МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ОДЕССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени И. И. МЕЧНИКОВА
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ЭКОНОМИКИ И МЕХАНИКИ

С. А. Щёголев

МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА А. ПУАНКАРЕ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

ОДЕССА
ОНУ
2015

УДК 517.938
ББК 22.161.6
Щ92

Рекомендовано в печать научно-методическим советом
ОНУ имени И. И. Мечникова.
Протокол № 5 от 19.06.2014.

Рецензенты:

В. Г. Попов – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Одесской национальной морской академии;

Ю. И. Бурименко – доктор технических наук, профессор кафедры управления проектами и системного анализа Одесской национальной академии связи имени А. С. Попова;

А. В. Плотников – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной, вычислительной математики и САПР Одесской государственной академии строительства и архитектуры.

Щёголев С. А.
Щ92 **Метод малого параметра А. Пуанкаре в теории нелинейных колебаний**: учебно-методическое пособие / С. А. Щёголев. - Одесса : «Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова», 2015. – 148 с.
ISBN 978-617-689-130-7

Данное пособие состоит из 3-х глав и посвящено основам метода малого параметра А. Пуанкаре построения периодических решений квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка и систем дифференциальных уравнений n-го порядка с постоянной матрицей коэффициентов линейной части. Рассмотрены нерезонансные и резонансные случаи. Изложение теоретического материала иллюстрируется на примерах конкретных уравнений и систем.

Для студентов 3-го курса ИМЭМ специальности «математика» в качестве учебно-методического пособия по спецкурсу.

УДК 517.938
ББК 22.161.6

ISBN 978-617-689- 130-7

Введение
Предмет теории колебаний

Теория колебаний (ТК) – это наука, изучающая наиболее общие закономерности колебательных процессов вне зависимости от физической природы систем, в которых эти процессы происходят.

Таким образом, в ведении ТК оказываются процессы, происходящие в механических, электрических и других системах. Она охватывает и теорию движения планет, теорию радиосвязи, акустику, оптику, динамическую теорию приливов, задачи экономического характера и многие другие сферы.

Одним из главных признаков колебательного процесса является его *периодичность*, т. е. повторяемость через определённые промежутки времени. В то же время ТК занимается также почти-периодическими процессами и некоторыми видами непериодических процессов.

По сути ТК можно рассматривать как один из разделов теоретической физики. В то же время назвать её разделом трудно, поскольку ТК объединяет, обобщает различные области физики. По выражению Л. И. Мандельштама, ТК – это интернациональный язык физики. Не случайно в знаменитом 10-томном «Курсе теоретической физики» Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица нет отдельного тома, посвящённого теории колебаний. Она пронизывает всю физику, осуществляет, как бы её горизонтальный срез.

Однако, математический аппарат, используемый здесь, настолько обширный, что позволяет говорить именно о *математической* теории колебаний. В основном это аппарат теории дифференциальных уравнений. В связи со сказанным можно выделить два основных направления ТК.

Первое из них – изучение физики колебаний. Здесь основное внимание сосредотачивается на физической сущности изучаемого явления. Для этого направления характерна не разработка новых методов, а группирование различных известных методов исследования физических задач. В развитие этого направления большой вклад сделали такие учёные, как Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси, Г. С. Горелик, С. М. Рытов, М. И. Рабинович, В. В. Мигулин и другие.

Второе направление – разработка общего математического аппарата ТК. Здесь интерес, прежде всего, представляет не физическая сущность, а формы колебательных закономерностей любой природы, записанные в математической форме. Это направление в свою очередь распадается ещё на две ветви: первая из них связана с аналитическими и асимптотическими методами теории дифференциальных уравнений, и берёт своё начало с работ А. Пуанкаре, а также Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова. В настоящее время это направление интенсивно развивается киевской математической школой (Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк, Р. И. Петришин, Ю. В. Теплинский и др.), а также московскими математиками (Н. Н. Моисеев, Е. А. Гребеников, Ю. А. Рябов, Б. В. Булгаков, Н. Х. Розов и др.).

Вторая ветвь опирается на качественную теорию дифференциальных уравнений, основы которой были разработаны А. Пуанкаре. Методы этого направления разрабатывались Л. И. Мандельштамом и его учениками А. А. Андроновым, Н. Н. Баутиным, Ю. И. Неймарком и др. Важную роль играют вопросы устойчивости полученных решений, и здесь первостепенное значение имеет теория устойчивости движения, разработанная А. М. Ляпуновым.

Колебательные процессы издавна привлекали внимание учёных. Ещё в начале XVII века Г. Галилей изучал колебания маятника и изобрёл часы с маятником, точность которых была значительно выше, чем у догалилеевых часов без маятника. Во второй половине XVII века Х. Гюйгенс продолжил исследования часового механизма. Задачей о колебаниях физического маятника, задачей о колебаниях струны занимался также Иоганн I Бернулли.

Основоположником теории колебаний как самостоятельной науки, по-видимому, можно считать Дж. В. Стретта (лорд Рэлей). В своём труде «Теория звука» он дал много примеров описания акустических, механических и других систем. Нужно отметить, что Рэлей исследовал преимущественно *линейные* колебания.

Развитие радиосвязи и физические задачи, возникшие в связи с этим, поставили проблему изучения *нелинейных* колебаний. Первые значительные результаты в этой области принадлежат Ван-дер-Полю (Голландия), Баркгаузену и Мёллеру (Германия), Эпплтону (Англия), Кога (Япония), Льенару и Картану (Франция), Мандельштаму, Папалекси, Крылову, Боголюбову (СССР).

В настоящее время теория колебаний представляет собой обширную и интенсивно развивающуюся область математики, имеющую, как теоретическое, так и прикладное значение.

Глава 1
Колебания, описываемые квазилинейным дифференциальным уравнением 2-го порядка

1.1. Теорема Пуанкаре о существовании периодического решения дифференциального уравнения 2-го порядка

Рассмотрим дифференциальное уравнение, зависящее от так называемого *малого параметра* $\mu \geq 0$. Под малым параметром мы понимаем величину, которая в определённом смысле является малой по сравнению с другими величинами, фигурирующими в данной задаче. Разумеется, что «малость» – понятие относительное. При одних условиях значение, например, $\mu = 0{,}1$ может быть малым, а при других таковым вовсе не являться. В задачах небесной механики, например, в качестве малого параметра может фигурировать отношение массы Земли к массе Солнца. Итак, рассмотрим дифференциальное уравнение следующего вида:

$$\ddot{x} = f\left(t, x, \dot{x}, \mu\right). \tag{1.1.1}$$

В общем случае уравнение (1.1.1) в квадратурах проинтегрировать не удаётся. По известному афоризму, «ни одно уважающее себя дифференциальное уравнение, встречающееся в приложениях, не интегрируется в квадратурах». Поэтому предполагают, что уравнение (1.1.1) в каком-то смысле близко к интегрируемому. Эта близость может быть осуществлена как раз за счёт малого параметра μ. А именно, положим в уравнении (1.1.1) $\mu = 0$. Тогда получим уравнение:

$$\ddot{x}_0 = f\left(t, x_0, \dot{x}_0, 0\right), \tag{1.1.2}$$

которое назовём *порождающим*. Обычно предполагается, что уравнение (1.1.2) относится к интегрируемому типу, например, является линейным уравнением с постоянными коэффициентами. Тогда при малых значениях μ уравнение (1.1.1) будет в определённом смысле близким к уравнению (1.1.2), а тогда можно ожидать, что при определённых условиях и решение уравнения (1.1.1) будет близким к решению уравнения (1.1.2).

Будем предполагать функцию $f\left(t, x, \dot{x}, \mu\right)$ непрерывной и 2π-периодической по t и аналитической по $x, \dot{x}, \mu$ в некоторой области изменения $x, \dot{x}$ и при достаточно малых значениях параметра μ. Изучим задачу о существовании 2π-периодических решений уравнения (1.1.1).

Предположим, что уравнение (1.1.2) имеет единственное 2π-периодическое решение $x_0 = \varphi_0(t)$, которое назовём *порождающим решением*. Выясним, при каких условиях уравнение (1.1.1) также имеет единственное 2π-периодическое решение $x = \varphi(t, \mu)$ такое, что

$$\lim_{\mu \to 0} \varphi(t, \mu) = \varphi_0(t).$$

Рассмотрим решение уравнения (1.1.1), удовлетворяющее начальным условиям:

$$x(t_0) = \varphi_0(t_0) + \beta_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{\varphi}(t_0) + \beta_1.$$

Это решение обозначим $x(t, \beta_0, \beta_1, \mu)$. Величины β_0, β_1 являются отклонениями начальных значений решения $x(t, \beta_0, \beta_1, \mu)$ и его производной от начальных значений $\varphi_0(t_0)$, $\dot{\varphi}(t_0)$ 2π-периодического решения порождающего уравнения.

Если решение $x(t, \beta_0, \beta_1, \mu)$ – 2π-периодическое, то

$$\begin{cases} x(2\pi, \beta_0, \beta_1, \mu) - x(0, \beta_0, \beta_1, \mu) = 0, \\ \dot{x}(2\pi, \beta_0, \beta_1, \mu) - \dot{x}(0, \beta_0, \beta_1, \mu) = 0. \end{cases} \tag{1.1.3}$$

Обозначая правые части этих уравнений через $\Phi_0(\beta_0, \beta_1, \mu)$, $\Phi_1(\beta_0, \beta_1, \mu)$, запишем систему (1.1.3) в виде:

$$\Phi_0(\beta_0, \beta_1, \mu) = 0, \ \Phi_1(\beta_0, \beta_1, \mu) = 0. \tag{1.1.4}$$

Условия (1.1.4), называемые *условиями периодичности*, являются не только необходимыми, но и достаточными для периодичности решения $x(t, \beta_0, \beta_1, \mu)$ уравнения (1.1.1). Действительно, так как $f(t, x, \dot{x}, \mu)$ – 2π-периодична по t, эта функция в точках $(t, x, \dot{x})$, $(t + 2\pi, x, \dot{x})$ принимает одинаковые значения. Следовательно, если в точках $t = 0$, $t = 2\pi$ задать одинаковые начальные значения x_0, $\dot{x}_0$, то ими в полосах $0 \le t \le 2\pi$, $2\pi \le t \le 4\pi$,. . ., $2n\pi \le t \le 2(n+1)\pi$,. . . определяются одинаковые интегральные кривые.

Из теоремы о неявных функциях следует, что если якобиан

$$\frac{D(\Phi_0,\Phi_1)}{D(\beta_0,\beta_1)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\Phi_0}{\partial\beta_0} & \dfrac{\partial\Phi_0}{\partial\beta_1}\\ \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\beta_0} & \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\beta_1}\end{vmatrix}\neq 0$$

в точке $\beta_0=\beta_1=\mu=0$, то при достаточно малом μ существует единственная пара функций $\beta_0(\mu)$, $\beta_1(\mu)$, удовлетворяющих условиям (1.1.4) и стремящихся к нулю при $\mu\to 0$. Следовательно при указанных условиях существует единственное 2π-периодическое решение уравнения (1.1.1), стремящееся к порождающему $\varphi_0(t)$ при $\mu\to 0$, и это решение будет аналитическим по μ. Это утверждение и составляет содержание теоремы Пуанкаре.

Пример. Рассмотрим квазилинейное дифференциальное 2-го порядка:

$$\ddot{x}+\omega^2 x=f(t)+\mu F(t,x,\dot{x},\mu), \tag{1.1.5}$$

где функция $f(t)$ – непрерывная и 2π-периодическая, а функция $F(t,x,\dot{x},\mu)$ – непрерывная и 2π-периодическая по t и аналитическая по $x,\dot{x},\mu$ в некоторой области изменения $x,\dot{x}$ и при достаточно малых $\mu\geq 0$.

Решение $x(t,\beta_0,\beta_1,\mu)$ ищем в виде:

$$x(t,\beta_0,\beta_1,\mu)=x_0(t)+x_{11}(t)\beta_0+x_{12}(t)\beta_1+x_{13}(t)\mu+\ldots\ , \tag{1.1.6}$$

где $x_0(t)$ – порождающее решение. В данном случае порождающее уравнение представляет собой линейное неоднородное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Подставляя выражение (1.1.6) в уравнение (1.1.5), и, сравнивая коэффициенты при β_0,β_1,μ, получим:

$$\begin{cases}\ddot{x}_{11}+\omega^2x_{11}=0, & x_{11}(0)=1, \quad \dot{x}_{11}(0)=0,\\ \ddot{x}_{12}+\omega^2x_{12}=0, & x_{12}(0)=0, \quad \dot{x}_{12}(0)=1.\end{cases} \tag{1.1.7}$$

Отсюда $x_{11}(t)=\cos\omega t,\quad x_{12}(t)=\dfrac{1}{\omega}\sin\omega t$.

Условия периодичности (1.1.4) в данном случае имеют вид:

$$\begin{cases} (\cos 2\omega\pi - 1)\beta_0 + \dfrac{1}{\omega}(\sin 2\omega\pi)\beta_1 + \ldots = 0, \\ -\omega(\sin 2\omega\pi)\beta_0 + (\cos 2\omega\pi - 1)\beta_1 + \ldots = 0. \end{cases}$$

Невыписанные члены не влияют на величину определителя. Имеем:

$$\left.\frac{D(\Phi_0,\Phi_1)}{D(\beta_0,\beta_1)}\right|_{\beta_0=\beta_1=\mu=0} = (\cos 2\omega\pi - 1)^2 + \sin^2 2\omega\pi \neq 0,$$

если только ω отлично от целого числа. Такой случай в теории колебаний называется *нерезонансным*. Таким образом в нерезонансном случае уравнение (1.1.5) при достаточно малых значениях параметра μ имеет единственное 2π-периодическое решение, и это решение аналитично относительно μ.

1.2. Нахождение 2π-периодического решения уравнения $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu)$ методом малого параметра в нерезонансном случае

Рассмотрим уравнение:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu). \tag{1.2.1}$$

Будем предполагать, что ω отлично от целого числа (нерезонансный случай), а непрерывная функция $f(t)$ является 2π-периодической. Функция F является 2π-периодической по t и аналитической по $x, \dot{x}$ в некоторой области изменения этих переменных и при достаточно малых значениях μ. Начнём с того, что построим 2π-периодическое решение порождающего уравнения:

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = f(t). \tag{1.2.2}$$

Разложим функцию $f(t)$ в ряд Фурье:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt,\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt \quad (n = 1,2,3,\ldots).$$

Будем искать интересующее нас решение также в виде ряда Фурье с неопределёнными пока коэффициентами:

$$x_0 = \varphi(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt.$$

Подставляя это выражение в уравнение (1.2.2), и, приравнивая коэффициенты при *одинаковых гармониках* (т.е. при $\cos nt,\ \sin nt$), получаем:

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{\omega^2},\ \alpha_n = \frac{a_n}{\omega^2 - n^2},\ \beta_n = \frac{b_n}{\omega^2 - n^2}$$

(поскольку ω отлично от целого числа, то знаменатели в этих выражениях отличны от нуля). Таким образом, порождающее решение имеет вид:

$$x_0 = \varphi(t) = \frac{a_0}{2\omega^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\omega^2 - n^2}\cos nt + \frac{b_n}{\omega^2 - n^2}\sin nt.$$

Убедимся в том, что других 2π-периодических решений уравнение (1.2.2) не имеет. В самом деле, общее решение уравнения (1.2.2) имеет вид:

$$x = \varphi(t) + C_1\cos\omega t + C_2 \sin\omega t,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Но период функций $\cos\omega t, \sin\omega t$ равен $2\pi/\omega$, и, поскольку ω не равно целому числу, то эти функции не могут быть 2π-периодическими.

Перейдём теперь к построению 2π-периодического решения квазилинейного уравнения (1.2.1). Будем искать его решение в виде степенного ряда по степеням малого параметра μ:

$$x(t,\mu) = x_0(t) + x_1(t)\mu + x_2(t)\mu^2 + \ldots + x_n(t)\mu^n + \ldots \qquad (1.2.3)$$

Подставляя ряд (1.2.3) в уравнение (1.2.1), и, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ в левой и правой частях, получим цепочку уравнений для определения коэффициентов ряда (1.2.3):

$$
\begin{aligned}
&\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = f(t),\\
&\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = (F),\\
&\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x}_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \mu}\right),\\
&\ddot{x}_3 + \omega^2 x_3 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) x_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x}_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) x_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\right)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2}\right) +\\
&+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}}\right) x_1 \dot{x}_1 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu}\right) x_1 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial \mu}\right)\dot{x}_1,\\
&\cdots\\
&\ddot{x}_n + \omega^2 x_n = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) x_{n-1} + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x}_{n-1} + G_n\left(t, x_0, \dot{x}_0, \ldots, x_{n-2}, \dot{x}_{n-2}\right), \qquad (1.2.4)\\
&n = 4, 5, \ldots,\\
&\cdots
\end{aligned}
$$

Здесь символом (F) обозначено $F(t, x_0, \dot{x}_0, 0)$ (результат подстановки в функцию F порождающего решения). G_n $(n = 4, 5, \ldots)$ – некоторые полиномы относительно $x_0, \dot{x}_0, \ldots, x_{n-2}, \dot{x}_{n-2}$ с 2π-периодическими коэффициентами. Отметим также то важное обстоятельство (важность его проявится особенно в дальнейшем, при рассмотрении резонансного случая), что полином G_n не зависит от x_{n-1}, $\dot{x}_{n-1}$, а зависит лишь от предыдущих коэффициентов ряда (1.2.3).

Если, в частности, функция F не зависит явно от μ, что характерно для многих уравнений нелинейной механики, то уравнения (1.2.4) принимают более простой вид.

Каждое из уравнений цепочки (1.2.4) представляет собой линейное неоднородное уравнение вида (1.2.2), причём отличие лишь в правых их частях. Первое из уравнений этой цепочки и есть порождающее уравнение (1.2.2). Находя его 2π-периодическое решение $x_0(t)$ описанным выше способом, подставим его в правую часть второго уравнения цепочки. Таким образом эта правая часть $F(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), 0)$ будет известной 2π-периодической функцией переменной t. Найдя аналогичным образом 2π-периодическое решение $x_1(t)$ второго уравнения, подставим его и $x_0(t)$ в правую часть третьего и найдём его 2π-периодическое решение и т.д. Таким образом можно последовательно найти коэффициенты ряда (1.2.3) для любого n.

Пример. Найти приближённо методом малого параметра 2π-периодическое решение уравнения Дюффинга, ограничившись тремя первыми членами ряда (1.2.3).

Известное в нелинейной механике уравнение Дюффинга имеет вид:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \lambda \sin t + \mu x^3. \qquad (1.2.5)$$

Соответствующее порождающее уравнение

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = \lambda \sin t$$

имеет единственное 2π-периодическое решение

$$x_0(t) = \frac{\lambda}{\omega^2 - 1} \sin t.$$

Напоминаем, что мы рассматриваем нерезонансный случай, т.е. ω не равно целому числу, и, следовательно, в этой и в последующих формулах все знаменатели отличны от нуля.

Искомое 2π-периодическое решение уравнения (1.2.5) ищем в виде ряда (1.2.3). Тогда в соответствии с (1.2.4) для коэффициентов этого ряда получим уравнения:

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = x_0^3,$$
$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = 3x_0^2 x_1,$$
$$\ldots$$

Используя известные тригонометрические соотношения, получим:

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \frac{3\lambda^3}{4\left(\omega^2 - 1\right)^3} \sin t - \frac{\lambda^3}{4\left(\omega^2 - 1\right)^3} \sin 3t.$$

Отсюда методом неопределённых коэффициентов легко получить, что 2π-периодическое решение этого уравнения имеет вид:

$$x_1(t) = \frac{3\lambda^3}{4\left(\omega^2 - 1\right)^4} \sin t - \frac{\lambda^3}{4\left(\omega^2 - 1\right)^3\left(\omega^2 - 9\right)} \sin 3t.$$

Подставляя это выражение в правую часть уравнения для x_2, и, проводя необходимые выкладки, получаем:

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = A\sin t - B\sin 3t + C\sin 5t\,,$$

где

$$A = \frac{3\lambda^5\left(\omega^2 - 7\right)}{4\left(\omega^2 - 1\right)^6\left(\omega^2 - 9\right)},\; B = \frac{3\lambda^5\left(5\omega^2 - 29\right)}{16\left(\omega^2 - 1\right)^6\left(\omega^2 - 9\right)},\; C = \frac{3\lambda^5}{16\left(\omega^2 - 1\right)^5\left(\omega^2 - 9\right)}.$$

Снова применяя метод неопределённых коэффициентов, и, проводя необходимые выкладки, получаем:

$$x_2\left(t\right) = \frac{A}{\omega^2 - 1}\sin t - \frac{B}{\omega^2 - 9}\sin 3t + \frac{C}{\omega^2 - 25}\sin 5t\,.$$

Следовательно искомое 2π-периодическое решение уравнения (1.2.5) имеет вид:

$$x\left(t,\mu\right) = \frac{\lambda}{\omega^2 - 1}\sin t + \mu\left(\frac{3\lambda^3}{4\left(\omega^2 - 1\right)^4}\sin t - \frac{\lambda^3}{4\left(\omega^2 - 1\right)^3\left(\omega^2 - 9\right)}\sin 3t\right) +$$
$$+\mu^2\left(\frac{A}{\omega^2 - 1}\sin t - \frac{B}{\omega^2 - 9}\sin 3t + \frac{C}{\omega^2 - 25}\sin 5t\right) + \ldots$$

Невыписанные слагаемые содержат μ в степенях выше второй.

Уже этот пример показывает, что с ростом n формулы для коэффициентов ряда (1.2.3) становятся всё более громоздкими. Поэтому на практике эффективно могут быть найдены лишь несколько первых коэффициентов этого ряда, ими, как правило, и ограничиваются. Если параметр μ достаточно мал, то найденная таким образом частичная сумма ряда (1.2.3) даёт хорошее приближение к искомому решению.

1.3. Колебания неавтономной системы при резонансе Условия существования периодических решений

Рассмотрим снова уравнение:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f\left(t\right) + \mu F\left(t, x, \dot{x}, \mu\right), \tag{1.3.1}$$

где функции f, F такие же, как и в уравнении (1.2.1), но на этот раз предположим, что ω или совпадает с целым числом, или близко к нему. Такой случай называется *резонансным* (частота вынуждающей силы совпадает с собственной частотой колебаний), и вся теория, изложенная в предыдущих параграфах, не «проходит», поскольку определитель

$$\left.\frac{D\left(\Phi_0,\Phi_1\right)}{D\left(\beta_0,\beta_1\right)}\right|_{\beta_0=\beta_1=\mu=0}=\left(\cos 2\omega\pi-1\right)^2+\sin^2 2\omega\pi$$

(см. п. 1.1) на этот раз равен нулю или близок к нему. В знаменателях формул, определяющих решение, появляются нули или величины близкие к нулю, т.е. возникает так называемая *проблема малых знаменателей*. Поэтому условия существования 2π-периодических решений для уравнения (1.3.1) будут принципиально иными, нежели для уравнения (1.2.1). Итак, предположим выполнение следующих условий:

$$\omega^2-n^2=\mu a,\;\; a_n=\mu a_n',\;\; b_n=\mu b_n'.$$

Тогда уравнение (1.3.1) можем переписать в виде:

$$\ddot{x}+n^2x=g\left(t\right)+\mu G\left(t,x,\dot{x},\mu\right), \tag{1.3.2}$$

где функция $g\left(t\right)$ не содержит n-ых (резонансных) гармоник:

$$g\left(t\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\substack{k=1\\(k\neq n)}}^{\infty}a_k\cos kt+b_k\sin kt\,.$$

Рассмотрим порождающее уравнение:

$$\ddot{x}_0+n^2x_0=g\left(t\right). \tag{1.3.3}$$

Его общее решение имеет вид:

$$x_0=\varphi\left(t\right)+M_0\cos nt+N_0\sin nt\,, \tag{1.3.4}$$

где

$$\varphi(t)=\frac{a_0}{2n^2}+\sum_{\substack{k=1\\(k\neq n)}}^{\infty}\frac{a_k\cos kt+b_k\sin kt}{n^2-k^2}.$$

Таким образом, уравнение (1.3.3) имеет целое семейство 2π-периодических решений (в отличие от нерезонансного случая).

Примем в качестве порождающего одно из решений семейства (1.3.3), отвечающее каким-нибудь конкретным значениям постоянных M_0, N_0, и выясним, при каких условиях уравнение (1.3.2) имеет 2π-периодическое решение, обращающееся при $\mu=0$ в порождающее.

Обозначим искомое 2π-периодическое решение уравнения (1.3.2) через $x(t,\beta_1,\beta_2,\mu)$, предполагая, что:

$$\begin{cases} x(0,\beta_1,\beta_2,\mu)=x_0(0)+\beta_1, \\ \dot{x}(0,\beta_1,\beta_2,\mu)=\dot{x}_0(0)+\beta_2, \end{cases} \tag{1.3.5}$$

$\beta_j=\beta_j(\mu)\ (j=1,2)$.

Разложим $x(t,\beta_1,\beta_2,\mu)$ по степеням β_1,β_2,μ в окрестности $x_0(t)$:

$$\begin{gathered} x(t,\beta_1,\beta_2,\mu)=x_0(t)+A(t)\beta_1+B(t)\beta_2+C(t)\mu+ \\ +\mu\big(D(t)\beta_1+E(t)\beta_2+F(t)\mu\big)+\ldots \end{gathered} \tag{1.3.6}$$

Введём обозначение:

$$[f]=f(2\pi)-f(0).$$

Для того, чтобы функция (1.3.6) была 2π-периодической, необходимо и достаточно, чтобы β_1,β_2 удовлетворяли системе:

$$\begin{cases} \phi_1(\beta_1,\beta_2,\mu)=x(2\pi,\beta_1,\beta_2,\mu)-x(0,\beta_1,\beta_2,\mu)=0, \\ \phi_2(\beta_1,\beta_2,\mu)=\dot{x}(2\pi,\beta_1,\beta_2,\mu)-\dot{x}(0,\beta_1,\beta_2,\mu)=0. \end{cases} \tag{1.3.7}$$

Повторяя теперь рассуждения, аналогичные проведенным в нерезонансном случае, получим:

$$\frac{d^2A}{dt^2}+n^2A=0,\quad A(0)=1,\quad \dot{A}(0)=0,$$

$$\frac{d^2B}{dt^2}+n^2B=0,\quad B(0)=0,\quad \dot{B}(0)=1,$$

откуда

$$A=\cos nt,\quad B=\frac{1}{n}\sin nt .$$

Тогда $[A]=[\dot{A}]=[B]=[\dot{B}]=0$, и уравнения (1.3.7) принимают вид:

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_1(\beta_1,\beta_2,\mu)=\mu\big([C]+[D]\beta_1+[E]\beta_2+[F]\mu+\ldots\big)=0,\\ \tilde{\phi}_2(\beta_1,\beta_2,\mu)=\mu\big([\dot{C}]+[\dot{D}]\beta_1+[\dot{E}]\beta_2+[\dot{F}]\mu+\ldots\big)=0. \end{cases} \tag{1.3.8}$$

Нужно найти такие решения $\beta_1(\mu)$, $\beta_2(\mu)$ уравнений (1.3.8), которые обращались бы в нуль при $\mu=0$. По этой причине уравнения (1.3.8) нельзя сократить на μ, поскольку в этом случае в них будут присутствовать свободные члены $[C]$ и $[\dot{C}]$, и тогда эти уравнения не будут удовлетворяться при $\beta_1=\beta_2=\mu=0$. Поэтому нужно потребовать, чтобы

$$[C]=[\dot{C}]=0. \tag{1.3.9}$$

Подставив выражение (1.3.6) в уравнение (1.3.2), приравняем коэффициенты при μ. Получим:

$$\frac{d^2C}{dt^2}+n^2C=G(t,x_0,\dot{x}_0,0). \tag{1.3.10}$$

Начальные условия (1.3.5) дают:

$$C(0)=\dot{C}(0)=0. \tag{1.3.11}$$

Методом вариации произвольных постоянных несложно показать, что решение уравнения (1.3.10) с начальными условиями (1.3.11) имеет вид:

$$C(t)=\frac{1}{n}\int_0^t G\big(\tau,x_0(\tau),\dot{x}_0(\tau),0\big)\sin\big(n(t-\tau)\big)d\tau,$$

$$\dot{C}(t)=\int_0^t G\left(\tau,x_0(\tau),\dot{x}_0(\tau),0\right)\cos\left(n(t-\tau)\right)d\tau .$$

Учитывая (1.3.4) и подставляя в (1.3.9), имеем:

$$\begin{cases} P\left(M_0,N_0\right)=0, \\ Q\left(M_0,N_0\right)=0, \end{cases} \qquad (1.3.12)$$

где

$$P=\int_0^{2\pi} G\left(\tau,x_0\left(\tau,M_0,N_0\right),\dot{x}\left(\tau,M_0,N_0\right),0\right)\sin n\tau d\tau,$$

$$Q=\int_0^{2\pi} G\left(\tau,x_0\left(\tau,M_0,N_0\right),\dot{x}_0\left(\tau,M_0,N_0\right),0\right)\cos n\tau d\tau .$$

В литературе по нелинейной механике уравнения (1.3.12) называются *уравнениями для порождающих амплитуд*. Если M_0, N_0 выбраны из системы (1.3.12), то уравнения (1.3.8) принимают вид:

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_1=[D]\beta_1+[E]\beta_2+[C]\mu+\ldots=0, \\ \tilde{\phi}_2=\left[\dot{D}\right]\beta_1+\left[\dot{E}\right]\beta_2+\left[\dot{C}\right]\mu+\ldots=0. \end{cases} \qquad (1.3.13)$$

Отсюда:

$$\Delta=\left.\frac{\partial\left(\tilde{\phi}_1,\tilde{\phi}_2\right)}{\partial\left(\beta_1,\beta_2\right)}\right|_{\beta_1=\beta_2=\mu=0}=\begin{vmatrix} [D] & [E] \\ \left[\dot{D}\right] & \left[\dot{E}\right] \end{vmatrix}.$$

Если $\Delta\neq 0$, то на основании теоремы о неявных функциях система (1.3.13), а значит и система (1.3.8) имеет единственное решение $\beta_j=\beta_j\left(\mu\right)$, $\beta_j\left(0\right)=0 \ \left(j=1,2\right)$, и это решение аналитично относительно μ. Следовательно для каждого порождающего решения, для которого постоянные M_0, N_0 выбраны из системы (1.3.12), и для которого $\Delta\neq 0$, существует единственное 2π-периодическое решение уравнения (1.3.2), и это решение также аналитично по μ.

Вычислим определитель Δ. Подставляя ряд (1.3.6) в уравнение (1.3.2), и, приравнивая коэффициенты при $\beta_1\mu,\ \beta_2\mu$, получим, что функции $D(t)$ и $E(t)$ должны удовлетворять уравнениям:

$$\frac{d^2D}{dt^2}+n^2D=\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)\cos nt-n\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\right)\sin nt,$$
$$\frac{d^2E}{dt^2}+n^2E=\frac{1}{n}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)\sin nt+\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\right)\cos nt.$$

Круглые скобки означают, что $\partial G/\partial x$, $\partial G/\partial \dot{x}$ вычисляются на порождающем решении.

Начальные условия (1.3.5) дают:

$$D(0)=\dot{D}(0)=E(0)=\dot{E}(0)=0.$$

Отсюда:

$$D=\frac{1}{n}\int_0^t\left\{\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{t=\tau}\cos n\tau-n\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\right)_{t=\tau}\sin n\tau\right\}\sin n(t-\tau)\,d\tau,$$
$$\dot{D}=\int_0^t\left\{\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{t=\tau}\cos n\tau-n\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\right)_{t=\tau}\sin n\tau\right\}\cos n(t-\tau)\,d\tau.$$

Следовательно

$$[D]=-\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{t=\tau}\cos n\tau-n\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\right)_{t=\tau}\sin n\tau\right\}\sin n\tau\,d\tau,$$
$$[\dot{D}]=\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{t=\tau}\cos n\tau-n\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\right)_{t=\tau}\sin n\tau\right\}\cos n\tau\,d\tau.$$

Сравнивая эти выражения с выражениями для функций $P(M_0,N_0)$, $Q(M_0,N_0)$, легко убедиться в справедливости равенств:

$$[D]=-\frac{1}{n}\cdot\frac{\partial P}{\partial M_0},\quad [\dot{D}]=\frac{\partial Q}{\partial M_0}.$$

Аналогично получаем, что

$$\left[E\right]=-\frac{1}{n^2}\cdot\frac{\partial P}{\partial N_0},\ \left[\dot{E}\right]=\frac{1}{n}\cdot\frac{\partial Q}{\partial N_0}.$$

Следовательно условие $\Delta\neq 0$ эквивалентно условию:

$$\frac{\partial\left(P,Q\right)}{\partial\left(M_0,N_0\right)}\neq 0.$$

Пусть m величин $x_1,x_2,\ldots,x_m$ удовлетворяют системе m уравнений:

$$f_j\left(x_1,x_2,\ldots,x_m\right)=0,\ j=\overline{1,m}. \tag{1.3.14}$$

Будем говорить, что величины $x_1,x_2,\ldots,x_m$ образуют *простое решение* системы (1.3.14), если

$$\frac{\partial\left(f_1,\ldots,f_m\right)}{\partial\left(x_1,\ldots,x_m\right)}\neq 0.$$

Тогда полученные результаты можно сформулировать так.

Теорема. *Для того, чтобы порождающему решению (1.3.4) соответствовало 2π-периодическое решение уравнения (1.3.2), необходимо, чтобы постоянные M_0, N_0 удовлетворяли системе (1.3.12). Каждому простому решению этой системы при достаточно малом μ отвечает 2π-периодическое решение уравнения (1.3.2), и это решение аналитично по μ.*

1.4. Колебания неавтономной системы при резонансе Нахождение периодического решения

Перейдём теперь к вопросу практического нахождения периодических решений квазилинейного уравнения в резонансном случае. Рассмотрим уравнение:

$$\ddot{x}+n^2x=f\left(t\right)+\mu F\left(t,x,\dot{x},\mu\right). \tag{1.4.1}$$

Решение уравнения (1.4.1) ищем в виде степенного ряда

$$x(t,\mu)=x_0(t)+\mu x_1(t)+\mu^2 x_2(t)+\ldots+\mu^m x_m(t)+\ldots \qquad (1.4.2)$$

Для коэффициентов этого ряда получаем уравнения

$$\ddot{x}_0+n^2x_0=f(t),$$
$$\ddot{x}_1+n^2x_1=(F),$$
$$\ddot{x}_2+n^2x_2=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)x_1+\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x}_1+\left(\frac{\partial F}{\partial \mu}\right),$$
$$\ddot{x}_3+n^2x_3=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)x_2+\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x}_2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)x_1^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\right)\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2}\right)+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial \dot{x}}\right)x_1\dot{x}_1+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial \mu}\right)x_1+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial \mu}\right)\dot{x}_1,$$
$$\ldots$$
$$\ddot{x}_s+n^2x_s=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)x_{s-1}+\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x}_{s-1}+G_s\left(t,x_0,\dot{x}_0,\ldots,x_{s-2},\dot{x}_{s-2}\right), \qquad (1.4.3)$$
$$s=4,5,\ldots$$

Здесь, как и ранее, через (F) обозначено $F(t,x_0,\dot{x}_0,0)$.

Порождающее решение $x_0(t)$ имеет вид (1.3.4), где постоянные M_0, N_0 выбираются из системы уравнений для порождающих амплитуд (1.3.12). Остальные функции $x_k(t)$ $(k=1,2,\ldots)$ имеют вид:

$$x_k(t)=\varphi_k(t)+M_k\cos nt+N_k\sin nt,$$

где $\varphi_k(t)$ – частное 2π-периодическое решение линейного неоднородного уравнения. Относительно выбора постоянных M_k, N_k здесь ситуация несколько иная, нежели в случае порождающего решения. Эти постоянные выбираются из условия отсутствия n-й резонансной гармоники в правой части уравнения, определяющего следующий коэффициент $x_{k+1}(t)$, т. е. из условия отсутствия в ней слагаемых $\cos nt$, $\sin nt$. Но эта правая часть содержит x_k, $\dot{x}_k$ лишь в двух первых, линейных относительно этих функций слагаемых. Поэтому и уравнения, определяющие M_k, N_k $(k=1,2,3,\ldots)$, на этот раз будут линейными (в отличие от системы (1.3.12)), а именно иметь вид:

$$M_k\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\cos nt-n\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\sin nt\right\}\cos ntdt+$$
$$+N_k\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\sin nt+n\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\cos nt\right\}\cos ntdt+$$
$$+\int_0^{2\pi}F_{k+1}^*(\ldots)\cos ntdt=0,$$
$$M_k\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\cos nt-n\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\sin nt\right\}\sin ntdt+$$
$$N_k\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\sin nt+n\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\cos nt\right\}\sin ntdt+$$
$$+\int_0^{2\pi}F_{k+1}^*(\ldots)\sin ntdt=0, \qquad (1.4.4)$$

где

$$F_{k+1}^*=F_{k+1}+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\varphi_k+\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\dot{\varphi}_k.$$

Функция F_{k+1} зависит только от $x_0,\ldots.x_{k-1}$ и их производных.

Определитель системы (1.4.4) совпадает с $\partial(P,Q)/\partial(M_0,N_0)$.

Пример. Рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=\lambda\sin t+\mu\left(1-x^2\right)\frac{dx}{dt}. \qquad (1.4.5)$$

Предположим, что $\omega^2=1+\mu a,\ \lambda=\mu\lambda_0$. Тогда уравнение (1.4.5) перепишется в виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=\mu\left(\lambda_0\sin t+\mu\left(1-x^2\right)\frac{dx}{dt}-ax\right). \qquad (1.4.6)$$

Как видим, свободный член $f(t)\equiv 0$, поэтому порождающее решение имеет вид:

$$x_0=M_0\cos t+N_0\sin t. \qquad (1.4.7)$$

Решение уравнения (1.4.6) ищем в виде:

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \ldots \tag{1.4.8}$$

Подставляя (1.4.8) в уравнение (1.4.6), и, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ в левой и правой частях, получаем:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 = \lambda_0 \sin t + \mu\left(1 - x_0^2\right)\frac{dx_0}{dt} - a x_0, \tag{1.4.9}$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega^2 x_2 = -2 x_0 \dot{x}_0 x_1 + \left(1 - x_0^2\right)\frac{dx_0}{dt} - a x_1. \tag{1.4.10}$$

Подставив в уравнение (1.4.9) выражение (1.4.7), после очевидных преобразований получим:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 = \left(-aM_0 + N_0 - \frac{1}{4}N_0 M_0^2 - \frac{1}{4}N_0^3\right)\cos t +$$
$$+\left(\lambda_0 - M_0 - aN_0 + \frac{1}{4}M_0^3 + \frac{1}{4}M_0 N_0^2\right)\sin t +$$
$$+\frac{1}{4}N_0\left(N_0^2 - 3M_0^2\right)\cos 3t + \frac{1}{4}M_0\left(M_0^2 - 3N_0^2\right)\sin 3t.$$

Приравняем к нулю коэффициенты при $\sin t$, $\cos t$, т.е. так называемые первые гармоники, являющиеся в данном случае резонансными:

$$\begin{cases} P\left(M_0, N_0\right) = -aM_0 + N_0 - \frac{1}{4}N_0 M_0^2 - \frac{1}{4}N_0^3 = 0, \\ Q\left(M_0, N_0\right) = \lambda_0 - M_0 - aN_0 + \frac{1}{4}M_0^3 + \frac{1}{4}M_0 N_0^2 = 0. \end{cases} \tag{1.4.11}$$

Допустим, что M_0, N_0 выбраны из системы (1.4.11). Тогда общее решение уравнения (1.4.9) будет 2π-периодическим и иметь вид:

$$x_1 = M_1 \cos t + N_1 \sin t + \frac{1}{32}N_0\left(3M_0^2 - N_0^2\right)\cos 3t + \frac{1}{32}M_0\left(3N_0^2 - M_0^2\right)\sin 3t,$$

где M_1, N_1 – произвольные постоянные. Подставим x_1 в уравнение (1.4.10), в результате чего будем иметь:

$$\frac{d^2x_2}{dt^2}+x_2=$$

$$=\left[\left(-\frac{1}{2}M_0N_0-a\right)M_1+\left(1-\frac{1}{4}M_0^2-\frac{3}{4}N_0^2\right)N_1+\frac{1}{128}M_0\left(M_0^2+N_0^2\right)^2\right]\cos t+$$

$$+\left[\left(-1+\frac{3}{4}M_0^2+\frac{1}{4}N_0^2\right)M_1+\left(\frac{1}{2}M_0N_0-a\right)N_1+\frac{1}{128}N_0\left(M_0^2+N_0^2\right)^2\right]\sin t+\dots$$

Невыписанные члены не содержат $\sin t$, $\cos t$. Отсюда получаем систему относительно M_1, N_1:

$$\begin{cases}\left(-\frac{1}{2}M_0N_0-a\right)M_1+\left(1-\frac{1}{4}M_0^2-\frac{3}{4}N_0^2\right)N_1=-\frac{1}{128}M_0\left(M_0^2+N_0^2\right)^2,\\ \left(-1+\frac{3}{4}M_0^2+\frac{1}{4}N_0^2\right)M_1+\left(\frac{1}{2}M_0N_0-a\right)N_1=-\frac{1}{128}N_0\left(M_0^2+N_0^2\right)^2.\end{cases}\tag{1.4.12}$$

Уравнения системы (1.4.12) линейные. Определитель этой системы равен:

$$\Delta=\left(-\frac{1}{2}M_0N_0-a\right)\left(\frac{1}{2}M_0N_0-a\right)-\left(1-\frac{1}{4}M_0^2-\frac{3}{4}N_0^2\right)\left(-1+\frac{3}{4}M_0^2+\frac{1}{4}N_0^2\right)=$$

$$=a^2+1-\left(M_0^2+N_0^2\right)+\frac{3}{16}\left(M_0^2+N_0^2\right)^2.$$

Далее, поскольку

$$\frac{\partial P}{\partial M_0}=-\frac{1}{2}M_0N_0-a,\quad \frac{\partial P}{\partial N_0}=1-\frac{1}{4}M_0^2-\frac{3}{4}N_0^2,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial M_0}=-1+\frac{3}{4}M_0^2+\frac{1}{4}N_0^2,\quad \frac{\partial Q}{\partial N_0}=\frac{1}{2}M_0N_0-a,$$

то якобиан $\partial\left(P,Q\right)/\partial\left(M_0,\,N_0\right)$ совпадает с определителем Δ системы (1.4.12), что и соответствует теоретическому результату.

1.5. Периодические решения квазилинейного уравнения в случае $\omega = 0$

Построения предыдущих двух параграфов применимы и для того случая, когда частота собственных колебаний системы $\omega = 0$. Рассмотрим уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu), \tag{1.5.1}$$

где функция $f(t)$ непрерывная и 2π-периодическая, а F – непрерывная и 2π-периодическая по t и аналитична по $x, \dot{x}, \mu$ в некоторой области изменения величин $x, \dot{x}$ и при достаточно малых значениях параметра μ.

С точки зрения предыдущей теории уравнение (1.5.1) соответствует резонансному случаю, поскольку здесь ω равно целому числу – нулю. Но резонансная гармоника здесь соответственно нулевая, и это порождает некоторые особенности. Начнём с порождающего уравнения:

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = f(t). \tag{1.5.2}$$

Требование отсутствия в правой части нулевой гармоники для существования у уравнения (1.5.2) 2π-периодического решения приводит к условию:

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0. \tag{1.5.3}$$

Т. е. среднее значение функции $f(t)$ на периоде должно обращаться в нуль. Следовательно, разложение в ряд Фурье функции $f(t)$ должно иметь вид:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt \ .$$

Тогда уравнение (1.5.2) имеет семейство 2π-периодических решений:

$$x_0(t) = M_0 + \varphi(t), \tag{1.5.4}$$

где

$$\varphi(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nt + b_n \sin nt}{n^2} \ .$$

Учитывая соотношения

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt,$$

можем записать функцию $\varphi(t)$ в виде:

$$\varphi(t) = L\left[f(t)\right], \tag{1.5.5}$$

где L – линейный интегральный оператор.

То есть порождающее решение зависит от одной произвольной постоянной, а не от двух, как в предыдущих параграфах, хотя уравнение (1.5.2) также второго порядка. Причины этого факта детально раскрываются в главе 2.

2π -периодическое решение уравнения (1.5.1) ищем в виде степенного ряда:

$$x(t,\mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \mu^3 x_3(t) + \ldots \tag{1.5.6}$$

Тогда:

$$\ddot{x}_0 = f(t),$$
$$\ddot{x}_1 = (F),$$
$$\ddot{x}_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x}_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \mu}\right),$$
$$\ddot{x}_3 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)x_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x}_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)x_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\right)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2}\right) +$$
$$+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}}\right)x_1\dot{x}_1 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu}\right)x_1 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial \mu}\right)\dot{x}_1,$$
$$\ddot{x}_4 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)x_3 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x}_3 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)x_1x_2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\right)\dot{x}_1\dot{x}_2 +$$
$$+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}}\right)\left(x_1\dot{x}_2 + x_2\dot{x}_1\right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu}\right)x_2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial \mu}\right)\dot{x}_2 + G_4(t, x_0, \dot{x}_0, x_1, \dot{x}_1),$$

. . .

$$\ddot{x}_s = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)x_{s-1} + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x}_{s-1} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)x_1x_{s-2} +$$
$$+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\right)\dot{x}_1\dot{x}_{s-2} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}}\right)\left(x_1\dot{x}_{s-2} + \dot{x}_1x_{s-2}\right) +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu}\right)x_{s-2}+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial \mu}\right)\dot{x}_{s-2}+G_s\left(t,x_0,\dot{x}_0,\ldots,x_{s-3},\dot{x}_{s-3}\right),\ \ s=4,5,\ldots$$

Здесь, как и ранее, через (F) обозначено $F\left(t,x_0,\dot{x}_0,0\right)$. $G_s\left(t,x_0,\dot{x}_0,\ldots,x_{s-3},\dot{x}_{s-3}\right)$ – полиномы относительно $x_0,\dot{x}_0,\ldots,x_{s-3},\dot{x}_{s-3}$ с 2π-периодическими по t коэффициентами.

Ограничение на константу M_0 в (1.5.4) получается из условия отсутствия нулевой гармоники в функции $F\left(t,x_0,\dot{x}_0,0\right)$, т. е. из условия:

$$P\left(M_0\right)=\int_0^{2\pi} F\left(t,M_0+\varphi(t),\dot{\varphi}(t),0\right)dt=0. \qquad (1.5.7)$$

Каждому простому корню уравнение (1.5.7), т.е. такому, что $P'\left(M_0\right)\neq 0$, будет при достаточно малых μ соответствовать 2π-периодическое решение уравнения (1.5.1), и это решение будет аналитично по μ.

Пример. Рассмотрим уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=l\sin t+\mu x^3. \qquad (1.5.8)$$

Порождающее уравнение

$$\frac{d^2x_0}{dt^2}=l\sin t \qquad (1.5.9)$$

имеет семейство 2π-периодических решений:

$$x_0=-l\sin t+M_0.$$

Подставляя это решение в нелинейность, получим:

$$x_0^3=\left(-l\sin t+M_0\right)^3=M_0^3+\frac{3}{2}M_0l^2-\left(\frac{3}{4}l^3+3M_0^2l\right)\sin t-\frac{3}{2}M_0l^2\cos 2t+$$
$$+\frac{l^3}{4}\sin 3t.$$

Отсюда видно, что среднее значение этой функции:

$$P\left(M_0\right)=M_0^3+\frac{3}{2}M_0l^2.$$

Таким образом, уравнение (1.5.6) примет вид:

$$M_0^3+\frac{3}{2}M_0l^2=0. \tag{1.5.10}$$

Уравнение (1.5.10) имеет корни: $M_{0,1}=0$, $M_{0,2}=-il\sqrt{3/2}$, $M_{0,3}=il\sqrt{3/2}$. Все эти корни простые, т. е. для них:

$$P'\left(M_0\right)=3M_0^2+\frac{3}{2}l^2\neq 0.$$

Следовательно, каждому из этих корней при достаточно малых μ отвечает 2π-периодическое решение уравнения (1.5.8). Возьмём корень $M_0=0$. Тогда:

$$x_0\left(t\right)=-l\sin t.$$

2π-периодическое решение уравнения (1.5.8) ищем в виде:

$$x\left(t,\mu\right)=x_0\left(t\right)+\mu x_1\left(t\right)+\mu^2x_2\left(t\right)+\mu^3x_3\left(t\right)+\ldots$$

Уравнение относительно коэффициента $x_1\left(t\right)$ примет вид:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=-\frac{3}{4}l^3\sin t+\frac{1}{4}l^3\sin 3t.$$

Это уравнение имеет семейство 2π-периодических решений:

$$x_1\left(t\right)=M_1+\frac{3l^3}{4}\sin t-\frac{l^3}{36}\sin 3t.$$

Условия на константу M_1 получим из условия отсутствия нулевой гармоники в правой части уравнения относительно коэффициента $x_2\left(t\right)$(тут учтено, что в данном случае функция $F=x^3$ не зависит явно от μ):

$$\frac{d^2x_2}{dt^2}=\frac{\partial F\left(t,x_0,\dot{x}_0\right)}{\partial x}x_1+\frac{\partial F\left(t,x_0,\dot{x}_0\right)}{\partial \dot{x}}\dot{x}_1=3x_0^2x_1=$$
$$=\frac{3l^2}{2}M_1+\frac{137}{96}l^5\sin t+\ldots$$

(невыписанные слагаемые не содержат нулевой гармоники). То есть для определения константы M_1 получаем уравнение:

$$\frac{3l^2}{2}M_1=0.$$

Обратим внимание, что коэффициент $3l^2/2$ в этом уравнении не что иное, как $P'\left(M_0\right)$ для $M_0=0$. И этот коэффициент отличен от нуля. Поэтому $M_1=0$.

Итак, корню $M_0=0$ уравнения (1.5.10) отвечает при достаточно малых μ 2π-периодическое решение уравнения (1.5.8):

$$x\left(t,\mu\right)=-l\sin t+\mu l^3\left(\frac{3}{4}\sin t-\frac{1}{36}\sin 3t\right)+\mu^2\cdots$$

1.6. Вычисление периодического решения при резонансе в особом случае

Рассмотрим теперь вопрос о построении 2π-периодического решения уравнение (1.5.1) в особом случае, а именно, когда имеет место тождество:

$$P(M_0)=\int_0^{2\pi}F(t,M_0+\varphi(t),\dot{\varphi}(t),0)dt\equiv 0. \tag{1.6.1}$$

Будем, как и прежде, искать 2π-периодическое решение уравнения (1.5.1) в виде ряда:

$$x(t,\mu)=x_0(t)+x_1(t)\mu+x_2(t)\mu^2+x_3(t)\mu^3+\ldots+x_k(t)\mu^k+\ldots \tag{1.6.2}$$

Для функции $x_1(t)$ имеем уравнение:

$$\ddot{x}_1=F(t,x_0(t),\dot{x}_0(t),0). \tag{1.6.3}$$

На этот раз это уравнение имеет 2π-периодическое решение при любом выборе константы M_0 в порождающем решении (1.5.4), поскольку уравнение (1.6.1) удовлетворяется сейчас тождественно. Это решение имеет вид:

$$x_1(t) = M_1 + \varphi_1(t), \tag{1.6.4}$$

где $\varphi_1(t)$ – какое-либо частное 2π-периодическое решение уравнения (1.6.3), а M_1 – произвольная постоянная. И таким образом функция $x_1(t)$ содержит уже две произвольные постоянные M_0 и M_1.

Запишем условия существования 2π-периодического решении уравнения для $x_2(t)$:

$$\int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \left(M_1 + \varphi_1(t) \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \dot{\varphi}_1(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial \mu} \right) \right] dt = 0.$$

Или

$$M_1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) dt + \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \varphi_1(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \dot{\varphi}_1(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial \mu} \right) \right] dt = 0.$$

Но поскольку

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) dt = P'(M_0) = 0, \tag{1.6.5}$$

то получим уравнение, содержащее только константу M_0:

$$Q(M_0) = \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \varphi_1(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \dot{\varphi}_1(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial \mu} \right) \right] dt = 0. \tag{1.6.6}$$

Это и будет уравнение для определения константы M_0 в порождающем решении. В отличие от неособого случая (п. 1.5), оно получилось из условия существования 2π-периодического решения уравнения относительно $x_2(t)$, а не $x_1(t)$.

Найдём:

$$Q'(M_0)=\int\limits_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\varphi_1(t)+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\frac{d\varphi_1(t)}{dM_0}+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial \dot{x}}\right)\dot{\varphi}_1(t)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\frac{d\dot{\varphi}_1(t)}{dM_0}+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial \mu}\right)\right]dt\,.$$

С учётом этого $Q'(M_0)$ перепишется так:

$$Q'(M_0)=\int\limits_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)L\big[(F)\big]+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)L\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial \dot{x}}\right)\frac{d}{dt}\Big(L\big[(F)\big]\Big)+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\frac{d}{dt}\left(L\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\right]\right)+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial \mu}\right)\right]dt\,.$$

Предположим, что уравнение (1.6.6) не удовлетворяется тождественно, и M_0 – какой-либо корень этого уравнения, такой, что:

$$Q'(M_0)\neq 0\,. \tag{1.6.7}$$

Покажем, что в этом случае коэффициенты ряда (1.6.2) определяются однозначно. Составим уравнение для $x_{k+2}(t)$, выделив в нём явно члены, зависящие от $x_k(t)$ и $x_{k+1}(t)$:

$$\ddot{x}_{k+2}=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)x_{k+1}+\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x}_{k+1}+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)x_1x_k+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\right)\dot{x}_1\dot{x}_k+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial \dot{x}}\right)(x_1\dot{x}_k+\dot{x}_1x_k)+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial \mu}\right)x_k+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial \mu}\right)\dot{x}_k+G_{k+2}(t,x_0,\dot{x}_0,\ldots,x_{k-1},\dot{x}_{k-1})\,. \tag{1.6.8}$$

Допустим, что функции $x_0(t),\ldots,x_{k+1}(t)$ уже получились 2π-периодическими. Эти функции имеют вид:

$$x_s(t)=M_s+\varphi_s(t),\quad s=\overline{1,k+1}, \tag{1.6.9}$$

где $\varphi_s(t)$ – какое-либо частное 2π-периодическое решение уравнения для функции $x_s(t)$, а M_s – постоянная, причём константы M_k, M_{k+1} подлежат ещё определению. Чтобы их определить, составим условие существования 2π-периодического решения уравнения (1.6.8). При $k>1$ получим:

$$\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)x_{k+1}+\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x}_{k+1}+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)x_1 x_k+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\right)\dot{x}_1\dot{x}_k+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial \dot{x}}\right)(x_1\dot{x}_k+\dot{x}_1 x_k)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial \mu}\right)x_k+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial \mu}\right)\dot{x}_k+G_{k+2}(t,x_0,\dot{x}_0,\ldots,x_{k-1},\dot{x}_{k-1})\right]dt=0. \qquad (1.6.10)$$

Заменим теперь здесь $x_k(t),\ x_{k+1}(t)$ их выражениями из (1.6.9):

$$M_{k+1}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)dt+\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\varphi_{k+1}(t)+\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\dot{\varphi}_{k+1}(t)+\right.$$

$$+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)(M_1+\varphi_1(t))(M_k+\varphi_k(t))+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\right)\dot{\varphi}_1(t)\dot{\varphi}_k(t)+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial \dot{x}}\right)\big((M_1+\varphi_1(t))\dot{\varphi}_k(t)+\dot{\varphi}_1(t)(M_k+\varphi_k(t))\big)+$$

$$\left.+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial \mu}\right)(M_k+\varphi_k(t))+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial \mu}\right)\dot{\varphi}_k(t)+G_{k+2}(\cdots)\right]dt=0. \qquad (1.6.11)$$

С учётом (1.6.5) величина M_{k+1} здесь исчезает. Раскрывая теперь скобки, и, учитывая, что

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)dt=0,$$

получим:

$$M_k\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\varphi_1(t)+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial \dot{x}}\right)\dot{\varphi}_1(t)+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial \mu}\right)\right]dt+$$

$$+\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\varphi_{k+1}(t)+\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\dot{\varphi}_{k+1}(t)\right]dt+N_k=0, \qquad (1.6.12)$$

где

$$N_k=\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\big(M_1\varphi_k(t)+\varphi_1(t)\varphi_k(t)\big)+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\right)\dot{\varphi}_1(t)\dot{\varphi}_k(t)+\right.$$

$$+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}}\right)\left(M_1 \dot{\varphi}_k(t) + \varphi_1(t)\dot{\varphi}_k(t) + \dot{\varphi}_1(t)\varphi_k(t)\right) +$$

$$\left. +\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu}\right)\varphi_k(t) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial \mu}\right)\dot{\varphi}_k(t) + G_{k+2}(\cdots)\right] dt$$

– определённая постоянная, не зависящая от M_k, M_{k+1}.

Заметим, что постоянная M_k будет содержаться также в функциях $\varphi_{k+1}(t)$, $\dot{\varphi}_{k+1}(t)$, поскольку $\varphi_{k+1}(t)$ является 2π-периодическим решением уравнения, правая часть которого содержит M_k. Установим в явной форме зависимость $\varphi_{k+1}(t)$ от M_k. Для этого $\varphi_{k+1}(t)$ представим в виде:

$$\varphi_{k+1}(t) = \xi_{k+1}(t) + \eta_{k+1}(t), \tag{1.6.13}$$

где $\xi_{k+1}(t)$ – какое-либо частное 2π-периодическое решение уравнения

$$\ddot{\xi}_{k+1} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) M_k, \tag{1.6.14}$$

а $\eta_{k+1}(t)$ – 2π-периодическое решение уравнения:

$$\ddot{\eta}_{k+1} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\varphi_k(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\dot{\varphi}_k(t) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)x_1(t)x_{k-1}(t) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\right)\dot{x}_1(t)\dot{x}_{k-1}(t) +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}}\right)(x_1(t)\dot{x}_{k-1}(t) + \dot{x}_1(t)x_{k-1}(t)) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu}\right)x_{k-1}(t) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial \mu}\right)\dot{x}_{k-1}(t) +$$

$$+G_{k+1}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), \ldots, x_{k-2}(t), \dot{x}_{k-2}(t)). \tag{1.6.15}$$

Поскольку функция $\varphi_{k+1}(t)$ по условиию 2π-периодична, то в случае 2π-периодичности функции $\xi_{k+1}(t)$ автоматически будет 2π-периодичной и функция $\eta_{k+1}(t)$. Условие (1.6.5) гарантирует существование частного 2π-периодического решения уравнения (1.6.14), и это решение имеет вид:

$$\xi_{k+1}(t) = L\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)M_k\right] = M_k L\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\right], \qquad \dot{\xi}_{k+1}(t) = M_k \frac{d}{dt}\left(L\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\right]\right).$$

Тогда уравнение (1.6.12) перепишется так:

$$M_k \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) L[(F)] + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} \right) \frac{d}{dt} \big(L[(F)] \big) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) L\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \right] + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \frac{d}{dt} \left(L\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \right] \right) \right] dt + \tilde{N}_k = 0,$$

где

$$\tilde{N}_k = N_k + \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \eta_{k+1}(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \dot{\eta}_{k+1}(t) \right] dt .$$

Или:

$$Q'(M_0) M_k + \tilde{N}_k = 0 . \qquad (1.6.16)$$

В силу условия (1.6.7) уравнение (1.6.16) имеет единственный корень

$$M_k = -\frac{\tilde{N}_k}{Q'(M_0)} .$$

Итак, мы установили, что для каждого порождающего решения, константа M_0 в котором удовлетворяет уравнению (1.6.6) и условию (1.6.7), существует один и только один ряд (1.6.2), формально удовлетворяющий уравнению (1.5.1). На вопросе о сходимости этого ряда мы здесь не останавливаемся.

Пример. Рассмотрим колебания маятника, описываемые уравнением:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\mu^2 \sin \varphi - \mu b \sin(\varphi - \delta) \cos t , \qquad (1.6.17)$$

где $\varphi = \varphi(t)$ – угол отклонения маятника от вертикали, b, δ – некоторые известные постоянные.

Порождающее уравнение имеет вид:

$$\frac{d^2 \varphi_0}{dt^2} = 0 .$$

Это уравнение имеет 2π-периодическое решение $\varphi_0 = M_0$, зависящее от одной произвольной постоянной M_0. Будем искать 2π-периодическое решение уравнения (1.6.17) в виде ряда:

$$\varphi(t,\mu)=\varphi_0(t)+\mu\varphi_1(t)+\mu^2\varphi_2(t)+\mu^3\varphi_3(t)+\dots \tag{1.6.18}$$

Для $\varphi_1(t)$ получим уравнение:

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}=-b\sin(M_0-\delta)\cos t. \tag{1.6.19}$$

Это уравнение допускает 2π-периодическое решение при любом значении постоянной M_0, т.е. мы имеем дело с особым случаем. Из (1.6.19) находим:

$$\varphi_1(t)=b\cos t\cdot\sin(M_0-\delta)+M_1, \tag{1.6.20}$$

где M_1 – произвольная постоянная. Запишем уравнение относительно функции $\varphi_2(t)$:

$$\frac{d^2\varphi_2}{dt^2}=-\sin M_0-b^2\sin(M_0-\delta)\cos(M_0-\delta)\cos^2 t-M_1 b\cos(M_0-\delta)\cos t.$$

Для того, чтобы это уравнение имело 2π-периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы разложение в ряд Фурье его правой части не содержало нулевой гармоники, т.е. свободного члена. Это даёт:

$$Q(M_0)=-\sin M_0-\frac{b^2}{4}\sin 2(M_0-\delta)=0, \tag{1.6.21}$$

после чего находим:

$$\varphi_2(t)=bM_1\cos(M_0-\delta)\cos t+\frac{b^2}{16}\sin 2(M_0-\delta)\cos 2t+M_2.$$

Уравнение (1.6.21) определяет величину M_0. Постоянная M_1 определится из условия существования 2π-периодического решения уравнения для $\varphi_3(t)$. Это уравнение имеет вид:

$$\frac{d^2\varphi_3}{dt^2}=-\cos M_0\cdot\varphi_1(t)-b\cos(M_0-\delta)\varphi_2(t)\cos t+\frac{b}{2}\sin(M_0-\delta)\cdot\varphi_1^2(t)\cos t.$$

Условие 2π-периодичности функции $\varphi_3(t)$ даёт:

$$\left(-\cos M_0 - \frac{b^2}{2}\cos 2(M_0-\delta)\right)M_1 = -Q'(M_0)M_1 = 0\,.$$

Таким образом, $M_1 = 0$, после чего из (1.6.18) и (1.6.20) получим:

$$\varphi(t,\mu) = M_0 + \mu b \sin(M_0-\delta)\cos t + \ldots \quad .$$

1.7. Резонанс n-го рода

В нелинейных системах под действием возмущающей силы могут возникать интенсивные вынужденные колебания не только, когда период собственных колебаний близок к периоду T возмущающей силы, но и тогда, когда он близок к величине nT $\left(n \in \mathbb{N},\ n > 1\right)$.

Рассмотрим сначала линейное неоднородное уравнение:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \lambda \sin \nu t\,. \tag{1.7.1}$$

Его общее решение имеет вид:

$$x = A\sin\left(\omega t + \varphi\right) + \frac{\lambda}{\omega^2 - \nu^2}\sin \nu t\,.$$

Предположим теперь, что $\omega = \nu/n$. Тогда

$$x = A\sin\left(\frac{\nu}{n}t + \varphi\right) + \frac{n^2\lambda}{\left(1-n^2\right)\nu^2}\sin \nu t\,.$$

Это решение периодично с периодом $2\pi n/\nu$, т.е. с периодом, n-кратным периоду $T = 2\pi/\nu$ возмущающей силы. В нелинейной системе колебания с периодом $2\pi n/\nu$ могут возникнуть не только когда $\omega = \nu/n$, но и тогда, когда $\omega \sim \nu/n$. Эта ситуация была исследована Л.И.Мандельштамом и Н.Д.Папалекси и получила название *резонанса n-го рода*. Возникающие при этом колебания называются *субгармоническими $1/n$-го порядка*.

Рассмотрим теперь уравнение:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu F\left(t, x, \dot{x}, \mu\right) - f\left(t\right), \tag{1.7.2}$$

где период функций F и f равен 2π. Пусть $\omega \sim 1/n$. Тогда, относя малость к нелинейности, можем уравнение (1.6.2) переписать в виде:

$$\ddot{x} + \frac{1}{n^2} x + f(t) = \mu F(t, x, \dot{x}, \mu). \tag{1.7.3}$$

Поставим задачу: выяснить, при каких условиях в системе, описываемой уравнением (1.7.3), возникают колебания периода $2\pi n$.

Т. к. $1/n \notin \mathbb{N}$, то на основании предыдущих результатов уравнение (1.7.3) имеет периодическое решение периода 2π, обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее $x_0 = \varphi(t)$. Но порождающее уравнение имеет также семейство периодических решений

$$x_0 = \varphi(t) + M_0 \cos\frac{t}{n} + N_0 \sin\frac{t}{n}. \tag{1.7.4}$$

Их период равен $2\pi n$. Т. к. правая часть уравнения (1.7.3) 2π-периодическая, то она является и $2\pi n$-периодической. Следовательно, эта задача ничем не отличается от изученной в пп. 1.3, 1.4, только надо 2π заменить на $2\pi n$. Поэтому ищем решение в виде ряда:

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \ldots$$

Для коэффициента x_1 имеем:

$$\ddot{x}_1 + \frac{1}{n^2} x_1 = F(t, x_0, \dot{x}_0, 0).$$

Для существования $2\pi n$-периодических решений этого уравнения необходимо и достаточно, чтобы:

$$\begin{Bmatrix} P(M_0, N_0) \\ Q(M_0, N_0) \end{Bmatrix} = \int_0^{2\pi n} F(t, x_0, \dot{x}_0, 0) \begin{Bmatrix} \sin\frac{t}{n} \\ \cos\frac{t}{n} \end{Bmatrix} dt = 0. \tag{1.7.5}$$

Эти уравнения удовлетворяются при $M_0 = N_0 = 0$, т. к. функция $\varphi(t)$ – 2π-периодическая, поэтому её (а значит и функции $F(t, x_0, \dot{x}_0, 0)$) разложение в ряд Фурье не будет содержать слагаемых вида $\sin(t/n)$, $\cos(t/n)$. Но эти уравнения могут иметь и ненулевые решения. Если для такого решения выполнено:

$$\frac{\partial(P,Q)}{\partial(M_0,N_0)} \neq 0,$$

то для него существует $2\pi n$-периодическое решение уравнения (1.7.3).

Пример. Рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля:

$$\ddot{x} + \frac{1}{4}x = \mu\left(\lambda_0 \sin t + \left(1 - x^2\right)\dot{x}\right). \tag{1.7.6}$$

Здесь, как видим, $\omega = 1/2$, т.е. $n = 2$. Найдём условия существования 4π-периодических решений уравнения (1.7.6). Порождающее уравнение для уравнения (1.7.6) имеет вид:

$$\ddot{x}_0 + \frac{1}{4}x_0 = 0,$$

и его общее решение:

$$x_0 = M_0 \cos\frac{t}{2} + N_0 \sin\frac{t}{2}.$$

Рассмотрим:

$$F\left(t, x_0, \dot{x}_0, 0\right) = \lambda_0 \sin t + \left(1 - x_0^2\right)\dot{x}_0.$$

Потребуем, чтобы это выражение не содержало резонансных слагаемых $\sin\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2}$. Тогда, проводя очевидные выкладки, получим, что константы M_0, N_0 должны удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases} P\left(M_0, N_0\right) = N_0 - \dfrac{N_0^2}{4} - \dfrac{M_0^2 N_0}{4} = 0, \\ Q\left(M_0, N_0\right) = M_0 - \dfrac{M_0^2}{4} - \dfrac{N_0^2 M_0}{4} = 0. \end{cases} \tag{1.7.7}$$

Эта система имеет, как и следовало ожидать, нулевое решение $M_0 = N_0 = 0$, и, кроме того, очевидные решения $\left(M_0 = 4,\ N_0 = 0\right)$, $\left(M_0 = 0,\ N_0 = 4\right)$. Будем искать теперь решения, обе компоненты которых отличны от нуля. Тогда, сократив первое уравнение системы (1.7.7) на N_0, а второе – на M_0, получим:

$$\begin{cases} 1-\dfrac{N_0}{4}-\dfrac{M_0^2}{4}=0, \\ 1-\dfrac{M_0}{4}-\dfrac{N_0^2}{4}=0. \end{cases} \tag{1.7.8}$$

Из первого уравнения системы (1.7.8) имеем: $N_0 = 4 - M_0^2$. Подставляя во второе уравнение, придём к уравнению 4-й степени (полагая $z = M_0$):

$$z^4 - 8z^2 + z + 12 = 0. \tag{1.7.9}$$

Из самой системы (1.7.8) легко заметить, что если $M_0 = N_0 = z$, то

$$1-\frac{z}{4}-\frac{z^2}{4}=0 \quad \Rightarrow \quad z^2+z-4=0.$$

Следовательно, левая часть уравнения (1.7.9) делится на z^2+z-4, и т. о. получаем два независимых квадратных уравнения:

$$z^2+z-4=0, \tag{1.7.10}$$

$$z^2-z-3=0. \tag{1.7.11}$$

Корни уравнения (1.7.10):

$$z_1=\frac{\sqrt{17}-1}{2},\ z_2=-\frac{\sqrt{17}+1}{2}.$$

Корни уравнения (1.7.11):

$$z_3=\frac{1-\sqrt{13}}{2},\ z_4=\frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

Таким образом, мы приходим к следующим ненулевым решениям системы (1.6.7): $\left(M_0=4,\ N_0=0\right)$, $\left(M_0=0,\ N_0=4\right)$, $\left(M_0=N_0=\left(\sqrt{17}-1\right)\big/2\right)$,

$\left(M_0 = N_0 = -\left(\sqrt{17}+1\right)/2\right)$, $\left(M_0 = \left(1-\sqrt{13}\right)/2,\ N_0 = \left(1+\sqrt{13}\right)/2\right)$, $\left(M_0 = \left(1+\sqrt{13}\right)/2,\ N_0 = \left(1-\sqrt{13}\right)/2\right)$.

Найдём якобиан системы (1.7.7):

$$\frac{\partial P}{\partial M_0} = -\frac{M_0 N_0}{2}, \quad \frac{\partial P}{\partial N_0} = 1 - \frac{N_0}{2} - \frac{M_0^2}{4},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial M_0} = 1 - \frac{M_0}{2} - \frac{N_0^2}{4}, \quad \frac{\partial Q}{\partial N_0} = -\frac{M_0 N_0}{2},$$

$$\frac{\partial\left(P,Q\right)}{\partial\left(M_0,\, N_0\right)} = \frac{3M_0^2 N_0^2}{16} - \frac{M_0^3 + N_0^3}{8} + \frac{M_0^2 + N_0^2}{4} + \frac{M_0 + N_0}{2} - 1.$$

Нетрудно проверить, что этот якобиан отличен от нуля для каждого из перечисленных выше решений системы (1.7.7). Следовательно, каждому из этих решений соответствует 4π -периодическое решение уравнения (1.7.6).

1.8. Автономные уравнения Условия существования периодических решений

Теперь предметом нашего рассмотрения будут уравнения, не содержащие явно независимой переменной t:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu F\left(x, \dot{x}, \mu\right). \tag{1.8.1}$$

Такие уравнения называются *автономными*. Они имеют ряд особенностей. Если для неавтономного уравнения период решения определялся периодом свободного члена $f\left(t\right)$, то для уравнения (1.8.1) возможны периодические решения произвольного периода, который, вообще говоря, будет зависеть от μ: $T = T\left(\mu\right)$.

Кроме того, уравнение (1.8.1) не изменяется при замене t на $t+h$, где h – постоянная. Действительно:

$$\frac{d^2 x\left(t+h\right)}{d\left(t+h\right)^2} + \omega^2 x\left(t+h\right) = \mu F\left(x\left(t+h\right), \frac{dx\left(t+h\right)}{d\left(t+h\right)}, \mu\right).$$

Так как $d\left(t+h\right)=dt,\; d\left(t+h\right)^2=dt^2$, то

$$\frac{d^2x\left(t+h\right)}{dt^2}+\omega^2x\left(t+h\right)=\mu F\left(x\left(t+h\right),\frac{dx\left(t+h\right)}{dt},\mu\right).$$

Следовательно, функция $x\left(t+h\right)$ является решением уравнения (1.8.1). Геометрически это означает, что линия, получающаяся из интегральной кривой уравнения (1.8.1) путём параллельного сдвига вдоль оси Ox, есть также интегральная кривая этого уравнения.

Это даёт возможность предположить, что производная искомого периодического решения в начальный момент времени обращается в нуль. Действительно, если период искомого периодического решения равен T, то $x\left(0\right)=x\left(T\right)$. Тогда по теореме Ролля на отрезке $\left[0,T\right]$ найдётся точка t_1 такая, что $\dot{x}\left(t_1\right)=0$. Примем этот момент за начальный. Это будет означать, что в уравнении (1.8.1) произведён сдвиг $t\to t+t_1$. Таким образом, не ограничивая общности, можно считать, что $\dot{x}\left(0\right)=0$.

Рассмотрим порождающее уравнение:

$$\ddot{x}_0+\omega^2x_0=0. \tag{1.8.2}$$

Решение, удовлетворяющее условию $\dot{x}_0\left(0\right)=0$, имеет вид:

$$x_0=M_0\cos\omega t. \tag{1.8.3}$$

Его период $T_0=2\pi/\omega$. Обозначим периодическое решение уравнения (1.8.1) через $x\left(t,\beta,\mu\right)$, исходя из того, что $x\left(0,\beta,\mu\right)=x_0\left(0\right)+\beta$, $\dot{x}\left(0,\beta,\mu\right)=0$. Или:

$$\begin{cases} x\left(0,\beta,\mu\right)=M_0+\beta, \\ \dot{x}\left(0,\beta,\mu\right)=0. \end{cases} \tag{1.8.4}$$

$\beta=\beta\left(\mu\right)$ – неизвестная функция такая, что $\beta\left(0\right)=0$.

Период искомого решения заранее не известен. Он имеет вид:

$$T = T_0 + \alpha = \frac{2\pi}{\omega} + \alpha,$$

где $\alpha = \alpha(\mu)$ – также неизвестная функция с условием $\alpha(0) = 0$.

Обе неизвестные функции α и β найдутся из условия периодичности решения $x(t, \beta, \mu)$ и его производной, а также условия $\dot{x}(0, \beta, \mu) = 0$, а именно:

$$\begin{cases} x(T_0 + \alpha, \beta, \mu) - x(0, \beta, \mu) = x(T_0 + \alpha, \beta, \mu) - M_0 - \beta = 0, \\ \dot{x}(T_0 + \alpha, \beta, \mu) = 0. \end{cases} \tag{1.8.5}$$

Можно доказать справедливость следующего утверждения:

Теорема. *Каждому ненулевому и некратному корню уравнения*

$$P(M_0) = \int_0^{2\pi} F(M_0 \cos u, -\omega M_0 \sin u, 0) \sin u du = 0$$

соответствует единственное и притом аналитическое решение уравнений (1.8.5), а, следовательно, единственное периодическое решение уравнения (1.8.1), и это решение будет аналитическим относительно μ. *Аналитическим по* μ *будет и период* $T(\mu) = 2\pi/\omega + \alpha(\mu)$ *этого решения.*

<u>Замечание</u>. Если $P(M_0) \equiv 0$, то любое решение уравнения (1.8.1) будет периодическим. Такой случай возникает тогда, когда нелинейность F не зависит от $\dot{x}$ (так называемые консервативные системы).

1.9. Метод Линштедта-Пуанкаре вычисления периодического решения автономного уравнения

Периодическое решение уравнения (1.8.1) нет смысла искать в виде ряда

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \dots, \tag{1.9.1}$$

поскольку его коэффициенты не будут периодическими функциями. Это объясняется тем, что период уравнения зависит от μ. Например, у функции $\sin((1+\mu)t)$ период равен $2\pi/(1+\mu)$, т.е. зависит от μ. Разложение этой функции в ряд по степеням μ имеет вид:

$$\sin\left(\left(1+\mu\right)t\right)=\sin\left(t+\mu t\right)=\sin t+\mu t\cos t-\frac{\mu^2t^2}{2}\sin t+\ldots$$

Отсюда видно, что коэффициенты этого разложения непериодические. Проиллюстрируем сказанное на следующем примере. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x}+x=\mu\left(x^2+x\right).$$

Если искать решение этого уравнения в виде степенного ряда вида (1.9.1), то получим:

$$\ddot{x}_0+x_0=0.$$

Отсюда $x_0=M\cos\left(t+\varphi\right)$, где M, φ – произвольные постоянные. Далее:

$$\ddot{x}_1+x_1=x_0^2+x_0=\frac{M^2}{2}-\frac{M^2}{2}\cos\left(2\left(t+\varphi\right)\right)+M\cos\left(t+\varphi\right).$$

Отсюда

$$x_1=A+Bt\cos\left(t+\varphi\right)+C\cos\left(2\left(t+\varphi\right)\right)+M\cos\left(t+\varphi\right).$$

Слагаемое $Bt\cos\left(t+\varphi\right)$ непериодическое (так называемое *секулярное*). Величина Bt характеризует амплитуду колебаний, которая растёт с ростом t. Поэтому область использования получаемых формул ограничивается лишь весьма небольшим промежутком изменения t.

В связи с этим возникает задача получить такие разложения периодических решений уравнения (1.8.1), которые не содержали бы секулярных членов. Одним из методов получения такого типа разложений является *метод Линштедта-Пуанкаре*. По своей идее он примыкает к вышеизложенным методам Пуанкаре, но результаты Линштедта появились за 10 лет до появления основных работ Пуанкаре (в литературе также встречается название *метод Ньюкомба-Линштедта*).

Пусть период искомого решения

$$T=\frac{2\pi}{\omega}+\alpha\left(\mu\right)=\frac{2\pi}{\omega}\left(1+h_1\mu+h_2\mu^2+\ldots\right). \tag{1.9.2}$$

Т. е. мы разлагаем неизвестный период искомого решения в ряд по степеням параметра μ. Аналогично в ряд по степеням параметра μ разлагается частота искомого решения:

$$\omega_1 = 2\pi\big/T = \omega\big/\left(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \ldots\right) = \omega\left(1 + a_1\mu + a_2\mu^2 + \ldots\right).$$

В уравнении (1.8.1) произведём замену переменной:

$$t = \frac{\tau}{\omega}\left(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \ldots\right). \qquad (1.9.3)$$

Если $t = T = T\left(\mu\right)$, то $\tau = 2\pi$. Фактически замена (1.9.3) вводит неизвестную частоту в само уравнение. Действительно, уравнение (1.8.1) принимает вид:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x\left(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \ldots\right)^2 =$$
$$= \frac{\mu}{\omega^2}F\left(x, \omega\left(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \ldots\right)^{-1}\frac{dx}{d\tau}, \mu\right)\left(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \ldots\right)^2. \qquad (1.9.4)$$

Период решения этого уравнения равен 2π, т.е. он не зависит от μ. Это новое периодическое решение тоже аналитично относительно μ. Будем искать его в виде:

$$x = x_0\left(\tau\right) + \mu x_1\left(\tau\right) + \mu^2 x_2\left(\tau\right) + \ldots \qquad (1.9.5)$$

Коэффициенты $x_j\left(\tau\right)$ периодические с периодом 2π. Кроме того, выполнены начальные условия:

$$\dot{x}_j\left(0\right) = 0 \quad \left(j = 0, 1, 2, \ldots\right). \qquad (1.9.6)$$

Подставляя выражение (1.9.5) в уравнение (1.9.4), и, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим:

$$\frac{d^2x_0}{d\tau^2} + x_0 = 0,$$

откуда в силу (1.9.6):

$$x_0 = M_0\cos\tau.$$

Далее:

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1 = -2h_1M_0\cos\tau + \frac{1}{\omega^2}F\left(M_0\cos\tau, -\omega M_0\sin\tau, 0\right). \qquad (1.9.7)$$

Для m-го приближения получим:

$$\frac{d^2x_m}{d\tau^2}+x_m=-2h_mM_0\cos\tau-2h_1x_{m-1}+$$
$$+\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)x_{m-1}+\frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\frac{dx_{m-1}}{d\tau}+F_m. \qquad (1.9.8)$$

Под символом (F) понимается $F\left(M_0\cos\tau,-\omega M_0\sin\tau,0\right)$. F_m – некоторый многочлен от $x_0,x_1,\ldots,x_{m-2}$ с постоянными коэффициентами. Этот многочлен зависит также от $h_1,\ldots h_{m-1}$, но не зависит от h_m.

Для того, чтобы уравнение (1.9.8) имело периодическое решение, необходимо выполнение условий отсутствия резонансных гармоник в его правой части, т. е.:

$$-2h_m-2h_1M_{m-1}+$$
$$+\frac{M_{m-1}}{\pi\omega^2}\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\cos\tau-\omega\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\sin\tau\right\}_1\cos\tau d\tau+$$
$$+\frac{N_{m-1}}{\pi\omega^2}\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\sin\tau+\omega\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\cos\tau\right\}_2\cos\tau d\tau+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F_m(\tau)\cos\tau d\tau=0.$$
$$-2h_1N_{m-1}+\frac{M_{m-1}}{\pi\omega^2}\int_0^{2\pi}\{\ \}_1\sin\tau d\tau+\frac{N_{m-1}}{\pi\omega^2}\int_0^{2\pi}\{\ \}_2\sin\tau d\tau+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F_m(\tau)\sin\tau d\tau=0.$$

В частности, для того, чтобы уравнение относительно x_1 имело периодическое решение, необходимо выполнение равенств:

$$P(M_0)=\int_0^{2\pi}F\left(M_0\cos\tau,-\omega M_0\sin\tau,0\right)\sin\tau d\tau=0,$$
$$-2h_1M_0+\frac{1}{\pi\omega^2}\int_0^{2\pi}F\left(M_0\cos\tau,-\omega M_0\sin\tau,0\right)\cos\tau d\tau=0.$$

Пример. Рассмотрим уравнение автоколебаний лампового генератора:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=\mu\left(\alpha-\gamma^2x^2\right)\frac{dx}{dt}. \qquad (1.9.9)$$

Произведём в уравнении (1.9.9) подстановку

$$t=\frac{\tau}{\omega}\left(1+h_1\mu+h_2\mu^2+\ldots\right); \quad \tau=\frac{\omega t}{1+h_1\mu+h_2\mu^2+\ldots}.$$

Получим:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+x\left(1+h_1\mu+h_2\mu^2+\ldots\right)^2=\frac{\mu}{\omega}\left(\alpha-\gamma^2x^2\right)\left(1+h_1\mu+h_2\mu^2+\ldots\right)\frac{dx}{d\tau}. \quad (1.9.10)$$

Решение уравнения (1.9.10) ищем в виде ряда:

$$x=x_0\left(\tau\right)+x_1\left(\tau\right)\mu+x_2\left(\tau\right)\mu^2+\ldots, \qquad (1.9.11)$$

где $x_0\left(\tau\right)=M_0\cos\tau$, а $x_j\left(\tau\right)$ $\left(j=1,2,\ldots\right)$ – 2π-периодические функции переменной τ, удовлетворяющие начальным условиям:

$$\dot{x}_j\left(0\right)=0, \quad j=1,2,\ldots$$

Подстановка ряда (1.9.11) в уравнение (1.9.10) приводит к следующему уравнению относительно $x_1\left(\tau\right)$:

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2}+x_1=-2h_1M_0\cos\tau-\frac{1}{\omega}\left(\alpha-\gamma^2M_0^2\cos^2\tau\right)M_0\sin\tau=$$
$$=\left(-\frac{\alpha M_0}{\omega}+\frac{\gamma^2M_0^3}{4\omega}\right)\sin\tau+\frac{\gamma^2M_0^3}{4\omega}\sin3\tau-2h_1\cos\tau.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при $\sin\tau$ и $\cos\tau$, получим:

$$h_1=0, \quad -\frac{\alpha M_0}{\omega}+\frac{\gamma^2M_0^3}{4\omega}=0.$$

Если $M_0\neq0$, то $M_0=2\sqrt{\alpha}/\gamma$.

Следовательно, уравнение относительно $x_1\left(\tau\right)$ принимает вид:

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2}+x_1=\frac{\gamma^2M_0^3}{4\omega}\sin 3\tau,$$

откуда:

$$x_1(\tau)=-\frac{\gamma^2M_0^3}{32\omega}\sin 3\tau+M_1\cos\tau+N_1\sin\tau,$$

где $M_1,\ N_1$ – произвольные постоянные. Уравнение для $x_2(\tau)$ имеет вид:

$$\frac{d^2x_2}{d\tau^2}+x_2=-2h_2M_0\cos\tau+\frac{\alpha}{\omega}\cdot\frac{dx_1}{d\tau}-\frac{\gamma^2M_0^2}{\omega}\cos^2\tau\cdot\frac{dx_1}{d\tau}+$$
$$+\frac{\gamma^2M_0^2}{\omega}\sin 2\tau\cdot x_1=M_0\left(-2h_2+\frac{\alpha^2}{8\omega^2}\right)\cos\tau+\frac{\gamma^2M_0^2M_1}{2\omega}\sin\tau+\ldots$$

Невыписанные в правой части слагаемые не содержат $\cos\tau,\sin\tau$. Из условия равенства коэффициентов при этих функциях нулю получим:

$$M_1=0,\ h_2=\frac{\alpha^2}{16\omega^2}\ .$$

Поскольку

$$\dot{x}_1=-\frac{3\gamma^2M_0^3}{32\omega}\cos 3\tau+N_1\cos\tau,$$

то условие $\dot{x}_1(0)=0$ даёт:

$$-\frac{3\gamma^2M_0^3}{32\omega}+N_1=0\ \Rightarrow\ N_1=\frac{3\gamma^2M_0^3}{32\omega}\ .$$

Таким образом, получаем:

$$x(\tau)=M_0\cos\tau+\left(-\frac{\gamma^2M_0^3}{4\omega}\sin 3\tau+\frac{3\gamma^2M_0^3}{32\omega}\sin\tau\right)\mu+\ldots$$

Учитывая теперь соотношения:

$$\tau=\omega t\left(1+\frac{\alpha^2}{16\omega^2}\mu^2+\ldots\right)^{-1}\approx\omega t\left(1-\frac{\alpha^2}{16\omega^2}\mu^2\right),\quad M_0=\frac{2\sqrt{\alpha}}{\gamma},$$

окончательно имеем:

$$x\approx\frac{2\sqrt{\alpha}}{\gamma}\cos\left(\omega t\left(1-\frac{\alpha^2}{16\omega^2}\mu^2\right)\right)+$$
$$+\left(\frac{3\gamma^2M_0^3}{32\omega}\sin\left(\omega t\left(1-\frac{\alpha^2}{16\omega^2}\mu^2\right)\right)-\frac{\gamma^2M_0^3}{4\omega}\sin\left(3\left(\omega t\left(1-\frac{\alpha^2}{16\omega^2}\mu^2\right)\right)\right)\right)\mu.$$

1.10. Вопросы устойчивости периодических решений

При исследовании решений дифференциальных уравнений, в том числе периодических решений очень важным является вопрос об устойчивости этих решений. Известно, что физически реализуются лишь устойчивые решения. Мы изучим вопрос об устойчивости периодических решений квазилинейных уравнений 2-го порядка.

Введём необходимые определения. Рассмотрим уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=X\left(t,x,\frac{dx}{dt}\right).\qquad(1.10.1)$$

Функция X или не зависит от t или 2π-периодична по t и аналитична по $x,\ \dot{x}$ в некоторой области изменения этих переменных.

Пусть $x=\varphi(t)$ – частное 2π-периодическое решение уравнения (1.10.1).

Определение. Решение $x=\varphi(t)$ уравнения (1.10.1) называется *устойчивым*, если для всякого $\varepsilon>0$ найдётся такое $\delta(\varepsilon)>0$, что для любого другого решения $x=\varphi(t)+y(t)$, такого, что $|y(0)|<\delta$, $|\dot{y}(0)|<\delta$, выполнены неравенства: $|y(t)|<\varepsilon$, $|\dot{y}(t)|<\varepsilon\quad\forall t>0$.

Если, кроме этого, выполнено

$$\lim_{t\to+\infty}y(t)=\lim_{t\to+\infty}\dot{y}(t)=0,$$

то решение $x=\varphi(t)$ называется *асимптотически устойчивым*.

Подставим $x=\varphi(t)+y(t)$ в уравнение (1.10.1) и разложим по степеням $y,\ \dot{y}$:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}=X(t,\varphi,\dot{\varphi})+\frac{\partial X(t,\varphi,\dot{\varphi})}{\partial x}y+\frac{\partial X(t,\varphi,\dot{\varphi})}{\partial \dot{x}}\dot{y}+\ldots$$

Или, поскольку $d^2\varphi/dt^2=X(t,\varphi,\dot{\varphi})$:

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial X(t,\varphi,\dot{\varphi})}{\partial x}y+\frac{\partial X(t,\varphi,\dot{\varphi})}{\partial \dot{x}}\dot{y}+\ldots \qquad (1.10.2)$$

Уравнение (1.10.2) называется *уравнением возмущённого движения*. Запишем его линейное приближение:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+q(t)\frac{dy}{dt}+p(t)y=0, \qquad (1.10.3)$$

где

$$q(t)=-\frac{\partial X(t,\varphi,\dot{\varphi})}{\partial \dot{x}},\quad p(t)=-\frac{\partial X(t,\varphi,\dot{\varphi})}{\partial x}\ .$$

Уравнение (1.10.3) называется *уравнением в вариациях*.

Пусть $y_1(t),\ y_2(t)$ – фундаментальная система решений уравнения (1.10.3), такая, что

$$\left.\begin{aligned} y_1(0)=1,\ \ y_2(0)=0\\ \dot{y}_1(0)=0,\ \ \dot{y}_2(0)=1\end{aligned}\right\}\ . \qquad (1.10.4)$$

Если в этих решениях заменить t на $t+2\pi$, то мы получим новые решения уравнения (1.10.3) $y_1(t+2\pi),\ y_2(t+2\pi)$. Но тогда эти решения можно разложить по фундаментальной системе решений $y_1(t),\ y_2(t)$, т. е. найдутся такие постоянные a_1, a_2, b_1, b_2, что будут выполнены равенства:

$$\left.\begin{aligned} y_1(t+2\pi)=a_1y_1(t)+a_2y_2(t),\ \ \dot{y}_1(t+2\pi)=a_1\dot{y}_1(t)+a_2\dot{y}_2(t),\\ y_2(t+2\pi)=b_1y_1(t)+b_2y_2(t),\ \ \dot{y}_2(t+2\pi)=b_1\dot{y}_1(t)+b_2\dot{y}_2(t).\end{aligned}\right\} \qquad (1.10.5)$$

Полагая здесь $t=0$, получим:

$$\left.\begin{array}{ll} y_1(2\pi)=a_1, & \dot{y}_1(2\pi)=a_2 \\ y_2(2\pi)=b_1, & \dot{y}_2(2\pi)=b_2 \end{array}\right\} \tag{1.10.6}$$

Рассмотрим теперь частное решение

$$y^*(t)=My_1(t)+Ny_2(t), \tag{1.10.7}$$

где константы M, N подберём так, чтобы

$$y^*(t+2\pi)=\rho y^*(t), \tag{1.10.8}$$

$\rho=\text{const}$. Имеем:

$$y^*(t+2\pi)=M\left(a_1y_1(t)+a_2y_2(t)\right)+N\left(b_1y_1(t)+b_2y_2(t)\right)=$$
$$=\rho\left(My_1(t)+Ny_2(t)\right).$$

Приравнивая коэффициенты при $y_1(t)$ и $y_2(t)$, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно M, N:

$$\begin{cases} M(a_1-\rho)+Nb_1=0, \\ Ma_2+N(b_2-\rho)=0. \end{cases} \tag{1.10.9}$$

Для того, чтобы система (1.10.9) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} a_1-\rho & b_1 \\ a_2 & b_2-\rho \end{vmatrix}=0,$$

т.е.

$$\rho^2-2A\rho+B=0, \tag{1.10.10}$$

где

$$A=\frac{1}{2}\left(y_1(2\pi)+\dot{y}_2(2\pi)\right), \quad B=y_1(2\pi)\dot{y}_2(2\pi)-y_2(2\pi)\dot{y}_1(2\pi).$$

Уравнение (1.10.10) называется *характеристическим уравнением*, соответствующим периоду 2π.

Пусть ρ_1, ρ_2 – корни уравнения (1.10.10), которые для простоты будем предполагать различными. Для каждого из них найдём M, N, а затем, подставив их в (1.10.7), найдём два различных решения $y^*(t)$, которые обозначим $y_1^*(t)$, $y_2^*(t)$. Тогда будем иметь:

$$y_1^*(t+2\pi) = \rho_1 y_1^*(t), \quad y_2^*(t+2\pi) = \rho_2 y_2^*(t),$$

Откуда

$$y_1^*(t+2\pi m) = \rho_1^m y_1^*(t), \quad y_2^*(t+2\pi m) = \rho_2^m y_2^*(t). \tag{1.10.11}$$

Если $|\rho_j| < 1$, то $y_1^*(t)$, $y_2^*(t)$ стремятся к нулю при $t \to \infty$. Но этим же свойством будет обладать и любое другое решение уравнения (1.10.3), поскольку $y_1^*(t)$, $y_2^*(t)$ могут быть приняты в качестве фундаментальной системы решений. Таким образом, при $|\rho_j| < 1$ 2π-периодическое решение уравнения (1.10.1) асимптотически устойчиво.

Если $|\rho_1| > 1$ или $|\rho_2| > 1$, то соответственно $y_1^*(t)$ или $y_2^*(t)$ будет неограниченным, и тогда 2π-периодическое решение уравнения (1.9.1) неустойчиво.

Если $|\rho_1| = |\rho_2| = 1$, то линейное приближение (1.9.3) не решает вопроса об устойчивости.

Выразим условия устойчивости через A и B. Совершим в (1.10.10) подстановку:

$$\rho = \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \ . \tag{1.10.12}$$

Получим:

$$\frac{(1+\lambda)^2}{(1-\lambda)^2} - 2A\frac{1+\lambda}{1-\lambda} + B = 0;$$

$$(1+\lambda)^2 - 2A(1-\lambda^2) + B(1-\lambda)^2 = 0.$$

Раскрыв скобки и перегруппировав, получим:

$$\left(2A+B+1\right)\lambda^2+2\left(-B+1\right)\lambda+\left(-2A+B+1\right)=0. \qquad (1.10.13)$$

Очевидно, что $|\rho|\le 1$, если $\operatorname{Re}\lambda\le 0$, и $|\rho|>1$, если $\operatorname{Re}\lambda>0$. Таким образом, для устойчивости необходимо, чтобы вещественные части корней уравнения (1.10.13) были неположительными. А для этого необходимо, чтобы

$$2A+B+1\ge 0,\quad -2A+B+1\ge 0,\quad -B+1\ge 0. \qquad (1.10.14)$$

Из первых двух неравенств (1.10.14) следует, что $B+1\ge 0$, что с третьим неравенством даёт:

$$|B|\le 1. \qquad (1.10.15)$$

По свойству определителя Вронского:

$$y_1(t)\dot y_2(t)-\dot y_1(t)y_2(t)=\left(y_1(0)\dot y_2(0)-\dot y_1(0)y_2(0)\right)\exp\left(-\int\limits_0^t q(\tau)\,d\tau\right).$$

А тогда из (1.10.4) следует:

$$B=\exp\left(-\int\limits_0^{2\pi} q(t)\,dt\right). \qquad (1.10.16)$$

Пример. Решим вопрос об устойчивости 2π-периодического решения уравнения (1.2.1):

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=f(t)+\mu F\left(t,x,\dot x,\mu\right).$$

Как мы уже знаем, исследуемое 2π-периодическое решение имеет вид ряда по степеням малого параметра:

$$\varphi(t)=x_0(t)+\mu x_1(t)+\mu^2x_2(t)+\ldots$$

Уравнение в вариациях имеет вид:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y-\mu\frac{\partial F\left(t,\varphi,\dot\varphi,\mu\right)}{\partial x}y-\mu\frac{\partial F\left(t,\varphi,\dot\varphi,\mu\right)}{\partial\dot x}\dot y=0.$$

Тогда

$$B = \exp\left(\mu \int_0^{2\pi} \frac{\partial F\left(t,\varphi,\dot{\varphi},\mu\right)}{\partial \dot{x}} dt\right) = 1 + \mu \int_0^{2\pi} \frac{\partial F\left(t,x_0,\dot{x}_0,0\right)}{\partial \dot{x}} dt + \dots \ .$$

Таким образом, для асимптотической устойчивости достаточно, чтобы:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial F\left(t,x_0,\dot{x}_0,\mu\right)}{\partial \dot{x}} dt < 0. \qquad (1.10.17)$$

Если, в частности, $f(t) = a\sin t$, $F = \left(1 - x^2\right)\dot{x}$ (уравнение Ван-дер-Поля), то условие (1.10.17) принимает вид:

$$\int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{a^2}{\left(\omega^2 - 1\right)^2} \sin^2 t\right) dt < 0,$$

т. е.

$$2 - \frac{a^2}{\left(\omega^2 - 1\right)^2} < 0.$$

1.11. Колебания в линейных системах при наличии трения

Рассмотрим линейное однородное уравнение с постоянным коэффициентом ω:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \qquad (1.11.1)$$

Общее решение этого уравнения можно записать в виде:

$$x(t) = A\cos\left(\omega t + \varphi\right),$$

где A, φ – произвольные постоянные. Это решение описывает *гармонические колебания,* т. е. свободные колебания системы при отсутствии сил трения. С физической точки зрения величина $\omega > 0$ характеризует частоту свободных колебаний, величина A – их амплитуду, а величина φ – фазу. Графическое изображение таких колебаний приведено на рис. 1:

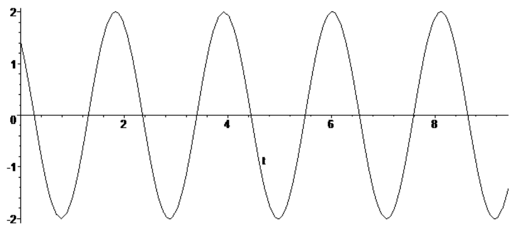

Рис. 1

Период гармонических колебаний (расстояние между абсциссами соседних максимумов) равен $2\pi\omega^{-1}$. Но во всякой реальной физической системе имеются силы сопротивления (трения). В простейшем случае сила такого сопротивления пропорциональна скорости, т. е. $\dot{x}$. С учётом этих сил уравнение колебаний принимает вид:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = 0. \qquad (1.11.2)$$

Коэффициент $\beta > 0$ характеризует силу трения.

Подстановка в уравнение (1.11.2) функции $x = e^{\lambda t}$ приводит к характеристическому уравнению:

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega^2 = 0. \qquad (1.11.3)$$

Корни этого уравнения равны

$$\lambda_1 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega^2}, \quad \lambda_2 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega^2}.$$

Рассмотрим 3 случая.

1) $\beta < \omega$. Это означает, что затухание небольшое по сравнению с частотой свободных колебаний. В теории колебаний чаще всего имеет место именно этот случай. Обозначив $\nu = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$, запишем общее решение уравнения (1.10.2) в виде:

$$x(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\nu t + \varphi), \qquad (1.11.4)$$

где A, φ – произвольные постоянные. На рис. 2 показан график функции вида (1.11.4).

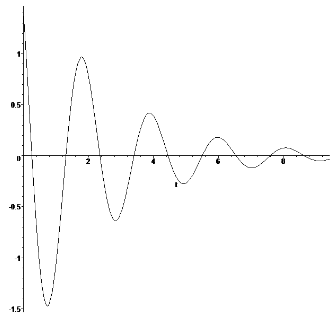

Рис. 2

В соответствии с видом функции (1.11.4) движение системы можно рассматривать как гармоническое колебание частоты ν с амплитудой, изменяющейся по закону: $a(t) = Ae^{-\beta t}$. Поскольку $a(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ (напомним, что $\beta > 0$), то мы имеем дело с затуханием колебаний. Скорость затухания характеризуется величиной β, которая называется *коэффициентом затухания.*

Найдём время τ, за которое амплитуда уменьшается в e раз, т.е. из условия: $Ae^{-\beta\tau} = Ae^{-1}$. Отсюда получим: $\tau = \beta^{-1}$. Следовательно, коэффициент затухания обратен по величине тому промежутку времени, за который амплитуда уменьшается в e раз. Период затухающих колебаний (расстояние между абсциссами соседних максимумов) определяется по формуле:

$$T = \frac{2\pi}{\nu} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}} \; .$$

Если $\beta << \omega$, то $T \approx 2\pi\omega^{-1}$, т. е. период затухающих колебаний близок к периоду гармонических колебаний. Соответствующие амплитуды $a_1, a_2, a_3, \ldots$ (ординаты максимумов на рис. 2) образуют геометрическую прогрессию. Действительно, если $a_1 = A\exp(-\beta t_0)$ (t_0 – абсцисса 1-го максимума), то

$$a_2 = A\exp\left(-\beta\left(t_0 + T\right)\right) = a_1\exp\left(-\beta T\right), \;\; a_3 = a_2\exp\left(-\beta T\right) \text{ и т.д.}$$

Знаменатель прогрессии равен $e^{-\beta T}$. Обратная ему величина $e^{\beta T}$ называется *декрементом затухания*, очевидно, он равен отношению амплитуд, соответствующих моментам времени, отличающимся на период, т. е. a_k / a_{k+1}. Натуральный логарифм декремента затухания $\gamma = \ln e^{\beta T} = \beta T$ называется *логарифмическим декрементом затухания.* Для систем без трения ($\beta = 0$) он, очевидно, равен нулю. С его использованием закон убывания амплитуды со временем запишется так:

$$a(t) = A\exp\left(-\frac{\gamma}{T}t\right).$$

За время τ (т. е. за которое амплитуда уменьшается в e раз) система успевает совершить $N_e = \tau/T$ колебаний (количество максимумов на промежутке длины τ). Поскольку $\beta\tau = 1$, то

$$\frac{\gamma}{T}\tau = 1, \quad \frac{\gamma}{T}TN_e = 1, \quad \gamma N_e = 1, \quad \gamma = \frac{1}{N_e}.$$

Следовательно, логарифмический декремент затухания обратен по величине числу колебаний, совершаемых системой за то время, за которое амплитуда уменьшается в e раз.

Для характеристики колебательной системы часто употребляется также величина $Q = \pi\gamma^{-1} = \pi N_e$, называемая *добротностью* системы. Она пропорциональна числу колебаний, совершаемых системой за то время, за которое амплитуда уменьшается в e раз, с коэффициентом пропорциональности π.

2) $\beta = \omega$. Тогда характеристическое уравнение (1.11.3) имеет вещественные кратные корни $\lambda_1 = \lambda_2 = -\beta$, и общее решение уравнения (1.11.2) имеет вид:

$$x(t) = e^{-\beta t}\left(c_1 t + c_2\right),$$

т. е. процесс, очевидно апериодический.

3) $\beta > \omega$. Тогда корни λ_1, λ_2 уравнения (1.11.3) вещественные и различные, и общее решение уравнения (1.11.2) имеет вид:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

т. е. процесс также апериодический.

Вернёмся теперь к случаю $\beta < \omega$ и рассмотрим уравнение вынужденных колебаний системы:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = M\cos\sigma t. \qquad (1.11.5)$$

Здесь правая часть описывает внешнюю вынуждающую периодическую силу с частотой $\sigma > 0$. Период этой силы равен $2\pi\sigma^{-1}$. Частное решение уравнения (1.11.5) ищем в виде:

$$x^*(t) = U\cos\sigma t + V\sin\sigma t, \tag{1.11.6}$$

где U, V – пока не определённые постоянные. Подстановка выражения (1.11.6) в уравнение (1.11.5) приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно U и V:

$$\begin{cases} \left(\omega^2 - \sigma^2\right)U + 2\beta\sigma V = M \\ -2\beta\sigma U + \left(\omega^2 - \sigma^2\right)V = 0 \end{cases} \tag{1.11.7}$$

Определитель этой системы $\Delta = \left(\omega^2 - \sigma^2\right)^2 + 4\beta^2\sigma^2 > 0$, поскольку $\beta > 0,\ \sigma > 0$, следовательно, система (1.11.7) имеет единственное решение:

$$U = \frac{\left(\omega^2 - \sigma^2\right)M}{\left(\omega^2 - \sigma^2\right)^2 + 4\beta^2\sigma^2}, \quad V = \frac{2\beta\sigma M}{\left(\omega^2 - \sigma^2\right)^2 + 4\beta^2\sigma^2}.$$

Тогда получаем единственное $2\pi/\sigma$-периодическое решение уравнения (1.11.5):

$$x^*(t) = U\cos\sigma t + V\sin\sigma t = \sqrt{U^2 + V^2}\left(\frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2}}\cos\sigma t + \frac{V}{\sqrt{U^2 + V^2}}\sin\sigma t\right) =$$
$$= \sqrt{U^2 + V^2}\left(\cos\sigma t\cos\delta - \sin\sigma t\sin\delta\right) = \sqrt{U^2 + V^2}\cos\left(\sigma t + \delta\right) =$$
$$= \frac{M}{\sqrt{\left(\omega^2 - \sigma^2\right)^2 + 4\beta^2\sigma^2}}\cos\left(\sigma t + \delta\right),$$

где δ – вспомогательный угол. Из этого выражения видно, что амплитуда не может обратиться в бесконечность, поскольку $\beta > 0,\ \sigma > 0$. Т. е явление резонанса в рассматриваемом ранее смысле здесь отсутствует (мешает трение). Но при малых β и близких между собой σ и $\nu = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$ (или просто σ и ω) амплитуда колебаний всё же может оказаться очень большой. Т. е. явления, близкие к резонансным, возможны и здесь. Если $\beta < \omega/\sqrt{2}$, то нетрудно проверить, что при $\sigma = \sqrt{\omega^2 - 2\beta^2}$ достигается максимум амплитуды вынужденных колебаний, равный

$$A_{\max} = \frac{M}{2\beta\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}.$$

При $\beta \to 0$ этот максимум, очевидно, стремится к бесконечности.

Общее решение уравнения (1.11.5) имеет вид:

$$x(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\nu t + \varphi) + A_1\cos(\sigma t + \delta), \tag{1.11.8}$$

где

$$A_1 = \frac{M}{\sqrt{\left(\omega^2 - \sigma^2\right)^2 + 4\beta^2\sigma^2}},$$

т. е. реальные колебания системы имеют две составляющие, одна из которых определяется собственными колебаниями системы, а другая – внешней вынуждающей силой. Первое из двух слагаемых в выражении (1.11.8) играет заметную роль только в начальной стадии процесса (т. е. при небольших t) при так называемом *установлении колебаний*. С течением времени из-за множителя $e^{-\beta t}$ роль этого первого слагаемого всё уменьшается, и при достаточно больших t им можно пренебречь, сохранив лишь второе слагаемое. Характер возникающих колебаний показан на рис. 3.

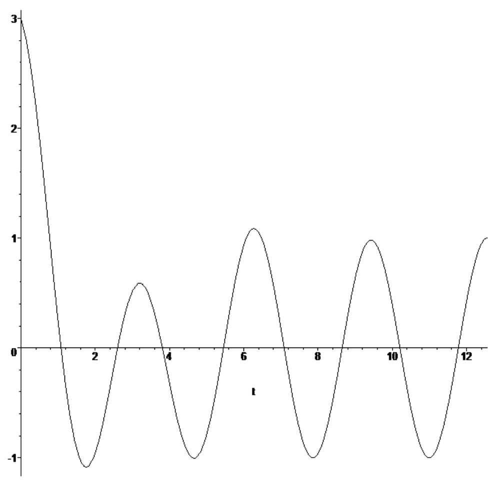

Рис. 3

Рассмотрим теперь уравнение

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = f\left(t\right), \qquad (1.11.9)$$

где $0 < \beta < \omega$, $f\left(t\right)$ – непрерывная 2π-периодическая функция. Получим формулу для единственного 2π-периодического решения уравнения (1.11.9). Разложим функцию $f(t)$ в ряд Фурье:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt\,.$$

Искомое решение ищем в виде:

$$x(t) = \frac{p_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos nt + q_n \sin nt\,, \qquad (1.11.10)$$

с неопределёнными пока коэффициентами p_0, p_n, q_n. Подстановка выражения (1.11.10) в уравнение (1.11.9) приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно p_0, p_n, q_n:

$$\begin{cases} \omega^2 p_0 = a_0, \\ \left(\omega^2 - n^2\right) p_n + 2n\beta q_n = a_n, \\ -2n\beta p_n + \left(\omega^2 - n^2\right) q_n = b_n \end{cases} \qquad (1.11.11)$$

Определитель этой системы:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \omega^2 - n^2 & 2n\beta \\ -2n\beta & \omega^2 - n^2 \end{vmatrix} = \left(\omega^2 - n^2\right) + 4n^2\beta^2 > 0\,,$$

поэтому система (1.11.11) имеет единственное решение:

$$p_0 = \frac{a_0}{\omega^2},$$

$$p_n = \frac{\left(\omega^2 - n^2\right) a_n - 2n\beta b_n}{\Delta_n}, \quad q_n = \frac{\left(\omega^2 - n^2\right) b_n + 2n\beta a_n}{\Delta_n}. \qquad (1.11.12)$$

Таким образом, 2π-периодическое решение уравнения (1.11.9) определяется формулой (1.11.10), где коэффициенты p_0, p_n, q_n определяются формулами (1.11.12). Очевидно, что это единственное 2π-периодическое решение, других быть не может из-за множителя $e^{-\beta t}$ $(\beta > 0)$ в общем решении уравнения (1.11.9).

1.12. Колебания в нелинейных системах при наличии трения

Рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu), \qquad (1.12.1)$$

где $0 < \beta < \omega$, $f(t)$ – непрерывная 2π-периодическая функция, $F(t, x, \dot{x}, \mu)$ – непрерывная и 2π-периодична по t и аналитична по $x, \dot{x}, \mu$ в некоторой области изменения $x, \dot{x}$ и при достаточно малых значениях μ.

Замечание. Здесь предполагается, что коэффициент затухания β, хотя и меньше величины ω, но всё же существенен. Если же он мал, то можно считать, что он пропорционален малому параметру μ, т.е. $\beta = \mu\beta'$, и тогда слагаемое $2\beta x = 2\mu\beta' x$ отнести к нелинейности. В этом случае получится уравнение, изученное в пп.1,2.

Если в уравнении (1.12.1) положить $\mu = 0$, то получим порождающее уравнение:

$$\ddot{x}_0 + 2\beta\dot{x}_0 + \omega^2 x_0 = f(t), \qquad (1.12.2)$$

имеющее, как было установлено в предыдущем параграфе, единственное 2π-периодическое решение $x_0(t)$.

Изучим вопрос о существовании 2π-периодического решения уравнения (1.12.1), аналитического по μ и стремящегося при $\mu \to 0$ к порождающему решению $x_0(t)$.

В соответствии с теорией Пуанкаре (см. п.1) введём функции $\beta_0(\mu)$, $\beta_1(\mu)$ – отклонения начальных условий искомого 2π-периодического решения уравнения (1.12.1) от начальных условий решения $x_0(t)$, т. е.

$$x(0) = x_0(0) + \beta_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0(0) + \beta_1.$$

Тогда искомое 2π-периодическое решение уравнения (1.12.1) представим в виде:

$$x(t,\beta_0,\beta_1,\mu) = x_0(t) + x_{11}(t)\beta_0 + x_{12}(t)\beta_1 + x_{13}(t)\mu + \ldots \qquad (1.12.3)$$

Проводя рассуждения, аналогичные проведенным в п.1, придём к уравнениям с начальными условиями, определяющим коэффициенты $x_{11}(t)$, $x_{12}(t)$:

$$\ddot{x}_{11} + 2\beta\dot{x}_{11} + \omega^2 x_{11} = 0,\;\; x_{11}(0) = 1,\;\; \dot{x}_{11}(0) = 0,$$
$$\ddot{x}_{12} + 2\beta\dot{x}_{12} + \omega^2 x_{12} = 0,\;\; x_{12}(0) = 0,\;\; \dot{x}_{12}(0) = 1.$$

Решая эти уравнения, получим:

$$x_{11}(t) = e^{-\beta t}\cos\nu t + \frac{\beta}{\nu}e^{-\beta t}\sin\nu t,\quad x_{12}(t) = \frac{1}{\nu}e^{-\beta t}\sin\nu t,$$

где $\nu = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$.

Условия 2π-периодичности функций $x(t,\beta_0,\beta_1,\mu)$, $\dot{x}(t,\beta_0,\beta_1,\mu)$ приводят к уравнениям относительно β_0,β_1:

$$\Phi_0(\beta_0,\beta_1,\mu) = x(2\pi) - x(0) =$$
$$= \left(e^{-2\pi\beta}\cos 2\pi\nu + \frac{\beta}{\nu}e^{-2\pi\beta}\sin 2\pi\nu - 1\right)\beta_0 + \left(\frac{1}{\nu}e^{-2\pi\beta}\sin 2\pi\nu\right)\beta_1 + \ldots = 0,$$
$$\Phi_1(\beta_0,\beta_1,\mu) = \dot{x}(2\pi) - \dot{x}(0) = \left(-\left(\nu + \frac{\beta^2}{\nu}\right)e^{-2\pi\beta}\sin 2\pi\nu\right)\beta_0 +$$
$$+\left(-\frac{\beta}{\nu}e^{-2\pi\beta}\sin 2\pi\nu + e^{-2\pi\beta}\cos 2\pi\nu - 1\right)\beta_1 + \ldots = 0.$$

Невыписанные члены не влияют на величину определителя, фигурирующего в теореме Пуанкаре. После соответствующих выкладок получим:

$$\left.\frac{D(\Phi_0,\Phi_1)}{D(\beta_0,\beta_1)}\right|_{\beta_0=\beta_1=\mu=0} = \left(e^{-2\pi\beta} - 1\right)^2 + 4e^{-2\pi\beta}\sin^2\pi\nu.$$

Очевидно, что, поскольку $\beta > 0$, этот определитель отличен от нуля. Таким образом, в соответствии с теоремой Пуанкаре получим, что при достаточно малых значениях параметра μ уравнение (1.11.1) имеет единственное 2π-периодическое решение $x(t,\mu)$ такое, что $x(t,\mu) \to x_0(t)$ при $\mu \to 0$, и это решение аналитично относительно μ.

Построение этого решения, как и в п. 2, осуществляется в виде ряда по степеням малого параметра μ:

$$x(t,\mu) = x_0(t) + x_1(t)\mu + x_2(t)\mu^2 + \ldots + x_k(t)\mu^k + \ldots,$$

где коэффициенты $x_0(t),\, x_1(t),\, x_2(t), \ldots, x_k(t), \ldots$ определяются как 2π-периодические решения линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\ddot{x}_0 + 2\beta\dot{x}_0 + \omega^2 x_0 = f(t),\\
&\ddot{x}_1 + 2\beta\dot{x}_1 + \omega^2 x_1 = F(t, x_0, \dot{x}_0, 0),\\
&\ddot{x}_2 + 2\beta\dot{x}_2 + \omega^2 x_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x}_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \mu}\right),\\
&\ldots\\
&\ddot{x}_k + 2\beta\dot{x}_k + \omega^2 x_k = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)x_{k-1} + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x}_{k-1} + G_r\left(t, x_0, \dot{x}_0, \ldots, x_{k-2}, \dot{x}_{k-2}\right),\\
&k = 3, 4, \ldots
\end{aligned}$$

Под символом (F) понимается $F(t, x_0, \dot{x}_0, 0)$.

Вопросы для самоконтроля

1. Как различаются нерезонансный и резонансный случаи для дифференциального уравнения вида (1.2.1) с аналитической нелинейностью? Сформулируйте теорему Пуанкаре о существовании 2π-периодического решения этого уравнения в каждом из этих случаев.
2. Если в резонансном случае уравнение (1.2.1) допускает 2π-периодическое решение, то можно ли утверждать, что это решение единственно?
3. Сформулируйте условия существования периодических решений для автономного уравнения вида (1.8.1).
4. Почему периодическое по t и аналитическое по малому параметру μ решение автономного уравнения нельзя непосредственно искать в виде степенного ряда по степеням μ?
5. В каком случае решение уравнения вида (1.10.1) называется устойчивым? Сформулируйте теорему об устойчивости периодического решения уравнения (1.10.1).
6. Возможно ли существование периодических решений у линейного уравнения вида (1.11.2), содержащего в левой части слагаемое $2\beta\dot{x}$?
7. Каковы условия существования периодических решений у квазилинейного уравнения вида (1.12.1)?

Задачи к главе 1

1. Найти 2π-периодические решения следующих дифференциальных уравнений:

а) $\ddot{x}+3x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nt+\sin nt}{n^2}$; б) $\ddot{x}+2x=\cos t\cos 2t$;

в) $\ddot{x}+5x=\sin^3 2t$; г) $4\ddot{x}+3x=|\sin t|$;

д) $2\ddot{x}+x=s(t)$,

где $s(t)$ – сумма разложения в ряд Фурье по синусам в промежутке $[0,\pi]$ функции

$$f(t)=\begin{cases} t,\ t\in[0,\pi/2], \\ \pi-t,\ t\in[\pi/2,\pi] \end{cases};$$

е) $3\ddot{x}+2x=p(t)$,

где $p(t)$ – сумма разложения в ряд Фурье по косинусам в промежутке $[0,\pi]$ функции $f(t)=\pi-t$.

2. Задано следующее дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x}+\omega^2 x=f(t).$$

Каковы условия, при которых это уравнение имеет T-периодическое решение при любой непрерывной T-периодической функции $f(t)$? Как в этой ситуации будут различаться случаи отсутствия и наличия резонанса?

3. Задано дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}+\omega^2 x=f(t)+\mu F(t,x,\dot{x},\mu),$$

где $f(t)$ – непрерывная T-периодическая функция, $F(t,x,\dot{x},\mu)$ – непрерывна и T-периодична по t и аналитична по $x,\dot{x},\mu$ в некоторой области изменения $x,\dot{x}$ и при достаточных малых μ. Сформулировать теорему Пуанкаре о существовании T-периодического решения этого уравнения в случае отсутствия резонанса.

4. Для следующих уравнений с помощью метода малого параметра найти приближённо до слагаемых порядка μ^2 включительно периодические решения с периодом, равным периоду свободного члена:

а) $\ddot{x} + 3x = 2\sin t + \mu\dot{x}^2$;

б) $\ddot{x} + 5x = \cos 2t + \mu x^2$;

в) $\ddot{x} + 3x + x^3 = 2\mu\cos t$;

г) $\ddot{x} + \sin x = \mu\sin 2t$;

д) $\ddot{x} + 2x = x\dot{x} + \mu\cos t$;

е) $\ddot{x} + x^2 = 1 + \mu\sin t$.

Указание. В уравнениях в), г) и д) предварительно сделать замену $x = \mu y$, а в уравнении е) – замену $x = 1 + \mu y$.

5. Пусть в уравнении из задачи 3 функция F имеет вид полинома степени m относительно параметра μ, т. е.:

$$F(t, x, \dot{x}, \mu) = \sum_{k=0}^{m} F_k(t, x, \dot{x})\mu^k.$$

Написать уравнения, определяющие первые 4 коэффициента разложения в ряд по степеням малого параметра μ T-периодического решения данного уравнения в этом случае.

6. Построить двупараметрическое семейство 2π-периодических решений следующих дифференциальных уравнений:

а) $\ddot{x} + x = \sin^3 2t$;

б) $\ddot{x} + 4x = \cos t + \sin 3t$;

в) $\ddot{x} + 9x = 2\sin^2 t$;

г) $\ddot{x} + 16x = 1 - 4\cos^2 t$;

д) $\ddot{x}+25x=\cos^3 3t$;

е) $\ddot{x}+36x=\cos 3t+2\sin 3t$.

7. Для следующих дифференциальных уравнений методом малого параметра найти приближённо до слагаемых порядка μ включительно 2π-периодические решения:

а) $\ddot{x}+x=\sin 2t+\mu\dot{x}^2$;

б) $\ddot{x}+x=\cos 2t+\mu x^2$;

в) $\ddot{x}+x=\mu(x^3-2\sin t-2\cos t)$;

г) $\ddot{x}+x=\mu(\dot{x}^3-\sin t-\cos t)$;

д) $\ddot{x}+9x=\sin t+\mu x^3$;

е) $\ddot{x}+4x=\cos t+\mu(2-3x^2)\dot{x}$.

8. С помощью метода Линштедта-–Пуанкаре приближённо до слагаемых порядка μ включительно найти периодические решения следующих дифференциальных уравнений и их периоды:

а) $\ddot{x}+3x-x^2=0$;

б) $\ddot{x}+\sin x=0$;

в) $\ddot{x}+x+x^3=0$;

г) $\ddot{x}+x=\mu(\dot{x}-\dot{x}^3)$;

д) $\ddot{x}+2x=\mu(1-x^2)\dot{x}$.

е) $\ddot{x}+5x=\mu x\dot{x}^2$.

Глава 2

Колебания, описываемые линейной системой дифференциальных уравнений *n*-го порядка с постоянными коэффициентами

2.1. Некоторые общие вопросы теории линейных однородных систем с переменными коэффициентами

Начнём с изучения систем вида:

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(t)x_k, \quad j = \overline{1,n}, \tag{2.1.1}$$

где $t \in (-\infty, +\infty)$, $a_{jk}(t)$ – в общем случае комплекснозначные функции, кусочно непрерывные в любом конечном промежутке (t_1, t_2), т.е. имеют на этом промежутке разве лишь конечное число точек разрыва.

Под *интегрируемой кусочно непрерывной функцией* будем понимать кусочно непрерывную функцию, для которой в каждой её точке разрыва t^* существуют пределы

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int_{t_1}^{t^*-\varepsilon} |f(t)|dt, \quad \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{t^*+\varepsilon}^{t_2} |f(t)|dt,$$

где t_1, t_2 выбраны таким образом, чтобы промежутки (t_1, t^*), (t^*, t_2) не содержали других точек разрыва.

Систему (2.1.1) можно записать в матричной форме:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{2.1.2}$$

где $x = \mathrm{colon}\left(x_1, \ldots, x_n\right)$, $A(t) = (a_{jk}(t))_{j,k=\overline{1,n}}$.

Докажем, что решение векторного уравнения (2.1.2) с начальным условием $x(0) = x_0$, определённое как решение векторного интегрального уравнения

$$x(t) = x_0 + \int_0^t A(\tau)x(\tau)d\tau \tag{2.1.3}$$

в классе непрерывных вектор-функций, имеющих интегрируемую кусочно непрерывную производную, существует и единственно.

Решение уравнения (2.1.3) ищем методом Пикара:

$$x_0(t)=x_0,\quad x_{k+1}(t)=x_0+\int_0^t A(\tau)x_k(\tau)d\tau,\quad k=0,1,2,\ldots \tag{2.1.4}$$

Так как интеграл от кусочно непрерывной функции есть функция непрерывная, то отсюда следует, что все $x_k(t)$ – непрерывные функции во всех точках t.

Докажем, что последовательность $\{x_k(t)\}$ равномерно сходится на любом конечном интервале изменения t. Рассмотрим:

$$\left\|x_1(t)-x_0(t)\right\|\le\int_0^t\left\|A(\tau)\right\|d\tau\cdot\left\|x_0\right\|,$$

где нормы вектора $x(t)$ и матрицы $A(t)$ понимаются следующим образом:

$$\left\|x(t)\right\|=\sqrt{\sum_{k=1}^n\left|x_k(t)\right|^2},\quad \left\|A(t)\right\|=\sqrt{\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\left|a_{jk}(t)\right|^2}\ .$$

Предположим по индукции, что

$$\left\|x_k(t)-x_{k-1}(t)\right\|\le\frac{1}{k!}\left(\int_0^t\left\|A(\tau)\right\|d\tau\right)^k\cdot\left\|x_0\right\|. \tag{2.1.5}$$

Рассмотрим:

$$\left\|x_{k+1}(t)-x_k(t)\right\|=\left\|\int_0^t A(\tau)x_k(\tau)d\tau-\int_0^t A(\tau)x_{k-1}(\tau)d\tau\right\|=$$

$$=\left\|\int_0^t A(\tau)(x_k(\tau)-x_{k-1}(\tau))d\tau\right\|\le\int_0^t\left\|A(\tau)\right\|\cdot\left\|x_k(\tau)-x_{k-1}(\tau)\right\|d\tau\le$$

$$\le\int_0^t\left\|A(\tau)\right\|\frac{1}{k!}\left(\int_0^\tau\left\|A(s)\right\|ds\right)^k\cdot\left\|x_0\right\|d\tau=\frac{1}{k!}\left\|x_0\right\|\int_0^t\left(\int_0^\tau\left\|A(s)\right\|ds\right)^k d\left(\int_0^\tau\left\|A(s)\right\|ds\right)=$$

$$=\frac{\left\|x_0\right\|}{k!}\cdot\frac{1}{k+1}\left(\int_0^\tau\left\|A(s)\right\|ds\right)^{k+1}\Bigg|_0^t=\frac{\left\|x_0\right\|}{(k+1)!}\left(\int_0^t\left\|A(s)\right\|ds\right)^{k+1},$$

т. е. неравенство (2.1.5) методом индукции доказано.

Обозначим $x(t)=\lim\limits_{k\to\infty} x_k(t)$. Тогда $x(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (2.1.3) и имеет кусочно непрерывную производную. Дифференцируя (2.1.3) получим, что $x(t)$ удовлетворяет при всех t, не являющихся точками разрыва матрицы $A(t)$, уравнению (2.1.2).

Перейдём к вопросу о единственности решения. Для этого докажем лемму, имеющую и самостоятельное значение.

Лемма Гронуолла–Беллмана. *Пусть интегрируемые кусочно непрерывные функции* $\xi(t)\ge 0$ *и* $\varphi(t)\ge 0$ *удовлетворяют* $\forall\, t>0$ *неравенству:*

$$\xi(t)\le \xi_0+\int_0^t \varphi(\tau)\xi(\tau)\,d\tau,\quad \xi_0>0. \tag{2.1.6}$$

Тогда

$$\xi(t)\le \xi_0 \exp\left(\int_0^t \varphi(s)\,ds\right). \tag{2.1.7}$$

Доказательство. Умножим обе части неравенства (2.1.6) на $\varphi(t)$:

$$\xi(t)\varphi(t)\le \xi_0\varphi(t)+\varphi(t)\int_0^t \varphi(\tau)\xi(\tau)\,d\tau.$$

Обозначим:

$$\psi(t)=\int_0^t \varphi(\tau)\xi(\tau)\,d\tau,\quad \psi(0)=0.$$

Тогда

$$\dot\psi(t)\le \xi_0\varphi(t)+\varphi(t)\psi(t)=\varphi(t)(\xi_0+\psi(t)).$$

Или:

$$\frac{\dot\psi(t)}{\xi_0+\psi(t)}\le \varphi(t).$$

Интегрируя обе части на промежутке $(0,\,t)$, где $t>0$, получим:

$$\int_0^t \frac{\dot\psi(\tau)d\tau}{\xi_0+\psi(\tau)}\le \int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau.$$

Или:

$$\ln\left|\frac{\xi_0+\psi(t)}{\xi_0}\right| \le \int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau .$$

Следовательно:

$$\xi_0+\psi(t) \le \xi_0 \exp\left(\int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau\right),$$

т. е., учитывая выражение для $\psi(t)$:

$$\xi_0+\int_0^t \varphi(\tau)\xi(\tau)\,d\tau \le \xi_0 \exp\left(\int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau\right) .$$

А отсюда с учётом (2.1.6) вытекает требуемое. Лемма доказана.

Вернёмся к доказательству единственности решения векторного уравнения (2.1.2) с начальным условием $x(0)=x_0$. Из (2.1.3) имеем:

$$\|x(t)\| \le \|x(0)\| + \int_0^t \|A(\tau)\|\cdot\|x(\tau)\|\,d\tau .$$

Тогда из доказанной леммы следует:

$$\|x(t)\| \le \|x(0)\| \exp\left(\int_0^t \|A(\tau)\|d\tau\right). \tag{2.1.8}$$

Если $x^{(1)}(t)$, $x^{(2)}(t)$ – решения уравнения (2.1.2) с одинаковыми начальными условиями, то $x(t)=x^{(2)}(t)-x^{(1)}(t)$ – решение того же уравнения с начальным условием $x(0)=0$, а тогда из (2.1.8) следует, что $x(t)\equiv 0$, что и доказывает единственность решения.

2.2. Фундаментальная система решений и матрицант линейной однородной системы

Рассмотрим какие-либо k решений системы (2.1.2):

$$x^{(j)}(t)=\operatorname{colon}\left(x_{j1}(t),\dots,x_{jn}(t)\right) \quad \left(j=\overline{1,k}\right).$$

Матрица $X^{(k)}(t) = \left\| x^{(1)}(t), \ldots, x^{(k)}(t) \right\|$ размерности $n \times k$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению:

$$\frac{dX^{(k)}}{dt} = A(t)X^{(k)}. \tag{2.2.1}$$

Определение. *Фундаментальной системой решений (ФСР)* уравнения (2.1.2) называется система n его решений $x^{(1)}(t), \ldots, x^{(n)}(t)$, линейно независимых $\forall t \in (-\infty, +\infty)$. Квадратная матрица $X^{(n)}(t) = \left\| x^{(1)}(t), \ldots, x^{(n)}(t) \right\|$ называется *матрицей ФСР*.

Общее решение системы (2.1.2) в этом случае имеет вид:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j x^{(j)}(t),$$

где $c_1, \ldots, c_n$ – произвольные постоянные. Или в матричной форме:

$$x(t) = X^{(n)}(t)c^{(n)},$$

где $c^{(n)} = \mathrm{colon}(c_1, \ldots, c_n)$ – постоянный вектор.

Если векторы $x^{(1)}(t), \ldots, x^{(n)}(t)$ образуют ФСР системы (2.1.2), то любая система векторов $cx^{(1)}(t), \ldots, cx^{(n)}(t)$, где $c = \mathrm{const}$, также образует ФСР системы (2.1.2), т. е. ФСР определяется с точностью до постоянного множителя. Т. о., если система (2.1.2) имеет хотя бы одну ФСР, то она имеет бесчисленное множество ФСР.

Определение. Матрица $X(t)$ ФСР системы (2.1.2), удовлетворяющая условию $X(0) = E$ (E – единичная матрица), называется *матрицантом* системы (2.1.2). В силу теоремы единственности матрицант определяется однозначно (в отличие от матрицы ФСР).

Любое решение $x(t)$ системы (2.1.2) может быть найдено по формуле:

$$x(t) = X(t)x(0).$$

А произвольная $n \times k$-матрица $X^{(k)}(t)$ решений системы (2.1.2) – по формуле:

$$X^{(k)}(t) = X(t)X^{(k)}(0).$$

Для любой матрицы ФСР имеет место формула Остроградского–Лиувилля:

$$\det X^{(n)}(t) = \det X^{(n)}(0) \exp\left(\int_0^t \operatorname{sp} A(\tau)\, d\tau \right).$$

где $\operatorname{sp} A(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}(t)$ – *след* матрицы $A(t)$.

В частности, для матриканта эта формула принимает вид:

$$\det X(t) = \exp\left(\int_0^t \operatorname{sp} A(\tau)\, d\tau \right).$$

Пример 1. Рассмотрим треугольную систему 2-го порядка:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2.$$

Нетрудно проверить, что матрикант этой системы имеет вид:

$$X(t) = \begin{pmatrix} \exp\left(\int_0^t a_{11}(s)\, ds \right) & 0 \\ \exp\left(\int_0^t a_{22}(s)\, ds \right) \cdot \int_0^t a_{21}(\tau) \exp\left(\int_0^\tau (a_{11}(s) - a_{22}(s))\, ds \right) d\tau & \exp\left(\int_0^t a_{22}(s)\, ds \right) \end{pmatrix}$$

Пример 2. Рассмотрим диагональную систему n-ого порядка:

$$\frac{dx_j}{dt} = \lambda_j(t)x_j, \quad j = \overline{1,n}.$$

Легко проверить, что в этом случае матрикант имеет вид:

$$X(t) = \operatorname{diag}\left(\exp\left(\int_0^t \lambda_1(\tau)\, d\tau \right),\ \exp\left(\int_0^t \lambda_2(\tau)\, d\tau \right),\ \ldots,\ \exp\left(\int_0^t \lambda_n(\tau)\, d\tau \right) \right).$$

Рассмотрим теперь систему с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \qquad (2.2.2)$$

где A – постоянная матрица. Покажем, что матрицант системы (2.2.2) имеет вид:

$$X(t) = e^{At},$$

где

$$e^Z = E + Z + \frac{Z^2}{2!} + \ldots + \frac{Z^n}{n!} + \ldots$$

– матричная экспонента. В самом деле, найдём производную:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At}\right) = \frac{d}{dt}\left(E + At + \frac{A^2t^2}{2} + \frac{A^3t^3}{3!} + \ldots + \frac{A^nt^n}{n!} + \ldots \right) =$$
$$= A + \frac{2A^2t}{2!} + \frac{3A^3t^2}{3!} + \frac{4A^4t^3}{4!} + \ldots + \frac{nA^nt^{n-1}}{n!} + \ldots =$$
$$= A\left(E + At + \frac{A^2t^2}{2} + \frac{A^3t^3}{3!} + \ldots + \frac{A^nt^n}{n!} + \ldots \right) = Ae^{At}.$$

Таким образом, видим, что матрица e^{At} удовлетворяет уравнению (2.2.2). Поскольку $e^{A\cdot 0} = E$, то отсюда вытекает, что эта матрица действительно является матрицантом системы (2.2.2). Любое решение этого уравнения может быть найдено по формуле: $x(t) = e^{At}x(0)$.

Из формулы Остроградского–Лиувилля следует, что $\det e^{At} = e^{t\cdot \mathrm{sp}\, A}$.

Таким образом, мы нашли матрицант системы (2.2.2) при помощи матричной экспоненты. Иногда выгодно действовать наоборот, т. е. находить матричную экспоненту, находя непосредственно матрицант системы (2.2.2). Рассмотрим следующий пример.

Пример. Найти матрицу e^A, если матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем векторное уравнение $\dot{x} = Ax$ в покомпонентной форме:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = -x_2.$$

Составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$. В данном случае оно имеет вид $\lambda(\lambda^2 + 1) = 0$, и его корни: $\lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = \pm i$. Линейно независимые решения нашей системы могут быть записаны в виде:

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad x_3(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}.$$

Первые два решения в точке $t = 0$ дают векторы $\operatorname{colon}(1, 0, 0)$, $\operatorname{colon}(0, 1, 0)$, т. е. нужное условие выполнено. Третий вектор в этой точке равен $\operatorname{colon}(1, 0, -1)$. Следовательно, его нужно заменить такой комбинацией векторов $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$, которая бы в точке $t = 0$ давала вектор $\operatorname{colon}(0, 0, 1)$. Нетрудно проверить, что искомой комбинацией является вектор:

$$\tilde{x}_3(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрицант нашей системы таков:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & \sin t & 1 - \cos t \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Полагая здесь $t = 1$, получим:

$$e^{A} = \begin{pmatrix} 1 & \sin 1 & 1 - \cos 1 \\ 0 & \cos 1 & \sin 1 \\ 0 & -\sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим ещё такое свойство линейной однородной системы. В общем случае её матрица $A(t)$ может быть комплекснозначной. Но если она вещественная, а комплекснозначная вектор-функция $u(t) + iv(t)$ является решением линейной системы с этой матрицей, то вещественные вектор-функции $u(t)$ и $v(t)$ тоже являются решениями этой же системы. Это следует из равенств:

$$\frac{du}{dt}+i\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(u+iv\right)=A(t)(u+iv)=A(t)u+iA(t)v,$$

т. е.

$$\frac{du}{dt}=A(t)u,\quad \frac{dv}{dt}=A(t)v.$$

А отсюда вытекает, что матрицант системы с вещественными коэффициентами тоже вещественная матрица-функция. В самом деле, пусть матрицант системы (2.1.2) комплекснозначный, т. е. имеет вид:

$$X(t)=U(t)+iV(t).$$

Тогда матрицы $U(t)$, $V(t)$ являются решениями системы (2.1.2), т. е.

$$\frac{dU(t)}{dt}=A(t)U(t),\quad \frac{dV(t)}{dt}=A(t)V(t).$$

Но поскольку $X(0)=E$, то $U(0)=E$, $V(0)=O$, где O – нуль матрица. А тогда в силу единственности решения задачи Коши получим, что $V(t)\equiv O$, т. е. $X(t)$ – вещественная матрица.

2.3. Построение решения линейной неоднородной системы с переменными коэффициентами

Изучим теперь вопрос о построении общего решения линейной неоднородной системы:

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+f(t), \tag{2.3.1}$$

где $f(t)=\operatorname{colon}(f_1(t),\ldots,f_n(t))$. Будем искать это решение в виде:

$$x=X(t)u(t), \tag{2.3.2}$$

где $X(t)$ – матрицант соответствующей однородной системы (2.1.2), а $u(t)$ – пока не определённый вектор. Дифференцируя равенство (2.3.2), и, подставляя в (2.3.1), получим:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dX(t)}{dt}u+X(t)\frac{du}{dt}=A(t)X(t)u+f(t).$$

На основании равенства

$$\frac{dX(t)}{dt}=A(t)X(t),$$

отсюда следует:

$$\frac{du}{dt}=X^{-1}(t)f(t).$$

Интегрируя, получаем:

$$u=\int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau+C,$$

где C – постоянный вектор. Подставляя в (2.3.2), получим:

$$x=X(t)\left(C+\int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau\right). \tag{2.3.3}$$

Эта формула даёт общее решение уравнения (2.3.1).

Полагая здесь $t=0$, и, учитывая, что $X(0)=E$, получаем, что $C=x(0)$, и, таким образом, решение уравнения (2.3.1) может быть записано в виде:

$$x(t)=X(t)\left(x(0)+\int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau\right).$$

Пример. Построить общее решение системы:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2+\operatorname{tg}^2 t-1\\ \dot{x}_2=-x_1+\operatorname{tg} t\end{cases}.$$

Введём векторы:

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\quad f(t)=\begin{pmatrix} \operatorname{tg}^2 t-1 \\ \operatorname{tg} t \end{pmatrix}$$

и матрицу

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда наша система запишется в виде:

$$\frac{dx}{dt}=Ax+f(t).$$

Нетрудно проверить, что матрицант соответствующей однородной системы таков:

$$X(t)=\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Имеем:

$$X^{-1}(t)=\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix},\quad X^{-1}(t)f(t)=\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin^3 t\cos^{-2} t \end{pmatrix},$$

$$\int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau=\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t+\cos^{-1} t-2 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с формулой (2.3.3) получим:

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\left(C+\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t+\cos^{-1} t-2 \end{pmatrix}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t+\cos^{-1} t-2 \end{pmatrix}\right).$$

Переобозначив здесь c_2-2 снова через c_2, и, записав покомпонентно, окончательно получим:

$$x_1=c_1\cos t+c_2\sin t+\operatorname{tg} t,\quad x_2=-c_1\sin t+c_2\cos t+2.$$

2.4. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами Случай простых корней характеристического уравнения

Рассмотрим теперь линейную однородную систему n-ого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k, \quad j = \overline{1,n}, \tag{2.4.1}$$

где a_{jk} – постоянные коэффициенты. В матричной форме система (2.4.1) будет иметь вид:

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{2.4.2}$$

где $x = \mathrm{colon}\left(x_1, \ldots, x_n\right)$, $A = (a_{jk})_{j,k=\overline{1,n}}$. Рассмотрим характеристическое уравнение системы (2.4.2):

$$\Delta(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{2.4.3}$$

Это уравнение инвариантно относительно линейного невырожденного преобразования переменных, т. е., если $x = By$, $\det B \neq 0$, то $y = B^{-1}x$, и

$$\frac{dy}{dt} = B^{-1}\frac{dx}{dt} = B^{-1}Ax = B^{-1}ABy = Cy. \tag{2.4.4}$$

Рассмотрим характеристический определитель для системы (4):

$$\det(C - \rho E) = \det(B^{-1}AB - \rho E) = \det(B^{-1}AB - \rho B^{-1}B) =$$
$$= \det(B^{-1}(A - \rho E)B) = \det B^{-1} \cdot \det(A - \rho E) \cdot \det B = \det(A - \rho E).$$

Таким образом, характеристическое уравнение для системы (2.4.4) совпадает с таковым для системы (2.1.2). Отсюда следует, в частности, что подобные матрицы A и $C = B^{-1}AB$ имеют одни и те же собственные значения (корни уравнения (2.1.3)).

Рассмотрим сначала ситуацию, когда уравнение (2.4.3) имеет n простых корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Этим корням соответствует система из n линейно независимых собственных векторов $h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots, h^{(n)}$ матрицы A. Если составить из компонент этих векторов матрицу H, то она будет невырожденной, а матрица $H^{-1}AH = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Другими словами, в базисе из собственных векторов матрица линейного оператора имеет диагональный вид. Т. е. преобразование $x = Hy$ в системе (2.4.2) приводит эту систему к диагональному виду:

$$\frac{dy}{dt} = \Lambda y. \qquad (2.4.5)$$

Матрицант этой системы (см. Пример 2 в п. 2.2) таков:

$$Y(t) = \operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\right). \qquad (2.4.6)$$

Следовательно, общее решение системы (2.4.5) имеет вид:

$$y(t) = Y(t)c, \qquad (2.4.7)$$

где c – постоянный вектор. Матрицант исходной системы (2.4.2) тогда примет вид:

$$X(t) = HY(t)H^{-1}, \qquad (2.4.8)$$

а её общее решение:

$$x(t) = X(t)c\ . \qquad (2.4.9)$$

Пример 1. Найти матрицант системы

$$\frac{dx_1}{dt} = 5x_1 + 2x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -4x_1 - x_2\ . \qquad (2.4.10)$$

Характеристическое уравнение этой системы

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$, т. е. вещественные и простые. Компоненты линейно независимых собственных векторов для каждого из них определятся из линейных однородных систем алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (5-\lambda_j)\alpha_j + 2\beta_j = 0, \\ -4\alpha_j - (1+\lambda_j)\beta_j = 0 \end{cases} \quad j = 1,2\ .$$

Полагая, например, $\alpha_1 = 1,\ \beta_1 = -2,\ \alpha_2 = 1,\ \beta_2 = -1$, получим матрицу преобразования системы (2.4.10) к диагональному виду:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрицант системы (2.4.10) имеет вид:

$$X(t) = H \cdot \operatorname{diag}\left(e^t, e^{3t}\right) \cdot H^{-1} = \begin{pmatrix} 2e^{3t} - e^t & e^{3t} - e^t \\ 2e^t - 2e^{3t} & 2e^t - e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы (2.4.10) получим по формуле $x(t) = X(t)c$, где c – постоянный вектор. Или в покомпонентной форме:

$$x_1 = c_1\left(2e^{3t} - e^t\right) + c_2\left(e^{3t} - e^t\right), \quad x_2 = c_1\left(2e^t - 2e^{3t}\right) + c_2\left(2e^t - e^{3t}\right).$$

Если среди корней характеристического уравнения системы с вещественными коэффициентами есть комплексные (они тогда будут присутствовать парами – наряду с каждым корнем $\lambda_1 = a + ib$ будет присутствовать и ему сопряжённый $\lambda_2 = a - ib$), то для построения матриканта достаточно анализа лишь одного из этих корней. Как было показано в п. 2.2, матрицант системы с вещественными коэффициентами является вещественным (даже при наличии комплексных корней характеристического уравнения). И его можно построить следующим образом. Обозначим через $h = h^{(1)} + ih^{(2)}$ собственный вектор матрицы A системы, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = a + ib$. Тогда вектор $x(t) = \left(h^{(1)} + ih^{(2)}\right)e^{(a+ib)t}$ будет решением этой системы, а, следовательно, её же решениями будут вещественная и мнимая части этого вектора:

$$x^{(1)}(t) = e^{at}\left(h^{(1)}\cos bt - h^{(2)}\sin bt\right),\ x^{(2)}(t) = e^{at}\left(h^{(2)}\cos bt + h^{(1)}\sin bt\right).$$

Несложно убедиться, что эти решения являются линейно независимыми. Действительно, в противном случае существовала бы такая вещественная постоянная k, что $\forall t \in \mathbb{R}$ было бы выполнено: $x^{(2)}(t) = kx^{(1)}(t)$. А это привело бы к равенству $k^2 + 1 = 0$, что невозможно. Следовательно, вектор-функции $x^{(1)}(t)$, $x^{(2)}(t)$ могут быть использованы как составляющие ФСР, и тогда в рассмотрении корня $\lambda_2 = a - ib$ необходимость отпадает. Зная ФСР, легко найти и матрицант.

Пример 2. Найти матрицант и общее решение системы:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 3x_2. \tag{2.4.11}$$

Характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

имеет корни $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Рассмотрим корень $\lambda_1 = 2 + i$ и найдём компоненты соответствующего ему собственного вектора из системы:

$$\begin{cases} -(1+i)\alpha + \beta = 0, \\ -2\alpha + (1-i)\beta = 0. \end{cases}$$

Полагая, например, $\alpha = 1,\ \beta = 1 + i$, получим комплекснозначное решение системы (2.4.11):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(2+i)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{2t}(\cos t + i\sin t) =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} e^{2t} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Используя теперь вещественную и мнимую части полученного решения, получаем ФСР системы (2.4.11):

$$\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} e^{2t}, \qquad \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Общее решение системы (2.4.11) будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Теперь найдём матрицант. Определим константы c_1, c_2 сначала из условия:

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получим $c_1 = 1, c_2 = -1$ и, т.о. получаем частное решение системы (2.4.11):

$$\begin{pmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ -2\sin t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Теперь определим константы c_1, c_2 из условия:

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получим $c_1 = 0, c_2 = 1$, и т. о. получаем ещё одно частное решение:

$$\begin{pmatrix} x_1^{**}(t) \\ x_2^{**}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Из этих двух решений составляем матрицант системы (2.4.11):

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t & \sin t \\ -2\sin t & \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

В рассмотрении корня $\lambda_2 = 2 - i$ уже нет необходимости.

2.5. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами Случай кратных корней характеристического уравнения Жорданова нормальная форма

Рассмотрим теперь случай, когда среди корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ характеристического уравнения (2.4.3) есть кратные. Тогда в соответствии с теоремой линейной алгебры существует базис, называемый *жордановым базисом*, в котором матрица линейного оператора имеет *жорданову нормальную форму* (ЖНФ):

$$J = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{m_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{m_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}, \tag{2.5.1}$$

где $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$, а

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

$J_m(\lambda)$ – квадратная матрица размерности m, называемая *жордановой клеткой* (*ящиком*, *блоком*). Среди чисел (собственных значений матрицы A) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ могут быть и совпадающие. Количество $s_m(\lambda)$ жордановых клеток порядка m в ЖНФ, соответствующих числу λ, определяется равенством:

$$s_m(\lambda) = r_{m-1}(\lambda) - 2r_m(\lambda) + r_{m+1}(\lambda), \tag{2.5.2}$$

где $r_k(\lambda) = \operatorname{rang}\left(A - \lambda E\right)^k$. Общее количество жордановых клеток, соответствующих собственному значению λ, равно $n - r_1(\lambda)$ – числу линейно независимых собственных векторов матрицы A, соответствующих собственному значению λ. Максимальный размер жордановой клетки, соответствующей собственному значению λ, равен наименьшему натуральному числу m, для которого выполнено равенство: $r_m(\lambda) = r_{m+1}(\lambda)$. По этим данным ЖНФ выписывается однозначно с точностью до расположения жордановых клеток.

Рассмотрим матрицу

$$J - \lambda E = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1 - \lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{m_2}(\lambda_2 - \lambda) & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{m_k}(\lambda_k - \lambda) \end{pmatrix}.$$

Определители матриц $J_{m_j}(\lambda_j - \lambda) \quad (j = \overline{1,k})$ называются *элементарными делителями* матрицы A, а размерности $m_1, m_2, \ldots, m_k$ жордановых клеток – *кратностями элементарных делителей.* Структура ЖНФ и, следовательно, решений системы (2.4.2), в общем случае определяется именно кратностью элементарных делителей, а не кратностью собственных значений матрицы A. Сумма кратностей элементарных делителей, соответствующих собственному значению λ_j, совпадает с кратностью этого собственного значения. Очевидно тогда, что, если λ_j – простое собственное значение матрицы A, то ему соответствует и простой элементарный делитель. Но обратное неверно, т. е. простые элементарные делители могут соответствовать и кратным собственным значениям.

Если все элементарные делители простые, то ЖНФ принимает диагональный вид, в частности, это будет в случае простых корней характеристического уравнения (см. п. 2.4).

Зная ЖНФ матрицы, легко построить и соответствующий жорданов базис. Рассмотрим жорданову клетку $J_m(\lambda)$ порядка m, соответствующую собственному значению λ. Определим векторы базиса следующим образом. Вектор h_m определим из уравнения:

$$\left(A - \lambda E\right)^m h_m = 0.$$

Далее полагаем:

$$\begin{aligned} &h_{m-1} = \left(A - \lambda E\right) h_m, \\ &h_{m-2} = \left(A - \lambda E\right) h_{m-1}, \\ &\ldots \\ &h_1 = \left(A - \lambda E\right) h_2. \end{aligned}$$

В этом случае будут выполняться равенства $\left(A-\lambda E\right)^k h_k = 0 \quad \left(k=\overline{1,m}\right)$. В частности, вектор h_1 будет собственным вектором матрицы A. Векторы $h_2,\ldots,h_m$ называются *присоединёнными* к вектору h_1. Все векторы $h_1, h_2,\ldots,h_m$ нужно выбирать ненулевыми. Тогда они будут являться частью жорданова базиса, которая соответствует клетке $J_m(\lambda)$. Затем аналогичные построения нужно проделать для всех других жордановых клеток, при этом следя за тем, чтобы векторы с одними и теми же номерами, соответствующие разным жордановым клеткам, были линейно независимы. В итоге весь жорданов базис выпишется полностью.

Пример. Для матрицы A найти ЖНФ и построить жорданов базис.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что характеристическое уравнение $\det(A-\lambda E)=0$ имеет корень $\lambda=2$ кратности 3. Рассмотрим

$$A-2E=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \left(A-2E\right)^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем $\operatorname{rang}(A-2E)=1$, следовательно, в ЖНФ имеются две клетки. Этого достаточно, чтобы выписать ЖНФ с точностью до расположения клеток:

$$J=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что собственному значению $\lambda=2$ соответствует один простой элементарный делитель $\lambda-2$ и один элементарный делитель 2-й кратности $(\lambda-2)^2$. Сумма их кратностей равна 3 – кратности собственного значения $\lambda=2$.

Перейдём к построению жорданова базиса. Используем первую клетку порядка 2. Определим присоединённый вектор h_2 из условия:

$(A-2E)^2 h_2 = 0$, т.е. $Oh_2 = 0$.

Тогда

$$h_2 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные. Собственный вектор h_1 матрицы A определим равенством:

$$h_1 = (A-2E)h_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_1 + c_2 \\ -4c_1 + c_2 \\ -2c_1 + c_2 \end{pmatrix}.$$

Теперь используем вторую клетку порядка 1. Соответствующий собственный вектор обозначим через g_1. Имеем $(A-2E)g_1 = 0$. Векторы h_1 и g_1 должны быть линейно независимыми. Полагая, например $c_1 = 0,\ c_2 = 1,\ \ c_3 = 0$, получим:

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \ h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Полагая $c_1 = 1,\ c_2 = 2,\ c_3 = 0$, получим:

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Векторы h_2, h_1, g_1 и образуют жорданов базис. Их компоненты образуют матрицу перехода от матрицы A к ЖНФ:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad J = H^{-1}AH.$$

Рассмотрим линейное однородное уравнение n-ого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + p_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + p_{n-2}\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \ldots + p_1\frac{dx}{dt} + p_0 x = 0. \qquad (2.5.3)$$

Введя

$$x_1 = x,\ x_2 = \frac{dx}{dt}, \ldots, x_{n-1} = \frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}},\ x_n = \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}},$$

запишем уравнение (2.5.3) в виде эквивалентной системы:

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = x_2,\\
&\frac{dx_2}{dt} = x_3,\\
&\ldots\\
&\frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n,\\
&\frac{dx_n}{dt} = -p_0x_1 - p_1x_2 - \ldots - p_{n-2}x_{n-1} - p_{n-1}x_n.
\end{aligned}$$

Или в матричной форме:

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \qquad (2.5.3)$$

где $x = \mathrm{colon}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, а

$$A = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\
-p_0 & -p_1 & -p_2 & \cdots & -p_{n-2} & -p_{n-1}
\end{pmatrix}.$$

Пусть λ_1 – корень уравнения $\det\left(A - \lambda E\right) = 0$, т. е. в данном случае характеристического уравнения для уравнения (2.5.3):

$$\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + p_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + p_1\lambda + p_0 = 0. \tag{2.5.4}$$

Матрица $A - \lambda_1 E$ имеет вид:

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_1 & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \cdots & -p_{n-2} & -p_{n-1} - \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\operatorname{rang}\left(A - \lambda_1 E\right) = n - 1$, так как имеется минор $(n-1)$-го порядка, отличный от нуля. Следовательно, корню λ_1 соответствует в ЖНФ одна клетка и один элементарный делитель $\left(\lambda - \lambda_1\right)^{k_1}$. Его степень (порядок клетки) равна кратности k_1 корня λ_1. Таким образом, в случае уравнения (2.5.3) простые элементарные делители соответствуют лишь простым корням характеристического уравнения.

2.6. Структура решений линейной однородной системы с постоянными коэффициентами. Группы решений

Выясним теперь структуру решений системы (2.4.2). Если все корни характеристического уравнения (2.4.3) простые, то искомая структура определяется формулами (2.4.6) – (2.4.9). Рассмотрим случай, когда среди корней уравнения (2.4.3) могут быть кратные. Тогда, построив для матрицы A ЖНФ J и жорданов базис с матрицей H, с помощью преобразования

$$x = Hy \tag{2.6.1}$$

приведём систему (2.4.2) к виду:

$$\frac{dy}{dt} = Jy. \tag{2.6.2}$$

Система (2.6.2) называется *канонической формой* системы (2.4.2). Она удобна тем, что легко интегрируется непосредственно сверху вниз. Поскольку матрицант системы (2.6.2) равен $\exp(Jt)$, то матрицант системы (2.4.2):

$$X(t) = H \cdot \exp(Jt) \cdot H^{-1}. \tag{2.6.3}$$

Поэтому для выяснения структуры решений системы (2.4.2) необходимо выяснить структуру матрицы $\exp(Jt)$.

По свойству матричной экспоненты с учётом структуры (2.5.1) матрицы J можем записать:

$$\exp(Jt) = \begin{pmatrix} \exp\left(J_{m_1}(\lambda_1)t\right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp\left(J_{m_2}(\lambda_2)t\right) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \exp\left(J_{m_k}(\lambda_k)t\right) \end{pmatrix}. \tag{2.6.4}$$

Вычислим матрицу $\exp\left(J_m(\lambda)t\right)$. Матрица $J_m(\lambda)$ является матрицей линейной системы:

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = \lambda x_1, \\ &\frac{dx_2}{dt} = \lambda x_2 + x_1, \\ &\ldots \\ &\frac{dx_{m-1}}{dt} = \lambda x_{m-1} + x_{m-2}, \\ &\frac{dx_m}{dt} = \lambda x_m + x_{m-1}, \end{aligned} \tag{2.6.5}$$

поэтому матрица $\exp\left(J_m(\lambda)t\right)$ является матрицантом системы (2.6.5). Вычислим его. Интегрируя уравнения системы (2.6.5) последовательно сверху вниз, несложно убедиться, что искомый матрицант имеет вид:

$$\exp\left(J_m(\lambda)t\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \dfrac{t^2}{2!} & t & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{t^{m-2}}{(m-2)!} & \dfrac{t^{m-3}}{(m-3)!} & \dfrac{t^{m-4}}{(m-4)!} & \cdots & 1 & 0 \\ \dfrac{t^{m-1}}{(m-1)!} & \dfrac{t^{m-2}}{(m-2)!} & \dfrac{t^{m-3}}{(m-3)!} & \cdots & t & 1 \end{pmatrix}\cdot e^{\lambda t}. \qquad (2.6.6)$$

Вследствие соотношений (2.6.4), (2.6.6) решения, составляющие матрицант системы (2.6.2) разобьются на k групп, содержащих соответственно $m_1, m_2, \ldots, m_k$ решений. Группа с номером ν $\left(\nu=\overline{1,k}\right)$ будет иметь вид матрицы с n строками и m_ν столбцами. Первые $m_1+m_2+\ldots+m_{\nu-1}$ и последние $n-\left(m_1+m_2+\ldots+m_\nu\right)$ строк этой матрицы нулевые, а строки, имеющие номера с $m_1+m_2+\ldots+m_{\nu-1}+1$ по $m_1+m_2+\ldots+m_\nu$ образуют матрицу, имеющую вид $\exp\left(J_{m_\nu}\left(\lambda_\nu\right)t\right)$. Напомним при этом, что среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ могут быть и совпадающие.

С учётом соотношения (2.6.3) отсюда теперь следует, что на соответствующие группы решений разбивается и матрицант системы (2.4.2). Группа с номером ν $\left(\nu=\overline{1,k}\right)$ имеет вид $P^{(\nu)}_{m_\nu-1}(t)e^{\lambda_\nu t}$, где $P^{(\nu)}_{m_\nu-1}(t)$ – матрица размерности $n\times m_\nu$, каждый элемент которой является полиномом степени не выше, чем $m_\nu-1$. Следовательно, учитывая соотношение (2.4.9), можем сделать вывод, что аналогичную структуру имеют все решения системы (2.4.2) .

Пример 1. Построить матрицант системы:

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\quad \frac{dx_2}{dt}=-4x_1+4x_2,\quad \frac{dx_3}{dt}=-2x_1+x_2+2x_3, \qquad (2.6.7)$$

определить группы решений. Выписать общее решение этой системы.

В примере из п. 2.5 для матрицы системы (2.6.7)

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

мы построили ЖНФ

$$J=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

и жорданов базис с матрицей

$$H=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Или:

$$J=\begin{pmatrix} J_2(2) & O_{12} \\ O_{21} & J_1(2) \end{pmatrix},$$

где O_{12} – нулевая матрица размерности 2×1, O_{21} – нулевая матрица размерности 1×2,

$$J_2(2)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad J_1(2)=\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с (2.6.4) тогда имеем:

$$\exp\left(Jt\right)=\begin{pmatrix} \exp\left(J_2(2)t\right) & O_{12} \\ O_1 & \exp\left(J_1(2)t\right) \end{pmatrix}.$$

Далее в соответствии с (2.6.6):

$$\exp\left(J_2(2)t\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}\cdot e^{2t}=\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ te^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \exp\left(J_1(2)t\right)=\left(e^{2t}\right).$$

Таким образом,

$$\exp\left(Jt\right) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ te^{2t} & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Из (2.6.3) получим матрицант системы (2.6.7):

$$X(t) = H \cdot \exp\left(Jt\right) \cdot H^{-1} = \begin{pmatrix} (-2t+1)e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ -4te^{2t} & (2t+1)e^{2t} & 0 \\ -2te^{2t} & te^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Имеем в данном случае две группы решений:

$$\begin{pmatrix} (-2t+1)e^{2t} & te^{2t} \\ -4te^{2t} & (2t+1)e^{2t} \\ -2te^{2t} & te^{2t} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы (2.6.7) получим, взяв линейную комбинацию столбцов матриканта. Или, расписав в покомпонентной форме:

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1(-2t+1)\,e^{2t} + c_2 t\,e^{2t}, \\ x_2 &= -4c_1 te^{2t} + c_2(2t+1)\,e^{2t}, \\ x_3 &= -2c_1 te^{2t} + c_2 te^{2t} + c_3 e^{2t}. \end{aligned}$$

Пример 2. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение 4-го порядка:

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0. \qquad (2.6.8)$$

Его общее решение легко построить, используя соответствующую теорию линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Но здесь мы решим эту задачу с использованием ЖНФ. Характеристическое уравнение для уравнения (2.6.8):

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \qquad (2.6.9)$$

имеет корни $\lambda_{1,2} = -i,\ \ \lambda_{3,4} = i$. Введя

$$x_1 = x,\ x_2 = \frac{dx}{dt},\ x_3 = \frac{d^2x}{dt^2},\ \ x_4 = \frac{d^3x}{dt^3},$$

запишем уравнение (2.6.8) в виде эквивалентной системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_4, \\ \dfrac{dx_4}{dt} = -x_1 - 2x_3. \end{cases} \tag{2.6.10}$$

Её матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ совпадает с уравнением (2.6.9). В соответствии с изложенным в п. 2.5 можем сразу выписать ЖНФ матрицы A:

$$J = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{pmatrix}.$$

Несложно получить, что матрица H жорданова базиса может быть такой:

$$H = \begin{pmatrix} 2i & -1 & -2i & -1 \\ 1 & i & 1 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -i & 1 & i \end{pmatrix}.$$

$J = H^{-1}AH$. Матрица $\exp(Jt)$ имеет вид:

$$\exp(Jt) = \begin{pmatrix} e^{-it} & 0 & 0 & 0 \\ te^{-it} & e^{-it} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{it} & 0 \\ 0 & 0 & te^{it} & e^{it} \end{pmatrix}.$$

Получаем две группы решений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-it}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} e^{it}.$$

Матрицант системы (2.6.10):

$$X(t) = H \cdot \exp(Jt) \cdot H^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{t}{2}\sin t + \cos t & -\frac{t}{2}\cos t + \frac{3}{2}\sin t & \frac{t}{2}\sin t & -\frac{t}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t \\ \frac{t}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t & \frac{t}{2}\sin t + \cos t & \frac{t}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t & \frac{t}{2}\sin t \\ -\frac{t}{2}\sin t & \frac{t}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t & -\frac{t}{2}\sin t + \cos t & \frac{t}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t \\ -\frac{t}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t & -\frac{t}{2}\sin t & -\frac{t}{2}\cos t - \frac{3}{2}\sin t & -\frac{t}{2}\sin t + \cos t \end{pmatrix}.$$

Как и должно быть, матрицант вещественный.

2.7. Периодические решения линейных однородных систем с постоянными коэффициентами

Рассмотрим вновь линейную однородную систему с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dx}{dt} = Ax. \qquad (2.7.1)$$

Изучим вопрос о существовании у системы (2.7.1) периодических решений. Из структуры решений системы (2.7.1) (см. п. 2.6) следует, что периодические решения могут быть тогда и только тогда, когда среди корней характеристического уравнения $\det\left(A-\lambda E\right)=0$ имеются корни с нулевыми вещественными частями, т. е. нулевые или чисто мнимые корни.

Предположим, что характеристическое уравнение имеет нулевой корень кратности p, которому отвечают k групп решений (или, соответственно, k жордановых клеток в ЖНФ матрицы A, или k элементарных делителей матрицы A). Тогда система (2.7.1) будет иметь k частных решений вида:

$$x^{(j)}(t)=A^{(j)} \quad \left(j=\overline{1,k}\right), \tag{2.7.2}$$

где $A^{(1)},\ldots,A^{(k)}$ – постоянные векторы. Эти решения, очевидно, можно рассматривать как периодические произвольного периода. Остальные решения, соответствующие нулевому корню, будут полиномами от t, т.е. непериодическими.

Допустим теперь, что характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней $\pm i\omega$. Если эти корни кратные, и каждому из них соответствует k групп решений, то система (2.7.1) имеет $2k$ решений вида:

$$\begin{gathered} x^{(j)}(t)=B^{(j)}\cos\omega t-C^{(j)}\sin\omega t, \\ \tilde{x}^{(j)}(t)=B^{(j)}\sin\omega t+C^{(j)}\cos\omega t \\ \left(j=\overline{1,k}\right) \end{gathered} \tag{2.7.3}$$

где $B^{(j)},C^{(j)}$ – постоянные векторы. Эти решения будут периодическими периода $2\pi/\omega$. Другие решения, если они существуют, периодическими не будут, поскольку будут содержать слагаемые вида $t^m\sin\omega t$, $t^m\cos\omega t$. Но система (2.7.1) может иметь $2\pi/\omega$-периодические решения, отличные от (2.7.3), и тогда, когда характеристическое уравнение будет иметь корни вида $\pm is\omega$, где s – натуральное число. Этим корням будут соответствовать решения периода $2\pi/(s\omega)$, а, следовательно, и периода $2\pi/\omega$. Кроме того, если характеристическое уравнение имеет нулевой корень, то к $2\pi/\omega$-периодическим решениям можно отнести и решения (2.7.2). Допустим для определённости, что характеристическое уравнение имеет нулевой корень, которому соответствует k групп решений, и r пар чисто мнимых корней вида $\pm is_j\omega$ $\left(j=\overline{1,r}\right)$, где $s_1,\ldots,s_r$ – натуральные числа, причём каждому корню такой пары отвечает k_j групп решений (жордановых клеток). Тогда система (2.7.1) будет иметь

$m = k + 2k_1 + \ldots + 2k_r$ линейно независимых периодических решений периода $2\pi/\omega$. Перенумеруем эти решения в каком-либо порядке и обозначим их через $\varphi^{(1)}(t),\ldots,\varphi^{(m)}(t)$. Тогда система (2.7.1) будет иметь $2\pi/\omega$-периодическое решение

$$\varphi(t) = c_1\varphi^{(1)}(t) + \ldots + c_m\varphi^{(m)}(t),$$

зависящее от m произвольных постоянных $c_1,\ldots,c_m$. Или m-параметрическое семейство $2\pi/\omega$-периодических решений.

Пример. Рассмотрим систему, соответствующую линейному уравнению 4-го порядка:

$$\frac{d^4x}{dt^4} + k^2\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

где k – натуральное число. Эта система имеет вид:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = x_4, \quad \frac{dx_4}{dt} = -k^2x_3. \tag{2.7.4}$$

Матрица этой системы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение $\det\left(A - \lambda E\right) = \lambda^4 + k^2\lambda^2 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 0,\ \ \lambda_{3,4} = \pm ik$. ЖНФ матрицы A:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ki & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ki \end{pmatrix}.$$

Корню $\lambda = 0$ кратности 2 соответствует одна жорданова клетка порядка 2 (одна группа решений), простым чисто мнимым корням $\lambda = \pm ki$ соответствуют 2 клетки порядка 1 (две группы решений). Т.о. система (2.7.4) имеет $m = 1 + 2 = 3$ линейно независимых 2π-периодических решений (здесь $\omega = 1$, $s = 2$). Матрицант системы (2.7.4) таков:

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2}\cos kt & \frac{t}{k^2} - \frac{1}{k^3}\sin kt \\ 0 & 1 & \frac{1}{k}\sin kt & \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2}\cos kt \\ 0 & 0 & \cos kt & \frac{1}{k}\sin kt \\ 0 & 0 & -k\sin kt & \cos kt \end{pmatrix}.$$

А линейно независимые 2π-периодические решения системы (2.7.4):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\cos kt \\ k\sin kt \\ k^2\cos kt \\ -k^3\sin kt \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\sin kt \\ -k\cos kt \\ k^2\sin kt \\ k^3\cos kt \end{pmatrix}.$$

Таким образом, система (2.7.4) имеет 3-параметрическое семейство 2π-периодических решений:

$$x_1 = c_1 - c_2\cos kt - c_3\sin kt,$$
$$x_2 = kc_2\sin kt - kc_3\cos kt,$$
$$x_3 = k^2c_2\cos kt + k^2c_3\sin kt,$$
$$x_4 = -k^3c_2\sin kt + k^3c_3\cos kt.$$

Из вышеизложенных результатов следует, что линейное однородное дифференциальное уравнение n-ого порядка с постоянными коэффициентами также имеет периодические решения лишь в том случае, когда его характеристическое уравнение имеет нулевые или чисто мнимые корни. Предположим для определённости, что имеется нулевой корень и r пар чисто мнимых корней вида $\pm is_j\omega$ $\left(j = \overline{1,r}\right)$, где s_j – натуральные числа. Тогда дифференциальное уравнение имеет $(2r+1)$-параметрическое семейств $2\pi/\omega$-периодических решений. Обратим внимание, что кратность корней характеристического уравнения здесь роли не играет – каждому корню, независимо от его кратности, в данном случае соответствует в ЖНФ только одна клетка (одна группа решений, один элементарный делитель), а количество параметров в семействе периодических решений определяется только количеством жордановых клеток, соответствующих нулевым и чисто мнимым корням. А их кратностями определяются лишь размерность каждой клетки (количество решений в группе, степень элементарного делителя).

2.8. Сопряжённые линейные системы

Рассмотрим линейную однородную систему с вещественными переменными коэффициентами:

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(t) x_k, \quad j = \overline{1,n}, \tag{2.8.1}$$

Система

$$\frac{dy_j}{dt} = -\sum_{k=1}^{n} a_{kj}(t) y_k, \quad j = \overline{1,n} \tag{2.8.2}$$

называется *сопряжённой* к системе (2.8.1). Очевидно, что соответственно, системой, сопряжённой к системе (2.8.2), будет система (2.8.1). Если записать системы (2.8.1) и (2.8.2) в матричной форме, то соответственно будем иметь:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad \frac{dy}{dt} = -A^T(t)y,$$

где $A^T(t)$ – матрица, транспонированная к матрице $A(t)$.

Пусть $x_j(t)$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$ – произвольное решение системы (2.8.1), а $y_j(t)$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$ – произвольное решение системы (2.8.2). Рассмотрим:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j(t) y_j(t)\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{dx_j}{dt} y_j + x_j \frac{dy_j}{dt}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}(t) x_k\right) y_j + x_j\left(-\sum_{k=1}^{n} a_{kj}(t) y_k\right)\right] = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(a_{jk}(t) x_k y_j - a_{kj}(t) x_j y_k\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}(t)x_k y_j - \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}(t)x_j y_k \equiv 0 .$$

Отсюда вытекает, что

$$\sum_{j=1}^{n} y_j(t)x_j(t) = \text{const} . \qquad (2.8.3)$$

Это означает, что линейная форма переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j(t)x_j$$

представляет собой первый интеграл системы (2.8.1). Следовательно, знание одного частного решения системы (2.8.2) позволяет без интегрирования получить один первый интеграл системы (2.8.1), причём его левая часть есть линейная функция от искомых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Если известна ФСР системы (2.8.2):

$$\begin{pmatrix} y_{11}(t) \\ y_{12}(t) \\ \vdots \\ y_{1n}(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_{21}(t) \\ y_{22}(t) \\ \vdots \\ y_{2n}(t) \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} y_{n1}(t) \\ y_{n2}(t) \\ \vdots \\ y_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

то, подставляя поочерёдно эти решения в соотношение (2.8.3), получим n независимых первых интегралов системы (2.8.1):

$$\begin{aligned} &y_{11}(t)x_1 + y_{12}(t)x_2 + \ldots + y_{1n}(t)x_n = C_1, \\ &y_{21}(t)x_1 + y_{22}(t)x_2 + \ldots + y_{2n}(t)x_n = C_2, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot \\ &y_{n1}(t)x_1 + y_{n2}(t)x_2 + \ldots + y_{nn}(t)x_n = C_n, \end{aligned}$$

т. е. общий интеграл системы (2.8.1). Таким образом, задача интегрирования системы (2.8.1) равносильна задаче интегрирования сопряжённой к ней системы (2.8.2). Соотношение (2.8.3) является частным случаем более общего соотношения. Пусть $u_j(t)$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$ – частное решение неоднородной системы:

$$\frac{du_j}{dt}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}(t)u_k+f_j(t), \quad j=\overline{1,n}. \tag{2.8.4}$$

Тогда:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n}y_j(t)u_j(t)\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{dy_j}{dt}u_j+y_j\frac{du_j}{dt}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left[\left(-\sum_{k=1}^{n}a_{kj}(t)y_k\right)u_j+y_j\left(\sum_{k=1}^{n}a_{jk}(t)u_k\right)\right]+\sum_{j=1}^{n}y_jf_j(t)=$$

$$=-\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{kj}(t)y_ku_j+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{jk}(t)y_ju_k+\sum_{j=1}^{n}y_jf_j(t)=\sum_{j=1}^{n}y_jf_j(t). \tag{2.8.5}$$

Отсюда:

$$\sum_{j=1}^{n}y_j(t)u_j(t)=\int\left(\sum_{j=1}^{n}y_j(t)f_j(t)\right)dt. \tag{2.8.6}$$

Из (2.8.6) при $f_j(t)\equiv 0$ получаем соотношение (2.8.3).

Из соотношения (2.8.3) следует связь между матрицантами систем (2.8.1) и (2.8.2). Если $X(t)$ – матрицант системы (2.8.1), а $Y(t)$ – матрицант системы (2.8.2), то

$$X^T(t)Y(t)=E. \tag{2.8.7}$$

Или соответственно:

$$Y^T(t)X(t)=E.$$

Т. е.

$$X(t)=\left(Y^T(t)\right)^{-1}, \quad Y(t)=\left(X^T(t)\right)^{-1}.$$

Система (2.8.1) называется *самосопряжённой*, если она совпадает с сопряжённой к ней системой (2.8.2). Коэффициенты самосопряжённой системы должны удовлетворять условию:

$$a_{kj}(t)=-a_{jk}(t) \quad \left(j,k=\overline{1,n}\right). \tag{2.8.8}$$

Следовательно, диагональные коэффициенты самосопряжённой системы равны нулю. Из соотношения (2.8.3) следует, что всякие два решения $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}$ и $x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}$ самосопряжённой системы подчинены условию:

$$x_{11}x_{21} + x_{12}x_{22} + \ldots + x_{1n}x_{2n} = \text{const}. \qquad (2.8.9)$$

В частности, для всякого частного решения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ самосопряжённой системы имеем:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \text{const}. \qquad (2.8.10)$$

Отсюда следует, что всякое частное решение самосопряжённой системы с непрерывными коэффициентами ограничено на всём промежутке $(-\infty, +\infty)$. Кроме того, отсюда следует, что порядок самосопряжённой системы всегда можно понизить на единицу, поскольку она имеет первый интеграл (2.8.10). Для матрицанта $X(t)$ самосопряжённой системы имеем: $X^T(t)X(t) = E$, т. е.

$$X^{-1}(t) = X^T(t).$$

Пример 1. Рассмотрим систему 2-х уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = p(t)x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -p(t)x_1. \qquad (2.8.11)$$

Нетрудно видеть, что система (2.8.11) самосопряжённая. Она допускает первый интеграл $x_1^2 + x_2^2 = C_1$ и всегда интегрируется в квадратурах. Несложно найти матрицант этой системы:

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos\left(\int_0^t p(\tau)d\tau\right) & \sin\left(\int_0^t p(\tau)d\tau\right) \\ -\sin\left(\int_0^t p(\tau)d\tau\right) & \cos\left(\int_0^t p(\tau)d\tau\right) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим характеристическое уравнение для системы (2.8.1):

$$\begin{vmatrix} a_{11}(t)-\lambda & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t)-\lambda & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t)-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.8.12)$$

И соответствующее уравнение для сопряжённой системы (2.8.2):

$$\begin{vmatrix} -a_{11}(t)-\lambda & -a_{21}(t) & \cdots & -a_{n1}(t) \\ -a_{12}(t) & -a_{22}(t)-\lambda & \cdots & -a_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{1n}(t) & -a_{2n}(t) & \cdots & -a_{nn}(t)-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.8.13)$$

Нетрудно видеть, что уравнение (2.8.13) получается из уравнения (2.8.12) заменой λ на $-\lambda$. Поэтому корни уравнения (2.8.13) отличаются от корней $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_n(t)$ уравнения (2.8.12) только знаком.

Вернёмся теперь к системе с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k, \quad j = \overline{1,n}. \qquad (2.8.14)$$

Ей сопряжённая:

$$\frac{dy_j}{dt} = -\sum_{k=1}^{n} a_{kj} y_k, \quad j = \overline{1,n}. \qquad (2.8.15)$$

Пусть λ – собственное значение матрицы $A = \left(a_{jk}\right)_{j,k=\overline{1,n}}$ кратности p. Матрицей системы (2.8.15) будет $-A^T$. Число $-\lambda$ будет её собственным значением той же кратности p. Найдём число жордановых клеток порядка m, соответствующих числу $-\lambda$ в ЖНФ матрицы $-A^T$. Оно определяется по формуле (2.5.2):

$$\operatorname{rang}\left(-A^T + \lambda E\right)^{m-1} + 2\operatorname{rang}\left(-A^T + \lambda E\right)^{m} + \operatorname{rang}\left(-A^T + \lambda E\right)^{m+1} =$$
$$= \operatorname{rang}\left(A^T - \lambda E\right)^{m-1} + 2\operatorname{rang}\left(A^T - \lambda E\right)^{m} + \operatorname{rang}\left(A^T - \lambda E\right)^{m+1} =$$
$$= \operatorname{rang}\left(A - \lambda E\right)^{m-1} + 2\operatorname{rang}\left(A - \lambda E\right)^{m} + \operatorname{rang}\left(A - \lambda E\right)^{m+1},$$

т. е. искомое число клеток совпадает с числом жордановых клеток порядка m, соответствующих числу λ в ЖНФ матрицы A. А отсюда следует, что корни λ и $-\lambda$ характеристических уравнений для систем (2.8.14), (2.8.15) имеют не только одинаковую кратность p, но этим корням в обеих системах отвечает одинаковое число групп решений (клеток Жордана, элементарных делителей) с одинаковым числом решений в соответствующих группах (одинаковые размерности жордановых клеток, кратности элементарных делителей). В частности, самосопряжённая система наряду с каждым собственным значением λ своей матрицы будет иметь и собственное значение $-\lambda$ той же кратности и с тем же самым числом клеток Жордана с теми же их размерностями.

Поскольку матрицантом системы (2.8.14) является матрица $\exp(At)$, а матрицантом сопряжённой ей системы (2.8.15) – матрица $\exp\left(-A^T t\right)$, то из (2.8.7) получаем следующие полезные соотношения для матричной экспоненты:

$$\left(\exp(At)\right)^T = \left(\exp\left(-A^T t\right)\right)^{-1} = \exp\left(A^T t\right), \qquad \left(\exp A\right)^T = \exp A^T,$$
$$\left(\exp\left(-A^T t\right)\right)^T = \left(\exp(At)\right)^{-1} = \exp(-At). \tag{2.8.16}$$

Пример 2. Рассмотрим снова систему (2.6.7). Ей сопряжённой будет система

$$\frac{dy_1}{dt} = 4y_2 + 2y_3, \quad \frac{dy_2}{dt} = -y_1 - 4y_2 - y_3, \quad \frac{dy_3}{dt} = -2y_3. \tag{2.8.17}$$

с матрицей

$$B = -A^T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Она имеет 3-кратное собственное значение $\lambda = -2$, и ЖНФ матрицы B по своей структуре совпадает с ЖНФ матрицы A:

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(соответствующий жорданов базис предлагается построить самостоятельно). Отсюда несложно получить матрицант системы (2.8.16):

$$Y(t)=\begin{pmatrix} (2t+1)e^{-2t} & 4te^{-2t} & 2te^{-2t} \\ -te^{-2t} & (-2t+1)e^{-2t} & -te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться в выполнении соотношения (2.8.7). Можно выделить группы решений:

$$\begin{pmatrix} 2t+1 & 4t \\ -t & -2t+1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-2t}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

(вторая группа получается как разность первого и третьего столбцов матрицанта).

2.9. Периодические решения линейных неоднородных систем с постоянными коэффициентами

Перейдём теперь к изучению линейных неоднородных систем с постоянными коэффициентами. Рассмотрим следующую систему:

$$\frac{dx}{dt}=Ax+f(t), \tag{2.9.1}$$

где $A=(a_{jk})_{j,k=\overline{1,n}}$ – постоянная матрица, $f(t)=\mathrm{colon}(f_1(t),\ldots,f_n(t))$ вектор с непрерывными 2π-периодическими компонентами .

Рассмотрим также однородную систему, соответствующую системе (2.9.1):

$$\frac{dx}{dt}=Ax\,. \tag{2.9.2}$$

Поскольку матрицантом системы (2.9.2) является матрица $\exp(At)$, то в соответствии с формулой (2.3.3) вектор-функция

$$x(t) = e^{At}c + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau \tag{2.9.3}$$

(c – постоянный вектор) является общим решением системы (2.9.1). Выберем вектор c так, чтобы вектор-функция $x(t)$ была 2π-периодической, т. е., чтобы $\forall t$ выполнялось $x(t+2\pi) = x(t)$. В частности, должно выполняться равенство $x(2\pi) - x(0) = 0$. Отсюда имеем:

$$x(2\pi) - x(0) = e^{2\pi A}c - c + \int_0^{2\pi} e^{A(2\pi-\tau)} f(\tau)\,d\tau =$$

$$= \left(e^{2\pi A} - E\right)c + \int_0^{2\pi} e^{A(2\pi-\tau)} f(\tau)\,d\tau = 0. \tag{2.9.4}$$

Если, в частности, $f(t) \equiv 0$, то

$$\left(e^{2\pi A} - E\right)c = 0. \tag{2.9.5}$$

Система (2.9.5) определяет постоянный вектор $c = c^*$, при котором вектор-функция $\exp(At)\cdot c^*$ является 2π-периодическим решением однородной системы (2.9.2). Система (2.9.5) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\det(\exp(2\pi A) - E) = 0$, т. е. когда среди собственных значений матрицы $\exp(2\pi A)$ имеются равные 1. Пусть $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ – полная система собственных значений матрицы A. Тогда, как доказывается в теории матриц[1], $e^{\lambda_1},\ldots,e^{\lambda_n}$ – полная система собственных значений матрицы $\exp(2\pi A)$. Поскольку $1 = e^{2\pi i p}$, где p – целое число, то отсюда следует, что для того, чтобы матрица $\exp(2\pi A)$ имела собственные значения, равные 1, необходимо и достаточно, чтобы матрица A имела собственные значения вида ip. Следовательно, однородная система (2.9.2) будет иметь 2π-периодические решения тогда и только тогда, когда матрица A имеет собственные значения вида ip, где p – целое число (в частности, нулевые собственные значения). Т. е. мы другим способом получили результат, ранее полученный в п. 2.6 на основе анализа ЖНФ матрицы A.

Исследуем теперь неоднородную систему (2.9.1) и связанную с ней систему линейных алгебраических уравнений (2.9.4). Рассмотрим отдельно два случая.

[1] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., Наука, 1988. – Стр. 98

<u>1-й случай</u>. Матрица A не имеет собственных значений вида ip, где p – целое число. Такой случай будем называть *нерезонансным*. Тогда $\det(\exp(2\pi A)-E)\neq 0$, и система (2.9.4) имеет единственное решение

$$c^* = -\left(e^{2\pi A}-E\right)^{-1}\int\limits_0^{2\pi} e^{A(2\pi-\tau)} f(\tau)\,d\tau .$$

Следовательно, система (2.9.1) имеет единственное 2π-периодическое решение, выражение для которого получается подстановкой c^* в (2.9.3). Но можно получить более компактную формулу для этого 2π-периодического решения. Будем исходить из равенства $x(t+2\pi)=x(t)$. Тогда из (2.9.3) имеем:

$$x(t) = e^{At}\left(c+\int\limits_0^t e^{-A\tau} f(\tau)\,d\tau\right),$$

$$x(t+2\pi) = e^{A(t+2\pi)}\left(c+\int\limits_0^{t+2\pi} e^{-A\tau} f(\tau)\,d\tau\right)=$$

$$= e^{A(t+2\pi)}\left(c+\int\limits_0^t e^{-A\tau} f(\tau)\,d\tau+\int\limits_t^{t+2\pi} e^{-A\tau} f(\tau)\,d\tau\right)=$$

$$= e^{A(t+2\pi)}\left(e^{-At}x(t)+\int\limits_t^{t+2\pi} e^{-A\tau} f(\tau)\,d\tau\right)=x(t).$$

Или, в силу того, что $e^{A(t+2\pi)}=e^{2\pi A}\cdot e^{At}$:

$$e^{2\pi A}\left(x(t)+e^{At}\int\limits_t^{t+2\pi} e^{-A\tau} f(\tau)\,d\tau\right)=x(t).$$

В последнем интеграле совершим подстановку $\tau = t+2\pi-s$. Тогда

$$e^{2\pi A}\left(x(t)+e^{At}\int\limits_0^{2\pi} e^{-A(t+2\pi-s)} f(t+2\pi-s)\,ds\right)=x(t).$$

Или с учётом 2π-периодичности вектор-функции $f(t)$:

$$e^{2\pi A}\left(x(t)+e^{At}\int\limits_0^{2\pi} e^{-A(t+2\pi-s)} f(t-s)\,ds\right)=e^{2\pi A}x(t)+\int\limits_0^{2\pi} e^{As} f(t-s)\,ds=x(t).$$

Разрешая это уравнение относительно $x(t)$, получаем:

$$x(t) = \left(E - e^{2\pi A}\right)^{-1} \int_0^{2\pi} e^{A\tau} f(t-\tau)\, d\tau . \qquad (2.9.6)$$

Таким образом, справедлива теорема:

Теорема. *В нерезонансном случае система (2.9.1) имеет единственное 2π-периодическое решение при любой 2π-периодической вектор-функции $f(t)$, и это решение выражается формулой (2.9.6).*

2-й случай. Матрица A имеет собственные значения вида pi, где p – целое число. Такой случай называется *резонансным*. Тогда выполнено равенство $\det(\exp(2\pi A) - E) = 0$, и система (2.9.4) будет иметь решения лишь в том случае, когда вектор-функция $f(t)$ удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, к выводу которых мы сейчас переходим.

Как и в п. 2.7, предположим для определённости, что матрица A имеет нулевое собственное значение, которому в ЖНФ матрицы A соответствует k клеток, и r пар чисто мнимых собственных значений вида $\pm ip_j$ $\left(j = \overline{1,r}\right)$, где $p_1,\ldots,p_r$ – натуральные числа, причём каждому собственному значению такой пары отвечает k_j жордановых клеток. Тогда, как показано в п. 2.7, система (2.9.2) имеет m-параметрическое ($m = k + 2k_1 + \ldots + 2k_r$) семейство 2π-периодических решений $\varphi(t) = c_1\varphi^{(1)}(t) + \ldots + c_m\varphi^{(m)}(t)$, где $\varphi^{(1)}(t),\ldots,\varphi^{(m)}(t)$ – линейно независимые 2π-периодические решение системы (2.9.2), $c_1,\ldots,c_m$ – произвольные постоянные. Отсюда вытекает, что система

$$\frac{dy}{dt} = -A^T y , \qquad (2.9.7)$$

сопряжённая системе (2.9.2), также имеет m-параметрическое семейство 2π-периодических решений $\psi(t) = c_1^*\psi^{(1)}(t) + \ldots + c_m^*\psi^{(m)}(t)$, где $\psi^{(j)}(t) = \operatorname{colon}\left(\psi_{j1}(t),\ldots,\psi_{jn}(t)\right)$ $\left(j = \overline{1,m}\right)$ – линейно независимые 2π-периодические решения системы (2.9.7). Обозначим:

$$\Psi(t)=\begin{pmatrix}\psi_{11}(t) & \psi_{21}(t) & \cdots & \psi_{m1}(t)\\ \psi_{12}(t) & \psi_{22}(t) & \cdots & \psi_{m2}(t)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \psi_{1n}(t) & \psi_{2n}(t) & \cdots & \psi_{mn}(t)\end{pmatrix}.$$

Поскольку $\exp(At)$ – матрицант системы (2.9.2), то $\forall\, h=\mathrm{const}$ матрица $\exp(A(t-h))$ будет матрицей ФСР системы (2.9.2). Тогда из соотношений (2.8.3) между решениями сопряжённых систем получим:

$$\Psi^T(t)e^{A(t-h)}=B, \tag{2.9.8}$$

где B – постоянная $m\times n$-матрица. Полагая в (2.9.8) $t=h$, получим, что $B=\Psi^T(h)$, и т.о.

$$\Psi^T(t)e^{A(t-h)}=\Psi^T(h). \tag{2.9.9}$$

Полагая в (2.9.9) $h=0$, получим:

$$\Psi^T(t)e^{At}=\Psi^T(0). \tag{2.9.10}$$

Полагая в (2.9.9) $t=2\pi,\ h=\tau$, получим:

$$\Psi^T(2\pi)e^{A(2\pi-\tau)}=\Psi^T(\tau). \tag{2.9.11}$$

Умножим теперь обе части векторного уравнения (2.9.4) слева на матрицу $\Psi^T(2\pi)$. Получим:

$$\Psi^T(2\pi)\left(e^{2\pi A}-E\right)c+\int_0^{2\pi}\Psi^T(2\pi)e^{A(2\pi-\tau)}f(\tau)\,d\tau=0.$$

Учитывая (2.9.10), (2.9.11):

$$\left(\Psi^T(0)-\Psi^T(2\pi)\right)c+\int_0^{2\pi}\Psi^T(\tau)f(\tau)\,d\tau=0.$$

Но поскольку матрица $\Psi^T(t)$ является 2π-периодической, то $\Psi^T(0)-\Psi^T(2\pi)=0$. Следовательно, векторное уравнение (2.9.4) будет разрешимо тогда и только тогда, когда вектор-функция $f(t)$ удовлетворяет соотношению:

$$\int_0^{2\pi} \Psi^T(\tau) f(\tau)\, d\tau = 0. \tag{2.9.12}$$

Это соотношение является необходимым и достаточным условием существования 2π-периодических решений системы (2.9.1). Таким образом, справедлива следующая теорема:

Теорема. *Для того, чтобы в резонансном случае система (2.9.1) допускала 2π-периодические решения, необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция $f(t)$ удовлетворяла соотношению (2.9.12).*

Если соотношение (2.9.12) выполнены, то система (2.9.1) будет допускать не одно 2π-периодическое решение, как было в нерезонансном случае, а m-параметрическое семейство таких решений:

$$x(t) = M_1 \varphi^{(1)}(t) + \ldots + M_m \varphi^{(m)}(t) + x^*(t),$$

где $x^*(t)$ – какое-либо частное 2π-периодическое решение.

В покомпонентной форме соотношение (2.9.12) имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^{2\pi} \psi_{jk}(t) f_k(t)\, dt = 0, \quad j = \overline{1, m}. \tag{2.9.13}$$

Рассмотрим теперь нерезонансный и резонансный случаи с точки зрения поиска 2π-периодического решения в виде ряда Фурье. Разложим вектор-функцию $f(t)$ в ряд Фурье в комплексной форме:

$$f(t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} f^{(s)} e^{ist},$$

где $f^{(s)}$ – n-мерные постоянные векторы, выражающиеся через вектор-функцию $f(t)$ по формуле:

$$f^{(s)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ist}\, dt.$$

В виде ряда Фурье будем искать и 2π-периодическое решение системы (2.9.1):

$$x(t)=\sum_{s=-\infty}^{\infty}x^{(s)}e^{ist}\ , \tag{2.9.14}$$

где $x^{(s)}$ – также n-мерные постоянные векторы. Подставляя выражение (2.9.14) в систему (2.9.1), и, приравнивая коэффициенты при e^{ist}, получим:

$$\left(A-isE\right)x^{(s)}=-f^{(s)},\ \ s\in\mathbb{Z}. \tag{2.9.15}$$

Рассмотрим сперва нерезонансный случай. Тогда матрица A не имеет собственных значений вида ip $(p\in\mathbb{Z})$, следовательно $\det\left(A-isE\right)\neq 0$ $\forall\ s\in\mathbb{Z}$. Поэтому векторное уравнение (2.9.15) однозначно разрешимо $\forall\ s\in\mathbb{Z}$ и при любых правых частях $-f^{(s)}$. Т. о. система (2.9.1) имеет единственное 2π-периодическое решение при любой 2π-периодической правой части $f(t)$. Это решение имеет вид:

$$x(t)=-\sum_{s=-\infty}^{\infty}(A-isE)^{-1}f^{(s)}e^{ist}.$$

Перейдём теперь к резонансному случаю. Как и прежде, для определённости предположим, что матрица A имеет нулевое собственное значение, которому соответствует k жордановых клеток, и r пар чисто мнимых собственных значений вида $\pm ip_j$ $\left(j=\overline{1,r}\right)$, где $p_1,\ldots,p_r\in\mathbb{N}$, причём каждому собственному значению пары с номером j соответствует k_j жордановых клеток. Других собственных значений нет. Тогда общее число жордановых клеток:

$$m=k+2k_1+\ldots+2k_r.$$

Преобразованием $x=Hy$, где H – матрица жорданова базиса, приведём систему (2.9.1) к виду:

$$\frac{dy}{dt}=Jy+H^{-1}f(t), \tag{2.9.16}$$

где J – ЖНФ матрицы A. 2π-периодическое решение системы (2.9.16) ищем в виде ряда Фурье:

$$y=\sum_{s=-\infty}^{\infty} y^{(s)} e^{ist},$$

$y^{(s)}$ $(s\in\mathbb{Z})$ – n-мерные векторы. В результате придём к системе:

$$(J-isE)\,y^{(s)}=-H^{-1}f^{(s)}. \qquad (2.9.17)$$

Положим здесь $s=0$. По предположению нулевому собственному значению матрицы A соответствует k жордановых клеток. Для определённости предположим, что это k первых клеток матрицы J, причём размерности этих клеток соответственно $m_1,\dots,m_k$. Тогда равенство

$$Jy^{(0)}=-H^{-1}f^{(0)}$$

возможно лишь тогда, когда компоненты вектора $H^{-1}f^{(0)}$ с номерами 1, m_1+1, … , $m_{k-1}+1$ обращаются в нуль, поскольку в матрице J строки с этими номерами будут нулевыми. Учитывая, что

$$H^{-1}f^{(0)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H^{-1}f(t)\,dt,$$

а линейно независимые 2π-периодические решения системы (2.9.7), соответствующие нулевому собственному значению, являются постоянными векторами, легко убедиться, что мы приходим к условиям вида (2.9.12). Аналогично рассматриваются случаи $s=\pm ip_j$ $\left(j=\overline{1,r}\right)$.

Пример 1. Найдём условия существования 2π-периодических решений уравнения

$$\frac{d^4\xi}{dt^4}+k^2\frac{d^2\xi}{dt^2}=q(t), \qquad (2.9.18)$$

где $q(t)$ – 2π-периодическая функция, $k\in\mathbb{N}$.

Вводя $x_1=\xi,\ x_2=\dot{\xi},\ x_3=\ddot{\xi},\ x_4=\dddot{\xi}$, запишем уравнение (2.9.18) в виде эквивалентной системы:

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\quad \frac{dx_2}{dt}=x_3,\quad \frac{dx_3}{dt}=x_4,\quad \frac{dx_4}{dt}=-k^2x_3+q(t).$$

Или в матричной форме:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t),$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q(t) \end{pmatrix}.$$

Соответствующая однородная система была нами рассмотрена в п. 2.7. Там мы выяснили, что она имеет 3-параметрическое семейство 2π-периодических решений. Аналогичное семейство тогда должна иметь и ей сопряжённая система, имеющая вид:

$$\frac{dy}{dt} = -A^T y. \qquad (2.9.19)$$

Или в покомпонентной форме:

$$\frac{dy_1}{dt} = 0, \quad \frac{dy_2}{dt} = -y_1, \quad \frac{dy_3}{dt} = -y_2 + k^2 y_4, \quad \frac{dy_4}{dt} = -y_3.$$

Используя изложенные выше методы, несложно получить матрицант системы (2.9.19):

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2}\cos kt & -\frac{1}{k}\sin kt & \cos kt & k\sin kt \\ -\frac{t}{k^2} + \frac{1}{k^3}\sin kt & \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2}\cos kt & -\frac{1}{k}\sin kt & \cos kt \end{pmatrix}.$$

Выделяя линейно независимые 2π-периодические решения, запишем матрицу:

$$\Psi(t)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k^2 & 0 & 0 \\ -k\sin kt & k\cos kt & k\sin kt \\ 1-\cos kt & -\sin kt & \cos kt \end{pmatrix}.$$

Таким образом, условия (2.9.12) принимают вид:

$$\int_0^{2\pi} q(t)\,dt=0,\quad \int_0^{2\pi} q(t)\cos kt\,dt=0,\quad \int_0^{2\pi} q(t)\sin kt\,dt=0 \quad .$$

С точки зрения рядов Фурье эти условия не что иное, как требование отсутствия свободного члена и слагаемых с $\sin kt$ и $\cos kt$ (резонансных гармоник) в разложении в ряд Фурье функции $q(t)$.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте теорему о существовании решения задачи Коши для линейной однородной системы дифференциальных уравнений.
2. Что такое матрицант линейной однородной системы дифференциальных уравнений? Какой вид имеет матрицант, если коэффициенты системы постоянные?
3. Что такое жорданова нормальная форма матрицы? Как определяется количество жордановых клеток, соответствующих собственному значению λ этой матрицы?
4. Что называется элементарным делителем матрицы, соответствующим собственному значению λ? Что называется кратностью элементарного делителя?
5. В каком случае жорданова нормальная форма матрицы имеет диагональный вид?
6. В каком случае линейная однородная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами имеет 2π-периодические решения?
7. Что такое сопряжённые линейные однородные системы дифференциальных уравнений? Какова связь между решениями сопряжённых систем?
Что такое самосопряжённая линейная однородная система дифференциальных уравнений? Каково свойство матрицанта самосопряжённой системы?
9. В каком случае система вида (2.9.1) имеет 2π-периодическое решение при любой 2π-периодической вектор-функции $f(t)$?
10. Как для системы вида (2.9.1) различаются случаи наличия и отсутствия резонанса?

11. Каким условиям должна удовлетворять вектор-функция $f(t)$ для того, чтобы уравнение (2.9.1) допускало 2π-периодическое решение в случае резонанса?

Задачи к главе 2

1. Найти матрицант системы дифференциальных уравнений:

а) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - 2x \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 4x - y \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dot{x} - 5x - 3y = 0, \\ \dot{y} + 3x + y = 0 \end{cases}$ д) $\begin{cases} \dot{x} + x + 5y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0 \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 3y - x \end{cases}$

2. Найти матрицант треугольной системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_j = \sum_{k=1}^{j} a_{jk}(t) x_k, \quad j = \overline{1,n}.$$

3. Найти матрицу $\exp A$:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; д) $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$; е) $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Для линейной неднородной системы дифференциальных уравнений найти их общее решение, найдя предварительно матрицант соответствующей однородной системы и используя формулу (2.3.3):

а) $\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t \\ \dot{y} = x + t^2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$; в) $\begin{cases} \dot{x} = x - y + \dfrac{1}{\cos t} \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$;

г) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 2x - y + 15e^t\sqrt{t} \end{cases}$; д) $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + \sin t \\ \dot{y} = 2x - y - 2\cos t \end{cases}$; е) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = x + 2e^t \end{cases}$.

5. Привести к диагональному виду систему дифференциальных уравнений:

а) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z, \\ \dot{y} = x + y + z, \\ \dot{z} = 4x - y + 4z. \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = 3x + z. \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 2z, \\ \dot{y} = x + 2z, \\ \dot{z} = -2x + y - z. \end{cases}$ д) $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, \\ \dot{y} = -x + y + z, \\ \dot{z} = 4x - y + 4z. \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y + 2z, \\ \dot{y} = -3x - y + z, \\ \dot{z} = -x + 2y. \end{cases}$

6. Для матрицы A найти жорданову нормальную форму и жорданов базис. Выписать элементарные делители матрицы.

а) $A = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$; д) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; е) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

7. Систему дифференциальных уравнений привести к жордановой нормальной форме, записать матрицу преобразования. Выписать группы решений системы.

а) $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z, \\ \dot{z} = -x + y + 2z. \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y - 2z, \\ \dot{y} = x - 2y + 2z, \\ \dot{z} = 3x - 3y + 5z. \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y - z, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 3z, \\ \dot{z} = 2x - 4y. \end{cases}$ д) $\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = -y + 2z. \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - z, \\ \dot{y} = -x + z, \\ \dot{z} = x + y. \end{cases}$

8. Найти линейно независимые периодические решения системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax.$$

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

д) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; е) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 8 & 4 \\ 2 & 5 & -20 & -8 \end{pmatrix}$.

9. Показать, что система дифференциальных уравнений имеет единственное 2π-периодическое решение и построить его.

а) $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = x - 5\sin t. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + \sin t, \\ \dot{y} = 2x - y - 2\cos t. \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2\sin t. \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y + \sin 2t, \\ \dot{y} = x + 2y + \cos 3t. \end{cases}$ д) $\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t, \\ \dot{y} = 2x + y + \sin t. \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dot{x} = 4x + y + 2\sin 3t, \\ \dot{y} = x - y - 3\cos 3t. \end{cases}$

10. Используя условие (2.9.12), показать, что система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t)$$

имеет семейство 2π-периодических решений, и построить это семейство.

а) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sin 2t \end{pmatrix};$

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} \sin t - \cos t \\ \sin t + \cos t \\ 0 \end{pmatrix};$

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix};$

г) $A = \begin{pmatrix} 12 & 6 & -14 \\ 20 & 15 & -27 \\ 20 & 14 & -26 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix};$

д) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin 2t \\ \sin 3t \end{pmatrix};$

е) $A = \begin{pmatrix} 9 & 16 & -12 \\ 15 & 12 & -21 \\ 15 & 12 & -21 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}.$

Глава 3
Колебания, описываемые квазилинейной системой дифференциальных уравнений *n*-го порядка с постоянной матрицей линейной части

3.1. Колебания в квазилинейных системах n-го порядка в нерезонансном случае

Рассмотрим теперь квазилинейную систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t) + \mu F(t, x, \mu), \tag{3.1.1}$$

где $x = \mathrm{colon}(x_1, ..., x_n) \in G$, $A = (a_{jk})_{j,k=\overline{1,n}}$ – постоянная матрица, $f(t) = \mathrm{colon}(f_1(t), ..., f_n(t))$, $f_j(t)$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$ – непрерывные 2π-периодические функции, $F(t, x, \mu)$ – вектор-функция, непрерывная и 2π-периодическая по t и аналитическая по x в области G и по μ при достаточно малых μ.

Изучим вопрос о существовании у системы (3.1.1) 2π-периодического решения. Здесь мы будем предполагать, что матрица A не имеет собственных значений вида ip $(p \in \mathbb{Z})$, т. е. рассматриваем нерезонансный случай. Введём порождающую систему:

$$\frac{dx^{(0)}}{dt} = Ax^{(0)} + f(t). \tag{3.1.2}$$

В нерезонансном случае она имеет единственное 2π-периодическое решение $x^{(0)} = \varphi(t)$, которое тоже назовём *порождающим*. Предположим, что это решение принадлежит области G . Будем искать 2π-периодическое решение $x^*(t, \mu)$ системы (3.1.1), обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее. Введём вектор $\beta = \beta(\mu)$ – отклонение решения $x^*(t, \mu)$ от порождающего в начальный момент времени $t = 0$, т. е.:

$$x^*(0, \mu) = \varphi(0) + \beta. \tag{3.1.3}$$

Тогда решение x^* будет зависеть и от β, т. е. $x^* = x^*(t, \beta, \mu)$. Подчиним вектор $\beta = \beta(\mu)$ условию 2π-периодичности вектора $x^*(t, \beta, \mu)$:

$$\Theta(\beta) = x^*(2\pi, \beta, \mu) - x^*(0, \beta, \mu) = 0. \tag{3.1.4}$$

Как и в п.1.1, условия (3.1.4) являются не только необходимыми, но и достаточными условиями 2π-периодичности решения $x^*(t,\beta,\mu)$.

Из теоремы о неявных функциях следует, что, если якобиан

$$\det\frac{\partial\Theta}{\partial\beta}\neq 0 \tag{3.1.5}$$

при $\beta=0,\ \mu=0$, то при достаточно малом значении μ существует единственное решение векторного уравнения (3.1.4) , стремящееся при $\mu\to 0$ к порождающему решению $x^{(0)}=\varphi(t)$, и это решение будет аналитическим относительно μ.

Разложим решение $x^*=x^*(t,\beta,\mu)$ в степенной ряд по β и μ:

$$x^*(t,\beta,\mu)=\varphi(t)+X(t)\beta+u(t)\mu+\ldots\quad , \tag{3.1.6}$$

где $\varphi(t)$ – порождающее решение, $X(t)$ – пока не определённая матрица. Подставляя (3.1.6) в (3.1.1), и, сравнивая коэффициенты при β,μ, с учётом (3.1.3) получим:

$$\frac{dX(t)}{dt}=AX(t),\quad X(0)=E. \tag{3.1.7}$$

Отсюда следует, что матрица $X(t)$ является матрицантом линейной однородной системы

$$\frac{dx}{dt}=Ax,$$

следовательно, $X(t)=\exp(At)$. Подставляя (3.1.6) в условие периодичности (3.1.4) , получим:

$$\Theta(\beta)=\left(\exp(2\pi A)-E\right)\beta+\ldots=0$$

(невыписаные члены не влияют на величину определителя). Тогда имеем:

$$\det\left.\frac{\partial\Theta}{\partial\beta}\right|_{\substack{\beta=0\\ \mu=0}}=\det\left(\exp(2\pi A)-E\right)\neq 0,$$

поскольку мы рассматриваем нерезонасный случай, следовательно, матрица $\exp(2\pi A)$ не имеет собственных значений, равных 1.

Таким образом, справедлива теорема:

Теорема. *В нерезонансном случае система (3.1.1) при достаточно малых значениях параметра μ имеет единственное 2π-периодическое решение, обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее, и это решение аналитично относительно μ.*

Практическое нахождение 2π-периодического решения системы (3.1.1) производится аналогично случаю квазилинейного дифференциального уравнения 2-го порядка (см. п. 1.2). Искомое решение ищем в виде ряда по степеням параметра μ:

$$x(t,\mu) = x^{(0)}(t) + x^{(1)}(t)\mu + x^{(2)}(t)\mu^2 + \ldots + x^{(s)}(t)\mu^s + \ldots\ , \qquad (3.1.8)$$

где $x^{(0)}(t)$ – порождающее решение, а $x^{(1)}(t),\ldots,x^{(s)}(t),\ldots$ – пока не определённые векторы с 2π-периодическими компонентами. Подставляя (3.1.8) в (3.1.1), и, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим:

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} = Ax^{(1)} + F(t, x^{(0)}(t), 0),$$
$$\frac{dx^{(2)}}{dt} = Ax^{(2)} + \frac{\partial F(t, x^{(0)}(t), 0)}{\partial x}x^{(1)}(t) + \frac{\partial F(t, x^{(0)}(t), 0)}{\partial \mu},$$
$$\cdots$$
$$\frac{dx^{(s)}}{dt} = Ax^{(s)} + \frac{\partial F(t, x^{(0)}(t), 0)}{\partial x}x^{(s-1)}(t) + G_s(t, x^{(0)}(t),\ldots,x^{(s-2)}(t)), \quad s = 3,4,...$$

Здесь G_s – некоторый многочлен от $x^{(0)}(t),\ldots,x^{(s-2)}(t)$. Каждое из этих векторных уравнений является уравнением вида (3.1.2), поэтому в нерезонансном случае оно имеет единственное 2π-периодическое решение. Последовательно находя эти решения, можем найти искомое 2π-периодическое решение системы (3.1.1) с любой степенью точности.

3.2. Колебания в квазилинейных системах n-го порядка в резонансном случае

Теперь мы рассмотрим систему (3.1.1) в предположении, что матрица A имеет собственные значения вида ip $(p \in \mathbb{Z})$, т. е. *резонансный случай*. И изучим вопрос о существовании 2π-периодических решений системы (3.1.1) в этой ситуации. Как и в п. 2.7, для определённости предположим, что матрица A имеет нулевое собственное значение, которому в ЖНФ матрицы A соответствует k клеток, и r пар чисто мнимых корней вида $\pm ip_j$ $\left(j = \overline{1, r}\right)$, где $p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{N}$. Других собственных значений матрица A не имеет. Тогда, как показано в п. 2.7, линейная однородная система (2.7.1) имеет m-параметрическое семейство 2π-периодических решений

$$\varphi(t) = c_1^0 \varphi^{(1)}(t) + \ldots + c_m^0 \varphi^{(m)}(t),$$

где $\varphi^{(j)}(t) = \operatorname{colon}(\varphi_{j1}(t), \ldots, \varphi_{jn}(t))$ $\left(j = \overline{1, m}\right)$ – линейно независимые 2π-периодические решения системы (2.7.1). Введя $m \times n$-матрицу

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{21}(t) & \cdots & \varphi_{m1}(t) \\ \varphi_{12}(t) & \varphi_{22}(t) & \cdots & \varphi_{m2}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_{1n}(t) & \varphi_{2n}(t) & \cdots & \varphi_{mn}(t) \end{pmatrix}$$

и m-мерный вектор $c^{(0)} = \operatorname{colon}\left(c_1^0, \ldots, c_m^0\right)$, можно это семейство записать в виде:

$$\varphi(t) = \Phi(t) c^{(0)}.$$

Соответственно, система, сопряжённая системе (2.7.1), также имеет m-параметрическое семейство 2π-периодических решений. Соответствующие линейно независимые 2π-периодические решения сопряжённой системы мы записали в виде столбцов матрицы

$$
\Psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_{11}(t) & \psi_{21}(t) & \cdots & \psi_{m1}(t) \\ \psi_{12}(t) & \psi_{22}(t) & \cdots & \psi_{m2}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \psi_{1n}(t) & \psi_{2n}(t) & \cdots & \psi_{mn}(t) \end{pmatrix}.
$$

Установим формулу, связывающую матрицу $\Phi(t)$ и матрицант $\exp(At)$ системы (2.7.1). Рассмотрим линейную однородную систему алгебраических уравнений

$$
B\xi = 0, \tag{3.2.1}
$$

где $B = \exp(2\pi A) - E$. Поскольку $\operatorname{rang} B = n - m$, то существует минор $(n-m)$-го порядка матрицы B, отличный от нуля. Не ограничивая общности, можно считать, что это угловой минор, образованный первыми $n-m$ строками и $n-m$ столбцами матрицы B. Систему (3.2.1) запишем покомпонентно:

$$
\begin{cases}
b_{11}\xi_1 + \ldots + b_{1,n-m}\xi_{n-m} + b_{1,n-m+1}\xi_{n-m+1} + \ldots + b_{1n}\xi_n = 0, \\
\vdots \\
b_{n-m,1}\xi_1 + \ldots + b_{n-m,n-m}\xi_{n-m} + b_{n-m,n-m+1}\xi_{n-m+1} + \ldots + b_{n-m,n}\xi_n = 0, \\
b_{n-m+1,1}\xi_1 + \ldots + b_{n-m+1,n-m}\xi_{n-m} + b_{n-m+1,n-m+1}\xi_{n-m+1} + \ldots + b_{n-m+1,n}\xi_n = 0, \\
\vdots \\
b_{n1}\xi_1 + \ldots + b_{n,n-m}\xi_{n-m} + b_{n,n-m+1}\xi_{n-m+1} + \ldots + b_{nn}\xi_n = 0.
\end{cases}
$$

Обозначим:

$$
B_0 = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n-m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n-m,1} & \cdots & b_{n-m,n-m} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} b_{1,n-m+1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n-m,n-m+1} & \cdots & b_{n-m,n} \end{pmatrix}.
$$

По предположению, $\det B_0 \neq 0$. Придав неизвестным $\xi_{n-m+1},\ldots,\xi_n$ произвольные значения $\xi_{n-m+1} = \alpha_1,\ldots,\xi_n = \alpha_m$, введём столбец $\alpha = \left(\alpha_1 \ldots,\alpha_m\right)^T$ и столбец $\xi^{(0)} = \left(\xi_1,\ldots,\xi_{n-m}\right)^T$. Тогда $B_0\xi^{(0)} = -B_1\alpha$, т. е. $\xi^{(0)} = -B_0^{-1}B_1\alpha$. Таким образом,

$$\xi = \operatorname{colon}\left(\xi^{(0)}, \alpha\right) = \operatorname{colon}\left(-B_0^{-1}B_1\alpha, \alpha\right) = K\alpha,$$

где

$$K = \begin{pmatrix} -B_0^{-1}B_1 \\ E_m \end{pmatrix} -$$

матрица размерности $n \times m$, E_m – единичная матрица размерности m. Имеем очевидное равенство:

$$\left(e^{2\pi A} - E\right)K = 0.$$

Любое решение системы (2.7.1) имеет вид $x(t) = \exp(At) \cdot \eta$, где η – постоянный вектор. Тогда и для столбца $\varphi^{(j)}(t)$ матрицы $\Phi(t)$ будем иметь $\varphi^{(j)}(t) = \exp(At) \cdot k^{(j)}$, где $k^{(j)}$ – постоянный вектор $\left(j = \overline{1, m}\right)$. В силу 2π-периодичности вектора $\varphi^{(j)}(t)$ получим:

$$\varphi^{(j)}(2\pi) - \varphi^{(j)}(0) = e^{2\pi A} \cdot k^{(j)} - k^{(j)} = \left(e^{2\pi A} - E\right)k^{(j)} = 0.$$

Следовательно, в качестве вектора $k^{(j)}$ можно взять j-й столбец матрицы K. А отсюда получаем равенство:

$$\Phi(t) = e^{At}K. \tag{3.2.2}$$

Аналогично для матрицы $\Psi(t)$ будем иметь:

$$\Psi(t) = e^{-A^T t}L, \tag{3.2.3}$$

где L – постоянная матрица размерности $n \times m$, которая строится аналогично матрице K. Из (3.2.3) получим:

$$\Psi^T(t) = \left(e^{-A^T t}L\right)^T = L^T\left(e^{-A^T t}\right)^T = L^T e^{\left(-A^T t\right)^T} = L^T e^{-At}. \tag{3.2.4}$$

Линейная неоднородная порождающая система (3.1.2), как было установлено в п. 2.9, будет иметь 2π-периодические решения тогда и только тогда, когда вектор-функция $f(t)$ удовлетворяет условию (2.9.12). В этом случае система (3.1.2) допускает m-параметрическое семейство 2π-периодических решений

$$x^{(0)}(t,c^{(0)})=\Phi(t)c^{(0)}+x^{*}(t), \tag{3.2.5}$$

где $c^{(0)}$ – постоянный вектор, а $x^{*}(t)$ – какое-либо частное 2π-периодическое решение системы (3.1.2).

Произведём теперь в системе (3.1.1) подстановку:

$$x=x^{(0)}(t,c^{(0)})+z, \tag{3.2.6}$$

где z – новая неизвестная вектор-функция. Тогда получим систему:

$$\frac{dz}{dt}=Az+\mu F\left(t,x^{(0)}(t,c^{(0)})+z,\mu\right). \tag{3.2.7}$$

Рассмотрим теперь систему первого приближения:

$$\frac{dz_1}{dt}=Az_1+\mu F\left(t,x^{(0)}(t,c^{(0)}),0\right). \tag{3.2.8}$$

Согласно изложенному в п. 2.9, система (3.2.8) будет иметь 2π-периодические решения тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$\int_0^{2\pi}\Psi^{T}(t)F\left(t,x^{(0)}(t,c^{(0)}),0\right)dt=0. \tag{3.2.9}$$

Это условие представляет собой алгебраическое или трансцендентное уравнение (в векторной форме) относительно вектора $c^{(0)}$. Расписав его в скалярной форме, получим систему m уравнений относительно m неизвестных $c_1^0,\ldots,c_m^0$. Обозначив левую часть (3.2.9) через $P\left(c^{(0)}\right)$, запишем (3.2.9) в виде:

$$P\left(c^{(0)}\right)=0. \tag{3.2.10}$$

Если уравнение (3.2.10) имеет некоторое решение $c^{(0)}=c^{*}$, то вектор c^{*} определяет то порождающее решение $x^{(0)}\left(t,c^{*}\right)$, которому может отвечать 2π-периодическое решение исходной системы (3.1.1), обращающееся при $\mu=0$ именно в это порождающее решение. Уравнение (3.2.10) называется *уравнением для порождающих амплитуд*. Найдём:

$$\frac{\partial P}{\partial c^{(0)}} = \frac{\partial}{\partial c^{(0)}} \int_0^{2\pi} \Psi^T(t) F\left(t, \Phi(t)c^{(0)} + x^*(t), 0\right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Psi^T(t) \frac{\partial F\left(t, \Phi(t)c^{(0)} + x^*(t), 0\right)}{\partial x} \Phi(t)\, dt\,. \qquad (3.2.11)$$

Назовём решение $c^{(0)} = c^*$ уравнения (3.2.10) *простым*, если $\partial P \big/ \partial c^{(0)} \neq 0$ при $c^{(0)} = c^*$.

Если уравнение (3.2.10) не имеет решений, то система первого приближения (3.2.8) не имеет 2π-периодических решений. Можно показать, что в этом случае и сама исходная система (3.1.1) также не имеет 2π-периодических решений. Имеет место следующая теорема, которую мы здесь приведём без доказательства[2].

Теорема. *Для того, чтобы система (3.1.1) в резонансном случае имела при достаточно малом* μ 2π*-периодическое решение, необходимо, чтобы вектор-функция* $f(t)$ *удовлетворяла соотношению (2.9.12), а вектор* $c^{(0)}$ *в порождающем решении удовлетворял уравнению для порождающих амплитуд (3.2.10). Каждому простому решению этого уравнения отвечает единственное* 2π*-периодическое решение системы (3.1.1), обращающееся при* $\mu = 0$ *в соответствующее порождающее, и это решение будет аналитическим по* μ.

Практическое нахождение 2π-периодического решения системы (3.1.1) в резонансном случае аналогично изложенному в п. 1.4 для квазилинейного уравнения 2-го порядка. Пользуясь аналитичностью функции $F(t, x, \mu)$, искомое решение представляем в виде ряда по степеням μ:

$$x(t, \mu) = x^{(0)}(t) + x^{(1)}(t)\mu + x^{(2)}(t)\mu^2 + \ldots \qquad (3.2.12)$$

Порождающее решение $x^{(0)}(t)$ имеет вид:

$$x^{(0)}(t) = \Phi(t)c^{(0)} + \xi^{(0)}(t)\,,$$

где $\xi^{(0)}(t)$ – некоторое частное 2π-периодическое решение порождающей системы (3.1.2). Вектор $c^{(0)}$ находим из уравнения (3.2.10). Предположим, что мы нашли простое решение этого уравнения. Тогда вектор-функцию $x^{(1)}(t)$ находим из уравнения:

[2] В монографиях [1], [3] эта теорема доказана для случая неаналитических нелинейностей

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} = Ax^{(1)} + F\left(t, x^{(0)}(t), 0\right).$$

Это уравнение совпадает с уравнением 1-го приближения (3.2.8). 2π-периодическое решение этого уравнения имеет вид:

$$x^{(1)}(t) = \Phi(t)c^{(1)} + \xi^{(1)}(t), \tag{3.2.13}$$

где $\xi^{(1)}(t)$ – некоторое частное 2π-периодическое решение этого уравнения, а постоянный вектор $c^{(1)}$ должен удовлетворять соотношению:

$$\int_0^{2\pi} \Psi^T(t)\left[\frac{\partial F(t, x^{(0)}(t), 0)}{\partial x}\left(\Phi(t)c^{(1)} + \xi^{(1)}(t)\right) + \frac{\partial F(t, x^{(0)}(t), 0)}{\partial \mu}\right]dt = 0.$$

Отсюда с учётом (3.2.11) получаем линейное уравнение относительно вектора $c^{(1)}$:

$$\frac{\partial P}{\partial c^{(0)}} \cdot c^{(1)} = -R, \tag{3.2.14}$$

где

$$R = \int_0^{2\pi} \Psi^T(t)\left[\frac{\partial F(t, x^{(0)}(t), 0)}{\partial x}\xi^{(1)}(t) + \frac{\partial F(t, x^{(0)}(t), 0)}{\partial \mu}\right]dt.$$

Поскольку по предположению $\partial P / \partial c^{(0)} \neq 0$, то система (3.2.10) имеет единственное решение $c^{(1)}$. Подставив это решение в (3.2.9), получим окончательное выражение для вектора $x^{(1)}(t)$.

Вектор $x^{(2)}(t)$ находим из уравнения:

$$\frac{dx^{(2)}}{dt} = Ax^{(2)} + \frac{\partial F(t, x^{(0)}(t), 0)}{\partial x}x^{(1)}(t) + \frac{\partial F(t, x^{(0)}(t), 0)}{\partial \mu}.$$

Это уравнение в силу выбора вектора $c^{(1)}$ будет иметь 2π-периодическое решение вида

$$x^{(2)}(t) = \Phi(t)c^{(2)} + \xi^{(2)}(t),$$

где вектор $c^{(2)}$ также однозначно найдётся из векторного линейного уравнения с коэффициентом $\partial P / \partial c^{(0)} \neq 0$. Продолжая так далее, мы можем последовательно найти любой из коэффициентов ряда (3.2.12).

Замечание. Если уравнение (3.2.10) удовлетворяется тождественно, то возникает особый случай, поскольку будет выполняться также тождество $\partial P / \partial c^{(0)} = 0$. В этом случае, проводя рассуждения, аналогичные проведенным в п. 1.6, можно также получить условия существования 2π-периодического решения системы (3.1.1).

3.3. Колебания в автономных системах

Рассмотрим теперь систему, описываемую автономным уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \mu F(x,\mu), \tag{3.3.1}$$

где вектор-функция $F(x,\mu)$ аналитична в некоторой области изменения x и при достаточно малых значениях μ. Изучим задачу о существовании у системы (3.3.1) периодических решений. Как и в п. 1.8, заметим, что период искомого решения здесь заранее не известен, и возможны периодические решения произвольного периода, который, вообще говоря, будет зависеть от μ: $T = T(\mu)$. Можно показать, что это решение, а также его период будут аналитическими функциями μ. Это даёт возможность вычислять их методом разложения в ряды по степеням μ. Представим период искомого решения системы (3.3.1) в виде:

$$T(\mu) = 2\pi(1+\alpha(\mu)), \tag{3.3.2}$$

где $\alpha(\mu)$ – неизвестная функция. Положим:

$$\alpha(\mu) = \alpha_1 + \alpha_2\mu + \alpha_3\mu^2 + \ldots, \tag{3.3.3}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ – подлежащие определению постоянные. Но, как и в п. 1.8, прежде, чем представлять в виде ряда по степеням μ искомое решение, введём замену переменной:

$$t = \tau(1+\alpha_1\mu + \alpha_2\mu^2 + \ldots).$$

Тогда задача нахождения $T(\mu)$-периодического решения системы (3.3.1) приведётся к задаче нахождения 2π-периодического решения системы:

$$\frac{dx}{d\tau}=(1+\alpha_1\mu+\alpha_2\mu^2+\ldots)Ax+\mu(1+\alpha_1\mu+\alpha_2\mu^2+\ldots)F(x,\mu). \tag{3.3.4}$$

Это решение также будет аналитическим относительно μ.

Допустим, что порождающая для системы (3.3.4) система

$$\frac{dx^{(0)}}{d\tau}=Ax^{(0)} \tag{3.3.5}$$

допускает m линейно независимых частных 2π-периодических решений $\varphi^{(1)}(\tau),\ldots,\varphi^{(m)}(\tau)$, отвечающих корням вида $\pm ip_j$ характеристического уравнения (p_j – натуральные числа или нуль). Примем решение

$$x^{(0)}(\tau)=c_{10}\varphi^{(1)}(\tau)+\ldots+c_{m0}\varphi^{(m)}(\tau),$$

где $c_{10},\ldots,c_{m0}$ – постоянные, за порождающее. Выясним условия, при которых система (3.3.4) имеет 2π-периодическое решение, обращающееся при $\mu=0$ в порождающее. Покажем сначала, что, не нарушая общности, можно положить $c_{m0}=0$. В самом деле, предположим, что мы нашли 2π-периодическое решение системы (3.3.4), обращающееся при $\mu=0$ в порождающее с $c_{m0}\neq 0$. Это решение имеет вид:

$$x(\tau,\mu)=c_{10}\varphi^{(1)}(\tau)+\ldots+c_{m-1,0}\varphi^{(m-1)}(\tau)+c_{m0}\varphi^{(m)}(\tau)+x^*(\tau,\mu),$$

причём $x^*(0,\mu)\equiv 0$. Допустим для определённости, что решения $\varphi^{(m-1)}(\tau)$ и $\varphi^{(m)}(\tau)$ отвечают паре корней $\pm ip$ $(p\in\mathbb{N})$. Тогда эти решения имеют вид (см. (2.7.3)):

$$\varphi^{(m-1)}(\tau)=A\sin p\tau+B\cos p\tau,\quad \varphi^{(m)}(\tau)=A\cos p\tau-B\sin p\tau,$$

где A, B – постоянные векторы. Пусть h – произвольная постоянная. Рассмотрим:

$$c_{m-1,0}\varphi^{(m-1)}(\tau+h)+c_{mo}\varphi^{(m)}(\tau+h)=$$
$$=c_{m-1,0}(A\sin p(\tau+h)+B\cos p(\tau+h))+c_{m0}(A\cos p(\tau+h)-B\sin p(\tau+h))=$$

$$= c_{m-1,0}(A\sin p\tau\cos ph + A\cos p\tau\sin ph + B\cos p\tau\cos ph - B\sin p\tau\sin ph) +$$
$$+ c_{m0}(A\cos p\tau\cos ph - A\sin p\tau\sin ph - B\sin p\tau\cos ph - B\cos p\tau\sin ph) =$$
$$= (c_{m-1,0}\cos ph - c_{m0}\sin ph)(A\sin p\tau + B\cos p\tau) +$$
$$+ (c_{m-1,0}\sin ph + c_{m0}\cos ph)(A\cos p\tau - B\sin p\tau) =$$
$$= (c_{m-1,0}\cos ph - c_{m0}\sin ph)\varphi^{(m-1)}(\tau) + (c_{m-1,0}\sin ph + c_{m0}\cos ph)\varphi^{(m)}(\tau).$$

Выберем h из условия:

$$c_{m-1,0}\sin ph + c_{m0}\cos ph = 0,$$

т. е. $\operatorname{tg} ph = -c_{mo}/c_{m-1,0}$. Тогда получим:

$$x(\tau + h, \mu) = c_{11}\varphi^{(1)}(\tau) + \ldots + c_{m-1,1}\varphi^{(m-1)}(\tau) + x^*(\tau + h, \mu),$$

где $c_{11}, \ldots, c_{m-1,1}$ – некоторые постоянные. Но в силу автономности системы (3.3.1) вектор функция $x(\tau + h, \mu)$ также является 2π-периодическим решением системы (3.3.4). Поэтому, если система (3.3.4) допускает 2π-периодическое решение, для которого в соответствующем решении $c_{m0} \neq 0$, то эта же система допускает и 2π-периодическое решение, у которого в порождающем решении $c_{m0} = 0$, и это 2π-периодическое решение может быть получено из первоначального простым смещением начального момента времени. Отсюда следует, что, предполагая сразу $c_{m0} = 0$, мы не рискуем потерять 2π-периодических решений системы (3.3.4).

Если же все $p_j = 0$, то все 2π-периодические решения системы (3.3.5) будут постоянными. Т. е. эти решения соответствуют положениям равновесия. Положениям равновесия будут соответствовать и 2π-периодические решения системы (3.3.4), и тогда задача сводится к вопросу о разрешимости алгебраической или трасцендентной системы уравнений:

$$(1 + \alpha_1\mu + \ldots)Az + \mu(1 + \alpha_1\mu + \ldots)F(z, \mu) = 0.$$

Этой задачей мы здесь не занимаемся. Т. о. предполагаем, что порождающее решение имеет вид:

$$x^{(0)}(\tau) = c_{10}\varphi^{(1)}(\tau) + \ldots + c_{m-1,0}\varphi^{(m-1)}(\tau).$$

Введём матрицу:

$$\Phi_0(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{21}(t) & \cdots & \varphi_{m-1,1}(t) \\ \varphi_{12}(t) & \varphi_{22}(t) & \cdots & \varphi_{m-1,2}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_{1n}(t) & \varphi_{2n}(t) & \cdots & \varphi_{m-1,n}(t) \end{pmatrix}$$

и вектор $\tilde{c}^{(0)} = \mathrm{colon}(c_{10},\ldots,c_{m-1,0})$. Тогда порождающее решение запишется так:

$$x^{(0)}(\tau) = \Phi_0(\tau)\tilde{c}^{(0)}. \tag{3.3.6}$$

2π-периодическое решение системы (3.3.4) ищем в виде ряда:

$$x(\tau,\mu) = x^{(0)}(\tau) + \mu x^{(1)}(\tau) + \mu^2 x^{(2)}(\tau) + \ldots \tag{3.3.7}$$

Для вектор-функции $x^{(1)}(\tau)$ имеем уравнение:

$$\frac{dx^{(1)}}{d\tau} = Ax^{(1)} + F(x^{(0)}(\tau),0) + \alpha_1 Ax^{(0)}(\tau). \tag{3.3.8}$$

Для существования 2π-периодического решения этого уравнения необходимо и достаточно выполнения условия:

$$P(\alpha_1,\tilde{c}^{(0)}) = \int_0^{2\pi} \Psi^T(\tau)\Big(F(\Phi_0(\tau)\tilde{c}^{(0)},0) + \alpha_1 A\Phi_0(\tau)\tilde{c}^{(0)}\Big)d\tau =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Psi^T(\tau)F(\Phi_0(\tau)\tilde{c}^{(0)},0)\,d\tau + \alpha_1 A_1\tilde{c}^{(0)} = 0, \tag{3.3.9}$$

где $(n\times m)$-матрица A_1 имеет вид:

$$A_1 = \int_0^{2\pi} \Psi^T(\tau)A\Phi_0(\tau)d\tau.$$

Пусть постоянная α_1 и вектор $\tilde{c}^{(0)}$ выбраны согласно векторному уравнению (3.3.9), которое представляет из себя систему m уравнений с m неизвестными α_1, $c_{10},\ldots,c_{m-1,0}$. Предположим, что при этом выполнено:

$$\frac{\partial P}{\partial(\alpha_1, \tilde{c}^{(0)})} \neq 0. \qquad (3.3.10)$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Каждому порождающему решению системы (3.3.4), в котором вектор $\tilde{c}^{(0)}$ выбран согласно уравнению (3.3.9) при выполнении условия (3.3.10), соответствует при достаточно малых μ 2π-периодическое решение системы (3.3.4), обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее, и это решение будет аналитическим относительно μ.*

Определив $\alpha_1, \tilde{c}^{(0)}$ из уравнения (3.3.9), и, проверив выполнение условия (3.3.10), можем написать:

$$x^{(1)}(\tau) = \Phi_0(\tau)c^{(1)} + \xi^{(1)}(\tau), \qquad (3.3.11)$$

где $c^{(1)}$ – постоянный $(m-1)$-вектор, а $\xi^{(1)}(\tau)$ – какое-либо частное 2π-периодическое решение уравнения (3.3.8). Вектор $c^{(1)}$ и постоянная α_2 определятся из условия существования 2π-периодического решения уравнения для $x^{(2)}(\tau)$. Покажем, что уравнения, определяющие эти величины, будут линейными, и их определитель совпадёт с $\partial P / \partial(\alpha_1, \tilde{c}^{(0)})$. С этой целью составим уравнение, определяющее вектор $x^{(k)}(\tau)$ при любом k:

$$\frac{dx^{(k)}}{d\tau} = Ax^{(k)} + \alpha_k Ax^{(0)}(\tau) + \alpha_1 Ax^{(k-1)}(\tau) + \frac{\partial F(x^{(0)}(\tau), 0)}{\partial x} x^{(k-1)}(\tau) +$$
$$+ G_k\left(x^{(0)}(\tau), \ldots, x^{(k-2)}(\tau)\right). \qquad (3.3.12)$$

Здесь G_k – полиномы с постоянными коэффициентами, зависящими только от постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$.

Из (3.3.12) видно, что, если при каком-нибудь j функции $x^{(j)}(\tau)$ получаются 2π-периодическими, то их можно представить в виде:

$$x^{(j)}(\tau) = \Phi_0(\tau)c^{(j)} + \xi^{(j)}(\tau), \qquad (3.3.13)$$

где $\xi^{(j)}(\tau)$ – частное 2π-периодическое решение уравнения для $x^{(j)}(\tau)$, а $c^{(j)}$ – произвольный постоянный $(m-1)$-вектор, который подлежит определению из условия 2π-периодичности $x^{(j+1)}(\tau)$.

Предположим, что уже вычислены постоянные $\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1}$ и вектор-функции $x^{(1)}(\tau),\dots,x^{(k-2)}(\tau)$ вместе с входящими в них постоянными $(m-1)$-векторами $c^{(1)},\dots,c^{(k-2)}$. Предположим также, что уже найден вектор $x^{(k-1)}(\tau)$, но входящий в него $(m-1)$-вектор $c^{(k-1)}$, а также постоянная α_k подлежат ещё определению из условия 2π-периодичности $x^{(k)}(\tau)$. Составим это условие, и, заменяя в них $x^{(k-1)}(\tau)$ выражением (3.3.13), получим:

$$\begin{aligned}&\alpha_k A_1\tilde{c}^{(0)} + \alpha_1 A_1 c^{(k-1)} + \\ &+\left(\int_0^{2\pi} \Psi^T(\tau)\frac{\partial F(x^{(0)}(\tau),0)}{\partial x}\Phi_0(\tau)\,d\tau\right)c^{(k-1)} + N^{(k-1)} = 0,\end{aligned} \qquad (3.3.14)$$

где известный вектор $N^{(k-1)}$ имеет вид:

$$N^{(k-1)} = \int_0^{2\pi}\Psi^T(\tau)\left[\alpha_1 A\xi^{(k-1)}(\tau) + \frac{\partial F(x^{(0)}(\tau),0)}{\partial x}\xi^{(k-1)}(\tau) + G_k(\cdots)\right]d\tau.$$

Уравнение (3.3.14) можно представить в виде:

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha_1}\alpha_k + \frac{\partial P}{\partial \tilde{c}^{(0)}}c^{(k-1)} + N^{(k-1)} = 0. \qquad (3.3.15)$$

И, таким образом, мы получим систему m линейных уравнений с m неизвестными, определитель которой на основании (3.3.10) отличен от нуля. Следовательно, получаются вполне определённые ряды для искомого 2π-периодического решения системы (3.3.4) и величины $\alpha(\mu)$, которые сходятся при достаточно малом μ. Возвращаясь от переменной τ к переменной t, получим искомое периодическое решение системы (3.3.1) и его период.

3.4. Автоколебания в двух связанных контурах

Рассмотрим применение результатов предыдущего параграфа на примере системы, описывающей автоколебания, возникающие в двух связанных электрических контурах:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - r_1\dfrac{d^2y}{dt^2} + n_1^2 x = \mu n_1(1-x^2)\dfrac{dx}{dt}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} - r_2\dfrac{d^2x}{dt^2} + n_2^2 y = -\mu\dfrac{n_2^2}{n_1}\delta\dfrac{dy}{dt}, \end{cases} \tag{3.4.1}$$

где $r_1, r_2, n_1, n_2, \delta$ – некоторые определённые постоянные.

Общее решение порождающей системы

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_0}{dt^2} - r_1\dfrac{d^2y_0}{dt^2} + n_1^2 x_0 = 0, \\ \dfrac{d^2y_0}{dt^2} - r_2\dfrac{d^2x_0}{dt^2} + n_2^2 y_0 = 0 \end{cases} \tag{3.4.2}$$

имеет вид:

$$x_0 = M_1\cos\omega_1 t + M_1\sin\omega_1 t + M_3\cos\omega_2 t + M_4\sin\omega_2 t,$$
$$y_0 = M_1k_1\cos\omega_1 t + M_2k_1\sin\omega_1 t + M_3k_2\cos\omega_2 t + M_4k_2\sin\omega_2 t,$$

где M_1, M_2, M_3, M_4 – произвольные постоянные, k_1, k_2 – значения, которые принимает величина

$$k = \frac{\omega^2 - n_1^2}{r_1\omega^2} = \frac{r_2\omega^2}{\omega^2 - n_2^2}$$

при $\omega = \omega_1$ и $\omega = \omega_2$, а ω_1, ω_2 – корни характеристического уравнения:

$$(1 - r_1r_2)\omega^4 - (n_1^2 + n_2^2)\omega^2 + n_1^2n_2^2 = 0. \tag{3.4.3}$$

Из выражений для x_0, y_0 следует, что порождающая система имеет два семейства периодических решений, зависящих от двух произвольных постоянных каждое, и имеющих соответственно периоды $2\pi/\omega_1$ и $2\pi/\omega_2$. Будем искать периодические решения системы (3.4.1), соответствующие каждому из этих семейств. Как было показано в предыдущем параграфе, мы можем в порождающем решении одну из произвольных постоянных принять равной нулю, и т. о. будем иметь следующее порождающее решение:

$$x_0 = M^*\cos\omega t, \quad y_0 = M^*k\sin\omega t,$$

где ω и k равны соответственно либо ω_1 и k_1, либо ω_2 и k_2.

Ввводим замену независимой переменной:

$$t = \tau(1 + \alpha_1\mu + \alpha_2\mu^2 + \ldots),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ – пока не известные постоянные. Уравнения (3.4.1) примут вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{d\tau^2} - r_1\dfrac{d^2y}{d\tau^2} + n_1^2 x = \mu\left[-2\alpha_1 n_1^2 x + n_1(1-x^2)\dfrac{dx}{d\tau}\right] + \ldots \\ \dfrac{d^2y}{d\tau^2} - r_2\dfrac{d^2x}{d\tau^2} + n_2^2 y = \mu\left[-2\alpha_1 n_2^2 y - \dfrac{n_2^2}{n_1}\delta\dfrac{dy}{d\tau}\right] + \ldots \end{cases} \qquad (3.4.4)$$

Невыписанные слагаемые имеют порядок выше первого относительно μ.

Периодическое решение системы (3.4.4) будем искать в виде рядов:

$$x = M^*\cos\omega\tau + \mu x_1(\tau) + \ldots, \qquad y = kM^*\cos\omega\tau + \mu y_1(\tau) + \ldots$$

Для функций $x_1(\tau),\ y_1(\tau)$ получим уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{d\tau^2} - r_1\dfrac{d^2y_1}{d\tau^2} + n_1^2 x_1 = -2\alpha_1 n_1^2 M^*\cos\omega\tau - \\ -n_1\left(1-(M^*)^2\cos^2\omega\tau\right)M^*\omega\sin\omega\tau, \\ \dfrac{d^2y_1}{d\tau^2} - r_2\dfrac{d^2x_1}{d\tau^2} + n_2^2 y_1 = -2\alpha_1 n_2^2 M^* k\cos\omega\tau + \\ +\dfrac{n_2^2}{n_1}\delta k M^*\omega\sin\omega\tau \end{cases} \qquad (3.4.5)$$

Запишем условия существования периодического решения уравнений (3.4.5). Согласно общей теории для этого необходимо знать периодические решения системы, сопряжённой с (3.4.2). Но в рассматриваемом случае проще поступить следующим образом.

Задача сводится к определению условий, которым должны удовлетворять коэффициенты P, Q, R, S для того, чтобы система

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{d\tau^2} - r_1 \dfrac{d^2y}{d\tau^2} + n_1^2 x = P\cos\omega\tau + Q\sin\omega\tau, \\ \dfrac{d^2y}{d\tau^2} - r_2 \dfrac{d^2x}{d\tau^2} + n_2^2 y = R\cos\omega\tau + S\sin\omega\tau \end{cases}$$

допускала периодические решения. Полагая здесь

$$x = A\cos\omega\tau + B\sin\omega\tau, \quad y = C\cos\omega\tau + D\sin\omega\tau,$$

будем иметь:

$$\begin{cases} (n_1^2 - \omega^2)A + r_1\omega^2 C = P, \quad r_2\omega^2 A + (n_2^2 - \omega^2)C = R, \\ (n_1^2 - \omega^2)B + r_1\omega^2 D = Q, \quad r_2\omega^2 B + (n_2^2 - \omega^2)D = S. \end{cases} \tag{3.4.6}$$

Поскольку ω является корнем уравнения (3.4.3), то уравнения (3.4.6) будут иметь решения тогда и только тогда, когда будут выполнены соотношения:

$$r_2\omega^2 P - (n_1^2 - \omega^2)R = r_2\omega^2 Q - (n_1^2 - \omega^2)S = 0. \tag{3.4.7}$$

Это и будут искомые условия периодичности. Применяя их к уравнениям (3.4.5), получим:

$$\alpha_1 M^* = 0, \;\; n_1 r_2 \omega^2 \left(1 - \frac{(M^*)^2}{4}\right) + \frac{n_2^2}{n_1}(n_1^2 - \omega^2)\delta k = 0,$$

откуда с учётом выражения для k находим:

$$\alpha_1 = 0, \quad (M^*)^2 = 4 - \frac{4\delta n_2^2 (n_1^2 - \omega^2)}{n_1^2 (n_2^2 - \omega^2)}.$$

Этими значениями мы здесь и ограничимся.

3.5. Построение периодических решений квазилинейных дифференциальных систем методом простых итераций

Существенной особенностью метода малого параметра Пуанкаре является то, что искомое периодическое решение квазилинейной системы ищется в виде ряда по степеням малого параметра, что приводит к необходимости требования аналитичности нелинейности $F(t, x, \mu)$ относительно x и μ. Если же это требование не выполнено, то метод становится непригодным. Кроме того, как мы убедились на примерах, его применение связано, как правило, с громоздкими вычислениями, вследствие чего эффективно могут быть найдены лишь несколько первых (обычно 3-4) членов искомого ряда. Есть и другие обстоятельства, в частности, то, что при использовании метода малого параметра трудно найти границы допустимых значений параметра μ, при которых гарантируется существование решения. Всё это приводит к необходимости поиска более эффективных методов нахождения периодических решений квазилинейных уравнений и их систем. Одним из таких методов является *метод простых итераций*. Детально он описан в монографии [3].

Рассмотрим метод простых итераций на примере векторного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t) + \mu F(t, x, \mu), \tag{3.5.1}$$

где $x = \text{colon}(x_1, \ldots, x_n)$, A – постоянная $(n \times n)$-матрица, $f(t)$ – 2π-периодическая вектор-функция размерности n. Вектор-функция $F(t, x, \mu)$ предполагается непрерывной и 2π-периодической относительно t и на этот раз не обязательно аналитической, а лишь непрерывной относительно x и μ в некоторой замкнутой и ограниченной области изменения этих переменных. Позже, правда, мы укажем ещё некоторые требования, налагаемые на функцию $F(t, x, \mu)$.

Ограничимся рассмотрением нерезонансного случая, т. е. будем предполагать, что матрица A не имеет собственных значений вида ip, где $p \in \mathbb{Z}$.

Введём необходимые для дальнейшего рассмотрения векторную и матричную нормы. Если $x = \text{colon}(x_1, \ldots, x_n)$, $A = (a_{jk})_{j,k=\overline{1,n}}$, то

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}, \quad \|A\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|^2} \ .$$

Разложим вектор-функцию $f(t)$ в ряд Фурье в комплексной форме:

$$f(t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} f^{(s)} e^{ist}, \tag{3.5.2}$$

где $f^{(s)}$ – постоянные векторы. Будем предполагать, что ряд (3.5.2) таков, что:

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} \left\| f^{(s)} \right\| < +\infty. \tag{3.5.3}$$

Выражение, стоящее в левой части неравенства (3.5.3) назовём *тригонометрической нормой* вектор-функции $f(t)$ и будем обозначать $\|f(t)\|_*$.

Сформулируем некоторые свойства тригонометрической нормы:

1) $\|f\|_* = 0$ тогда и только тогда, когда $f(t) \equiv 0$;

2) $\|f+g\|_* \le \|f\|_* + \|g\|_*$;

3) $\|\lambda f\|_* = |\lambda| \cdot \|f\|_*$, где λ – постоянная скалярная величина.

Нетрудно видеть, что 2π -периодические вектор-функции, удовлетворяющие неравенству (3.5.3), образуют линейное нормированное пространство, которое мы будем обозначать через V.

Рассмотрим уравнение, порождающее для уравнения (3.5.1):

$$\frac{dx^{(0)}}{dt} = Ax^{(0)} + f(t). \qquad (3.5.4)$$

Согласно изложенному в п. 2.9, это уравнение в нерезонансном случае имеет единственное 2π-периодическое решение, и, учитывая (3.5.2), это решение можно записать в виде:

$$x^{(0)}(t) = -\sum_{s=-\infty}^{\infty} (A - isE)^{-1} f^{(s)} e^{ist}. \qquad (3.5.5)$$

Представим эту функцию в виде:

$$x^{(0)}(t) = x^{(01)}(t) + x^{(02)}(t),$$

где

$$x^{(01)}(t) = -\sum_{|s|\le\|A\|} (A - isE)^{-1} f^{(s)} e^{ist}, \quad x^{(02)}(t) = -\sum_{|s|>\|A\|} (A - isE)^{-1} f^{(s)} e^{ist}.$$

Рассмотрим $x^{(01)}(t)$. Поскольку матрица A не имеет собственных значений вида is, где $s \in \mathbb{Z}$, то при $|s| \le \|A\|$ найдётся такая константа K_1, не зависящая от s, что выполнится неравенство $\left\|(A - isE)^{-1}\right\| \le K_1$. Отсюда получим:

$$\left\|x^{(01)}(t)\right\|_* \le K_1 \left\|\tilde{f}(t)\right\|_*,$$

где

$$\tilde{f}(t)=\sum_{|s|\le\|A\|} f^{(s)}e^{ist}.$$

Рассмотрим теперь $x^{(02)}(t)$. Поскольку в этом случае $|s|>\|A\|$, и $|s|\in\mathbb{N}$, то найдётся такое $\gamma>0$, что выполнится $|s|-\|A\|\ge\gamma$. В качестве γ можно, например, взять величину $1+\operatorname{entier}(\|A\|)-\|A\|$. Тогда будем иметь:

$$\left\|(A-isE)^{-1}\right\|=\left\|\left(-is\left(E-\frac{1}{is}A\right)\right)^{-1}\right\|\le\frac{1}{|s|}\left\|\left(E-\frac{1}{is}A\right)^{-1}\right\|=$$

$$=\frac{1}{|s|}\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{A}{is}\right)^{k}\right\|\le\frac{1}{|s|}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\|A\|}{|s|}\right)^{k}=\frac{1}{|s|}\cdot\frac{1}{1-\frac{\|A\|}{|s|}}=\frac{1}{|s|-\|A\|}\le\frac{1}{\gamma}.$$

Таким образом:

$$\left\|x^{(02)}(t)\right\|_{*}\le\sum_{|s|>\|A\|}\frac{1}{|s|-\|A\|}\cdot\left\|f^{(s)}\right\|\le\frac{1}{\gamma}\left\|\tilde{\tilde{f}}\right\|_{*},$$

где

$$\tilde{\tilde{f}}(t)=\sum_{|s|>\|A\|} f^{(s)}e^{ist}.$$

Отсюда вытекает:

$$\left\|x^{(0)}(t)\right\|_{*}=\left\|x^{(01)}(t)\right\|_{*}+\left\|x^{(02)}(t)\right\|_{*}\le K_1\left\|\tilde{f}(t)\right\|_{*}+\frac{1}{\gamma}\left\|\tilde{\tilde{f}}(t)\right\|_{*}\le K\left\|f(t)\right\|_{*},\quad(3.5.6)$$

где $K=\max(K_1,\gamma^{-1})$. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема. *В нерезонансном случае уравнение (3.5.4) при любой функции $f(t)\in V$ имеет единственное частное решение $x^{(0)}(t)\in V$, и для этого решения справедлива оценка (3.5.6).*

Будем теперь искать не просто 2π-периодическое решение системы (3.5.1), а решение этой системы, принадлежащее пространству V. Для этого используем метод последовательных приближений (простых итераций). Выберем в качестве начального приближения $x^{(0)}(t)$, а последующие определим как решения, принадлежащие пространству V, следующих уравнений:

$$\frac{dx^{(k)}}{dt} = Ax^{(k)} + f(t) + \mu F(t, x^{(k-1)}, \mu), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.5.7}$$

Все эти решения, согласно доказанной теореме, будут существовать, если только при любой функции $x(t) \in V$ функция $F(t, x(t), \mu)$ также будет принадлежать пространству V. Мы будем предполагать, что это требование выполнено. Заметим, что оно не слишком обременительно. В частности, оно заведомо выполнено, если функция $F(t, x, \mu)$ принадлежит V относительно t и аналитична относительно x в некоторой области изменения этой переменной[3]. Во всяком случае, для типов уравнений, характерных для теории колебаний, это требование, как правило, оказывается выполненным.

Введём в пространстве V множество:

$$\Omega = \left\{ x(t) \in V : \left\| x(t) - x^{(0)}(t) \right\|_* \le d \right\},$$

где $d > 0$. Покажем, что параметр μ можно выбрать настолько малым, что все приближения (3.5.7) будут находиться внутри множества Ω. Обозначим:

$$M(d, \mu) = \sup_{x \in \Omega} \left\| F(t, x, \mu) \right\|_*.$$

Начальное приближение $x^{(0)}(t)$ принадлежит множеству Ω по определению. Предположим по индукции, что $x^{(k)}(t) \in \Omega$. Запишем уравнение для $x^{(k+1)}(t)$:

$$\frac{dx^{(k+1)}}{dt} = Ax^{(k+1)} + f(t) + \mu F(t, x^{(k)}, \mu).$$

Отсюда с учётом (3.5.4):

$$\frac{d(x^{(k+1)} - x^{(0)})}{dt} = A(x^{(k+1)} - x^{(0)}) + \mu F(t, x^{(k)}, \mu). \tag{3.5.8}$$

[3] Некоторые другие условия, обеспечивающие это требование, можно найти, например, в монографии Бари Н. К. «Тригонометрические ряды», Физматгиз, 1961, а также в монографии Ж.-П. Кахана «Абсолютно сходящиеся ряды Фурье», М., Мир, 1976

Уравнение (3.5.8) линейное, и его правая часть $\mu F(t,x^{(k)},\mu)\in V$. Тогда это уравнение имеет в пространстве V единственное решение, причём, согласно (3.5.6), справедлива оценка:

$$\left\|x^{(k+1)}-x^{(0)}\right\|_* \le \mu K\left\|F(t,x^{(k)},\mu)\right\|_* \le \mu KM(d,\mu).$$

Отсюда следует, что при выполнении неравенства

$$\mu KM(d,\mu)\le d_0 < d \tag{3.5.9}$$

приближение $x^{(k+1)}(t,\mu)$ будет находиться внутри множества Ω.

Теперь наложим на функцию $F(t,x,\mu)$ ещё одно ограничение: существует такое $L(d,\mu)>0$, что $\forall\, x,y\in\Omega$ выполнено:

$$\left\|F(t,x,\mu)-F(t,y,\mu)\right\|_* \le L(d,\mu)\left\|x-y\right\|_*. \tag{3.5.10}$$

Нетрудно видеть, что это не что иное, как условие Липшица в пространстве V. Его использование даёт возможность доказать сходимость процесса (3.5.7) к решению уравнения (3.5.1) в пространстве V. В самом деле, имеем:

$$\frac{d(x^{(k+1)}-x^{(k)})}{dt}=A(x^{(k+1)}-x^{(k)})+\mu(F(t,x^{(k)},\mu)-F(t,x^{(k-1)},\mu)),$$

откуда, поскольку $x^{(k)},\ x^{(k+1)}\in\Omega$, с учётом оценки (3.5.6) получим:

$$\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\|_* \le \mu K\left\|F(t,x^{(k)},\mu)-F(t,x^{(k-1)},\mu)\right\|_* \le \mu KL(d,\mu)\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|_*.$$

Следовательно, для сходимости процесса (3.5.7) по норме $\left\|\cdot\right\|_*$ к решению уравнения (3.5.1) в пространстве V достаточно потребовать, чтобы

$$\mu KL(d,\mu)<1. \tag{3.5.11}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть векторное уравнение (3.5.1) удовлетворяет следующим условиям:*

1) матрица A не имеет собственных значений вида ip, где $p\in\mathbb{Z}$ (нерезонансный случай);

2) вектор-функция $f(t)\in V$;

3) вектор-функция $F(t,x,\mu)$ непрерывна по всем аргументам, и для любой функции $x(t)\in V$ функция $F(t,x(t),\mu)$ также принадлежит пространству V ;

4) на множестве Ω функция $F(t,x,\mu)$ удовлетворяет условию (3.5.10);

5) параметр μ удовлетворяет неравенствам (3.5.9), (3.5.11).

Тогда на множестве Ω уравнение (3.5.1) имеет единственное решение $x(t,\mu)$.

Пример. В качестве примера рассмотрим скалярное уравнение 1-го порядка:

$$\frac{dx}{dt} = -x + \sin t + \mu x^2, \tag{3.5.12}$$

Заметим, что для скалярных функций $x(t), y(t)\in V$ выполнено неравенство $\|xy\|_* \le \|x\|_* \cdot \|y\|_*$, что следует из свойств произведения двух тригонометрических рядов. В частности $\left\|x^2\right\|_* \le \|x\|_*^2$.

Запишем порождающее уравнение:

$$\frac{dx_0}{dt} = -x_0 + \sin t. \tag{3.5.13}$$

Его единственное 2π -периодическое решение:

$$x_0 = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t. \tag{3.5.14}$$

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{dz}{dt} = -z + f(t), \tag{3.5.15}$$

где $f(t)\in V$. Вычислим для этого уравнения константу K, фигурирующую в оценке (3.5.6). Поскольку в данном случае $A=-1$, то $\|A\|=1$. Далее, при $|s|\le\|A\|=1$ имеем:

$$\left\|(A-isE)^{-1}\right\| = \left|\frac{1}{-1-is}\right| = \frac{1}{|1+is|} \le 1,$$

т. е. константа $K_1 = 1$. При $|s| > \|A\| = 1$ получим $|s| - 1 \ge 1$. Следовательно, $\gamma = 1$, и т. о. $K = 1$. Поэтому для решения $z \in V$ уравнения (3.5.15) имеем оценку:

$$\|z\|_* \le \|f\|_* . \tag{3.5.16}$$

Для функции $x_0(t)$:

$$\|x_0\|_* = \left|\frac{1}{2}\right| + \left|-\frac{1}{2}\right| = 1.$$

Введём:

$$\Omega = \left\{x \in V : \|x - x_0\|_* \le d\right\}.$$

Рассмотрим $\forall\, x \in \Omega$:

$$\|x^2\|_* = \|(x - x_0 + x_0)^2\|_* \le \|x - x_0\|_*^2 + 2\|x_0\|_* \cdot \|x - x_0\|_* + \|x_0\|_*^2 \le$$
$$\le d^2 + 2d + 1 = (d+1)^2 .$$

Т. о., можно положить $M(d,\mu) = M(d) = (d+1)^2$. Далее $\forall\, x, y \in \Omega$:

$$\|x^2 - y^2\|_* = \|(x+y)(x-y)\|_* \le \|(x+y)\|_* \cdot \|(x-y)\|_* \le \left(\|x\|_* + \|y\|_*\right) \cdot \|(x-y)\|_* \le$$
$$\le 2(1+d)\|(x-y)\|_* .$$

Т.о., можно положить $L(d,\mu) = L(d) = 2(1+d)$. Тогда неравенства (3.5.9), (3.5.11) принимают вид:

$$\mu(d+1)^2 \le d_0 < d , \tag{3.5.17}$$

$$\mu 2(1+d) < 1 . \tag{3.5.18}$$

Из (3.5.17) получим:

$$\mu < \frac{d}{(d+1)^2} .$$

Рассмотрим функцию $\varphi(d) = d(d+1)^{-2}$ при $d > 0$. Нетрудно проверить, что при $d = 1$ она достигает максимума, равного $1/4$. Поэтому положим $d = 1$. Тогда неравенства (3.5.17), (3.5.18) дадут $\mu < 1/4$. Эту оценку мы и примем в качестве верхней границы для параметра μ. При таких значениях μ обеспечивается сходимость процесса последовательных приближений.

Построим теперь приближённое решение из пространства V уравнения (3.5.12) методом простых итераций. Положим в (3.5.12):

$$x = x_0 + \mu y, \tag{3.5.19}$$

где y – новая неизвестная функция. Получим:

$$\frac{dy}{dt} = -y + x_0^2(t) + 2\mu x_0(t) y + \mu^2 y^2. \tag{3.5.20}$$

Последовательные приближения к решению из пространства V уравнения (3.5.20) определяем как решения из пространства V уравнений:

$$\frac{dy_0}{dt} = -y_0 + x_0^2(t), \tag{3.5.21}$$

$$\frac{dy_{s+1}}{dt} = -y_{s+1} + x_0^2(t) + 2\mu x_0(t) y_s + \mu^2 y_s^2, \quad s = 0,1,2,\ldots \tag{3.5.22}$$

С учётом (3.5.14) уравнение (3.5.21) принимает вид:

$$\frac{dy_0}{dt} = -y_0 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sin 2t.$$

Его единственное 2π-периодическое решение:

$$y_0(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{10}\cos 2t - \frac{1}{20}\sin 2t.$$

Дальнейшими вычислениями по формулам (3.5.22) мы здесь заниматься не будем. Т. о., приближённое решение из пространства V имеет вид:

$$x(t,\mu) \approx \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t + \mu\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{10}\cos 2t - \frac{1}{20}\sin 2t\right).$$

Отметим в заключение, что метод простых итераций легко программируем, что позволяет утомительные вычисления приближений переложить на компьютер.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие условия необходимы для существования 2π-периодических решений системы (3.1.1) в резонансном случае?
2. Каковы характерные особенности решений автономных систем дифференциальных уравнений?
3. Каковы условия существования 2π-периодических решений автономной системы (3.3.4)?
4. Каковы преимущества метода простых итераций нахождения периодичсеких решений по сравнению с классическим методом малого параметра?

Задачи к главе 3

1. Для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dx} = Ax + f(t) + \mu F(t,x),$$

$x = \mathrm{colon}(x_1, x_2, x_3)$, показать, что она имеет единственное 2π-решение, и приближённо построить это решение с точностью до слагаемых порядка μ включительно.

а) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$, $F(t,x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ \sin t \\ x_2^2 + x_3^2 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -3 \\ \cos 2t \end{pmatrix}$, $F(t,x) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_2 x_3 \\ x_1 x_3 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t - \sin t \\ 1 \end{pmatrix}$, $F(t,x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1^2 x_2 \\ x_3 \sin 2t \end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 1 & 4 & -2\\ 1 & 5 & -3\end{pmatrix}$, $f(t)=\begin{pmatrix}\sin^2 t\\ \cos^2 t\\ 1+\cos t\end{pmatrix}$, $F(t,x)=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_1x_3\end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix}3 & -3 & 1\\ -3 & -2 & 2\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$, $f(t)=\begin{pmatrix}\sin^3 t\\ 1\\ \cos t\end{pmatrix}$, $F(t,x)=\begin{pmatrix}x_1\\ x_1x_2\\ x_1x_2x_3\end{pmatrix}$;

е) $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ 3 & -4 & -3\\ 2 & -4 & 0\end{pmatrix}$, $f(t)=\begin{pmatrix}1-\sin t\\ 1+\cos t\\ 4\end{pmatrix}$, $F(t,x)=\begin{pmatrix}x_1\sin t+x_2\cos t\\ x_3^2\\ 1\end{pmatrix}$.

2. Для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dx}=Ax+f(t)+\mu F(x)$$

записать порождающее 2π-периодическое решение. Сколько произвольных постоянных содержит это решение? Записать систему уравнений для порождающих амплитуд:

а) $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & -1 & -1\end{pmatrix}$, $f(t)=\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\\ \cos t+\sin t\end{pmatrix}$, $F(x)=\begin{pmatrix}x_1^2+x_2^2\\ x_2^2+x_3^2\\ x_3^2+x_1^2\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ -2 & -1 & 2\\ -3 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $f(t)=\begin{pmatrix}1\\ \sin 4t\\ \cos 4t\end{pmatrix}$, $F(x)=\begin{pmatrix}1\\ x_1+x_3\\ x_2^2\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}3 & -3 & 24\\ 0 & 9 & -18\\ 0 & 9 & -9\end{pmatrix}$, $f(t)=\begin{pmatrix}\sin^2 t\\ \cos^2 t\\ 1\end{pmatrix}$, $F(x)=\begin{pmatrix}x_1^2-x_2\\ x_2^2-x_3\\ x_3^2-x_1\end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 4\\ 3 & -8 & -4\end{pmatrix}$, $f(t)=\begin{pmatrix}\sin^3 t\\ \cos t\\ 1\end{pmatrix}$, $F(x)=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\ x_1+x_2\\ x_3^2\end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 6\\ 3 & -6 & 9\end{pmatrix}$, $f(t)=\begin{pmatrix}\cos^2 t\\ -\sin t\\ 1\end{pmatrix}$, $F(x)=\begin{pmatrix}x_3^2\\ x_2^2\\ x_1^2\end{pmatrix}$;

е) $A=\begin{pmatrix}2 & -6 & -4\\ 6 & -2 & -4\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}$, $f(t)=\begin{pmatrix}\cos t+\sin t\\ \sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$, $F(x)=\begin{pmatrix}x_1^2-x_2^2\\ x_2^2-x_3^2\\ x_3^2-x_1^2\end{pmatrix}$.

3. Для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=Ax+\mu F(x),$$

$x=\text{colon}(x_1,x_2)$, вычислить приближённо с точностью до слагаемых порядка μ включительно периодическое решение и его период:

а) $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $F(x)=\begin{pmatrix}0\\ (3-2x_1^2)x_2\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $F(x)=\begin{pmatrix}x_1^3\\ 0\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}0 & 4\\ -4 & 0\end{pmatrix}$, $F(x)=\begin{pmatrix}(2-x_2^2)x_1\\ 0\end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix}0 & -9\\ 9 & 0\end{pmatrix}$, $F(x)=\begin{pmatrix}0\\ (2-3x_2^2)x_1\end{pmatrix}$;

д) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, $F(x) = \begin{pmatrix} (1 - x_1^2)x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$;

е) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^3 \end{pmatrix}$.

4. Для данного дифференциального уравнения построить процесс последовательных приближений к его 2π-периодическому решению. Указать границы параметра μ, при которых гарантируется сходимость этого процесса:

а) $\dfrac{dx}{dt} = 2x + \cos t - \mu x^3$; б) $\dfrac{dx}{dt} = -x - \sin^2 t + \mu(x^2 + x)$;

в) $\dfrac{dx}{dt} = 3x + \cos^2 t + \mu x^2 \sin t$; г) $\dfrac{dx}{dt} = -4x + \sin 3t + \mu(1 - x^2)$;

д) $\dfrac{dx}{dt} = -2x + \cos 3t + \mu(x^2 + x\cos t)$; е) $\dfrac{dx}{dt} = -5x - \cos t + \mu(\sin t - x^2)$.

Список рекомендованной литератури

1. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М. : Гостехиздат, 1956.– 491 с.

2. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М. : Наука, 1981.– 400 с.

3. Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем. М. : Наука, 1979.– 432 с.

4. Старжинский В. М. Прикладные методы нелинейных колебаний. М. : Наука, 1977.– 256 с.

5. Мітропольский Ю. О. Методи нелінійної механіки. К. : Наук. думка, 2005.– 527 с.

Содержание

Навчальне видання

Щоголев Сергій Авенірович

Метод малого параметра А. Пуанкаре в теорії нелінійних коливань

Навчально-методичний посібник

Російською мовою

За редакцією автора

Підп. до друку 10.09.2015. Формат 60х84/16.
Умов.-друк. арк. 8,60. Тираж 40 пр.
Зам. № 1206.

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет
імені І. І. Мечникова
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.

Україна, 65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12
Тел.: (048) 723 28 39. E-mail: druk@onu.edu.ua