице:

| Вид вклада | Срок вклада, месяцы | Возможные моменты вложения на начало месяца | Процент по вкладу | Индекс риска |
|---|---|---|---|---|
| *A* | 1 | 1, 2, 3, 4, 5, 6 | 1,7% | 3 |
| *B* | 2 | 1, 3, 5 | 3,5% | 10 |
| *C* | 3 | 1, 4 | 5,5% | 7 |
| *D* | 6 | 1 | 10,5% | 9 |

Для каждого вида вкладов известна экспертная оценка риска задержки выплаты по вкладу.

Составьте модель линейного программирования для определения минимального размера целевого фонда, позволяющего сделать необходимые выплаты.

*Ответить на вопросы*:

1. Каков минимальный размер целевого фонда, позволяющий сделать необходимые выплаты без учета риска?
2. Какова стоимость в начальный момент времени одного грнля, который надо выплатить в начале седьмого месяца (через шесть месяцев)?
3. Каков минимальный размер целевого фонда, позволяющий сделать необходимые выплаты, если средний риск в каждый момент времени не должен превышать 6?
4. Какова «плата» за снижение риска (в грн.)?

**Задача 2.** Имеется 50 тыс. грн., которые можно инвестировать. Необходимо максимизировать денежную наличность к концу шестимесячного периода. Возможные виды инвестиций представлены в таблице:

| Вид вклада | Срок вклада, месяцы | Возможные моменты вложения на начало месяца | Процент по вкладу | Индекс риска |
|---|---|---|---|---|
| *A* | 1 | 1, 2, 3, 4, 5, 6 | 1,7% | 3 |
| *B* | 2 | 1, 2 | 3,5% | 9 |
| *C* | 3 | 3, 4 | 6,5% | 8 |
| *D* | 6 | 1 | 11,5% | 5 |

Для каждого вида вкладов известна экспертная оценка риска задержки выплаты по вкладу.

Составьте модель линейного программирования для определения максимального размера дохода, который можно получить через полгода, использовав имеющиеся возможности для вложения 50 тыс. грн.

*Ответить на вопросы*:

1. Каков максимальный размер дохода через полгода?
2. Какой максимальный доход можно получить через полгода от вложения одной грн. в начальный момент времени?
3. Какой максимальный размер дохода можно получить через полгода, если средний риск в каждый момент времени не должен превышать 6?
4. Какова «плата» за снижение риска (в грн.)?
5. В начале четвертого месяца предполагается вложение еще 20 тыс. грн. На сколько возрастет доход через полгода с учетом риска?

**Задача 3.** Пять проектов конкурируют за получение инвестиционных фондов компании. Проект 1 предполагает вложение денег в 2003 г., получение 30% по вкладу в 2004 г. и возврат вложенных средств (без процентов) в 2005 г. Проект 2 предполагает вложение денег в 2004 г., получение 30% по вкладу в 2005 г. и возврат вложенных средств (без процентов) в 2006 г. Проект 3 предполагает вложение денег в 2003 г. и получение 1,75 грн. на одну вложенную гривну в 2006 г. Проект 4 предполагает вложение денег в 2005 г. и получение 1,4 грн. на одну вложенную гривну в 2006 г. Проект 5 предполагает вложение денег в 2003 г. и получение 1,2 грн. на одну вложенную гривну в 2005 г.

Максимальная сумма, которая может быть вложена в любой проект, не должна превышать 10 млн грн. Деньги, полученные в результате инвестиций в один проект, можно реинвестировать в другие проекты. Компания также может получать 6% годовых по краткосрочному (на один год) банковскому вкладу. К началу 2003 г. инвестиционный фонд компании составит 20 млн грн. Целью компании является максимизация дохода от инвестиций к 2006 г.

*Ответить на вопросы*:

1. Какова максимальная сумма денег, которую можно получить в 2006 г.?
2. Какую сумму следует вложить во второй проект?
3. В каком году следует вложить деньги в банк под 6% годовых?
4. Какой максимальный доход можно получить в 2006 г., вложив 1 грн. в 2003 г.?

# ТЕМА 5. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Рассматривается задача транспортировки продукта, который в определенных количествах предлагается различными производителями. Известны потребности нескольких потребителей в этом продукте. *Требуется определить, от каких производителей и в каких объемах должны получать продукт потребители.* Поставки должны осуществляться таким образом, чтобы совокупные издержки на транспортировку продукта были минимальными.

## Математические модели задачи

Введем обозначения:

$a_i$ – величина предложения продукта в $i$-ом пункте, $i = 1,2,...,n$;

$b_j$ – величина спроса на продукт в $j$-ом пункте, $j = 1,2,...,m$;

$x_{ij}$ – количество продукта, перевозимого из $i$-ого пункта в $j$-ый пункт;

$c_{ij}$ – затраты на транспортировку единицы продукта из $i$-ого пункта в $j$-ый пункт.

### *Модель транспортной задачи*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min, \tag{40}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, \quad i = 1,2,...,n, \tag{41}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \quad j = 1,2,...,m, \tag{42}$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i = 1, 2, ..., n, \quad j = 1, 2, ..., m. \tag{43}$$

– (40) – целевая функция (минимум затрат на перевоз продукта);
– (41) – ограничения по предложению в каждом пункте производства;

– (42) – ограничения по спросу в каждом пункте потребления;
– (43) – условия неотрицательности объемов перевозок.

### ***Замкнутая транспортная задача***

В замкнутой транспортной задаче общее предложение равно общему спросу, то есть выполняется равенство:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j .$$

Это условие является необходимым и достаточным условием существования допустимого плана задачи (40) – (43).

### ***Открытая транспортная задача***

В открытой транспортной задаче выполняется одно из неравенств:

а) $\sum_{i=1}^{n} a_i > \sum_{j=1}^{m} b_j$ , то есть имеется излишек продукта.

Сведем задачу к замкнутой задаче. Пусть $b_{m+1}$ – величина избытка продукции, т.е. $b_{m+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j$ , а величина $c_{i,m+1}$ – штраф за единицу продукта, не реализованного в $i$ -ом пункте, переменная $y_i$ – количество продукта, не реализованного в $i$ -ом пункте.

Замкнутая транспортная задача примет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} c_{i,m+1} y_i \to \min ,$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} + y_i = a_i, \quad i = 1,2,...,n ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \quad j = 1,2,...,m, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = b_{m+1} ,$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad y_i \ge 0, \quad i = 1, 2, ..., n, \quad j = 1, 2, ..., m .$$

б) $\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{j=1}^{m} b_j$, то есть имеется дефицит продукта.

Сведем задачу к замкнутой задаче. Пусть $a_{n+1}$ – величина дефицита продукции, т.е. $a_{n+1} = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i$, а величина $c_{n+1,j}$ – штраф за единицу продукта, недопоставленного в $j$-ый пункт; $y_j$ – количество продукта, недопоставленного в пункт $j$.

Замкнутая транспортная задача имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{m} c_{n+1,j}y_j \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, \quad i = 1,2,...,n, \quad \sum_{j=1}^{m} y_j = a_{n+1},$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + y_j = b_j, \quad j = 1,2,...,m,$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad y_j \ge 0, \quad i = 1, 2, ..., n, \quad j = 1, 2, ..., m.$$

### ***Транспортная задача с запретами***

Пусть $E$ – множество пар индексов ($ij$), таких, что из пункта $i$ в пункт $j$ допускается транспортировка продукта. Между любыми другими двумя пунктами транспортировка не допускается.

Пусть $M$ – большое число, например

$$M = \max(c_{ij}) \cdot \max\left\{\sum_{j=1}^{m} b_j, \sum_{i=1}^{n} a_i\right\}, \quad i = 1,2,...,n; \quad j = 1,2,...,m.$$

Тогда
$$s_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, & \text{если } (i,j) \in E, \\ M, & \textit{если } (i,j) \notin E. \end{cases}$$

В оптимальном плане транспортной задачи с целевой функцией

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} s_{ij}x_{ij} \to \min$$

при ограничениях (41) – (43) переменные $x_{ij} = 0$, если $(ij) \notin E$.

### *Транспортная задача с фиксированными перевозками*

Если объем перевозок между пунктами $i$ и $j$ задан, то в задаче (40) – (43) вводится дополнительное ограничение: $x_{ij} = v_{ij}$, где $v_{ij}$ – заданный объем перевозок.

### *Транспортная задача с ограничениями на пропускную способность*

Если объем перевозок из пункта $i$ в пункт $j$ ограничен величиной $w_{ij}$, то в задаче (40) – (43) вводится дополнительное ограничение: $x_{ij} \le w_{ij}$.

### *Транспортная задача с фиксированными доплатами*

Предположим, что в открытой транспортной задаче имеет место дефицит продукта и для его устранения в пунктах $i = n+1,...,k$ возможно создание новых мощностей $d_i$.

Пусть переменные $z_i = 1$, если в пункте $i$ ($i = n+1,...,k$) вводятся мощности $d_i$ и $z_i = 0$, если в пункте $i$ мощности не вводятся. Издержки на ввод мощностей $d_i$ в пункте $i$ ($i = n+1,...,k$) составляют $u_i$.

С учетом возможности создания новых мощностей транспортная задача может быть записана в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=n+1}^{k} u_i z_i \to \min, \tag{44}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, \quad i = 1,2,...,n, \tag{45}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le d_i z_i, \quad i = n+1,...,k, \tag{46}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \quad j = 1,2,...,m, \tag{47}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., k, \quad j = 1, 2, ..., m. \tag{48}$$

– (44) – целевая функция (минимум затрат на транспортировку и ввод мощностей);
– (45) – ограничения по величине предложения в каждом существующем пункте производства;
– (46) – ограничения по величине предложения в каждом новом пункте производства;
– (47) – ограничения по величине спроса в каждом пункте потребления;
– (48) – условия неотрицательности объемов перевозок.

Помимо непрерывных переменных $x_{ij}$ в модель включены булевы переменные $z_i$. Задача (44) – (48) является задачей линейного программирования со "смешанными" переменными.

Большинство специальных алгоритмов решения транспортной задачи использует исходную информацию в форме транспортной таблицы:

| Пункт потребления / Пункт производства | 1 | 2 | … | $j$ | … | $m$ | Предложение |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $c_{11}$ | $c_{12}$ | … | $c_{1j}$ | … | $c_{1m}$ | $a_1$ |
| 2 | $c_{21}$ | $c_{22}$ | … | $c_{2j}$ | … | $c_{2m}$ | $a_2$ |
| … | … | … | … | … | … | … | … |
| $i$ | $c_{i1}$ | $c_{i2}$ | … | $c_{ij}$ | … | $c_{im}$ | $a_i$ |
| … | … | … | … | … | … | … | … |
| $n$ | $c_{n1}$ | $c_{n2}$ | … | $c_{nj}$ | … | $c_{nm}$ | $a_n$ |
| Спрос | $b_1$ | $b_2$ | … | $b_j$ | … | $b_m$ | |

## Индивидуальные задания

**Задача 1.** Фирма по прокату автомобилей собирает заявки на их аренду в городах Украины. Клиент имеет возможность получить автомобиль в любом удобном для него населенном пункте и оставить его в любом месте, где он заканчивает путешествие, в том числе и в своем родном городе. Работники фирмы забирают оставленные автомобили и перегоняют их для передачи новым клиентам.

Сейчас 4 автомобиля компании оставлены в Черкассах, 3 – в Полтаве, 6 – в Кировограде и 1 – в Умани. Имеются заказы на 5 автомобилей в Одессе, на 3 автомобиля во Львове и на 6 автомобилей в Киеве.

Расстояния между городами (в км) приведены в следующей таблице:

| | Одесса | Львов | Киев |
|---|---|---|---|
| Черкассы | 300 | 550 | 100 |
| Полтава | 200 | 620 | 200 |
| Кировоград | 350 | 570 | 250 |
| Умань | 250 | 700 | 150 |

Составьте план, по которому следует перегонять автомобили новым клиентам. Ориентируйтесь на минимизацию расстояния, которое пройдут все перегоняемые автомобили.

*Ответить на вопросы*:

1. Чему равно минимальное расстояние, которое должны пройти все перегоняемые автомобили?
2. Сколько автомобилей следует перегнать в Киев из Кировограда?
3. На сколько увеличится минимальное расстояние, которое должны пройти все автомобили, если стало известно, что еще один автомобиль оставлен в Умани и еще один клиент появился в Киеве?

**Задача 2.** Компания «Уют» производит пластмассовую мебель для отдыха. Основной продукт компании – стулья. Производство находится в Чернигове, Житомире и Полтаве. Сейчас на складе в Чернигове находятся 7 250 стульев, в Житомире – 10 150, в Полтаве – 4 350 стульев.

Основными потребителями продукции компании «Уют» являются фирмы по оптовой продаже в Киеве, Львове, Ужгород и Одессе. Сейчас эти фирмы готовы закупить соответственно 8 800, 5 800, 2 900 и 2 100 стульев. Удельные затраты на перевозку стульев (в грн./шт.) указаны в таблице:

| | Чернигов | Житомир | Полтава |
|---|---|---|---|
| Киев | 1,1 | 0,8 | 1,6 |
| Львов | 2,6 | 2,4 | 3,4 |
| Ужгород | 1,9 | 2,0 | 2,8 |
| Одесса | 2,2 | 2,1 | 1,7 |

Составить план транспортировки стульев потребителям с минимальными затратами.

*Ответить на вопросы*:

1. Чему равны минимальные издержки на перевозку всех стульев?
2. Сколько стульев компания должна перевозить в Киев из Чернигова?
3. Какое количество стульев останется на складе в Полтаве?
4. Стало известно, что для сбыта в Киеве не годятся стулья, сделанные в Полтаве, а для сбыта во Львове – стулья из Житомира. Не подходит цвет стульев. Составьте новый план перевозок с учетом этих условий. На сколько грн. увеличатся при этом совокупные транспортные издержки?

**Задача 3.** Компания, занимающаяся добычей железной руды, имеет четыре карьера *C1 ÷ C4*. Производительность карьеров соответственно 170, 150, 190 и 200 тыс. т ежемесячно. Железная руда направляется на три принадлежащие этой компании обогатительные фабрики *S1 ÷ S3*, мощности которых соответственно 250, 150 и 270 тыс. т в месяц.

Транспортные затраты (в тыс. грн.) на перевозку 1 тыс. т руды с карьеров на фабрики указаны в следующей таблице:

| Фабрика / Карьер | *S1* | *S2* | *S3* |
|---|---|---|---|
| *C1* | 7 | 3 | 8 |
| *C2* | 5 | 4 | 6 |
| *C3* | 4 | 5 | 9 |
| *C4* | 6 | 2 | 5 |

Определите план перевозок железной руды на обогатительные фабрики, который обеспечивает минимальные транспортные издержки.

*Ответить на вопросы*:

1. Сколько руды следует перевозить с карьера *C1* на фабрику *S2*?
2. Сколько руды следует перевозить с карьера *C4* на фабрику *S3*?
3. Какова общая минимальная стоимость перевозок?
4. Стало известно, что поставки с карьера *C1* на обогатительную фабрику *S2* нужно ограничить объемом 50 тыс. т. К тому же из-за плохого состояния дороги перевозки с карьера *C4* на обогатительную фабрику *S3* невозможны. Определите новый план перевозок, учитывающий эти условия. На сколько возрастет стоимость перевозок?
5. Сколько руды следует перевозить с карьера *C4* на обогатительную фабрику *S2* с учетом дополнительной информации?

**Задача 4.** Фирма «Мойдодыр» оценила спрос на производимый ею лосьон для каждого из четырех следующих месяцев: 100 ящиков в июне, 140 – в июле, 170 – в августе и 90 – в сентябре. Без использования сверхурочного времени фирма может производить до 125 ящиков лосьона в месяц. В сверхурочное время может быть произведено еще 25 ящиков в месяц, но производство каждого ящика обойдется при этом на 1 тыс. грн. дороже. Хранение одного ящика в течение месяца обходится в 100 грн.

Используя модель транспортной задачи, определите, сколько ящиков лосьона следует производить в каждый из этих месяцев, чтобы удовлетворить спрос с минимальными совокупными затратами.

*Ответить на вопросы*:

1. Сколько ящиков лосьона следует произвести в июне?
2. Сколько ящиков лосьона следует произвести в сентябре?
3. Сколько ящиков лосьона следует произвести в летние месяцы?
4. Каковы минимальные затраты на производство лосьона?
5. Сколько часов сверхурочного времени надо использовать в сентябре?

**Задача 5.** Фирма «Время – вперед» хочет разработать план сборки компьютеров. Прогноз спроса на компьютеры для каждого квартала следующего года показан в таблице:

| Квартал | Величина спроса |
|---|---|
| I | 1 000 |
| II | 700 |
| III | 3 100 |
| IV | 2 500 |

При работе в одну смену фирма может каждый квартал собирать 1 200 компьютеров. Издержки по сборке одного компьютера составляют

10 тыс. грн. Если ввести вторую смену, то ежеквартально можно собирать еще 800 компьютеров. Однако сборка каждого компьютера во вторую смену обходится дороже – 11 тыс. грн. Компьютер может быть произведен в одном квартале, а сбыт – в любом из последующих кварталов. В этом случае хранение каждого компьютера обходится в 500 грн. за квартал.

Составьте план производства компьютеров с минимальными совокупными затратами, используя модель транспортной задачи.

*Ответить на вопросы*:

1. Сколько компьютеров следует собрать в первом квартале, чтобы удовлетворить спрос?
2. На сколько процентов следует использовать мощности второй смены в первом квартале?
3. Сколько компьютеров следует собрать во втором квартале?
4. Сколько компьютеров следует собрать во втором квартале во вторую смену для сбыта в третьем квартале?
5. Каковы минимальные издержки?

# ТЕМА 6. ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

В процессе управления производством зачастую возникают задачи назначения исполнителей на различные виды работ: подбор кадров и назначение кандидатов на вакантные должности, распределение источников капитальных вложений между различными проектами научно-технического развития, распределение экипажей самолетов между авиалиниями.

Задачу о назначениях можно сформулировать следующим образом. Необходимо выполнить $N$ различных работ. Для их выполнения можно привлечь $N$ рабочих. Каждый рабочий за определенную плату готов выполнить любую работу. Выполнение любой работы следует поручить одному рабочему. *Требуется так распределить работы между рабочими, чтобы общие затраты на выполнение всех работ были минимальными*.

## Математические модели задачи

### *Задача о назначениях в стандартной форме*

При рассмотрении задачи о назначениях в стандартной форме предполагается, что количество рабочих равно количеству работ.

Введем обозначения:

$n$ – количество работ;

$x_{ij}$ – переменная модели ($x_{ij} = 1$, если $i$-й рабочий используется на $j$-й работе, и $x_{ij} = 0$ в противном случае);

$c_{ij}$ – показатель эффективности назначения $i$-го рабочего на $j$-й работе, например издержки выполнения $i$-м рабочим $j$-й работы.

Модель *задачи о назначениях*:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min, \quad (49)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,2,...,n, \tag{50}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1,2,...,n, \tag{51}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., n, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{52}$$

- (49) – целевая функция (минимум издержек на выполнение всех работ);
- (50) – система ограничений, отражающая то, что каждая работа должна быть выполнена одним рабочим
- (51) – система ограничений, отражающая то, что каждый рабочий может быть привлечен к одной работе;
- (52) – условия неотрицательности переменных.

При решении задачи о назначениях исходной информацией является таблица задачи о назначениях $c = \{c_{ij}; i = 1,...,n; \ j = 1,...,n\}$, элементами которой служат показатели эффективности назначений. Для задачи о назначениях, записанной в стандартной форме, количество строк этой таблицы совпадает с количеством столбцов.

Результатом решения задачи о назначениях (49) – (52) является матрица $x = \{x_{ij}; i = 1,...,n; \ j = 1,...,n\}$, компоненты которого – целые числа.

Оптимальный план задачи о назначениях (49) – (52) можно представить в виде квадратной матрицы назначений, в каждой строке и в каждом столбце которой находится ровно одна единица. Такую матрицу иногда называют матрицей перестановок. Значение целевой функции (49), соответствующее оптимальному плану, называют эффективностью назначений.

***Задача о назначениях в открытой форме***

Задача о назначениях в открытой форме возникает тогда, когда количество рабочих не равно количеству работ. В этих случаях задача может быть преобразована в задачу, сформулированную в стандартной форме.

Пусть количество рабочих $n$ превышает количество работ $m$. Введем дополнительные фиктивные работы с индексами $j = m+1,...,n$. Коэффициенты таблицы назначений $c_{ij}$, $i = 1,...,n$, $j = m+1,...,n$ положим равными нулю. В этом случае получаем задачу, сформулированную в стандартной форме. Если в оптимальном плане этой задачи $x_{ij} = 1$ при $j = m+1,...,n$, то $i$-ый исполнитель назначается на выполнение фиктивной работы, т.е. остается без работы. Заметим, что оптимальное значение целевой функции исходной задачи совпадает с оптимальным значением задачи, приведенной к стандартной форме. Поэтому эффективность назначений в результате такого преобразования не меняется.

Следует особо отметить, что задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи, в которой количество пунктов производства совпадает с количеством пунктов потребления, а все величины спроса и величины предложения равны.

## Индивидуальные задания

**Задача 1.** Цех металлообработки получил срочный заказ на выпуск партии деталей. Для производства детали необходимо выполнить операции на четырех станках. В цехе работают четыре слесаря высокой квалификации, каждый из которых может работать на любом станке, но с различным процентом брака (процент брака известен из документации ОТК):

| Станок / Рабочий | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2,3 | 1,9 | 2,2 | 2,7 |
| 2 | 1,8 | 2,2 | 2,0 | 1,8 |
| 3 | 2,5 | 2,0 | 2,2 | 3,0 |
| 4 | 2,0 | 2,4 | 2,4 | 2,8 |

Распределите станки между рабочими таким образом, чтобы процент брака был минимальным. Предполагается, что ОТК проверяет готовую деталь, т.е. общий процент брака определяется как сумма процентов брака, допущенного всеми рабочими.

*Ответить на вопросы*:

1. На каком станке должен работать рабочий 2?
2. На каком станке должен работать рабочий 4?
3. Чему равен минимальный общий процент брака?

**Задача 2.** Фирма по производству мужских головных уборов планирует освоение новых рынков сбыта в пяти городах. Возможности сбыта невелики, так что в каждый город достаточно направить одного торгового представителя фирмы для заключения с магазинами договоров о поставках. В следующей таблице указан объем спроса (в млн грн.):

| Город | Киев | Одесса | Харьков | Львов | Винница |
|---|---|---|---|---|---|
| Объем спроса | 9 | 5 | 4 | 3 | 6 |

Фирма располагает данными о профессиональных возможностях шести своих сотрудников. В следующей таблице содержатся оценки степени освоения рынка, которую может обеспечить соответствующий торговый представитель фирмы:

| Представитель | *П1* | *П2* | *П3* | *П4* | *П5* | *П6* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Оценка освоения степени рынка | 0,7 | 0,6 | 0,5 | 0,8 | 0,4 | 0,5 |

Так, представитель *П1* может освоить 70% от объема спроса в любом городе. Например, если направить его в Киев, то доход фирмы на этом рынке составит 6,3 млн грн. Распределите торговых агентов по городам таким образом, чтобы фирма получила максимальный доход.

*Ответить на вопросы*:

1. Чему равен максимальный доход фирмы?
2. В какой город следует направить торгового представителя *П1*?
3. Кто из торговых представителей не будет использован?

**Задача 3.** Фирма получила заказы на разработку пяти программных продуктов. На фирме работают шесть квалифицированных сотрудников – программистов, которым можно поручить выполнение этих заказов. Каждый из них дал оценку времени (в днях), требуемого для разработки программ. Эти оценки приведены в таблице.

Выполнение каждого из пяти заказов фирма решила поручить одному программисту. Ясно, что один из программистов не получит заказа.

| Программа / Программист | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *С-П 1* | 46 | 59 | 24 | 62 | 67 |
| *С-П 2* | 47 | 56 | 32 | 55 | 70 |
| *С-П 3* | 44 | 52 | 19 | 61 | 60 |
| *С-П 4* | 47 | 59 | 17 | 64 | 73 |
| *С-П 5* | 43 | 65 | 20 | 60 | 75 |
| *С-П 6* | 41 | 53 | 28 | 54 | 68 |

Каждому программисту, которому будет поручено выполнять заказ, фирма предложила оплату 1 тыс. грн. в день. Распределите работу между программистами, чтобы общие издержки были минимальными.

*Ответить на вопросы*:

1. Чему равны минимальные затраты фирмы на выполнение всех заказов?
2. Какую программу следует поручить сотруднику *С-П 3*?
3. Какую программу следует поручить сотруднику *С-П 5*?
4. Кто из программистов не получит заказа?

5. Стало известным, что не все программисты согласились с условиями оплаты, обосновывая это тем, что имеют разную квалификацию. В результате была достигнута договоренность о следующих размерах оплаты в день (в тыс. грн.):

| Программист | *С-П 1* | *С-П 2* | *С-П 3* | *С-П 4* | *С-П 5* | *С-П 6* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Размер оплаты | 1 | 2 | 1,5 | 2 | 1,5 | 2 |

Изменится ли распределение работ между программистами при новых условиях оплаты труда? Каковы будут в этом случае общие минимальные издержки? Кто из программистов не получит заказа?

**Задача 4.** Пять учебных групп экономического факультета университета собираются посетить во время практики 10 предприятий и НИИ. Каждая учебная группа может посетить две организации. Путем опроса студентов выявлены предпочтения каждой группы для 10 организаций (1 означает наибольшее предпочтение, а 10 – наименьшее предпочтение). Предпочтения каждой из пяти учебных групп показаны в таблице (*П-1* ÷ *П-5* – промышленные предприятия; *НИИ-1* ÷ *НИИ-5* – научно-исследовательские институты).

Определите, какие две организации должна посетить каждая группа, чтобы в максимальной степени были учтены предпочтения всех студентов.

*Ответить на вопросы*:

1. Чему равна сумма баллов, соответствующая наилучшему распределению групп по организациям?
2. Какая группа должна посетить *НИИ-2*?
3. Какую еще организацию должна посетить эта группа?
4. Деканат внес предложение, чтобы каждая группа посетила одно предприятие и один *НИИ*. Укажите такой вариант распределения, чтобы ка-

ждой группе досталось по одному промышленному предприятию и одному *НИИ*. Чему равна сумма оценочных баллов в этом случае?

5. Какая группа должна посетить *НИИ-5* при новых условиях?
6. Какую еще организацию должна посетить эта группа?

| Группа / Организация | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *П-1* | 3 | 2 | 1 | 4 | 2 |
| *П-2* | 2 | 5 | 3 | 3 | 5 |
| *П-3* | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| *П-4* | 4 | 3 | 5 | 2 | 3 |
| *П-5* | 6 | 7 | 4 | 6 | 6 |
| *НИИ-1* | 7 | 4 | 8 | 7 | 4 |
| *НИИ-2* | 10 | 8 | 6 | 10 | 9 |
| *НИИ-3* | 5 | 6 | 7 | 5 | 10 |
| *НИИ-4* | 9 | 9 | 10 | 9 | 8 |
| *НИИ-5* | 8 | 10 | 9 | 8 | 7 |

**Задача 5.** Самолеты компании летают между Киевом и Берлином. Полеты беспосадочные. График движения показан в следующей таблице:

| Рейсы из Киева в Берлин | | | Рейсы из Берлина в Киев | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Номер рейса | Время отправления | Время прибытия | Номер рейса | Время отправления | Время прибытия |
| 110 | 6:00 | 9:00 | 210 | 7:00 | 10:00 |
| 120 | 8:00 | 11:00 | 220 | 10:00 | 13:00 |
| 130 | 12:00 | 15:00 | 230 | 13:00 | 16:00 |
| 140 | 15:00 | 17:00 | 240 | 16:00 | 19:00 |
| 150 | 19:00 | 22:00 | 250 | 21:00 | 24:00 |
| 160 | 23:00 | 2:00 | 260 | 0:00 | 3:00 |

Рейсы могут обслуживаться киевскими или берлинскими экипажами. Любой экипаж выполняет пару рейсов – туда и обратно. Время, необходимое для подготовки самолета к очередному рейсу, – один час. Требуется определить, какую пару рейсов следует выполнять каждому экипажу и из какого отряда, киевского или берлинского, должен быть соответствующий экипаж. Распределение рейсов необходимо осуществить таким образом, чтобы суммарное время ожидания вылета в чужом городе было минимальным. Время ожидания не включает тот час, который уходит на подготовку самолета к очередному рейсу.

*Ответить на вопросы*:

1. Верно ли, что рейс 210 должен выполняться киевским экипажем?
2. Верно ли, что рейсы 240 и 160 должны выполняться одним экипажем?
3. Верно ли, что рейс 160 должен обслуживаться берлинским экипажем?
4. Каково минимальное общее время пребывания экипажей в чужих городах?
5. Какое количество рейсов должны выполнять киевские экипажи?

# ТЕМА 7. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Математические модели оптимизационных задач нелинейного программирования содержат нелинейные зависимости от переменных. Источники нелинейности относятся в основном к одной из двух категорий:

1) реально существующие и эмпирически наблюдаемые нелинейные соотношения, например: непропорциональные зависимости между объемом производства и затратами; между количеством используемого в производстве компонента и некоторыми показателями качества готовой продукции; между затратами сырья и физическими параметрами (давление, температура и т.п.) соответствующего производственного процесса; между выручкой и объемом реализации и др.;

2) установленные руководством правила поведения или задаваемые зависимости: формулы или правила расчета с потребителями энергии или других видов услуг; эвристические правила определения страховых уровней запаса продукции; гипотезы о характере вероятностного распределения рассматриваемых в модели случайных величин; различного рода договорные условия взаимодействия между партнерами по бизнесу и др.

Решать линейные задачи значительно проще, чем нелинейные, и если линейная модель обеспечивает адекватность реальным ситуациям, то ее и следует использовать. В практике экономического управления модели линейного программирования успешно применялись даже в условиях нелинейности. В одних случаях нелинейность была несущественной и ею можно было пренебречь, в других – производилась линеаризация нелинейных соотношений или применялись специальные приемы, например строились так называемые линейные аппроксимационные модели, благодаря чему достигалась требуемая адекватность. Тем не менее, имеется большое число ситуаций, где нелинейность является существенной и ее нужно учитывать в явном виде.

## Математические модели задачи

В общем виде задача нелинейного программирования описывается с помощью следующей модели нелинейного программирования:

$$F(x) \to \max, \tag{52}$$

$$g_i(x) \le b_i, \quad i = 1,...,m, \tag{53}$$

$$x \ge 0, \tag{54}$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – вектор неизвестных переменных задачи.

Задача (52) – (54) называется задачей нелинейного программирования в стандартной форме на максимум. Может быть сформулирована также задача нелинейного программирования на минимум.

Вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, компоненты $x_j$ которого удовлетворяют ограничениям (53) и (54), называется допустимым решением или допустимым *планом задачи нелинейного программирования*. Совокупность всех допустимых планов называется *множеством допустимых планов*.

Допустимое решение задачи нелинейного программирования, на котором целевая функция (52) достигает максимального значения, называется *оптимальным решением* задачи нелинейного программирования.

Возможное местонахождение максимального значения функции $F(x)$ при наличии ограничений (53) и (54) определяется следующим общим принципом. Максимальное значение $F(x)$, если оно существует, может достигаться в одной или более точках, которые могут принадлежать следующим множествам:

$S_1 = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : (x_1, x_2, ..., x_n)$ – внутренняя точка множества допустимых планов, в которой все частные производные $F'_{x_j}(x) = 0,\ j = 1,...,n\}$.

$S_2 = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : (x_1, x_2, ..., x_n)$ – точка границы множества допустимых планов$\}$;

$S_3 = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : (x_1, x_2, ..., x_n)$ – точка множества допустимых планов, в которой функция $F(x)$ недифференцируема$\}$.

В отличие от задач линейного программирования, любая из которых может быть решена симплекс-методом, не существует одного или нескольких алгоритмов, эффективных для решения любых нелинейных задач. Какой-то алгоритм может оказаться чрезвычайно эффективным для решения задач одного типа и неудачным для задач другого типа.

Эффективность алгоритма может даже существенно зависеть от постановки задачи, например от изменения масштабов измерения тех или иных переменных. Поэтому алгоритмы разрабатываются для каждого класса (типа) задач. Программы, ориентированные на решение определенного класса задач, как правило, не гарантируют правильность решения любых задач данного класса, и оптимальность решения рекомендуется проверять в каждом конкретном случае.

## Индивидуальные задания

**Задача 1.** Компания производит на одном из своих заводов три марки неэтилированного бензина А-88, А-92 и А-95 из нефти, добываемой на трех месторождениях: на двух иностранных (месторождение 1 и месторождение 2) и на одном местном. Причем из иностранных месторождений нефть поступает по трубопроводу в смеси в количестве 250 т в сутки.

Данные о нефти представлены в следующей таблице:

| Нефть | Октановое число | Максимальный объем поставок, т в сутки | Цена, долл./т |
|---|---|---|---|
| Месторождение 1 | 97 | 250 | 320 |
| Месторождение 2 | 94 | | 270 |
| Месторождение 3 | 84 | 150 | 250 |

Требуемые характеристики бензина:

| Марка бензина | Октановое число | Максимальный выпуск, т | Цена, долл./т |
|---|---|---|---|
| А-88 | 88 | 90 | 450 |
| А-92 | 92 | 70 | 500 |
| А-95 | 95 | 100 | 550 |

Предположим, что других затрат, кроме затрат на покупку сырой нефти, нет. Определите оптимальную (с точки зрения максимума прибыли) суточную производственную программу завода.

*Ответить на вопросы*:

1. Какова максимальная прибыль завода?
2. Каков оптимальный выпуск бензина А-88?
3. Какова доля нефти месторождения 1 в смеси, поступающей из-за границы?
4. Каковы общие затраты?

**Задача 2.** На кондитерской фабрике «Десерт» вследствие уменьшения спроса на ряд ее изделий освободилась часть производственных мощностей. Чтобы избежать сокращения численности работающих, специалисты фабрики разработали технологию производства двух новых видов шоколадных конфет: шоколадных бочонков с коньяком, получивших название «Братец Иванушка» (БИ), и шоколадных шариков с вишней, названных «Сестрица Аленушка» (СА). Для изготовления любого нового вида конфет должны быть задействованы три производственные линии: производство шоколада, непосредственное изготовление конфет, упаковка и контроль. Первая и третья линии – общие для конфет обоих наименований. Доля шоколада в общем весе одной конфеты БИ составляет 70%, а в конфете СА – 80%. Максимальная мощность линии по изготовлению шоколада (для новой продукции) составляет 250 кг в сутки. Производительность линии по изготовлению конфет БИ – 170 кг в сутки, конфет СА – также 170 кг. Удельные переменные затраты составляют: для конфет БИ – 180 грн./кг, для конфет СА – 150 грн./кг. Предполагается, что все изготовленные в течение суток конфеты будут проданы. В силу своей исключительности новые изделия не испытывают внешней конкуренции, однако они конкурируют друг с другом. В результате проведенного исследования были получены следующие зависимости объемов сбыта от цен:

$$x_1 = 500 - p_1 + 0{,}2 p_2, \qquad x_2 = 500 + 0{,}3 p_1 - p_2,$$

где $x_1$ – произведенное (проданное) в течение суток количество конфет БИ, кг; $x_2$ – произведенное (проданное) в течение суток количество конфет СА, кг; $p_1$ – цена конфет БИ, грн./кг; $p_2$ – цена конфет СА, грн./кг.

Определите производственную программу, при которой суточная прибыль фабрики от производства новой продукции максимальна.

*Ответить на вопросы*:

1. Какова максимальная прибыль фабрики?
2. Каков оптимальный выпуск конфет БИ?
3. Каков оптимальный выпуск конфет СА?
4. Какова оптимальная цена конфет БИ?
5. Какова оптимальная цена конфет СА?

**Задача 3.** На молочном комбинате помимо других продуктов производится также сырковая масса трех наименований: «Изюминка», «Ваниль» и «Орешек» – жирности соответственно 6, 5 и 3%. В качестве основных исходных продуктов используются творог жирности 8, 7 и 2%, объемы суточных поставок которого составляют по 200 кг каждого вида, и сахар, имеющийся в количестве 70 кг в сутки.

По технологии для получения 1 кг сырковой массы «Изюминка» требуется 30 г сахара, для «Ванили» – 40 г и для «Орешка» – 60 г. Цена сырковой массы «Изюминка» равна 36 грн./кг, «Ванили» – 35 грн./кг, «Орешка» – 33 грн./кг.

Закупочная цена творога 8%-й жирности определяется зависимостью (29 – 0,003$x$) грн./кг, где $x$ — объем закупки (в кг). Аналогичные зависимости для творога 7%-й жирности (27 – 0,008$x$) грн./кг и 2%-й жирности (26 – 0,005$x$) грн./кг. Минимальный выпуск для «Изюминки» 100 кг, «Ванили» 50 кг, «Орешка» 50 кг. Постройте производственную программу, максимизирующую общую суточную прибыль.

*Ответить на вопросы*:

1. Какова максимальная прибыль?
2. Каков оптимальный объем производства сырковой массы «Орешек»?
3. Каков оптимальный объем производства сырковой массы «Ваниль»?

**Задача 4.** Горно-обогатительная фабрика получает из руды, поступающей из двух месторождений, никель, медь и серебро. Данные о количестве ценных металлов, получаемых из одной тонны руды каждого месторождения, приведены в следующей таблице:

| Металл | Выход металлов, т, из 1т руды месторождения | | Средние затраты (на 1кг металла) тыс.грн./т месторождения | | Цена тыс.грн./т | Минимальный выпуск |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 1 | 2 | | |
| Никель | 0,02 | 0,025 | 5 | 6 | 8 | 25 |
| Медь | 0,03 | 0,02 | 4 | 3,5 | 6 | 25 |
| Серебро | 0,001 | 0,0008 | 22 | 20 | 30 | 0,8 |

В течение месяца фабрика перерабатывает не более 1000 т руды. За счет увеличения (уменьшения) затрат можно изменить доли выхода металлов в пределах ±10% по сравнению с приведенными в таблице. Предположим, что удельные затраты после изменения средних (приведенных в таблице) коэффициентов выхода металлов определяются зависимостью $c = (2k - 1) \cdot c_0$, где $k$ показывает, во сколько раз изменяется средний выход металла из 1 т руды, а $c_0$ – средние удельные затраты. При этом предполагается, что общие затраты, связанные с изменением нескольких коэффициентов, суммируются.

Постройте математическую модель с учетом возможности изменения коэффициентов выхода металлов. Определите оптимальные значения коэффициентов, обеспечивающих максимум прибыли фабрики.

*Ответить на вопросы*:

1. Какова максимальная прибыль?
2. Каково оптимальное значение коэффициента выхода никеля из руды месторождения 2?
3. Каково оптимальное значение коэффициента выхода меди из руды месторождения 1?
4. Какое количество руды месторождения 2 следует использовать в производстве?

**Задача 5.** Завод производит два вида высококачественного паркета из дуба, отличающиеся формой и толщиной деталей. Дефицитными ресурсами служат дубовая доска и специальная жидкость для пропитки деталей. Для производства 1 $м^2$ паркета первого вида требуется 0,01 $м^3$ дубовой доски и 0,05 кг жидкости для пропитки. Для производства 1 $м^2$ паркета второго вида потребности в ресурсах составляют соответственно 0,02 $м^3$ и 0,15 кг. Максимальное количество ресурсов за месяц: 20 $м^3$ дубовой доски и 150 кг жидкости для пропитки.

Затраты на единицу первого ресурса (на 1 $м^3$ дубовой доски) составляют $(1000-3\cdot r_1)$ грн./$м^3$, где $r_1$ – объем дубовых досок, использованных в производстве паркета. Затраты на единицу второго ресурса (на 1 кг жидкости для пропитки) составляют $(500-0{,}5\cdot r_2)$ грн./кг, где $r_2$ – количество использованной в производстве паркета жидкости для пропитки. Предполагается, что других затрат нет. Оба вида паркета могут частично заменять друг друга, поэтому величины спроса на них взаимозависимы. Цена 1 $м^2$ паркета первого вида (грн./$м^2$) определяется зависимостью $p_1 = 100-0{,}04x_1-0{,}01x_2$, а цена 1 $м^2$ паркета второго вида – зависимостью $p_2 = 210-0{,}008x_1-0{,}03x_2$, где $x_1, x_2$ – объемы производства ($м^2$) паркета соответственно первого и второго вида.

В предположении, что весь паркет может быть продан, определите производственную программу завода, обеспечивающую максимальную прибыль.

*Ответить на вопросы*:

1. Какова максимальная прибыль предприятия?
2. По какой цене следует продавать паркет первого вида?
3. По какой цене следует продавать паркет второго вида?
4. Какое количество жидкости для пропитки используется в производстве?
5. Каков оптимальный выпуск паркета второго вида?

**Задача 6.** Данная задача является одним из вариантов задачи формирования портфеля ценных бумаг (см. пример 2).

Клиент поручил брокерской конторе купить для него на 3 млн грн. акции четырех известных ему компаний. Сделка заключается на год. Клиент заинтересован в минимальном риске при условии, чтобы средний процент прибыли, обеспечиваемый портфелем акций к концу года, был не менее 9%. Известно, что средние значения процентов годовой прибыли от акций компаний составляют соответственно 8,5; 13; 9 и 10%.

Дисперсии процентов прибыли: $\sigma 11 = 0{,}1$, $\sigma 22 = 0{,}19$, $\sigma 33 = 0{,}13$, $\sigma 44 = 0{,}14$.

Ковариации: $\sigma 12 = 0{,}05$, $\sigma 13 = 0{,}02$, $\sigma 14 = 0{,}03$, $\sigma 23 = 0{,}04$, $\sigma 24 = 0{,}03$, $\sigma 34 = 0{,}01$.

*Ответить на вопросы*:

1. Чему равна средняя годовая прибыль?
2. На какую сумму следует купить акции компании 1?
3. На какую сумму следует купить акции компании 2?
4. Какова минимальная дисперсия портфеля акций?

## ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. –М.: Высшая школа, 1986. – 319 с.
2. Алесинская Т.В., Сербин В.Д., Катаев А.В. Учебно-методическое пособие по курсу «Экономико-математические методы и модели. Линейное программирование». – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2001. – 79 с.
3. Алесинская Т.В. Учебное пособие по решению задач по курсу «Экономико-математические методы и модели». – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2002. – 153 с.
4. Барвінський А. Ф., Олексів І. Я., Крупка З. І. Математичне програ- мування: Навч. посіб. – Л., 2004. – 448 с.
5. Барлиани А.Г., Вдовин С.А., Гридасов А.Ю. Экономико-математические методы: практикум. – Новосибирск: СГГА, 2004.
6. Бугір М. К. Математика для економістів: Посібник. – К.: ВЦ "Академія", 2003. – 520 с.
7. Зайченко Ю.П., Шумилова С.А. Исследование операций. Сборник задач – Киев: Выща школа. 1984.
8. Зайченко Ю.П. Исследование операций. – Киев: Выща школа, 1986.
9. Конюховский П.В. Математические методы исследования операций: пособие для подготовки к экзамену. – СПб.:Питер, 2001.
10. Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике. – СПб.: Питер, 2008. – 208 с.
11. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування: Навч. посіб. – К.: КНЕУ, 2003. – 452 с.
12. Таха Х.А. Введение в исследование операций. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2007. – 912 с.
13. Тынкевич М.А. Экономико-математические методы (исследование операций). Изд. 2, испр. и доп. – Кемерово, 2000. – 177 с.