МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ОДЕССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ И. И. МЕЧНИКОВА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ЭКОНОМИКИ И МЕХАНИКИ

Г. А. Ефимова, Е. М. Страхов

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Методические указания
для самостоятельной работы
к разделам «Дробно-линейное программирование»,
«Сепарабельное программирование»,
«Квадратичное программирование»

Для студентов специальности «Прикладная математика»

ОДЕССА
ОНУ
2015

УДК 519.853(075.8)
ББК 22.183.42я81
Е912

Рекомендовано к печати Ученым советом
ИМЭМ ОНУ имени И. И. Мечникова.
Протокол № 1 от 14.10.2014.

Рецензенты:

О. Г. Рудык, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры экономической кибернетики и информационных технологий Института инновационного и последипломного образования Одесского национального университета имени И. И. Мечникова;

О. Д. Кичмаренко, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующая кафедрой оптимального управления и экономической кибернетики Одесского национального университета имени И. И. Мечникова.

Ефимова Г. А., Страхов Е. М.

Е912 Методы оптимизации и исследование операций : Методические указания для самостоятельной работы к разделам «Дробно-линейное программирование», «Сепарабельное программирование», «Квадратичное программирование») для студентов специальности «Прикладная математика» / Г. А. Ефимова, Е. М. Страхов. – Одесса : Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова, 2015. – 38 с.

УДК 519.853(075.8)
ББК 22.183.42я81

Введение

Математическое программирование представляет собой математическую дисциплину, занимающуюся изучением экстремальных задач и разработкой методов их решения. Термин «программирование» в данном случае является синонимом понятия «планирование».

В общем виде математическая постановка *экстремальной задачи* (задачи *оптимизации*) состоит в определении наибольшего или наименьшего значения целевой функции $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ при условиях $g_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\begin{pmatrix}\le \\ = \end{pmatrix} b_i \ \left(i=\overline{1,m}\right)$, где $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ и $g_i:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ − заданные функции, а b_i − некоторые действительные числа.

В зависимости от свойств функций f и g_i математическое программирование можно рассматривать как ряд самостоятельных дисциплин, занимающихся изучением и разработкой методов решения определенных классов задач. Прежде всего, задачи математического программирования делятся на задачи линейного и нелинейного программирования. При этом, если все функции f и g_i линейны, то соответствующая задача является задачей *линейного программирования*. Если же хотя бы одна из указанных функций нелинейна, то соответствующая задача является задачей *нелинейного программирования*.

Методы решения задач нелинейного программирования условно можно разделить на два класса: *прямые* и *непрямые* методы. Примером прямых методов могут служить градиентные методы, где экстремум функции находится последовательно при движении в направлении возрастания или убывания функции в соответствии с вычисленными на каждом шаге значениями градиентов. В непрямых методах исходная задача заменяется (аппроксимируется) другой задачей, оптимальное решение которой можно найти. Сюда относятся методы квадратичного, сепарабельного и стохастического программирования.

В данном пособии рассматриваются методы дробно-линейного, сепарабельного и квадратичного программирования, являющиеся частью курса «Методы оптимизации и исследование операций» для студентов направления подготовки «Прикладная математика».

ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ (ДЛП)

Определение. *Задача, в которой целевая функция дробно-линейная, а допустимое множество X определяется линейными ограничениями, называется задачей дробно-линейного программирования (ЗДЛП).*

ЗДЛП в общем виде записывается следующим образом:

$$z = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n}{q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_nx_n} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} p_jx_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} q_jx_j} = \frac{p(x)}{q(x)} \to opt, \qquad (1)$$

$$Ax = b(\le b),\ r(A) = m,\ x \ge 0, \qquad (2)$$

где A − матрица размерности $m \times n$, $m < n$.

Практическая значимость таких задач обусловлена тем, что большое количество важных экономических показателей относительны, т. е. они определяются как отношение двух других показателей. Например, к ЗДЛП сводятся задачи определения себестоимости продукции, уровня рентабельности хозяйственной деятельности и т. д.

Обозначим

p_j − прибыль предприятия от реализации единицы продукции *j*-го вида;

x_j − количество выпущенной продукции *j*-го вида;

s_j − цена единицы продукции *j*-го вида;

c_j − себестоимость производства единицы продукции *j*-го вида;

d_j − затраты на производство единицы продукции *j*-го вида.

Задача <u>рентабельности</u> (P_r) <u>затрат</u> на производство имеет вид

$$P_r = \frac{P(x)}{C(x)} = \frac{\sum p_jx_j}{\sum c_jx_j} \to \max_{x \in X}.$$

Задача рентабельности (P_p) продаж содержит целевую функцию вида

$$P_p = \frac{P(x)}{S(x)} = \frac{\sum p_j x_j}{\sum s_j x_j} \to \max_{x \in X}.$$

Задача определения минимальных затрат (P_g) в расчете на одну гривну товарной продукции записывается в виде

$$P_g = \frac{C(x)}{S(x)} \to \min_{x \in X}.$$

И, наконец, задача минимизации средней себестоимости единицы продукции записывается как

$$C_0 = \frac{\sum d_j x_j}{\sum x_j} \to \min_{x \in X}.$$

Здесь допустимое множество X определяется системой линейных ограничений в зависимости от условий задачи.

Замечание. Целевая функция (1) ЗДЛП может содержать и свободные члены:

$$z = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n + p_0}{q_1 x_1 + q_2 x_2 + \ldots + q_n x_n + q_0}.$$

В этом случае заменой переменных линейные функции числителя и знаменателя можно свести к однородному виду.

Без ограничения общности будем рассматривать задачу

$$\max_{x \in X} z. \tag{3}$$

Необходимым условием существования решения любой задачи математического программирования является непустота допустимого множества X: $X \neq \varnothing$.

Чтобы убедиться в выполнении этого условия, достаточно найти допустимый опорный план канонической ЗЛП с ограничениями (2), т. к. допустимые множества ЗДЛП и канонической ЗЛП совпадают.

Далее будем считать, что $X \neq \varnothing$.

Следующим необходимым условием существования решения ЗДЛП (1)–(2) является определенность целевой функции z на всем допустимом множестве, т. е. $q(x)$ должно быть отличным от нуля для всех $x \in X$. Выпуклость множества X и линейность функции $q(x)$ означают, что $q(x) \neq 0 \;\; \forall x \in X$ тогда и только тогда, когда функция $q(x)$ сохраняет знак на всем множестве X, т. е. $q(x)$ или положительна, или отрицательна на всем множестве X.

Пусть $q(x) > 0 \;\; \forall x \in X$ (если $q(x) < 0 \; \forall x \in X$, то знак «минус» можно отнести к числителю и в знаменателе рассматривать положительную функцию $-q(x)$).

Приведем без доказательства три утверждения, важных для решения ЗДЛП.

Утверждение 1. *Дробно-линейная функция монотонно изменяется вдоль произвольного прямолинейного отрезка* $[\tilde{x}, \hat{x}]$.

Утверждение 2. *Целевая функция ЗДЛП достигает своего оптимума в крайней точке допустимого множества, т. е. хотя бы один из опорных планов будет решением задачи.*

Утверждение 3. *Если оптимум дробно-линейной целевой функции достигается в нескольких крайних точках многогранника планов задачи, то каждая точка грани, являющаяся линейной комбинацией этих точек, будет решением задачи.*

Рассмотрим <u>графическое</u> решение ЗДЛП.

Отличие от ЗЛП состоит в интерпретации гиперповерхностей уровня целевой функции при изменении ее значений. Уравнением гиперповерхности

$z = const$, очевидно, будет уравнение гиперповерхности, проходящей через начало координат

$$p_1x_1 + \ldots + p_nx_n - z\left(q_1x_1 + \ldots + q_nx_n\right) = 0 .$$

Изменяя значение z от $-\infty$ до $+\infty$, получим пучок гиперповерхностей. В случае $n = 2$ центром симметрии пучка прямых будет начало координат, при $n = 3$ осью симметрии пучка – прямая, проходящая через начало координат и т. д. При увеличении (уменьшении) параметра z гиперплоскость уровня вращается относительно гипероси симметрии в одну сторону. Положение гиперплоскости уровня, при котором она касается множества планов X (в вершине или грани), отвечает экстремальным значениям целевой функции на допустимом множестве X задачи.

Пример. Для производства двух видов продукции *A* и *B* предприятие использует три типа технологического оборудования. Каждое изделие должно пройти обработку на каждом типе оборудования. Время обработки каждого из изделий и затраты, связанные с производством одного изделия, приводятся в таблице 1.

Таблица 1

Тип оборудования	Затраты времени на обработку одного изделия (ч)	
	A	B
I II III	2 1 12	8 1 3
Затраты на производство одного изделия (ден. ед.)	2	3

Оборудование I и III типов предприятие может использовать не более 26 и 39 ч соответственно, оборудование II типа целесообразно использовать не менее 4 ч. Определить, сколько изделий каждого вида следует изготовить предприятию, чтобы средняя себестоимость одного изделия была минимальной.

<u>Решение</u>. Построим математическую модель задачи. Пусть

x_1 – количество изготавливаемых изделий вида *A*,

x_2 – количество изготавливаемых изделий вида *B*.

Общие финансовые затраты на их производство составят величину:

$$2x_1 + 3x_2,$$

а средняя себестоимость одного изделия будет равна

$$\frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2}.$$

Математическая модель задачи примет вид:

$$z = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 \le 26, \\ x_1 + x_2 \ge 4, \\ 12x_1 + 3x_2 \le 39. \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0.$$

Треугольник *ABC* – область планов задачи (допустимое множество *X*):

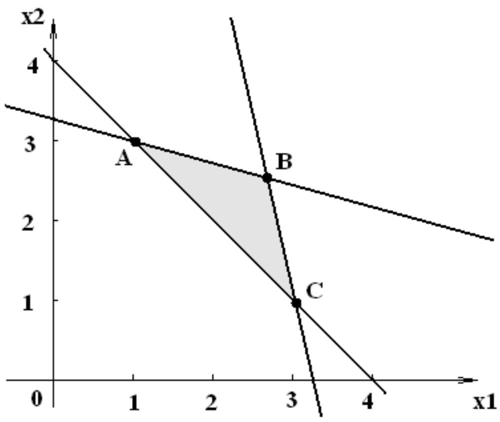

Рис. 1.

Из выражения целевой функции найдем x_2:

$$x_2 = \frac{z-2}{3-z} x_1 = kx_1.$$

Угловой коэффициент k прямой равен

$$k = \frac{z-2}{3-z}.$$

Тогда $\frac{dk}{dz} = \frac{1}{(3-z)^2} > 0$, поэтому функция $k = \frac{z-2}{3-z}$ возрастает, и прямая $x_2 = kx_1$ будет вращаться против часовой стрелки. Следовательно, в точке *C* целевая функция принимает наименьшее значение на множестве планов *X*. Найдем координаты точки *C*, решая систему

$$\begin{cases} 12x_1 + 3x_2 = 39, \\ x_1 + x_2 = 4. \end{cases}$$

Получим $x_1 = 3$, $x_2 = 1$. Таким образом,

$$x^* = (3; 1),\ z^* = \frac{9}{4}.$$

Следовательно, предприятию следует выпускать 3 изделия вида *A* и одно изделие вида *B*. При этом средняя себестоимость одного изделия будет минимальной и равной 2.25 ден. ед.

ЗДЛП можно свести к ЗЛП и решить симплекс-методом.

Обозначим $y_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} q_j x_j}$

при условии, что $\sum_{j=1}^{n} q_j x_j \neq 0$,

и введем новые переменные

$$y_j = y_0 \cdot x_j. \tag{4}$$

Тогда ЗДЛП (1)–(2) примет вид

$$z = \sum_{j=1}^{n} p_j y_j \to opt, \tag{5}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0, \\ \sum_{j=1}^{n} q_j y_j = 1, \end{cases} \tag{6}$$

$$y_j \geq 0,\ y_0 > 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

После нахождения оптимального решения полученной задачи, используя соотношения (4), находим оптимальное решение исходной ЗДЛП.

<u>Замечание</u>. Значения целевых функций ЗДЛП (1) и (5) при соответствующих планах x и $y = y_0 \cdot x$ совпадают. Действительно,

$$z(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} q_j x_j} = \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{x_j}{\sum_{j=1}^{n} q_j x_j} = \sum_{j=1}^{n} p_j y_j.$$

С учетом равенства $\sum_{j=1}^{n} q_j y_j = 1$ и неравенства $y_0 > 0$ имеем

$$\sum_{j=1}^{n} p_j y_j = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j y_j}{\sum_{j=1}^{n} q_j y_j} = \frac{y_0 \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{y_j}{y_0}}{y_0 \sum_{j=1}^{n} q_j \frac{y_j}{y_0}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} q_j x_j} = \frac{p(x)}{q(x)} = Z.$$

Поэтому можно утверждать, что если y^* − оптимальный план вспомогательной задачи (5)–(6), то $x^* = \left(x_j^*,\ j = \overline{1,n}\right)$, где $x_j^* = \dfrac{y_j^*}{y_0}$, есть оптимальный план ЗДЛП, причем значения целевых функций этих задач совпадают.

Алгоритм решения ЗДЛП

Шаг 1. Убедиться в существовании планов ЗДЛП, в положительности и ограниченности на допустимом множестве ЗДЛП линейной функции $q(x)$, которая находится в знаменателе функции цели ЗДЛП.

Шаг 2. Вводя новые переменные, построить вспомогательную ЗЛП (5)–(6) и найти ее решение.

Шаг 3. По оптимальному плану ЗЛП восстановить оптимальный план ЗДЛП.

Замечание. На практике очень часто опускают шаг 1 и начинают решение с шага 2.

Пример.

$$z = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$$

Решение. Введем $y_0 = \dfrac{1}{x_1 + 2x_2 + 1}$ $(y_0 > 0)$. Тогда $z = 2y_0x_1 - y_0x_2$.

Умножим обе части всех ограничений на y_0 и перейдем к новым переменным $y_j = y_0x_j$, $j = \overline{1,4}$. Задача (5)–(6) примет вид

$$z = 2y_1 - y_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} -2y_0 + y_1 - 2y_2 + y_3 = 0, \\ -6y_0 + 2y_1 + y_2 + y_4 = 0, \\ y_0 + y_1 + 2y_2 = 1, \end{cases}$$
$$y_j \geq 0,\ j = \overline{1,4},\ y_0 > 0.$$

Решим эту задачу симплекс-методом (табл. 2). Задача в канонической форме, но в третьем ограничении нет базисной переменной. Для использования симплекс-метода выразим y_0 из третьего уравнения и исключим эту переменную из первого и второго уравнений.

Получим следующую систему основных ограничений с базисными переменными y_3, y_4, y_0:

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + y_3 = 2, \\ 8y_1 + 13y_2 + y_4 = 6, \\ y_1 + 2y_2 + y_0 = 1, \end{cases}$$
$$y_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$$

Таблица 2

$c_б$	$x_б$	c	2	-1	0	0	0	θ
		b	y_1	y_2	y_3	y_4	y_0	
0	y_3	2	3	2	1	0	0	2/3
0	y_4	6	8	13	0	1	0	6/8
0	y_0	1	1	2	0	0	1	1
	Δ	0	-2	1	0	0	0	
2	y_1	2/3	1	2/3	1/3	0	0	
0	y_4	2/3	0	23/3	-8/3	1	0	
0	y_0	1/4	0	4/3	-1/3	0	1	
	Δ	4/3	0	7/3	2/3	0	0	

Таким образом, $y_1^* = 2/3, y_2^* = y_3^* = 0, y_4^* = 2/3, y_0^* = 1/4, z(y^*) = 4/3$.

Возвращаясь к переменным исходной задачи, вычислим ее оптимальный план по формуле $x_j^* = \dfrac{y_j^*}{y_0}, j = \overline{1,4}$:

$$x^* = (2;\ 0;\ 0;\ 2)^T,\ z(x^*) = 4/3.$$

Задания для самостоятельной работы

Найти решение ЗДЛП, сведя ее к эквивалентной ЗЛП (N − номер студента по списку группы).

Вариант 1

$$z = \frac{-5x_1 + 2x_2}{3x_1 + 4x_2} \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} & x_1 + 4x_2 \le N + 4, \\ & 2x_1 + 3x_2 \ge N, \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Вариант 2

$$z = \frac{3x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 \ge N, \\ & 3x_1 + x_2 \le N + 6, \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Список использованной литературы

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986.
2. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. – М.: Мир, 1982.
3. Карагодова О. О., Кігель В. Р., Рожок В. Д. Дослідження операцій. – Київ, 2007.

ЗАДАЧИ СЕПАРАБЕЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ (ЗСП) И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Определение. *Сепарабельной называют такую функцию* n *переменных* $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, *которая представляет собой сумму* n *функций, каждая из которых зависит лишь от одной переменной:*

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = f_1\left(x_1\right) + f_2\left(x_2\right) + ... + f_n\left(x_n\right) = \sum_{j=1}^{n} f_j\left(x_j\right).$$

В сепарабельном программировании рассматриваются задачи нелинейного программирования, в которых как целевая функция, так и функции системы ограничений являются сепарабельными:

$$z = \sum_{j=1}^{n} f_j\left(x_j\right) \to \max, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\left(x_j\right) \le b_i,\ i = 1, 2...., m_1, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\left(x_j\right) = b_i,\ i = m_1 + 1, ..., m. \tag{3}$$

Известно, что нелинейная функция может быть аппроксимирована с наперед заданной степенью точности кусочно-линейной функцией $\hat{f}\left(x\right)$:

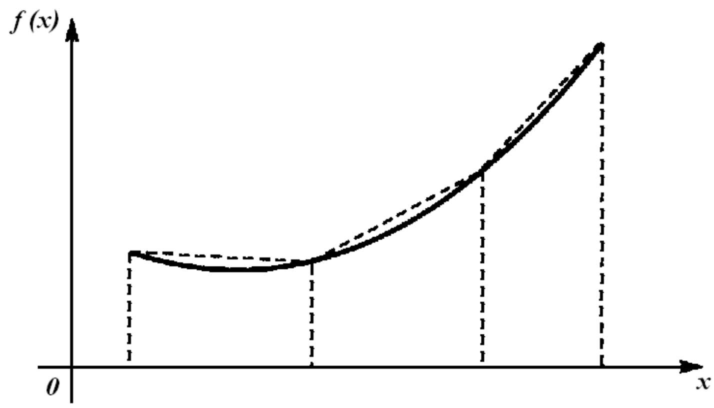

Рис. 2.

Заменим все функции $f_j\left(x_j\right)$ их кусочно-линейными аналогами $\hat{f}_j\left(x_j\right)$, а функции $g_{ij}\left(x_j\right)$ соответственно на $\hat{g}_{ij}\left(x_j\right)$. Тогда для задачи (1)–(3) получим ее приближенный линейный аналог:

Найти максимум функции

$$\hat{f}(x)=\sum_{j=1}^{n}\hat{f}_j\left(x_j\right) \tag{4}$$

в области $\hat{X}$, определенной условиями

$$\sum_{j=1}^{n}\hat{g}_{ij}\left(x_j\right)\le b_i,\ i=\overline{1,m_1}, \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\hat{g}_{ij}\left(x_j\right)=b_i,\ i=\overline{m_1+1,m}, \tag{6}$$

В основе метода приближенного решения ЗСП, основанного на линейной аппроксимации и использовании симплекс-метода, лежит следующая идея:

1) построение кусочно-линейных аппроксимаций функций $g_{ij}\left(x_j\right)$ и $f_j\left(x_j\right)$;

2) построение аппроксимирующей линейной задачи (4)–(6);

3) решение задачи (4)–(6);

4) переход к приближенному решению исходной нелинейной задачи (1)–(3).

Локальный оптимум приближенной линейной задачи (4)–(6) является приближенным локальным оптимумом исходной задачи (1)–(3). Если функции $g_{ij}\left(x_j\right)$ и $f_j\left(x_j\right)$ имеют свойства, обеспечивающие существование единственного экстремума исходной задачи, приближенная задача обладает тем же свойством.

Построение аппроксимирующей задачи и определение локального максимума

Пусть $\varphi\left(x_1,...,x_n\right)$ – некоторая сепарабельная функция, которая входит в задачу (1)–(3). Найдем аналитическую запись аппроксимирующей ее кусочно-линейной функции. Обозначим $\left[\alpha_j,\beta_j\right]$ интервал допустимых значений переменной x_j. С помощью фиксированных точек x_{kj} $\left(k=\overline{0,r_j}\right)$ разобьем его на r_j частей-сегментов. Если $x_j \in \left(x_{kj};\, x_{k+1,j}\right)$, то уравнение соответствующей хорды, которая аппроксимирует функцию, будет следующим:

$$\frac{\hat{\varphi}_j\left(x_j\right)-\varphi_{kj}}{\varphi_{k+1,j}-\varphi_{kj}}=\frac{x_j-x_{kj}}{x_{k+1,j}-x_{kj}} \tag{7}$$

(уравнение прямой, проходящей через две заданные точки), где

$$\varphi_{kj}=\varphi_j\left(x_{kj}\right),\ \varphi_{k+1,j}=\varphi_j\left(x_{k+1,j}\right).$$

Если каждое из отношений в равенстве (7) обозначить через λ_j, то получим

$$\begin{aligned} x_j &= \lambda_j x_{k+1,j}+\left(1-\lambda_j\right)x_{kj}, \\ \hat{\varphi}_j\left(x_j\right) &= \lambda_j \varphi_{k+1,j}+\left(1-\lambda_j\right)\varphi_{kj}, \end{aligned}, \tag{8}$$

причем $\lambda_j \in [0;1]$. Уравнения (8) – параметрические уравнения хорды (7).

Обозначим для k-го сегмента

$$\lambda_j=\lambda_{k+1,j};\quad 1-\lambda_j=\lambda_{kj}.$$

Из (8) получим

$$\left.\begin{aligned} &\hat{\varphi}_j\left(x_j\right)=\lambda_{kj}\varphi_{kj}+\lambda_{k+1,j}\varphi_{k+1,j} \\ &for\ \ x_j=\lambda_{kj}x_{kj}+\lambda_{k+1,j}x_{k+1,j}, \\ &где\ \ \lambda_{kj}+\lambda_{k+1,j}=1,\ \lambda_{kj}\ge 0,\ \lambda_{k+1,j}\ge 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Формулы (9) можно обобщить для произвольного $x_j \in \left[\alpha_j, \beta_j\right]$, если принять дополнительное условие, которое называется *правилом ограниченного введения в базис*: в базисе должно быть не более двух, причем соседних, λ_{kj} для каждого $j=\overline{1,n}$, отличных от нуля (т. е. положительных).

Тогда общие формулы примут вид

$$\begin{cases} x_j = \sum_{\kappa=0}^{r_j} \lambda_{kj} x_{kj}, \\ \hat{\varphi}_j\left(x_j\right) = \sum_{\kappa=0}^{r_j} \lambda_{kj}\varphi_{kj}, \\ \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} = 1,\ \lambda_{kj} \ge 0. \end{cases} \tag{10}$$

Используя (10) и правило ограниченного введения в базис, для задачи (1)–(3) можем записать приближенную задачу

$$\begin{cases} z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{r_j} f_{kj}\lambda_{kj} \to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{r_j} g_{kij}\lambda_{kj} \le b_i, i = \overline{1, m_1}, \\ \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{r_j} g_{kij}\lambda_{kj} = b_i, i = \overline{m_1 + 1, m}, \\ \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} = 1, \lambda_{kj} \ge 0 \quad \forall k, j. \end{cases} \tag{11}$$

Эта задача называется задачей в λ-форме, так как ее переменными являются λ_{kj}. Значения функций f_{kj} и g_{kj} фиксированы (вычислены в узловых точках).

В процессе решения задачи (11) возможны следующие случаи:

1) найдено оптимальное решение λ_{kj}^*, ($k = \overline{0, r_j}$, $j = \overline{1, n}$), тогда приближенное решение исходной задачи

$$x_j^* = \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj}^* x_{kj},\ \ j = \overline{1, n};$$

2) задача (11) неразрешима или в связи с невозможностью использования правила ограниченного введения в базис, или в связи с неразрешимостью линейной задачи симплекс-методом.

Тогда последний опорный план аппроксимирующей линейной задачи (11) считают наилучшим приближением и приближенное оптимальное решение исходной задачи (1)–(3) определяют именно по этому опорному плану.

***Замечание*.** Для увеличения точности решения задачи повторяют этот метод для некоторой окрестности точки, найденной при решении задачи (11): опять разбивают интервалы для переменных в этой окрестности на некоторое число промежутков, строят новую приближенную задачу типа (11), решают ее и т. д. Итерации можно продолжать до получения необходимой точности решения.

Существует важный частный случай, когда локальный экстремум сепарабельной задачи (1)–(3) совпадает с ее глобальным экстремумом. Этот факт устанавливает следующая теорема $[4]$.

***Теорема*.** *Пусть* $f_j\left(x_j\right)$ *– выпуклые вниз функции, допустимое множество* $\overline{X}$ *выпукло. Тогда, решая задачу (11) без учета правила ограниченного введения в базис, получим оптимальный план приближенной задачи.*

***Замечание*.** Если некоторая переменная x_j входит в условие исходной задачи линейно, то ее аппроксимировать с помощью λ_{kj} не нужно, что сокращает размерность приближенной задачи.

***Пример 1*.**

$$f\left(x\right)=x_1^4+2x_2+x_3^2\to\max,$$

$$g\left(x\right)=x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 4,$$

$$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}.$$

Это задача сепарабельного программирования, в которой

$$f_1(x_1)=x_1^4,\ f_2(x_2)=2x_2,\ f_3\left(x_3\right)=x_3^2,\ g_1\left(x_1\right)=x_1^2,\ g_2\left(x_2\right)=x_2^2,\ g_3\left(x_3\right)=x_3^2.$$

Так как функции $f_1(x_1),\ f_2(x_2),\ f_3\left(x_3\right),\ g_1\left(x_1\right),\ g_2\left(x_2\right),\ g_3\left(x_3\right)$ выпуклы вниз, то локальный максимум $f\left(x\right)$ является глобальным.

Очевидно, что $x_j \in [0,2], j=\overline{1,3}$. Разобьем эти интервалы точками x_{kj} с шагом $h=1$ и вычислим $f_{kj} = f_j(x_{kj}), g_{kj} = g_j(x_{kj}), j=1,2,3, k=\overline{0,2}.$ Значения f_{kj} и g_{kj} внесем в таблицу 3:

Таблица 3

k	x_{k1}	f_{k1}	g_{k1}	x_{k2}	f_{k2}	g_{k2}	x_{k3}	f_{k3}	g_{k3}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	2	1	1	1	1
2	2	16	4	2	4	4	2	4	4

Аппроксимирующая задача в λ-форме имеет вид:

$$\hat{f}(\lambda) = \lambda_{11} + 16\lambda_{21} + 2\lambda_{12} + 4\lambda_{22} + \lambda_{13} + 4\lambda_{23} \to \max$$

в области, которая задается условиями:

$$\begin{aligned}
&\hat{g}(\lambda) = \lambda_{11} + 4\lambda_{21} + \lambda_{12} + 4\lambda_{22} + \lambda_{13} + 4\lambda_{23} \le 4,\\
&\lambda_{01} + \lambda_{11} + \lambda_{21} = 1,\\
&\lambda_{02} + \lambda_{12} + \lambda_{22} = 1,\\
&\lambda_{03} + \lambda_{13} + \lambda_{23} = 1,\\
&\lambda_{kj} \ge 0,\ \ j=\overline{1,3},\ k=\overline{0,2},
\end{aligned}$$

а также дополнительным условием – правилом ограниченного введения в базис, которое можно сформулировать следующим образом: для любого $x_j = \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} x_{kj}$, не больше двух, причем соседних λ_{kj}, могут быть положительными (базисными).

Сведем эту задачу к канонической форме, вводя в первое ограничение дополнительную базисную переменную x_4. Эта переменная входит в условия линейно, поэтому не требует дополнительной аппроксимации через λ. Для аппроксимирующей линейной задачи в λ-форме получим симплекс-таблицу 4:

Таблица 4

$c_б$	$x_б$	ñ	0	1	16	0	2	4	0	1	4	0	θ
		b	λ_{01}	λ_{11}	λ_{21}	λ_{02}	λ_{12}	λ_{22}	λ_{03}	λ_{13}	λ_{23}	x_4	
0	x_4	4	0	1	4	0	1	4	0	1	4	1	1
0	λ_{01}	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	λ_{02}	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	-
0	λ_{03}	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	-
	Δ	0	0	-1	-16	0	-2	-4	0	-1	-4	0	

Условие оптимальности не выполняется, поэтому в базис нужно ввести λ_{21} вместо x_4 или λ_{01} $\left(\min\Delta_{kj} = \Delta_{21} = -16 < 0\right)$. Если ввести x_4, то в базисе одновременно будут λ_{21} и λ_{01}, что не удовлетворяет правилу ограниченного выбора базиса. Поэтому введем λ_{21} вместо λ_{01} (таблица 5):

Таблица 5

$c_б$	$x_б$	ñ	0	1	16	0	2	4	0	1	4	0	θ
		b	λ_{01}	λ_{11}	λ_{21}	λ_{02}	λ_{12}	λ_{22}	λ_{03}	λ_{13}	λ_{23}	x_4	
0	x_4	0	-4	-3	0	0	1	4	0	1	4	1	
16	λ_{21}	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	
0	λ_{02}	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	
0	λ_{03}	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	
	Δ	16	16	15	0	0	-2	-4	0	-1	-4	0	

Решение необходимо продолжить, так как в Δ-строке есть отрицательные значения. Претендентами на включение в базис являются λ_{22} и λ_{23}, которым отвечают наименьшие оценки $\Delta_{22} = \Delta_{23} = -4$.

Учитывая правило ограниченного введения в базис, введение этих переменных в базис невозможно.

Поэтому вводим переменную λ_{12}, которой отвечает наименьшая после Δ_{22} и Δ_{23} оценка $\Delta_{12} = -2$. Исключение из базиса переменной x_4 не противоречит правилу ограниченного введения в базис, так как в базисе будут две соседние переменные λ_{02} и λ_{12}. Получим таблицу 6.

Таблица 6

$c_б$	$x_б$	ñ	0	1	16	0	2	4	0	1	4	0
		b	λ_{01}	λ_{11}	λ_{21}	λ_{02}	λ_{12}	λ_{22}	λ_{03}	λ_{13}	λ_{23}	x_4
2	λ_{12}	0	-4	-3	0	0	1	4	0	1	4	1
16	λ_{21}	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	λ_{02}	1	4	3	0	1	0	-3	0	-1	-4	-1
0	λ_{03}	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
	Δ	16	8	9	0	0	0	4	0	1	4	2

Так как все $\Delta_{kj} \geq 0,$ то аппроксимирующая задача в λ-форме решена:

$$\lambda_{01}^* = \lambda_{11}^* = \lambda_{12}^* = \lambda_{22}^* = \lambda_{13}^* = \lambda_{23}^* = 0,\ \lambda_{21}^* = \lambda_{02}^* = \lambda_{03}^* = 1.$$

Тогда приближенное решение исходной задачи

$$\hat{x}_j = \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj}^* x_{kj},\ т.\,е.\ \hat{x}_1 = 2,\ \hat{x}_2 = 0,\ \hat{x}_3 = 0,\ f(\hat{x}) = 16.$$

Рассмотрим еще один пример решения сепарабельной задачи, в котором аппроксимирующая линейная задача в λ-форме не имеет оптимального решения.

<u>Пример 2</u>.

$$f(x) = x_1 + x_2^4 \to \max,$$
$$g(x) = 3x_1 + 2x_2^2 \leq 9,$$
$$x_{1,2} \geq 0.$$

Здесь $f_1(x_1) = x_1,\ f_2(x_2) = x_2^4,\ g_1(x_1) = 3x_1,\ g_2(x_2) = 2x_2^2.$

Переменная x_1 входит и в целевую функцию, и в ограничения линейно, поэтому по этой переменной аппроксимацию не проводим.

Из ограничений задачи можно сделать вывод, что $x_2 \in [0,3].$ Разобьем этот промежуток с шагом $h = 1$ точками $x_{kj}\left(k = \overline{0,3}\right)$ и вычислим $f_{k2},\ g_{k2}\ \left(k = \overline{0,3}\right).$

Таблица 7

k	x_{k2}	f_{k2}	g_{k2}
0	0	0	0
1	1	1	2
2	2	16	8
3	3	81	18

Аппроксимирующая задача в λ-форме будет иметь вид:

$$\hat{f}(\lambda) = x_1 + \lambda_{12} + 16\lambda_{22} + 81\lambda_{32} \to \max,$$
$$3x_1 + 2\lambda_{12} + 8\lambda_{22} + 18\lambda_{32} \le 9,$$
$$\lambda_{02} + \lambda_{12} + \lambda_{22} + \lambda_{32} = 1,$$
$$x_1 \ge 0,\ \lambda_{k2} \ge 0,\ k = \overline{0,3},$$

а также условие, вытекающее из правила ограниченного введения в базис.

С помощью дополнительной переменной x_3 сведем задачу к каноническому виду, в котором базисными будут переменные x_3 и λ_{02}:

Таблица 8

$c_б$	$x_б$	ñ	1	0	1	16	81	0	θ
		b	x_1	λ_{02}	λ_{12}	λ_{22}	λ_{32}	x_3	
0	x_3	9	3	0	2	8	18	1	9/2
0	λ_{02}	1	0	1	1	1	1	0	1
	Δ	0	-1	0	-1	-16	-81	0	

Анализ таблицы показывает, что, учитывая правило ограниченного ввода переменной в базис, нужно, исключая из базиса переменную λ_{02}, ввести в него λ_{22}. Получим таблицу 7.

Таблица 9

$c_б$	$x_б$	ñ	1	0	1	16	81	0	θ
		b	x_1	λ_{02}	λ_{12}	λ_{22}	λ_{32}	x_3	
0	x_3	1	3	-8	-6	0	10	1	1/10
16	λ_{22}	1	0	1	1	1	1	0	1
	Δ	16	-1	16	15	0	-65	0	

Решение нужно продолжать, введем в базисные переменные λ_{32} вместо x_3 (при этом правило ограниченного выбора вводимой в базис переменной не нарушается). Следующая таблица – таблица 10.

Таблица 10

$c_б$	$x_б$	ñ	1	0	1	16	81	0
		b	x_1	λ_{02}	λ_{12}	λ_{22}	λ_{32}	x_3
81	λ_{32}	0,1	0,3	-0,8	-0,6	0	1	0,1
16	λ_{22}	0,9	-0,3	0,8	0,6	1	0	-0,1
	Δ	22,5	19,5	-52	-38	0	0	6,5

Правило ограниченного введения в базис не позволяет вводить λ_{02} или λ_{12} вместо λ_{22}. Так как других вариантов нет, то процедура на этом заканчивается. Полученный план – наилучший среди допустимых. Таким образом $\hat{x}_1 = 0,\ \lambda_{02}^* = \lambda_{12}^* = 0,\ \lambda_{22}^* = 0.9,\ \lambda_{32}^* = 0.1,\ \hat{x}_3 = 0,$ поэтому приближенное решение исходной задачи имеет вид: $\hat{x}_1 = \hat{x}_3 = 0$, $\hat{x}_2 = \sum_{k=0}^{3} \lambda_{k2}^* x_{k2} = 0.9 \cdot 2 + 0.1 \cdot 3 = 2.1.$

Следовательно, $\hat{x} = (0;\ 2.1)$ − наилучший с точки зрения целевой функции из найденных допустимых планов исходной задачи, $f(\hat{x}) = 19.4481.$

Отметим, что точное решение исходной задачи следующее: $x^* = \left(0; \sqrt{4.5}\right) \approx (0; 2.12),\ f\left(x^*\right) = 20.25.$

<u>Замечание</u>. Иногда, используя замену переменных, удается свести несепарабельную функцию к сепарабельному виду. Например, если в целевой функции или в ограничениях присутствует слагаемое вида $x_i \cdot x_j$, то, сделав замену

$$y_i = \frac{1}{2}\left(x_i + x_j\right),\ y_j = \frac{1}{2}\left(x_i - x_j\right),$$

получим

$$y_i^2 = \frac{1}{4}\left(x_i^2 + 2x_i x_j + x_j^2\right),$$
$$y_j^2 = \frac{1}{4}\left(x_i^2 - 2x_i x_j + x_j^2\right),$$

и тогда $x_i \cdot x_j = y_i^2 - y_j^2$.

Возможны и другие варианты замены.

Задания для самостоятельной работы

Решить задачу сепарабельного программирования с помощью кусочно-линейной аппроксимации (k − номер группы, N − номер студента по списку группы).

$$f(x) = \left(x_1 - k\right)^2 + 4\left(x_2 - N\right)^2 \to \min$$

при ограничениях

$$Nx_1 + 3\left(x_2 - k\right)^2 \le 4N,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Список использованной литературы

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. − М.: Высш. шк., 1986.
2. Вагнер Г. Основы исследования операций. Т. 1-3. − М.: Мир, 1972.
3. Хэмди А. Таха. Введение в исследование операций. − М.: Вильямс, 2001.
4. Линейное и нелинейное программирование / Под ред. И. Н. Ляшенко. − К.: Высш. шк., 1975.

КВАДРАТИЧНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ (КП)

Одним из частных видов задачи выпуклого программирования является задача, в которой целевая функция содержит линейную и квадратичную формы, а ограничения линейны. В качестве основной в КП рассматривается задача минимизации функции

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_i x_j = (c, x) + (Dx, x) \qquad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{1,m},\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n} \text{ или } Ax \le b,\ x \ge 0. \qquad (2)$$

Здесь D − симметричная и неотрицательно определенная матрица размерности $n \times n$, A – матрица размерности $m \times n$, $c, x \in E^n$, $b \in E^m$. В силу сделанных предположений целевая функция $f\left(x\right)$ выпукла, допустимое множество X выпукло, поэтому задача (1)−(2) – задача выпуклого программирования.

Функция Лагранжа задачи (1)−(2) имеет вид

$$L(x, \lambda) = f(x) + (\lambda, Ax - b) = (Dx, x) + (c + A^T \lambda, x) - (\lambda, b). \qquad (3)$$

Необходимыми и достаточными условиями оптимальности решения x^* являются условия Куна − Таккера: вектор x^* является оптимальным планом задачи (1)−(2) тогда и только тогда, когда существует вектор $\lambda^* \ge 0$ такой, что пара (x^*, λ^*) представляет собой седловую точку для $L(x\ ,\lambda\ )$, причем для нее выполняется условие дополняющей нежесткости $(\lambda^*, Ax^* - b) = 0$.

Так как $L(x, \lambda)$ в точке x^* достигает минимума по x, то

$$\min_{x \in X} L(x, \lambda) = \min_{x \in X} (f(x) + (\lambda, Ax - b)).$$

Введем дополнительное требование:

$$\det D \ne 0.$$

Тогда функция $L(x, \lambda)$ строго выпукла вниз по x при любом λ, т. е. достигает своего минимума в единственной точке $x(\lambda)$, которая является решением системы

$$\nabla_x L(x,\lambda) = \nabla_x f(x) + \nabla_x (\lambda, Ax - b) = 0,$$

отсюда $\nabla_x L(x,\lambda) = 2Dx + c + A^T\lambda = 0,$ поэтому

$$x(\lambda) = -\frac{1}{2} D^{-1}(c + A^T\lambda). \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3), получим

$$L(x(\lambda),\lambda) = -\frac{1}{4}(AD^{-1}A^T\lambda,\lambda) - \frac{1}{2}(AD^{-1}c + 2b,\lambda) - \frac{1}{4}(D^{-1}c,c). \tag{5}$$

Обозначим

$$\Phi(\lambda) = -\frac{1}{4}(AD^{-1}A^T\lambda,\lambda) + \varphi(\lambda).$$

Очевидно, что $\Phi(\lambda)$ является выпуклой вверх функцией и поэтому имеет единственный максимум. Таким образом, для нахождения λ^* нужно решить вспомогательную задачу

$$\Phi(\lambda) = -\frac{1}{4}(AD^{-1}A^T\lambda,\lambda) + \varphi(\lambda) \to \max_{\lambda \geq 0}. \tag{6}$$

Следовательно, решение исходной задачи (1)–(2) состоит из двух этапов:

1) решение задачи безусловной оптимизации (6) в неотрицательной области (получаем вектор λ^*);

2) вычисление x^* по формулам (4) при $\lambda = \lambda^*$.

Замечание 1. Если решение вспомогательной задачи (6) не удовлетворяет условию неотрицательности λ^*, это означает, что функция $\Phi(\lambda)$ не имеет максимума внутри неотрицательной области $\lambda \ge 0$. В этом случае в качестве решения следует рассматривать границы допустимой области, последовательно полагая одно из $\lambda_i^* = 0$ и решая задачу на безусловный максимум меньшей размерности. Если ни одна из полученных точек не удовлетворяет условию $\lambda \ge 0$, в качестве решения получаем нулевой вектор: $\lambda^* \equiv 0$.

Замечание 2. Для решения задачи (6) удобно использовать метод сопряженных градиентов, так как известно, что при оптимизации квадратичной функции без ограничений этот метод дает решение за некоторое число итераций, не превышающее количество переменных задачи.

Пример.

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 2, \\ -x_1 - x_2 \le -1, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Решение. Здесь $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $D = D^{-1} = E$,

$$AD^{-1}A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\Phi(\lambda) = -\frac{1}{4}(5\lambda_1^2 - 6\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_2^2) - \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} + B,$$

где $B = const$.

Решим аналитически вспомогательную задачу

$$\max_{\lambda \ge 0} \Phi(\lambda).$$

Здесь $\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_1} = -\frac{10}{4}\lambda_1 + \frac{6}{4}\lambda_2 - 1$, $\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_2} = \frac{6}{4}\lambda_1 - \lambda_2 + 1$. Значения λ_1 и λ_2 найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} -10\lambda_1 + 6\lambda_2 = 4, \\ 6\lambda_1 - 4\lambda_2 = -4. \end{cases}$$

Имеем $\lambda_1^* = 2, \lambda_2^* = 4.$ Так как $\lambda_1^*, \lambda_2^* > 0$, то вектор λ^* является решением вспомогательной задачи, которая является задачей выпуклого программирования со строго выпуклой целевой функцией.

Восстановим вектор $x^* = x(\lambda^*) = -\frac{1}{2}D^{-1}(c + A^T\lambda^*)$:

$$x^* = -\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ f(x^*) = -1.$$

Проиллюстрируем решение графически.

Допустимое множество X – это треугольник ABC, линии уровня целевой функции – концентрические окружности с центром в точке $F(-1;1)$. Функция $f(x)$ на множестве X достигает минимума в точке $A(0;1)$.

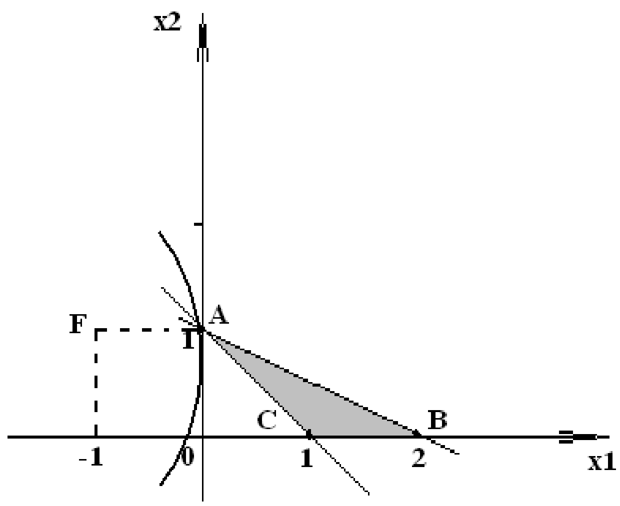

Рис. 3.

Квадратичный симплекс-метод (КСМ)

Свойства задачи (1)–(2) дают возможность модифицировать для нее симплекс-метод в алгоритм квадратичного программирования, который обеспечивает сходимость к оптимальному решению за ограниченное число итераций.

В силу выпуклости задачи (1)–(2) по теореме Куна − Таккера критерием решения задачи будет выполнение следующих условий:

1) $\nabla_x L(x,\lambda) = 2Dx + c + A^T\lambda \geq 0$,

2) $\nabla_\lambda L(x,\lambda) = Ax - b \leq 0$,

3) $(\nabla_x L(x,\lambda), x) = (2Dx + c + A^T\lambda, x) = 0$,

4) $(\nabla_\lambda L(x,\lambda), \lambda) = (Ax - b, \lambda) = 0$.

Сведем неравенства 1) и 2) к равенствам с помощью n-мерной переменной u и m-мерной переменной v. Тогда необходимые и достаточные условия можно сформулировать следующим образом: вектор $x \geq 0$ является оптимальным решением задачи (1)–(2) тогда и только тогда, когда существуют такие m-мерные вектора $\lambda \geq 0, v \geq 0$ и n-мерный вектор u, которые удовлетворяют системе:

$$2Dx + c + A^T\lambda - u = 0, \tag{7}$$

$$Ax - b + v = 0, \tag{8}$$

$$(x,u) = 0, \tag{9}$$

$$(\lambda,v) = 0. \tag{10}$$

Условия (7), (8) являются системой $n+m$ линейных уравнений с $2(n+m)$ неизвестными x, λ, u, v, а условия (9), (10) есть условия дополняющей нежесткости, которые накладывают ограничения на переменные x, λ, u, v: если $x_j > 0$, то $u_j = 0$ и наоборот; если $\lambda_i > 0$, то $v_i = 0$, т. е. i-е основное ограничение задачи (1)–(2) активно, и наоборот, т. е. одновременно не могут быть ненулевыми (базисными) x_j^* и u_j^*, а также λ_i^* и v_i^*.

Благодаря этим условиям решение системы (7)–(8) должно быть допустимым базисным, и для его нахождения можно использовать одну из модификаций симплекс-метода (например, М-метод).

<u>Пример</u>.

$$f(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 \to \min, \tag{11}$$

$$x_1 + 2x_2 \le 2,$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

<u>Решение</u>. Здесь $\tilde{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Нетрудно убедиться, что $D > 0$, поэтому функция $f(x)$ выпукла (вниз) и задача (11) является задачей квадратичного программирования.

Функция Лагранжа имеет вид

$$L(x, \lambda) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + \lambda(x_1 + 2x_2 - 2), \ \lambda \ge 0.$$

Из необходимых условий минимума следует

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 4x_1 + 2x_2 - 4 + \lambda \ge 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_1 + 4x_2 - 6 + 2\lambda \ge 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + 2x_2 - 2 \le 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_1} x_1 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} x_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} \lambda = 0. \end{cases}$$

Приведем систему к каноническому виду, вводя дополнительные переменные $u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ v \geq 0.$ Получим систему

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 4 + \lambda - u_1 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 6 + 2\lambda - u_2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2 + v = 0, \end{cases} \tag{12}$$

$$\lambda \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_1 \geq 0,\ v \geq 0$$

и условия дополняющей нежесткости

$$\begin{cases} x_1 u_1 = 0, \\ x_2 u_2 = 0, \\ \lambda v = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Нужно найти допустимое базисное решение системы (12), которое бы удовлетворяло условиям (13). Для этого используем метод искусственных переменных. Достаточно ввести искусственные переменные z_1 и z_2, после чего получим следующую задачу линейного программирования:

$$\max\ (-Mz_1 - Mz_2),$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + \lambda - u_1 + z_1 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2\lambda - u_2 + z_2 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + v = 2, \end{cases}$$

$$\lambda \geq 0,\ z_{1,2} \geq 0,\ u_{1,2} \geq 0,\ v \geq 0,\ x_{1,2} \geq 0.$$

Результаты итераций – в таблице 11.

<u>Замечание</u>. При выборе новой базисной переменной на итерациях симплекс-метода следует учитывать дополнительные ограничения на выбор базиса, следующие из условий дополняющей нежесткости.

Таблица 11

$c_б$	$x_б$	c	0	0	0	0	0	0	-M	-M	θ
		b	x_1	x_2	λ	u_1	u_2	v	z_1	z_2	
-M	z_1	4	4	2	1	-1	0	0	1	0	4/4
-M	z_2	6	2	4	2	0	-1	0	0	1	6/2
0	v	2	1	2	0	0	0	1	0	0	2/1
	Δ	-10M	-6M	-6M	-3M	M	M	0	0	0	

Продолжение таблицы 1

0	x_1	1	1	1/2	1/4	-1/4	0	0		0	2
-M	z_2	4	0	3	3/2	1/2	-1	0		1	4/3
0	v	1	0	3/2	-1/4	1/4	0	1		0	2/3
	Δ	-4M	0	-3M	-3/2M	-1/2M	M	0		0	
0	x_1	2/3	1	0	1/3	-1/3	0	-1/3		0	2
-M	z_2	2	0	0	2	0	-1	-2		1	1
0	x_2	2/3	0	1	-1/6	1/6	0	2/3		0	-
	Δ	-2M	0	0	-2M	0	M	2M		0	
0	x_1	1/3	1	0	0	-1/3	1/6	0			
0	λ	1	0	0	1	0	-1/2	-1			
0	x_2	5/6	0	1	0	1/6	-1/12	1/2			
	Δ	0	0	0	0	0	0	0			

Из последней симплекс-таблицы имеем:

$$x_1^* = \frac{1}{3},\ x_2^* = \frac{5}{6},\ \lambda_1^* = 1,\ u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ v = 0\,.$$

Проверим условия дополняющей нежесткости:

$$x_1^* u_1 = 0,\ x_2^* u_2 = 0,\ \lambda_1^* v = 0\,.$$

Следовательно, решением данного примера является вектор

$$x^* = \left(\frac{1}{3}; \frac{5}{6}\right)^T,\ \ f(x^*) = \frac{25}{6}.$$

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1 (N – номер студента по списку группы).

1) Решить задачу квадратичного программирования

$$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_1 - 6x_2 \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &2x_1 - x_2 \le N, \\ &x_1 + 2x_2 \le N + 4, \\ &x_1,\, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Решение проиллюстрировать графически.

2) Решить задачу квадратичного программирования

$$f(x) = (x_1 - 2)^2 + 100(x_2 - N)^2 \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &Nx_1 + x_2 \le 2, \\ &x_1,\, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

с помощью квадратичного симплекс-метода.

Вариант 2 (N – номер студента по списку группы)

1) Решить задачу квадратичного программирования

$$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &x_1 + 3x_2 \le N + 6, \\ &x_1 + x_2 \ge N, \\ &x_1,\, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Решение проиллюстрировать графически.

2) Решить задачу квадратичного программирования

$$f(x) = (x_1 - 1)^2 + 100(x_2 - N)^2 \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$Nx_1 + x_2 \le 1,$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

с помощью квадратичного симплекс-метода.

Список использованной литературы

1. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій. – К.: ВІПОЛ, 2001.
2. Зайченко Ю. П., Шумилова С. А. Исследование операций: Сб. задач. – К.: Вища шк., 1990.
3. Дякон В. М., Ковальов Л. Є. Математичне програмування. – К.: Вид. Європейського університету, 2007.
4. Кузнецов А. В., Холод Н. И. Математическое программирование. – Минск: Вышейшая шк., 1984.
5. Бейко И. В., Бублик Б. Н., Зинько П. Н. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. – К.: Вища шк., 1983.

СОДЕРЖАНИЕ

Навчальне видання

Єфимова Галина Олексіївна

Страхов Євген Михайлович

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ
ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Методичні вказівки
для самостійної роботи
до розділів «Дробово-лінійне програмування»,
«Сепарабельне програмування»,
«Квадратичне програмування»)

ДЛЯ СТУДЕНТІВ СПЕЦІАЛЬНОСТІ «ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА»

(російською мовою)

За редакцією авторів

Підп. до друку 11.12.2015. Формат 60х84/16.
Ум.-друк. арк. 2,21. Тираж 25.
Зам. № 1282.

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.

Україна, 65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12
Тел. (048) 723-28-39. E-mail: druk@onu.edu.ua