МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І. І. МЕЧНИКОВА
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ЕКОНОМІКИ І МЕХАНІКИ
Кафедра оптимального керування і економічної кібернетики

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для самостійної роботи з дисципліни «Економетрика»

ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМІВ ПІДГОТОВКИ
6.040201 «МАТЕМАТИКА», 6.040301 «ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА», 6.030501 «ЕКОНОМІЧНА ТЕОРІЯ», 6.030203 «МІЖНАРОДНІ ЕКОНОМІЧНІ ВІДНОСИНИ», 6.030601 «МЕНЕДЖМЕНТ»

Частина Б

УДК 330.43
ББК 65в6

Методичні вказівки для самостійної роботи з дисципліни «Економетрика» для студентів напрямів підготовки 6.040201 «математика», 6.040301 «прикладна математика», 6.030501 «економічна теорія», 6.030203 «міжнародні економічні відносини», 6.030601 «менеджмент».

Методичні вказівки для самостійної роботи з дисципліни «Економетрика» допоможуть майбутнім фахівцям економістам і математикам опанувати методику побудови і дослідження економетричних моделей, що описують соціально-економічні явища.

Автори-укладачі: **Яровий А. Т.,** кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри оптимального керування і економічної кібернетики;
Страхов Є. М., кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри оптимального керування і економічної кібернетики.

Рецензенти: **Мацкул В. М.,** кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичних методів аналізу економіки Одеського національного економічного університету;
Васильєв О. Б., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри оптимального керування і економічної кібернетики Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.

Рекомендовано до друку Вченою радою ІМЕМ ОНУ імені І. І. Мечникова (протокол № 5 від 10.06.2014).

ТЕМА 10. ЛІНІЙНІ РЕГРЕСІЙНІ МОДЕЛІ ЗІ ЗМІННОЮ СТРУКТУРОЮ

Лінійні регресійні моделі зі змінною структурою розглядаються у випадках, коли під час збору початкових статистичних даних має місце непрямий вплив деяких якісних чинників (супровідних змінних), в результаті чого відбуваються стрибкоподібні зрушення в структурі зв'язків (тобто в значеннях коефіцієнтів регресії).

Проблема неоднорідних даних

Нехай функція щільності ймовірності аналізованого результуючого показника y залежить не тільки від значень пояснюючих змінних X, але і від того, на яких конкретних рівнях (градаціях) зафіксовані так звані супровідні, як правило, якісні змінні Z, які визначають умови, при яких відбувається збір початкових статистичних даних. Тоді ця функція щільності тлумачиться як умовна щільність ймовірності випадкової величини y при значеннях пояснюючих і супровідних змінних, зафіксованих відповідно на рівнях X і Z, – якщо пояснюючі і супровідні змінні випадкові за своєю суттю, – або як безумовна щільність ймовірності випадкової величини y при значеннях невипадкових параметрів, рівних відповідно X і Z, якщо векторні змінні X і Z виконують роль невипадкових параметрів, від яких залежить закон розподілу ймовірності змінної y.

Якщо виходити з того, що при довільних умовах (тобто при довільних значеннях супровідних змінних Z) функція регресії y по X залишається лінійною, то природно вважати, що коефіцієнти цієї лінійної залежності, взагалі-то, залежать від Z.

<u>Означення</u>. Початкові статистичні дані називаються *однорідними*, якщо всі вони зафіксовані при одних і тих самих умовах (тобто при одних і тих самих значеннях супровідних змінних Z).

<u>Означення</u>. Якщо початкові статистичні дані зафіксовані при різних значеннях супровідної змінної Z, то вони називаються *неоднорідними*.

Виникає проблема: яким найкращим чином використати дані для статистичного аналізу моделей. Здається, що відповідь дуже проста: розбити початкові дані на однорідні групи (тобто в кожній із груп значення супровідної змінної Z не змінюється), а потім оцінити значення коефіцієнтів по кожній із груп окремо. Тоді для кожного фіксованого значення Z буде визначена своя однорідна вибірка об'єму $n\left(Z\right) < n$ і кожній з них відповідає своя регресія. При цьому отримані по двом різним однорідним підвибіркам оцінки регресій можуть статистично значимо відрізнятися одна від одної.

На жаль, розбиття вибірки на декілька однорідних не завжди дає бажані задовільні результати:

по-перше: супровідні змінні Z не можна спостерігати або їх значення своєчасно не були зафіксовані при зборі початкових статистичних даних. В цьому випадку використовують методи кластер-аналізу;

по-друге: супровідні змінні Z можна спостерігати (тобто їх значення відомі), але розбиття на однорідні підвибірки призводить до дуже малих підвибірок, тобто до таких об'ємів підвибірок, яких недостатньо для статистично надійної оцінки функцій регресії.

В цьому випадку для оцінки функцій регресії використовують методи, пов'язані з введенням фіктивних змінних.

Фіктивні змінні в лінійній моделі регресії

У лінійну модель регресії фіктивні змінні вводяться для того, щоб відобразити вплив на показник y супровідних якісних змінних, якщо присутні неоднорідні початкові дані.

Використання такого способу у цій ситуації обумовлене двома причинами:

1) статистична надійність отриманих при цьому оцінок коефіцієнтів регресії буде вищою за ту, яку б ми отримали, якщо оцінювали б ці коефіцієнти окремо по кожній однорідній вибірці;
2) під час побудови регресійної моделі з фіктивними змінними ми отримуємо можливість одночасно перевіряти гіпотези про наявність або відсутність статистично значимого впливу супровідних змінних на структуру моделі.

Урахування впливу супровідних змінних на структуру моделі відбувається, як правило, за допомогою адитивно-лінійного введення в праву частину регресійного рівняння деякої кількості дихотомічних (бінарних, булевих) змінних, тобто таких змінних, які можуть приймати одне з двох можливих значень (нуль або одиниця). При цьому, якщо супровідна якісна змінна z_j має k_j градацій (тобто може приймати k_j можливих значень), то для відображення її впливу на структуру регресійного зв'язку необхідно ввести $k_j - 1$ дихотомічних змінних $z_{j,1}, \dots, z_{j,k_j-1}$. Конкретна форма, в якій ці змінні будуть представлені в рівнянні, буде залежати від наших припущень про характер впливу супровідної змінної на коефіцієнти моделі регресії.

Приклад. Дослідити залежність питомого (тобто в розрахунку на одного члена родини в один і той же момент часу) споживання прохолодних напоїв (y) від величини прибутку на підставі результатів вибіркових досліджень бюджетів домашніх господарств.

Тоді векторна супровідна якісна змінна Z складається з двох компонент $Z = \left(z_1,\, z_2\right)^T$, де z_1 – номер соціально-економічної групи, до якої належить домашнє господарство, а z_2 – номер кварталу (сезону). Будемо вважати, що родини поділяються по рівню прибутку на 3 групи: 1 – низькоприбуткові, 2 – середньоприбуткові і 3 – високоприбуткові (тобто число градацій k_1 якісної змінної z_1 дорівнює трьом). З означення z_2 маємо, що кількість її градацій (k_2) дорівнює чотирьом (1 – зима, 2 – весна, 3 – літо, 4 – осінь).

Щоб врахувати вплив супровідної змінної z_1 на структуру моделі, введемо $k_1 - 1 = 2$ фіктивні змінні:

$$z_{1,1}^i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i\text{-е спостереження відноситься до домашнього господарства 2-ї групи (до середньоприбуткових),} \\ 0 & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

$$z_{1,2}^i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i\text{-е спостереження відноситься до домашнього господарства 3-ї групи (до високоприбуткових),} \\ 0 & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

Для врахування впливу сезонності на структуру моделі вводиться $k_2 - 1 = 3$ фіктивні змінні:

$$z_{2,1}^i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i\text{-е спостереження робилося навесні,} \\ 0 & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

$$z_{2,2}^i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i\text{-е спостереження робилося влітку,} \\ 0 & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

$$z_{2,3}^i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i\text{-е спостереження робилося восени,} \\ 0 & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Конкретна форма застосування цих фіктивних змінних в рівнянні залежить від припущень про характер впливу z_1 і z_2 на структуру моделі. Розглянемо два варіанти таких припущень.

Варіант 1. Чинники z_1 і z_2 впливають на кількість спожитого продукту, але не впливають на схильність до споживання (x).

Тоді рівняння регресії матиме вигляд:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x^i + \beta_{01} z_{11}^i + \beta_{02} z_{12}^i + \beta_{03} z_{21}^i + \beta_{04} z_{22}^i + \beta_{05} z_{23}^i + \varepsilon_i \,.$$

Далі, в залежності від припущень про природу регресійних залишків ε_i використовуємо звичайний метод найменших квадратів для отримання оцінок коефіцієнтів регресії. Тепер можемо виписати вид моделі для довільних сполучень значень супровідних змінних. А саме:

$y_i = \beta_0 + \beta_1 x^i + \varepsilon_i$ – для родин 1 групи в зимовий період;

$y_i = \left(\beta_0 + \beta_{03}\right) + \beta_1 x^i + \varepsilon_i$ – для родин 1 групи у весняний період;

$y_i = \left(\beta_0 + \beta_{04}\right) + \beta_1 x^i + \varepsilon_i$ – для родин 1 групи в літній період;

$y_i = \left(\beta_0 + \beta_{05}\right) + \beta_1 x^i + \varepsilon_i$ – для родин 1 групи в осінній період;

$y_i = (\beta_0 + \beta_{01}) + \beta_1 x^i + \varepsilon_i$ – для родин 2 групи в зимовий період;

$y_i = (\beta_0 + \beta_{01} + \beta_{03}) + \beta_1 x^i + \varepsilon_i$ – для родин 2 групи у весняний період;

…

$y_i = (\beta_0 + \beta_{02} + \beta_{05}) + \beta_1 x^i + \varepsilon_i$ – для родин 3 групи в осінній період.

Зрозуміло, що в рамках припущень варіанту 1 структурні змінні моделі при переході з однієї групи до другої і з одного сезону в інший відбуваються лише в зміні значень вільного члена регресійного рівняння і не торкаються значень параметра, що визначає нахил до споживання.

Зробимо деякі зауваження.

Зауваження 1 (про статистичну надійність методу оцінки, який використовує фіктивні змінні). Надійність статистичних висновків при побудові моделі суттєво залежить від співвідношення об'єму початкових статистичних даних (n) і кількості параметрів моделі (N). Чим більше відношення $n : N$, тим точніші відповідні оцінки.

Зауваження 2. Якщо виявиться, що жодна з фіктивних змінних, що введені до моделі з метою врахування впливу супровідної змінної z_j, не впливає на y, то зміна значень цієї супровідної змінної не спричиняє за собою неоднорідності відповідних початкових статистичних даних.

Зауваження 3 (про необхідність ухилятися від «пасток», пов'язаних із введенням фіктивних змінних). Якщо супровідна змінна z_j має k_j градацій і введемо k_j фіктивних змінних, то стовпчики матриці початкових даних X будуть лінійно залежними. Таким чином, отримаємо строгу мультиколінеарність.

Варіант 2. Нехай чинник належності домашнього господарства до тієї чи іншої соціально-економічної групи z_1 впливає на характеристику нахилу до споживання β_1 (чинник сезонності z_2, як і раніше, впливає лише на кількість спожитого). Тоді впроваджені вище фіктивні змінні слід представити в рівнянні в такому вигляді:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x^i + \beta_{11}\left(z_{11}^i x^i\right) + \beta_{12}\left(z_{12}^i x^i\right) + \beta_{01} z_{21}^i + \beta_{02} z_{22}^i + \beta_{03} z_{23}^i + \varepsilon_i.$$

При цьому зміниться спосіб і результат комплектування загальної матриці спостережень X і відповідно результати методу найменших квадратів. У цьому випадку за оцінки «нахилу до споживання» отримаємо:

для групи 1: β_1;

для групи 2: $\beta_1 + \beta_{11}$;

для групи 3: $\beta_1 + \beta_{12}$.

Зроблені вище зауваження відносяться також і до результатів аналізу варіанту 2.

Урахування ефекту взаємодії супровідних змінних

Раніше ми вважали, що фіктивні змінні відображали взаємонезалежний вплив кожної із супровідних змінних на структуру моделі. Проте у ряді випадків може статися суттєвим вплив, викликаний взаємодією різних супровідних змінних. Цю взаємодію можна врахувати в рівнянні регресії уведенням до нього додаткових фіктивних змінних. А саме: ефект взаємодії супровідної змінної z_j (представленої в рівнянні фіктивними змінними $z_{j,1},\ldots,z_{j,k_j-1}$) і супровідної змінної z_l (представленої в рівнянні фіктивними змінними $z_{l,1},\ldots,z_{l,k_l-1}$) може бути врахований введенням в рівняння додатково $P=\left(k_j-1\right)\left(k_l-1\right)$ фіктивних змінних $z_1, z_2,\ldots,z_P$, що утворюються можливими попарними добутками виду $\tilde{z}=z_{j,q}\,z_{l,s}$, де $q=1,2,\ldots,k_j-1$ і $s=1,2,\ldots,k_l-1$. Звичайно, при статистичному аналізі отриманої таким чином лінійної множинної регресії оцінки коефіцієнтів регресії при деяких змінних – «взаємодіях» $\tilde{z}_t$ можуть виявитися статистично незначущими, що буде означати відсутність впливу відповідних взаємодій на структуру моделі.

Приклад. Нехай y – заробітна платня робітника; $X=\left(x_1,x_2,\ldots,x_p\right)^T$ – набір кількісних ознак, від яких може залежати величина y; z_1 – супровідна змінна, що визначає рівень освіти робітника ($k_1=3$: початкова, середня, вища) і z_2 – супровідна змінна, що визначає стать робітника ($k_2=2$: чоловіча, жіноча). Згідно з вищенаписаним, вводимо фіктивні змінні:

$$z_{1,1}^i=\begin{cases}1, & \text{якщо } i\text{-е спостереження відноситься до робітника з середньою освітою,}\\ 0 & \text{в іншому випадку;}\end{cases}$$

$$z_{1,2}^i=\begin{cases}1, & \text{якщо } i\text{-е спостереження відноситься до робітника з вищою освітою,}\\ 0 & \text{в іншому випадку;}\end{cases}$$

$$z_{2,1}^i=\begin{cases}1, & \text{якщо } i\text{-е спостереження відноситься до жінки,}\\ 0 & \text{в іншому випадку;}\end{cases}$$

$\tilde{z}_1^i=z_{1,1}^i\cdot z_{2,1}^i$; $\tilde{z}_2^i=z_{1,2}^i\cdot z_{2,1}^i$.

У таблиці відображені правила побудови елементів матриці спостережень X в тій її частині, яка відноситься до «значень» фіктивних змінних.

Рівень освіти	Стать	Фіктивні змінні				
		$z_{1,1}^i$	$z_{1,2}^i$	$z_{2,1}^i$	$\tilde{z}_1^i$	$\tilde{z}_2^i$
початкова	чоловіча	0	0	0	0	0
початкова	жіноча	0	0	1	0	0
середня	чоловіча	1	0	0	0	0
середня	жіноча	1	0	1	1	0
вища	чоловіча	0	1	0	0	0
вища	жіноча	0	1	1	0	1

Лінійна модель регресії в цьому випадку має вигляд:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_1^i + \ldots + \beta_p x_p^i + \beta_{01} z_{1,1}^i + \beta_{02} z_{1,2}^i + \beta_{03} z_{2,1}^i +$$

$$+\beta_{04} \tilde{z}_1^i + \beta_{05} \tilde{z}_2^i + \varepsilon_i .$$

Далі застосовуємо метод 1МНК для оцінок коефіцієнтів отриманого регресійного рівняння. Знаючи оцінки $\widehat{\beta}_k$ ($k = 0,\ldots,p$), $\widehat{\beta}_{0j}$ ($j = 1,2,\ldots,5$) і їх середньоквадратичні помилки, можна зробити важливі в прикладному плані висновки відносно характеру залежності. Наприклад, якщо величина $\widehat{\beta}_{03}$ статистично значимо відрізняється від нуля і є від'ємною, то робимо висновок, що існуюча система оплати праці характеризується деякими дискримінаційними властивостями. Якщо ж $\widehat{\beta}_{04}$ і $\widehat{\beta}_{05}$ статистично не значимо відрізняються від нуля, то це означає, що взаємодія двох супровідних факторів (рівень освіти – стать) ніяк не впливає на структуру моделі.

Перевірка регресійної однорідності двох груп спостережень (тест Г. Чоу)

Нехай супровідна змінна z приймала в процесі збору регресійних спостережень

$$A = \left\{ \left(x_1, y_1\right), \left(x_2, y_2\right), \ldots, \left(x_n, y_n\right) \right\}$$

всього два значення: z_1 і z_2. Тоді загальна вибірка A може бути поділена на дві підвибірки

$$A_1 = \left\{ \left(x_1, y_1\right), \ldots, \left(x_{n_1}, y_{n_1}\right) \middle| z = z_1 \right\},$$

$$A_2 = \left\{ \left(x_1, y_1\right), \ldots, \left(x_{n_2}, y_{n_2}\right) \middle| z = z_2 \right\}$$

таким чином, що всі спостереження в кожній із підвибірок були зроблені про одному і тому самому значенні супровідної змінної z: перша підвибірка при $z = z_1$, а друга – при $z = z_2$.

Нам необхідно отримати відповідь на питання: чи дійсно, що підвибірки A_1 і A_2 неоднорідні в регресійному сенсі, чи перехід від градації z_1 до градації z_2 в умовах збору початкових статистичних даних ніяк не впливає на структуру лінійної моделі регресії y по x і, отже, підвибірки A_1 і A_2 можна об'єднати і будувати функцію регресії по об'єднаній вибірці A ? Тобто необхідно статистично перевірити гіпотезу

$$H_0 : \beta^1 = \beta^2,\ \sigma^2_{\varepsilon_1} = \sigma^2_{\varepsilon_2} = \sigma^2,$$

де $\beta^j = \left(\beta^j_1, \dots, \beta^j_p\right)$ і ε_j відповідно коефіцієнти і випадкові залишки регресій, побудованих на основі підвибірок A_1 і A_2.

Якщо $n_1 > p$ і $n_2 > p$, то можна запропонувати декілька можливостей перевірки гіпотези H_0 (наприклад, для прийняття гіпотези H_0 достатньо перевірити той факт, що точкові оцінки коефіцієнтів, отриманих по першій підвибірці, попадаюсь всередину інтервальних оцінок коефіцієнтів регресії, що побудована по другій підвибірці).

Якщо ж об'єм однієї з підвибірок (наприклад, другої) не дозволяє зробити надійну оцінку невідомих коефіцієнтів, то необхідно користуватися тестом Г. Чоу, який має такий алгоритм:

1. По вибіркам A_1 і A будуємо дві моделі і розраховуємо похибки ε_1 і ε.
2. Розраховуємо

$$F_{CT} = \frac{\left(\varepsilon^T\varepsilon - \varepsilon_1^T\varepsilon_1\right)\left(n_1 - p\right)}{\varepsilon_1^T\varepsilon_1\, n_2}.$$

3. Якщо $F_{CT} > F\left(\alpha,\, n_2,\, n_1 - p\right)$, то гіпотеза H_0 про однорідність вибірок відхиляється з ймовірністю $\left(1 - \alpha\right)100\%$.

Зауваження. Якщо об'єм другої вибірки n_2 досить великий, то можна розраховувати таку статистику

$$F_{CT} = \frac{\left(\varepsilon^T\varepsilon - \varepsilon_1^T\varepsilon_1 - \varepsilon_2^T\varepsilon_2\right)\left(n_1 + n_2 - 2p\right)}{\left(\varepsilon_1^T\varepsilon_1 + \varepsilon_2^T\varepsilon_2\right)p}.$$

Якщо $F_{CT} > F\left(\alpha,\, p,\, n_1 + n_2 - 2p\right)$, то з ймовірністю $\left(1 - \alpha\right)100\%$ гіпотеза H_0 про однорідність відхиляється.

ТЕМА 11. ДИНАМІЧНІ ЕКОНОМЕТРИЧНІ МОДЕЛІ

Економетрична модель є динамічною, якщо в даний момент часу t вона враховує значення змінних, які відносяться як до поточного, так і до попередніх моментів часу.

Можна виділити два основних типи динамічних економетричних моделей. До моделей першого типу відносяться моделі авторегресії і моделі з розподіленим лагом. Моделі другого типу враховують динамічну інформацію у неявному вигляді. До цих моделей включені змінні, що характеризують очікуваний або бажаний рівень результату y або одного з факторів в момент часу t. Цей рівень вважається невідомим і визначається економічними одиницями з урахуванням інформації, яку вони мають в момент $\left(t-1\right)$.

У залежності від способу визначення очікуваних значень показників розрізняють моделі неповного коригування і адаптивних очікувань. Оцінка параметрів цих моделей зводиться до оцінки параметрів моделей авторегресії.

При дослідженні економічних процесів нерідко доводиться моделювати ситуації, коли значення результативної ознаки в поточний момент часу t формується під впливом ряду чинників, що діяли в попередні моменти часу $t-1, t-2, \dots, t-l$. Величину l, що характеризує запізнення у впливі чинника на результат, називають в економетриці лагом, а часові ряди самих змінних, що зсунуті на один або декілька моментів часу – лаговими змінними.

Економетричне моделювання охарактеризованих вище процесів відбувається із застосуванням моделей, що включають не тільки поточні, але і лагові значення незалежних змінних. Ці моделі називаються моделями з розподіленим лагом. Вони мають вигляд

$$y_t = a + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + \dots + b_k x_{t-k} + \varepsilon_t. \qquad (1)$$

До моделі може включатися нескінченна кількість лагових змінних.

Разом з лаговими значеннями незалежних змінних на величину залежної змінної поточного періоду можуть мати вплив її значення в попередні моменти або періоди часу. Ці процеси описують за допомогою моделей регресії, що мають лагові значення залежної змінної і мають вигляд

$$y_t = a + b_0 x_t + c_1 y_{t-1} + \dots + c_k y_{t-k} + \varepsilon_t \qquad (2)$$

і називаються моделями авторегресії.

Побудова моделей з розподіленими лагами і моделей авторегресії має свою специфіку. По-перше, оцінку параметрів моделей авторегресії і, в більшості випадків, моделей з розподіленим лагом не можна зробити за допомогою 1МНК, зважаючи на порушення його передумов, і тому необхідно застосовувати інші методи. По-друге, дослідникам доводиться розв’язувати проблеми вибору оптимальної величини лагу. І по-третє, між моделями з розподіленим лагом і моделями автокореляції існує певна взаємозалежність, і в деяких випадках необхідно здійснювати перехід від одного типу моделі до іншого.

Інтерпретація параметрів моделей з розподіленим лагом

Розглянемо модель з розподіленим лагом у загальному вигляді, вважаючи, що максимальна величина лагу скінчена

$$y_t = a + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + \dots + b_p x_{t-p} + \varepsilon_t. \quad (3)$$

Ця модель стверджує про те, що якщо в деякий момент часу t відбувається зміна незалежної змінної x, то ця зміна буде впливати на значення змінної y на протязі p наступних моментів часу.

Коефіцієнт регресії b_0 при змінній x_t характеризує середню абсолютну зміну y_t при зміні x_t на 1 од. свого виміру у деякий фіксований момент часу t без врахування впливу лагових значень чинника x. Цей коефіцієнт називають короткостроковим мультиплікатором.

У момент часу $(t+1)$ сукупний вплив змінної x_t на результат y_t складає $(b_0 + b_1)$ умовних одиниць, в момент $(t+2)$ цей вплив можна охарактеризувати сумою $(b_0 + b_1 + b_2)$ і т. д. Отримані таким чином суми називають проміжними мультиплікаторами.

З урахуванням скінченої величини лагу можна сказати, що зміна змінної x в момент t на 1 од. призводить до загальної зміни y через p моментів на $(b_0 + b_1 + \dots + b_p)$ одиниць.

Введемо позначення:

$$b = b_0 + b_1 + \dots + b_p. \quad (4)$$

Величину b називають довгостроковим мультиплікатором. Він показує абсолютну зміну в довгостроковому періоді $(t+p)$ результату y під впливом зміни на 1 од. чинника x.

Нехай

$$\beta_j = \frac{b_j}{b}, \ j = \overline{0, p}. \quad (5)$$

Отримані коефіцієнти називають стандартизованими. Якщо всі коефіцієнти b_j мають однакові знаки, то для довільного j: $0 < \beta_j < 1$ і $\sum_{j=0}^{p} \beta_j = 1$. У цьому випадку стандартизовані коефіцієнти β_j є вагами для відповідних коефіцієнтів b_j. Кожний з них вимірює частку загальної зміни результативної ознаки в момент часу $(t+j)$.

Знаючи величини β_j, можна визначити ще дві важливі характеристики моделі множинної регресії: величину середнього лагу і медіанного лагу.

Середній лаг визначається за формулою: $l = \sum_{j=0}^{p} j\,\beta_j$ і визначає середній період, протягом якого буде відбуватися зміна результату під впливом чинника в момент часу t. Невелика величина середнього лагу свідчить про відносно швидке реагування результату y на зміну чинника, тоді як велике його значення свідчить про те, що вплив чинника на результат буде відчуватися на протязі довгого періоду часу.

Медіанний лаг – це величина лагу, для якого $\sum_{j=0}^{k} \beta_j = 0.5$. Це той період часу, на протязі якого з моменту часу t буде реалізована половина загального впливу чинника на результат.

Приклад. Інтерпретація параметрів моделі з розподіленим лагом

За результатами вивчення залежності об'ємів продажу компанії в середньому за місяць від витрат на рекламу була отримана така модель з розподіленим лагом:

$$\hat{y}_t = 4 + 4x_t + 2x_{t-1} + 1.5x_{t-2} + 0.5x_{t-3}.$$

У цій моделі короткостроковий мультиплікатор дорівнює 4. Це означає, що збільшення витрат на рекламу на 1 млн. грн. веде в середньому до зросту об'єму продажу компанії на 4 млн. грн. у тому ж періоді. Під впливом витрат на рекламу продаж компанії в період $(t+1)$ зростає на 4 + 2 = 6 млн. грн., $(t+2)$ – на 6 + 1.5 = 7.5 млн. грн. Довгостроковий мультиплікатор для моделі дорівнює: 4 + 2 + 1.5 + 0.5 = 8. Тобто в довгостроковій перспективі (через три місяці) збільшення витрат на рекламу на 1 млн. грн. в поточний час призведе до загального росту об'єму продаж на 8 млн. грн.

Стандартизовані коефіцієнти регресії дорівнюють:

$$\beta_0 = \frac{4}{8} = 0.5,\ \beta_1 = \frac{2}{8} = 0.25,\ \beta_2 = \frac{1.5}{8} = 0.1875,\ \beta_3 = \frac{0.5}{8} = 0.0625.$$

Отже, 50 % загального збільшення об'єму продаж, викликаних ростом витрат на рекламу, відбувається в поточному часі; 25 % – в момент $(t+1)$; 18.75 % – в момент $(t+2)$ і 6.25 % цього збільшення відбувається на момент часу $(t+3)$.

Визначимо середній лаг:

$$l = 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.1875 + 3 \cdot 0.0625 = 0.8125 \text{ місяця.}$$

Величина $l = 0.8125$ показує, що більша частина ефекту зросту витрат на рекламу проявляється за перший місяць. Медіанний лаг складає один місяць.

Викладені прийоми аналізу параметрів моделі з розподіленим лагом дійсні тільки при умові, що всі коефіцієнти при поточному і лагових значеннях чинника мають однаковий знак. Ця вимога виправдана з економічної точки зору: вплив одного і того самого чинника на результат повинен бути однонаправленим незалежно від того, з яким часовим лагом вимірюється сила або тіснота зв'язку між цими ознаками. Однак, на практиці отримати статистично значиму модель, параметри якої мали б однакові знаки, особливо при великому значенні лагу p, дуже складно.

Застосування звичайного 1МНК до таких моделей у більшості випадків складно за таких причин:

1) поточні і лагові значення незалежної змінної, як правило, тісно пов'язані одне з одним. Тому оцінка параметрів моделі відбувається при досить високій мультиколінеарності регресорів;
2) при великому значенні лагу зменшується число ступенів вільності;
3) у моделях з розподіленим лагом досить часто виникає проблема автокореляції залишків.

Вищевказані обставини призводять до зниження точності при оцінці параметрів, їх неефективності і т. д. Тому на практиці параметри моделей з розподіленим лагом визначають при умові певних обмежень на коефіцієнти регресії і в умовах обраної структури лагу.

Послідовна оцінка параметрів моделі з розподіленим лагом

Оскільки припускається, що x_t нестохастичні (або принаймні не корелюють з похибкою), то $x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots$ теж нестохастичні. Тоді до моделі $y_t = a + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + \ldots + \varepsilon_t$ можна застосувати метод 1МНК. Для цього діємо послідовно: тобто спочатку необхідно побудувати регресію y_t за x_t та оцінити невідомі параметри, потім – регресію y_t за x_t і x_{t-1}, потім – за x_t, x_{t-1} і x_{t-2} і т. д. Ця послідовна процедура припиняється, коли параметри при лагових змінних x починають бути статистично незначущими або коефіцієнт хоча б однієї змінної змінює свій знак.

Приклад. Досліджується залежність споживання пального y від надходження нових замовлень x. Отримано такі результати:

$$\hat{y}_t = 9.0 + 0.237\, x_t;$$

$$\hat{y}_t = 9.0 + 0.215\, x_t + 0.071\, x_{t-1};$$

$$\hat{y}_t = 9.0 + 0.213\, x_t + 0.081\, x_{t-1} - 0.04\, x_{t-2};$$

$$\hat{y}_t = 9.0 + 0.212\, x_t + 0.070\, x_{t-1} + 0.03\, x_{t-2} - 0.03\, x_{t-3}.$$

Обираємо друге рівняння, тому що у останніх двох знак при x_{t-2} змінюється.

Метод послідовних оцінок має такі недоліки:

1) невідома максимальна величина лагу;
2) при оцінці послідовних лагів залишається все менше ступенів вільності, що робить економічні висновки непевними;
3) в економічних даних послідовні значення змінних мають високу кореляцію і тому з'являється проблема мультиколінеарності.

Підхід Койка до моделей з розподіленим лагом

Койк запропонував свій метод оцінки параметрів моделей з розподіленим лагом. Нехай розглядається модель

$$y_t = a + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + \ldots + u_t. \tag{6}$$

Будемо вважати, що b_i мають однаковий додатний знак. Койк припустив, що вони змінюються в геометричній прогресії: $b_k = b_0 \lambda^k,\ k = 0, 1, \ldots$, де λ – темп зменшення лагу, $0 < \lambda < 1$, $(1 - \lambda)$ – швидкість пристосування. Отже, з кожним наступним кроком у минуле вплив лагу на змінну y зменшується, що є досить слушним. Чим ближче λ до 1, тим повільніший темп зменшення b_k, а чим ближче воно до 0, тим швидше спадає b_k. Підхід Койка має такі переваги: параметр λ може бути і від'ємним і тоді b_i будуть різних знаків; так як $\lambda < 1$, то віддалені за часом значення x стали менш впливовими; довгостроковий мультиплікатор є скінченною величиною: $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \frac{b_0}{1 - \lambda}$. Враховуючи припущення Койка, модель (6) матиме вигляд:

$$y_t = a + \beta_0 x_t + \beta_0 \lambda x_{t-1} + \beta_0 \lambda^2 x_{t-2} + \ldots + \varepsilon_t. \tag{7}$$

У рівнянні (7) маємо всього три параметри $a,\ \beta_0,\ \lambda$. Для їх оцінки не можна застосовувати 1МНК, тому що виникла б проблема мультиколінераності і з отриманих оцінок не вдалось би однозначно отримати оцінки параметрів.

Однак можна уникнути цих серйозних проблем, якщо використати нелінійний метод найменших квадратів (НМНК).

Алгоритм методу починається із завдання меж можливих значень λ, наприклад, $\lambda \in (0, 1)$ і розглядаємо всі можливі значення λ всередині цих меж з достатньо малим кроком. Чим менший крок, тим кращий ми отримаємо результат. Для кожного значення λ розраховуємо

$$z_t = x_t + \lambda x_{t-1} + \lambda^2 x_{t-2} + \ldots + \lambda^p x_{t-p} \tag{8}$$

з таким значенням p, при якому подальші лагові значення x не впливають на зміну z_t. Потім оцінюється рівняння регресії

$$y_t = a + \beta_0 z_t + \varepsilon_t. \tag{9}$$

Ці розрахунки робимо для всіх значень λ і обираємо таке значення λ, що забезпечує найбільший коефіцієнт детермінації R^2 при оцінці рівняння (9). У якості оцінок a і β_0 обирають їх оцінки в «найкращому» рівнянні (9). Рівняння (8) і (9) в сукупності еквівалентні рівнянню (7).

Койк запропонував інший підхід. Рівняння (7) виконується для довільних t, а отже воно справедливе для періоду $(t-1)$:

$$y_{t-1} = a + \beta_0 x_{t-1} + \beta_0 \lambda x_{t-2} + \ldots + \varepsilon_{t-1}. \tag{10}$$

Помножимо обидві частини цього рівняння на λ і віднімемо від (7), отримаємо:

$$y_t - \lambda y_{t-1} = a(1-\lambda) + \beta_0 x_t + \varepsilon_t - \lambda \varepsilon_{t-1}, \text{ або}$$

$$y_t = a(1-\lambda) + \beta_0 x_t + \lambda y_{t-1} + \varepsilon_t - \lambda \varepsilon_{t-1}. \tag{11}$$

Модель (11) називається моделлю Койка.

Отримана модель є авторегресійною. Визначивши її параметри, ми знайдемо оцінки a, β_0 і λ початкової моделі. Зазначимо, що застосування звичайного 1МНК для оцінки параметрів моделі (11) дає зміщені оцінки, так як у цій моделі в правій частині присутнє y_{t-1}, а воно корелює з ε_{t-1} і передумови 1МНК не виконуються.

Форма моделі (11) дозволяє аналізувати коротко- і довгострокові динамічні властивості моделі. У короткостроковому аспекті (у поточному періоді) значення y_{t-1} потрібно розглядати як фіксоване, і вплив x_t на y_t відображається коефіцієнтом β_0. У довгостроковому періоді, якщо x_t прямує до деякого свого рівноважного значення $\bar{x}$, то y_t і y_{t-1} також будуть прямувати до рівноважного значення $\bar{y}$, тобто

$$\bar{y} = a(1-\lambda) + \beta_0 \bar{x} + \lambda \bar{y},$$

звідки $\bar{y} = a + \frac{\beta_0}{1-\lambda}\bar{x}$. Отже, довгостроковий вплив x на y виражається коефіцієнтом $\frac{\beta_0}{1-\lambda}$. Якщо $0 < \lambda < 1$, то цей коефіцієнт більший за β_0, тобто довгостроковий вплив сильніший короткострокового.

Незважаючи на нескінченну кількість лагових змінних в моделі (7), геометрична структура лагу дозволяє визначити середній і медіанний лаги в моделі Койка. Отримаємо, що середній лаг в моделі Койка дорівнює $l = \frac{\lambda}{1-\lambda}$, а медіанний лаг – $\frac{\ln 0.5}{\ln \lambda}$.

Модель часткових пристосувань (коригувань)

Розглянемо одну з модифікацій моделі Койка. Зазначимо, що модель Койка отримана чисто алгебраїчним шляхом і не має під собою ніякого теоретичного підґрунтя.

У моделі часткових пристосувань передбачається, що рівняння поведінки визначає не фактичне значення залежної змінної y_t, а її бажаний рівень y_t^*:

$$y_t^* = a + \beta x_t + \varepsilon_t. \tag{1}$$

Вважаємо також, що фактичний приріст залежної змінної $y_t - y_{t-1}$ пропорційний різниці між її бажаним рівнем і значенням у попередній період, тобто $y_t^* - y_{t-1}$:

$$y_t - y_{t-1} = \lambda\left(y_t^* - y_{t-1}\right), \left(0 \le \lambda \le 1\right), \tag{2}$$

λ відоме під назвою коефіцієнт пристосування, $y_t^* - y_{t-1}$ – бажана зміна, $y_t - y_{t-1}$ – фактична зміна. Вираз (2) можна переписати так:

$$y_t = \lambda y_t^* + \left(1-\lambda\right) y_{t-1}, \tag{3}$$

звідки видно, що y_t є зважене середнє бажаного рівня і фактичного значення цієї змінної в попередній період. Чим більше значення λ, тим швидше відбувається процес пристосувань. Якщо $\lambda = 1$, то $y_t = y_t^*$ і повне коригування відбувається за один період. Якщо ж $\lambda = 0$, то коригування взагалі не відбувається.

Підкладемо вираз (1) в (3) і отримаємо:

$$y_t = a\lambda + \beta\lambda x_t + \left(1-\lambda\right) y_{t-1} + \lambda\varepsilon_t. \tag{4}$$

Параметри a, β, λ моделей поведінки (1) і (2) можна оцінити з рівняння (4). Коефіцієнт при y_{t-1} дає оцінку $(1-\lambda)$, а отже, і λ, коефіцієнт при x_t, поділений на оцінку λ, дає оцінку β. Постійний член, поділений на оцінку λ, дає оцінку a.

Ця модель включає стохастичну змінну y_{t-1}. На відміну від моделі Койка, ця змінна не корелює з залишком ε_t. При таких умовах 1МНК дозволяє отримувати асимптотично незміщені і ефективні оцінки; однак оцінки не матимуть таких властивостей при малих вибірках.

Хоча модель часткового коригування на перший погляд і не відноситься до моделі Койка, покажемо, що це не так. Рівняння (4) виконується для довільних t, покладемо $t := t-1$.

$$y_{t-1} = a\lambda + \beta\lambda x_{t-1} + (1-\lambda)y_{t-2} + \lambda\varepsilon_{t-1}. \tag{5}$$

Підкладемо вираз (5) в (4), отримаємо

$$y_t = a\lambda\big(1+(1-\lambda)\big) + \beta\lambda x_t + (1-\lambda)\beta\lambda x_{t-1} + (1-\lambda)^2 y_{t-2} \tag{6}$$

(випадковий член для простоти не пишемо). Тепер в (4) покладемо $t := t-2$ і підкладемо в (6) і т. д.

Отримавши вираз для y_t через поточні і лагові значення x з геометрично зменшувальними вагами у вигляді моделі Койка, замінимо $(1-\lambda)$ на δ, а $\beta\lambda$ на b і отримаємо:

$$y_t = a + b\left(x_t + \delta x_{t-1} + \delta^2 x_{t-2} + \ldots\right), \tag{7}$$

що по формі співпадає з рівнянням Койка.

Приклад. Модель коригування величини дивідендів (модель Лінтнера)

Лінтнер використав модель часткового коригування в дослідженнях розподілу дивідендів. Звичайно виробничі компанії розподіляють прибуток, що залишився після виплати податків, частково на виплату дивідендів акціонерам, а залишки направляють на фінансування інвестицій. Коли прибуток росте, то і дивіденди теж зростають, але не у такій пропорції. Причиною цього в основному є обережність керівництва компаній. Збільшення прибутку може бути тимчасовим, і якщо дивіденди будуть збільшуватися досить швидко, то можливо пізніше їх доведеться зменшувати. Керівництво компанії вважає, що ніщо не наносить такий сильний удар по репутації фірми, як скорочення дивідендів, і тому воно проявляє обережність. Другим доказом проти негайного збільшення дивідендів у тій же пропорції, що і збільшення прибутку, є міркування про те, що збільшення прибутку може свідчити про покращення інвестиційних можливостей, що вимагають фінансування.

Лінтнер вважав, що у фірм існує цільова довгострокова доля виплат γ і що бажаний об'єм дивідендів D_t^* співвідноситься з поточним прибутком Π_t як

$$D_t^* = \gamma \Pi_t. \tag{8}$$

Однак реальний об'єм дивідендів підпорядковується процесові часткового коригування:

$$\Delta D_t = \lambda\left(D_t^* - D_{t-1}\right) + \varepsilon_t. \tag{9}$$

Тоді

$$D_t - D_{t-1} = \lambda\left(D_t^* - D_{t-1}\right) + \varepsilon_t,$$

$$D_t - D_{t-1} = \lambda\left(\gamma \Pi_t - D_{t-1}\right) + \varepsilon_t,$$

$$D_t = \lambda \gamma \Pi_t + \left(1 - \lambda\right) D_{t-1} + \varepsilon_t. \tag{10}$$

Використовуючи дані про діяльність корпоративного сектору США за період 1918–1941 рр., Лінтнер побудував таке рівняння регресії

$$\widehat{D}_t = 352.3 + 0.15\,\Pi_t + 0.70\,D_{t-1}.$$

Так як $1 - \lambda = 0.70$, то $\lambda = 0.3$ – коефіцієнт швидкості коригування, а $\gamma\lambda = 0.15$ і тому отримаємо, що для виплат дивідендів $\gamma = 0.15 / 0.3 = 0.5$.

Модель адаптивних очікувань

Моделювання очікувань часто стає найбільш відповідальною і складною задачею в прикладній економіці. Це особливо справедливо для макроекономіки, де інвестиції, збереження і попит на активи виявляється дуже чутливим до очікувань відносно майбутнього. На жаль, у теперішній час відсутні задовільні методи виміру очікувань для розв'язання макроекономічних задач. Як наслідок, макроекономічні моделі не дозволяють отримувати достатньо точні прогнози, що утруднює керування економікою.

У якості напівміри розв'язання проблем у деяких моделях використовується метод, відомий під назвою «процес адаптивних очікувань».

Розглянемо модель виду

$$y_t = a + b\,x_{t+1}^* + \varepsilon_t, \tag{1}$$

де y_t – фактичне значення результативної ознаки, x_{t+1}^* – очікуване значення чинника.

Механізм формування очікувань у цій моделі такий:

$$x_{t+1}^* - x_t^* = \alpha\left(x_t - x_t^*\right) \tag{2}$$

або

$$x_{t+1}^{*} = \alpha x_t + (1-\alpha)x_t^{*}, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{3}$$

Таким чином, очікуване значення змінної x_{t+1}^{*} є середня арифметична зважена її фактичного і очікуваного значень у попередній період. Іншими словами, в кожний період $t+1$ очікування коригуються на деяку долю α різниці між фактичним значенням ознаки і її очікуваним значенням у попередній період. Параметр α в цій моделі називають коефіцієнтом очікувань. Чим ближче коефіцієнт очікування до 1, тим у більшій мірі реалізується очікування економічних агентів. І, навпаки, наближення величини α до нуля свідчить про стійкість існуючих тенденцій. При $\alpha = 0$ з (2) або (3) отримаємо, що $x_{t+1}^{*} = x_t^{*}$, тобто умови, що домінують сьогодні, збережуться і на всі майбутні періоди часу. Очікувані майбутні значення показників співпадають з їх значеннями поточних періодів.

Підкладемо в (1) замість x_{t+1}^{*} співвідношення (3):

$$y_t = a + b\left(\alpha x_t + (1-\alpha)x_t^{*}\right) + \varepsilon_t = a + \alpha b x_t + (1-\alpha) b x_t^{*} + \varepsilon_t. \tag{4}$$

Модель (1) справедлива і для періоду $t-1$. Отримаємо

$$y_{t-1} = a + b x_t^{*} + \varepsilon_{t-1}. \tag{5}$$

Помножимо (5) на $(1-\alpha)$ і віднімемо від (4):

$$y_t - (1-\alpha)y_{t-1} = a - (1-\alpha)a + \alpha b x_t + \varepsilon_t - (1-\alpha)\varepsilon_{t-1}$$

або

$$y_t = \alpha a + \alpha b x_t + (1-\alpha)y_{t-1} + u_t, \; u_t = \varepsilon_t - (1-\alpha)\varepsilon_{t-1}. \tag{6}$$

Зазначимо різницю між (1) і (6). У першій моделі b оцінює середню зміну y у відповідь на одиничну зміну x^{*}. У (6) b оцінює середню зміну y у відповідь на одиничну зміну фактичного, тобто спостережуваного значення x. На практиці спочатку оцінюють коефіцієнти моделі (6), а потім уже параметри моделі (1).

Модель адаптивних очікувань і модель Койка схожі між собою, хоча у них різні інтерпретації коефіцієнтів. Виникає питання: наскільки модель адаптивних очікувань є реалістичною? Вона забезпечує доволі прості способи моделювання очікувань в економічній теорії.

Гіпотеза про те, що люди вчаться на попередньому досвіді, є набагато розумнішою, ніж припущення про те, що вони позбавлені пам’яті.

Співвідношення (3) справедливе для довільних t, отже, буде справедливим і при $t := t-1$. Отримаємо:

$$x_t^* = \alpha x_{t-1} + (1-\alpha) x_{t-1}^*. \qquad (7)$$

У (7) присутня величина x_{t-1}^*. Замінимо її з (3) при $t := t-2$. Повторюючи цю процедуру нескінченну кількість разів, отримаємо

$$x_{t+1}^* = \alpha \left[x_t + (1-\alpha) x_{t-1} + (1-\alpha)^2 x_{t-2} + \ldots \right].$$

Підкладемо отриманий вираз в (1) і замінимо $(1-\alpha)$ на δ, отримаємо

$$y_t = a + b\alpha \left[x_t + \delta x_{t-1} + \delta^2 x_{t-2} + \ldots \right] + u_t,$$

а це і є модель Койка.

Оцінка параметрів моделі авторегресії

Описані вище перетворення Койка, модель адаптивних очікувань і модель часткового коригування зводяться до моделі авторегресії

$$y_t = a + b x_t + c y_{t-1} + \varepsilon_t. \qquad (1)$$

Однак при побудові моделей авторегресії виникають дві серйозні проблеми.

Перша проблема пов’язана з вибором методу оцінки параметрів рівняння авторегресії. Наявність лагових змінних результуючої ознаки в правій частині рівняння приводить до порушення передумови 1МНК про поділ змінних на результативну (стохастичну) і нестохастичні чинники.

Друга проблема полягає в тому, що присутній зв’язок між чинником правої частини і залишком. Тому застосування методу 1МНК для оцінки параметрів моделі призводить до отримання зміщеної оцінки параметра при y_{t-1}.

Одним із можливих методів розрахунку параметрів рівняння авторегресії є метод інструментальних змінних. Суть цього методу полягає в тому, щоб замінити змінну правої частини моделі, для якої порушується передумова 1МНК, новою змінною, включення якої до моделі не порушує передумов 1МНК. Інструментальна змінна повинна мати дві властивості: вона тісно корелює з y_{t-1} і не корелює із залишками.

Існує декілька способів отримання такої інструментальної змінної. Так як в моделі (1) змінна y_t залежить не тільки від y_{t-1}, але і від x_t, то можна вважати, що існує залежність між y_{t-1} і x_{t-1}, тобто

$$y_{t-1} = d_0 + d_1 x_{t-1} + u_t. \qquad (2)$$

Таким чином, змінну y_{t-1} можна виразити так:

$$y_{t-1} = \hat{y}_{t-1} + u_t, \qquad (3)$$

де

$$\hat{y}_{t-1} = \hat{d}_0 + \hat{d}_1 x_{t-1}. \qquad (4)$$

Знайдена за допомогою (4) оцінка $\hat{y}_{t-1}$ може бути інструментальною змінною для чинника y_{t-1}. Ця змінна, по-перше, тісно корелює з y_{t-1} (див. (3)), по-друге, вона пов'язана лінійно з x_{t-1}, яке не корелює із залишками і тому вона теж не корелює з ними, тобто з u_t.

Таким чином, оцінки параметрів рівняння (1) можна знайти із співвідношення

$$y_t = a + b x_t + c \hat{y}_{t-1} + \nu_t, \qquad (5)$$

попередньо оцінивши $\hat{y}_{t-1}$.

Можна використовувати модифікацію цього методу. Підкладемо в модель (1) замість y_{t-1} його вираз з рівняння (2):

$$y_t = a + b x_t + c\left(d_0 + d_1 x_{t-1} + u_t\right) + \varepsilon_t$$

або

$$y_t = a + c d_0 + b x_t + c d_1 x_{t-1} + \left(c u_t + \varepsilon_t\right). \qquad (6)$$

Рівняння (6) є моделлю з розподіленим лагом, для якої не порушуються передумови 1МНК. Оцінивши параметри моделей (2) і (6), можна розрахувати параметри початкової моделі (1). Модель (6) демонструє важливу властивість викладеного вище методу інструментальних змінних для оцінки параметрів моделей авторегресії: метод дозволяє перейти від моделі авторегресії до моделі з розподіленими лагами.

Лаги Алмона

Хоча модель Койка широко використовується на практиці, вона базується на припущенні, що коефіцієнти спадають у геометричній прогресії в міру зростання довжини лагу. Це припущення може бути занадто строгим у деяких ситуаціях, і схема моделей Койка не спрацьовує. У складніших випадках параметри β_i моделі можна виразити як функцію від i, тривалості лагу, і підібрати відповідні криві, які відображатимуть цю функціональну залежність. Саме цей підхід і запропонував Алмон.

Розглянемо загальну модель з розподіленим лагом з максимальною величиною лагу p, яка описується співвідношенням

$$y_t = a + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + \ldots + b_p x_{t-p} + \varepsilon_t. \tag{1}$$

Нехай було встановлено, що у досліджуваній моделі має місце поліноміальна структура лагу, тобто залежність коефіцієнтів моделі b_j від величини лагу описується поліномом k-го ступеня:

$$b_j = c_0 + c_1 j + c_2 j^2 + \ldots + c_k j^k. \tag{2}$$

Тоді кожний з коефіцієнтів b_j моделі (1) можна виразити таким чином:

$$\begin{aligned} &b_0 = c_0, \\ &b_1 = c_0 + c_1 + \ldots + c_k, \\ &b_2 = c_0 + 2c_1 + 4c_2 \ldots + 2^k c_k, \\ &\ldots \\ &b_p = c_0 + p c_1 + p^2 c_2 \ldots + p^k c_k. \end{aligned} \tag{3}$$

Підкладемо в (1) співвідношення для b_j і отримаємо

$$\begin{aligned} y_t = a + c_0 x_t + \left(c_0 + c_1 + \ldots + c_k\right) x_{t-1} + \ldots + \\ + \left(c_0 + p c_1 + p^2 c_2 + \ldots + p^k c_k\right) x_{t-p} + \varepsilon_t. \end{aligned} \tag{4}$$

Перегрупуємо доданки в (4):

$$\begin{aligned} y_t = a + c_0\left(x_t + x_{t-1} + \ldots + x_{t-p}\right) + c_1\left(x_{t-1} + 2x_{t-2} + \ldots + p x_{t-p}\right) + \\ + \ldots + c_k\left(x_{t-1} + 2^k x_{t-2} + \ldots + p^k x_{t-p}\right) + \varepsilon_t. \end{aligned} \tag{5}$$

Позначимо доданки при c_i як нові змінні:

$$\begin{aligned} &z_0 = x_t + x_{t-1} + \ldots + x_{t-p}, \\ &z_1 = x_{t-1} + 2x_{t-2} + \ldots + p x_{t-p}, \\ &\ldots \\ &z_k = x_{t-1} + 2^k x_{t-2} + \ldots + p^k x_{t-p}. \end{aligned} \tag{6}$$

Перепишемо модель (4) з урахуванням (6):

$$y_t = a + c_0 z_0 + c_1 z_1 + \ldots + c_k z_k + \varepsilon_t. \tag{7}$$

Алгоритм застосування методу Алмона для розрахунку параметрів моделі з розподіленим лагом виглядає так:

1) визначається максимальна величина лагу p;

2) визначається ступінь поліному k, що описує структуру лагу;

3) використовуючи (6), розраховуємо змінні $z_0, \ldots, z_k$;

4) методом 1МНК визначаємо параметри моделі (7);

5) за допомогою (3) розраховуємо параметри моделі (1).

Застосування методу Алмона спряжене з рядом проблем.

По-перше, величина лагу p повинна бути відомою. При її визначенні краще використовувати максимально можливий лаг, ніж обмежитись лагами невеликої довжини. Якщо обрати менший лаг, ніж його реальне значення, то в моделі не буде враховано впливовий чинник. Вплив цього чинника в моделі буде виражено в залишках. Тоді в моделі не буде виконуватися передумова 1МНК про випадковість залишків, а отримані оцінки її параметрів будуть неефективними і зміщеними. Вибір більшої величини лагу порівняно з її реальним значенням буде означати включення до моделі статистично незначимого чинника і зниження ефективності оцінок, однак ці оцінки все ж таки будуть незміщеними.

Існує декілька практичних підходів для визначення реальної величини лагу, наприклад, побудова декількох регресій і вибір найкращої з них. Однак, краще за все скористатися кореляційною функцією. Крім того, оптимальну величину лагу можна наближено визначити на основі апріорної інформації, економічної теорії або проведення емпіричних досліджень.

По-друге, необхідно встановити ступінь поліному k. У загальному випадку ступінь поліному k має бути принаймні на одиницю більшим за кількість точок екстремуму кривої, що показує залежність b_i від i. Тобто заздалегідь потрібно знати кількість точок екстремуму, таким чином, вибір k є великою мірою суб’єктивним. Але у деяких випадках теорія може допомогти знайти потрібний вигляд кривої. На практиці припускають, що за допомогою поліному низького ступеня (наприклад, 2 або 3) можна отримати добрі результати. Якщо ми обрали певне значення k і хочемо з’ясувати, чи не буде кращим поліном вищого ступеня, потрібно діяти таким чином. Припустимо, нам потрібно зробити вибір між поліномом другого та третього ступеня. Рівняння матимуть такий вигляд:

для другого ступеня: $y_t = a + c_0 z_0 + c_1 z_1 + c_2 z_2 + \varepsilon_1$,

для третього ступеня: $y_t = b + b_0 z_0 + b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3 + \varepsilon_2$.

Якщо після знаходження параметрів другої регресії ми отримаємо, що b_2 статистично значиме, а b_3 – ні, то можемо вважати, що достатньою буде апроксимація поліномом другого ступеня.

Слід бути обережним щодо проблеми мультиколінеарності, яка може виникнути через те, що значення z_i були отримані через значення x_j. У випадку мультиколінеарності $\hat{b}_3$ може стати статистично незначимою не тому, що дійсно значення b_3 дорівнює нулеві, а просто тому, що вибірка не дозволяє оцінити окремий вплив z_3 на y. Отже, у нашому прикладі перед тим, як дійти висновку, що не можна обирати поліном третього ступеня, необхідно впевнитись, що мультиколінеарність відсутня.

По-третє, змінні z, що визначаються як лінійні комбінації змінної x, будуть корелювати між собою у випадках, коли спостерігається великий зв'язок між самими початковими змінними. Тому оцінку параметрів моделі (7) роблять в умовах мультиколінеарності чинників. Однак мультиколінеарність чинників $z_0, \ldots, z_k$ в моделі (7) впливає на оцінки параметрів $b_0, b_1, \ldots, b_p$ дещо в меншій мірі, ніж якби ці оцінки були отримані шляхом застосування звичайного 1МНК безпосередньо до моделі (1) в умовах мультиколінеарності чинників $x_t, x_{t-1}, \ldots, x_{t-p}$. Це пов'язано з тим, що в моделі (7) мультиколінеарність веде до пониження ефективності оцінок $c_0, \ldots, c_k$, тому кожний з параметрів $b_0, \ldots, b_p$, які визначаються як лінійні комбінації оцінок $c_0, \ldots, c_k$, буде представляти собою більш точну оцінку.

Розглянемо переваги методу Алмона.

По-перше, він забезпечує гнучкий спосіб залучення до моделі цілого ряду лагових структур, у той час як модель Койка досить суворо вимагає від коефіцієнтів, щоб вони спадали в геометричній прогресії.

По-друге, на відміну від методу Койка, в моделі Алмона не потрібно турбуватися по те, що серед пояснювальних змінних є залежні, а отже, ми позбавляємося проблем, які можуть виникнути у зв'язку з цим. Нарешті, якщо обрано поліном досить низького ступеня, кількість оцінюваних коефіцієнтів $\left(c_i\right)$ буде набагато меншою, ніж початкова їх кількість $\left(b_j\right)$.

ТЕМА 12. СИСТЕМИ ЕКОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

При моделюванні складних економічних об'єктів досить часто розглядається не одне, а декілька зв'язаних між собою рівнянь, тобто модель описується системою рівнянь. І тому виникає питання про оцінку параметрів системи рівнянь. У загальному випадку система взаємозалежних рівнянь має вигляд:

$$\begin{aligned} &y_1 = b_{12}y_2 + \ldots + b_{1M}y_M + \gamma_{11}x_1 + \ldots + \gamma_{1N}x_N + \varepsilon_1, \\ &y_2 = b_{21}y_1 + \ldots + b_{2M}y_M + \gamma_{21}x_1 + \ldots + \gamma_{2N}x_N + \varepsilon_2, \\ &\ldots \\ &y_M = b_{M1}y_1 + \ldots + b_{M,M-1}y_{M-1} + \gamma_{M1}x_1 + \ldots + \gamma_{MN}x_N + \varepsilon_M, \end{aligned} \tag{1}$$

де $y_i \left(i = \overline{1, M}\right)$ – це ендогенні змінні, що залежать від раніше визначених змінних $x_i \left(i = \overline{1, N}\right)$. До раніше визначених змінних x_i належать незалежні екзогенні змінні і лагові ендогенні змінні.

Система рівнянь у вигляді (1) називається системою взаємозалежних рівнянь у структурній формі. Параметри b_{ij} називаються структурними параметрами чи коефіцієнтами.

З математичної точки зору, головна відмінність між ендогенними і раніше визначеними змінними полягає в тому, що раніше визначені змінні не корелюють із залишками, а ендогенні – корелюють.

Структурна форма моделі дозволяє бачити вплив змін довільної раніше визначеної змінної на значення ендогенної змінної.

Крім регресійних рівнянь, а вони називаються рівняннями поведінки, модель може включати тотожності. У тотожностях відсутні залишки ε. Тотожності дозволяють виключити деякі ендогенні змінні і розглядати систему регресійних рівнянь меншого виміру.

Так як у системі (1) ендогенні змінні, що стоять справа у рівнянні, корелюють із залишками, то передумови 1МНК не виконуються, і тому оцінки коефіцієнтів методом 1МНК будуть зміщеними і необґрунтованими. Тому для оцінки структурних коефіцієнтів структурна форма системи рівнянь перетворюється до скороченої форми.

Скороченою формою структурної моделі є модель, у якій ендогенні змінні виражені як функції лише раніше визначених змінних. Скорочена форма записується двома способами. Перший – згорнуте вираження ендогенних змінних як функцій раніше визначених змінних. Наприклад, маємо систему у структурній формі

$$\begin{aligned} &y_1 = b_{12}y_2 + \gamma_{11}x_1 + \gamma_{12}x_2 + \varepsilon_1, \\ &y_2 = b_{21}y_1 + \gamma_{21}x_1 + \gamma_{22}x_2 + \varepsilon_2, \end{aligned} \tag{2}$$

тоді система у скороченій формі матиме вигляд

$$y_1 = \pi_{11} x_1 + \pi_{12} x_2 + u_1,$$
$$y_2 = \pi_{21} x_1 + \pi_{22} x_2 + u_2. \tag{3}$$

Другий спосіб запису скороченої форми – розгорнуте вираження ендогенних змінних через раніше визначені змінні, структурні параметри та випадкові величини. У цьому випадку скорочена форма матиме вигляд:

$$y_1 = \frac{b_{12}\gamma_{21} + \gamma_{11}}{1 - b_{21}b_{12}} x_1 + \frac{b_{12}\gamma_{22} + \gamma_{12}}{1 - b_{21}b_{12}} x_2 + \frac{b_{12}\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{1 - b_{21}b_{12}},$$
$$y_2 = \frac{b_{21}\gamma_{11} + \gamma_{21}}{1 - b_{21}b_{12}} x_1 + \frac{b_{21}\gamma_{12} + \gamma_{22}}{1 - b_{21}b_{12}} x_2 + \frac{b_{21}\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{1 - b_{21}b_{12}}.$$

Для збігу двох типів запису скороченої форми необхідно, щоб виконувалося таке співвідношення між π_{ij} та структурними параметрами:

$$\pi_{11} = \frac{b_{12}\gamma_{21} + \gamma_{11}}{1 - b_{21}b_{12}},\ \pi_{12} = \frac{b_{12}\gamma_{22} + \gamma_{12}}{1 - b_{21}b_{12}},$$
$$\pi_{21} = \frac{b_{21}\gamma_{11} + \gamma_{21}}{1 - b_{21}b_{12}},\ \pi_{22} = \frac{b_{21}\gamma_{12} + \gamma_{22}}{1 - b_{21}b_{12}}. \tag{4}$$

Параметри скороченої форми вимірюють загальний (прямий та непрямий) вплив попередньо визначених змінних на ендогенні змінні, в той час як структурні параметри вимірюють тільки прямий вплив.

Таким чином, параметри скороченої форми можна застосовувати для прогнозування та аналізу економічної діяльності, тому що вони дають одночасно оцінку прямого та непрямого впливу екзогенних змінних на ендогенні змінні.

Далі розглянемо метод оцінки параметрів структурної форми.

Непрямий метод найменших квадратів (НМНК)

Ідея методу дуже проста:

1) будуємо скорочену форму системи (1);
2) окремо до кожного рівняння скороченої форми застосовуємо метод 1МНК, а це можливо, тому що у правій частині скороченого рівняння знаходяться раніше визначені змінні, що не корелюють із залишками;
3) по оцінкам коефіцієнтів скороченої форми отримуємо оцінки коефіцієнтів структурної форми.

Тобто якщо розглядати систему (2), то, оцінивши методом 1МНК коефіцієнти π_{ij} скороченої форми (3), знайдемо із системи (4) оцінки коефіцієнтів b_{ij}, γ_{kl} структурної форми.

Проблема ототожнення (ідентифікації) в системі рівнянь

Якщо ми будемо оцінювати коефіцієнти структурної форми методом НМНК, то можливі такі ситуації при розв'язанні системи (4):

1) коефіцієнти b_{ij} і γ_{kl} знаходяться однозначно (кількість коефіцієнтів структурної і скороченої форм співпадають), тоді система рівнянь називається точно ототожненою або точно ідентифікованою;
2) якщо кількість коефіцієнтів скороченої форми більша за кількість структурних коефіцієнтів, то у цьому випадку можна отримати два або і більше значень одного структурного коефіцієнта. У цьому випадку система є переототожненою або зверх ідентифікованою;
3) якщо ж кількість коефіцієнтів скороченої форми менша за кількість структурних коефіцієнтів, то структурні коефіцієнти не можуть бути оцінені через коефіцієнти скороченої форми. Тоді ми кажемо, що система є неототожненою або неідентифікованою.

Якщо система точно ототожнена або пере ототожнена, то кажемо, що система ототожнена.

Вважаємо, що система ототожнена, якщо кожне із рівнянь ототожнене. Коли хоч одне із рівнянь неототожнене, то і система неототожнена. Якщо всі рівняння точно ототожнені, а одне – переототожнене, то і система переототожнена.

Розглянемо правила ототожнення рівнянь системи. Введемо такі позначення:

M – кількість ендогенних змінних у системі;

m – кількість ендогенних змінних у окремому рівнянні;

N – кількість раніше визначених змінних у системі;

n – кількість раніше визначених змінних у окремому рівнянні.

Необхідна умова ототожнення (умова порядку)

Для ототожнення рівняння необхідно, щоб кількість відсутніх раніше визначених змінних у цьому рівнянні була не меншою за кількість включених до нього ендогенних змінних мінус одиниця, тобто

$$N - n \geq m - 1. \qquad (5)$$

Приклад 13. Розглянемо систему (2). Перевіримо виконання необхідної умови ототожнення.

Нагадаємо, що система (2) має вигляд:

$$\begin{aligned} (1)\ & y_1 = b_{12}\,y_2 + \gamma_{11}\,x_1 + \gamma_{12}\,x_2 + \varepsilon_1, \\ (2)\ & y_2 = b_{21}\,y_1 + \gamma_{21}\,x_1 + \gamma_{22}\,x_2 + \varepsilon_2. \end{aligned}$$

Розглянемо перше рівняння системи. Для нього: $M = 2$, $m = 2$, $N = 2$, $n = 2$. Перевіряємо умову (5):

$$2 - 2 \overset{?}{\geq} 2 - 1.$$

Так як нерівність (5) не виконується, то перше рівняння системи (2) неототожнене. Зрозуміло, що і друге рівняння неототожнене, тому що необхідна умова ототожнення не виконується.

Необхідна і достатня умова ототожнення (рангова умова ототожнення)

У системі, що містить M рівнянь з M ендогенними змінними, рівняння буде ототожненим тоді і тільки тоді, коли ранг матриці A, утвореної з коефіцієнтів, котрі відповідають пропущеним змінним рівняння, що розглядається, у всіх інших рівняннях моделі, крім даного, дорівнює $M - 1$.

Приклад 14. Розглянемо систему рівнянь і виясними, чи ототожнене перше рівняння.

$$y_1 - \beta_{12} y_2 - \beta_{13} y_3 - \gamma_{11} x_1 = \varepsilon_1, \qquad (1)$$

$$y_2 - \beta_{23} y_3 - \gamma_{21} x_1 - \gamma_{22} x_2 = \varepsilon_2, \qquad (2)$$

$$y_3 - \beta_{31} y_1 - \gamma_{31} x_1 - \gamma_{32} x_2 = \varepsilon_3, \qquad (3)$$

$$y_4 - \beta_{41} y_1 - \beta_{42} y_2 - \gamma_{43} x_3 = \varepsilon_4. \qquad (4)$$

Для полегшення пояснення запишемо попередню систему у вигляді таблиці 1.

Таблиця 1

				+		+	+
№ рівняння	y_1	y_2	y_3	y_4	x_1	x_2	x_3
(1)	1	$-\beta_{12}$	$-\beta_{13}$	0	$-\gamma_{11}$	0	0
(2)	0	1	$-\beta_{23}$	0	$-\gamma_{21}$	$-\gamma_{22}$	0
(3)	$-\beta_{31}$	0	1	0	$-\gamma_{31}$	$-\gamma_{32}$	0
(4)	$-\beta_{41}$	$-\beta_{42}$	0	1	0	0	$-\gamma_{43}$

Перевіримо виконання необхідної умови ототожнення для рівняння (1). Маємо: $M = 4$, $m = 3$, $N = 3$, $n = 1$. Тоді нерівність $N - n \geq m - 1$ має вигляд: $3 - 1 \overset{?}{\geq} 3 - 1$, тобто $2 = 2$. Отже, перше рівняння може бути ототожненим.

Розглянемо рангову умову ототожнення для рівняння (1). У таблиці (1) значком (+) позначені змінні, що пропущені у рівнянні (1). Тоді матриця A має вигляд:

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_{22} & 0 \\ 0 & -\gamma_{32} & 0 \\ 1 & 0 & -\gamma_{43} \end{pmatrix}.
$$

Зрозуміло, що ранг матриці A менший трьох, тому що перший і третій стовпчики лінійно залежні або детермінант матриці A дорівнює нулеві. Маємо, що $rang\,A < 3$, а $M - 1 = 4 - 1 = 3$. Отже, необхідна і достатня умова ототожнення першого рівняння не виконується. Це означає, що рівняння (1) – неототожнене.

Аналогічно можна показати, що рівняння (2) і (3) неототожнені, а рівняння (4) – ототожнене.

Використовуючи умови порядку і рангу, можна сформулювати загальне правило ототожнення структурного рівняння системи, що має M рівнянь.

1. Якщо $N - n > m - 1$ і ранг матриці A дорівнює $M - 1$, то відповідне рівняння переототожнене.
2. Якщо $N - n = m - 1$ і ранг матриці A дорівнює $M - 1$, то рівняння точно ототожнене.
3. Якщо $N - n \geq m - 1$ і ранг матриці A менший за $M - 1$, то рівняння неототожнене.
4. Якщо $N - n < m - 1$, то структурне рівняння неототожнене. У цьому випадку ранг матриці A менший за $M - 1$.

Двокроковий метод найменших квадратів оцінки параметрів системи у структурній формі

Якщо система точно ототожнена, то коефіцієнти системи в структурній формі рівнянь оцінюються непрямим методом найменших квадратів. При умові, що система переототожнена, для оцінки коефіцієнтів системи у структурній формі використовують двокроковий метод найменших квадратів.

Розглянемо систему (1):

$$
\begin{aligned}
&y_1 = b_{12}\,y_2 + \dots + b_{1M}\,y_M + \gamma_{11}\,x_1 + \dots + \gamma_{1N}\,x_N + \varepsilon_1, \\
&\dots \\
&y_M = b_{M1}\,y_1 + \dots + b_{M,M-1}\,y_{M-1} + \gamma_{M1}\,x_1 + \dots + \gamma_{MN}\,x_N + \varepsilon_M.
\end{aligned} \qquad (1)
$$

Так як ендогенні змінні правої частини системи корелюють із залишками, то застосовувати метод 1МНК не можна. Тому необхідно «очистити» ендогенні змінні правої частини, що без запізнень, від впливу залишків. Для цього можна скористатися інструментальними змінними, які досить сильно корелюють з ендогенними змінними правої частини системи, але не корелюють із залишками, або скористатися двокроковим методом найменших квадратів (2МНК).

Розглянемо алгоритм двокрокового методу найменших квадратів:

1. Систему рівнянь переписуємо у скороченій формі і оцінюємо коефіцієнти кожного рівняння методом 1МНК, розраховуємо теоретичні значення ендогенних змінних.

   Тобто розглядаємо систему рівнянь:

$$y_1 = \alpha_{11} x_1 + \ldots + \alpha_{1N} x_N + u_1,$$
$$\ldots$$
$$y_M = \alpha_{M1} x_1 + \ldots + \alpha_{MN} x_N + u_M,$$

   коефіцієнти оцінюємо методом 1МНК і розраховуємо $\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_M$.

2. У кожному рівнянні системи (1) у структурній формі замінюємо значення ендогенних (без запізнень) змінних правої частини на розраховані у першому пункті теоретичні значення і до кожного рівняння застосовуємо метод 1МНК.

   Отже, отримаємо таку систему:

$$y_1 = b_{12} \hat{y}_2 + \ldots + b_{1M} \hat{y}_M + \gamma_{11} x_1 + \ldots + \gamma_{1N} x_N + \varepsilon_1,$$
$$\ldots$$
$$y_M = b_{M1} \hat{y}_1 + \ldots + b_{M,M-1} \hat{y}_{M-1} + \gamma_{M1} x_1 + \ldots + \gamma_{MN} x_N + \varepsilon_M,$$

   коефіцієнти якої оцінюємо методом 1МНК.

Зауваження 1. При побудові системи у скороченій формі не обов'язково у рівняннях використовувати усі раніше визначені змінні. Можна обирати тільки найбільш впливові змінні.

Зауваження 2. Метод 2МНК розроблений для переототожнених систем, але його можна використовувати і для точно ототожнених систем, і тоді оцінки НМНК і 2МНК співпадають.

Приклад 15. Розглянемо систему

$$y_1 = \beta_0 + \beta_1 y_2 + \beta_2 x_1 + u_1,$$

$$y_2 = \beta_3 + \beta_4 y_1 + \beta_5 x_2 + \beta_6 x_3 + u_2$$

при таких початкових даних:

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
1	0.23	0.78	0.4	9.26	13.26
2	0.24	0.75	0.26	9.38	10.16
3	0.19	0.68	0.4	12.11	13.72
4	0.17	0.7	0.5	10.81	12.85
5	0.23	0.62	0.4	9.35	10.63
6	0.43	0.76	0.19	9.87	9.12
7	0.31	0.73	0.25	8.17	25.83
8	0.26	0.71	0.44	9.12	23.39
9	0.49	0.69	0.17	5.88	14.68
10	0.36	0.73	0.39	6.3	10.05

Необхідно оцінити коефіцієнти системи.

Використовуючи умови порядку і рангу ототожнення систем, легко показати, що перше рівняння переототожнене, а друге – точно ототожнене. Тому для оцінки коефіцієнтів скористаємося методом 2МНК. Будуємо таку систему рівнянь:

$$y_1 = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \varepsilon_1,$$

$$y_2 = \alpha_4 + \alpha_5 x_1 + \alpha_6 x_2 + \alpha_7 x_3 + \varepsilon_2$$

і оцінюємо коефіцієнти кожного рівняння методом 1МНК. Отримали такі два регресійні рівняння:

$$y_1 = 16.644 - 18.196\, x_1 - 0.305\, x_2 - 6.194\, x_3,$$

$$y_2 = 15.671 - 4.124\, x_1 + 0.637\, x_2 - 1.639\, x_3.$$

Розраховуємо $\hat{y}_1$, $\hat{y}_2$:

$$\hat{y}_1 = \left(9.743,\ 10.438,\ 10.502,\ 10.240,\ 9.792,\ 7.411,\ 9.232,\ 8.971,\ 6.465,\ 7.455\right)^T,$$

$$\hat{y}_2 = \left(14.564,\ 14.733,\ 14.665,\ 14.596,\ 14.462,\ 14.070,\ 14.448,\ 14.330,\ 13.811,\ 14.012\right)^T.$$

Далі розглядаємо систему

$$y_1 = \beta_0 + \beta_1 \hat{y}_2 + \beta_2 x_1 + u_1,$$

$$y_2 = \beta_3 + \beta_4 \hat{y}_1 + \beta_5 x_2 + \beta_6 x_3 + u_2$$

і до кожного рівняння застосовуємо метод 1МНК.

Отримаємо таку систему:

$$\hat{y}_1 = -37.986 + 3.352\, \hat{y}_2 - 3.979\, x_1,$$

$$\hat{y}_2 = 11.899 + 0.227\, \hat{y}_1 + 0.706\, x_2 - 0.236\, x_3.$$

Оцінка методом 2МНК статистичних характеристик системи рівнянь

Нехай в i-е регресійне рівняння крім n_i раніше визначених змінних входять також m_i незапізнених ендогенних змінних, тоді для t-го спостереження запишемо

$$y_{it} = b_{1i}\, y_{1t} + \ldots + b_{m_i i}\, y_{m_i t} + \gamma_{1i}\, x_{1t} + \ldots + \gamma_{n_i i}\, x_{n_i t} + u_{it}. \qquad (6)$$

Тепер рівняння (6) запишемо у матричній формі:

$$\underset{T\times 1}{y_i} = \underset{T\times m_i}{Y_i}\ \underset{m_i\times 1}{b_i} + \underset{T\times n_i}{X_i}\ \underset{n_i\times 1}{\gamma_i} + \underset{T\times 1}{u_i} \tag{7}$$

Зазначимо, що у i-му рівнянні знаходиться $n_i + m_i$ змінних (регресорів). У рівнянні (7) об'єднаємо матриці даних у загальну матрицю, а вектори структурних коефіцієнтів – у загальний вектор:

$$Z_i = \left[Y_i \middle| X_i\right],\ \alpha_i^T = \left[b_i^T \middle| \gamma_i^T\right],$$

тоді (7) матиме вигляд:

$$y_i = Z_i\,\alpha_i + u_i. \tag{8}$$

Тепер перейдемо до оцінки статистичних характеристик системи рівнянь.

1. Прогноз регресанда (теоретичне значення) по окремому рівнянню.

Такий прогноз по i-му рівнянню, що оцінене методом 2МНК, можна зробити за формулою:

$$\hat{y}_i = Y_i\,\hat{b}_i + X_i\,\hat{\gamma}_i = Z_i\,\hat{\alpha}_i.$$

Варто зазначити, що використовуються «неочищені» матриці Y_i і Z_i.

2. Розрахунок вектора залишків.

Вектор залишків $\hat{u}_i$ розраховується таким чином:

$$\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - Y_i\,\hat{b}_i - X_i\,\hat{\gamma}_i = y_i - Z_i\,\hat{\alpha}_i. \tag{9}$$

Тут теж використовуються «неочищені» матриці Y_i і Z_i.

Вектор залишків, розрахований за формулою (9), використовується у якості вхідної інформації у тестах на автокореляцію і гетероскедастичність, а також при оцінці дисперсії залишків і розрахунку коефіцієнта детермінації.

3. Оцінка дисперсії залишків.

Дисперсія залишків $\sigma_{u_i}^2$ в i-му структурному рівнянні розраховується таким чином:

$$\hat{\sigma}_{u_i}^2 = \frac{\hat{u}_i^T\ \hat{u}_i}{T - n_i - m_i}, \tag{10}$$

де $\hat{u}_i$ взяте з виразу (9).

4. Оцінка асимптотичної коваріаційної матриці коефіцієнтів.

Оцінник асимптотичної коваріаційної матриці 2МНК-оцінника для α_i, заданого виразом

$$\widehat{\alpha}_i = \begin{pmatrix} \widehat{\gamma}_i \\ \widehat{\beta}_i \end{pmatrix} = \left(\widehat{Z}_i^T \widehat{Z}_i \right)^{-1} \widehat{Z}_i^T y_i,$$

має вигляд:

$$\widehat{\Sigma}_{\widehat{\alpha}_i} = \widehat{\sigma}^2_{u_i} \left(\widehat{Z}_i^T \widehat{Z}_i \right)^{-1},$$

де $\widehat{\sigma}^2_{u_i}$ розраховується за формулою (10).

5. Точковий прогноз.

Точковий прогноз отримується просто підстановкою значень екзогенних змінних до скороченої форми рівнянь.

Рекурсивні системи

Особливим випадком системи рівнянь є рекурсивні системи.

Модель називається рекурсивною, якщо її структурні рівняння можна впорядкувати таким чином, що перше містить у правій частині лише раніше визначені змінні; друге містить раніше визначені змінні та першу ендогенну змінну і так далі.

Наприклад:

$$y_1 = f_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_k, u_1\right),$$

$$y_2 = f_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, u_2\right),$$

$$y_3 = f_3\left(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, u_3\right),$$

…

Особливість рекурсивної моделі це те, що є можливість оцінити її рівняння послідовно за допомогою 1МНК. Так як у першому рівнянні справа тільки екзогенні змінні, то можна застосувати 1МНК і отримати оцінене значення y для першої ендогенної змінної. Маючи оцінку $\widehat{y}_1$, можна оцінювати коефіцієнти другого рівняння, тому що x не корелюють з u_2 і $\widehat{y}_1$ теж не корелює з u_2, і т. д.

Рекурсивні системи називають ще трикутними системами, тому що коефіцієнти при ендогенних змінних утворюють трикутну матрицю, головна діагональ якої містить одиниці.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Грубер Й. Эконометрия. Введение в эконометрию. Т. 1. – К., 1996. – 397 с.
2. Доугерти К. Введение в эконометрику. – М.: МГУ, 1999. – 102 с.
3. Под ред. Н. Н. Елисеевой. Эконометрика. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 242 с.
4. Кремер Н. Ш., Путко Б. А. Эконометрика. – М.: ЮНИТИ, 2002. – 311 с.
5. Лук'яненко І., Краснікова Л. Економетрика. – К.: Знання, 1998. – 494 с.
6. Магнус Я. Р., Катышев П. К., Перестецкий А. А. Эконометрика. Начальный курс. – М.: Дело, 1998. – 246 с.
7. Толбатов Ю. А. Економетрика. – К.: Четверта хвиля, 1997. – 219 с.

ЗМІСТ