МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І. І. МЕЧНИКОВА
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ЕКОНОМІКИ ТА МЕХАНІКИ

***С. А. Щоголев***

# ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Навчально-методичний посібник

ОДЕСА
ОНУ
2015

УДК 517.3
ББК 22.161.1
Щ92

Рекомендовано до друку науково-методичною
радою ОНУ імені І. І. Мечникова.
Протокол № 1 від 16.10.2014 р.

***Рецензенти:***

**А. О. Кореновський** – доктор фізико-математичних наук, професор завідувач кафедри математичного аналізу Одеського національного університету імені І. І. Мечникова;

**А. В. Плотніков** – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри прикладної та обчислювальної математики і САПР Одеської державної академії будівництва та архітектури;

**Ю. О. Григор'єв** – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики Одеського національного морського університету.

.

**Щоголев С. А.**
Щ92 **Інтегральне числення функцій багатьох змінних:** Навчально-методичний посібник / С. А. Щоголев. – Одеса : «Одеський національний університет імені І. І. Мечникова», 2015.– 112 с.
ISBN 978-617-689-135-2

Навчально-методичний посібник написано відповідно до навчальної програми дисципліни «Математичний аналіз» для підготовки бакалаврів, спеціалістів та магістрів за спеціальностями «фізика», «прикладна фізика», «астрономія».

Посібник містить основні поняття, методи, теореми та формули, багато розв'язаних типових задач, а також завдання для самостійної роботи студентів.

**УДК 517.3**
**ББК 22.161.1**

ISBN 978-617-689-135-2

# ГЛАВА 1. ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

## 1.1. Область у просторі $\mathbb{R}^n$

Розглянемо метричний простір $\mathbb{R}^n$. Нехай $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

**Означення**. *Кулею* радіуса $r$ з центром у точці $x^0$ називається множина $S_r(x^0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \rho(x^0, x) < r \right\}$ ($\rho(x^0, x)$ – відстань між точками $x^0$ та $x$).

Нехай $D_0$ – множина точок простору $\mathbb{R}^n$.

**Означення**. Точка $x^0 \in D_0$ називається *внутрішньою точкою* множини $D_0$, якщо $\exists\, \varepsilon > 0$ таке, що $S_\varepsilon(x^0) \subset D_0$.

Тобто точка $x^0$ належить множині $D_0$ разом з деякою кулею з центром в точці $x^0$ (рис. 1).

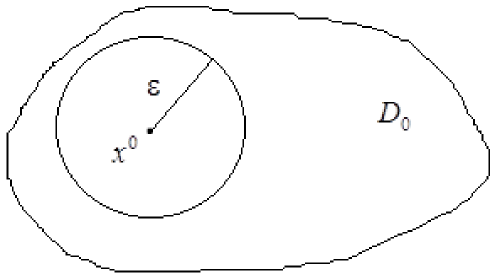


**Рис.1**

Сукупність всіх внутрішніх точок множини $D_0$ називається *внутрішністю* множини $D_0$ і позначається як $int\, D_0$. Зрозуміло, що $int\, D_0 \subseteq D_0$. Якщо внутрішність множини $D_0$ співпадає з самою множиною $D_0$ ($int\, D_0 = D_0$), тобто всі точки множини $D_0$ є внутрішніми, то множина $D_0$ називається *відкритою.*

*Приклад*. Покажемо, що $S_r(x^0)$ – відкрита множина. Дійсно, нехай $\tilde{x} \in S_r(x^0)$. Тоді $\rho(\tilde{x}, x^0) < r$. Позначимо $\varepsilon = r - \rho(\tilde{x}, x^0)$. Тоді $S_\varepsilon(\tilde{x}) \subset S_r(x^0)$, оскільки, якщо $x \in S_\varepsilon(\tilde{x})$, то $\rho(x, \tilde{x}) < \varepsilon$, і внаслідок нерівності трикутника отримуємо: $\rho(x, x^0) \le \rho(x, \tilde{x}) + \rho(\tilde{x}, x^0) < \varepsilon + \rho(\tilde{x}, x^0) = r - \rho(\tilde{x}, x^0) + \rho(\tilde{x}, x^0) = r$, отже $x \in S_r(x^0)$. Оскільки $x$ довільна точка кулі $S_\varepsilon(\tilde{x})$, то це й означає, що $S_\varepsilon(\tilde{x}) \subset S_r(x^0)$. Таким чином, будь-яка точка $\tilde{x}$ кулі $S_r(x^0)$ належить цій кулі разом з деякою кулею $S_\varepsilon(\tilde{x})$, тобто $S_r(x^0)$ – відкрита множина.

**Означення**. Точка $x^0 \in \mathbb{R}^n$ називається *граничною точкою* множини $D_0$, якщо $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x \in D_0 :\ 0 < \rho(x^0, x) < \varepsilon$.

Тобто у будь-якій кулі з центром в точці $x^0$ існують точки множини $D_0$, відмінні від точки $x^0$.

Гранична точка множини $D_0$ може належати цій множині, а може й не належати. Наприклад, всі точки інтервалу $(a,b)$ є його граничними точками. Точки $a$ і $b$ також його граничні точки, але вони інтервалу $(a,b)$ не належать.

**Означення**. Множина $D$ називається *замкненою*, якщо вона містить всі свої граничні точки.

Наприклад, відрізок $[a,b]$ є замкненою множиною, а інтервал $(a,b)$ і також півінтервали $(a,b]$, $[a,b)$ не є замкненими множинами.

**Означення.** Множина $D_0 \subset \mathbb{R}^n$ називається *зв'язною*, якщо для будь якого її розбиття $D_0 = D_1 \cup D_2$ на дві непорожні множини, що не перетинаються $(D_1 \cap D_2 = \varnothing)$, хоча б одна з них містить граничну точку іншої множини.

**Означення**. *Областю* у просторі $\mathbb{R}^n$ називається відкрита та зв'язна множина простору $\mathbb{R}^n$.

Відкрита множина $D_0 \subset \mathbb{R}^n$ буде областю тоді і тільки тоді, коли будь-які дві точки множини $D_0$ можна з'єднати ламаною лінією, яка цілком належить множині $D_0$.

**Означення**. *Околом* точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$ назвемо будь-яку кулю з центром у точці $x^0$.

**Означення**. *Межовою точкою* множини називається така точка, в будь-якому околі якої існує хоча б одна точка, що належить цій множині, і хоча б одна точка, що цій множині не належить. Сукупність всіх межових точок області $D_0$ називається *межею* області $D_0$ і позначається $\partial D_0$. Об'єднання області $D_0$ та її межі називається *замиканням* області $D_0$ і позначається $\overline{D_0}$. Тобто $\overline{D_0} = D_0 \cup \partial D_0$

Наприклад, точки $a$ і $b$ є межовими точками інтервалу $(a,b)$, а їх сукупність – межа інтервалу $(a,b)$. Замиканням інтервалу $(a,b)$ є відрізок $[a,b]$.

**Означення**. *Замкненою областю* простору $\mathbb{R}^n$ називається об'єднання області та всіх її граничних точок.

Покажемо, що $\overline{D}_0$ є замкненою областю. Нехай це не так, тоді має існувати така гранична точка множини $\overline{D}_0$, яка цій множині не належить. Ця точка не може бути внутрішньою точкою множини $\overline{D}_0$, інакше вона цій множині належить. За тою ж обставиною точка не може бути і межовою точкою множини $\overline{D}_0$. Тоді знайдеться такий окіл цієї точки, який не містить жодної точки множини $\overline{D}_0$. А це суперечить тому, що дана точка є граничною точкою множини $\overline{D}_0$.

**Зауваження**. У подальшому, якщо це не приводитиме до непорозумінь, під терміном «область» для скорочення розумітимемо замкнену обмежену область.

## 1.2. Задачі, що приводять до поняття подвійного інтеграла

I **.** <u>Задача про об'єм циліндричного бруса</u>**.** Розглянемо у просторі $\mathbb{R}^3$ тіло, яке обмежене знизу областю $D$ площини $Oxy$, зверху – поверхнею $z = f(x, y)$ ($f(x, y) \geq 0$ в області $D$), з боків – циліндричною поверхнею, напрямна якої збігається з межею області $D$, а твірна паралельна осі $Oz$ (рис. 2). Таке тіло називають *циліндричним брусом*. Поставимо задачу: знайти об'єм $V$ цього бруса.

Довільним чином розіб'ємо область $D$ на $n$ частинних областей $D_i$, які не мають спільних внутрішніх точок. Позначимо як $\Delta S_i$ площу частинної області $D_i$. В кожній області $D_i$ довільним чином оберемо точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$. Побудуємо циліндричний стовпчик з основою $D_i$, висотою $f(\xi_i, \eta_i)$ і твірними, паралельними осі $Oz$. Об'єм цього стовпчика дорівнює $f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$. Усіх таких стовпчиків $n$, тому сума їх об'ємів:

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i \,. \qquad (1.2.1)$$

Ця сума наближено дорівнює шуканому об'єму циліндричного бруса:

$V \approx V_n$.

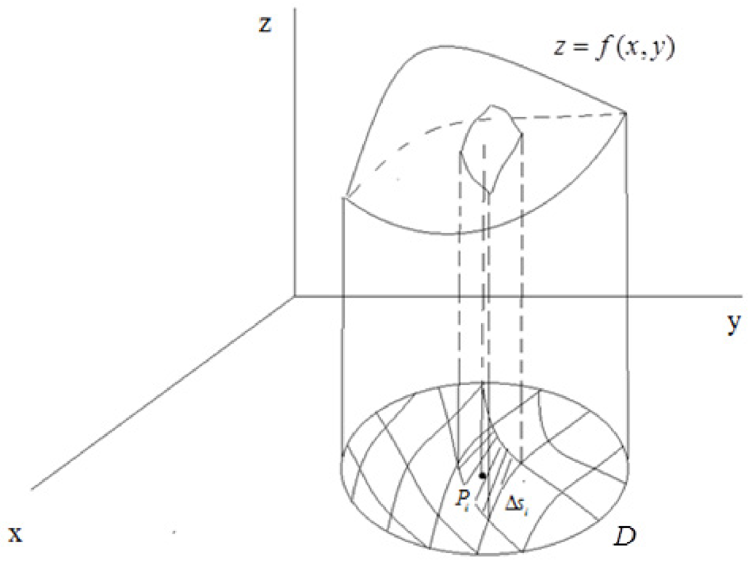


**Рис. 2**

**Означення**. *Діаметром* $d(G)$ області $G$ називається найбільша відстань між двома точками цієї області:

$$d(G) = \max_{x, x' \in G} \rho(x, x') .$$

Позначимо як $\lambda$ найбільший з діаметрів частинних областей $D_i$:

$$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(D_i) .$$

Тоді природно об'єм циліндричного бруса визначити як границю суми (1.2.1) при $\lambda \to 0$:

$$V = \lim_{\lambda \to 0} V_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i \,. \qquad (1.2.2)$$

Це аналог знаходження площі криволінійної трапеції як границі площі ступінчатої фігури при прямуванні рангу розбиття відрізку $[a, b]$ до нуля (див. «Інтегральне числення функцій однієї змінної»).

II. Задача про масу пластини. Нехай маємо плоску матеріальну пластину, формою якої є область $D$ (рис. 3).

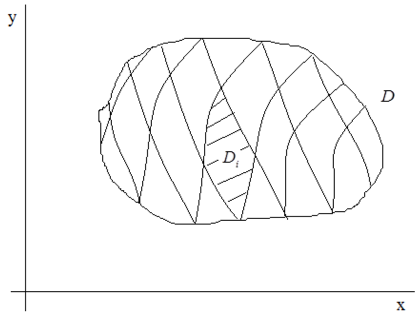


**Рис. 3**

Припустимо, що в області $D$ визначено неперервну функцію $\gamma = \gamma(x, y)$, яка визначає густину пластини в точці $(x, y)$. Знайдемо масу $m$ пластини.

Розіб'ємо довільним чином область $D$ на частинні області $D_i$, які не мають спільних внутрішніх точок. Площу області $D_i$ позначимо як $\Delta S_i \left( i = \overline{1, n} \right)$. Оберемо в кожній з областей $D_i$ довільним чином точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$. Густина в цій точці дорівнює $\gamma(\xi_i, \eta_i)$. Будемо вважати, що діаметр області $D_i$ настільки малий, що густина в цій області не встигає суттєво змінитися, і тому в області $D_i$ її можна наближено вважати сталою, а саме $\gamma(\xi_i, \eta_i)$. Тоді маса пластини наближено дорівнює

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i \,. \qquad (1.2.3)$$

Точне значення маси дістанемо як границю суми (1.2.3) при прямуванні $\lambda = \max_{1 \le i \le n} d(D_i)$ до нуля:

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i \,. \qquad (1.2.4)$$

Легко помітити, що вираз (1.2.4) має такий самий вигляд, що й вираз (1.2.2).

## 1.3. Означення подвійного інтеграла Умови його існування та властивості

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в області $D \subset \mathbb{R}^2$. Розіб'ємо область $D$ довільним чином на частинні області $D_i$ ($i = 1, 2, ..., n$), які не мають спільних внутрішніх точок. Позначимо як $\Delta S_i$ площу частинної області $D_i$. В кожній області $D_i$ довільним чином оберемо точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$ і утворимо суму:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i \ . \tag{1.3.1}$$

Сума (1.3.1) називається *інтегральною сумою* для функції $z = f(x, y)$ по області $D$, яка відповідає даному розбиттю області $D$ на частинні області $D_i$ ( $i = 1, 2, ..., n$ ). Позначимо $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d(D_i)$ і назвемо число $\lambda$ *рангом розбиття*.

**Означення**. Якщо існує скінченна границя при $\lambda \to 0$ суми (1.3.1), яка не залежить ані від способу розбиття області $D$ на частинні області $D_1, ..., D_n$, ані від вибору внутрішніх точок $P_1, ..., P_n$, то ця границя називається *подвійним інтегралом* від функції $z = f(x, y)$ по області $D$ і позначається як

$$\iint_D f(x, y)dxdy.$$

Таким чином, за означенням:

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i. \tag{1.3.2}$$

Повертаючись до розглянутих в п. 1.2 задач, можна тепер сказати, що об'єм циліндричного тіла обчислюється за формулою:

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy, \tag{1.3.3}$$

а маса пластини:

$$m = \iint_D \gamma(x, y)dxdy. \tag{1.3.4}$$

Рівності (1.3.3) та (1.3.4) визначають відповідно геометричний та механічний зміст подвійного інтеграла у випадку, коли $f(x, y) \ge 0$ в області $D$.

**Означення**. Функція $z = f(x, y)$ називається *інтегровною* в області $D$, якщо існує $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$.

Наведемо без доведення достатню умову інтегровності функції.

**Теорема** (достатня умова інтегровності). *Якщо функція* $z = f(x, y)$ *неперервна в області* $D$*, то вона інтегровна в цій області*.

Властивості подвійного інтеграла аналогічні відповідним властивостям визначеного інтеграла Рімана від функції однієї змінної.

1. Сталий множник можна виносити за знак подвійного інтеграла:
$$\iint_D kf(x, y)dxdy = k\iint_D f(x, y)dxdy.$$

2. Подвійний інтеграл від суми (різниці) двох інтегровних функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів від цих функцій:
$$\iint_D (f(x, y) \pm g(x, y))dxdy = \iint_D f(x, y)dxdy \pm \iint_D g(x, y)dxdy.$$

3. Якщо в області $D$ виконується нерівність $f(x, y) \geq 0$, то
$$\iint_D f(x, y)dxdy \geq 0.$$

4. Якщо функції $f(x, y)$ та $g(x, y)$ інтегровні в області $D$, і в цій області виконано $f(x, y) \geq g(x, y)$, то
$$\iint_D f(x, y)dxdy \geq \iint_D g(x, y)dxdy.$$

5. Якщо $D = D_1 \cup D_2$, причому $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, то
$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)dxdy.$$

6. Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна в замкненій обмеженій області $D$, площа якої дорівнює $S$, то
$$mS \leq \iint_D f(x, y)dxdy \leq MS,$$
де $m = \min\limits_D f(x, y)$, $M = \max\limits_D f(x, y)$, та існує точка $(x_0, y_0) \in D$ така, що
$$\iint_D f(x, y)dxdy = f(x_0, y_0)S.$$

### 1.4. Обчислення подвійного інтеграла

Нехай маємо деяке об'ємне тіло $T$. Припустимо, що відомо площу перерізу цього тіла площиною, перпендикулярною осі $Ox$, причому $x \in [a, b]$ (рис. 4).

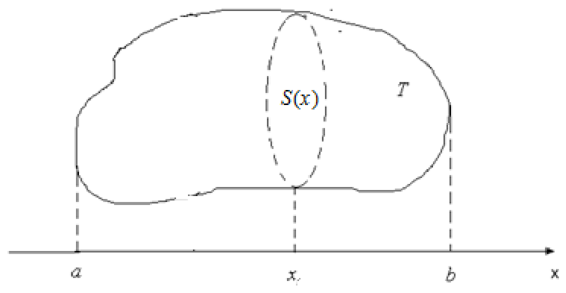


**Рис. 4**

Ця площа, очевидно, буде функцією змінної $x \in [a,b]$: $S = S(x)$. Припустимо, що функція $S(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$. Тоді відомо (див. «Інтегральне числення функцій однієї змінної»), що об'єм тіла $T$ дорівнює:

$$V_T = \int_a^b S(x)\,dx\,. \tag{1.4.1}$$

Розглянемо тепер

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy\,, \tag{1.4.2}$$

де $D$ – замкнена обмежена область на площині $Oxy$. Для спрощення вважатимемо, що $f(x,y) \geq 0$ в $D$. Тоді інтеграл (1.4.2) виражає об'єм циліндричного бруса, який обмежено зверху поверхнею $z = f(x,y)$, а знизу – областю $D$.

Припустимо, що область $D$ обмежена графіками функцій $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ і прямими $x = a$, $x = b$, причому $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ при $a \leq x \leq b$. Назвемо таку область *областю 1-го типу* (рис. 5).

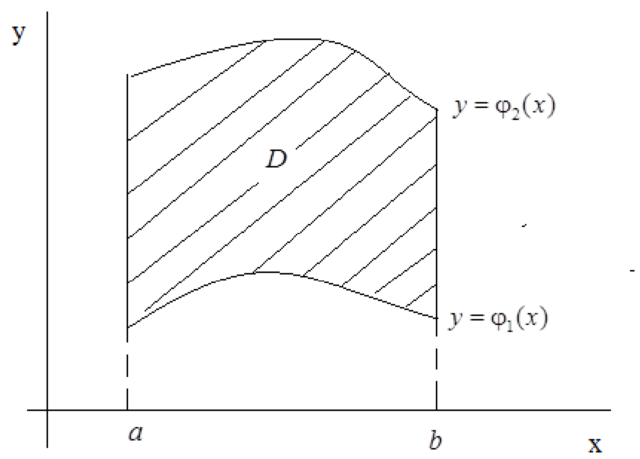


**Рис. 5**

Розглянемо тепер циліндричний брус, об'єм якого дорівнює подвійному інтегралу (1.4.2). Проведемо переріз цього бруса вертикальною площиною $x = \text{const}$ ($a < x < b$) (рис. 6).

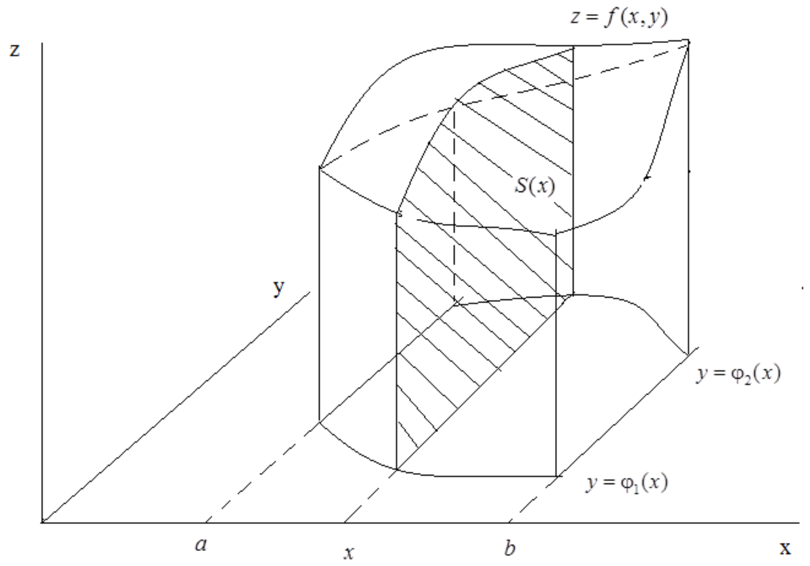


**Рис. 6**

Нехай $S(x)$ – площа отриманого перерізу. Тоді:

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_a^b S(x)\,dx\,. \qquad (1.4.3)$$

Обчислимо площу $S(x)$. Це площа криволінійної трапеції, яку обмежено зверху графіком функції $z = f(x, y)$, а знизу – відрізком $[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$ осі $Oy$. Змінна $x$ розглядається як стала. Тому

$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy\,.$$

І з урахуванням (1.4.3) остаточно маємо:

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \right) dx\,. \qquad (1.4.4)$$

Тобто подвійний інтеграл по області 1-го типу обчислюється через повторний. Можна довести, що формула (1.4.4) справедлива не тільки для випадку $f(x, y) \ge 0$, а й у загальному випадку також.

Якщо область $D$ обмежено зліва і справа графіками функцій $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, а зверху і знизу прямими $y = c$, $y = d$, то таку область назвемо областю 2-го типу (рис. 7).

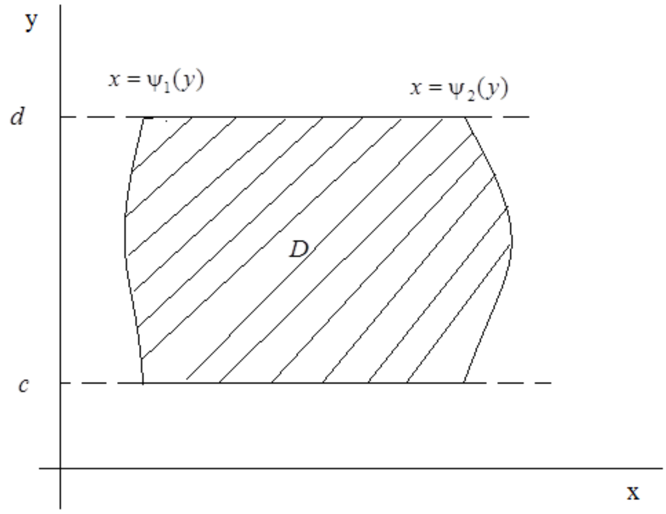


**Рис. 7**

Для такої області аналогічно отримуємо формулу:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d \left( \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy. \qquad (1.4.5)$$

**Зауваження 1**. Якщо область $D$ є водночас і областю 1-го типу, і областю 2-го типу, то інтеграл можна обчислювати як за формулою (1.4.4), так і за формулою (1.4.5). Результати співпадатимуть. Зокрема, це стосується випадку, коли область $D$ – прямокутник $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ (рис. 8).

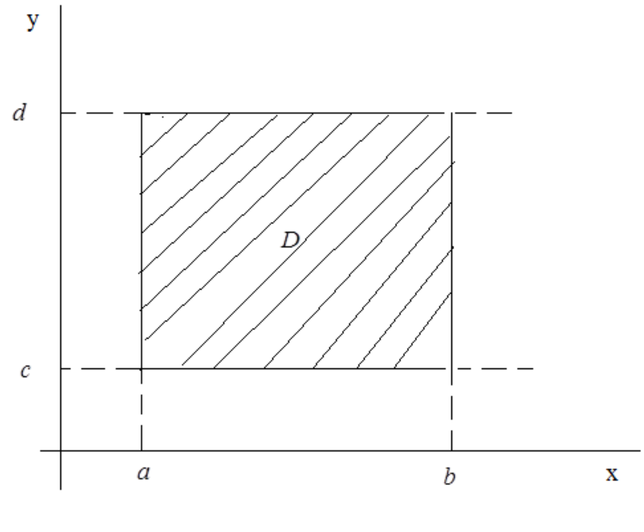


**Рис. 8**

Тоді маємо:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx. \qquad (1.4.6)$$

**Зауваження 2**. Якщо область $D$ не є ані областю 1-го, ані областю 2-го типу, то її намагаються розбити на частини, кожна з яких відноситься до одного з цих двох типів.

*Приклади.*

1. Обчислити

$$\iint_D (x^2 + y^2)dxdy,$$

де $D$ – область, обмежена прямими $y = 0$, $y = 2x$, $x = 1$.

Область $D$ має вигляд:

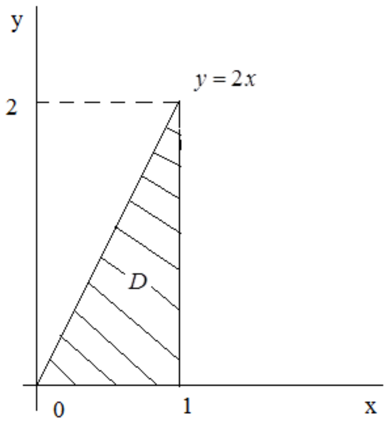


**Рис. 9**

Розглянемо цю область як область 1-го типу. Зліва і справа вона обмежена прямими $x = 0$ та $x = 1$, а зверху і знизу – лініями $y = 0$ та $y = 2x$. Тому:

$$\iint_D (x^2 + y^2)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{2x} (x^2 + y^2)dy = \int_0^1 \left( x^2 y\Big|_0^{2x} + \frac{y^3}{3}\Big|_0^{2x} \right) = \int_0^1 \left( 2x^3 + \frac{8x^3}{3} \right) dx =$$

$$= \frac{14}{3}\int_0^1 x^3 dx = \frac{14}{3} \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{7}{6}.$$

А тепер розглянемо цю ж область як область 2-го типу. Знизу і зверху вона обмежена прямими $y = 0$ та $y = 2$, а зліва і справа – лініями $x = y/2$ (рівняння лінії $y = 2x$ тут треба переписати у вигляді залежності $x$ від $y$) та $x = 1$. Тому:

$$\iint_D (x^2 + y^2)dxdy = \int_0^2 dy \int_{y/2}^1 (x^2 + y^2)dx = \int_0^2 \left( \frac{x^3}{3}\Big|_{y/2}^1 + y^2 x\Big|_{y/2}^1 \right) dy = \int_0^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{y^3}{24} + y^2 - \frac{y^3}{2} \right) dy =$$

$$= \frac{1}{3} y\Big|_0^2 - \frac{y^4}{96}\Big|_0^2 + \frac{y^3}{3}\Big|_0^2 - \frac{y^4}{8}\Big|_0^2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} + \frac{8}{3} - 2 = \frac{7}{6}.$$

Як бачимо, результати співпадають.

Іноді простіше розглядати область, по якій береться інтеграл, як область 1-го типу, а іноді – як область 2-го типу. Тому виникає задача так званої зміни порядку інтегрування: від повторного інтеграла, що виражає даний подвійний інтеграл, якщо область розглядається як область 1-го типу, перейти до повторного інтегралу, що виражає той самий подвійний інтеграл, якщо та ж сама область розглядається як область 2-го типу, і навпаки.

Для того, щоб правильно розставити межі інтегрування у повторному інтегралі, можна користуватися таким правилом. Припустимо, ми розглядаємо дану область як область 1-го типу. Тоді проектуємо цю область на вісь $Ox$. Отримаємо деякий відрізок $[a,b]$. Числа $a$ і $b$ будуть відповідно нижньою і верхньою межею зовнішнього інтеграла (за змінною $x$). Потім треба у думках провести вертикальні прямі лінії знизу вверх через дану область і подивитись, через яку лінію вони входять в область, і через яку виходять з неї. Рівняння лінії входу в область, яке записано у вигляді залежності $y$ від $x$ ($y = \varphi_1(x)$) буде нижньою межею внутрішнього інтеграла (за змінною $y$), а рівняння лінії виходу ($y = \varphi_2(x)$) – верхньою межею внутрішнього інтеграла (рис. 10).

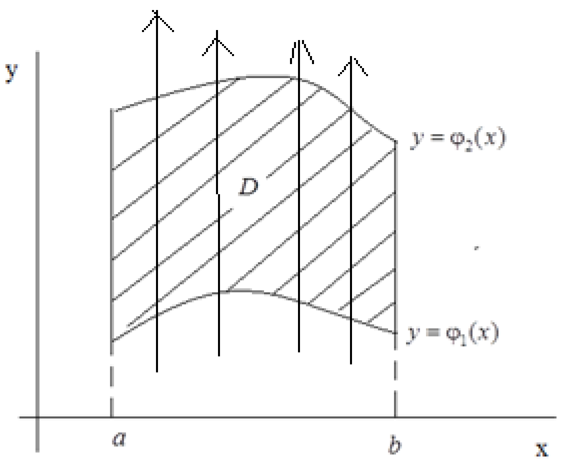


**Рис. 10**

Аналогічно розставляються межі у випадку області 2-го типу. Тепер треба область проектувати на вісь $Oy$, отримуємо відрізок $[c,d]$. Числа $c$ і $d$ є відповідно нижньою і верхньою межею зовнішнього інтеграла (за змінною $y$). Потім проводимо горизонтальні прямі лінії зліва направо через область. І знову дивимось, через яку лінію вони входять в область, і через яку виходять з неї. Рівняння лінії входу в область, яке записано у вигляді залежності $x$ від $y$ ( $x = \psi_1(y)$) буде нижньою межею внутрішнього інтеграла (за змінною $x$), а рівняння лінії виходу ($x=\psi_2(y)$) – верхньою межею внутрішнього інтеграла (рис. 11).

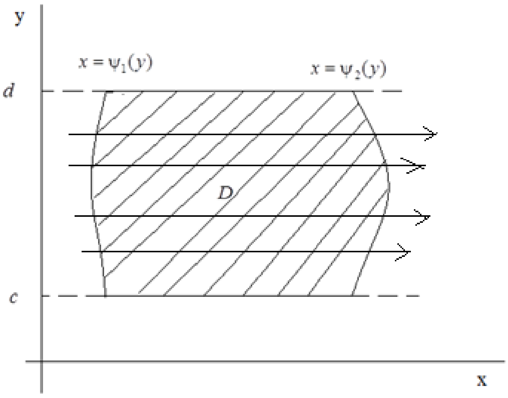


**Рис. 11**

2. Обчислити

$$\iint\limits_D y\cos^2 x\,dxdy,$$

де $D=\{0\le x\le 2\pi,\ 0\le y\le a\}$.

Оскільки область $D$ є прямокутником, то за формулою (1.4.6) маємо:

$$\iint\limits_D y\cos^2 x\,dxdy=\int\limits_0^{2\pi}dx\int\limits_0^a y\cos^2 x\,dy=\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 xdx\int\limits_0^a ydy=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 xdx\cdot\int\limits_0^a ydy=\int\limits_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}dx\cdot\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{4}\cdot 2\pi=\frac{\pi a^2}{2}.$$

У даному випадку повторний інтеграл є добутком двох незалежних один від одного інтегралів. Взагалі, якщо $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$, і область $D$ – прямокутник $a\le x\le b$, $c\le y\le d$ , то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f_1(x)f_2(y)dy=\int\limits_a^b f_1(x)dx\int\limits_c^d f_2(y)dy=\int\limits_a^b f_1(x)dx\cdot\int\limits_c^d f_2(y)dy,$$

оскільки внутрішній інтеграл $\int\limits_c^d f_2(y)dy$ є сталою величиною, отже, її можна винести за знак зовнішнього інтеграла.

2. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі:

$$\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2+2}^{4-x} f(x,y)\,dy.$$

Уявимо собі область $D$, по якій береться подвійний інтеграл, якому відповідає даний повторний. Проекцією цієї області на вісь $Ox$ є відрізок $[0,1]$. Знизу ця область обмежена параболою $y = x^2 + 2$, а зверху – прямою лінією $y = 4 - x$. Таким чином, область має вигляд, який зображено на рис. 12.

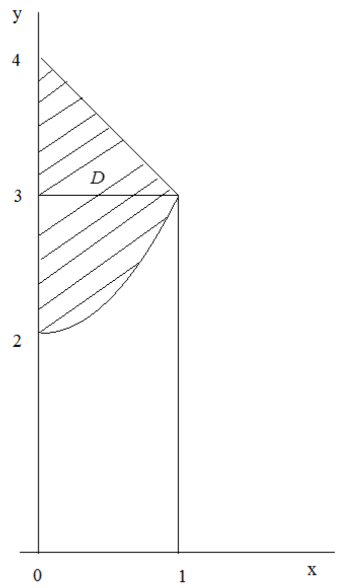


**Рис. 12**

Область $D$ є стандартною 1-го типу. Подивимось на неї як на стандартну 2-го типу. Проекцією цієї області на вісь $Oy$ є відрізок $[2,4]$. Зліва область обмежена віссю $Oy$, тобто прямою $x = 0$, а справа – суцільною лінією, яка на різних ділянках відрізку $[2,4]$ задається різними рівняннями. На відрізку $[2,3]$ осі $Oy$ область обмежена параболою, рівняння якої, якщо його записати у вигляді залежності $x$ від $y$, має вигляд: $x = \sqrt{y-2}$. А на відрізку $[3,4]$ осі $Oy$ область справа обмежена прямою $x = 4 - y$ (знову рівняння пишемо у вигляді залежності $x$ від $y$). Отже ми повинні повторний інтеграл розбити на суму двох інтегралів:

$$\int_0^1 dx \int_{x^2+2}^{4-x} f(x,y)\,dy = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_2^3 dy \int_0^{\sqrt{y-2}} f(x,y)\,dx + \int_3^4 dy \int_0^{4-y} f(x,y)\,dx .$$

3. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі:

$$\int_{-1/\sqrt{2}}^{0} dy \int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_0^{1/\sqrt{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx .$$

Ця задача в певному сенсі є оберненою до попередньої – тепер вже ми початково маємо суму двох повторних інтегралів. І треба уявити область $D$, по якій береться подвійний інтеграл, якій цій сумі відповідає, а потім змінити порядок інтегрування. Проекцією області $D$ на вісь $Oy$ є об'єднання відрізків $[-1/\sqrt{2},0]$ і $[0,1/\sqrt{2}]$, тобто відрізок $[-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]$. На відрізку $[-1/\sqrt{2},0]$ область зліва обмежена прямою $x=-y$, а справа – кривою $x=\sqrt{1-y^2}$, що є дугою кола $x^2+y^2=1$. На відрізку $[0,1/\sqrt{2}]$ область зліва обмежена прямою $x=y$, а справа – теж кривою $x=\sqrt{1-y^2}$. Тобто область $D$ має вигляд, який зображено на рис. 13 – це круговий сектор.

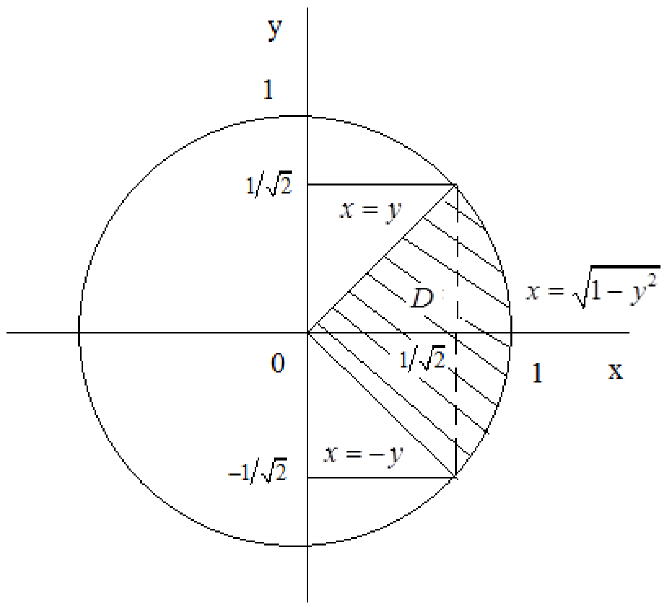


**Рис. 13**

Щоб змінити порядок інтегрування (тобто зовнішній інтеграл тепер має бути за змінною $x$), спроектуємо нашу область на вісь $Ox$ – це буде відрізок $[0,1]$. На частині $[0,1/\sqrt{2}]$ цього відрізку область обмежена знизу прямою $y=-x$, а зверху – прямою $y=x$. На частині $[1/\sqrt{2},1]$ і зверху і знизу область обмежена дугами кола $x^2+y^2=1$: знизу дугою $y=-\sqrt{1-x^2}$, а зверху дугою $y=\sqrt{1-x^2}$. Отже, і тут ми маємо розбити повторний інтеграл на суму двох інтегралів:

$$\int_{-1/\sqrt{2}}^{0} dy \int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_{0}^{1/\sqrt{2}} dy \int_{y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx = \iint_D f(x,y)dxdy =$$

$$= \int_{0}^{1/\sqrt{2}} dx \int_{-x}^{x} f(x,y)dy + \int_{1/\sqrt{2}}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy .$$

## 1.5. Заміна змінних у подвійному інтегралі

Нехай на площині $Oxy$ задано область $D$, яку обмежено замкненою кривою $L$. Припустимо, що координати $x, y$ довільної точки області $D$ є функціями змінних $u, v$:

$$x = \varphi(u,v), \quad y = \psi(u,v), \tag{1.5.1}$$

де функції $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ неперервні та мають неперервні частинні похідні 1-го порядку в деякій області $D'$ площини $Ouv$. Кожній парі значень $u, v$ відповідає єдина пара значень $x, y$. Припустимо також, що й кожній парі значень $x, y$ відповідає єдина пара значень $u, v$. Тобто формули (1.5.1) здійснюють взаємно однозначну відповідність між областями $D$ та $D'$ – кожній точці $P(x,y) \in D$ відповідає одна й тільки одна точка $P'(u,v) \in D'$ і навпаки. Числа $u, v$ називаються *криволінійними координатами точки* $P$.

Замкненій кривій $L$ на площині $Oxy$ відповідатиме також замкнена крива $L'$ на площині $Ouv$ (рис. 14).

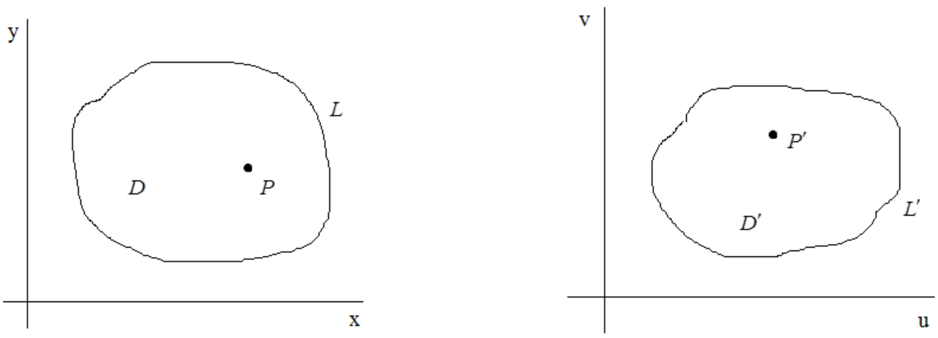


**Рис. 14**

Розглянемо на площині $Ouv$ прямокутну площадку $\Delta s'$, яку обмежено прямими $u = \text{const}$, $u + \Delta u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $v + \Delta v = \text{const}$. На площині $Oxy$ їй відповідатиме криволінійна площадка $\Delta s$ (рис. 15).

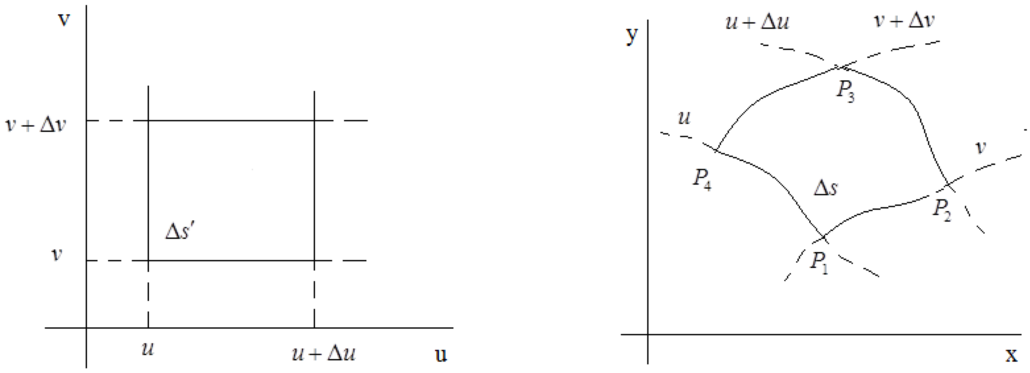


**Рис. 15**

Очевидно:

$$\Delta s' = \Delta u \cdot \Delta v.$$

Нехай в області $D$ задано неперервну функцію $z = f(x, y)$. Кожному значенню $z = f(x, y)$ в області $D$ відповідає таке ж саме значення функції $z = F(u, v) = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]$ в області $D'$.

Розглянемо інтегральні суми від функції $z = f(x, y)$ по області $D$:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i.$$

Очевидна рівність:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} F(u_i, v_i)\Delta s_i.$$

Знайдемо $\Delta s$, тобто площу криволінійного чотирикутника $P_1P_2P_3P_4$ площини $Oxy$. Нехай $P_i = P_i\ (x_i, y_i)$ ( $i = 1,2,3,4$ ). Тоді:

$$x_1 = \varphi(u, v),\ y_1 = \psi(u, v),$$

$$x_2 = \varphi(u + \Delta u, v),\ y_2 = \psi(u + \Delta u, v),$$

$$x_3 = \varphi(u + \Delta u, v + \Delta v),\ y_3 = \psi(u + \Delta u, v + \Delta v),$$

$$x_4 = \varphi(u, v + \Delta v),\ y_4 = \psi(u, v + \Delta v).$$

При обчисленні площі $\Delta s$ замінюємо прирости функцій диференціалами:

$$x_1 = \varphi(u, v)\ y_1 = \psi(u, v),$$

$$x_2 = \varphi(u, v) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u,\ y_2 = \psi(u, v) + \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u,$$

$$x_3 = \varphi(u, v) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v,\ y_3 = \psi(u, v) + \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v,$$

$$x_4 = \varphi(u, v) + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v,\ y_4 = \psi(u, v) + \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v.$$

Чотирикутник $P_1P_2P_3P_4$ наближено розглядатиме як паралелограм. Тоді за формулами аналітичної геометрії:

$$\Delta s \approx \left|\det\begin{pmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \end{pmatrix}\right| = \left|(x_3 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_1)\right| =$$

$$= \left|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v\right)\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta u\Delta v - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u\Delta v\right| = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right|\Delta u\Delta v = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{pmatrix}\right|\Delta u\Delta v .$$

Позначимо:

$$J = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Цей визначник називається *визначником Якобі* (*якобіаном*) функцій $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$. Таким чином, маємо:

$$\Delta s \approx |J|\,\Delta s' . \tag{1.5.2}$$

Рівність (1.5.2) тим точніша, чим менше розміри площадок $\Delta s$, $\Delta s'$. Переходячи до границі при $\Delta s, \Delta s' \to 0$, дістанемо точну рівність:

$$|J| = \lim_{diam\,\Delta s' \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta s'} . \tag{1.5.3}$$

Таким чином:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i \approx \sum_{i=1}^{n} F(u_i, v_i)\,|J|\,\Delta s_i' .$$

Переходячи до границі при $\max diam(\Delta s_i') \to 0$, дістаємо:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} F(u,v)\,|J|\,du\,dv . \tag{1.5.4}$$

Формула (1.5.4) називається формулою заміни змінних у подвійному інтегралі.

*Приклад*. Обчислити:

$$\iint_D y^3 dxdy ,$$

якщо $D$ – область, обмежена параболами $y = x^2$, $y = 2x^2$ та гіперболами $xy = 1$, $xy = 2$.

Область $D$ має вигляд, який показано на рис. 16.

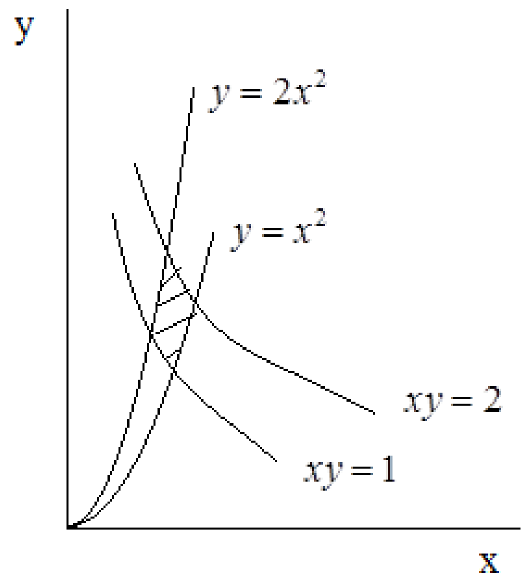


**Рис. 16**

Зробимо заміну змінних:

$$u = \frac{y}{x^2},\ v = xy.$$

Тоді області $D$ на площині $Oxy$ відповідатиме область $D' = \{1 \le u \le 2, 1 \le v \le 2\}$ (тобто квадрат) на площині $Ouv$. Далі маємо:

$$x = \varphi(u,v) = u^{-1/3}v^{1/3},\ y = \psi(u,v) = u^{1/3}v^{2/3};$$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \dfrac{1}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \\ \dfrac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}} & \dfrac{2}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \end{vmatrix} = -\frac{2}{9}u^{-1} - \frac{1}{9}u^{-1} = -\frac{1}{3u}.$$

Тому

$$\iint\limits_D y^3 dxdy = \int_1^2 du \int_1^2 uv^2 \frac{1}{3u} dv = \frac{1}{3}\int_1^2 du \int_1^2 v^2 dv = \frac{7}{9}.$$

## 1.6. Подвійний інтеграл у полярних координатах

Важливим частинним випадком заміни змінних у подвійному інтегралі є перехід до полярних координат. Особливо він ефективний, коли область $D$ є областю кругового типу, тобто має форму круга або його частин. Як відомо, зв'язок між декартовими координатами $x, y$ точки на площині та її полярними координатами $\rho, \varphi$ задається формулами:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ \rho \geq 0.$$

Якобіан цієї заміни дорівнює:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Тому подвійний інтеграл в полярних координатах набуває вигляду:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi,$$

де $D'$ – область на площині $O\varphi\rho$. Припустимо, що $D'$ – область 1-го типу, тобто $D' = \{\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1,\ \rho_1(\varphi) \leq \rho(\varphi) \leq \rho_2(\varphi)\}$. Тоді область $D$ на площині $Oxy$ має бути обмеженою двома променями, що виходять з початку координат під кутами $\varphi_0$ та $\varphi_1 > \varphi_0$ до додатного напряму осі $Ox$, та двома кривими, рівняння яких у полярній систему координат мають вигляд $\rho = \rho_1(\varphi)$ та $\rho = \rho_2(\varphi)$, причому $\rho_1(\varphi) \leq \rho_2(\varphi)$ при $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ (рис. 17). Щоб правильно розставити межі інтегрування в полярних координатах у цьому випадку, не обов'язково зображувати область $D'$ на площині $O\varphi\rho$. Достатньо «затиснути» область $D$ між двома променями, що виходять з початку координат, і подивитись, які кути вони утворюють з додатним напрямом осі $Ox$. Менший з цих кутів буде нижньою межею зовнішнього інтеграла, а більший – верхньою. Потім з початку координат провести промені через область $D$ і подивитись, через яку лінію вони входять в область (рівняння цієї прямої буде нижньою межею внутрішнього інтеграла), і через яку виходять з області (рівняння цієї прямої буде верхньою межею внутрішнього інтеграла). Тобто матимемо:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho. \tag{1.6.1}$$

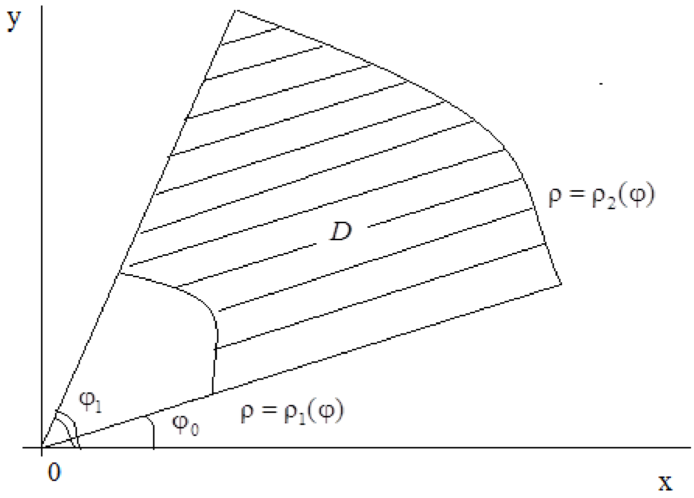


**Рис. 17**

*Приклади.*

1. Обчислити:

$$\iint\limits_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dxdy, \quad D=\left\{1\le x^2+y^2\le 9,\ \frac{x}{\sqrt{3}}\le y\le x\sqrt{3}\right\}.$$

Область $D$ зображено на рис. 18.

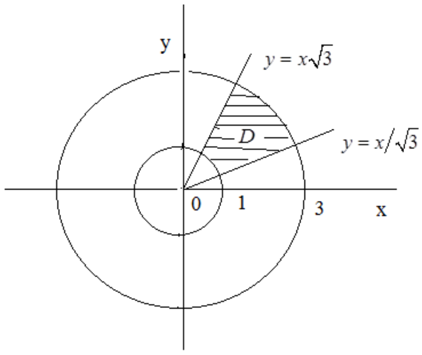


**Рис. 18**

Ця область обмежена променями $\varphi=\pi/6$ (пряма $y=x/\sqrt{3}$), $\varphi=\pi/3$ (пряма $y=x\sqrt{3}$) та дугами кіл $\rho=1$ ($x^2+y^2=1$) та $\rho=3$ ($x^2+y^2=9$). Тому:

$$\iint\limits_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dxdy=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}d\varphi\int\limits_1^3 \operatorname{arctg}\frac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi}\rho\,d\rho=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}d\varphi\int\limits_1^3\varphi\rho\,d\rho=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\varphi\,d\varphi\int\limits_1^3\rho\,d\rho=$$

$$=\left(\frac{\varphi^2}{2}\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/3}\right)\cdot\left(\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_1^3\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{9}-\frac{\pi^2}{36}\right)\cdot(9-1)=\frac{\pi^2}{6}.$$

2. Перейти у подвійному інтегралі

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$$

до полярних координат і розставити межі інтегрування.

1). Область $D$ обмежено колами $x^2+y^2=4x$ та $x^2+y^2=8x$.

Область $D$ зображено на рис. 19.

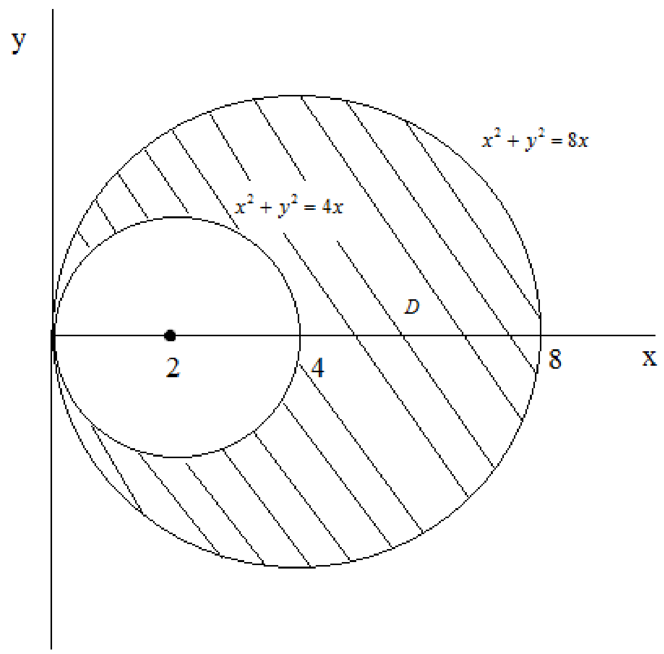


**Рис. 19**

Прямі, між якими «затиснуто» цю область – від'ємний та додатний напрями осі $Oy$, тобто лінії, рівняннями яких у полярній системі координат відповідно є: $\varphi=-\pi/2$, $\varphi=\pi/2$. Якщо з початку координат провести промені через область $D$, то лінією їх входу буде коло $x^2+y^2=4x$, рівнянням якого у полярній системі координат є $\rho=4\cos\varphi$, а лінією виходу – коло $x^2+y^2=8x$, рівнянням якого у полярній системі координат є $\rho=8\cos\varphi$. Тому, згідно з формулою (1.6.1), маємо:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho\,.$$

2). Область $D$ – менший з двох сегментів, на які пряма $x + y = 2$ поділяє круг $x^2 + y^2 \le 4$.

Область $D$ зображено на рис. 20.

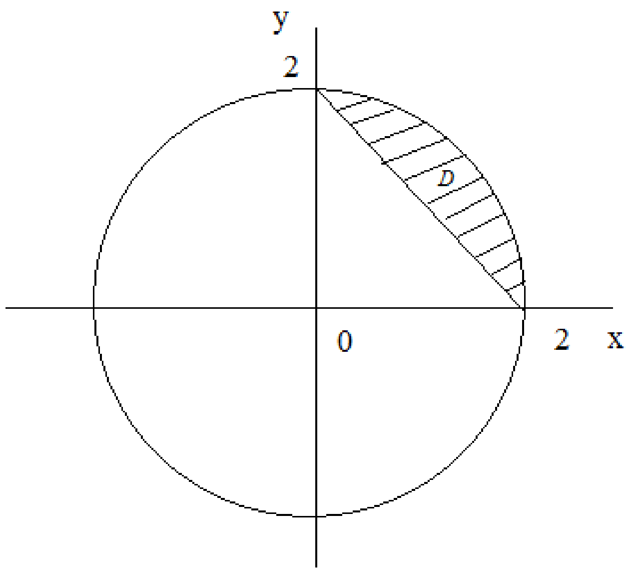


**Рис. 20**

Цю область «затиснуто» між додатним напрямом осі $Ox$ (лінія $\varphi = 0$) і додатним напрямом осі $Oy$ (лінія $\varphi = \pi/2$). Якщо провести промені з початку координат через область, то лінією входу в область буде відрізок прямої $x + y = 2$, рівняння якої в полярній системі координат має вигляд:

$$\rho = \frac{2}{\cos\varphi + \sin\varphi}.$$

Лінією виходу буде дуга кола $x^2 + y^2 = 4$, рівняння якого в полярній системі координат має вигляд: $\rho = 2$. Отже, згідно з формулою (1.6.1) маємо:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{\frac{2}{\cos\varphi+\sin\varphi}}^{2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho.$$

3) Область $D$ – спільна частина кругів $x^2 + y^2 \le ax$, $x^2 + y^2 \le by$ ($a, b > 0$). Область $D$ зображено на рис. 21.

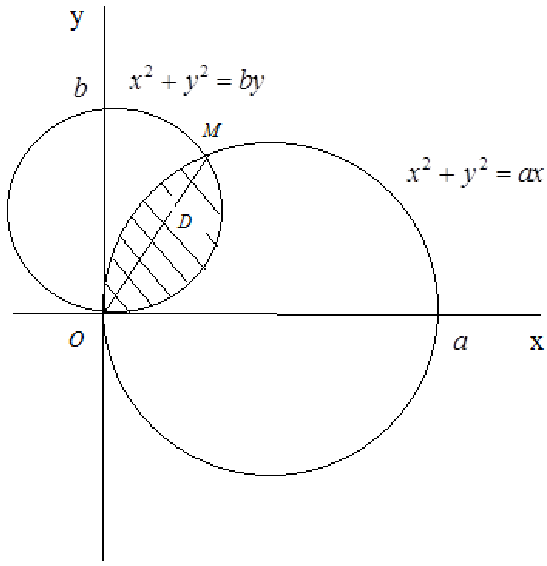


**Рис. 21**

Кола $x^2+y^2=ax$ та $x^2+y^2=by$ перетинаються в точках $O(0,0)$ та $M\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$. Відрізок $OM$ утворює з додатним напрямом осі $Ox$ кут $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{a}{b}$. Якщо проводити промені з початку координат через область $D$, то всі вони входитимуть в область через точку $\rho=0$, а вихід з області буде здійснюватись через дугу кола $x^2+y^2=by$, якщо ці промені утворюють з додатним напрямом осі $Ox$ кут $\varphi\in(0,\alpha)$, і через дугу кола $x^2+y^2=ax$, якщо промені утворюють з додатним напрямом осі $Ox$ кут $\varphi\in(\alpha,\pi/2)$. Рівняння кола $x^2+y^2=by$ у полярній системі координат має вигляд $\rho=b\sin\varphi$, а кола $x^2+y^2=ax$ має вигляд $\rho=a\cos\varphi$. Отже, при переході до полярних координат, необхідно розбити повторний інтеграл на суму двох інтегралів:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=$$

$$=\int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}}d\varphi\int\limits_0^{b\sin\varphi}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho+\int\limits_{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{a\cos\varphi}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho.$$

## 1.7. Невласні подвійні інтеграли

При введенні поняття подвійного інтеграла ми припускали, що область $D$ інтегрування є обмеженою. Природно поширити це поняття на випадок необмеженої області. Прикладом такої області може бути вся координатна площина, або її частина, яка лежить зовні деякого круга, деякий кут, тощо.

Нехай $D$ – необмежена область. Розглянемо функцію $z = f(x, y)$, яку задано в області $D$, і яку будемо припускати інтегровною у звичайному сенсі у кожній скінченній частині області $D$. Розглянемо обмежену замкненою кривою $K'$ область $D'$. За припущенням існує інтеграл:

$$\iint_{D'} f(x, y)dxdy.$$

Будемо віддаляти криву $K'$ всіма її точками в нескінченність так, щоб найменша відстань $R$ від початку координат до точок цієї кривої прямувала до нескінченності. Тоді область $D'$ поступово буде охоплювати всі точки області $D$, тобто кожна точка області $D$ належатиме області $D'$ при достатньо великому $R$.

**Означення**. *Невласним подвійним інтегралом І роду* по необмеженій області $D$ називається границя (скінченна або нескінченна)

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{D'} f(x, y)dxdy = \iint_{D} f(x, y)dxdy. \qquad (1.7.1)$$

Якщо границя (1.7.1) існує та скінченна, то невласний інтеграл називається *збіжним*, а функція $z = f(x, y)$ називається *інтегровною в невласному сенсі* в області $D$. Якщо границя (1.71) не існує або нескінченна, то невласний інтеграл називається *розбіжним*.

Невласному інтегралу І роду можна надати інше, еквівалентне означення.

**Означення**. Послідовність областей $D_k$ $(k = 1, 2, ...)$ називається *послідовністю, що монотонно вичерпує область* $D$, якщо

1) $\overline{D_k} \subset D_{k+1}$, $k = 1, 2, ...$ ; 2) $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_k = D$.

Тут ми розуміємо термін «область» у правильному сенсі, тобто як відкриту зв'язну множину. $\overline{D_k}$ – замикання області $D_k$.

Означення. Нехай в необмеженій області $D$ простору $\mathbb{R}^2$ задано функцію $z = f(x, y)$, яка є інтегровною в будь якій обмеженій області $D'$, такій, що $\overline{D'} \subset D$. *Невласним подвійним інтегралом І роду* по області $D$ називається границя

$$\lim_{k\to\infty} \iint_{D_k} f(x, y)dxdy = \iint_{D} f(x, y)dxdy. \qquad (1.7.2)$$

Якщо границя (1.7.2) існує, скінченна і не залежить від способу вибору послідовності $\{D_k\}$, то інтеграл називається *збіжним*, а функція $z = f(x, y)$ – *інтегровною у невласному сенсі* в області $D$. У протилежному випадку інтеграл називається *розбіжним*.

Можна сказати, що це означення є означенням подвійного інтеграла на мові послідовностей (подібно тому, як на мові послідовностей давалося означення границі функції).

Якщо, зокрема, функція $z = f(x, y)$ інтегровна на всьому просторі $\mathbb{R}^2$, то за послідовність $\{D_k\}$ можна взяти сукупність кругів $x^2 + y^2 \le k^2$ $(k = 1, 2, ...)$ з центром у початку координат.

**Теорема**. *Якщо функція* $| f(x, y) |$ *інтегровна в необмеженій області* $D$, *то функція* $f(x, y)$ *також інтегровна в області* $D$.

**Доведення**. Розглянемо дві невід'ємні функції

$$f_+(x, y) = \frac{| f(x, y) | + f(x, y)}{2}, \quad f_-(x, y) = \frac{| f(x, y) | - f(x, y)}{2}.$$

Очевидно, що

$$f_+(x, y) = \begin{cases} f(x, y), \text{ якщо } f(x, y) \ge 0, \\ 0, \text{ якщо } f(x, y) < 0, \end{cases}$$

$$f_-(x, y) = \begin{cases} -f(x, y), \text{ якщо } f(x, y) \le 0, \\ 0, \text{ якщо } f(x, y) > 0. \end{cases}$$

З інтегровності функції $| f(x, y) |$ випливає інтегровність функцій $f_+(x, y) \le | f(x, y) |$ і $f_-(x, y) \le | f(x, y) |$, а отже й функції:

$$f(x, y) = f_+(x, y) - f_-(x, y),$$

і теорему доведено.

Аналогічна теорема мала місце і для одновимірних невласних інтегралів I роду (див. «Інтегральне числення функцій однієї змінної»). Але там було суттєве зауваження: обернене твердження несправедливе, а саме з інтегровності у невласному сенсі функції $y = p(x)$ не випливає інтегровність функції $y = | p(x) |$. Тобто існують неабсолютно збіжні одновимірні інтеграли. А ось у випадку невласних подвійних інтегралів I роду ситуація інша.

**Теорема**. *Якщо збігається інтеграл*

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy,$$

*де* $D$ *– необмежена область, то збігається й інтеграл*

$$\iint_D | f(x, y) |\,dxdy.$$

Доведення цієї теореми ми тут не наводимо.

Ці теореми дозволяють при викладенні теорії невласних подвійних інтегралів I роду розглядати, перш за все, випадок інтегралів від невід'ємних в області $D$ функцій.

Припустимо, що $D = \mathbb{R}^2$, і $f(x, y) \geq 0$ в $D$. Розглянемо прямокутник $[a; b; c; d] = \{a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$. За формулою (1.4.6):

$$\iint\limits_{[a;b;c;d]} f(x, y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy .$$

Припустимо, що збігається інтеграл:

$$I = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^\infty f(x, y) dy .$$

Тоді $\forall\, d > c$:

$$\iint\limits_{[a;b;c;d]} f(x, y)\,dxdy \leq I ,$$

отже збігається подвійний інтеграл

$$\iint\limits_{[a;b;c;+\infty]} f(x, y)\,dxdy = \lim_{d \to +\infty} \iint\limits_{[a;b;c;d]} f(x, y)\,dxdy \leq I .$$

Прямокутник $[a; b; c; +\infty]$ є нескінченним за напрямом осі $Oy$ (рис. 22).

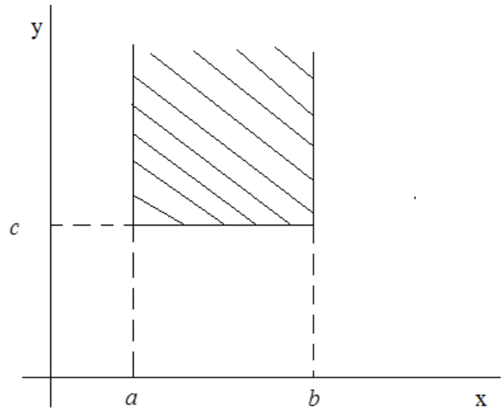


**Рис. 22**

Якщо інтеграл $\int\limits_c^{+\infty} f(x, y) dy$ є функцією від $x$, яка інтегровна у власному розумінні на відрізку $[a, b]$, то цей інтеграл обмежений на відрізку $[a, b]$ деякою сталою $L$, а отже

$$\int\limits_c^d f(x, y) dy \leq L .$$

Тоді за теоремою про існування границі монотонної та обмеженої функції маємо:

$$I=\lim_{d\to+\infty}\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy\,.$$

Отже:

$$\iint\limits_{[a;b;c;+\infty]} f(x,y)\,dxdy=I\quad .$$

Тепер розглянемо прямокутник $[a;+\infty;c;+\infty]$, який нескінченний по двох взаємно перпендикулярних напрямах – осі $Ox$ і осі $Oy$ (рис. 23).

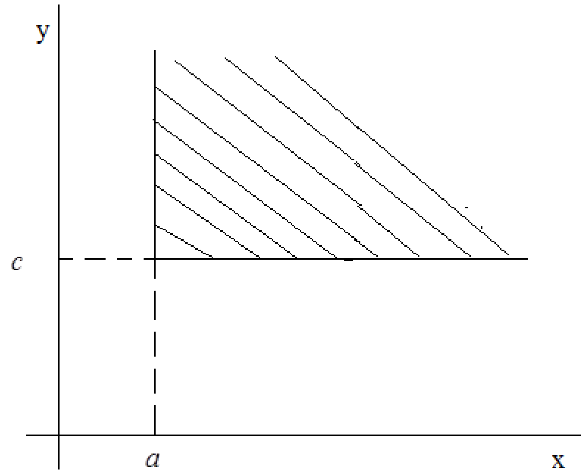


**Рис. 23**

Тоді аналогічним чином може бути встановлено формулу:

$$\iint\limits_{[a;+\infty;c;+\infty]} f(x,y)dxdy=\int_a^{+\infty} dx\int_c^{+\infty} f(x,y)dy\,.$$

І нарешті

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty} dx\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy\,. \qquad (1.7.3)$$

*Приклад 1*. Обчислити інтеграл

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)}\,.$$

Згідно з (1.7.3) маємо:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)}=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{(1+x^2)(1+y^2)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2}=$$

$$=4\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}\cdot\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2}=4\left(\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}\right)^2=4\left(\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2}\right)^2=$$

$$=4\left(\lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}x\Big|_0^b\right)\right)^2=4\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\pi^2.$$

*Приклад 2*. Обчислити інтеграл

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy.$$

Розглянемо послідовність кругів $D_k = \left\{x^2 + y^2 < k^2\right\}$, $k = 1,2,...$ . Ця послідовність монотонно вичерпує площину $\mathbb{R}^2$. Тоді

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{k\to+\infty}\iint\limits_{D_k} e^{-x^2-y^2}dxdy.$$

Інтеграл $\iint\limits_{D_k} e^{-x^2-y^2}dxdy$ при кожному $k = 1,2,...$ обчислимо, переходячи до полярних координат: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $x^2 + y^2 = \rho^2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le k$. Матимемо:

$$\iint\limits_{D_k} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^k e^{-\rho^2}\rho d\rho = 2\pi\left(-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\Big|_0^k\right) = \pi\left(1 - e^{-k^2}\right).$$

Звідси:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{k\to+\infty}\pi\left(1 - e^{-k^2}\right) = \pi. \qquad (1.7.4)$$

Формула (1.7.4) дозволяє знайти інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$, який називається *інтегралом Пуассона*. Він відіграє помітну роль в задачах теорії ймовірностей, математичної статистики, статистичної фізики. Позначимо

$$G_k = \left\{-k \le x \le k,\ -k \le y \le k\right\}.$$

Тоді

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{k\to+\infty}\iint\limits_{G_k} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy =$$

$$= \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2.$$

І внаслідок (1.7.4):

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

Зауважимо, що первісна від функції $e^{-x^2}$ не виражається в елементарних функціях, тому обчислити інтеграл Пуассона «звичайними» методами не вдається.

## 1.8. Геометричні застосування подвійного інтеграла

I. Обчислення об’ємів тіл

Нехай задано тіло, яке обмежене замкненою обмеженою областю $D$ площини $Oxy$, поверхнею $z = f(x, y)$, $f(x, y) \geq 0$ в області $D$, та циліндричною поверхнею, напрямною якої є межа області $D$, а твірні паралельні осі $Oz$ (рис. 24).

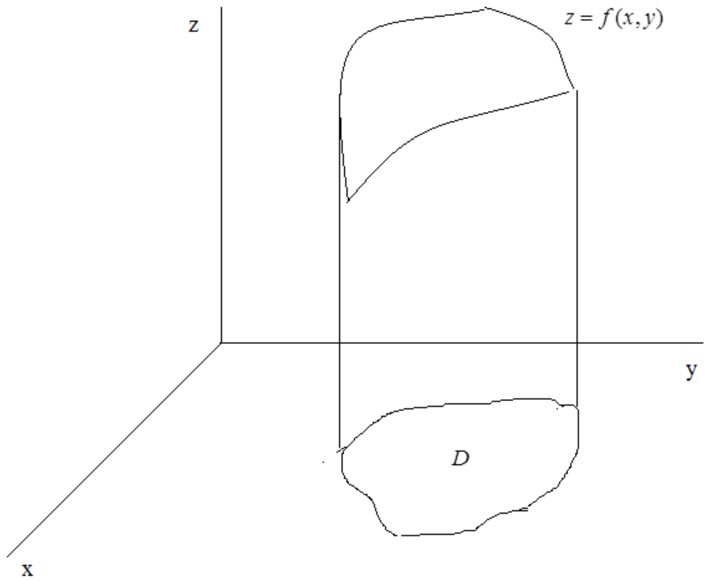


**Рис. 24**

Згідно з геометричним змістом подвійного інтеграла об’єм цього тіла обчислюється за формулою:

$$V = \iint_D f(x, y)\, dxdy. \qquad (1.8.1)$$

*Приклад 1*. Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнями $x = 0$, $y = 0$ , $z = 0$, $x + y + z = 1$.

Дане тіло є трикутною пірамідою (рис. 25 а). Областю $D$ є прямокутний трикутник на площині $Oxy$ (рис. 25 б). Тому

$$V = \iint_D (1 - x - y)\, dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dy =$$

$$= \int_0^1 \left[ (1 - x)y\Big|_0^{1-x} - \frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x} \right] dx = \int_0^1 \left[ (1 - x)^2 - \frac{(1 - x)^2}{2} \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - x)^2 dx = \frac{1}{6}.$$

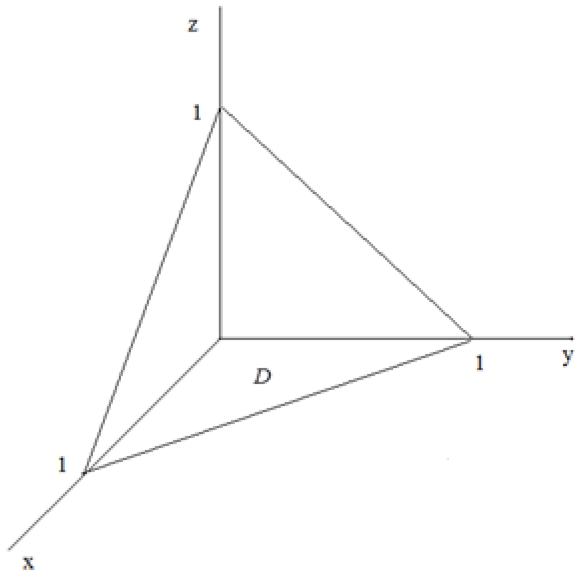


**Рис. 25 а**

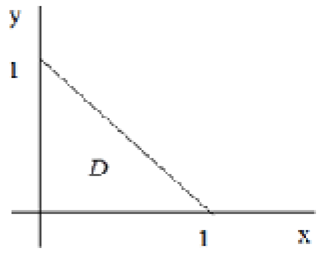


**Рис. 25 б**

*Приклад 2*. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 = Rx$, $z = 0$.

Дане тіло є частиною півкулі радіуса $R$, що знаходиться всередині кругового циліндра з радіусом основи $R/2$, причому твірна циліндра проходить через центр півкулі (рис. 26 а). Крива, яку вирізає циліндр на кулі, називається *кривою Вівіані*. Очевидно, що дане тіло обмежено знизу областю $D$ площини $Oxy$, яка є кругом радіуса $R/2$ з центром у точці $(R/2, 0)$ (рис. 26 б), а зверху – півсферою $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Тому:

$$V = \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dxdy .$$

Цей інтеграл обчислимо, переходячи до полярних координат:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \rho \le R\cos\varphi$$

(тут враховано, що рівняння кола $x^2 + y^2 = Rx$ у полярних координатах має вигляд $\rho = R\cos\varphi$). Отже:

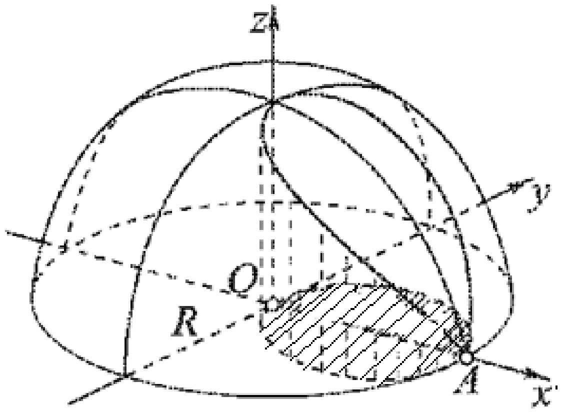


Рис. 26 а

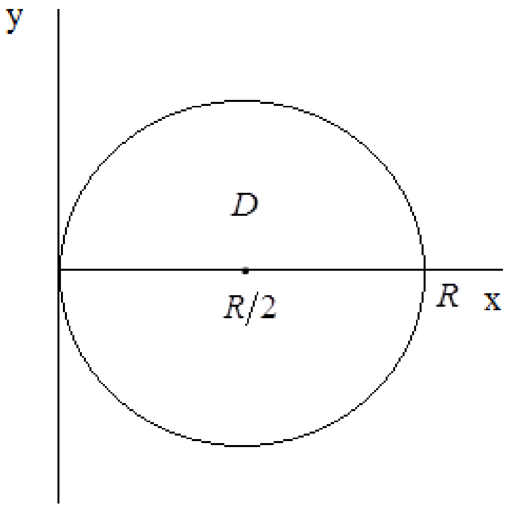


Рис. 26 б

$$V=\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{R\cos\varphi}\sqrt{R^2-\rho^2}\rho d\rho=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{R\cos\varphi}\sqrt{R^2-\rho^2}\rho d\rho=$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{R\cos\varphi}\sqrt{R^2-\rho^2}\,d(R^2-\rho^2)=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left.\frac{2(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^{R\cos\varphi}\right]d\varphi=$$

$$=-\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(R^2-R^2\cos^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}-R^3\right]d\varphi=-\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(R^3\sin^3\varphi-R^3\right)d\varphi=\frac{2R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^3\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{2R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi-\frac{2R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi d\varphi=\frac{\pi R^3}{3}-\frac{4R^3}{9}.$$

II. <u>Обчислення площ областей</u>

Складемо інтегральну суму для функції $f(x,y)\equiv 1$ по області $D$:

$$\sum_{j=1}^{n}1\cdot\Delta S_j\,.$$

Очевидно, що ця сума дорівнюватиме площі області $D$ при будь-якому способі розбиття. Тоді, переходячи до границь, при рангу розбиття, прямуючому до нуля, також отримаємо площу області $D$:

$$S(D)=\iint\limits_D dxdy\,. \qquad (1.8.2)$$

*Приклад*. Знайти площу фігури, яку обмежено лініями $y^2=10x+25$, $y^2=-6x+9$.

Знайдемо точки перетину вказаних ліній, для чого розв’яжемо рівняння:

$$10x+25=-6x+9,$$

звідки $x=-1$, тоді $y^2=15$, і $y=\pm\sqrt{15}$. Область $D$ зображено на рис. 27.

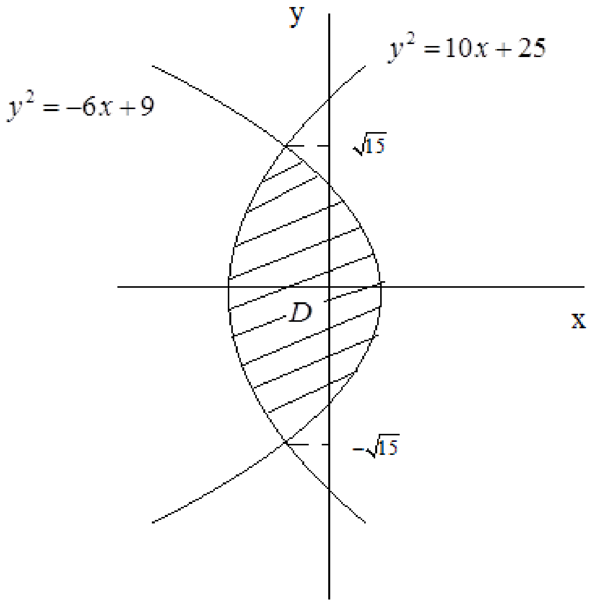


**Рис. 27**

Ця область симетрична відносно осі $Ox$. Тому:

$$S=\iint\limits_D dxdy=2\int\limits_0^{\sqrt{15}}dy\int\limits_{\frac{y^2-25}{10}}^{\frac{9-y^2}{6}}dx=2\int\limits_0^{\sqrt{15}}\left(\frac{9-y^2}{6}-\frac{y^2-25}{10}\right)dy=\frac{16\sqrt{15}}{3}$$

(обчислення інтеграла перевірте самостійно).

## 1.9. Механічні застосування подвійного інтеграла

Нехай є матеріальна пластина, яка займає область $D$ площини $Oxy$ і має змінну поверхневу густину $\gamma(x,y)$. Тоді маса пластини обчислюється за формулою:

$$m=\iint_D \gamma(x,y)dxdy. \qquad (1.9.1)$$

Статичні моменти $M_x, M_y$ пластини відносно осей $Ox$ і $Oy$ визначаються формулами:

$$M_x=\iint_D y\gamma(x,y)dxdy, \quad M_y=\iint_D x\gamma(x,y)dxdy. \qquad (1.9.2)$$

Координати $x_C$, $y_C$ знаходять за формулами:

$$x_C=\frac{M_y}{m}=\frac{\iint_D x\gamma(x,y)dxdy}{\iint_D \gamma(x,y)dxdy}, \quad y_C=\frac{M_x}{m}=\frac{\iint_D y\gamma(x,y)dxdy}{\iint_D \gamma(x,y)dxdy}. \qquad (1.9.3)$$

Моменти інерції $I_x, I_y, I_O$ пластини відносно осей $Ox, Oy$ і початку координат визначаються формулами:

$$I_x=\iint_D y^2\gamma(x,y)dxdy,\ I_y=\iint_D x^2\gamma(x,y)dxdy,$$

$$I_O=I_x+I_y=\iint_D \left(x^2+y^2\right)\gamma(x,y)dxdy. \qquad (1.9.4)$$

*Приклад*. Знайти масу квадратної пластини із стороною $2a$, якщо її густина пропорційна квадрату відстані від точки перетину діагоналей і в вершинах квадрату дорівнює 1.

Розташуємо квадрат так, щоб його сторони були паралельні осям координат, а центр перетину діагоналей знаходився у початку координат (рис. 28).

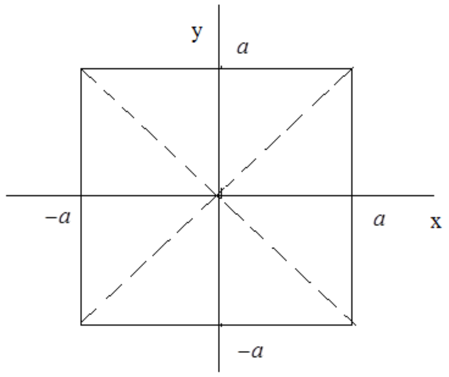


**Рис. 28**

Тоді, за умовою задачі, густина $\gamma(x,y)=k\left(x^2+y^2\right)$, де $k$ – коефіцієнт пропорційності. Визначимо його за умови, що у вершинах квадрата густина дорівнює одиниці. Тоді $\gamma(a,a)=k\left(a^2+a^2\right)=1$, звідки $k=1/2a^2$, і таким чином:

$$\gamma(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2a^2}\ .$$

Масу квадрата тепер знайдемо за формулою (1.9.1):

$$m=\iint_D \frac{x^2+y^2}{2a^2}dxdy=\frac{4}{2a^2}\int_0^a dx\int_0^a \left(x^2+y^2\right)dy=\frac{4a^2}{3}.$$

За формулами (1.9.2) знайдемо статичні моменти:

$$M_x=\iint_D y\gamma(x,y)dxdy=\frac{1}{2a^2}\iint_D y\left(x^2+y^2\right)dxdy=\frac{1}{2a^2}\int_{-a}^{a} dx\int_{-a}^{a}\left(yx^2+y^3\right)dy=0,$$

$$M_y=\iint_D x\gamma(x,y)dxdy=\frac{1}{2a^2}\iint_D x\left(x^2+y^2\right)dxdy=\frac{1}{2a^2}\int_{-a}^{a} dx\int_{-a}^{a}\left(x^3+xy^2\right)dy=0$$

(обчислення інтегралів перевірте самостійно). Звідси за формулами (1.9.3) отримуємо: $x_C=y_C=0$.

Моменти інерції відносно осей координат і початку координат знайдемо за формулами (1.9.4):

$$I_x=\iint_D y^2\gamma(x,y)dxdy=\frac{1}{2a^2}\iint_D y^2\left(x^2+y^2\right)dxdy=\frac{1}{2a^2}\int_{-a}^{a} dx\int_{-a}^{a}\left(x^2y^2+y^4\right)dy=\frac{28a^4}{45},$$

$$I_y=\iint_D x^2\gamma(x,y)dxdy=\frac{1}{2a^2}\iint_D x^2\left(x^2+y^2\right)dxdy=\frac{1}{2a^2}\int_{-a}^{a} dx\int_{-a}^{a}\left(x^4+x^2y^2\right)dy=\frac{28a^4}{45},$$

$$I_O=\frac{56a^4}{45}.$$

# ГЛАВА 2. ПОТРІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

## 2.1. Означення та умови існування потрійного інтеграла

Нехай у просторі $\mathbb{R}^3$ задано замкнену область $V$, яку обмежено замкненою поверхнею $S$, і $P(x,y,z)$ – довільна точка області $V$. Нехай в області $V$ та на її межі визначено деяку функцію $u = f(P) = f(x,y,z)$. Розіб'ємо область $V$ довільно обраною сіткою поверхонь на частинні області $V_i$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$, які не мають спільних внутрішніх точок. Позначимо як $\Delta V_i$ – об'єм області $V_i$. У кожній частинній області $V_i$ довільним чином оберемо одну внутрішню точку $P_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$. Утворимо суму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i, \tag{2.1.1}$$

яку назвемо *інтегральною сумою* для функції $u = f(x,y,z)$ по області $V$, що відповідає даному розбиттю. Позначимо $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} d(V_i)$, де $d(V_i)$ – діаметр області $V_i$, і назвемо цю величину *рангом розбиття*.

**Означення**. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми (2.1.1) при $\lambda \to 0$, яка не залежить ані від способу розбиття області $V$ на частинні, ані від способу вибору внутрішніх точок $P_i$, то ця границя називається *потрійним інтегралом* від функції $u = f(x,y,z)$ по області $V$ і позначається як

$$\iiint\limits_V f(P)dV = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz .$$

Таким чином, за означенням:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i . \tag{2.1.2}$$

Якщо існує границя (2.1.2), то функція $u = f(x,y,z)$ називається *інтегровною в області* $V$.

Потрійний інтеграл має просту фізичну інтерпретацію. Припустимо, що задано деяке об'ємне тіло $V$, по якому розподілено масу, причому в точці $P(x,y,z)\in V$ густина дорівнює $\gamma(P) = \gamma(x,y,z)$. Тоді маса всього тіла $V$ дорівнює:

$$m = \iiint\limits_V \gamma(x,y,z)dxdydz . \tag{2.1.3}$$

Потрійний інтеграл є безпосереднім узагальненням понять звичайного одновимірного інтеграла Рімана, а також подвійного інтеграла на тривимірний простір. Тому він має умови існування а також властивості, які в більшості аналогічні умовам існування та властивостями подвійного інтеграла. Сформулюємо деякі з них.

1. Якщо функція $u = f(x, y, z)$ інтегровна в області $V$, то вона обмежена в цій області.

2. Якщо функція $u = f(x, y, z)$ неперервна в замкненій обмеженій області $V$, то вона інтегровна в області $V$.

Як і у випадках одновимірного та подвійного інтеграла, обернені твердження до цих двох тверджень, взагалі кажучи, несправедливі. Не будь-яка обмежена функція є інтегровною, і не будь-яка інтегровна функція є неперервною.

3. Сталий множник можна виносити за знак потрійного інтеграла:
$$\iiint\limits_V Cf(P)dV = C\iiint\limits_V f(P)dV.$$

4. Потрійний інтеграл від суми (різниці) двох інтегровних функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів від цих функцій:
$$\iiint\limits_V (f(P) \pm g(P))dV = \iiint\limits_V f(P)dV \pm \iiint\limits_V g(P)dV.$$

5. Якщо в області $V$ функція $f(P) \ge 0$, то
$$\iiint\limits_V f(P)dV \ge 0.$$

6. Якщо в області $V$ виконано $f(P) \ge g(P)$, то
$$\iiint\limits_V f(P)dV \ge \iiint\limits_V g(P)dV.$$

7. Якщо функція $u = f(x, y, z)$ неперервна в замкненій та обмеженій області $V$, яка має об'єм $V^*$, то
$$mV^* \le \iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz \le MV^*,$$
де $m = \min\limits_V f(x, y, z)$, $M = \max\limits_V f(x, y, z)$.

8. Якщо функція $u = f(x, y, z)$ неперервна в замкненій та обмеженій області $V$, яка має об'єм $V^*$, то в цій області існує точка $P_0(x_0, y_0, z_0)$ така, що
$$\iiint\limits_V f(P)dV = f(P_0)V^*.$$
Величина $f(P_0) = f(x_0, y_0, z_0)$ називається середнім значенням функції $u = f(P) = f(x, y, z)$ в області $V$.

### 2.2. Обчислення потрійного інтеграла

Нехай область $V$ обмежено знизу і зверху (під напрямом «вверх» розуміється додатний напрям осі $Oz$) поверхнями $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$, а з боків – циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі $Oz$ (рис. 29). Позначимо $D = np_{Oxy}V$ і вважатимемо, що функції $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ неперервні в $D$. Тоді

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,. \qquad (2.2.1)$$

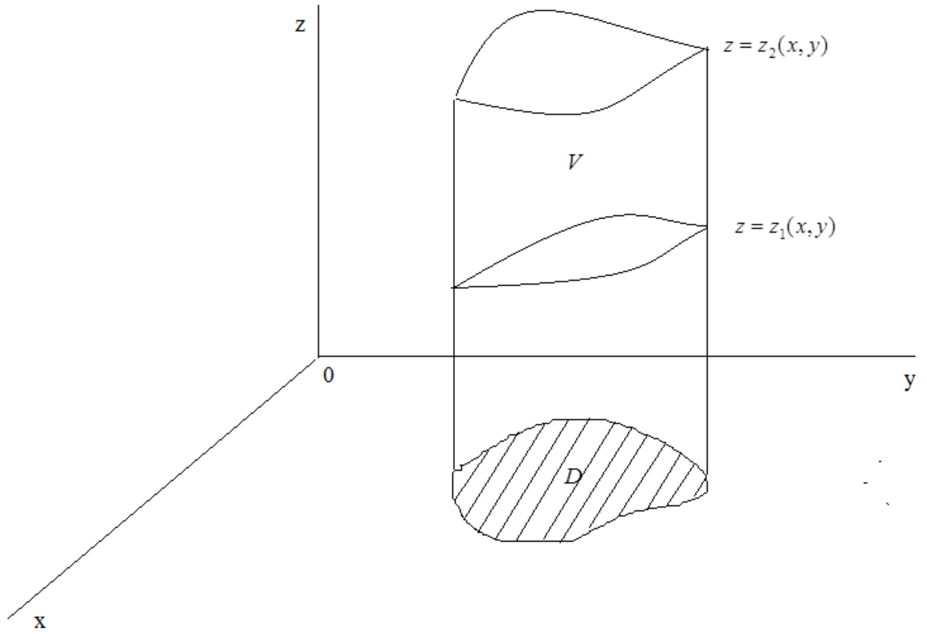


**Рис. 29**

Якщо область $D$ є областю 1-го типу, тобто $a \le x \le b$, $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,. \qquad (2.2.2)$$

Відповідні формули отримуються, коли $D$ є областю 2-го типу, а також якщо область $D$ проектується на якусь іншу координатну площину.

*Приклад*. Обчислити

$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3},$$

де $V$ – область, обмежена площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

Область $V$ зображено на рис. 25а, а область $D = np_{Oxy}V$ – на рис. 25б. Згідно з формулою (2.2.2) маємо:

$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3} = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3}.$$

Обчислимо спочатку внутрішній інтеграл (за змінною $z$) :

$$\int\limits_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} = -\frac{1}{2(1+x+y+z)^2}\Bigg|_0^{1-x-y} = \frac{1}{2(1+x+y)^2} - \frac{1}{8}.$$

Далі обчислимо інтеграл за змінною $y$:

$$\int_0^{1-x}\left(\frac{1}{2(1+x+y)^2}-\frac{1}{8}\right)dy=-\frac{1}{2(1+x+y)}\Bigg|_0^{1-x}-\frac{y}{8}\Bigg|_0^{1-x}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2(1+x)}-\frac{1-x}{8}.$$

І нарешті зовнішній інтеграл (за змінною $x$):

$$\int_0^{1}\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2(1+x)}-\frac{1-x}{8}\right)dx=\frac{(x-1)^2}{16}\Bigg|_0^{1}+\frac{1}{2}\ln(x+1)\Bigg|_0^{1}-\frac{x}{4}\Bigg|_0^{1}=\frac{\ln 2}{2}-\frac{5}{16}.$$

## 2.3. Заміна змінних у потрійному інтегралі

Нехай замкнена обмежена область $V_1$ в системі координат $Oxyz$ взаємно однозначно відображається на область $V_2$ в системі координат $Ouvw$ за допомогою неперервно диференційовних функцій $x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w)$, $z=z(u,v,w)$, якобіан яких в області $V_2$ відмінний від нуля:

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}\neq 0.$$

І нехай функція $f(x,y,z)$ неперервна в області $V_1$. Тоді:

$$\iiint_{V_1} f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{V_2} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J|\,dudvdw.$$

На практиці найчастіше використовується перехід до циліндричних та сферичних координат.

I. <u>Циліндричні координати</u>

Нехай в системі координат $Oxyz$ задано точку $M(x,y,z)$. Спроєктуємо точку $M$ на площину $Oxy$ і позначимо $M'=np_{Oxy}M$, $\rho=\left|\overrightarrow{OM'}\right|$, $\varphi$ – кут між радіусом-вектором $\overrightarrow{OM'}$ і додатним напрямом осі $Ox$. Величини $\rho,\varphi,z$ називаються *циліндричними координатами* точки $M$ (рис. 30). Легко помітити, що $\rho,\varphi$ є полярними координатами точки $M'$ на площині $Oxy$. Тому зв'язок між декартовими та циліндричними координатами точки $M$ встановлюється дуже просто:

$x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi,\ \ z = z$.

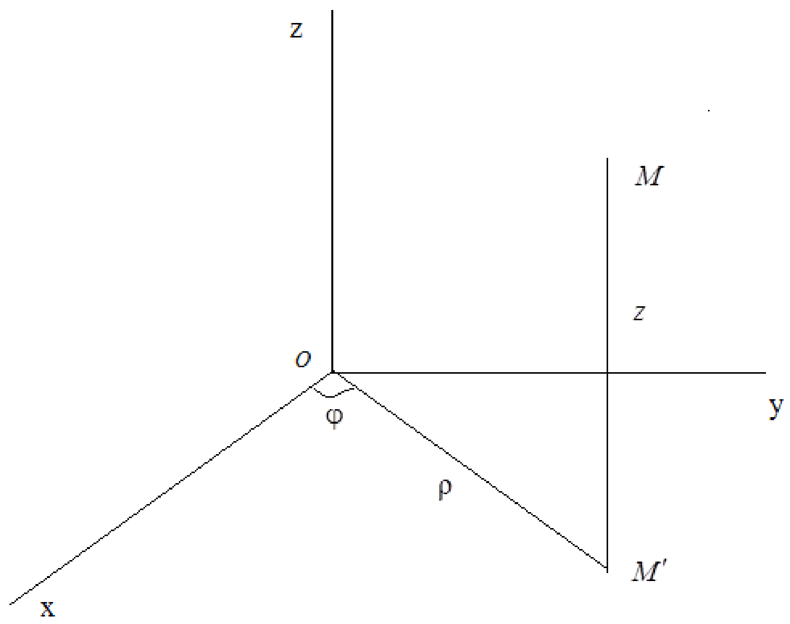


**Рис. 30**

Знайдемо якобіан перетворення:

$$J = \begin{vmatrix} -\rho\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \rho\cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\rho .$$

Тому потрійний інтеграл в циліндричних координатах запишеться наступним чином:

$$\iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V_2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz .$$

Сама назва «циліндричні координати» свідчить про те, що їх доцільно використовувати, коли область $V_1$ є областю циліндричного типу.

*Приклад*. Обчислити

$$\iiint\limits_{V} z\sqrt{x^2 + y^2}dxdydz ,$$

якщо область $V$ обмежено площинами $z = 0$, $z = 2$ і циліндром $x^2 + y^2 = 2x$.

Областю $V$ є круговий циліндр, основою якого є круг $x^2 + y^2 = 2x$ на площині $Oxy$, тобто круг з центром в точці (1;0) і радіусом 1. Висота циліндра дорівнює 2 (рис. 31).

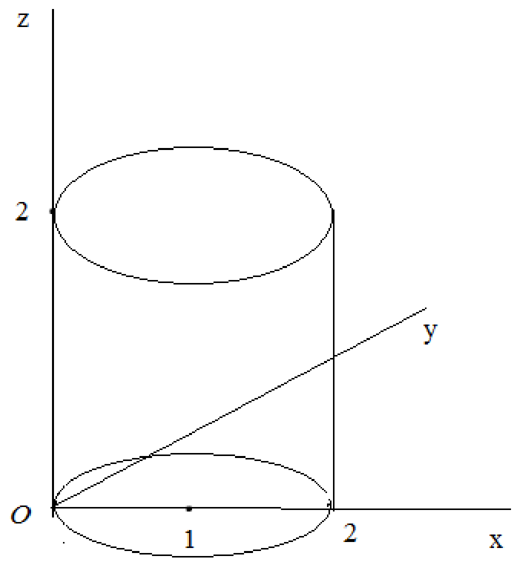


**Рис. 31**

Маємо: $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \rho \le 2\cos\varphi$, $0 \le z \le 2$;

$$\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} d\rho \int\limits_0^2 z\rho^2 dz = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^2 d\rho \int\limits_0^2 zdz = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^2 d\rho =$$

$$= \frac{2}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 8\cos^3\varphi d\varphi = \frac{32}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi d\varphi = \frac{32}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\varphi) d\sin\varphi =$$

$$= \frac{32}{3}\cdot \sin\varphi\Big|_0^{\pi/2} - \frac{32}{3}\cdot\frac{\sin^3\varphi}{3}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{64}{9}.$$

II. <u>Сферичні координати</u>

Нехай $M$ – довільна точка простору, $x, y, z$ – її декартові координати. Як і у випадку циліндричних координат, позначимо $M' = np_{Oxy}M$ – проекцію. Введемо величини: $\rho = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ – довжина вектора $\overrightarrow{OM}$; $\theta$ – кут між векторами $\overrightarrow{OM}$ і $\overrightarrow{OM'}$; $\varphi$ – кут між вектором $\overrightarrow{OM'}$ і додатним напрямом осі $Ox$. Величини $\rho, \theta, \varphi$ називаються *сферичними координатами* точки $M$ (рис. 32).

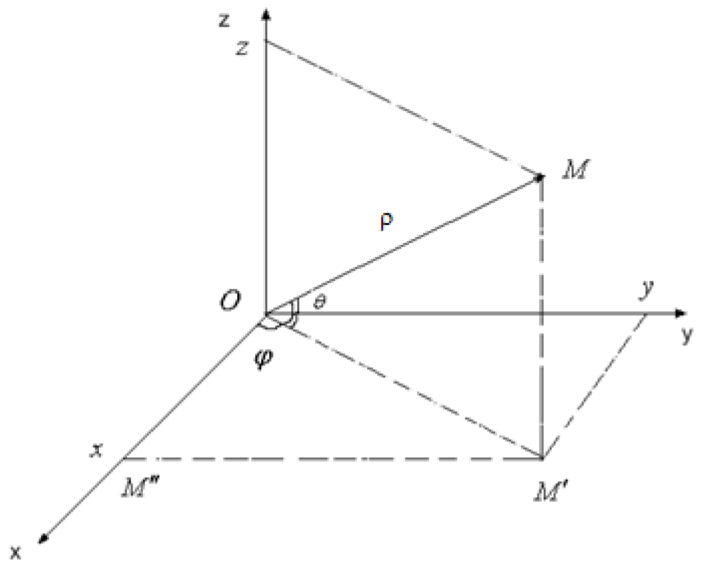


**Рис. 32**

Зв'язок між декартовими та сферичними координатами точки $M$ встановлюється за формулами:

$$x = \rho\cos\theta\cos\varphi,\ y = \rho\cos\theta\sin\varphi,\ \ z = \rho\sin\theta\,.$$

Самостійно перевірте, що якобіан цього перетворення $J = -\rho^2\cos\theta$. Отже, у сферичних координатах потрійний інтеграл набуває вигляду:

$$\iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V_2} f(\rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta)\rho^2\,|\cos\theta|\,d\varphi d\theta d\rho\,.$$

Сферичні координати доцільно використовувати коли область $V_1$ є областю кульового типу.

<u>Приклад</u>. Обчислити повторний інтеграл:

$$\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \left(x^2+y^2\right)dz\,.$$

Легко перевірити, що даний інтеграл дорівнює потрійному інтегралу від функції $u = x^2 + y^2$ по області $V_1$, яка обмежена півсферою $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ і площиною $z = 0$. Перейдемо до сферичних координат. У даному випадку $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \rho \le R$. Тому:

$$\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \left(x^2+y^2\right)dz = \iiint\limits_{V_1}\left(x^2+y^2\right)dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{R} \rho^4\left|\cos^3\theta\right|d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi}\left|\cos^3\theta\right|d\theta \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{2\pi R^5}{5}\int\limits_0^{\pi}|\cos\theta|^3\,d\theta = \frac{2\pi R^5}{5}\left(\int\limits_0^{\pi/2}\cos^3\theta d\theta - \int\limits_{\pi/2}^{\pi}\cos^3\theta d\theta\right) =$$

$$= \frac{2\pi R^5}{5}\left( \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2\theta) d\sin\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} (\sin^2\theta - 1) d\sin\theta \right) =$$

$$= \frac{2\pi R^5}{5}\left( \sin\theta\Big|_0^{\pi/2} - \frac{\sin^3\theta}{3}\Big|_0^{\pi/2} + \frac{\sin^3\theta}{3}\Big|_{\pi/2}^{\pi} - \sin\theta\Big|_{\pi/2}^{\pi} \right) = \frac{8\pi R^5}{15}.$$

## 2.4. Застосування потрійного інтеграла

I. Обчислення об’ємів тіл

Розглянемо потрійний інтеграл від функції $u = f(x,y,z)$ по області $V$:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_V f(P)dV.$$

Якщо функція $u = f(x,y,z)$ тотожно дорівнює 1 в області $V$, то тоді цей інтеграл, очевидно, буде дорівнювати об’єму $V^*$ тіла $V$, тобто отримуємо:

$$V^* = \iiint_V dxdydz = \iiint_V dV.$$

*Приклад*. Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнями $z = x^2 + y^2$, $z = x^2 + 2y^2$, $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$.

Знизу тіло обмежено параболоїдом обертання $z = x^2 + y^2$, а зверху – еліптичним параболоїдом $z = x^2 + 2y^2$. Проекцією тіла на площину $Oxy$ є область $D$, яку обмежено прямими $x = 1$, $y = x$, $y = 2x$. Тому:

$$V^* = \iiint_V dxdydz = \iint_D dxdy \int_{x^2+y^2}^{x^2+2y^2} dz = \int_0^1 dx \int_x^{2x} dy \int_{x^2+y^2}^{x^2+2y^2} dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_x^{2x} y^2 dy = \frac{7}{3}\int_0^1 x^3 dx = \frac{7}{12}.$$

II. Механічні застосування потрійного інтеграла

Нехай $V$ – замкнена обмежена область простору $\mathbb{R}^3$, яку займає деяке матеріальне тіло з густиною $\gamma(x,y,z)$, де $\gamma = \gamma(x,y,z)$ – неперервна в області $V$ функція. Тоді згідно формулі (2.1.3) :

$$m = \iiint_V \gamma(x,y,z)dxdydz.$$

Статичні моменти тіла відносно координатних площин обчислюються за формулами:

$$M_{yz} = \iiint\limits_V x\gamma(x,y,z)dxdydz\,,\ M_{xz} = \iiint\limits_V y\gamma(x,y,z)dxdydz\,,\ M_{xy} = \iiint\limits_V z\gamma(x,y,z)dxdydz\,.$$

Координати центру мас тіла обчислюються за формулами:

$$x_C = \frac{M_{yz}}{m},\ \ y_C = \frac{M_{xz}}{m},\ \ z_C = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Моменти інерції тіла відносно осей координат обчислюються за формулами:

$$I_x = \iiint\limits_V \left(y^2 + z^2\right)\gamma(x,y,z)dxdydz\,,$$

$$I_y = \iiint\limits_V \left(x^2 + z^2\right)\gamma(x,y,z)dxdydz\,,$$

$$I_z = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right)\gamma(x,y,z)dxdydz\,.$$

Моменти інерції тіла відносно координатних площин обчислюються за формулами:

$$I_{xy} = \iiint\limits_V z^2\gamma(x,y,z)dxdydz\,,\qquad I_{xz} = \iiint\limits_V y^2\gamma(x,y,z)dxdydz\,,$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_V x^2\gamma(x,y,z)dxdydz\,.$$

Момент інерції тіла відносно початку координат обчислюється за формулою:

$$I_0 = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\gamma(x,y,z)dxdydz\,.$$

*Приклад*. Знайти масу куба $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$, густина якого в кожній його точці дається формулою: $\gamma = x + y + z$.

Знаходимо масу за формулою (2.1.3):

$$m = \iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 (x+y+z)dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 \left(\frac{(x+y+1)^2}{2} - \frac{(x+y)^2}{2}\right)dy = \frac{1}{6}\int\limits_0^1 \left((x+2)^3 - 2(x+1)^3 + x^3\right)dx = \frac{3}{2}.$$

# ГЛАВА 3. КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

## 3.1. Криволінійний інтеграл 1-го роду

Нехай у площині $Oxy$ задано гладку криву $AB$, і на цій кривій визначено обмежену функцію $f(x,y)$. Розіб'ємо криву $AB$ довільно обраними точками $A_0 = A, A_1, A_2, ..., A_k, A_{k+1}, ..., A_{n-1}, A_n = B$ на частинні дуги $\overset{\frown}{A_k A_{k+1}}$. На кожній з цих дуг довільним чином оберемо внутрішню точку $M_k(\xi_k, \eta_k)$ $\left(k = \overline{0, n-1}\right)$ (рис. 33).

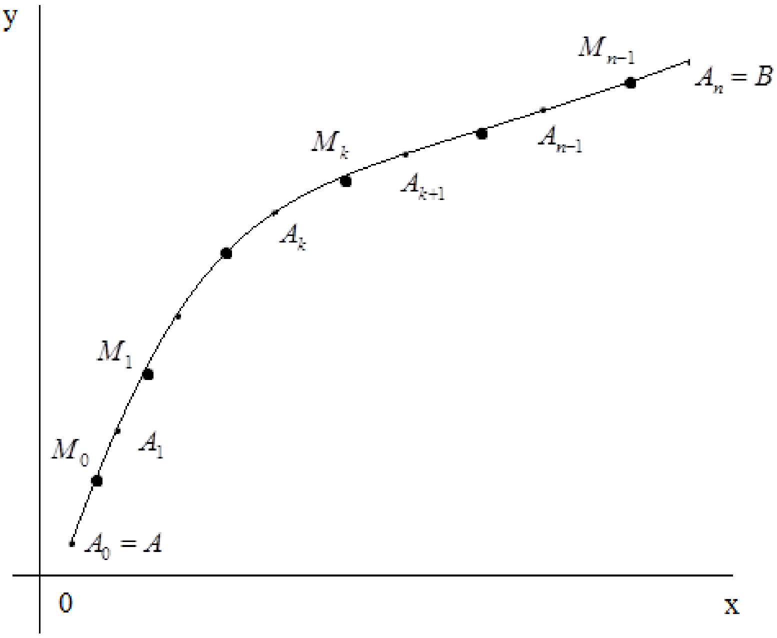


**Рис. 33**

Складемо суму

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\Delta l_k,$$

де $\Delta l_k$ – довжина дуги $\overset{\frown}{A_k A_{k+1}}$. Ця сума називається *інтегральною сумою* для функції $f(x,y)$ по кривій $AB$, яка відповідає даному розбиттю. Позначимо $\lambda = \max\limits_{0 \le k \le n-1} \Delta l_k$ і назвемо цю величину *рангом розбиття*.

**Означення**. Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\Delta l_k,$$

яка не залежить від засобу розбиття кривої $AB$ на частинні дуги і засобу обрання внутрішніх точок $M_k$, то ця границя називається *криволінійним інтегралом*

*1-го роду* (або *криволінійним інтегралом по довжині дуги*) від функції $f(x,y)$ по кривій $AB$, і позначається як $\int\limits_{AB} f(x,y)dl$.

Таким чином, за означенням:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k,\eta_k)\,\Delta l_k\,.$$

Криволінійний інтеграл 1-го роду має низку властивостей, аналогічних властивостям звичайного інтеграла Рімана, а також подвійного та потрійного інтеграла. А саме, сталий множник можна виносити за знак інтеграла, інтеграл від суми функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій тощо. Зосередимось на обчисленні криволінійного інтегралу 1-го роду.

Нехай криву $AB$ задано параметричними рівняннями:

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t_0\le t\le T\,,$$

де $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ – неперервно диференційовні на інтервалі $(t_0,T)$ функції. Тоді елемент дуги $dl$ обчислюється за формулою:

$$dl=\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt\,.$$

Весь інтеграл запишеться так:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl=\int\limits_{t_0}^{T} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt \qquad (3.1.1)$$

Нехай криву $AB$ задано явним рівнянням $y=y(x)$ $(a\le x\le b)$, де функція $y(x)$ неперервно диференційовна на інтервалі $(a,b)$. Тоді

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl=\int\limits_{a}^{b} f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx\,. \qquad (3.1.2)$$

Аналогічно розглядається випадок просторової кривої $AB$, яку задано рівняннями $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t),\ t_0\le t\le T$. Тоді:

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl=\int\limits_{t_0}^{T} f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2}\,dt\,. \qquad (3.1.3)$$

*Приклади*

1. Обчислити $\int\limits_{L}\frac{dl}{x-y}$, де $L$ – відрізок прямої, що з’єднує точки $A(0;-2)$ і $B(4;0)$.

Рівняння кривої $L$: $y=\frac{1}{2}x-2$, $0\le x\le 4$; $y'(x)=\frac{1}{2}$. Згідно з формулою (3.1.2) маємо:

$$\int_L \frac{dl}{x-y} = \int_0^4 \frac{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}{x-\frac{1}{2}x+2}dx = \sqrt{5}\int_0^4 \frac{dx}{x+4} = \sqrt{5}\ln(x+4)\Big|_0^4 = \sqrt{5}\ln 2.$$

2. Обчислити $\int_L\left(2z-\sqrt{x^2+y^2}\right)dl$, де $L$ – дуга кривої $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $0 \le t \le 2\pi$ (конічна гвинтова лінія).

Знайдемо елемент дуги:

$$dl = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\,dt =$$

$$= \sqrt{\cos^2 t - 2t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t + 1}\,dt = \sqrt{2+t^2}\,dt.$$

Тепер згідно з формулою (3.1.3):

$$\int_L\left(2z-\sqrt{x^2+y^2}\right)dl = \int_0^{2\pi}(2t-t)\sqrt{2+t^2}\,dt = \int_0^{2\pi} t\sqrt{2+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2+t^2}\,d(2+t^2) =$$

$$= \frac{1}{3}(2+t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{\left(2\pi^2+1\right)^3}-1\right).$$

### 3.2. Застосування криволінійного інтеграла 1-го роду

I. Геометричні застосування

Нехай на площині $Oxy$ задано кусково-гладку криву $AB$, замкнену чи незамкнену, і на цій кривій визначено функцію $f(x,y) \ge 0$. Тоді площу циліндричної поверхні, напрямною якої є крива $AB$, а твірні перпендикулярні до неї, і яку обмежено зверху поверхнею $z = f(x,y)$, а знизу – самою кривою $AB$, можна знайти за формулою:

$$P = \int_{AB} f(x,y)dl. \qquad (3.2.1)$$

Довжину $l$ кривої $AB$, очевидно, можна знайти за формулою:

$$l = \int_{AB} dl. \qquad (3.2.2)$$

*Приклади*

1. Знайти площу циліндричної поверхні, напрямною якої є крива $x^2 + y^2 = R^2$, твірні паралельні осі $Oz$, знизу поверхня обмежена площиною $Oxy$, а зверху – поверхнею $z = R + \dfrac{x^2}{R}$.

Згідно з формулою (3.2.1) маємо:

$$P=\int\limits_{x^2+y^2=R^2}\left(R+\frac{x^2}{R}\right)dl=\left[\begin{array}{c} x=R\cos t, y=R\sin t,\ 0\le t\le 2\pi, \\ dl=\sqrt{((R\cos t)')^2+((R\sin t)')^2}\,dt=Rdt\end{array}\right]=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(R+R\cos^2 t\right)Rdt=R^2\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos^2 t)dt=R^2\int\limits_0^{2\pi}\left(1+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=3\pi R^2.$$

2. Знайти довжину дуги $y=\operatorname{ch} x$, $0\le x\le \ln 2$ (ланцюгова лінія).

Згідно з формулою (3.2.2) маємо:

$$l=\int\limits_L dl=\int\limits_0^2\sqrt{1+((\operatorname{ch} x)')^2}dx=\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}dx=\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{\operatorname{ch}^2 x}dx=\int\limits_0^{\ln 2}\operatorname{ch} xdx=\operatorname{sh} x\Big|_0^{\ln 2}=\operatorname{sh}(\ln 2)=$$
$$=\frac{e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}}{2}=\frac{2-1/2}{2}=\frac{3}{4}.$$

II. <u>Механічні застосування</u>

Нехай вздовж неоднорідної матеріальної кривої $L$ розподілено масу з лінійною густиною $\gamma(x,y)$. Тоді маса кривої $L$ обчислюється за формулою:

$$m=\int\limits_L\gamma(x,y)dl. \qquad (3.2.3)$$

Координати центра маси кривої $L$ даються формулами:

$$x_C=\frac{\int\limits_L x\gamma(x,y)dl}{m},\quad y_c=\frac{\int\limits_L y\gamma(x,y)dl}{m}. \qquad (3.2.4)$$

Зокрема, якщо крива $L$ однорідна, тобто має сталу густину $\gamma_0$, то у чисельниках і знаменниках цих формул її можна винести за знаки інтегралів, скоротити на неї, і тоді формули (3.2.4) набувають вигляду:

$$x_C=\frac{\int\limits_L xdl}{l},\quad y_C=\frac{\int\limits_L ydl}{l}, \qquad (3.2.5)$$

де $l$ – довжина кривої $L$.

Моменти інерції кривої $L$ відносно осей $Ox, Oy$ і початку координат даються формулами:

$$I_x=\int\limits_L y^2\gamma(x,y)dl,\quad I_y=\int\limits_L x^2\gamma(x,y)dl,\quad I_0=\int\limits_L\left(x^2+y^2\right)\gamma(x,y)dl. \qquad (3.2.6)$$

*Приклад*. Знайти координати центра маси однорідної кривої $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ($0\le t\le\pi$) (циклоїда).

Знайдемо довжину кривої:

$$l=\int\limits_L dl=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{(a(t-\sin t)')^2+(a(1-\cos t)')^2}dt=a\int\limits_0^{\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}dt=$$

$$= a\int_0^{\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt = 2a\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}dt = 8a.$$

Далі знайдемо:

$$\int_L xdl = \int_0^{\pi} a(t-\sin t)2a\sin\frac{t}{2}dt = 2a^2\left(\int_0^{\pi} t\sin\frac{t}{2}dt - \int_0^{\pi}\sin t\sin\frac{t}{2}dt\right) =$$

$$= 2a^2\left(4-\frac{4}{3}\right) = \frac{32a^2}{3};$$

$$\int_L ydl = \int_0^{\pi} a(1-\cos t)2a\sin\frac{t}{2}dt = 2a^2\left(\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}dt - \int_0^{\pi}\cos t\sin\frac{t}{2}dt\right) =$$

$$= 2a^2\left(-\frac{2}{3}+1\right) = \frac{2a^2}{3}.$$

Тепер за формулами (3.2.5) отримаємо:

$$x_C = \frac{\frac{32a^2}{3}}{8a} = \frac{4a}{3},\ y_C = \frac{\frac{2a^2}{3}}{8a} = \frac{a}{12}.$$

Розглянемо ще одне механічне застосування криволінійного інтеграла 2-го роду, а саме задачу про притягання матеріальної точки матеріальною кривою. Нехай матеріальна точка $M_1$ масою $m_1$ притягає матеріальну точку $M_0$ масою $m_0$ з силою, яка напрямлена від $M_0$ до $M_1$ і яка дорівнює $k\frac{m_0 m_1}{r^2}$, де $r = |M_0M_1|$, а $k$ – коефіцієнт пропорційності, який для спрощення будемо вважати одиницею. Тоді сила притягання $F_1 = \frac{m_0 m_1}{r^2}$.

Нехай тепер точка $M_0$ притягається плоскою системою $n$ точок $M_1, M_2, ..., M_n$ масами $m_1, m_2, ..., m_n$ відповідно. Рівнодіюча сил отримується геометричним додаванням сил притягання окремими точками, а її проекції на координатні осі дорівнюють алгебраїчним сумам проекцій окремих сил. Позначимо як $\theta_k$ кут, який вектор $\vec{r_k} = \overrightarrow{M_0M_k}$ утворює з віссю $Ox$ (рис. 34). Тоді проекції $X_k, Y_k$ на координатні осі сили $\overrightarrow{F_k}$, з якою точка $M_0$ притягається точкою $M_k$, дорівнюють:

$$X_k = \frac{m_0 m_k}{\left|\vec{r_k}\right|^2}\cos\theta_k,\quad Y_k = \frac{m_0 m_k}{\left|\vec{r_k}\right|^2}\sin\theta_k.$$

Проекції $X, Y$ рівнодіючої сили $\vec{F}$ дорівнюють:

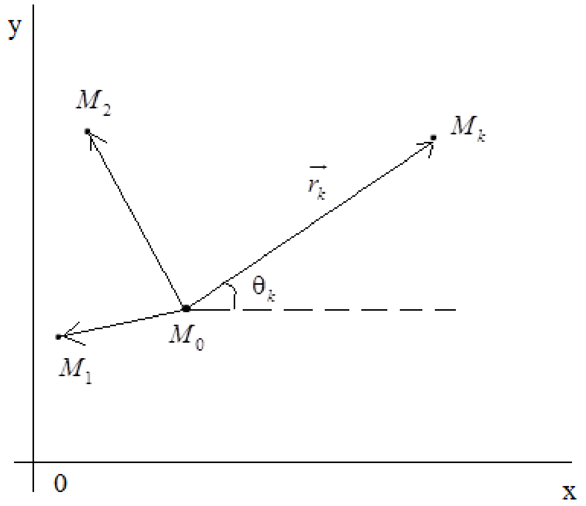


**Рис. 34**

$$X = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_0 m_k}{\left|\vec{r_k}\right|^2} \cos\theta_k \,, \quad Y = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_0 m_k}{\left|\vec{r_k}\right|^2} \sin\theta_k \,.$$

Нехай тепер маса, що притягає, неперервно розподілена по кривій $L$. Треба знайти силу притягання точки $M_0$ всією кривою $L$. Розіб'ємо довільним чином криву $L$ на частинні дуги і на кожній дузі довільним чином оберемо точку $M_k$. Тоді маса частинної дуги наближено дорівнює:

$$\Delta m_k \approx \gamma(M_k)\Delta l_k \,,$$

де $\Delta l_k$ – довжина частинної дуги. Наближені вирази для проекцій рівнодіючої сили тоді набудуть вигляду:

$$X \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{m_0 \gamma(M_k)\Delta l_k}{\left|\vec{r_k}\right|^2} \cos\theta_k \quad , \quad Y \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{m_0 \gamma(M_k)\Delta l_k}{\left|\vec{r_k}\right|^2} \sin\theta_k \,.$$

Легко бачити, що праві частини цих формул є інтегральними сумами для криволінійних інтегралів 1-го роду. Тому, переходячи до границі при $\max\limits_{k} \Delta l_k \to 0$, отримаємо точні вирази:

$$X = m_0 \int_L \frac{\gamma(M)\cos\theta}{r^2} dl, \;\; Y = m_0 \int_L \frac{\gamma(M)\sin\theta}{r^2} dl \,, \tag{3.2.7}$$

де $r = \left|\vec{r}\right| = \left|\overline{M_0 M}\right|$, $\theta = \widehat{\vec{r}, Ox}$.

*Приклад*. Знайти притягання, яке здійснює однорідне півколо ($\gamma = 1$) радіусом $R$ на точку масою $m_0 = 1$ в центрі півкола (рис. 35).

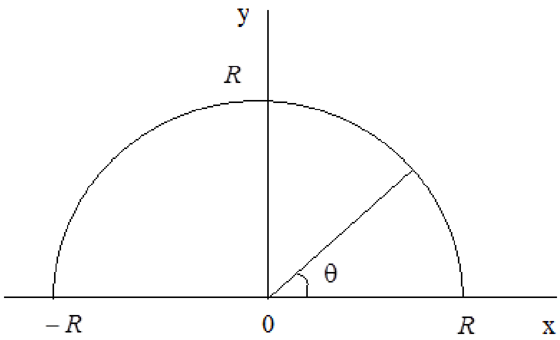


**Рис. 35**

Внаслідок симетрії $X = 0$. За формулами (3.2.7) маємо:

$$Y = \int_L \frac{\sin\theta}{r^2} dl .$$

В даному випадку $r = R$, $dl = Rd\theta$. Тому:

$$Y = \frac{1}{R}\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = \frac{2}{R}.$$

### 3.3. Криволінійний інтеграл 2-го роду

Нехай в площині $Oxy$ задано гладку криву $AB$, на якій визначено обмежену функцію $P(x, y)$. Визначимо на кривій $AB$ напрям від точки $A$ до точки $B$. Тобто точка $A$ є початковою, а точка $B$ – кінцевою. Розіб'ємо криву $AB$ довільно обраними точками $A = A_0, A_1, ..., A_k, A_{k+1}, ..., A_{n-1}, A_n = B$ на $n$ частинних дуг, і на кожній дузі $\overset{\frown}{A_k A_{k+1}}$ оберемо також довільним чином внутрішню точку $M_k(\xi_k, \eta_k)$ $\left(k = \overline{0, n-1}\right)$. Позначимо: $\lambda = \max\limits_{0 \le k \le n-1} \Delta l_k$, де $\Delta l_k$ – довжина дуги $\overset{\frown}{A_k A_{k+1}}$. Складемо суму:

$$\sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k , \tag{3.3.1}$$

де $\Delta x_k$ – проекція дуги $\overset{\frown}{A_k A_{k+1}}$ (або вектора $\overrightarrow{A_k A_{k+1}}$) на вісь $Ox$. Підкреслимо, що в цій інтегральній сумі використовуються не довжини $\Delta l_k$ самих частинних дуг, як це було у випадку криволінійного інтеграла 1-го роду, а їх проекції на вісь $Ox$.

**Означення**. Якщо існує скінченна границя суми (3.3.1) при $\lambda \to 0$, яка не залежить ні від засобу розбиття кривої $AB$ на частинні дуги , ні від засобу внутрішніх точок $M_k$, то ця границя називається *криволінійним інтегралом від функції* $P(x,y)$ *по координаті* $x$ вздовж кривої $AB$ і позначається $\int\limits_{AB} P(x,y)dx$.

Таким чином, за означенням:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k .$$

Аналогічно вводиться криволінійний інтеграл від функції $Q(x,y)$ по координаті $y$:

$$\int\limits_{AB} Q(x,y)dy = \lim_{\lambda\to 0} Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k ,$$

де $\Delta y_k$ – проекція дуги $\overset{\frown}{A_k A_{k+1}}$ (або вектора $\overrightarrow{A_k A_{k+1}}$) на вісь $Oy$ (рис. 36).

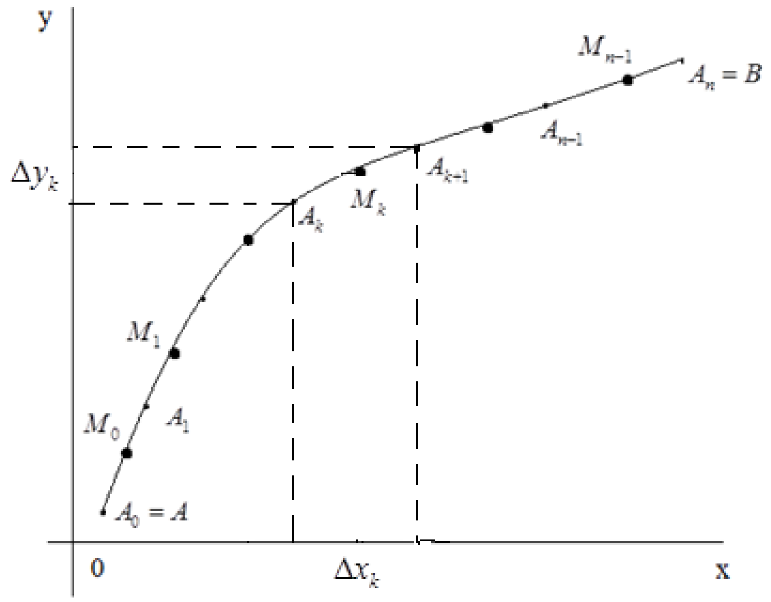


**Рис. 36**

Сума

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + \int\limits_{AB} Q(x,y)dy$$

називається *криволінійним інтегралом 2-го роду* (або *криволінійним інтегралом по координатах*) від функцій $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ по кривій $AB$ і позначається символом:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Визначимо фізичний зміст криволінійного інтегралу 2-го роду. Нехай матеріальна точка $M(x,y)$ під дією змінної сили $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ рухається на площині $Oxy$ вздовж кривої $BC$. Треба обчислити роботу $A$ сили $\vec{F}$ при переміщенні точки $M$ з точки $B$ в точку $C$ (рис. 37).

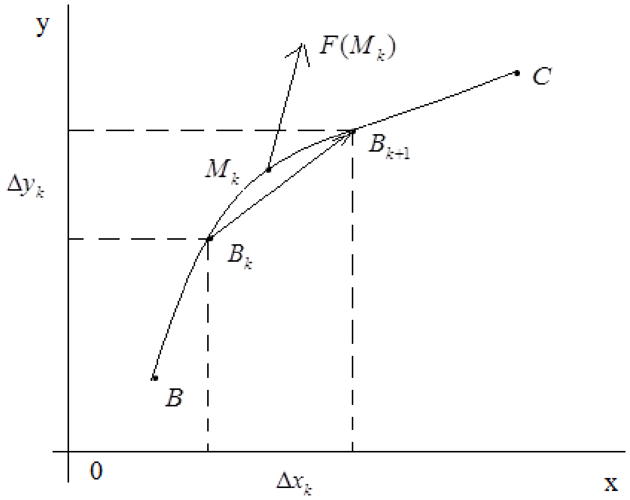


**Рис. 37**

Розіб'ємо криву $BC$ довільно обраними точками ділення $B = B_0, B_1, ..., B_k$, $B_{k+1}, ..., B_{n-1}, B_n = C$ на $n$ частин і на кожній окремій дузі $\overset{\frown}{B_k B_{k+1}}$ оберемо довільну точку $M_k(\xi_k, \eta_k)$ $\left(k = \overline{0, n-1}\right)$. На цю точку діє сила $\vec{F}(M_k) = P(M_k)\vec{i} + Q(M_k)\vec{j}$. Роботу $\Delta A_k$, яку виконує ця сила при переміщенні точки по вектору $\overrightarrow{B_k B_{k+1}}$, можна знайти як скалярний добуток

$$\Delta A_k = \vec{F}(M_k) \cdot \overrightarrow{B_k B_{k+1}} = P(M_k)\Delta x_k + Q(M_k)\Delta y_k.$$

Ця робота наближено дорівнює роботі змінної сили $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки по дузі $\overset{\frown}{B_k B_{k+1}}$ довжиною $\Delta l_k$.

Робота сили при переміщенні вздовж ламаної $B_0, B_1, ..., B_k, B_{k+1}, ..., B_{n-1}, B_n$ дорівнює:

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k.$$

Цей вираз дає наближене значення шуканої роботи $A$: $A \approx A_n$. Щоб знайти точний вираз для роботи, треба перейти до границі при $\lambda = \max\limits_{0 \le k \le n-1} \Delta l_k \to 0$:

$$A = \lim_{\lambda\to 0} A_n = \lim_{\lambda\to 0}\left(\sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right) = \int_{BC} P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

Отже, *фізичний зміст криволінійного інтегралу 2-го роду вздовж деякої кривої полягає в тому, що він дорівнює роботі змінної сили при переміщенні матеріальної точки вздовж цієї кривої.*

Встановимо зв'язок між криволінійними інтегралами 1-го та 2-го роду. Розглянемо на площині $Oxy$ гладку криву $AB$ і точку $M(x,y)$ на неї. Проведемо в точці $M$ дотичну до кривої $AB$ і розглянемо кути $\alpha$ і $\beta$, які ця дотична утворює з осями координат (рис. 38).

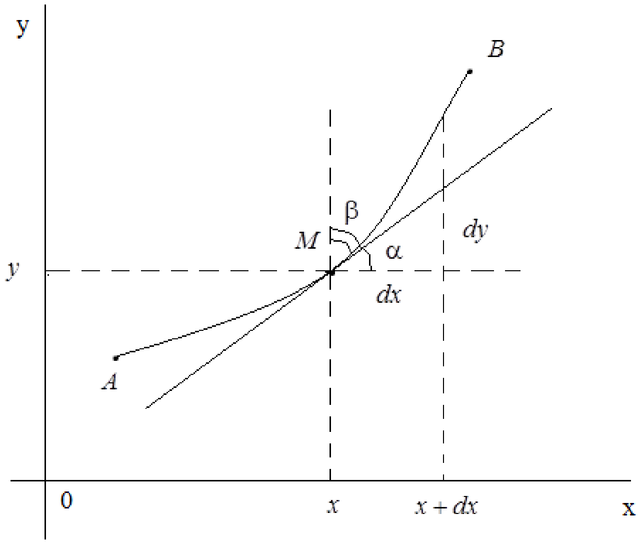


**Рис. 38**

Очевидно тоді, що для диференціалів $dx$ та $dy$ матимемо: $dx = \cos\alpha \cdot dl$, $dy = \cos\beta \cdot dl$, де $dl$ – диференціал дуги. Отже:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AB} \big(P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta\big)dl .$$

Це й є формула, що пов'язує криволінійні інтеграли 1-го та 2-го роду.

### 3.4. Обчислення криволінійного інтеграла 2-го роду

Нехай криву $AB$ задано параметричними рівняннями:

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t)\ \ (\alpha \le t \le \beta),$$

де функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$ неперервні та неперервно диференційовні на відрізку $[\alpha,\beta]$, причому точці $A$ відповідає значення $t = \alpha$, а точці $B$ – значення $t = \beta$, тобто $A(\varphi(\alpha),\psi(\alpha)),\ B(\varphi(\beta),\psi(\beta))$. Припустимо, що функція $P(x,y)$ неперервна на кривій $AB$. Тоді за означенням:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k. \qquad (3.4.1)$$

Згідно з формулою Лагранжа можемо записати:

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \varphi'(\tau_k)(t_{k+1} - t_k) = \varphi'(\tau_k)\Delta t_k,$$

де $t_k$ – значення параметра $t$, яке відповідає точці $x_k$, $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$. Оберемо точку $(\xi_k,\eta_k)$ так, щоб $\xi_k = \varphi(\tau_k)$, $\eta_k = \psi(\tau_k)$. Тоді інтегральна сума у формулі (3.4.1) набуде вигляду:

$$\sum_{k=0}^{n-1} P(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k))\varphi'(\tau_k)\Delta t_k.$$

Це інтегральна сума для функції $P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)$ на відрізку $[\alpha,\beta]$, тому

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = \int_\alpha^\beta P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)\,dt. \qquad (3.4.2)$$

Аналогічно доводяться формули:

$$\int\limits_{AB} Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\,dt, \qquad (3.4.3)$$

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta [P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]dt. \qquad (3.4.4)$$

Якщо криву $AB$ задано явним рівнянням $y = y(x)$ $(a \le x \le b)$, де функція $y = y(x)$ неперервна та неперервно диференційовна на проміжку $[a,b]$, то з формули (3.4.4) дістанемо:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b [P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)]dx. \qquad (3.4.5)$$

Аналогічно, якщо криву $AB$ задано рівнянням $x = x(y)$ $(c \le y \le d)$, де функція $x = x(y)$ неперервна та неперервно диференційовна на проміжку $[c,d]$, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_c^d [P(x(y),y)x'(y) + Q(x(y),y)]dy. \qquad (3.4.6)$$

Поняття криволінійного інтеграла 2-го роду можна поширити й на просторові криві. Нехай функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ визначені і неперервні на просторовій кривій $AB$, яку задано рівняннями:

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t)\ \ (\alpha \le t \le \beta),$$

де функції $\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ неперервні та неперервно диференційовні на відрізку $[\alpha,\beta]$, причому точці $A$ відповідає значення $t = \alpha$, а точці $B$ – значення $t = \beta$, тобто $A(\varphi(\alpha),\psi(\alpha),\chi(\alpha))$, $B(\varphi(\beta),\psi(\beta),\chi(\beta))$. Тоді існує криволінійний інтеграл

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz,$$

і справджується формула:

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \qquad (3.4.7)$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\psi'(t) + R(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\chi'(t)]dt.$$

На відміну від криволінійного інтеграла 1-го роду криволінійний інтеграл 2-го роду залежить від напряму шляху інтегрування і при зміні цього напряму змінює свій знак:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = -\int_{BA} Pdx + Qdy.$$

Це пояснюється тим, що при зміні напряму інтегрування змінюються знаки проекцій $\Delta x_k$, $\Delta y_k$ у відповідних інтегральних сумах.

Часто доводиться розглядати криволінійні інтеграли по *замкненому контуру*, тобто коли початкова та кінцева точки збігаються. Такий контур називається *додатно орієнтованим*, якщо при його обході область, що ним обмежується, залишається зліва (тобто обхід здійснюється проти годинникової стрілки). Інтеграли по замкненому контуру позначають так:

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

*Приклади*

1. Обчислити $\oint_L xydx + dy$, де $L$ – замкнений контур, утворений лініями $y = x^2$, $y = 1$, $x = 0$ (рис. 39). Обхід контуру здійснюється у додатному напрямі.

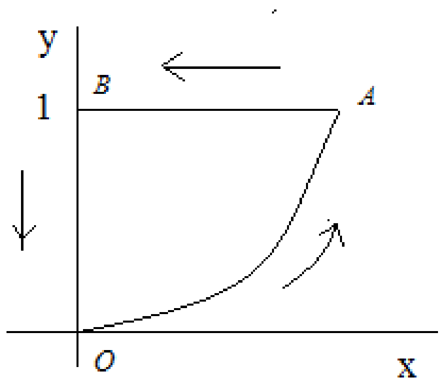


**Рис. 39**

Подамо контур $L$ як об’єднання контурів $OA$, $AB$, $BO$. Тоді

$$\oint_L = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BO} .$$

Рівняння контуру $OA$: $y = x^2$, та $x$ змінюється в напряму від 0 до 1. Тому згідно з формулою (3.4.5):

$$\int_{OA} xydx + dy = \int_0^1 x \cdot x^2 dx + 2xdx = \int_0^1 \left(x^3 + 2x\right)dx = \frac{5}{4}.$$

Рівняння контуру $AB$: $y = 1$, та цього разу $x$ змінюється в напряму від 1 до 0. Тому:

$$\int_{AB} xydx + dy = \int_1^0 x \cdot 1dx = -\int_0^1 xdx = -\frac{1}{2}$$

(тут очевидно $dy = 0$).

Рівняння контуру $BO$: $x = 0$, та $y$ змінюється в напряму від 1 до 0. Тому:

$$\int_{BO} xydx + dy = \int_1^0 dy = -1.$$

Отже:

$$\oint_L xydx + dy = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{4}.$$

2. Обчислити інтеграл $\int_L \frac{x}{y}dx + \frac{1}{y-a}dy$, де $L$ – відрізок циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ від $t = \pi/6$ до $t = \pi/3$.

Згідно з формулою (3.4.4) маємо:

$$\int_L \frac{x}{y}dx + \frac{1}{y-a}dy = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{a(t-\sin t)}{a(1-\cos t)} a(1-\cos t)dt + \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{a\sin t dt}{-a\cos t} =$$

$$= a\frac{t^2}{2}\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/3} + a\cos t\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} + \ln|\cos t|\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = a\left(\frac{\pi^2}{24} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\ln 3}{2}.$$

3. Знайти роботу сили $\vec{F} = yx\vec{i} + (y+x)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки по прямій $y = x$ з точки $O(0,0)$ в точку $B(1,1)$.

Згідно з фізичним змістом інтеграла 2-го роду маємо:

$$A = \int_{OB} yxdx + (y+x)dy = \int_0^1 x^2 dx + 2xdx = \frac{4}{3}.$$

### 3.5. Формула Гріна

**Теорема**. *Нехай* $D$ *– область, яку обмежено замкненим кусково-гладким контуром* $\Gamma$*, і функції* $P(x,y), Q(x,y), \partial P(x,y)/\partial y,\ \partial Q(x,y)/\partial x$ *неперервні в області* $D$. *Тоді справджується формула:*

$$\oint\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{D} \left( \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy. \qquad (3.5.1)$$

**Доведення**. Припустимо для спрощення, що область $D$ стандартна водночас і 1-го і 2-го типу, тобто, з одного боку, $D = \{a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$, причому $y_1(a) = y_2(a)$, $y_1(b) = y_2(b)$, а з іншого боку, $D = \{c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$, причому $x_1(c) = x_2(c)$, $x_1(d) = x_2(d)$ (рис. 40).

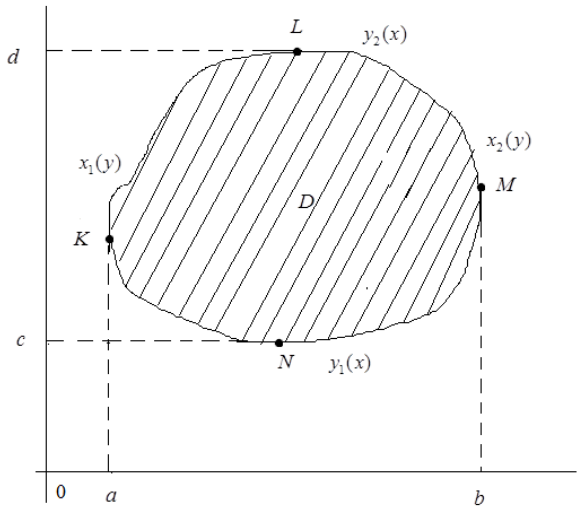


**Рис. 40**

Розглянемо з огляду на те, що область $D$ стандартна 1-го типу:

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int\limits_a^b (P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x))dx =$$

$$= \int\limits_a^b P(x,y_2(x))dx - \int\limits_a^b P(x,y_1(x)) = \int\limits_{KLM} P(x,y)dx - \int\limits_{KNM} P(x,y)dx =$$

$$= \int\limits_{KLM} P(x,y)dx + \int\limits_{MNK} P(x,y)dx = -\oint\limits_{\Gamma} P(x,y)dx.$$

Аналогічно, з оглядом на те, що область $D$ стандартна 2-го типу:

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint\limits_{\Gamma} Q(x,y)dy.$$

Звідси отримуємо:

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_\Gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,,$$

що й треба було довести.

**Наслідок**. Площа плоскої фігури $D$ отримується з формули Гріна, якщо покласти $P = -\frac{y}{2}$, $Q = \frac{x}{2}$:

$$S = \iint\limits_D dxdy = \frac{1}{2}\oint\limits_\Gamma xdy - ydx\,.$$

*Приклад*. Обчислити $\oint\limits_L (x+y)^2 dx - (x^2+y^2)dy$, де $L$ – контур трикутника з вершинами $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(2;4)$ (рис. 41).

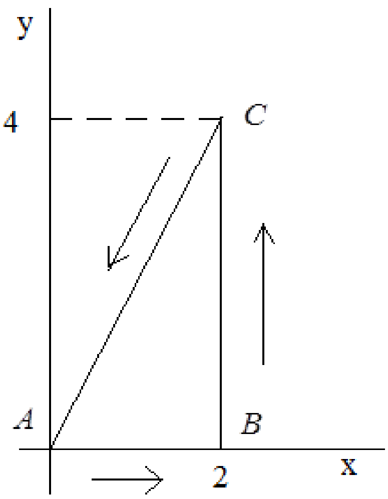


**Рис. 41**

Подамо контур $L$ у вигляді об'єднання контурів $AB, BC, CA$. Тоді

$$\oint\limits_L = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CA}\,.$$

Рівняння контуру $AB$: $y = 0$, причому $x$ змінюється від 0 до 2. Рівняння контуру $BC$: $x = 2$, причому $y$ змінюється від 0 до 4. Рівняння контуру $CA$: $y = 2x$, причому $x$ змінюється від 2 до 0. Тому:

$$\int\limits_{AB} (x+y)^2 dx - (x^2+y^2)dy = \int\limits_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3};$$

$$\int\limits_{BC} (x+y)^2 dx - (x^2+y^2)dy = -\int\limits_0^4 (4+y^2)dy = -\frac{112}{3};$$

$$\int\limits_{CA} (x+y)^2 dx - (x^2+y^2)dy = \int\limits_2^0 9x^2dx - 5x^2 \cdot 2dx = \int\limits_0^2 \left(10x^2 - 9x^2\right)dx = \frac{8}{3}.$$

Отже:

$$\oint_L (x+y)^2 dx - (x^2+y^2)dy = \frac{8}{3} - \frac{112}{3} + \frac{8}{3} = -32 .$$

Обчислимо тепер той самий інтеграл, використовуючи формулу Гріна. Якщо $D$ – область, що обмежена контуром $L$, то

$$\oint_L (x+y)^2 dx - (x^2+y^2)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D (-2x - 2(x+y))\, dxdy =$$

$$= \iint_D (-4x-2y)\, dxdy = -2\iint_D (2x+y)\, dxdy = -2\int_0^2 dx \int_0^{2x} (2x+y)dy =$$

$$= -2\int_0^2 \left[ \left. \frac{(2x+y)^2}{2} \right|_0^{2x} \right] dx = -2\int_0^2 \left( \frac{16x^2}{2} - \frac{4x^2}{2} \right) dx = -12\int_0^2 x^2 dx = -32 ,$$

тобто результати співпали, як і мало бути.

## 3.6. Умови незалежності криволінійного інтеграла 2-го роду від шляху інтегрування

**Теорема**. *Нехай функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ визначені і неперервні разом зі своїми похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в деякій замкненій обмеженій області $D$. Тоді наступні чотири умови еквівалентні.*

*1) для довільної замкненої гладкої кривої $L$, що цілком лежить в області $D$, виконано:*

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 ;$$

*2) для будь-яких $M$ і $N$ з області $D$ інтеграл $\int\limits_{MN} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не залежить від форми шляху, що з'єднує точки $M$ і $N$, якщо тільки він цілком належить області $D$;*

*3) вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ є повним диференціалом деякої функції $U(x,y)$:*

$$dU(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy ;$$

*4) в усіх точках області $D$ виконано:*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} .$$

**Доведення**. Доведемо теорему по схемі: $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 1)$.

$\underline{1) \Rightarrow 2)}$. Нехай $MSN$ та $MRN$ – дві довільні криві, що з'єднують точки $M$ і $N$ (рис. 42).

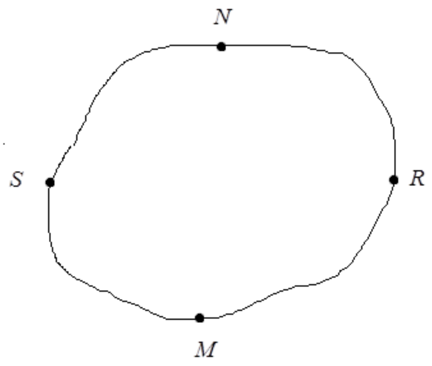


**Рис. 42**

За умовою: $L = MSNRM$ , $\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$. Тому:

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \int\limits_{MSN} Pdx + Qdy + \int\limits_{NRM} Pdx + Qdy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_{MSN} Pdx + Qdy = -\int\limits_{NRM} Pdx + Qdy \Rightarrow \int\limits_{MSN} Pdx + Qdy + \int\limits_{MRN} Pdx + Qdy,$$

що й треба було довести.

$\underline{2 \Rightarrow 3}$. Нехай інтеграл $\int\limits_{MN} Pdx + Qdy$ не залежить від форми кривої $MN$. Зафіксуємо точку $M(x_0, y_0)$. Тоді цей інтеграл буде деякою функцією $U(x,y)$ координат $(x,y)$ точки $N(x,y)$:

$$U(x,y) = \int\limits_{MN} Pdx + Qdy.$$

Покажемо, що $dU(x,y) = Pdx + Qdy$ в області $D$. Для цього достатньо показати, що

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y).$$

Розглянемо (рис. 43):

$$\Delta_x U = U(x + \Delta x, y) - U(x,y) = \int\limits_{MC} Pdx + Qdy - \int\limits_{MN} Pdx + Qdy =$$

$$= \int\limits_{NC} Pdx + Qdy = \int\limits_x^{x+\Delta x} Pdx = P(x + \theta\Delta x, y)\Delta x, \; 0 < \theta < 1$$

(за умови незалежності інтеграла від шляху інтегрування шлях $NC$ можна вважати прямолінійним, тому $dy = 0$).

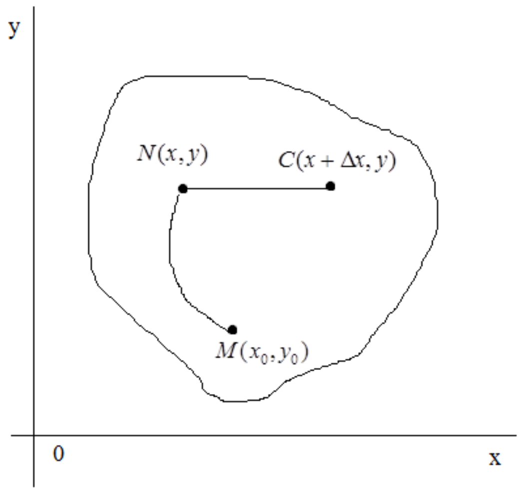


**Рис. 43**

Звідси:

$$\frac{\Delta_x U}{\Delta x} = P(x+\theta\Delta x, y) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x U}{\Delta x} = P(x,y),$$

оскільки за умовою функція $P(x,y)$ неперервна в області $D$. Аналогічно доводиться, що $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$. Отже умову 3) виконано.

<u>$3 \Rightarrow 4$</u>. Нехай існує функція $U(x,y)$ така, що $dU = Pdx + Qdy$, тоді $\frac{\partial U}{\partial x} = P$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$, звідки $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

<u>$4 \Rightarrow 1$</u>. Нехай $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, і $L$ – довільна замкнена крива, яка належить цілком області $D$ і обмежує деяку область $D^* \subset D$. Тоді за формулою Гріна:

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_{D^*} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0.$$

Таким чином, теорему повністю доведено. В умовах цієї теореми, якщо $M(x_0, y_0)$, $N(x_1, y_1)$, то

$$\int_{MN} Pdx + Qdy = U(x_1, y_1) - U(x_0, y_0). \qquad (3.6.1)$$

Формулу (3.6.1) можна розглядати як узагальнення формули Ньютона-Лейбніца на випадок криволінійних інтегралів 2-го роду.

<u>Зауваження</u>. Аналогічним чином можна отримати узагальнення доведеної вище теореми на випадок криволінійного інтеграла 2-го роду по просторовій кривій:

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

**Означення**. Тривимірна область $G$ називається *поверхнево-однозв'язною*, якщо на будь-який кусково-гладкий замкнений контур, який належить $G$, можна «натягнути плівку», яка повністю лежить в $G$.

**Теорема**. Нехай функції $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ неперервні разом зі своїми похідними 1-го порядку в поверхнево-однозв'язній області $G$. Тоді наступні твердження еквівалентні:

1) для довільної замкненої кривої $L \subset G$ виконано:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0;$$

2) криволінійний інтеграл $\int\limits_{MN} Pdx + Qdy + Rdz$ не залежить від форми кривої, що з'єднує точки $M$ і $N$, якщо тільки цей контур цілком належить $G$;

3) вираз $Pdx + Qdy + Rdz$ є повним диференціалом деякої функції $U(x,y,z)$;

4) в усіх точках області $G$ виконано:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \qquad (3.6.2)$$

У цьому випадку, якщо $M(x_0, y_0, z_0), N(x_1, y_1, z_1)$, то

$$\int_{MN} Pdx + Qdy + Rdz = U(x_1, y_1, z_1) - U(x_0, y_0, z_0).$$

*Приклади*

1. Перевірити, що інтеграл не залежить від шляху інтегрування, і обчислити його.

$$\int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} \left(x^4 + 4xy^3\right)dx + \left(6x^2y^2 - 5y^4\right)dy.$$

Маємо: $P = x^4 + 4xy^3$, $Q = 6x^2y^2 - 5y^4$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 12xy^2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 12xy^2$, тобто інтеграл не залежить від шляху інтегрування. Знайдемо функцію $U(x,y)$. Оскільки $\dfrac{\partial U}{\partial x} = P = x^4 + 4xy^3$, то $U(x,y) = \dfrac{x^5}{5} + 2x^2y^3 + c(y)$, де $c(y)$ – довільна функція, що залежить лише від $y$. Звідси маємо: $\dfrac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y^2 + c'(y)$. З іншого боку, $\dfrac{\partial U}{\partial y} = Q$, тому $6x^2y^2 + c'(y) = 6x^2y^2 - 5y^4$, отже, $c'(y) = -5y^4$, і тому $c(y) = -y^5 + c_1$, де $c_1$ – довільна стала. Таким чином:

$$U(x,y)=\frac{x^5}{5}+2x^2y^3-y^5+c_1.$$

Можемо покласти $c_1=0$, тоді $U(x,y)=\frac{x^5}{5}+2x^2y^3-y^5$. І згідно з формулою (3.6.1) дістанемо:

$$\int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)}\left(x^4+4xy^3\right)dx+\left(6x^2y^2-5y^4\right)dy=U(3;0)-U(-2;-1)=62.$$

2. Перевірити, що інтеграл не залежить від шляху інтегрування і обчислити його.

$$\int\limits_{(1;0;-3)}^{(0;4;3)} xdx+ydy-zdz.$$

Маємо: $P=x,\ Q=y,\ R=-z$, і очевидно, що виконано умову (3.6.2). Легко показати, що

$$U(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{2},$$

тому

$$\int\limits_{(1;0;-3)}^{(0;4;3)} xdx+ydy-zdz=U(0;4;3)-U(1;0;-3)=\frac{15}{2}\ .$$

## 3.7. Фізична інтерпретація незалежності криволінійного інтеграла 2-го роду від шляху інтегрування

Нехай на матеріальну точку у тривимірному просторі діє сила $\vec{F}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$. Якщо існує функція $U(x,y,z)$ така, що

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=Q,\quad \frac{\partial U}{\partial z}=R,$$

то відповідне силове поле називається *потенціальним*, а функція $U(x,y,z)$ – *потенціалом*. Очевидно, що тоді $\vec{F}=\overrightarrow{\mathrm{grad}\,U}$. Робота такої сили при переміщенні від точки $M$ до точки $N$

$$A=\int\limits_{MN} Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_{MN} dU(x,y,z)=U(N)-U(M)$$

залежить лише від точок $M$ і $N$ і не залежить від форми контуру, що їх з’єднує.

Такі сили ще називаються консервативними. Робота таких сил по замкненому контуру дорівнює нулю.

*Приклад*. Розглянемо поле *ньютонівського тяжіння*. Якщо в початок координат помістити масу $m$, а в точку $A(x, y)$ одиничну масу, то точка $A$ буде притягатися до початку координат з силою $\vec{F}$, величина якої

$$F = \frac{m}{r^2},$$

де $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – відстань від точки $A$ до початку координат. Напрямні косинуси вектора $\vec{F}$ дорівнюють:

$$\cos\alpha = -\frac{x}{r}, \ \cos\beta = -\frac{y}{r}.$$

Проекції сили $\vec{F}$ на координатні осі дорівнюють:

$$P = \frac{m}{r^2}\left(-\frac{x}{r}\right) = -\frac{mx}{r^3}, \quad Q = \frac{m}{r^2}\left(-\frac{y}{r}\right) = -\frac{my}{r^3}.$$

Розглянемо вираз

$$Pdx + Qdy = -\frac{mx}{r^3}dx - \frac{my}{r^3}dy.$$

Легко перевірити, що цей вираз є повним диференціалом функції:

$$U = \frac{m}{r}.$$

Ця функція називається *ньютонівським потенціалом*. Робота такої сили при переміщенні з точки $M$ в точку $N$ дорівнює:

$$A = \frac{m}{r_N} - \frac{m}{r_M},$$

де $r_M$, $r_N$ – довжини радіусів векторів відповідно точок $M$ і $N$.

# ГЛАВА 4. ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

## 4.1. Поверхневі інтеграли 1-го роду

При розв'язуванні низки задач доводиться розглядати функції, визначені на деякій поверхні. Такими функціями є, наприклад, густина розподілу електричних зарядів на поверхні провідника, поверхнева густина маси, розподіленої на поверхні, швидкість рідини, що протікає через дану поверхню, освітленість поверхні, тощо. Відповідно доводиться мати справу з інтегралами від таких функцій. Зокрема, ті інтеграли, що розглядаються у цьому параграфі, є узагальненням подвійних інтегралів, аналогічним тому, яким криволінійні інтеграли 1-го роду є по відношенню до звичайних визначених інтегралів Рімана.

**Означення**. Поверхня називається *гладкою*, якщо в кожній її точці існує дотична площина, і при переході від точки до точки на поверхні положення дотичної площини змінюється неперервно. Поверхня називається *кусково-гладкою*, якщо вона складається із скінченного числа неперервно сполучених гладких поверхонь.

Нехай $\sigma$ – кусково-гладка поверхня, на якій визначено обмежену функцію $f(M) = f(x, y, z)$, $(M(x, y, z)$ – довільна точка поверхні $\sigma$). Розіб'ємо поверхню $\sigma$ на $n$ довільних частин $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$. Площу частини $\sigma_i$ позначимо як $\Delta\sigma_i$. В кожній частині $\sigma_i$ довільним чином оберемо точку $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ і складемо суму:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta\sigma_i . \qquad (4.1.1)$$

Ця сума називається *інтегральною сумою* для функції $f(x, y, z)$ по поверхні $\sigma$. Легко бачити, що вона будується за тою ж схемою, за якою будувалися інтегральні суми у випадках визначеного інтеграла Рімана, подвійного інтеграла, потрійного інтеграла, криволінійного інтеграла 1-го роду.

Позначимо: $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \operatorname{diam}(\sigma_i)$.

**Означення**. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми (4.1.1) при $\lambda \to 0$, яка не залежить ні від способу розбиття поверхні $\sigma$ на частинні, ні від способу вибору точок $M_i$, то цю границю називають *поверхневим інтегралом 1-го роду* від функції $f(x, y, z)$ по поверхні $\sigma$ і позначають $\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma$.

Тобто за означенням:

$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta\sigma_i. \qquad (4.1.2)$$

У цьому разі функція $f(x,y,z)$ називається *інтегровною на поверхні* $\sigma$, а сама поверхня $\sigma$ – *областю інтегрування.*

Поверхневий інтеграл 1-го роду має низку властивостей, аналогічних відповідним властивостям подвійних інтегралів та криволінійних інтегралів 1-го роду. А саме, якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна на поверхні $\sigma$, то вона інтегровна на цій поверхні, інтеграл від суми двох інтегровних функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій, сталий множник можна виносити за знак інтеграла тощо.

Обчислення поверхневого інтеграла 1-го роду зводиться до обчислення подвійного інтеграла. Нехай гладка поверхня $\sigma$, яку задано рівнянням $z=\varphi(x,y)$, проектується на площину $Oxy$ в область $D$ (рис. 44). Припустимо, що функція $f(x,y,z)$ неперервна на поверхні $\sigma$, а функції $\varphi(x,y)$, $\varphi'_x(x,y)$, $\varphi'_y(x,y)$ неперервні в області $D$. Тоді можна довести справедливість формули:

$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint_{D} f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1+\left(\varphi'_x(x,y)\right)^2+\left(\varphi'_y(x,y)\right)^2}\,dxdy. \qquad (4.1.3)$$

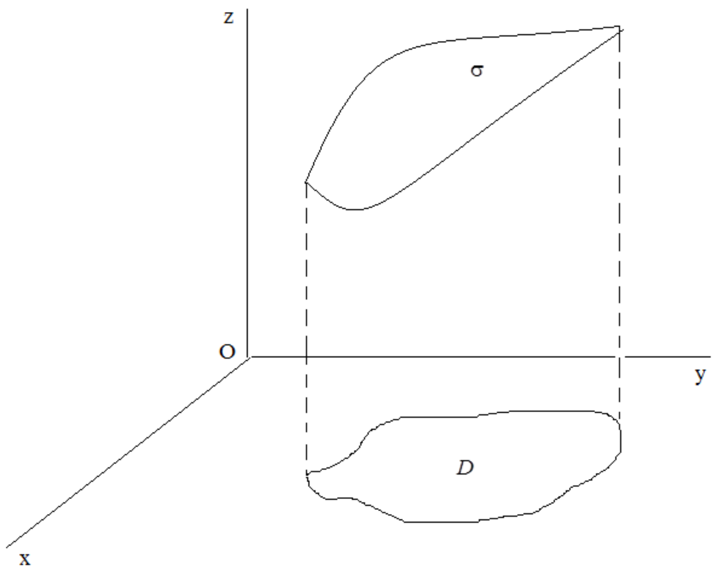


**Рис. 44**

До механічних застосувань поверхневого інтеграла 1-го роду відноситься обчислення маси, координат центру тяжіння, статичних моментів, моментів інерції поверхні за відомою розподіленою на неї густиною $\gamma(x,y,z)$ тощо.

Розглянемо наступну задачу.

Нехай на поверхні $\sigma$ неперервно розподілено масу з заданою в кожній точці поверхні густиною $\gamma(x,y,z)$. Нехай в точці $A(x_0,y_0,z_0)$, що не лежить на поверхні $\sigma$, знаходиться одиниця маси. Треба визначити величину і напрям сили $\vec{F}$, з якою точка $A$ притягається поверхнею $\sigma$.

Якби точка $A$ притягалася лише однією матеріальною точкою $M(x,y,z)$ маси $m$, то величина сили притягання дорівнює:

$$F=\frac{m}{r^2},$$

де $r=|AM|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$. Напрямні косинуси сили $\vec{F}$ співпадають з напрямними косинусами вектора $\vec{r}$ і дорівнюють відповідно $\frac{x-x_0}{r}, \frac{y-y_0}{r}, \frac{z-z_0}{r}$. Отже, проекції сили $\vec{F}$ на осі координат:

$$F_x=m\frac{x-x_0}{r^3},\ F_y=m\frac{y-y_0}{r^3},\ F_z=m\frac{z-z_0}{r^3}.$$

Розглянемо елемент $d\sigma$ поверхні $\sigma$. Відповідний елемент $dm$ маси поверхні дорівнює $\gamma d\sigma$. Тоді сила притягання точки $M$ елементом $d\sigma$ має проекції:

$$dF_x=\gamma\frac{x-x_0}{r^3}d\sigma,\ dF_y=\gamma\frac{y-y_0}{r^3}d\sigma,\ dF_z=\gamma\frac{z-z_0}{r^3}d\sigma.$$

Отже, для всієї поверхні $\sigma$ маємо:

$$F_x=\iint_\sigma\gamma(x,y,z)\frac{x-x_0}{r^3}d\sigma,\quad F_y=\iint_\sigma\gamma(x,y,z)\frac{y-y_0}{r^3}d\sigma,\quad F_z=\iint_\sigma\gamma(x,y,z)\frac{z-z_0}{r^3}d\sigma.$$

*Приклад*. Обчислити $\iint\limits_\sigma\frac{d\sigma}{(1+x+z)^2}$, де $\sigma$ – частина площини $x+y+z=1$, що належить 1-му октанту.

Легко зрозуміти, що проекцією поверхні $\sigma$ на площину $Oxy$ є трикутник $D$, який утворено прямими $x=0,\ y=0,\ x+y=1$. Тому, згідно з формулою (4.1.3), маємо:

$$\iint_\sigma\frac{d\sigma}{(1+x+z)^2}=\sqrt{3}\iint_D\frac{dxdy}{(2-y)^2}=\sqrt{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{dy}{(2-y)^2}=\sqrt{3}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right).$$

### 4.2. Поверхневі інтеграли 2-го роду. Означення і властивості

Введемо поняття *сторони поверхні*. Візьмемо на гладкій поверхні $\sigma$ довільну точку $M$, проведемо в цій точці нормаль $\vec{n}$ певного напряму (одного з двох можливих) і розглянемо на поверхні $\sigma$ довільний замкнений контур $L$, який проходить через точку $M$ і не перетинає межі поверхні $\sigma$ (рис. 45).

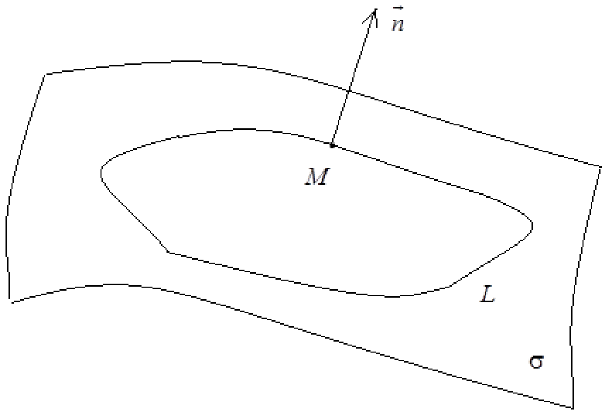


**Рис. 45**

Переміщатиме точку $M$ вздовж контуру $L$ разом з вектором $\vec{n}$ так, щоб вектор $\vec{n}$ весь час залишався нормаллю до поверхні $\sigma$. Тоді при обході контуру $L$ ми можемо повернутися в точку $M$ з тим самим, або з протилежним напрямом нормалі. Якщо у довільну точку $M$ поверхні $\sigma$ після обходу довільного замкненого контуру $L$, який розміщено на поверхні $\sigma$ і не перетинає її межу, ми повертаємось з початковим напрямом нормалі $\vec{n}$, то поверхню називають *двосторонньою*. Прикладами таких поверхонь є площина, сфера, конус тощо. Якщо при обході контуру напрям нормалі змінюється на протилежний, то поверхня називається *односторонньою*. Прикладом такої поверхні є так званий лист Мебіуса (рис. 46).

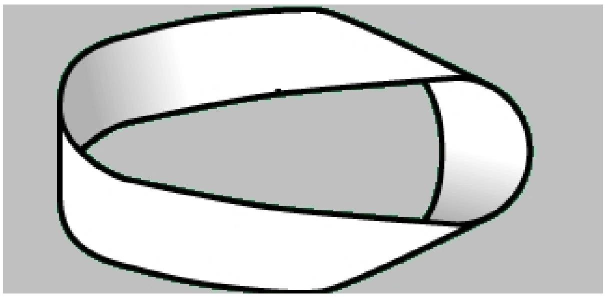

**Рис. 46**

Двосторонню поверхню називають *орієнтованою*, а вибір певної її сторони – *орієнтацією поверхні*. Якщо поверхня замкнена і нормаль напрямлена всередину об'єма, обмеженого поверхнею, то дістаємо *внутрішню сторону* поверхні, а якщо нормаль напрямлена зовні цього об'єму, то дістаємо *зовнішню сторону*. Надалі розглядатимемо тільки двосторонні поверхні.

Нехай $\sigma$ – орієнтована поверхня, обмежена контуром $L$, який не має точок самоперетину. Будемо обходити контур у додатному напрямі, тобто проти годинникової стрілки (якщо змінити орієнтацію поверхні, то додатний напрям зміниться на від'ємний). Припустимо, що поверхню $\sigma$ задано рівнянням $z = f(x, y)$, і $R(x, y, z)$ – обмежена функція, яку визначено на поверхні $\sigma$. Розіб'ємо поверхню $\sigma$ довільним чином на $m$ частин $\sigma_1, ..., \sigma_m$. Позначимо $D_k = np_{Oxy}\sigma_k$, а як $\Delta s_k$ позначимо площу частини $D_k$, яку взято зі знаком «плюс», якщо обрано зовнішню сторону поверхні $\sigma$, і зі знаком «мінус», якщо внутрішню. Виберемо в кожній частині $\sigma_k$ довільну точку $M_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ і складемо інтегральну суму:

$$\sum_{k=1}^{n} R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta s_k . \tag{4.2.1}$$

Позначимо: $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \mathrm{diam}(\sigma_k)$.

**Означення**. Якщо існує скінченна границя суми (4.2.1) при $\lambda \to 0$, яка не залежить ні від способу розбиття поверхні $\sigma$ на частинні, ні від способу вибору точок $M_k$, то така границя називається *поверхневим інтегралом 2-го роду* від функції $R(x, y, z)$ по поверхні $\sigma$ і позначається як $\iint\limits_{\sigma} R(x, y, z)\, dxdy$.

Таким чином, за означенням:

$$\iint\limits_{\sigma} R(x, y, z)\, dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta s_k . \tag{4.2.2}$$

Поверхню $\sigma$ можна проектувати на координатні площини $Oxz$ та $Oyz$. Тоді маємо ще два поверхневі інтеграли:

$$\iint\limits_{\sigma} P(x, y, z) dydz, \ \iint\limits_{\sigma} Q(x, y, z) dxdz ,$$

де функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ – функції, визначені в точках поверхні $\sigma$.

Нехай $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – напрямні косинуси нормалі $\vec{n}$. Тоді $dxdy = \cos\gamma d\sigma$, $dxdz = \cos\beta d\sigma$, $dydz = \cos\alpha d\sigma$. Звідси випливає справедливість формул:

$$\iint\limits_{\sigma} R(x, y, z) dxdy = \iint\limits_{\sigma} R(x, y, z)\cos\gamma d\sigma ,$$

$$\iint\limits_{\sigma} Q(x, y, z) dxdz = \iint\limits_{\sigma} Q(x, y, z)\cos\beta d\sigma ,$$

$$\iint\limits_{\sigma} P(x, y, z) dydz = \iint\limits_{\sigma} P(x, y, z)\cos\alpha d\sigma ,$$

тобто отримуємо зв'язок між поверхневими інтегралами 1-го та 2-го роду.

Наведені поверхневі інтеграли можна об'єднати в один:

$$\iint_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint_{\sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma. \qquad (4.2.3)$$

Розглянемо питання про фізичний зміст поверхневого інтеграла 2-го роду. Нехай вектор $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ є швидкість рідини. Тоді кількість $\Pi$ рідини, що протікає через поверхню $\sigma$ за одиницю часу, називається течією вектора $\vec{F}$ через поверхню $\sigma$ і знаходиться за формулою:

$$\Pi = \iint_{\sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma.$$

## 4.3. Обчислення поверхневого інтеграла 2-го роду

Перейдемо до питання обчислення поверхневого інтеграла 2-го роду. Нехай функція $R(x, y, z)$ неперервна в усіх точках гладкої поверхні $\sigma$, яку задано рівнянням $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{XY}$, де $D_{XY} = np_{Oxy}\sigma$. Оберемо верхню сторону поверхні, тобто ту, де нормаль утворює гострий кут з віссю $Oz$. Тоді $\Delta s_k > 0$ $(k = 1, 2, ..., n)$, і для інтегральної суми (4.2.1) маємо:

$$\sum_{k=1}^{n} R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta s_k = \sum_{k=1}^{n} R(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k))\Delta s_k.$$

Перейшовши до границі при $\lambda \to 0$, дістанемо:

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z)dxdy = \iint_{D_{XY}} R(x, y, z(x, y))dxdy.$$

Якщо обрати нижню сторону поверхні (нормаль утворює тупий кут з віссю $Oz$), то

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z)dxdy = -\iint_{D_{XY}} R(x, y, z(x, y))dxdy.$$

Аналогічно:

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z)dydz = \pm\iint_{D_{YZ}} P(x(y, z), y, z)dydz,$$

$$\iint_{\sigma} Q(x, y, z)dxdz = \pm\iint_{D_{XZ}} Q(x, y(x, z), z)dxdz.$$

Тут $D_{YZ}, D_{XZ}$ – проекції поверхні $\sigma$ відповідно на площини $Oyz, Oxz$. Знак «плюс» або «мінус» обирається в залежності від того, гострий або тупий кут утворює нормаль до поверхні відповідно з осями $Ox, Oy$.

*Приклади*

1. Обчислити

$$I = \iint_{\sigma} xz^2dxdy + xdydz + dxdz,$$

де $\sigma$ – зовнішня сторона частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, яка розташована у 1-му октанті.

Обчислимо спочатку $\iint_{\sigma} xz^2dxdy$. Проекцією $D_{XY}$ поверхні $\sigma$ на площину $Oxy$ є чверть круга $x^2 + y^2 = 1$, яка розташована у 1-му квадранті цієї площини. Нормаль до поверхні утворює гострий кут з віссю $Oz$. Тому:

$$\iint_{\sigma} xz^2dxdy = \iint_{D_{XY}} x(1 - x^2 - y^2)dxdy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \rho\cos\varphi(1-\rho^2)\rho d\rho =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 (\rho^2 - \rho^4)d\rho = \frac{2}{15}.$$

Тепер обчислимо $\iint_{\sigma} xdydz$. Проекцією $D_{YZ}$ поверхні на площину $Oyz$ є чверть круга $y^2 + z^2 = 1$, яка розташована в 1-му квадранті цієї площини. Нормаль до поверхні утворює гострий кут з віссю $Ox$. Тому:

$$\iint_{\sigma} xdydz = \iint_{D_{YZ}} \sqrt{1 - y^2 - z^2}dydz = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\rho d\rho = \frac{\pi}{6}.$$

І нарешті обчислимо $\iint_{\sigma} dxdz$. Проекцією $D_{XZ}$ поверхні на площину $Oxz$ є чверть круга $x^2 + z^2 = 1$, яка розташована у 1-му квадранті цієї площини. Нормаль до поверхні утворює гострий кут з віссю $Oy$. Тому:

$$\iint_{\sigma} dxdz = \iint_{D_{XZ}} dxdz = \frac{\pi}{4}.$$

Отже, остаточно маємо:

$$I = \frac{2}{15} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{2}{15} + \frac{5\pi}{12}.$$

2. Обчислити

$$I = \iint_{\sigma} xdxdz,$$

де $\sigma$ – зовнішня сторона трикутника, утвореного перетином площини $2x - 2y + z - 2 = 0$ з координатними площинами (рис. 47).

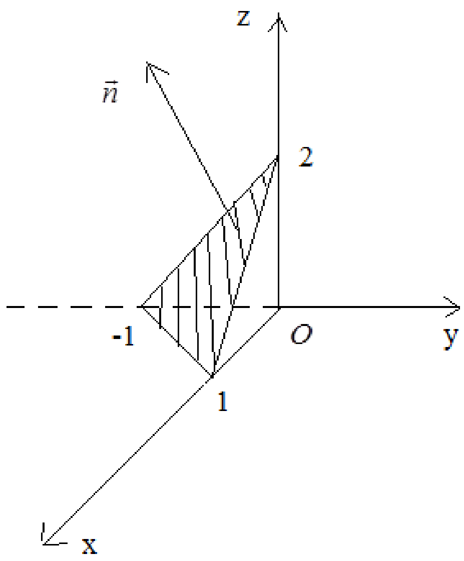


**Рис. 47**

Проекцією $D_{XZ}$ поверхні $\sigma$ на площину $Oxz$ є трикутник, який утворено прямими $x=0,\ z=0,\ 2x+z-2=0$. Нормаль $\vec{n}$ до поверхні утворює тупий кут з віссю $Oy$. Тому:

$$I=-\iint\limits_{D_{XZ}} xdxdz=-\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{2-2x} xdz=-\frac{1}{3}$$

(обчислення повторного інтеграла перевірте самостійно).

## 4.4. Формула Остроградського-Гаусса

Формула Остроградського-Гаусса встановлює зв'язок між поверхневим інтегралом 2-го роду по замкненій поверхні і потрійним інтегралом по просторовій області, яка обмежена цією поверхнею.

Нехай замкнена область $G\subset\mathbb{R}^3$ обмежена замкненою поверхнею $\sigma$, причому знизу та зверху обмежена гладкими поверхнями $\sigma_1$ та $\sigma_2$, рівняння яких відповідно $z=z_1(x,y)$ та $z=z_2(x,y)$, і $D_{XY}=np_{Oxy}G$ (рис. 48). Нехай в області $G$ визначено неперервну функцію $R(x,y,z)$, яка в цій області має неперервну похідну $\dfrac{\partial R}{\partial z}$.

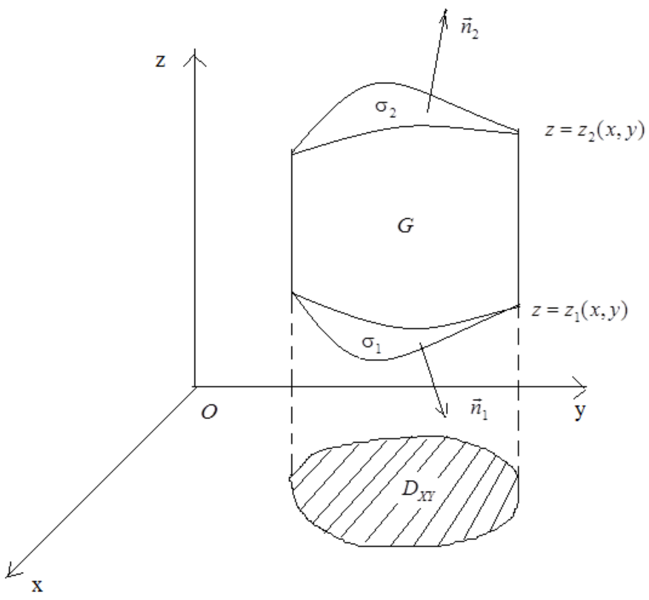


**Рис. 48**

Розглянемо потрійний інтеграл

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_{D_{XY}} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint_{D_{XY}} R(x, y, z_2(x, y))dxdy - \iint_{D_{XY}} R(x, y, z_1(x, y))dxdy.$$

У правій частині цієї рівності перший подвійний інтеграл дорівнює поверхневому інтегралу від функції $R(x, y, z)$ по зовнішній стороні поверхні $\sigma_2$ (тут нормаль $\vec{n}_2$ до цієї сторони утворює гострий кут з віссю $Oz$). Другий подвійний інтеграл дорівнює поверхневому інтегралу від функції $R(x, y, z)$ по зовнішній стороні поверхні $\sigma_1$, який взято зі знаком «мінус», оскільки нормаль $\vec{n}_1$ до цієї сторони утворює тупий кут з віссю $Oz$. Отже:

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_{\sigma_1} R(x, y, z)dxdy + \iint_{\sigma_2} R(x, y, z)dxdy = \iint_{\sigma} R(x, y, z)dxdy. \quad (4.4.1)$$

Аналогічно у припущенні, що функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ неперервні в області $G$, дістанемо формули:

$$\iiint_G \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint_{\sigma} P(x, y, z)dydz, \quad (4.4.2)$$

$$\iiint_G \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint_{\sigma} Q(x, y, z)dxdz. \quad (4.4.3)$$

Склавши ліві та праві частини рівностей (4.4.1), (4.4.2), (4.4.3), дістанемо формулу:

$$\iiint_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint_\sigma Pdydz + Qdxdz + Rdxdy, \qquad (4.4.4)$$

яку називають формулою Остроградського-Гаусса. Використання цієї формули дозволяє у низці випадків значно полегшити обчислення поверхневих інтегралів 2-го роду по замкненим поверхням.

*Приклад*. Обчислити поверхневий інтеграл

$$I = \iint_\sigma x^2 dydz + 3ydxdz - 2xzdxdy,$$

де $\sigma$ – зовнішня сторона поверхні піраміди, утвореної площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$ (рис. 25а).

Маємо: $P = x^2$, $Q = 3y$, $R = -2xz$; $\frac{\partial P}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = 3$, $\frac{\partial R}{\partial z} = -2x$. Згідно з формулою (4.4.4):

$$I = \iiint_G (2x + 3 - 2x) dxdydz = 3\iiint_G dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \frac{1}{2}.$$

Нескладно переконатися в тому, що безпосереднє обчислення цього поверхневого інтеграла потребує значно більшого обсягу обчислень.

### 4.5. Формула Стокса

Формула Стокса встановлює зв'язок між поверхневим і криволінійним інтегралами. Нехай $\sigma$ – поверхня, яку задано рівнянням $z = f(x, y)$, причому функції $f(x, y)$, $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ неперервні в області $D$, що є проекцією поверхні $\sigma$ на площину $Oxy$. Нехай $L$ – контур, який обмежує поверхню $\sigma$, а $l$ – проекція цього контуру на площину $Oxy$. Таким чином, контур $l$ є межею області $D$.

Виберемо верхню сторону поверхні $\sigma$ (рис. 49). Нехай функція $P(x, y, z)$ неперервна разом зі своїми частинними похідними 1-го порядку на поверхні $\sigma$. Розглянемо криволінійний інтеграл 2-го роду:

$$\oint_L P(x, y, z) dx.$$

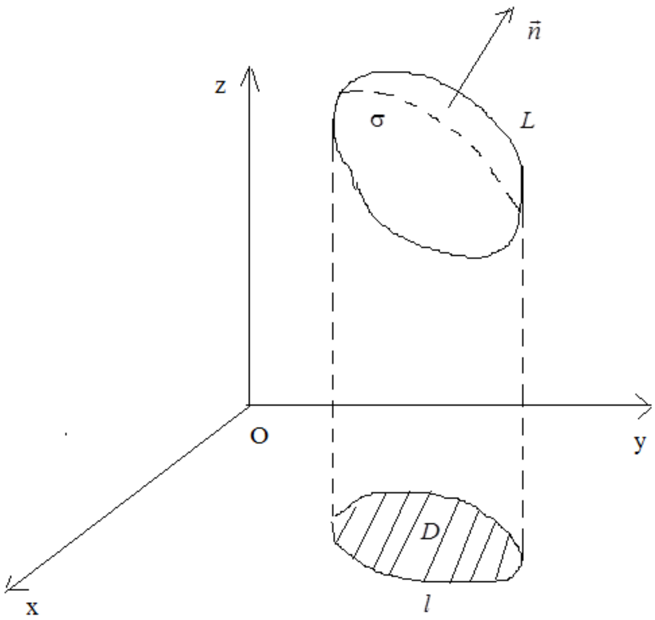


**Рис. 49**

Оскільки контур $L$ лежить на поверхні $\sigma$, то координати його точок задовольняють рівняння $z = f(x, y)$, і тому значення функції $P(x, y, z)$ в точках контуру $L$ дорівнюють значенням функції $P(x, y, f(x, y))$ у відповідних точках контуру $l$. Звідси випливає, що

$$\oint_L P(x, y, z)dx = \oint_l P(x, y, f(x, y))dx.$$

До інтегралу, що стоїть у правій частині цієї рівності, застосуємо формулу Гріна (див. п. 3.5).

$$\oint_l P(x, y, f(x, y))dx = -\iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy.$$

Оскільки розглядаємо верхню сторону поверхні $\sigma$, то $\cos\gamma > 0$, де $\gamma$ – кут між нормаллю $\vec{n}$ до поверхні і віссю $Oz$ (у даному випадку цей кут гострий). Оскільки напрям нормалі до поверхні $z = f(x, y)$ співпадає з напрямом градієнта функції $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, то можемо у якості нормалі взяти саме градієнт, і тоді $\vec{n} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right\}$. Нехай $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – напрямні косинуси нормалі. Тоді $\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{\partial f / \partial y}{-1} = -\frac{\partial f}{\partial y}$. Звідси отримуємо:

$$-\iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) dxdy = -\iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \right) dxdy = -\iint_\sigma \left( \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma - \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta \right) d\sigma.$$

Отже:

$$\oint_L P(x,y,z)dx = \iint_\sigma \left( \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma \right) d\sigma .$$

Аналогічно при виконанні відповідних умов доводиться справедливість формул:

$$\oint_L Q(x,y,z)dy = \iint_\sigma \left( \frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha \right) d\sigma ,$$

$$\oint_L R(x,y,z)dz = \iint_\sigma \left( \frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta \right) d\sigma .$$

Додаючи ліві і праві частини трьох останніх рівностей, дістаємо формулу:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_\sigma \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)\cos\alpha + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\cos\beta + \right.$$

$$\left. + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\cos\gamma \right] d\sigma , \qquad (4.5.1)$$

яка називається *формулою Стокса*. Її можна записати у іншому вигляді, більш зручному для запам'ятовування:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_\sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma .$$

За допомогою формули (4.2.3), що пов'язує поверхневі інтеграли 1-го та 2-го роду, формулу Стокса можна також записати з використанням поверхневого інтегралу 2-го роду:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_\sigma \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dxdz + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy .$$

*Приклад*. За допомогою формули Стокса обчислити інтеграл

$$I = \oint_L x^2 y^3 dx + dy + zdz ,$$

де $L$ – коло $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, а поверхня $\sigma$ – верхня сторона півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z > 0$, і обхід контуру $L$ здійснюється у додатному напрямі.

Маємо: $P = x^2 y^3$, $Q = 1$, $R = z$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -3x^2 y^2, \quad \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0 .$$

Проекцією $D_{XY}$ поверхні $\sigma$ на площину $Oxy$ є круг $x^2+y^2\le 1$. За формулою Стокса дістаємо:

$$I=-3\iint_{\sigma}x^2y^2dxdy=-3\iint_{D_{XY}}x^2y^2dxdy=-3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho^5\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\rho=-\frac{\pi}{8}$$

(обчислення повторного інтеграла перевірте самостійно).

# ГЛАВА 5. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОГО АНАЛІЗУ І ТЕОРІЇ ПОЛЯ

## 5.1. Скалярні та векторні поля

Застосування інтегрального числення функцій багатьох змінних до задач механіки та математичної фізики часто зручно проводити у векторній формі. *Векторний аналіз* – це розділ математики, який дає саме векторну інтерпретацію теорії, яку викладено у попередніх главах. У відомому «Курсі загальної фізики» І. В. Савельєва відмічається, що не треба шкодувати часу на вивчення основних понять та співвідношень векторного аналізу. Це дає можливість отримати результати у більш простому та витонченому вигляді. І справжнє розуміння, наприклад, законів електромагнітного поля без використання понять векторного аналізу неможливо. Навіть висловлюється думка, що ці поняття більшою мірою є фізичними, ніж математичними.

Якщо з кожною точкою $M$ певної просторової області (зокрема, всього простору) пов'язано деяку скалярну або векторну величину, то кажуть, що в цій області задано *поле* цієї величини (відповідно скалярне або векторне).

Прикладом скалярного поля може бути температурне поле або поле електричного потенціалу.

Якщо положення точки $M$ визначати її координатами в обраній деяким чином системі $Oxyz$, то задання скалярного поля величини $U$ рівносильно заданню числової функції $U(x, y, z)$. Вважатимемо, що ця функція має неперервні частинні похідні за всіма змінними. Якщо вони водночас не перетворюються в нуль, то рівняння

$$U(x, y, z) = C$$

визначає поверхню без особливих точок, яка є поверхнею рівня функції $U(x, y, z)$. Через кожну точку області проходить одна і тільки одна така поверхня. Зрозуміло, що вони між собою не перетинаються.

Прикладом векторного поля може бути силове поле або поле швидкостей. Якщо є система координат, то задання векторного поля величини $\vec{A}$ може бути здійснено заданням її проекції на осі координат:

$$A_x(x, y, z),\ \ A_y(x, y, z),\ \ A_z(x, y, z). \qquad (5.1.1)$$

Вважатимемо, що всі ці функції мають в області неперервні частинні похідні за $x, y, z$

Нехай маємо скалярне поле $U(M) = U(x, y, z)$. Розглянемо градієнт:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}U} = \overrightarrow{\nabla U} = \left\{ \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right\}$$

Напрям градієнта співпадає з напрямом нормалі до поверхні рівня $U(x, y, z) = C$ (див. «Диференціальне числення функцій багатьох змінних»). Таким чином, скалярне поле $U(M)$ породжує векторне поле градієнта $\overrightarrow{\nabla U}$.

*Приклади*

1. Розглянемо точку $M(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Нехай $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$, $r=|\overrightarrow{OM}|=$ $=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Покладемо

$$U(M)=\varphi(r),$$

де $\varphi$ – яка-небудь скалярна функція додатного скалярного аргументу $r$, яка має похідну постійного знаку. Поверхнями рівня, очевидно, будуть сфери радіусу $r$ з центром у початку координат, отже, напрям градієнта співпадає з радіальним або протилежно йому, в залежності від знаку $\varphi'(r)$. Легко зрозуміти, що

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}\varphi(r)}=\varphi'(r)\frac{\vec{r}}{r}.$$

Зокрема,

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}\frac{c}{r}}=-\frac{c}{r^3}\vec{r}\quad (c=\text{const}).$$

Якщо розмістити в точці $O$ масу $m$ і розглянути поле ньютонівського тяжіння, то його напруга $\vec{F}$ в точці $M$ буде

$$\vec{F}=-\frac{m}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}=-\frac{m}{r^3}\cdot\vec{r},$$

і таким чином

$$\vec{F}=\overrightarrow{\operatorname{grad}\frac{m}{r}}. \tag{5.1.2}$$

2. Розглянемо поле температури $U$. Візьмемо елемент $dS$ поверхні з певним чином напрямленою нормаллю $\vec{n}$ і обчислимо кількість $dQ$ тепла, що протекло через цій елемент у напрямі нормалі за нескінченно малий проміжок часу $dt$. Тепло тече від більш нагрітих частин тіла до менш нагрітих, причому тим швидше, чим швидше спадає температура. Зазвичай приймають, що $dQ$ пропорційно $dS, dt$ і $\left|\frac{\partial U}{\partial \vec{n}}\right|$. Позначимо як $k>0$ коефіцієнт пропорційності («коефіцієнт внутрішньої теплопровідності для даного місця»). Тоді можна написати:

$$dQ=-k\cdot dS\cdot dt\cdot\frac{\partial U}{\partial \vec{n}}.$$

Згідно зі сказаним вище $dQ$ буде додатним саме у тому випадку, коли $\frac{\partial U}{\partial \vec{n}}$ від'ємно, тобто коли у напрямі $\vec{n}$ температура $U$ спадає.

### 5.2. Течія вектора через поверхню

Нехай задано векторне поле $\overrightarrow{A(x,y,z)}$, тобто задано функції (5.1.1). Розглянемо деяку поверхню $\sigma$. Оберемо її певну сторону і побудуємо нормаль $\vec{n}$.

Нехай $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – напрямні косинуси вектора $\vec{n}$. Можна вважати вектор $\vec{n}$ одиничним, і тоді $\vec{n} = \{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$, $|\vec{n}| = 1$.

**Означення**. Поверхневий інтеграл 1-го роду

$$\iint_{\sigma} (A_x \cos\alpha + A_y \cos\beta + A_z \cos\gamma) d\sigma = \iint_{\sigma} (\vec{A} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iint_{\sigma} \frac{(\vec{A} \cdot \vec{n})}{|\vec{n}|} d\sigma = \iint_{\sigma} A_n d\sigma$$

називається *течією* векторного поля $\vec{A}$ через поверхню $\sigma$ у вказану сторону.

Надамо гідромеханічну інтерпретацію цього поняття. Розглянемо рух рідини у просторі. Швидкість $\vec{v}$ частини рідини залежить від координат $(x, y, z)$ цієї частини і часу $t$: $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$. Обчислимо кількість рідини, що протікає через поверхню $\sigma$ за нескінченно малий проміжок часу $dt$ (рис. 50).

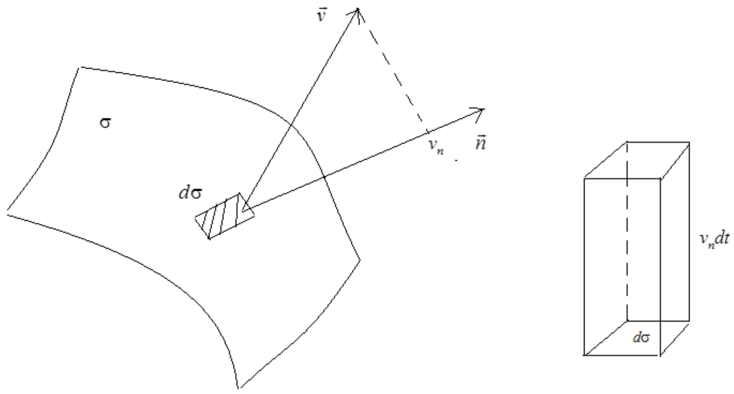


**Рис. 50**

Через елемент $d\sigma$ поверхні протече кількість рідини, що заповнить циліндр (паралелепіпед) з основою $d\sigma$ і висотою $v_n dt$ ($v_n$ – проекція вектора $\vec{v}$ на вектор нормалі $\vec{n}$). Нехай $\rho = \rho(x, y, z, t)$ – густина рідини. Тоді маса рідини, що протікла через елемент $d\sigma$, дорівнює:

$$dm = \rho \cdot d\sigma \cdot v_n dt.$$

Для всієї поверхні $\sigma$ матимемо:

$$dt \iint_{\sigma} \rho v_n d\sigma.$$

Кількість $Q$ рідини, що протікає через поверхню $\sigma$ за одиницю часу, буде:

$$Q = \iint_{\sigma} \rho v_n d\sigma,$$

тобто течія вектора $\rho\vec{v}$ через поверхню $\sigma$. Зокрема, якщо $\rho \equiv 1$, дістаємо, що *течія вектора $\vec{v}$ через поверхню $\sigma$ дорівнює кількості рідини, що протікла через поверхню $\sigma$ за одиницю часу.*

Розглянемо поле ньютонівського тяжіння (п. 5.1):

$$\vec{F} = -\frac{m}{r^3}\vec{r}.$$

Течія цього вектора через поверхню $\sigma$ дорівнює:

$$\iint_\sigma F_n d\sigma = -m \iint_\sigma \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2} d\sigma .$$

## 5.3. Формула Остроградського-Гаусса. Дивергенція

Розглянемо тіло $V$, яке обмежено замкненою поверхнею $\sigma$. Нехай $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до поверхні. Розглянемо течію вектора $\vec{A}$ через поверхню $\sigma$:

$$\iint_\sigma A_n d\sigma .$$

За формулою Остроградського-Гаусса (4.4.4) цю течію можна записати через потрійний інтеграл:

$$\iint_\sigma A_n d\sigma = \iint_\sigma (A_x \cos\alpha + A_y \cos\beta + A_z \cos\gamma) d\sigma = \iint_\sigma A_x dydz + A_y dxdz + A_z dxdy =$$

$$= \iiint_V \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dxdydz .$$

Вираз $\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ називається *дивергенцією* (або *розбіжністю*) вектора $\vec{A}$ і позначається $\operatorname{div}\vec{A}$. Тобто за означенням:

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} .$$

Таким чином, формулу Остроградського-Гаусса може бути переписано у вигляді:

$$\iint_\sigma A_n d\sigma = \iiint_V \operatorname{div}\vec{A} dV . \qquad (5.3.1)$$

Дивергенція є скалярною величиною, але надане її означення формально пов'язане з вибором системи координат. Щоб позбавитись цього недоліку, зробимо таким чином. Окружимо точку $M$ яким-небудь тілом $V$ з поверхнею $\sigma$ та напишемо формулу (5.3.1), поділивши обидві її частини на об'єм $V$ і перейшовши до границі, якщо об'єм $V$ стягується до точки $M$. Тоді за теоремою про середнє значення у правій частині формули як раз й дістанемо дивергенцію вектора $\vec{A}$ в точці $M$. Отже:

$$\operatorname{div}\vec{A} = \lim_{V \to M} \frac{\iint_\sigma A_n d\sigma}{V} . \qquad (5.3.2)$$

Ця рівність також може бути означенням дивергенції, причому в цій формі означення вже не залежить від вибору координатної системи.

Таким чином, тепер векторне поле $\vec{A}$ породжує скалярне поле $\operatorname{div}\vec{A}$.

З використанням *вектора Гамільтона* $\vec{\nabla} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$ дивергенцію формально може бути записано як скалярний добуток цього вектора на вектор $\vec{A}$:

$\operatorname{div}\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$.

Розглянемо:

$$\operatorname{div}\left(\overline{\operatorname{grad}U}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U$$

– оператор Лапласа. Таким чином:

$$\vec{\nabla}\cdot\overline{\nabla U} = \Delta U .$$

*Приклад*. Знайти дивергенцію поля

$$\vec{A} = \frac{-\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

в точці $M(3;4;5)$.

Маємо:

$$A_x = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad A_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad A_z = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = -\frac{y^2}{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial y} = \frac{x^2}{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3}, \quad \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = -\frac{y^2}{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3} + \frac{x^2}{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2x^2}{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3}.$$

Таким чином:

$$\operatorname{div}\vec{A}\Big|_M = \frac{18}{125}.$$

### 5.4. Циркуляція вектора. Формула Стокса. Вихор

Нехай задано векторне поле $\vec{A} = \vec{A}(M)$.

**Означення**. Криволінійний інтеграл

$$\int_l A_x dx + A_y dy + A_z dz = \int_l A_l dl ,$$

який взято по деякій кривій $l$, називається *лінійним інтегралом* від вектора $\vec{A}$ вздовж кривої $l$. Якщо крива $l$ замкнена, то цей інтеграл називають *циркуляцією* вектора $\vec{A}$ вздовж кривої $l$.

Якщо $\vec{A}$ – силове поле, то лінійний інтеграл виражає роботу цього поля при переміщенні точки по кривій $l$.

Розглянемо деяку поверхню $\sigma$, яку обмежено замкненим контуром $l$. Тоді за формулою Стокса (4.5.1) матимемо:

$$\int_l A_l dl = \iint_\sigma \left\{\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cos\gamma\right\} d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{\sigma} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) dxdz + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dxdy .$$

**Означення**. Вектор

$$\overrightarrow{\operatorname{rot} \vec{A}} = \left\{ \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right\} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

називається *ротором* або *вихором* вектора $\vec{A}$.

Таким чином, векторне поле $\vec{A}$ породжує векторне ж поле $\overrightarrow{\operatorname{rot} \vec{A}}$. У векторній формі формула Стокса запишеться так:

$$\int\limits_{l} A_l dl = \iint\limits_{\sigma} \left( \overrightarrow{\operatorname{rot} \vec{A}} \right)_n d\sigma . \qquad (5.4.1)$$

Тобто циркуляція вектора вздовж замкненого контуру дорівнює течії вихора цього вектора через поверхню, яку обмежено цим контуром.

Надане означення ротора також пов'язане з певною системою координат. Щоб позбавитись цього недоліку, візьмемо деякий напрям $\vec{n}$, що виходить з даної точки $M$, і окружимо її в перпендикулярній до $\vec{n}$ площині площадкою $\sigma$, обмеженою контуром $\gamma$ (рис. 51).

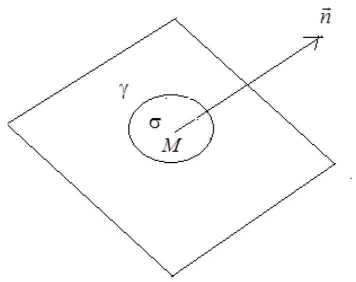


**Рис. 51**

За формулою Стокса маємо:

$$\int\limits_{\gamma} A_\gamma \, d\gamma = \iint\limits_{\sigma} \left( \overrightarrow{\operatorname{rot} \vec{A}} \right)_n d\sigma .$$

Поділимо обидві частини цієї рівності на площу $S(\sigma)$ площадки $\sigma$ і перейдемо до границі, коли площадка $\sigma$ стягується в точку $M$. Дістанемо:

$$\left( \overrightarrow{\operatorname{rot} \vec{A}} \right)_n = \lim_{\sigma \to M} \frac{\int\limits_{\gamma} A_\gamma d\gamma}{S(\sigma)} .$$

Таким чином, ми визначаємо проекцію вектора $\overrightarrow{\operatorname{rot} \vec{A}}$ на будь-яку вісь, а отже, ми можемо визначити сам цей вектор без посилання на обрану систему координат.

*Приклад*. Розглянемо довільний рух деякого твердого тіла. Якщо зафіксувати у ньому точку $O$, то, як доводиться у кинематиці, для будь якого моменту часу поле швидкості $\vec{v}$ точок тіла визначається формулою:

$$\vec{v} = \vec{v}^O + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

де $\vec{v}^O$ – так звана поступальна швидкість, тобто швидкість точки $O$, $\vec{\omega}$ – миттєва кутова швидкість, а $\vec{r}$ – радіус-вектор, що з'єднує точку $O$ з довільною точкою $M$ тіла (рис. 52).

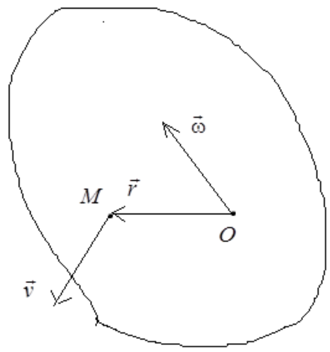


**Рис. 52**

Проекції вектора $\vec{v}$ на осі довільної системи координат $Oxyz$ відповідно дорівнюють $v_x^O + \omega_y z - \omega_z y$, $v_y^O + \omega_z x - \omega_x z$, $v_z^O + \omega_x y - \omega_y x$. Звідси легко отримати:

$$\overrightarrow{\text{rot}\,\vec{v}} = \{2\omega_x,\, 2\omega_y,\, 2\omega_z\},$$

отже, $\vec{\omega} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}\,\vec{v}}$.

Таким чином, з точністю до числового множника вихор поля швидкості $\vec{v}$ дає миттєву кутову швидкість. Саме ця обставина пояснює походження назви «вихор» або «ротор» (*rotation* – обертання).

## 5.5. Потенціальні та соленоїдні поля

**Означення.** Векторне поле $\vec{A}(x, y, z)$ називається *потенціальним*, якщо існує скалярне поле $U(x, y, z)$, для якого поле $\vec{A}$ є градієнтом:

$$\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}\,U}.$$

Тобто:

$$A_x = \frac{\partial U}{\partial x},\ A_y = \frac{\partial U}{\partial y},\ A_z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Це рівносильно тому, що вираз $A_x dx + A_y dy + A_z dz$ є повним диференціалом функції $U(x, y, z)$. З умов (3.6.2) тоді маємо: *для того, щоб поле $\vec{A}$ було потенціа-*

*льним, необхідно і достатньо, щоб в усій області, що розглядається, виконувалися рівності:*

$$\frac{\partial A_z}{\partial y}=\frac{\partial A_y}{\partial z},\ \frac{\partial A_x}{\partial z}=\frac{\partial A_z}{\partial x},\ \frac{\partial A_y}{\partial x}=\frac{\partial A_x}{\partial y}, \qquad (5.5.1)$$

*тобто щоб* $\overrightarrow{\mathrm{rot}\,\vec{A}}=\vec{0}$.

Таким чином, поняття потенціального поля співпадає з поняттям «безвихорового» поля. З формули (5.4.1) випливає, що циркуляція потенціального поля вздовж замкненого контуру дорівнює нулю. А з теореми п. 3.6 – що лінійний інтеграл від потенціального поля вздовж будь-якої кривої, що з'єднує будь-які дві точки поля, не залежить від форми цієї кривої.

Функція $U(x,y,z)$ називається *потенціальною функцією* або просто *потенціалом*. З точністю до довільного сталого доданку вона визначається лінійним інтегралом:

$$U(x,y,z)=\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} A_x dx+A_y dy+A_z dz=\int\limits_{l} A_l dl,$$

який береться від деякої фіксованої точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до змінної точки $M(x,y,z)$ області, що розглядається.

Зокрема, з формули (5.1.2) випливає, що поле ньютонівського тяжіння

$$\vec{F}=-\frac{m}{r^3}\vec{r}$$

є потенціальним, і його потенціал дорівнює $m/r$.

*Приклад*. Довести, що векторне поле

$$\vec{A}=\frac{2}{(y+z)^{1/2}}\vec{i}-\frac{x}{(y+z)^{3/2}}\vec{j}-\frac{x}{(y+z)^{3/2}}\vec{k}$$

є потенціальним і знайти роботу цього поля вздовж шляху, що з'єднує в октанті $x>0, y>0, z>0$ точки $M(1;1;3)$ та $N(2;4;5)$.

Маємо:

$$A_x=\frac{2}{(y+z)^{1/2}},\ A_y=-\frac{x}{(y+z)^{3/2}},\ A_z=-\frac{x}{(y+z)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial z}=-(y+z)^{-3/2},\ \frac{\partial A_x}{\partial y}=-(y+z)^{-3/2},$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x}=-(y+z)^{-3/2},\ \frac{\partial A_y}{\partial z}=\frac{3}{2}x(y+z)^{-5/2},$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial x}=-(y+z)^{-3/2},\ \frac{\partial A_z}{\partial y}=\frac{3}{2}x(y+z)^{-5/2}.$$

Звідси видно, що рівності (5.5.1) виконано, отже, поле є потенціальним. Знайдемо його потенціал $U(x,y,z)$. Оскільки

$$\frac{\partial U}{\partial x}=A_x=\frac{2}{(y+z)^{1/2}},$$

то

$$U(x,y,z)=\frac{2x}{(y+z)^{1/2}}+\varphi(y,z),$$

де $\varphi(y,z)$ – поки невідома функція. Далі:

$$\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{x}{(y+z)^{3/2}}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}=A_y=-\frac{x}{(y+z)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}=-\frac{x}{(y+z)^{3/2}}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}=A_z=-\frac{x}{(y+z)^{3/2}}.$$

Отже, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0$, тобто $\varphi(y,z)=\mathrm{const}$. Таким чином, з точністю до сталого доданку:

$$U(x,y,z)=\frac{2x}{(y+z)^{1/2}}.$$

Робота поля дорівнює:

$$A=\int\limits_{(1;1;3)}^{(2;4;5)}A_x dx+A_y dy+A_z dz=U(2;4;5)-U(1;1;3)=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}.$$

**Означення**. Векторне поле $\vec{A}(x,y,z)$ називається *соленоїдним* (від грецького $\sigma o\lambda\varepsilon\nu$ – трубка), якщо існує векторне поле $\vec{B}(x,y,z)$, для якого поле $\vec{A}$ є ротором:

$$\vec{A}=\overrightarrow{\mathrm{rot}\,\vec{B}}.$$

Ця векторна рівність еквівалентна наступним трьом скалярним рівностям:

$$A_x=\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z},\ A_y=\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x},\ A_z=\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\ . \tag{5.5.2}$$

Вектор $\vec{B}$ називається *векторним потенціалом* поля $\vec{A}$.

**Теорема.** *Для того, щоб поле $\vec{A}$ було соленоїдним, необхідно і достатньо, щоб в усій області, що розглядається, виконувалася рівність:*

$$\mathrm{div}\,\vec{A}=0. \tag{5.5.3}$$

**Доведення.** 1. Необхідність. Нехай $\vec{A}=\overrightarrow{\mathrm{rot}\,\vec{B}}$. Тоді:

$$\mathrm{div}\,\vec{A}=\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}\,\vec{B}}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 B_z}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 B_y}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 B_x}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 B_z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 B_y}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 B_x}{\partial y\partial z}=0.$$

2. Достатність. Нехай $\mathrm{div}\,\vec{A}=0$. Тобто:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=0.$$

Підберемо функції $B_x$, $B_y$, $B_z$ так, щоб вони задовольняли рівняння (5.5.2). Покладемо $B_z\equiv 0$. Тоді перші два з рівнянь (5.5.2) набудуть вигляду:

$$-\frac{\partial B_y}{\partial z} = A_x,\ \frac{\partial B_x}{\partial z} = A_y.$$

Звідси отримуємо:

$$B_y = -\int_{z_0}^{z} A_x(x,y,z)dz + \varphi(x,y),\ B_x = \int_{z_0}^{z} A_y(x,y,z)dz, \tag{5.5.4}$$

де $z_0$ – довільне значення змінної $z$, а $\varphi(x,y)$ – функція двох змінних, що підлягає визначенню. Диференцюючи першу з рівностей (5.5.4) за змінною $x$, а другу – за змінною $y$, дістанемо:

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = -\int_{z_0}^{z} \frac{\partial A_x}{\partial x} dz + \frac{\partial \varphi}{\partial x},\ \frac{\partial B_x}{\partial y} = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial A_y}{\partial y} dz.$$

З останньої з рівностей (5.5.2) тоді отримаємо:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \int_{z_0}^{z} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) dz = A_z(x,y,z).$$

Оскільки $\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} = -\frac{\partial A_z}{\partial z}$, то $\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial A_z}{\partial z} dz = A_z(x,y,z)$, звідки дістаємо:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = A_z(x,y,z_0),$$

і отже:

$$\varphi(x,y) = \int_{x_0}^{x} A_z(x,y,z_0)dx + \psi(y),$$

де $\psi(y)$ – довільна функція змінної $y$.

Таким чином, з рівнянь (5.5.2) визначено всі три функції $B_x$, $B_y$, $B_z$, отже, достатність, а разом з нею і твердження теореми доведено.

З формули Гаусса-Остроградського (5.3.1) випливає, що умова (5.5.3) рівносильна умові рівності нулю течії вектора $\vec{A}$ через будь-яку замкнену поверхню $\sigma$, що обежує деяке тіло $V$.

Розглянемо тепер в якості тіла $V$ відрізок *векторної трубки* (рис. 53) між її довільними перерізами $\sigma_1$ та $\sigma_2$; бічну поверхню трубки позначимо як $\sigma_3$.

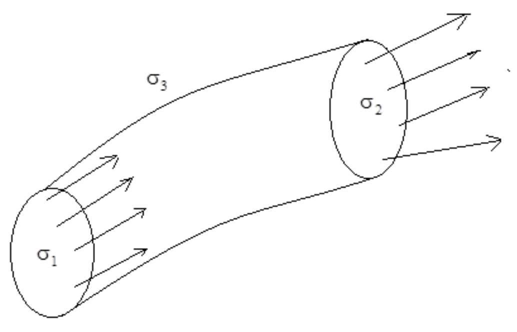


**Рис. 53**

Тоді у випадку соленоїдного поля $\vec{A}$ матимемо:

$$\left\{ \iint\limits_{\sigma_1} + \iint\limits_{\sigma_2} + \iint\limits_{\sigma_3} \right\} A_n d\sigma = 0,$$

причому нормаль $\vec{n}$ напрямлено зовні до тіла. Вздовж поверхні $\sigma_3$ очевидно $A_n = 0$. Тепер у перерізі $\sigma_1$ змінимо напрям нормалі так, щоб він співпадав з напрямом нормалі до $\sigma_3$ (рис. 52). Тоді отримаємо:

$$\iint\limits_{\sigma_1} A_n d\sigma = \iint\limits_{\sigma_3} A_n d\sigma.$$

Таким чином, ми отримуємо наступну властивість соленоїдного поля: *течія вектора через поперечні перерізи векторної трубки зберігає сталу величину*; цю величину називають *інтенсивністю* векторної трубки.

Легко переконатися в тому, що з іншого боку ця властивість цілком характеризує соленоїдне поле. Це випливає з формули (5.3.2) для дивергенції: якщо у якості тіла $V$, що окружає точку $M$, взяти саме відрізок векторної трубки, то $\iint\limits_{\sigma} A_n d\sigma = 0$, а тоді і $\operatorname{div}\vec{A} = 0$.

Якщо повернутися до гідромеханічної інтерпретації векторного поля, то отримаємо, що *у випадку нестискучої рідини та при відсутності витоків (*$\operatorname{div}\vec{A} = 0$*) витрата рідини через поперечний переріз векторної трубки завжди має одне й те ж значення для всіх перерізів.*

## 5.6. Деякі формули векторного аналізу

Тут ми вкажемо деякі важливі співвідношення, що пов'язують введені вище поняття.

1. $\overrightarrow{\operatorname{rot}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}U}\right)} = \vec{0}$.

Дійсно, поле $\overrightarrow{\operatorname{grad}U}$, очевидно, потенціальне, а ротор потенціального поля дорівнює нулю.

2. $\operatorname{div}\overrightarrow{\operatorname{rot}\vec{A}} = 0$.

Цю рівність ми довели вище (див. (5.5.3)).

3. $\operatorname{div}\overrightarrow{\operatorname{grad}U} = \Delta U$.

Цю рівність доведено у п. 5.3.

Введемо для вектора $\vec{A}(x,y,z) = \left\{A_x(x,y,z), A_y(x,y,z), A_z(x,y,z)\right\}$ вектор $\Delta\vec{A} = \left\{\Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z\right\}$. Тоді:

4. $\overrightarrow{\operatorname{rot}\overrightarrow{\operatorname{rot}\vec{A}}} = \overrightarrow{\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}} - \Delta\vec{A}$.

Дійсно, знайдемо:

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{A}} = \left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right),\right.$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\right\} =$$

$$= \left\{\frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial x},\right.$$

$$\left.\frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial y}\right\};$$

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right),\right.$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\right\} = \left\{\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x},\right.$$

$$\left.\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right\};$$

$$\Delta\vec{A} = \left\{\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right\}.$$

З цих рівностей й випливає потрібне.

Наступні формули наводимо без доведення, вони перевіряються безпосереднім обчисленням.

5. Якщо $f(x, y, z)$ – скалярне поле, $\vec{A}(x, y, z)$ – векторне, то $\operatorname{div}\left(f\vec{A}\right) = f \operatorname{div}\vec{A} + \overrightarrow{\operatorname{grad} f} \cdot \vec{A}$.

6. Якщо $\vec{A} \times \vec{B}$ – векторний добуток векторів $\vec{A}$ і $\vec{B}$, то $\operatorname{div}\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}\vec{A}} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}\vec{B}}$.

7. $\overrightarrow{\operatorname{rot}\left(f\vec{A}\right)} = \overrightarrow{\operatorname{grad} f} \times \vec{A} + f\overrightarrow{\operatorname{rot}\vec{A}}$.

8. Якщо $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ – скалярні функції, то $\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2\overrightarrow{\operatorname{grad} f} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} g}$.

## КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які множини називаються відкритими, а які – замкненими?
2. Що називається подвійним інтегралом від функції $z = f(x, y)$ по області $D$? У чому полягає його геометричний зміст та фізичний зміст?
3. Які достатні умови існування подвійного інтеграла?
4. Яка область називається стандартною 1-го типу, і яка область називається стандартною 2-го типу?
5. Як обчислюється подвійний інтеграл по стандартним областям? За яким принципом розставляються межі інтегрування у повторному інтегралі? Які існують можливості для обчислення подвійного інтегралу, якщо область не є стандартною?
6. Сформулювати теорему про заміну змінних у подвійному інтегралі.
7. Чому дорівнює якобіан перетворення при переході у подвійному інтегралі до полярних координат?
8. За яким принципом розставляються межі інтегрування у повторному інтегралі при переході до полярних координат?
9. Що таке невласні подвійні інтеграли I роду?
10. Яка відмінність зв’язку між збіжністю невласного подвійного інтеграла від функції $f(x, y)$ і функції $|f(x, y)|$; від зв’язку між збіжністю невласного інтеграла від функції однієї змінної $f(x)$ і функції $|f(x)|$?
11. Які існують геометричні застосування подвійного інтеграла?
12. Які існують механічні застосування подвійного інтеграла?
13. Що називається потрійним інтегралом від функції $u = f(x, y, z)$ по області $V$? Які необхідні умови його існування? Які достатні умови?
14. Як обчислюється потрійний інтеграл у випадку стандартних областей?
15. Як здійснюється перехід у потрійному інтегралі до сферичних і циліндричних координат? Чому дорівнює якобіан перетворення у кожному з цих випадків?
16. Які існують геометричні застосування потрійного інтеграла?
17. Які існують механічні застосування потрійного інтеграла?
18. Що таке криволінійний інтеграл 1-го роду. Як він обчислюється?
19. Які існують геометричні застосування криволінійного інтеграла 1-го роду? Які існують його механічні застосування?
20. Що таке криволінійний інтеграл 2-го роду. Як він обчислюється? У чому полягає його фізичний зміст?
21. За яких умов криволінійний інтеграл 2-го роду не залежить від шляху інтегрування? Що означають ці умови з фізичної точки зору?
22. Що таке поверхневий інтеграл 1-го роду? Як він обчислюється?
23. Які існують механічні застосування поверхневих інтегралів 1-го роду?
24. Які поверхні називаються односторонніми, а які двосторонніми?
25. Що таке поверхневий інтеграл 2-го роду, які його основні властивості?
26. Як обчислюється поверхневий інтеграл 2-го роду?

27. Якою формулою задається зв'язок між потрійним інтегралом по області $V$ і поверхневим інтегралом 2-го роду по поверхні, що цю область обмежує?
28. Якою формулою задається зв'язок між поверхневим інтегралом 2-го роду по поверхні $\sigma$ і криволінійним інтегралом 2-го роду по контуру, що цю поверхню обмежує?
29. Що таке скалярне поле? Що таке векторне поле? Наведіть відповідні приклади?
30. Що називається течією векторного поля через поверхню?
31. Що таке дивергенція вектора?
32. Якою формулою встановлюється зв'язок між течією вектора через поверхню та дивергенцією цього вектора?
33. Що таке циркуляція вектора?
34. Що таке ротор вектора?
35. Якою формулою встановлюється зв'язок між циркуляцією вектора по замкненому контуру і ротором цього вектора?
36. Яке векторне поле називається потенціальним? Наведіть відповідні приклади? Яка необхідна і достатня умова потенціальності поля?
37. Яке векторне поле називається соленоїдним? Яка необхідна та достатня умова того, щоб поле було соленоїдним?

## *ВПРАВИ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ*

**1**. Обчислити повторні інтеграли.

1) $\int_0^1 dx\int_1^3 (x+y)dy$; 2) $\int_{-1}^2 dy\int_{-2}^1 \left(2x^3-3y^2\right)dx$; 3) $\int_1^3 dy\int_0^2 \sqrt{xy}dx$; 4) $\int_0^1 dx\int_{-1}^0 xe^{xy}dy$;

5) $\int_3^4 dx\int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$; 6) $\int_{-4}^1 dx\int_{3x}^{4-x^2} (y-x)dy$; 7) $\int_0^2 dx\int_{x/2}^x \frac{xdy}{x^2+y^2}$; 8) $\int_0^{2\pi} dx\int_0^{2+\sin x} ydy$;

9) $\int_0^1 dy\int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} dx$; 10) $\int_0^{\pi/2} d\varphi\int_0^{a\cos\varphi} \rho\sin\varphi d\rho$; 11) $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dy$.

**2**. Обчислити подвійні інтеграли по прямокутним областям інтегрування $D$, що задано нерівностями в дужках.

1) $\iint\limits_D xy(x-y)dxdy \quad (0\le x\le 1, 1\le y\le 3)$; 2) $\iint\limits_D e^{x+y}dxdy \ (-1\le x\le 0, 0\le y\le 2)$;

3) $\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}dxdy \ (0\le x\le 1, 0\le y\le 1)$; 4) $\iint\limits_D y\cos^2 xdxdy \ (0\le x\le 2\pi, 0\le y\le a)$;

5) $\iint\limits_D \ln(x+y)dxdy \ (1\le x\le 2,\ 0\le y\le 1)$; 6) $\iint\limits_D x^2ye^{xy}dxdy \ (0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2)$.

**3**. Записати подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ у вигляді повторного,

а) вважаючи зовнішній інтеграл за змінною $x$, а внутрішній за змінною $y$;

б) вважаючи зовнішній інтеграл за змінною $y$, а внутрішній за змінною $x$.

1) $D$ – прямокутник з вершинами $A(1;1)$, $B(1;3)$, $C(4;3)$, $E(4;1)$;

2) $D$ – трикутник з вершинами $A(1;0)$, $B(3;0)$, $C(3;4)$;

3) $D$ – трапеція з вершинами $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(1;1)$, $C(0;1)$;

4) $D$ – паралелограм з вершинами $A(1;2)$, $B(2;4)$, $C(2;7)$, $E(1;5)$;

5) $D$ – фігура, обмежена лініями $y=0,\ y=2x,\ x=3$;

6) $D$ – фігура, обмежена лініями $x=0,\ y=0,\ 2x+3y=6$;

7) $D$ – фігура, обмежена кривою $x^2+y^2-4x=0$;

8) $D$ – фігура, що міститься у першому квадранті та обмежена лініями $y=x$, $x^2+y^2=2$, $y=0$;

9) $D$ – фігура, обмежена лініями $x=0,\ y=x^2,\ y=2-x^2$;

10) $D$ – фігура, обмежена лініями $y=\sqrt{2x-x^2}$, $y=\sqrt{2x}$, $x=2$.

**4**. Змінити порядок інтегрування.

1) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_y^2 f(x,y)dx$; 2) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$; 3) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$;

4) $\int\limits_0^r dx \int\limits_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x,y)dy$; 5) $\int\limits_{-2}^2 dx \int\limits_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} f(x,y)dy$; 6) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2+2}^{4-x} f(x,y)dy$;

7) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$; 8) $\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)dy$; 9) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2/2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx$;

10) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy$;

11) $\int\limits_0^{R\sqrt{2}/2} dx \int\limits_0^x f(x,y)dy + \int\limits_{R\sqrt{2}/2}^{R} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy$;

12) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2/3} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x,y)dy$.

**5**. Обчислити подвійні інтеграли.

1) $\iint\limits_D (2x-3y)dxdy$, де область $D$ обмежено прямими $x=0$, $y=0$, $x+y=4$;

2) $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, де область $D$ обмежено прямими $y=0,\ y=2x,\ x=1$;

3) $\iint\limits_D \left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)dxdy$, де область $D$ обмежено лініями $y=2x,\ y=\frac{x^2}{2}$;

4) $\iint\limits_D xydxdy$, де область $D$ обмежено лініями $y^2=2x,\ x=2$;

5) $\iint\limits_D x^2y^2dxdy$, де область $D$ – круг $x^2+y^2\le R^2$;

6) $\iint\limits_D (x^2+y)dxdy$, де область $D$ обмежено лініями $y^2=4x,\ x^2=4y$;

7) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, де область $D$ обмежено лініями $x=2,\ y=x,\ xy=1$;

8) $\iint\limits_D \cos(x+y)dxdy$, де область $D$ обмежено прямими $x=0,\ y=\pi,\ y=x$;

9) $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}dxdy$, де область $D$ обмежено лініями $x=y^2$, $x=0,\ y=1$;

10) $\iint\limits_D y^2\cos xy dxdy$, де область $D$ обмежено прямими $y=0, y=\sqrt{\pi},\ y=x$;

11) $\iint\limits_D \frac{x}{x^2+y^2}dxdy$, де область $D$ обмежено лініями $y=x\,\mathrm{tg}\,x,\ y=x$;

12) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{2a-x}}$, де область $D$ – круг радіуса $a$, який дотикається до осей $Ox$ та $Oy$ і лежить у 1-му квадранті.

**6**. У подвійному інтегралі $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ перейти до полярних координат і розставити межі інтегрування.

1) $D$ – область, що обмежена колами $x^2+y^2=6x$, $x^2+y^2=10x$ і прямими $y=x$, $y=2x$;

2) $D$ – трикутник з вершинами $O(0;0),\ A(1;0),\ B(0;1)$;

3) $D$ – квадрат з вершинами $O(0;0),\ A(0;1),\ B(1;0),\ C(1;1)$;

4) $D$ – область, що обмежена правою петлею лемніскати Бернуллі $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$;

5) $D$ – менший з двох сегментів, на які пряма $y=2$ розділяє круг $x^2+y^2\le 3y$.

**7**. Повторні інтеграли записати також як повторні, але у полярних координатах.

1) $\int\limits_{R/2}^{2R}dy\int\limits_0^{\sqrt{2Ry-y^2}}f(x,y)dx$; 2) $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^x f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dy$; 3) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 f(x,y)dy$;

4) $\int\limits_0^2 dx\int\limits_x^{x\sqrt{3}}f(x,y)dy$; 5) $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{x^2}f(x,y)dy$; 6) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx$;

7) $\int\limits_0^{R/\sqrt{1+R^2}}dx\int\limits_0^{Rx}f\left(\frac{x}{y}\right)dy+\int\limits_{R/\sqrt{1+R^2}}^{R}dx\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}}f\left(\frac{y}{x}\right)dy$.

**8**. За допомогою переходу до полярних координат обчислити інтеграли.

1) $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$, де $D=\left\{(x,y): x^2+y^2\le R^2\right\}$;

2) $\iint\limits_D \frac{x^2}{x^2+y^2}dxdy$, де $D=\left\{(x,y): x^2+y^2\le ax\right\}$;

3) $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy$, де $D=\left\{(x,y): x^2+y^2\le ay\right\}$;

4) $\iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, де $D$ – область, що обмежена правою петлею лемніскати Бернуллі $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$;

5) $\iint\limits_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy$, де $D$ – верхнє півкільце між колами радіусів $e$ і $e^2$ з центром у початку координат.

**9**. За допомогою переходу за відповідними формулами до нових змінних $u$ і $v$ обчислити інтеграли.

1) $\iint\limits_D xydxdy$, де $D$ – область, обмежена лініями $xy=1$, $x+y=5/2$;

2) $\iint\limits_D \sqrt{xy}\,dxdy$, де $D$– область, обмежена кривими $y^2=ax$, $y^2=bx$, $xy=p$, $xy=q$ ($0<a<b,\ 0<p<q$);

3) $\iint\limits_D (x^2y^2+y^2)dxdy$, де $D$ – область, обмежена кривими $y=1/x$, $y=2/x$, $y=x$, $y=3x$;

4) $\iint\limits_D \frac{(x+y)^2}{x}dxdy$, де $D$ – область, обмежена прямими $y=1-x$, $y=3-x$, $y=x/2$, $y=2x$;

5) $\iint\limits_D x^2dxdy$, де $D$ – область, обмежена лініями $y=x^3$, $y=2x^3$, $y=x/2$, $y=3x$.

**10**. За допомогою подвійного інтеграла обчислити об’єми тіл, обмежених заданими поверхнями.

1) $x+y+z=4$, $x=2$, $y=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

2) $x+y+z=6$, $3x+y=6$, $3x+2y=12$, $y=0$, $z=0$;

3) $x+y+z=3$, $x^2+y^2=1$, $z=0$;

4) $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1$, $x=2y^2$, $z=0$;

5) $y=16\sqrt{2x}$, $y=\sqrt{2x}$, $z=0$, $x+z=2$;

6) $x^2+y^2=6x$, $x^2+y^2=9x$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$, $y=0$ ($y\le 0$);

7) $x^2+y^2=2ax$, $z=x$, $z=3x$;

8) $x^2+y^2=2y$, $z=\frac{13}{4}-x^2$, $z=0$;

9) $z=x^2+y^2$, $y=6-x$, $y=2x$, $y=1$, $z=0$;

10) $2z=y^2$, $2x+3y=12$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ ($y>0$);

11) $y=\ln x$, $y=\ln^2 x$, $z=0$, $z=1-y$;

12) $x^2+y^2=4$, $z=x+y+10$, $z=0$;

13) $x^2+y^2=2ax$, $za=x^2+y^2$, $z=0$;

14) $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ , $9z/2=x^2+y^2$ .

**11**. За допомогою подвійного інтеграла знайти площі областей, обмежених заданими лініями.

1) $4y=x^2-4x,\ x-y-3=0$; 2) $y^2=10x+25,\ y^2=-6x+9$;

3) $y^2-2y+x^2=0,\ y^2-4y+x^2=0,\ \ y=x/\sqrt{3},\ y=x\sqrt{3}$; 4) $xy=4,\ x+y=5$;

5) $2xy=a^2,\ xy=2a^2,\ 2y=x,\ y=2x$; 6) $xy=1,\ xy=8,\ y^2=x,\ y^2=8x$;

7) $\rho\cos\varphi=1,\ \rho=2$ (не містить полюса); 8) $\rho=a(1+\cos\varphi),\ \rho=a\cos\varphi\ (a>0)$;

9) $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right)$; 10) $\left(x^2+y^2\right)^3=a^2\left(x^4+y^4\right)$.

**12**. Знайти масу, статичні моменти відносно осей $Ox$ і $Oy$ і координати центру тяжіння фігури, обмеженої заданими лініями з заданою поверхневою густиною $\gamma$.

1) $x=0,\ y=0,\ x=a,\ y=b\ \ (a,b>0)$; $\gamma=x^2+y^2$;

2) $x=0,\ y=0,\ x=a,\ y=b\ \ (a,b>0)$; $\gamma=x+2$;

3) $x=y,\ x-3y=1,\ y=1,\ y=3$; $\gamma=y$;

4) $x=1,\ y=0,\ y^2=4x\ \ (y\ge 0)$; $\gamma=7x^2+y$;

5) $x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=25,\ x=0,\ y=0\ (x\ge 0,\ y\le 0)$; $\gamma=(2x-3y)/(x^2+y^2)$.

**13**. Записати потрійний інтеграл у вигляді:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\,dz.$$

1) $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, де $V$ – область, обмежена площинами $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$, $x=0,\ y=0,\ z=0\ \ (a>0,\ b>0,\ c>0)$;

2) $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, де $V$ – область, обмежена еліпсоїдом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

3) $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, де $V$ – область, обмежена поверхнями $x^2+y^2=1$, $z=0,\ z=1\ \ (x\ge 0,\ y\ge 0)$;

4) $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, де $V$ – область, обмежена поверхнями $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=2$;

5) $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, де $V$ – область, обмежена поверхнями $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $x^2+y^2=Ry$, $z=0$.

**14**. Обчислити потрійні інтеграли.

1) $\iiint\limits_V xyzdxdydz$, де $V$ – область, обмежена поверхнями $y=x^2$, $x=y^2$, $z=xy$, $z=0$;

2) $\iiint\limits_V (x-y)dxdydz$, де $V$ – область, обмежена площинами $x=0, y=0, z=0$, $x+y+z=1$;

3) $\iiint\limits_V xdxdydz$, де $V$ – область, обмежена поверхнями $z=1$, $z=x^2+y^2$;

4) $\iiint\limits_V (2x+3y-z)dxdydz$, де $V$ – область, обмежена площинами $z=0$, $z=a$, $x=0, y=0, x+y=b$ ($a>0, b>0$);

5) $\iiint\limits_V xy^2z^3dxdydz$, де $V$ – область, обмежена поверхнями $z=xy$, $y=x$, $x=1$, $z=0$;

6) $\iiint\limits_V 2y^2e^{xy}dxdydz$, де $V$ – область, обмежена площинами $x=0$, $y=1$, $y=x$, $z=0, z=1$;

**15**. Обчислити потрійні інтеграли за допомогою переходу до циліндричних координат.

1) $\int\limits_0^{2r} dx \int\limits_{-\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}} dz$;

2) $\iiint\limits_V dxdydz$, де $V$ – область, обмежена поверхнями $x^2+y^2+z^2=2Rz$, $x^2+y^2=z^2$, що містить точку $(0;0;R)$;

3) $\iiint\limits_V \left(x^2+z^2\right)dxdydz$, де $V$ – область, обмежена поверхнями $2y=x^2+z^2$, $y=2$;

4) $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)^{3/2} dxdydz$, де $V$ – область, обмежена поверхнями $z=x^2+y^2$, $z=1$.

**16**. Записати потрійний інтеграл $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ у вигляді повторного в циліндричній системі координат, розставивши межі інтегрування.

1) $V=\left\{(x,y,z): \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\right\}$;

2) $V=\left\{(x,y,z): x^2+y^2\le z,\ 0\le z\le H\right\}$;

3) $V=\left\{(x,y,z): 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1\right\}$;

4) $V=\left\{(x,y,z): (x-R)^2+y^2+z^2\le R^2,\ x^2+(y-R)^2+z^2\le R^2\right\}$;

5) $V=\left\{(x,y,z): x^2+y^2\le 2ax,\ x^2+y^2\le a^2-az,\ z\ge 0\right\}$;

6) $V=\left\{(x,y,z): 4x^2+3y^2+z^2\le 48,\ 0\le 2z\le 4x^2+3y^2\right\}$;

7) $V=\left\{(x,y,z): |z|\le 5-\sqrt{3x^2+3y^2},\ z^2\le x^2+y^2+1\right\}$.

**17**. Обчислити потрійні інтеграли за допомогою переходу до сферичної системи координат.

1) $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz$, де $V=\left\{(x,y,z): r^2\le x^2+y^2+z^2\le R^2\right\}$;

2) $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, де $V=\left\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$;

3) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, де $V=\left\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le z\right\}$;

4) $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}$, де $V=\left\{(x,y,z): x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x^2+y^2+z^2\le a^2\right\}$;

5) $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, де $V$ – область, обмежена кульовим сектором з центром у точці $O(0;0;0)$, радіусом $R$ і кутом $2\alpha$ $(0<\alpha<\pi)$ при вершині.

**18**. Записати потрійний інтеграл $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ у вигляді повторного у сферичній системі координат, розставивши межі інтегрування.

1) $V=\left\{(x,y,z): \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\right\}$;

2) $V=\left\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 4Rz,\ x^2+y^2+z^2\ge Rz,\ x^2+y^2\le z^2/3\right\}$;

3) $V=\left\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le R^2,\ x^2+y^2+z^2\le 2zR\right\}$;

4) $V=\left\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 2yR,\ x^2+y^2\le z^2\right\}$;

5) $V=\left\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 8z-8,\ 3\left(x^2+y^2\right)\le z^2\right\}$.

**19**. За допомогою потрійного інтеграла обчислити об'єми тіл, обмежених заданими поверхнями.

1) $z=xy,\ z=x+y,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0$; 2) $y=x^2+z^2,\ y=1$;

3) $y^2+z^2=2ax,\ y^2+z^2=2az,\ x=0\ (a>0)$; 4) $z=x^2+y^2,\ z=x+y$;

5) $x^2+y^2+z^2=a^2,\ z^2=x^2+y^2\ (a>0)$ (зовні конуса);

6) $z=\ln(x+2),\ z=\ln(6-x),\ x=0,\ x+y=2,\ x-y=2$.

**20**. Знайти масу тіла густиною $\gamma$, обмеженого заданими поверхнями.

1) $z^2 = x^2 + y^2$, $z = h$; $\gamma = z$;

2) $2x + z = 2a$, $x + z = a$, $y^2 = ax$, $y = 0$ $(y > 0)$; $\gamma = y$;

3) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $z = 0$; $\gamma = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

4) $z = x^2 + y^2$, $z = 2y$; $\gamma = y$; 5) $x + y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; $\gamma = x + y + z$;

6) $x = y^2$, $x = 4$, $z = 2$, $z = 5$; $\gamma = |y|$.

**21**. Задано неоднорідне тіло. Обчислити його масу, якщо відомо його густину.

1) Куб зі стороною $a$, якщо густина його в кожній точці дорівнює квадрату відстані від цієї точки до фіксованої вершини куба.

2) Куля радіусу $R$, якщо густина його в кожній точці дорівнює подвоєній відстані від цієї точки до поверхні кулі.

3) Сферичний шар між сферами $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ та $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, якщо густина його в кожній точці обернено пропорційна відстані від цієї точки до початку координат, і на зовнішній сфері дорівнює $\gamma_0$.

4) Тіло, обмежене конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, площиною $z = 0$ і циліндром $x^2 + y^2 = 1$, якщо густина в кожній його точці дорівнює відстані від цієї точки до осі $Oz$.

5) Круговий циліндр з радіусом основи $R$ і висотою $h$, якщо густина його в кожній точці пропорційна відстані від цієї точки до нижньої основи, а на верхній основі дорівнює одиниці.

6) Тіло, обмежене параболоїдом $x^2 + y^2 = 2az$ і сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ $(z > 0)$, якщо густина його в кожній точці дорівнює сумі квадратів координат точки.

**22**. Визначити координати центру мас однорідного тіла, обмеженого заданими поверхнями.

1) $x + y + z = 8$, $x = 2$, $y = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

2) $az = a^2 - x^2 - y^2$, $z = 0$;

3) $z = y^2/2$, $2x + 3y - 12 = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

4) $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 6$, $z = 0$;

5) $z = x^2 + y^2$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

6) $x^2 = 2pz$, $y^2 = 2px$, $x = p/2$, $z = 0$;

7) $z = \dfrac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = H$ $(H > 0, R > 0)$.

**23**. Обчислити криволінійні інтеграли 1-го роду.

1) $\int\limits_L (x - 2y)\,dl$, де $L$ – відрізок прямої між точками $A(1;1)$ і $B(0;-2)$;

2) $\int\limits_L xydl$, де $L$ – контур квадрата з вершинами у точках $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(2;2)$, $C(0;2)$;

3) $\int\limits_L ydl$, де $L$ – дуга параболи $y^2=4x$, відсічена параболою $x^2=4y$;

4) $\int\limits_L ydl$, де $L$ – дуга синусоїди $y=\sin x$ $(0\le x\le\pi)$;

5) $\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)^n dl$, де $L$ – коло $x^2+y^2=R^2$;

6) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, де $L$ – коло $x^2+y^2=ax$ $(a>0)$;

7) $\int\limits_L y^2dl$, де $L$ – арка циклоїди $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$;

8) $\int\limits_L xydl$, де $L$ – чверть еліпса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, що розташована у 1-му квадранті;

9) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, де $L$ – дуга кривої $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$;

10) $\int\limits_L x\sqrt{x^2-y^2}\,dl$, де $L$ – половина лемніскати $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$, що лежить у правій півплощині;

11) $\int\limits_L \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}dl$, де $L$ – частина спіралі Архімеда $\rho=2\varphi$, що міститься всередині круга радіуса $R$ з центром у полюсі;

12) $\int\limits_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}dl$, де $L$ – контур кругового сектора $\rho=a$, $\varphi=0$, $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$;

13) $\int\limits_L \left(x+2y^2-3z\right)dl$, де $L$ – відрізок прямої від точки $A(0;1;2)$ до точки $B(2;-1;0)$;

14) $\int\limits_L \dfrac{z^2dl}{x^2+y^2}$, де $L$ – перший виток гвинтової лінії $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=at$.

**24**. Обчислити довжини дуг заданих кривих (всі параметри вважаються додатними).

1) $y=\ln x$ $\left(\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}\right)$; 2) $y=\sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{x}$;

3) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$;

4) $x=3t$, $y=3t^2$, $z=2t^3$ від точки $O(0;0;0)$ до точки $A(3;2;2)$;

5) $x = ae^t \cos t,\ y = ae^t \sin t,\ z = ae^t \quad (0 \le t \le \pi)$ .

**25**. Знайти площі заданих циліндричних поверхонь, розміщених між площиною $Oxy$ і зазначеними поверхнями.

1) $y = \frac{3}{8}x^2,\ x = 0,\ y = 6,\ z = x$; 2) $x^2 + y^2 = 4,\ 4z = xy$;

3) $y^2 = 2px,\ z = \sqrt{2px - 4x^2}$; 4) $y = \frac{4}{9}(x-1)^3,\ z = 2 - \sqrt{x}\,4$

5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ z = kx \ (z \ge 0)$; 6) $y = 2px,\ x = \frac{8}{9}p,\ z = y$.

**26**. Обчислити маси заданих кривих, якщо відомо густину $\gamma$ в кожній точці кривої.

1) $x = 3\cos t,\ y = 3\sin t,\ z = 4t \ (0 \le t \le 2\pi)$; $\gamma(x,y,z) = 4z$;

2) $x^2 + y^2 = 1,\ y \ge 0$; $\gamma(x,y) = y$;

3) $y = \ln x \ (0 \le x \le 3)$; $\gamma(x,y) = x^2$;

4) $y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a} \ (0 \le x \le a)$; $\gamma(x,y) = \frac{k(1+x)}{y}$, $\gamma(0,a) = \delta$;

5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $\gamma(x,y) = |y|$;

**27**. Обчислити криволінійні інтеграли 2-го роду.

1) $\int\limits_L \left(x + y^2\right)dx + ydy$, де $L$ – відрізок прямої $y = x - 2$ від точки $A(1;-1)$ до точки $B(-1;-3)$;

2) $\int\limits_L \left(3x^3y - 2xy^3\right)dx - 2x^2dy$, де $L$ – відрізок прямої від точки $A(0;1)$ до точки $B(2;5)$;

3) $\int\limits_L \frac{ydx + xdy}{1 + x^2y^2}$, де $L$ – відрізок прямої від точки $O(0;0)$ до точки $B(-2;2)$;

4) $\oint\limits_L \left(-x^2ydx + xy^2dy\right)$, де $L$ – коло $x^2 + y^2 = r^2$, причому обхід здійснюється у додатному напряму;

5) $\int\limits_{OA} \left(x^2 - y\right)dx - y^2dy$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(1;1)$, якщо ці точки сполучаються між собою:

а) відрізком прямої $y = x$; б) дугою параболи $y = x^2$; в) дугою параболи $y^2 = x$; г) ламаною $OBA$, де $B(0;1)$; д) ламаною $OCA$, де $C(1;0)$;

6) $\int\limits_L xdy$, де $L$ – права половина кола $x^2+y^2=a^2$ від точки $A(0;-a)$ до точки $B(0;a)$ ($a>0$);

7) $\int\limits_L (y+\pi)dx + x\cos y dy$, де $L$ – частина кривої $\pi\ln x - y + \sin y = 0$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(e;\pi)$;

8) $\int\limits_L (2a-y)dx-(a-y)dy$, де $L$ – перша арка циклоїди $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$;

9) $\int\limits_L \frac{x^2dy-y^2dx}{x^{5/3}+y^{5/3}}$, де $L$ – чверть астроїди $x=R\cos^3 t$, $y=R\sin^3 t$ від точки $(R;0)$ до точки $(0;R)$;

10) $\int\limits_L \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-x-y+2z}}$, де $L$ – відрізок прямої від точки $A(1;1;1)$ до точки $B(4;4;4)$;

11) $\int\limits_L yzdx + z\sqrt{R^2-y^2}dy + xydz$, де $L$ – дуга гвинтової лінії $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $z=\frac{at}{2\pi}$ від точки перетину лінії з площиною $z=0$ до точки її перетину з площиною $z=a$;

12) $\int\limits_L y^2dx+z^2dy+x^2dz$, де $L$ – лінія перетину сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$ і циліндра $x^2+y^2=Rx$ ($R>0, z\ge 0$), причому обхід здійснюється проти годинникової стрілки, якщо дивитися з початку координат.

**28**. Обчислити криволінійні інтеграли по замкненому контуру: а) безпосереднім інтегруванням; б) за допомогою формули Гріна.

1) $\oint\limits_L xdy$, де $L$ – контур трикутника, утвореного осями координат і прямою $3x+2y-6=0$;

2) $\oint\limits_L \left(x^2+y^2\right)dy$, де $L$ – контур чотирикутника з вершинами в точках $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(4;4)$, $C(0;4)$;

3) $\oint\limits_L \left(1-x^2\right)ydx+\left(1+y^2\right)xdy$, де $L$ – коло $x^2+y^2=R^2$;

4) $\oint\limits_L y\cos xdx+(\cos y+\sin x)dy$, де $L$ – еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

5) $\oint\limits_L e^x\left[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy\right]$, де $L$ – контур, який обмежує область $0\le x\le\pi,\ 0\le y\le\sin x$;

6) $\oint\limits_L (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$, де $L$ – коло $x^2+y^2=ax$.

**29**. Переконатися, що криволінійні інтеграли не залежать від форми шляху інтегрування, і обчислити їх.

1) $\int\limits_{(-1;2)}^{(2;3)} xdy+ydx$; 2) $\int\limits_{(0;1)}^{(3;4)} xdx+ydy$; 3) $\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} (x+y)(dx+dy)$; 4) $\int\limits_{(3;4)}^{(5;12)} \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$;

5) $\int\limits_{(0;1)}^{(1;2)} \frac{2xdx}{y^3}+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy$; 6) $\int\limits_{(1;\pi)}^{(2;\pi)} \left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$;

7) $\int\limits_{(1;-1;2)}^{(2;1;3)} xdx-y^2dy+zdz$; 8) $\int\limits_{(7;2;3)}^{(5;3;1)} \frac{zxdy+xydz-yzdx}{(x-yz)^2}$.

**30**. Обчислити роботу сили $\vec{F}=xy\vec{i}+(x+y)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки з початку координат по кривій $y=x^3$ в точку $A(1;1)$.

**31**. У кожній точці площини на матеріальну точку діє сила $\vec{F}=x^2y\vec{i}+(y-x)\vec{j}$. Обчислити роботу при переміщенні точки з початку координат у точку $A(1;1)$:

1) по прямій $y=x$; 2) по параболі $y=x^2$; 3) по кубічній параболі $y=x^3$; 4) по ламаній, що сполучає точки $O(0;0)$, $C(1;0)$, $A(1;1)$; 5) по ламаній, що сполучає точки $O(0;0)$, $B(0;1)$, $A(1;1)$.

**32**. Обчислити роботу сили $\vec{F}=x^2\vec{i}-\vec{j}-zy\vec{k}$ при переміщенні матеріальної точки з точки $A(1;-1;2)$ в точку $B(2;0;3)$ по відрізку $AB$.

**33**. Показати, що робота сили $\vec{F}=2xy\vec{i}+x^2\vec{j}$ при переміщенні з однієї точки в іншу залежить тільки від положення цих точок і не залежить від форми шляху, який ці точки сполучає. Знайти роботу цієї сили при переміщенні з точки $A(1;0)$ в точку $B(0;3)$.

**34**. Обчислити поверхневі інтеграли 1-го роду.

1) $\iint\limits_\sigma (2x+y+z-1)d\sigma$, де $\sigma$ – частина площини $3x+y+z=1$, розміщена у першому октанті;

2) $\iint\limits_\sigma \left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)d\sigma$, де $\sigma$ – частина площини $6x+4y+3z=12$, розміщена у першому октанті;

3) $\iint\limits_{\sigma}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma$, де $\sigma$ – півсфера $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$;

4) $\iint\limits_{\sigma}xd\sigma$, де $\sigma$ – частина сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$, розміщена в першому октанті;

5) $\iint\limits_{\sigma}\left(x^2+y^2\right)d\sigma$, де $\sigma$ – частина конічної поверхні $z^2=x^2+y^2$, розміщена між площинами $z=0$ і $z=1$;

6) $\iint\limits_{\sigma}\frac{d\sigma}{r^2}$, де $\sigma$ – частина циліндричної поверхні $x^2+y^2=R^2$, обмежена площинами $z=0$ і $z=H$, а $r$ – відстань від точки поверхні до початку координат;

7) $\iint\limits_{\sigma}\frac{d\sigma}{r}$, де $\sigma$ – частина гіперболічного параболоїда $z=xy$, що відтинається циліндром $x^2+y^2=R^2$, а $r$ – відстань від точки поверхні до осі $Oz$.

**35**. Знайти масу сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$, якщо поверхнева густина в кожній її точці дорівнює квадрату відстані від цієї точки до деякого фіксованого діаметра сфери.

**36**. Обчислити поверхневі інтеграли 2-го роду.

1) $\iint\limits_{\sigma}xz^2dxdy$, де $\sigma$ – зовнішня сторона частини сфери $x^2+y^2+z^2=1$, розміщена в першому октанті;

2) $\iint\limits_{\sigma}2xdydz-ydxdz$, де $\sigma$ – зовнішня сторона частини поверхні циліндру $x^2+y^2=1$, $0\le z\le 1, x\ge 0, y\ge 0$;

3) $\iint\limits_{\sigma}yzdydz+xzdxdz+xydxdy$, де $\sigma$ – зовнішня сторона поверхні трикутника, утвореного перетином площин $x+y+z=a$ $(a>0)$ з координатними площинами;

4) $\iint\limits_{\sigma}x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$, де $\sigma$ – зовнішня сторона частини сфери $x^2+y^2+z^2=a^2$, що лежить у першому октанті;

5) $\iint\limits_{\sigma}(y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy$, де $\sigma$ – зовнішня сторона конічної поверхні $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $0\le z\le h$;

6) $\iint\limits_{\sigma}xzdxdy+xydydz+yzdxdz$, де $\sigma$ – зовнішня сторона піраміди, обмеженої площинами $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$;

7) $\iint\limits_{\sigma} x^3 dydz -$ де $\sigma$ – верхня сторона верхньої половини еліпсоїда $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

8) $\iint\limits_{\sigma} y^2 zdxdy + xzdydz + x^2 ydxdz$, де $\sigma$ – зовнішня сторона поверхні, розміщеної в першому октанті і обмеженої параболоїдом $z = x^2 + y^2$, циліндром $x^2 + y^2 = 1$ і координатними площинами;

9) $\iint\limits_{\sigma} x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy$, де $\sigma$ – зовнішня повна поверхня конуса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=\dfrac{z^2}{b^2}$ $(0 \le z \le b)$;

10) $\iint\limits_{\sigma} \dfrac{dydz}{x}+\dfrac{dxdz}{y}+\dfrac{dxdy}{z}$, де $\sigma$ – зовнішня сторона еліпсоїда $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

**37**. Обчислити поверхневі інтеграли за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

1) $\iint\limits_{\sigma} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)d\sigma$, де $\sigma$ – зовнішня сторона еліпсоїда $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

2) $\iint\limits_{\sigma} xdydz + ydxdz + zdxdy$, де $\sigma$ – повна зовнішня поверхня циліндра $x^2 + y^2 = a^2$, $-H \le z \le H$;

3) $\iint\limits_{\sigma} 2xydydz + 3xydxdz - 4yzdxdy$, де $\sigma$ – зовнішня сторона замкненої поверхні, утвореної площиною $z = 0$ та верхньою частиною сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

**38**. Обчислити криволінійні інтеграли 2-го роду за допомогою формули Стокса.

1) $\oint\limits_{L} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, де $L$ – контур трикутника $ABC$ з вершинами $A(a;0;0)$, $B(0;a;0)$, $C(0;0;a)$;

2) $\oint\limits_{L} xdx + (x+y)dy + (x+y+z)dz$, де $L$ – крива $x = a\sin t$, $y = a\cos t$, $z = a(\sin t + \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$;

3) $\oint\limits_L (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$, де $L$ – коло, що отримано перетином сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$ з площиною $x+y+z=0$;

4) $\oint\limits_L y^2dx-x^2dy+z^2dx$, де $L$ – контур, який отримано перетином параболоїда $x^2+z^2=1-y$ з координатними площинами.

**39**. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_L y^2z^2dx+x^2z^2dy+x^2y^2dz$, де $L$ – замкнена крива $x=a\cos t$, $y=a\cos 2t$, $z=a\cos 3t$ $(0\le t\le 2\pi)$.

**40**. Знайти $\operatorname{div}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}$.

**41**. Знайти вихор векторного поля $\vec{A}=\left\{\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{z}, \dfrac{z}{x}\right\}$.

**42**. Знайти течію вектора $\vec{A}=\left\{x^3, y^3, z^3\right\}$ через сферу $x^2+y^2+z^2=x$.

**43**. Знайти течію вектора $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ через бічну поверхню конуса $x^2+y^2\le z^2$ ($0\le z\le h$), а також через основу цього конуса.

**44**. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{A}=\left\{y-z,\ z-x,\ x-y\right\}$ вздовж контуру $L$, який задано параметричними рівняннями $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=2(1-\cos t)$ у напрямі, що відповідає зростанню параметра $t$.

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ


### Базова

1. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. М.: Наука, 1988. – 816 с.
2. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.2. М.: Наука, 1978. – 576 с.
3. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Астрель, 2004. – 558 с.

### Допоміжна

1. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Т. III. – М. : Наука, 1970. – 656 с.
2. *Ильин В. А. Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Т. II. – М. : Наука, 1982. – 448 с.
3. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. Т.2. М.: ВШ, 1988. – 576 с.

**ЗМІСТ**

Навчальне видання

**Щоголев** Сергій Авенірович

# ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

За редакцією автора

Підп. до друку 20.11.2015. Формат 60х84/16.
Умов.-друк. арк. 6,63. Тираж 40 пр.
Зам. № 1247.

**Видавець і виготовлювач**
**Одеський національний університет**
**імені І. І. Мечникова**
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.

Україна, 65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12
Тел.: (048) 723 28 39. E-mail: druk@onu.edu.ua