МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ОДЕССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени И. И. МЕЧНИКОВА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ЭКОНОМИКИ И МЕХАНИКИ

С. А. Щёголев

ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

ДЛЯ СТУДЕНТОВ ГУМАНИТАРНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

ОДЕССА
ОНУ
2015

УДК 51:1
ББК 22.1
Щ92

Рекомендована в печать научно-методическим советом
ОНУ имени И. И. Мечникова.
Протокол № 1 от 16.10.2014 г.

Рецензенты:

П. Д. Варбанец – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой компъютерной алгебры и дискретной математики Одесского национального университета имени И. И. Мечникова;

Ю. И. Бурименко – доктор технических наук, профессор кафедры управления проектами и системного анализа Одесской национальной академии связи имени А. С. Попова;

А. Ю. Цофнас – доктор философских наук, профессор, заведующий кафедрой философии и методологии науки Одесского национального политехнического университета.

Щёголев С. А.

Щ92 Философия математики**:** курс лекций / С. А. Щёголев. - Одесса : «Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова», 2015. – 114 с.

ISBN 978-617-689-125-3

Изложены некоторые вопросы философии и методологии математики, рассмотрена связь математики с другими науками, в том числе гуманитарными. Значительное внимание уделено известным философско-математическим школам – Фалеса, Пифагора. Рассмотрены некоторые важные методы математических доказательств. Охарактеризованы основные направления в философии математики.

Данный курс лекций предназначен для студентов гуманитарных специальностей.

УДК 512.1
ББК 22.1

ISBN 978-617-689-125-3

Лекция 1. Математика, особенности, отличающие её от других наук

Математика (от греч. $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$ – наука) – это наука о количественных отношениях, пространственных формах и логических структурах окружающего мира.

Следует особо подчеркнуть, что математика рассматривает эти отношения и формы сами по себе вне связи с их конкретным содержанием, что не означает, конечно, оторванности математики от реального мира. Следовательно, в предмет математики могут входить лишь такие формы и отношения, которые объективно обладают соответствующей степенью независимости от содержания.

Рассмотрим некоторые примеры. Возьмём какое-либо число, скажем, число 5. Существует ли число 5 само по себе, реально? Очевидно, что нет. То, что изображается значком «5», на самом деле не число 5, а лишь символ, его обозначающий. Можно было и другой символ использовать, скажем «V» или «…..». Числа сами по себе реально не существуют, это лишь понятие, отражающее количественное отношение между вещами.

Возьмём какую-нибудь геометрическую фигуру, например, куб. Он характеризует пространственную форму предмета и может рассматриваться безотносительно к самой сущности предмета. Куб является отражением, абстракцией от бесчисленного множества реальных кубов, которые, строго говоря, таковыми не являются. То есть нет реального тела, которое в точности являлось бы геометрическим кубом. Так же, как и в точности шаром, пирамидой и т. д. Таким образом, понятие «куб» представляет собой идеализацию, абстракцию, и в реальной действительности не существует.

В математике рассматриваются не только формы и отношения, непосредственно абстрагируемые из действительности, но и *логически возможные*, определяемые на основе уже известных форм и отношений. Таким образом, предметом математики являются абстрактные формы вообще, иначе эти формы можно назвать *математическими структурами*. Их достоинство в том, что они могут применяться к любым объектам.

Укажем некоторые существенные особенности математики.

1. Форма, отвлечённая от содержания, выступает как самостоятельный объект.

Абстракции и идеализации есть и в других науках. Например, в русском языке имеются понятия, характеризующие качество предмета, скажем, «чернота». Самой по себе «черноты» не существует, так же, как не существует самой по себе «красоты», «мерзости» и т.д. Тем не менее, понятия такие есть, и это тоже некоторые абстракции от реальных вещей. Но в других науках абстракциям не придаётся такого доминирующего значения, они всегда сверяются с действительностью. Математику же не заботит, например, то, что не существует абсолютно точных значений реальных величин (например, длины предмета хотя бы в силу его атомарной структуры). Величина, взятая отдельно от содержания, мыслится как допускающая неограниченное уточнение. От этого возможности применения математики не только не сужаются, а наоборот расширяются. Например, с помощью одних и тех же чисел можно считать совершенно разнородные по своему содержанию предметы – стулья, людей, атомы, планеты и т. д. И это очень удобно. Современная физика установила, что реальное пространство не является точно евклидовым. Но от этого евклидова геометрия не является нестрогой или неточной. Её строгость и точность определяются соответствием её выводов с исходными посылками.

2. Математические результаты получаются путём логического вывода из основных понятий и посылок; ссылка на опыт не считается математическим аргументом. Каким бы бесспорным ни казался данный факт, для математика он не является фактом до тех пор, пока его наличие не выведено строго логическим путём из принятых основных постулатов. Кроме того, часто случается так, что ссылка на опыт просто невозможна, например, при оперировании с бесконечностью, с многомерными пространствами и т. п.

Рассмотрим следующий пример из геометрии (рис. 1). Один из постулатов евклидовой геометрии гласит, что всякая прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Это разбиение обладает следующим свойством. Если концы отрезка принадлежат одной полуплоскости, то отрезок не пересекает прямую (отрезок AB на рис. 1). Если концы отрезка принадлежат разным плоскостям, то отрезок пересекает прямую (отрезок CD на рис.1).

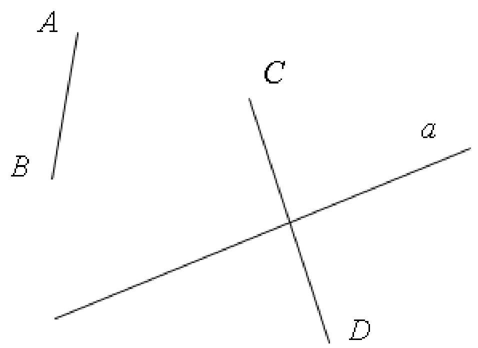


Рис. 1

Докажем следующую теорему.

Теорема. *Если прямая, не проходящая ни через одну из вершин треугольника, пересекает одну из его сторон, то она пересекает одну и только одну из двух других его сторон.*

Справедливость этой теоремы на интуитивном уровне не вызывает сомнений. Но математика не доверяет полностью интуиции и повседневному опыту, поэтому это, казалось бы, очевидное утверждение надо доказывать, опираясь лишь на постулаты евклидовой геометрии и следствия из них (в частности на вышеприведенный постулат), что мы сейчас и сделаем.

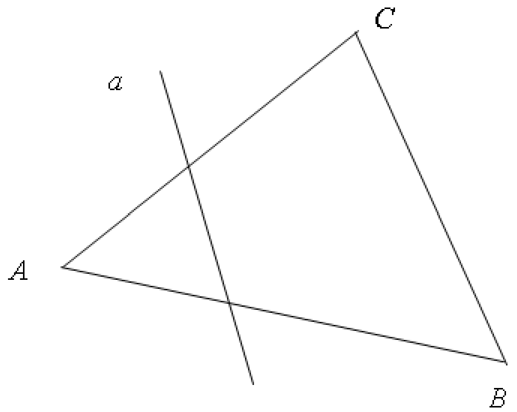
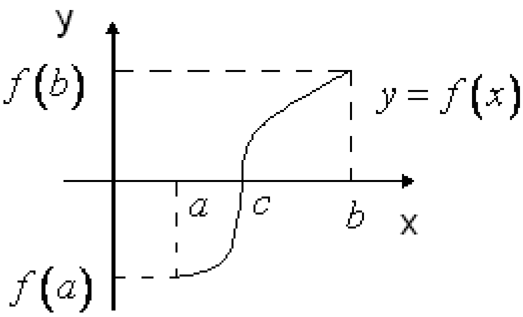


Рис. 2

Пусть прямая a не проходит ни через одну из вершин треугольника ABC и пересекает сторону AB (рис. 2). Прямая a разбивает плоскость на две полуплоскости, причём точки A и B лежат в разных полуплоскостях, поскольку прямая a пересекает отрезок AB. Точка C лежит в одной из них, так как прямая a не проходит через точку C. Если точка C лежит в одной полуплоскости с точкой B, то прямая a не пересекает отрезок BC, но пересекает отрезок AC. А если точка C лежит в одной полуплоскости с точкой A, то прямая a не пересекает отрезок AC, но пересекает отрезок BC. В обоих случаях прямая a пересекает один и только один из отрезков AC или BC. Теорема доказана.

Приведём ещё один пример. В математическом анализе хорошо известна так называемая первая теорема *Больцано–Коши* или *теорема о корне*. Суть её состоит в том, что если непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция принимает на концах этого отрезка значения разных знаков, то между точками a и b обязательно найдётся такая точка c, в которой функция обращается в нуль.

С геометрической точки зрения справедливость этой теоремы совершенно очевидна: если непрерывная кривая линия переходит с одной стороны оси на другую, то она пересекает эту ось (рис. 3) – утверждение, сходное с вышеприведенной аксиомой Евклида. Вместе с тем строгое логическое доказательство



этой теоремы достаточно сложное и опирается на вспомогательное утверждение – так называемую лемму о вложенных промежутках[1].

Рис. 3

Сказанное, безусловно, не означает, что интуиция, опыт в математических исследованиях не играют никакой роли. Наоборот, их роль огромна, они позволяют предугадать характер результата, наметить способы его получения. Но окончательная формулировка результата может быть получена лишь строго логическим путём. Да и сама плодотворная и правильная интуиция вырабатывается лишь на основе прочных знаний, а в математике такие знания основаны на логических доказательствах.

3. Отличительной особенностью математики является непреложность её выводов. Последующие результаты не могут отменить предыдущие (в отличие, скажем, от физики, где была признана, например, несостоятельность теории теплорода). Это объясняется логической связью с принятыми посылками. Вывод обязателен постольку, поскольку приняты его основания. В частности, геометрия Лобачевского нисколько не отменяет геометрию Евклида (как ошибочно полагают некоторые несведущие люди), поскольку опирается на иные исходные предположения.

4. Наличие ряда *ступеней абстракции* и образование новых понятий на базе ранее сложившихся. Например, на основе понятия натурального числа сложились понятия рациональных, вещественных, комплексных чисел, что явилось результатом восхождения к всё более высоким ступеням абстракции.

5. Универсальность применения математики. В любой области, где удаётся поставить задачу математически, математика даёт результат с точностью, соответствующей точности исходных данных. Если же получено приближённое решение задачи, то всегда даётся оценка его погрешности.

Одни и те же математические модели могут описывать совершенно разнородные по своей сути явления и процессы. Например, формула

---

[1] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1, М., 1969. – С. 168–169.

$$F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

описывает и закон Всемирного тяготения Ньютона, и закон Кулона притяжения электрических зарядов. По меткому выражению Анри Пуанкаре *математика – это искусство давать разным вещам одно и то же наименование.* Такая способность математики объясняется именно её абстрактностью, а значит независимостью от какой-то конкретной ситуации.

Лекция 2. Характеристика метода абстракции

Как уже отмечалось, основным методом математики является *метод абстракции.* В самом широком смысле слова *абстракция* означает возможность рассмотрения предметов и процессов с какой-либо одной точки зрения и отвлечения от других, в данном отношении несущественных сторон, моментов и обстоятельств. В диалектике абстракция рассматривается как ступень на пути к конкретному знанию.

В естествознании и математике под абстрагированием, как правило, понимают процесс мысленного выделения одного или нескольких свойств или отношений, которые в данной ситуации рассматриваются как особо важные по сравнению со всеми другими свойствами. Такое отвлечение даёт возможность лучше изучить эти свойства и отношения, а через них и сами вещи. Например, замена в механике реальных тел абсолютно твёрдыми телами или даже материальными точками помогает нам лучше понять законы механического движения тел.

Отвлекаясь от множества свойств и отношений, мы не разрываем естественных связей между вещами. Сами эти связи неодинаковы – одни более важны в данном отношении, другие менее важны. А это и даёт возможность отвлекаться от второстепенных свойств. Таким образом, предпосылки для абстрагирования существуют в самой реальной действительности.

Вопрос о том, как происходит абстрагирование свойств вещей, был предметом многочисленных дискуссий на протяжении всей истории науки. Современное понятие об абстракции восходит к Аристотелю, согласно которому абстрагирование – это метод намеренно одностороннего изучения реальности, субъективный прием мысленного разделения целого и полагание отдельно-сущими его частей. В принципе такое полагание не заключает «никакой ошибки» и объективно оправдано многообразием свойств (аспектов) целого, порою столь различных, что они не могут стать предметом одной науки. Наука же, по

Аристотелю, исследует общее, а общее познается посредством абстракции. Поэтому абстракция не только является основной предпосылкой научного познания, но и «создает науку». В этом смысле преходящие явления опыта важны не сами по себе, а в той мере, в какой они причастны к какой-либо абстракции. Аристотель также отличал эмпирические абстракции от теоретических, полагая, что последние необходимы там, где постигаемое мыслью и сама мысль неотделимы друг от друга (как, напр., в математике, где знание и предмет знания по существу совпадают).

Джоном Локком была разработана *эмпирическая теория абстракции*, согласно которой выделяются сходные свойства вещей и отбрасываются различные. «Если из сложных идей, означаемых именами «человек» и «лошадь» устранить те особенности, которыми они различаются, удержать только то, в чём они сходятся, образовать из этого новую идею и дать ей имя «животное», то получается более общий термин, охватывающий вместе с человеком и различные другие существа».[2]

Общее свойство, абстрагируемое таким способом, должно иметь чувственно-наглядный характер, так как основывается на эмпирическом созерцании сходных и несходных свойств. К математике такая теория неприменима, там процесс абстрагирования идёт совершенно иначе. Например, при введении понятия прямой линии мы абстрагируемся от длины и толщины отдельных линий, выделяя лишь свойство «прямизны», которое у реальных линий отсутствует. Такие свойства возникают в процессе идеализации, а не в результате отбрасывания других свойств линий, и приписываются вещам на основании определённых теоретических допущений.

В результате процесса абстракции возникают понятия, категории и законы, которые как раз и отображают существенные стороны реальной действительности. Всё, что возникает в процессе абстрактного мышления на основе данных чувственного опыта и практики, правильнее и глубже отражает действительность, чем непосредственный чувственный опыт.

С другой стороны абстракция служит отправной точкой обратного процесса – движения от абстрактного к конкретному. В ходе этого процесса отдельные существенные свойства и отношения предметов синтезируются, благодаря чему мы получаем возможность вскрывать закономерности реальных явлений.

Несмотря на крайнюю абстрактность математики, указанный метод лежит и в основе математического познания. Специфика предмета математики обу-

[2] Дж. Локк. Опыт о человеческом разуме. М., 1898. – С. 306–307.

славливает ряд важных особенностей математической абстракции. Поскольку в математических понятиях отражается лишь количественная сторона предметов и процессов, необходимо отвлечься от всех качественных особенностей и специфических свойств предметов и явлений. По сравнению с естествознанием процесс абстрагирования в математике идёт значительно дальше. Как отмечалось выше, происходит образование ряда ступеней абстракции – абстракции от абстракций. Многие абстрактные понятия, первоначально возникнув на базе опыта, в дальнейшем обращения к опыту не требуют – например, многомерные пространства, комплексные числа и т. д.

Наиболее распространёнными способами абстрагирования в математике являются абстракции отождествления, аналитическая или изолирующая абстракция и различные абстракции осуществимости, играющие важную роль в образовании понятия математической бесконечности. Наиболее фундаментальной является *абстракция отождествления*, с помощью которой выделяется свойство или отношение, общее всем исследуемым предметам. Поэтому такую абстракцию часто называют обобщающей. Например, понятие числа характеризует количественную сторону вещей, которые сами по себе могут быть совершенно разнородными по своему содержанию. Одно и то же число 5 может означать и количество пальцев на руке, число звёзд в каком-либо созвездии, число атомов в молекуле и т. д. Абстракция отождествления начинается с установления отношения типа равенства между исследуемыми множествами объектов. Например, для определения понятия числа мы устанавливаем взаимно-однозначное соответствие между элементами каких-либо множеств. Для определения понятия геометрической фигуры мы должны рассмотреть отношение подобия фигур.

Наряду с абстракцией отождествления при образовании исходных понятий математики широко используется также такой специфический приём абстрагирования как *идеализация*. Под идеализацией понимают любой процесс схематического отображения действительности. В некотором смысле любой абстрактный способ изучения действительности включает в себя идеализацию. В физических науках мы говорим о таких идеальных объектах, как абсолютно твёрдое тело, абсолютно чёрное тело, математический маятник, идеальный газ, абсолютный нуль, не существующих в действительности. Эти объекты образуются с помощью своеобразного предельного перехода к некоторому значению какой-либо величины или какому-либо свойству, которые нельзя обнаружить в реальном эксперименте. В этом есть смысл, поскольку во многих случаях реально изучаемые объекты имеют свойства, в определённом смысле весьма близкие к свойствам этих идеальных объектов. И с определённой степенью приближения можно заменить изучение этих реальных объектов идеальными, что, как правило, упрощает исследование.

В математике идеализация идёт ещё дальше. Здесь мы отвлекаемся от всех качественных свойств вещей и принимаем в расчёт только чисто количественные и пространственные свойства и отношения предметов. Поэтому связь идеальных объектов математики с действительностью оказывается более сложной, чем в физике. Такие первоначальные понятия геометрии, как «точка», «прямая», «плоскость» возникали постепенно с помощью такого же процесса предельного перехода в мысленном эксперименте. Так практические задачи по измерению больших площадей наталкивали на мысль, что, если ширина границы площади очень мала по сравнению с самой площадью, то она очень мало влияет на ширину площади. Поэтому в целом ряде случаев этой шириной границы можно просто пренебречь и считать, что граница представляет собой линию, вообще не имеющую ширины. И таким путём можно было прийти к понятию прямой линии, как чистой протяжённости, лишённой толщины. Понятие точки можно было получить путём неограниченного уменьшения объёма тела. Например, в задачах, где размеры одного тела ничтожно малы по сравнению с размерами другого – такие ситуации встречаются, в частности, в задачах небесной механики.

Особой разновидностью идеализации в математике является метод идеальных элементов, играющий важную роль в построении математических теорий для придания им общности и законченности. Такими «идеальными» элементами являются, например, бесконечно удалённая точка, мнимые и комплексные числа, числовые идеалы и др.

Лекция 3. **Основные этапы развития математики**

В истории математики можно выделить несколько основных этапов, разделение на которые предложено академиком А. Н. Колмогоровым[3].

1 этап – период зарождения математики. Он начался с древнейших времён и закончился, по-видимому, в VI–V вв. до н.э. Первоначальные представления о числе и форме возникли у людей, видимо, в эпоху каменного века – палеолита, когда возникла потребность в счёте и измерениях. Затем на протяжении долгих веков эти понятия развивались, совершенствовались, и наконец, математика стала осознаваться как самостоятелная наука, имеющая собственный предмет и методы. С одной стороны происходило накопление фактического материала, с другой стороны его систематизация, формирование законов и правил, обычно без их обоснования, а в виде предписаний и рецептов. Особенно интенсивное развитие математики в этот период происходило в Древнем Египте, Вавилоне, Индии, Китае. Сведения о египетской математике дошли до нас в виде двух больших папирусов: папируса Ахмеса (или Ринда), написанному около 1800 г. до н.э., и московского папируса (около 2000 г. до н.э.). Папирус Ринда представляет собой собрание из 84 задач преимущественно частного прикладного характера. Тем не менее, полное его название весьма многообещающее: «Совершенное и основательное исследование всех вещей, понимание их сущности, познание всех тайн».

Приведём пример задачи и её решения из папируса Ринда. «Количество и его четвёртая часть дают вместе 15. Найди это количество». Современный пятиклассник легко решает эту задачу. Обозначая искомое количество через x, получаем уравнение: $x + x/4 = 15$. Решая его, получаем $x = 12$. Но в папирусе Ринда решение выглядит так: «Считай от 4. От них ты должен взять четверть, а именно 1. Вместе получится 5, то есть получился результат втрое меньший требуемого. Значит вместо 4 нужно взять число, втрое большее, а именно 12».

2 этап – период элементарной математики (VI,V в. до н.э. – XVI в. н.э.). Этот период характеризуется достижениями в области постоянных величин и элементарной геометрии. Элементарная математика, изучаемая в школе, большей частью была создана именно в этот период. Его важной особенностью является появление строгих математических доказательств. Математики стали интересоваться не только вопросом «как?» но и вопросом «почему?». Крупнейшими центрами развития математики в это период являлись Древняя Греция, а затем средневековый Восток и средневековая Европа.

[3] Колмогоров А. Н. Математика в её историческом развитии. М., 1991.

3 этап – период создания математики переменных величин (XVII – XIX вв. н. э.). В этот период появилось общее понятие функции, предела и на их основе возникновение дифференциального и интегрального исчисления. Его зачатки содержались ещё в античной науке, в частности, в трудах Евдокса, Архимеда, но должного развития не получили. Окончательно дифференциальное и интегральное исчисление в виде, близкому к современному, было оформлено в трудах И. Ньютона и Г. Лейбница, а затем Ж. Лагранжа, И. Бернулли, Л. Эйлера, О. Коши, К. Вейерштрасса, К. Гаусса и других. Важнейшим достижением этого периода является также создание аналитической геометрии в трудах Р. Декарта и П. Ферма.

4 этап (сер. XIX в. – сер. XX в.) характеризуется превращением математики в науку о *логически возможных чистых формах*. Появляются такие абстрактные разделы математики, как неевклидовы геометрии, топология, тензорный анализ, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, теория групп, теория множеств и другие.

5. С середины XX века начинается современный этап в развитии математики. Он характеризуется существенным расширением её предмета, появлением принципиально новых идей, проникновением математических методов практически во все области знания, в том числе и гуманитарные, появлением дисциплин на стыке математики с другими науками (например, математической экономики, математической лингвистики). Важную роль сыграло появление электронно-вычислительной техники, что стимулировало появление машинной математики, программирования, развитие численных методов решения прикладных задач. Особое значение приобретает исследование самих способов и возможностей математического вывода – математическая логика, теория алгоритмов, теория доказательств.

Как видим, длительность указанных периодов имеет тенденцию к сокращению. Каждый последующий период значительно короче предыдущего, что связано с ускорением развития человечества вообще, и научно-технического прогресса, в частности. Есть мнение, что сейчас мы стоим на пороге уже нового этапа в развитии математики.

Лекция 4. **Отношение математики к действительности и к другим наукам**

По мере восхождения к всё более высоким степеням абстракции связь математики с практикой становится менее непосредственной и осуществляется через другие науки. Взаимоотношения математики с этими другими науками сложны и многогранны. С одной стороны математика предоставляет этим наукам средства решения задач, в них возникающих. С другой стороны и сама развивается под влиянием этих наук. Для создания теории механических движений Ньютону пришлось ввести дифференциальное и интегральное исчисление, в частности, обыкновенные дифференциальные уравнения. Электромагнитная теория Максвелла потребовала введения векторного анализа и дифференциальных уравнений в частных производных. Для создания теории относительности Эйнштейну понадобилась риманова геометрия и аппарат тензорного анализа. Задачи экономического характера стимулировали развитие таких ветвей математики, как теория экстремальных задач, методы оптимизации.

Интересен анализ степени использования математики в различных науках XIX века, данный Ф. Энгельсом в его труде “Диалектика природы»[4]: применение математики в механике твёрдых тел – абсолютное, в механике газов – приблизительное, в физике – всё больше в виде попыток и относительное, в химии – простейшие уравнения 1-й степени, в биологии – нуль.

Сейчас такое деление вызывает улыбку. Даже во времена, когда была написана «Диалектика природы», уже сфера использования математических методов на самом деле была гораздо шире. А в настоящее время мы наблюдаем их проникновение практически во все области человеческого знания. В том числе и в сугубо гуманитарные сферы – социальные науки, филологию, лингвистику.

Более или менее серьёзное изучение естественных наук – в первую очередь физики, химии, биологии, геологии, а также экономики и других дисциплин немыслимо без овладения и систематического использования многих разделов математики – алгебры, геометрии, математического анализа, дифференциальных и интегральных уравнений, теории вероятностей и математической статистики, численных методов, методов оптимизации и многих других.

Особое место занимают отношения математики и логики, о них будет идти речь в Лекции 19.

Рассмотрим подробнее вопрос о взаимоотношении математики и лингвистики.

---

[4] Энгельс Ф. Диалектика природы. – Маркс К., Энгельс Ф. Сочинения. 2-е изд., т. 20.

Когда во второй половине 50-х годов лингвисты задумались о применении математических методов для исследования структуры языка и начали сотрудничать с математиками, это вызвало у очень многих их коллег удивление и даже шок — ведь они с детства были убеждены, что гуманитарные науки, одной из которых является лингвистика, с математикой и другими «точными» науками не имеют и не могут иметь ничего общего.

Между тем, наличие тесной связи между естественным языком и математикой вовсе не было в то время новым открытием. Л. С. Выготский писал в опубликованной впервые в 1934 году книге «Мышление и речь»: «Первым, кто увидел в математике мышление, происходящее из языка, но преодолевающее его, был, по-видимому, Декарт» и продолжал: «Наш обычный разговорный язык из-за присущих ему колебаний и несоответствий грамматического и психологического находится в состоянии подвижного равновесия между идеалами математической и фантастической гармонии и в непрестанном движении, которое мы называем эволюцией»[5].

Возникшее в Древней Греции учение о грамматических категориях уже представляло собой описание ряда важнейших аспектов строения языка с помощью абстрактных моделей, близких по стилю к тем моделям, которые были созданы древнегреческими математиками для описания пространственных форм; только привычность таких понятий, как падеж, род и т. п., ставших, как писал Х. Штейнталь, «нашей второй натурой», мешает нам понять, какого высокого уровня абстрактного мышления потребовало их создание. Так что удивляться следовало бы скорее тому, что первые попытки использовать для описания языкового «идеала математической гармонии» настоящие математические средства были предприняты лишь в середине XX столетия.

Можно указать две причины такого «запоздания». Во-первых, наука о языке после значительных шагов, сделанных в античную эпоху, снова начала по-настоящему развиваться только в XIX столетии, но в течение всего этого столетия главное внимание лингвистов было обращено на историю языка, и лишь в следующем веке, который вообще был для гуманитарных наук веком структурализма, лингвистика впервые после античного периода обратилась к изучению языковых структур, но уже на новом уровне. Когда лингвисты осознали, что язык представляет собой, говоря словами Ф. де Соссюра, «систему чистых отношений», т. е. систему знаков, физическая природа которых несуще-

---

[5] Выготский Л. С. Мышление и речь. Изд. 5, испр. — Издательство "Лабиринт", М., 1999. — 352 с.

ственна, а существенны только отношения между ними, стала совершенно очевидна параллель между языком и математическими конструкциями, которые тоже являются «системами чистых отношений», и уже в начале XX столетия тот же де Соссюр мечтал об исследовании языка математическими средствами.

Во-вторых, в математике в начале Нового времени вышли на первый план количественные методы, и только в XIX веке математики снова начали строить неколичественные абстрактные модели, отличавшиеся от античных более высоким уровнем абстракции, а также — что для нашей темы особенно важно — тем, что они могли использоваться для описания значительно более широкого круга явлений, чем пространственные формы; нередко такие модели оказывались удобным и даже необходимым средством для изучения явлений, о которых строившие их математики вовсе не думали и даже не знали об их существовании. Среди этих моделей были и те, которые впоследствии получили применение в лингвистике; особенно интенсивное развитие математических дисциплин, содержанием которых было их построение, пришлось на первую половину XX столетия. Поэтому встреча математики и лингвистики в середине этого столетия была вполне закономерна.

Одним из результатов этой встречи было возникновение новой математической дисциплины — математической лингвистики, предметом которой является разработка математического аппарата для лингвистических исследований. Центральное место в математической лингвистике занимает теория формальных грамматик, по характеру используемого в ней аппарата родственная математической логике и в особенности теории алгоритмов. Она доставляет формальные методы описания правильных языковых единиц различных уровней, а также, что особенно важно, формальные методы описания преобразований языковых единиц — как на одном уровне, так и межуровневых. К теории формальных грамматик примыкает теория синтаксических структур, значительно более простая в отношении аппарата, но не менее важная для лингвистических приложений. В математической лингвистике разрабатываются также аналитические модели языка, в которых на основе тех или иных — считающихся известными — данных о «правильных текстах» производятся формальные построения, результатом которых является описание каких-то «составных частей» механизма языка. На этом пути можно получить формальное описание некоторых традиционных грамматических понятий. Сюда же следует отнести описание смысла предложения с помощью аппарата интенсиональной логики («семантику Монтегю»).

Разумеется, с помощью математического аппарата можно описать только один из двух идеалов языка, о которых говорил Выготский; поэтому часто раздающиеся возражения против использования той или иной математической модели (или математических моделей вообще) на том основании, что такие-то и такие-то частные случаи она не охватывает, не имеют смысла: для описания присущих языку «колебаний и несоответствий» нужны совсем другие, не математические средства, и как раз четкое описание «математического идеала» могло бы помочь их находить, поскольку оно позволило бы ясно отграничивать в языке «фантастическое» от «математического». Но это пока что дело будущего.

Не меньшее, а может быть и большее значение, чем возникновение математической лингвистики, имело непосредственное проникновение в лингвистику фундаментальных математических идей и понятий — таких, как множество, функция, изоморфизм. В современной лингвистической семантике важную роль играют пришедшие из математической логики понятия предиката и квантора. (Первое из них возникло в логике еще тогда, когда она не отграничивалась от лингвистики, и теперь вернулось в лингвистику в обобщенном и математически обработанном виде.)

И, наконец, очень большое значение имеет уточнение языка лингвистических исследований, происходящее благодаря проникновению в лингвистику «математического духа» не только в тех ее областях, где возможно использование математических идей и методов. Все это можно коротко резюмировать так: лингвистика становится все более точной и более объективной наукой — не переставая, само собой, быть наукой гуманитарной.

Однако на этом естественном пути развития лингвистики стоят серьезные препятствия, которые могут его надолго затормозить. Главное из них — возникшее в начале Нового времени «разделение факультетов»: естествоиспытатели и математики с одной стороны и гуманитарные ученые с другой не интересуются работой коллег «на другом факультете» и, более того, — в глубине души, а нередко и открыто презирают их. Математики и естествоиспытатели (и еще больше «технари») склонны видеть в гуманитарных исследованиях всего лишь некое «украшение» или даже «пустую болтовню», а «гуманитарии» готовы терпеть математику и естественные науки лишь ради практической пользы и убеждены, что они ничем не могут помочь постижению природы человеческого духа.

Только в середине XIX столетия в этой, говоря словами великого биолога и великого мыслителя Конрада Лоренца, «зловредной стене между естественными и гуманитарными наукам (die böse Mauer zwischen Natur- und Geistwissenschaften)» была пробита первая брешь в самом тонком месте, отделявшем логику от математики. В XX столетии появились и другие бреши — среди них и та, которую пробили с двух сторон математики и лингвисты, — но их все еще мало, стена крепка до сих пор, и нет недостатка в усилиях с обеих сторон укреплять ее дальше и латать пробоины. Нередко эти усилия бывают довольно успешны; последнее «достижение» в этом направлении — «профильное образование» в средней школе, уже в детстве разделяющее способных и интересующихся людей на «факультеты» и приучающее их гордиться невежеством в «чужих» науках — может очень сильно воспрепятствовать дальнейшему сближению естественных и гуманитарных наук, настоятельно необходимому для нормального развития тех и других. Одно из последствий воздвижения стены состоит в том, что «гуманитарии», включая подавляющее большинство лингвистов, ничего не знают даже об азах как раз тех разделов математики, которые имеют наибольшее значение для гуманитарных наук (и представляют себе математика как человека, занятого исключительно вычислениями).

Другое препятствие — характерная для нынешнего состояния науки бешеная гонка, безостановочная погоня за все новыми и новыми «результатами», сужающая кругозор и не оставляющая времени задуматься над более глубокими проблемами или заняться серьезным изучением смежной и, тем более, не совсем смежной научной дисциплины. Это относится в равной степени к лингвистам и к математикам — как, впрочем, и ко всем, кто профессионально занимается наукой.

И третье — инертность или, проще говоря, лень. На первый взгляд лень и бешеная гонка несовместимы, но в действительности они прекрасно уживаются между собой и, более того, поддерживают и стимулируют друг друга. Когда человеку лень взяться за трудное дело, он хватается за более легкое и более «надежное», успехи в котором оправдывают и поощряют его инертность. Высокомерное отношение к «меньшим братьям», копошащимся по другую сторону стены, также поощряет лень и поощряется ею. Когда, например, математик предлагает пересмотреть все представления о древней истории, не дав себе труда хоть немного познакомиться с древними языками, за это в весьма значительной степени ответственна та же лень-матушка.

Опасность для развития науки, создаваемая этими препятствиями, гораздо серьезнее, чем может показаться на первый взгляд. Когда невежество в «чужих» науках становится предметом гордости, это закономерно ведет к поверхностности и невежеству также и в «своих». «Факультетов» давно уже много больше двух, число их растет из года в год, и каждый отгораживается стеной от других; появляются стены и внутри факультетов. Кругозор исследователей постепенно сужается; правда, аппарат исследования становится все более тонким и изысканным, но в поле его зрения попадают почти исключительно мелкие предметы, и укрепляется представление, будто только они и заслуживают изучения. Есть все основания говорить о кризисе в науке, и лингвистика не является исключением.

Лекция 5. Математика и философия

Особенно тесна связь математики с философией – наукой о наиболее общих законах развития природы, общества и мышления. В некотором смысле математика даже может считаться частью философии.

Говорят, что у входа в Академию Платона висело объявление: «Да не войдёт сюда тот, кто не сведущ в геометрии». В Академии Платона изучалась философия. Но если бы там изучалась математика, то аналогичное объявление висело бы по поводу философии. Ибо знание философии так же необходимо математику, как знание математики философу. Без философии даже оказывается невозможным определить предмет математики.

Философия нужна в любом научном исследовании. Любая наука изучает факты, строит теории. Эта работа будет тем успешнее, чем яснее будут сами понятия факта и теории. Разъяснение этих понятий – задача философии. Философия разрабатывает также другие понятия, широко применяемые в науке, в том числе и математике, такие, как «вещь», «свойство», «отношение», «определенное», «неопределённое», «произвольное», «причина», «действие», «случайность», «необходимость» и т. д. Такое обязательное в математике понятие, как «количество», тоже является философской категорией. Строгое определение этого понятия дать невозможно.

Каждая наука изучает какие-то объекты окружающего нас мира. Биология изучает живые организмы, химия – химические вещества и их соединения. И если окажется, что биология или химия не учитывают каких-то особенностей изучаемых ими объектов, они должны будут ввести в свои понятия соответствующие уточнения. Иначе эти науки не будут точными.

В математике, в частности, геометрии, дело обстоит несколько иначе. Как мы отмечали выше, геометрия изучает идеализированные объекты – линии, геометрические фигуры, в действительности не существующие, то есть использует метод абстракции. И, тем не менее, геометрия и вообще математика находит широкое применение при изучении реальной действительности. Почему это оказывается возможным? Это по сути вопрос философский. Без его решения предмет математики выглядел бы нелепо.

Решить этот вопрос можно на основе рассмотрения соотношения между материальным и идеальным. В марксистской философии существует понятие *основного вопроса философии*. Это вопрос об отношении мышления к бытию. В зависимости от решения этого вопроса в философии выделились такие течения, как материализм и идеализм. Понятие бытия можно отождествить с материальным, мышление – с сознанием. С другой стороны мышление долгое время отождествляли с идеальным, против чего некоторые философы решительно выступали. С их точки зрения идеальное существует вне сознания человека, в самих вещах. Идеальное может мыслиться, но само оно не мыслит. Поэтому идеальное следует отличать от духа, поскольку дух является мыслящим. К числу идеальных объектов относится, в частности, *форма* – то понятие, котрое Аристотель противопоставил *материи*. Это совершено иное противопоставление, чем то противопоставление материи и сознания, которое принято в марксистской философии. Материя существует независимо от сознания. Но нельзя сказать, что она существует независимо от формы.

Форма – это структура объектов, их строение. Форма может быть как у материальных, так и у идеальных объектов. По Аристотелю может быть даже *форма формы*. Форма изменяется и, изменяясь, изменяет свою материю.

Приведенные философские рассуждения дают возможность непротиворечивым образом определить предмет геометрии. Прежде всего, необходимо подчеркнуть, что непосредственным предметом изучения геометрии являются не материальные, а идеальные объекты. Но применяется геометрия к материальному миру вследствие той связи, которая существует между формой и материей. Различные материальные тела имеют одну и ту же идеальную форму. И эта форма и является предметом изучения геометрии.

С другой стороны и математика даёт пищу для философии. Математические понятия бесконечности, непрерывности издавна служили предметом философского анализа (например, апории Зенона). Сторонники как материалистического, так и идеалистического направлений в философии, черпали в математике аргументы для утверждения своих воззрений. Идеалисты находили в математике благодатную почву из-за её абстрактного, умозрительношго характера, а материалисты – из-за эффективности математики при решении задач практики.

Основной вопрос философии трансформировался в математике как вопрос об *отношении математики к реальному миру*. Ещё древнегреческие философы дали два противоположных толкования этого вопроса. Аристотель утверждал, что математические понятия являются абстракциями, отвлечениями от реальных вещей. Как отмечает А. Койре[6], аристотелевская концепция явля-

---

[6] А. Койре. Очерки истории философской мысли. М., 1985. – С. 17.

ется по существу метафизической (умозрительно постигаемые начала бытия). Платон же считал, что математические понятия занимают промежуточное положение между миром чувственно воспринимаемых вещей и миром идей.

В дальнейшем взгляды Платона и Аристотеля неоднократно анализировались. И выделились следующие основные концепции:

Материалистическая. Понятия и законы математики являются копиями, отражениями, полученными в результате абстрагирования от реальных вещей, их свойств и отношений между ними.

Субъективно-идеалистическая. Понятия и законы математики являются продуктами свободного мышления людей.

Объективно-идеалистическая. Объекты математики – самостоятельные сущности, существующие независимо от мира реальных вещей в особом мире идей.

Вряд ли стоит однозначно становиться на сторону какой-либо одной концепции и категорически не принимать другие. На стороне каждой из них многие выдающиеся имена, без которых немыслимо развитие математики. Например, Эйлер и Лобачевский придерживались материальных позиций, а Вейль и Пуанкаре склонялись скорее к идеалистической. Но это не мешало им получать результаты первостепенной важности, в том числе и такие, которые вроде бы противоречили их убеждениям. Например, Лобачевский создал весьма абстрактную неевклидову геометрию, а Пуанкаре принадлежат мощные методы решения задач, например, небесной механики, то есть реальной действительности. А детерминист Лаплас был одним из основоположников теории вероятностей.

Лекция 6. **Математика и философия Древней Греции**
Фалес Милетский

Как уже отмечалось, с упадком Египта и Вавилона центр научных, в частности, математических исследований перемещается в Грецию (VI–V вв. до н. э.). В это время наблюдается расцвет греческого полиса – самоуправляющегося города-государства. Наиболее значительные из таких государств сложились в Ионии. Ионийцы же явились фактическими зачинателями греческой цивилизации, и это не случайно, так как они жили как раз на границе великих восточных монархий. Растущая торговля связала их со всем побережьем Средиземного моря – Двуречьем, Египтом, Скифией и более далёкими странами. Долгое время ведущее положение занимал Милет, но поднимались также Коринф, Афины, Кротон, Сиракузы. Новый общественный уклад создал и новый тип человека. Он жил в эпоху географических открытий, пользовался большой независимостью. Кроме того, он мог пользоваться известным досугом, благодаря своему богатству и труду рабов. Благодаря этому он мог поразмыслить об окружающем мире.

Вследствие таких исключительно благоприятных условий античный период сыграл огромную роль в развитии культуры, науки, искусства. В этот период по существу родилась и современная математика. Существенным её отличием от математики предшествующего периода было то, что она ставила не только вопрос «как?», но и вопрос «почему?». Учёных стали интересовать не только формальные рецепты решения практических задач, но их обоснование, доказательство соответствующих утверждений и алгоритмов.

Согласно преданию отцом греческой математики является милетский купец *Фалес* (625–547 гг. до н. э.). Первый из семи мудрецов (Фалес, Анаксимандр, Анаксимен, Пифагор, Гераклит, Парменид, Анаксагор) он был чрезвычайно разносторонне одарённой личностью. Кроме математики он имел крупные достижения в области астрономии, в частности, установил продолжительность года в 365 дней, предсказал солнечное затмение 585 г. до н. э. Геродот отмечает, что благодаря этому была предотвращена битва между лидийцами и мидянами[7]. В молодости он занимался государственными делами. Тот же Геродот рассказывает о том, как Фалес облегчил переправу войска через реку, велев выкопать отводной канал. Позже он отошёл от политики и обратился к философии, став одним из крупнейших философов своего времени. Фалес был великим путешественником. Он посетил Египет, Среднюю Азию, Халдею, собирая по крупицам знания минувших эпох. Его собственные открытия легли в основу научного метода мышления, который состоит в накоплении знаний с последующей проверкой их опытом.

Фалес первым поставил и попытался решить проблему: из какой материи состоит мир. По его мнению должен быть некоторый универсальный элемент, который лежит в основе всех физических процессов. Таким изначальным элементом, согласно Фалесу, является вода. А из неё в виде осадка образовалась земля, равно как и воздух и огонь, составляющие её пары. Всё возникает из воды и всё снова превращается в воду. Такая концепция получила название «комплекса воды». По недостоверному преданию Фалес оставил несколько сочинений, в том числе философский труд «О началах», на который ссылаются Сенека и Плутарх. Но, судя по стилю, это подложное сочинение. По-видимому, Фалес

[7] Геродот. История в девяти книгах. Ленинград, 1972. – С. 34.

ничего сам не писал, ограничиваясь устным преподаванием. Другой философский комплекс идей, приписываемый Фалесу – так называемый «комплекс души». Согласно этому комплексу душа присуща даже неодушевлённым предметам, она смешана со всем сущим. И вообще весь окружающий нас мир в каком-то смысле «одушевлён». Такая концепция получила название *гилозоизма* (*hyle* – материя, *zoe* – жизнь). Природа по Фалесу представляет собой единое и живое целое.

С Фалесом связано много легенд. Скорее всего, он никогда не был женат. На вопрос, почему он не заводит детей, Фалес ответил: «Потому, что люблю их». На совет своей матери жениться, он ответил: «Слишком рано». А, повзрослев, сказал: «Слишком поздно». Другая легенда гласит, что Фалес, наблюдая звёзды, упал в колодец. И красивая девушка, оказавшаяся свидетельницей этого казуса, посмеялась над ним: «Как ты, знакомый с небесами, не знал о том, что под ногами?» Но было бы неправильно заключить, что Фалес был этаким «учёным не от мира сего», «рассеянным профессором». Он стоял в самой гуще общественной жизни, И, кстати сказать, был весьма успешным «бизнесменом», заработал большие деньги на маслобойнях, торговле оливковым маслом, дела у него шли очень хорошо.

Остановимся вкратце на вкладе Фалеса в математику. В книге Ван дер Вардена[8] (с. 122–124) отмечаются следующие его достижения.

1. Доказательство того, что диаметр круга делит этот круг пополам.
2. Доказательство равенства углов при основании равнобедренного треугольника.
3. Открытие равенства углов при пересечении двух прямых линий (вертикальные углы), правда, доказательства этого факта приведено не было.
4. Теорема о равенстве треугольников по стороне и двум прилежащим к ней углам. На основании этой теоремы он решил задачу об определении расстояния до недоступной точки (например, до корабля в море). Рассмотрим эту задачу подробнее. Пусть требуется определить расстояние от точки A до недоступной точки B (рис. 4), т. е. найти длину отрезка AB. Восстановим к отрезку AB перпендикуляр AC произвольной длины. Он разделит плоскость на две полуплоскости, в одной из которых находится отрезок AB. Разделим отрезок AC пополам точкой D. В точке C восстановим к отрезку AC перпендикуляр CE в той полуплоскости, которая не содержит отрезка AB, до пересечения в точке E с прямой BD.

[8] Ван дер Варден Б. Л. Пробуждающаяся наука. ГИФМЛ, М., 1959.

Предполагается, что отрезок CE полностью доступен для измерений, и его длину можно найти.

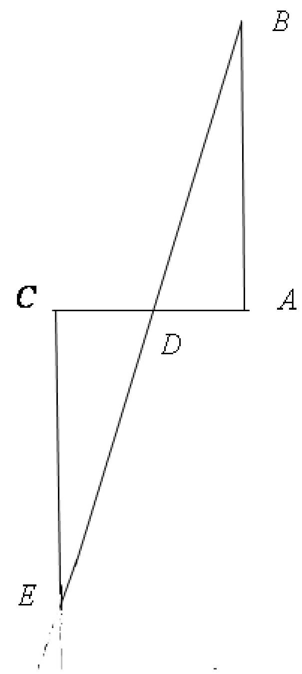


Рис. 4

Треугольник DEC равен треугольнику ADB по стороне и двум углам. В самом деле, $|CD| = |AD|$ по построению, $\widehat{DCE} = \widehat{DAB} = 90^0$, $\widehat{CDE} = \widehat{BDA}$ (как вертикальные). Следовательно $|CE| = |AB|$. Таким образом, измерение отрезка AB может быть заменено измерением отрезка CE.

В средней школе изучается знаменитая теорема Фалеса. Приведём её вместе с доказательством, тем более, что оно также базируется на равенстве треугольников по стороне и 2-м углам.

Теорема Фалеса. *Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.*

<u>Доказательство</u>. Пусть A_1, A_2, A_3 – точки пересечения параллельных прямых A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 со стороной OA угла AOB, а B_1, B_2, B_3 – соответствующие точки пересечения этих прямых со стороной OB этого угла (рис. 5).

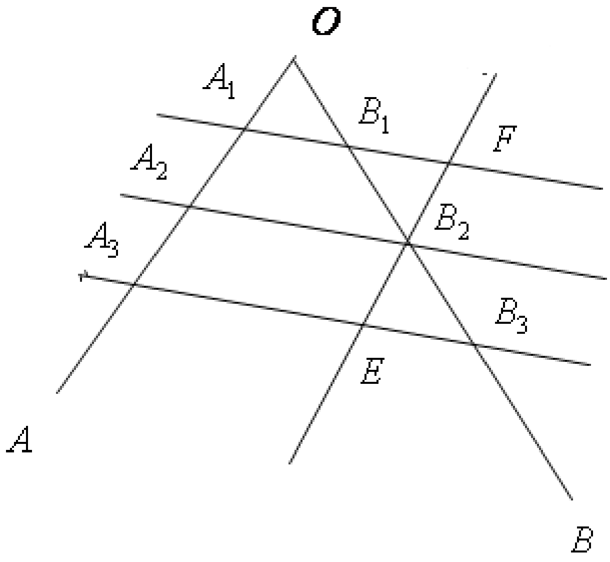


Рис. 5

Докажем, что если $|A_1A_2| = |A_2A_3|$, то $|B_1B_2| = |B_2B_3|$. Проведём через точку B_2 прямую EF, параллельную стороне OA угла. Тогда $A_1A_2B_1B_2$ – параллелограмм. По свойству параллелограмма $|A_1A_2| = |FB_2|$. Аналогично $|A_2A_3| = |B_2E|$. Отсюда $|FB_2| = |B_2E|$. В треугольниках FB_2B_1 и EB_2B_3 углы при вершине B_2 равны как вертикальные, а углы B_1FB_2 и B_2EB_3 равны как внутренние накрест лежащие при параллельных A_1B_1, A_3B_3 и секущей EF. Следовательно, треугольник FB_2B_1 равен треугольнику EB_2B_3 (по стороне и двум углам). А отсюда следует, что $|B_1B_2| = |B_2B_3|$, что и требовалось доказать.

Из этой теоремы легко вывести более общий её вариант: *параллельные прямые, отсекающие на одной из сторон угла пропорциональные отрезки, отсекают и на другой его стороне пропорциональные отрезки.*

Лекция 7. Философские взгляды и математические достижения Пифагора Самосского и его школы

Ведущее место среди греческих натурфилософских школ занимали ионийская (к ней относился и Фалес), пифагорейская и афинская школы. В этих школах большое внимание уделялось и математических вопросам. Яркой представительницей этих школ была пифагорейская. В конце VI в. до н. э. вследствие греко-персидских войн культурные центры Греции переместились с востока на запад. Здесь возникли школы пифагорейцев и элеатов. Их борьба против материализма милетской и эфесской школ была отражением острой политической борьбы между землевладельческой аристократией и демосом.

Основатель этой школы *Пифагор* (580–500 гг. до н. э.) был по преданию уроженцем острова Самос (поэтому его иногда называют Пифагор Самосский). Фигура эта является почти мистической. Не имеется достоверных данных даже о его существовании. Его имя овеяно множеством легенд. О его происхождении, например, существует такая легенда. Бог Гермес предложил своему сыну Эфалиду выбрать любой дар кроме бессмертия. Эфалид попросил оставить ему живому и мёртвому воспоминания о собственных человеческих воплощениях. Гермес даровал сыну скипетр, знание магии, чисел и память о его перевоплощениях. После смерти Эфалида его сущность последовательно воплощалась в других людях, и в конце концов воплотилась в Пифагоре. Другие легенды также связаны с мистикой. Например, одна из них рассказывает, что, когда Пифагор подошёл к реке, она вышла из берегов и воскликнула: «Да здравствует Пифагор!». У него якобы было золотое бедро, его видели одновременно в нескольких разных местах и т. д.

Подлинная биография Пифагора известна главным образом в изложении его многочисленных учеников и последователей. С детских лет Пифагор проявил исключительные способности к наукам. Отец отправил его в город Тир к халдеям, где он постигал первые азы грамоты и математики. Вернувшись в Ионию, Пифагор продолжил занятия у философа Ференида Сиросского, а затем у Гермадаманта, который учил мальчика музыке, живописи и поэзии. Также он изучал астрологию и медицину.

Примерно в 547 г. до н. э. Пифагор приехал в Милет, где стал учеником Фалеса и философа Анаксимандра. Здесь он постиг основы геометрии и астрономии. Видимо, именно Фалес рассказал Пифагору о Египте, о высоком уровне культуры этой страны. И Пифагор отправился в далёкое путешествие, длившееся не одно десятилетие. В Египте он приобрёл большую известность и уважение, был даже жрецами допущен к богослужению и жертвоприношениям, что было немыслимо для чужеземцев. Слава о Пифагоре достигла и других земель. Одна из легенд рассказывает следующее. Одно время Египет вёл продолжительную войну с Персией. Персидский царь Камбиз захватил город, где в то время жил Пифагор, и учёный вместе с другими людьми попал в плен. Но когда Камбиз узнал, кто его пленник, он приказал немедленно освободить Пифагора, принёс ему горячие извинения и богатые дары.

Вернувшись после долгих странствий в Ионию, Пифагор попытался организовать там свою философскую школу, но по некоторым причинам эти попытки потерпели неудачу, и Пифагор перебрался в горд Кротон на Сицилии. Здесь ему удалось организовать свою школу, которая действовала 30 лет (о ней речь ниже).

По преданию Пифагор был весьма неординарной и разносторонне одарённой личностью. Он хорошо пел, отлично играл на музыкальных инструментах (возможно, любовь к музыке повлияла на создании им теории гармонии). И, кроме того, был незаурядным спортсменом. На его счету победа на Олимпийских играх в состязаниях по кулачному бою. Когда перед этими соревнованиями кто-то выразил сомнение в его успехе из-за его не слишком внушительной фигуры (Пифагор был небольшого роста), он ответил, что будет наносить удары с такой математической точностью, что не оставит соперникам ни одного шанса. Так оно и случилось.

В конце V в. до н. э. в Греции прокатилась волна демократического движения, и в Кротоне победила демократия. По своим политическим убеждениям Пифагор был сторонником рабовладельческой аристократии, и в Кротоне он больше находиться не мог. Вместе с учениками он переехал в город Метапонт. Там он в конце концов и умер. Даже его смерть породила множество мифов. По одному из них он бежал от мятежа в святилище Муз, оставался там без пищи целых сорок дней, и затем исчез неизвестно куда. По другой версии он погиб, ввязавшись (в 80-летнем возрасте!) в уличную драку. По третьей – погиб, когда его дом, где он находился вместе с учениками, подожгли недоброжелатели.

Школа, созданная Пифагором в Кротоне, или Пифагорейский союз – весьма интересное образование. Хотя сам Пифагор не оставил после себя письменного наследия. Но некоторые сведения о его мировоззрении сохранились в сочинениях, вышедших из недр пифагорейского общества. Поэтому сегодня говорят в большей степени не о философских взглядах самого Пифагора, а о философии пифагорейцев, ибо авторство многих пифагорейских сочинений невозможно установить. До нас эти сочинения дошли в составе произведений еще более поздних античных авторов. И в этом заключается главная трудность для современных исследователей — очень трудно в массе противоречивых сообщений найти зерно истины. Поэтому до сих пор в науке нет устоявшегося мнения ни о Пифагоре, ни об основанном им обществе.

Долгое время наиболее популярным и вошедшим практически во все учебники было утверждение, что Пифагорейский союз — это тайное научно-философское и религиозно-мистическое общество. Устав этого союза был очень жёстким, скорее он напоминал устав религиозной секты. Участники союза обязывались хранить в тайне всё, что происходит внутри него. Даже не все последователи Пифагора имели право видеть своего учителя, но те, кто такое право имел, назывались его учениками в полном смысле слова. Члены союза не имели права употреблять в пищу мяса (и сам Пифагор был убеждённым вегетарианцем, и ярым противником принесения в жертву живых существ, поэтому сомнительной выглядит легенда о принесении Пифагором в жертву богам гекатомбы – ста быков, по случаю доказательства своей знаменитой теоремы), не могли использовать занятия наукой в целях личного обогащения, в частности, не могли иметь платных учеников. Рассказывают, что один юнец, ознакомившись с математическими построениями Пифагора, скептически спросил: «А какая от этого денежная выгода?» (вопрос, кстати, очень распространённый в наши дни, когда заходит речь о занятиях наукой). Пифагор в ответ на это позвал раба и сказал: «Дай этому человеку три обола, он хочет заработать на математике».

В целях сохранения тайны, Пифагорейский союз состоял как бы из двух ступеней. На низшей ступени находились *акусматики* ($\alpha\kappa o\upsilon\sigma\mu\alpha$ — услышанное). Это были послушники, постепенно подготавливаемые к посвящению в пифагорейские тайны, которыми обладали *математики* — члены более высокой ступени в союзе пифагорейцев (отсюда и пошло название нашей науки). В акусмате преподавались положения, устно и без обоснования преподанные учителем. В частности, известны своеобразные десять заповедей Пифагора. Приведём их.

1. *Отклоняйся от дорог исхоженных, ищи нехоженые пути.* – Ищущий мудрости должен искать её в уединении.

2. *Будь хозяином своему языку прежде всех других вещей, следуя при этом богам.* – Предупреждение человеку, что его слова могут вводить других в заблуждение. Если есть сомнение, то лучше промолчать.

3. *Дует ветер – поклоняйся шуму.* – Напоминание ученикам, что бог указывает слушать голос элементов, и что все вещи в природе проявляются через гармонию, ритм, порядок или действо, приписываемое богу.

104. *Помогай человеку в поднятии тяжести, но не в сложении её*. – Учись помогать старательным, но не помогай ленивым, тем, кто избегает ответственности.

5. *Не говори о делах пифагорейского учения без света*. – Мир предупреждается о том, что не следует толковать тайны и секреты науки без духовного и интеллектуального просвещения.

6. *Выйдя из дома, не возвращайся, иначе в нём будут обитать фурии*. – Начав поиски истины и таинств, нельзя возвращаться к невежеству и порокам. Нельзя останавливаться на полпути.

7. *Корми петуха, но не приноси его в жертву, так как он посвящён Солнцу и Луне.* – Не следует приносить в жертву богам живых существ, так как жизнь священна.

8. *Не позволяй ласточкам селиться в твоём доме*. – Нельзя позволять проникать в свой ум блуждающим мыслям или же входить в свою жизнь людям, не способным к духовному изменению.

9. *Не протягивай охотно свою правую руку никому*. – Следует иметь свой собственный ум и не делиться мудростью и знаниями с теми, кто не способен это оценить.

10. *Поднявшись с постели, сгладь отпечатки твоего тела*. – Надо устранить все воспоминания о своей духовной темноте. Мудрый человек не оставляет после себя форму, которую менее разумные люди могут принять за форму для изготовления своего идола.

В математе изучались собственно знания, основанные на доказательствах.

Еще Аристотель, а вслед за ним и многие другие писали, что ядро пифагорейской философии составляет "учение о числе". Считалось, что пифагорейцы в основе мироздания определяли число, которое владеет всеми вещами и всеми духовными качествами. "Самое мудрое — число", "справедливость есть число, помноженное само на себя" — подобные утверждения пифагорейцев можно встретить в большинстве позднейших сочинений.

Поэтому признавалось, что пифагорейское число управляет миром, ибо самим миром правят некоторые закономерности, которые можно вычислить с помощью числа. Впоследствии, философию пифагорейцев нередко называли "магией чисел".

В последние годы эта точка зрения все чаще и чаще подвергается пересмотру. Внимательное изучение всех свидетельств о Пифагоре и пифагореизме приводит многих современных исследователей к иной трактовке учения древнегреческого философа.

В соответствии с ней, пифагорейское общество не имело ничего общего ни с философской школой, ни с тайным религиозно-мистическим объединением. Совместные занятия ради постижения мудрости, соблюдение религиозной обрядности — не были главными для подавляющего числа пифагорейцев. Скорее пифагорейское общество напоминало социально-политическое объединение, члены которого имели в первую очередь общие политические интересы, а во вторую — некоторую общую направленность научных занятий.

Ныне все более популярным становится утверждение — у пифагорейцев не было какой-то стройной и строгой системы религиозных и философских взглядов, которой бы придерживались все участники общества. Тем более таковым нельзя считать "учение о числе".

Сомневаясь в принадлежности Пифагору "учения о числе", современные исследователи, тем не менее, признают огромную роль, которую сыграл Пифагор и пифагорейцы в развитии математических знаний. Однако, речь не идет ни о какой "магии чисел".

Большинству древнегреческих философов было свойственно представление о геометрическом строении Вселенной. Пифагорейцы же пришли к выводу, что практически все соотношения, существующие в космосе, все чувственно воспринимаемые вещи можно просчитать математическим путем. Иначе говоря — выразить с помощью чисел.

Например, Пифагор считал, что музыку можно тоже выразить числом. Однажды, проходя мимо кузницы, он заметил, что разные по размеру молоты издают разные звуки, сливающиеся в некую мелодию. А так как величину и вес молотов можно измерить, т. е. выразить числом, то можно числом измерить и собственно мелодию. Иначе говоря, по мнению пифагорейцев, качественное явление (созвучие) можно измерить количеством (числом). Собственно это и легло в основу созданной им теории гармонии.

Поэтому во всех явлениях мироздания пифагорейцы стремились найти числовое соотношение. Высшей ступенью развития Вселенной они считали гармонию, которую можно выразить также числовым отношением. В этом смысле знаменитое выражение, приписываемое Пифагору — "Числу все вещи подобны" — наверное, близко к истине. Но в том плане, что число служит средством выражения сущности всех вещей.

Числам приписывались самостоятельные сущности. Каждое из чисел первой десятки (а из них строились все остальные числа) имело свою индивидуальную характеристику.

Число 1 – *Монада.*

Называется так потому, что всегда остаётся в одном и том же состоянии, т. е. отделённой от множественности, она также называется зачаточным разумом.

Это число соответствует понятию Бог, потому что является началом и концом всего.

Согласно числовой логике, число 1 так же, как у пифагорейцев, символизирует Господа Бога – первооснову всего сущего.

79 ЧИСЛО + 44 ОДИН = 123 ПЕРВООСНОВА = 102 ГОСПОДЬ + 21 БОГ

Число 2 – *Дуада.*

Дуада – у пифагорейцев представляет двух, а не одного, и они противоположны друг другу.

Пифагорейцы чтили монаду и презирали дуаду, потому что она символизирует полярность. Силой дуады в противоположность небесам создаётся бездна.

Число 3 – *Триада.*

Священность триады и её символов – треугольника у пифагорейцев следует из того факта, что она делается из монады и дуады. Монада есть символ Божественного Отца, а дуада – Великой Матери. Триада, будучи сделанной из Них, является, следовательно, андрогенной и символизирует тот факт, что Бог порождает Свои Миры из Себя и Его творческий аспект всегда символизируется треугольником.

Число 4 – *Тетрада.*

Пифагор представлял Бога, как тетраду, называя Его Числом Чисел, потому, что декада – 10 состоит из 1,2,3 и 4.

Тетрада является символом Бога, потому что она символ первых четырёх чисел.

Число 5 – *Пентада.*

У пифагорейцев число 5 – пентада и число 6 – гексада означали символ природы, потому, что, будучи умножены сами на себя, они в определённом смысле возвращаются к себе ($5\times5=25,\ 6\times6=36$), точно так же, как зёрна пшеницы, рождающиеся в форме семени, проходят через природный процесс и воспроизводят семена пшеницы в виде окончательной формы своего собственного роста.

Число 6 – *Гексада.*

Пифагорейцы, по утверждению Климента Александрийского, считали, что гексада – число 6, представляет сотворение мира. Она называлась пифагорейцами совершенством всех частей. Гармония и душа рассматривались греками как подобные по своей природе, потому что все души гармоничны. Число 6 является первым совершенным числом, потому что сумма всех её частей равна целому числу (3+2+1=6).

Число 7 – *Гептада*.

Пифагорейцы называли гептаду достойной поклонения. Она часто называется у них числом жизни, потому что полагали, что человек, родившийся через семь месяцев после зачатия, живёт, но те, кто рождается через восемь месяцев, часто умирают. У многих древних народов гептада является священным числом. Гептада есть число закона, это число Делателя Космического закона, Семи Духов перед Троном.

Число 8 – *Огдоада*.

Огдоада была священной у пифагорейцев, поскольку это число первого куба, который имеет восемь вершин, и является чётно-чётным числом, наиболее близким к 10 (1-2-4-8-4-2-1). Музыкальная гамма содержит именно 8 нот.

Число 9 – *Эннеада*.

Эннеада была первым квадратом нечётного числа (3х3). Она ассоциировалась с ошибками и недостатками, так как ей недостаёт до совершенного числа 10 одной единицы. Число 9 рассматривается как зло, потому что 9 – это перевёрнутое число 6.

В древнегреческой мифологии было 9 муз. Знаменитая «История» Геродота в соответствии с этим состояла из 9-ти книг («Библиа эннеа»).

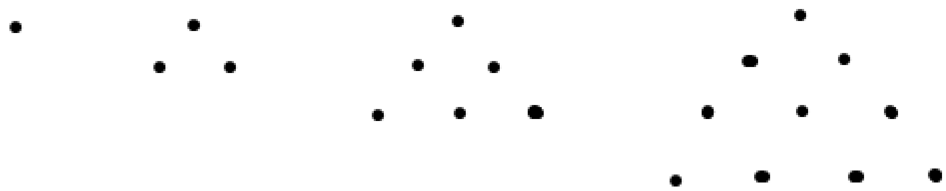
Число 10 – *Декада*.

Декада – 10 – согласно пифагорейцам, есть величайшее число не только потому, что это тетрактис (10 точек), но и потому, что она объемлет все арифметические и гармонические пропорции. Пифагор говорил, что 10 есть природа числа, потому что все народы приходят к ней, и когда они приходят к ней, они возвращаются к монаде.

По всей видимости эти концепции имели прямое отношение к появлению впоследствии науки «нумерологии» – о загадочных свойствах чисел и их роли в жизни человека. Практически каждое число, так или иначе, представлено в жизни каждого человека, безусловно, оказывая на него свое влияние. Но эти качества представлены в разных людях в абсолютно разных соотношениях. Этим и объясняется, почему мы все такие разные.

Не менее интересны более сложные примеры «числовой» философии Пифагора. Например, так называемые фигурные числа:

Треугольные:



1 3 6 10

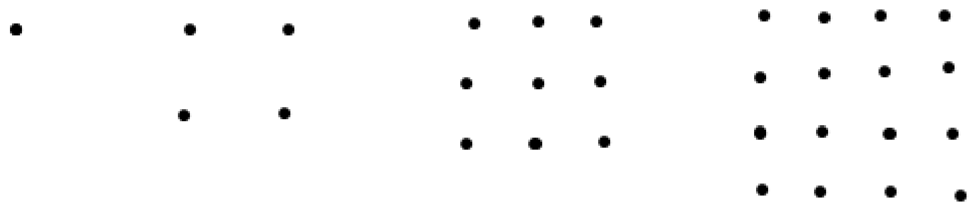
Рис. 6

Все треугольные числа можно выразить единой формулой:

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}\ .$$

Например, при n = 2 получим 3, а при n = 4 получим 10 и т. д.

Далее квадратные числа:



1 4 9 16

Рис. 7

То есть числа, являющиеся точными квадратами натуральных чисел. Интересно, что их можно получить как суммы первых нечётных чисел. Например:

$$1+3=2^2=4,$$

$$1+3+5=3^2=9,$$

$$1+3+5+7=4^2=16$$

Справедлива общая формула:

$1+3+5+...+(2n-1)=n^2$.

Этот факт легко иллюстрируется геометрически:

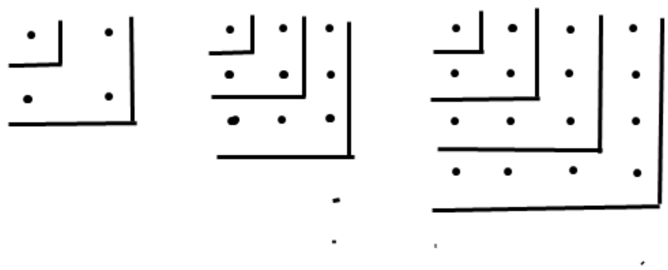


Рис. 8

К разным числам у пифагорейцев было разное отношение. Например, они любили квадратные числа. А вот, например, число 17 не любили. Оно лежит между 16 (квадратное число) и 18 (удвоенное квадратное число). А кроме того числа 16 и 18 выражают площадь прямоугольника с целочисленными сторонами (3 и 6 или 4 и 4), такого, что его периметр численно совпадает с площадью. Рассмотрим эту задачу подробнее. Пусть дан прямоугольник со сторонами x и y, причём x и y – натуральные числа (рис. 9).

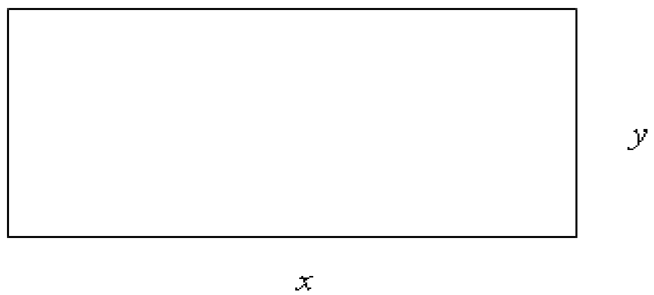


Рис. 9

Тогда периметр этого прямоугольника равен $2x+2y$, а его площадь равна xy. По условию периметр численно равен площади, поэтому должно быть выполнено равенство: $2x+2y=xy$. Отсюда легко получить:

$$y=2+\frac{4}{x-2}.$$

Так как y – целое, то число $x-2$ должно быть делителем числа 4, поэтому возможны такие варианты:

а) $x-2=1 \Rightarrow x=3,\ y=6;\ xy=2x+2y=18$;

б) $x-2=2 \Rightarrow x=4,\ y=4;\ xy=2x+2y=16$;

в) $x-2=4 \Rightarrow x=6,\ y=3;\ xy=2x+2y=18$.

Особое почтение у пифагорейцев было к так называемым совершенным и дружественным числам. Для понимания этого надо будет вспомнить, что все натуральные числа делятся на простые и составные. К *простым* числам относятся те, которые делятся лишь на единицу и само себя: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,... Можно легко доказать, что простых чисел бесчисленное множество, т. е. наибольшего простого числа не существует (это доказательство мы приведём в Лекции 13). Остальные числа являются *составными* – они делятся и на другие числа, кроме единицы и себя. Если число n делится на число m, то говорят, что число m является делителем числа n. Например, делителями числа 12 являются числа 1,2,3,4,6,12. Так вот *совершенными* называются такие числа, которые равны сумме своих делителей (если, конечно, среди них не считать само число). Например:

$$6=1+2+3,$$

$$28=1+2+4+7+14$$

К совершенным относятся также 496, 8128 (проверьте самостоятельно). Есть общее правило получения совершенных чисел, указанное ещё древнегреческим математиком Никомахом. Если сумма

$$p=1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$$

есть число простое, то $2^n p$ есть число совершенное. Например, при $n=4$ получим: $p=2^5-1=32-1=31$ – простое. Значит число $2^4\cdot 31=16\cdot 31=496$ – совершенное.

Обозначим через $S(m)$ сумму делителей числа m, включая само число m. Например, $S(12)=1+2+3+4+6+12=28$. Тогда, если m число совершенное, то должно быть выполнено: $S(m)-m=m$ или $S(m)=2m$. Разложим число m на простые множители:

$$m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}.$$

Тогда можно показать[9], что

$$S(m) = \frac{p_1^{k_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{k_2+1}-1}{p_2-1} \cdots \frac{p_n^{k_n+1}-1}{p_n-1}.$$

Например, для совершенного числа 496 будем иметь: $496 = 2^4 \cdot 31$, т. е. $n = 2,\ p_1 = 2,\ k_1 = 4,\ p_2 = 31,\ k_2 = 1$.

$$S(496) = \frac{2^5-1}{2-1} \cdot \frac{31^2-1}{31-1} = 31 \cdot 32 = 992 = 2 \cdot 496.$$

Совершенные числа и по сей день представляют собой немало загадок для математиков. Пока что даже неизвестно, является ли их множество бесконечным или нет. В настоящее время с помощью компьютеров удаётся найти гигантские совершенные числа. В 2009-м году с помощью 75 компьютеров, объединённых в сеть, удалось найти наибольшее, на то время известное, простое число вида $2^p - 1$, где p – также число простое. Это так называемые *числа Мерсенна*, названные по имени французского исследователя Марена Мерсенна, который описал их впервые еще в первой половине XVII века. Такие числа используются в программных генераторах псевдослучайных чисел — отсюда интерес к ним не только теоретиков, но и практиков. Для этого найденного простого числа $p = 43112609$. А уже в 2013-м году было найдено и ещё большее простое число Мерсенна, для которого $p = 57885161$. В его непосредственной записи более 17 миллионов цифр (в пять раз больше, чем букв в романе Л. Н. Толстого «Война и мир»).

В соответствии с правилом Никомаха для такого простого числа совершенным будет:

$$a = 2^{57885161}\left(2^{57885162} - 1\right).$$

Из правила Никомаха следует, что найденные по нему совершенные числа являются чётными. Тем не менее, доказано, что должно быть не менее 10^{36} нечётных совершенных чисел. Но ни одного нечётного совершенного числа пока не найдено. Предполагают, что даже наименьшее из нечётных совершенных чисел чрезвычайно велико.

[9] Виноградов И. М. Основы теории чисел. М., 1981. – С.28.

Другую достопримечательность представляют *дружественные* числа. Это такие пары чисел, каждое из которых равно сумме делителей другого. Например, числа 220 и 284. Просуммируем делители числа 220:

1+2+4+5+10+20+11+22+44+55+110=284

А теперь делители числа 284:

1+2+4+71+142=220.

Когда у Пифагора спросили, что такое друг, он ответил, что это такой человек, с которым такое взаимопонимание, как между дружественными числами.

Пифагорейцам была известна только эта пара дружественных чисел. Ещё одна пара дружественных чисел была открыта значительно позже – в 1636 году Пьером Ферма: 17296 и 18416. А Рене Декарт нашёл третью пару: 9363584 и 9437056. Ныне известно более 600 пар дружественных чисел.

Для дружественных чисел a и b будем иметь: $S(a)-a=b,\ S(b)-b=a$. Или $S(a)=S(b)=a+b$, откуда $S(a)+S(b)=2(a+b)$.

Такого рода закономерности изучаются в специальном разделе математики – *теории чисел*. На первый взгляд может показаться, что все эти закономерности не имеют практического значения и интересны лишь для узкого круга специалистов или просто любознательных людей. Долгое время теория чисел и впрямь относилась к одной из самых абстрактных областей математики. Но как раз в самое последнее время идеи, методы, результаты теории чисел стали основой для весьма прикладной науки – *криптографии*, науки о шифрах, играющей важную роль в проблеме защиты информации. Специалистов по криптографии интересуют, в частности, большие простые числа, о которых речь шла выше. Поэтому организация Electronic Frontier Foundation даже утвердила награды в $50000, 100000, 150000 и 250000 за вычисление простых чисел с миллионом, десятью миллионами, ста миллионами и миллиардом знаков соответственно.

Со свойствами чисел было тесно связано и учение Пифагора о гармонии. Пифагорейцы совершили два фундаментальных открытия. Во-первых, что высота тона, издаваемого колеблющейся струной, зависит от её длины, и, во-вторых, что гармонические созвучия издают одинаково натянутые струны, длины которых относятся между собой как целые числа[10]. Например, гармоническое созвучие издают две одинаково натянутые струны, из которых одна вдвое длиннее другой. Интервал между тонами, издаваемыми такими струнами, называется *октавой*. Другое гармоническое созвучие издают две струны, длины которых относятся как 3:2. В этом случае более короткая струна издаёт ноту, которая на *квинту* выше тона, издаваемого более длинной струной. Изучив эти закономерности, пифагорейцы и разработали знаменитую музыкальную шкалу.

Особо следует остановиться на вкладе Пифагора в геометрию. В первую очередь он связан со знаменитой теоремой о соотношении длин сторон в прямоугольном треугольнике. Собственно, это соотношение было известно ещё древним египтянам, а с именем Пифагора связывают его доказательство. На сегодняшний день существует несколько сот различных доказательств теоремы Пифагора. Одно из наиболее известных классических доказательств этой теоремы – с помощью так называемых «штанов» (отсюда и известный стишок «пифагоровы штаны на все стороны равны. . .»). Рассмотрим его подробнее.

Теорема Пифагора. *В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.*

<u>Доказательство</u>. Пусть задан прямоугольный треугольник ACB (рис. 10), AC и CB его катеты, AB – гипотенуза. Требуется доказать, что $|AC|^2+|CB|^2=|AB|^2$. Обозначим $a=|CB|$, $b=|AC|$, $c=|AB|$. Построим на каждой стороне треугольника квадрат (рис. 11) – эти квадраты и считаются похожими на штаны. Обозначим площадь квадрата, построенного на катете CB, через S_1, площадь квадрата, построенного на катете AC, через S_2, площадь квадрата, построенного на гипотенузе, через S. Требуемое будет доказано, если мы покажем, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах, т.е. $S_1+S_2=S$, ибо $S_1=a^2$, $S_2=b^2$, $S=c^2$.

Выполним следующее построение. Рассмотрим квадрат со стороной, равной $a+b$ (его площадь равна $(a+b)^2$) и разделим его так, как показано на рис. 12а.

[10] Шилов Г. Е. Простая гамма (устройство музыкальной шкалы). М., 1963.

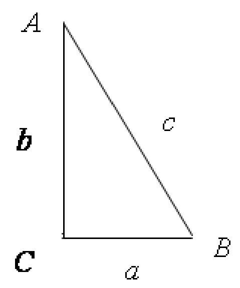


Рис. 10

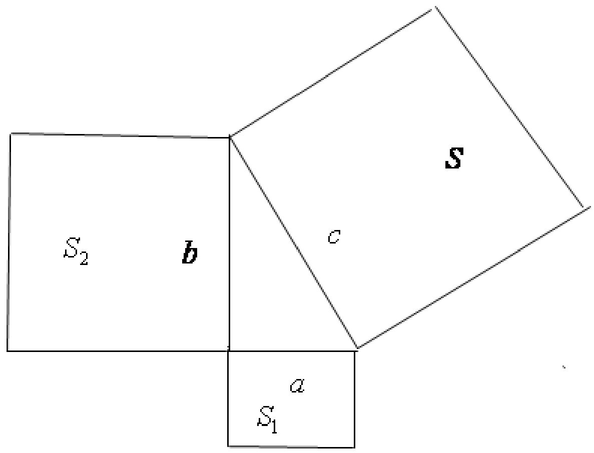
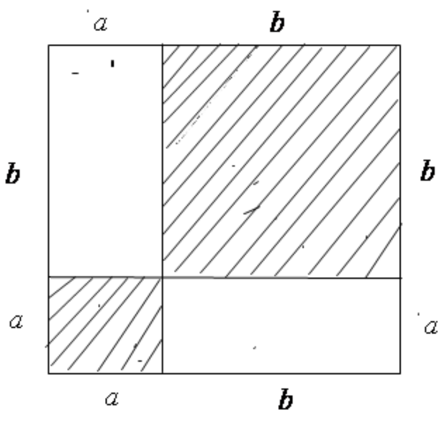


Рис. 11



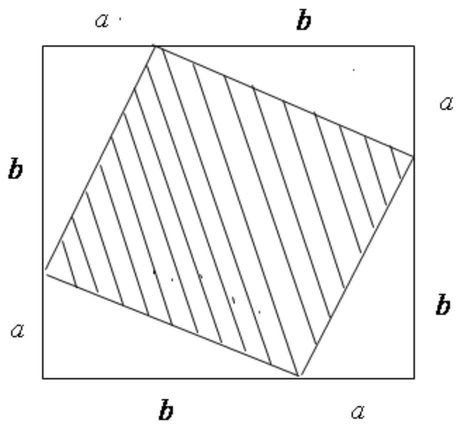


Рис. 12а **Рис. 12б**

Сумма площадей заштрихованных квадратов равна $S_1 + S_2$, поскольку эти квадраты совпадают с квадратами, построенными на катетах. С другой стороны площадь незаштрихованной части, как нетрудно видеть, равна сумме площадей двух прямоугольников со сторонами a и b, а значит учетверённой площади прямоугольного треугольника ACB. Следовательно:

$$S_1 + S_2 + 4S_{ACB} = (a+b)^2,$$

откуда

$$S_1 + S_2 = (a+b)^2 - 4S_{ACB}.$$

С другой стороны из рисунка 12б площадь заштрихованного квадрата равна S, поскольку этот квадрат совпадает с квадратом, построенным на гипотенузе. А площадь незаштрихованной части опять равна учетверённой площади прямоугольного треугольника ACB. Следовательно:

$$S = (a+b)^2 - 4S_{ACB}.$$

Из последних двух равенств получаем требуемое.

Соотношение $a^2 + b^2 = c^2$ справедливо для любого прямоугольного треугольника. Особый интерес представляют прямоугольные треугольники с целочисленными длинами сторон. Например, 3, 4, 5 (египетский треугольник), 5, 12, 13 и т. д. Пифагором установлена общая закономерность для длин сторон таких треугольников:

$$\frac{n^2-1}{2}, \quad n, \quad \frac{n^2+1}{2},$$

где n – нечётно. Например, при $n = 3$ получаем египетский треугольник.

Лекция 8. **Первый кризис основ математики**

Краеугольным камнем философской концепции пифагорейцев было учение о числах. Пифагорейцев поразило, что весьма различные в качественном отношении явления и процессы обладают одинаковыми математическими характеристиками. Значит, по их мнению, именно эти математические характеристики выражают сущность явлений. То есть пифагорейцы видели сущность явлений в числе и числовых отношениях. В их объяснении природы числу отводилась роль начала начал. Пифагорейцы считали, что все тела состоят из фундаментальных частиц, «единиц бытия», которые в тех или иных комбинациях соответствуют различным геометрическим фигурам. В сумме эти единицы представляют собой материальный объект. Число было материей и формой Вселенной. Отсюда и основной тезис учения пифагорейцев: «Всё есть число». И поскольку число выражало сущность всего, то объяснять все явления следовало только с помощью чисел.

Развив и усовершенствовав своё учение, пифагорейцы стали рассматривать числа как абстрактные понятия, а реальные объекты – как конкретные реализации чисел. По высказыванию одного из известных пифагорейцев Филолая: «Если бы не число и его природа, то ничто существующее нельзя было бы постичь ни само по себе, ни в его отношении к другим вещам».

К числам пифагорейцы свели не только музыку, но и вообще все явления природы, в частности, движения планет. Музыка и астрономия оказалась связанной с арифметикой и геометрией, и все четыре дисциплины стали считаться математическими. Такое положение сохранилось вплоть до средневековья, когда этот комплекс дисциплин получил название *квадривиум*.

Следует подчеркнуть, что само понятие числа у пифагорейцев значительно отличалось от современного. По сути они знали лишь целые числа и их отношения, т. е. те числа, которые мы сейчас называем *рациональными*. И именно этими числами они пытались выразить всё разнообразие явлений. Но со временем они же натолкнулись на тот факт, что, оказывается, далеко не все величины можно выразить рациональными числами. Рассмотрим такую простую задачу. Чему равна гипотенуза прямоугольного треугольника, у которого оба катета равны 1? По теореме того же Пифагора квадрат длины такой гипотенузы должен быть равен $1^2 + 1^2 = 2$, т. е. в современных обозначениях длина гипотенузы равна $\sqrt{2}$. Если все величины могут быть выражены рациональными числами, то должны найтись такие два натуральных числа m и n, что $m/n = \sqrt{2}$. Можно без ограничения общности считать, что дробь m/n является несократимой, ибо в противном случае мы её можем сократить, насколько это возможно, и сделать несократимой. Поскольку $m/n = \sqrt{2}$, то $m^2/n^2 = 2$, т. е. $m^2 = 2n^2$, а это значит, что число m^2 является чётным. Отсюда следует, что и число m тоже чётно. Действительно, если бы m было нечётным числом, то тогда $m = 2k+1$, где k – число целое. Но тогда $m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$, а это означало бы, что m^2 нечётно. Поскольку m чётно, то $m = 2k$, где k – целое. А тогда $m^2 = 4k^2$, а значит $2n^2 = 4k^2$, или $n^2 = 2k^2$, т. е. число n^2 чётно. И, аналогично доказанному выше, число n также чётно. Итак, числа m и n чётны, а, следовательно, дробь m/n является сократимой (её можно сократить, по меньшей мере, на 2), что противоречит предположению.

Такое открытие в корне противоречило всей философии пифагорейцев. Оказывается, есть величины, которые нельзя выразить в виде отношения целых чисел (сейчас мы такие числа называем *иррациональными*). А значит, числа в их понимании не могут быть основой основ всего сущего. По одной из легенд пифагорейцы не смогли дать объективную интерпретацию этому факту и постарались скрыть своё открытие, просто отмахнувшись от иррациональных чисел. Тем не менее, проблема использования таких чисел реально появилась. И она в действительности была шире, чем проблема численного представления длин, площадей и объёмов. Уже Платон в своих «Законах» призывал к познанию *несоизмеримых*, как их называли, величин. *Евдокс Книдский* видел выход из положения в том, чтобы иррациональные величины трактовать геометрически, соотнося их с длинами определённых отрезков. Тогда различие между рациональными и иррациональными числами как бы стирается. Были и другие попытки решения этой проблемы, которые постепенно выводили математику на качественно новый уровень. Но до уяснения сущности иррациональных чисел, до стройной и последовательной теории *действительных* чисел было ещё очень далеко.

Другая трудность математики была связана с обнаружением логических противоречий в её основах. Наиболее ярко эти противоречия проявились в так называемых апориях Зенона. Связаны они с именем *Зенона Элейского* (490–430 гг. до н. э.) – древнегреческого философа, ученика Парменида. *Апория* (от греч. $\alpha\pi o\rho\iota\alpha$ – трудность) – парадоксальное суждение, софизм, когда путём вроде бы правильных логических рассуждений приходят к совершенно нелепым выводам. Ошибку в такого рода рассуждениях найти иногда бывает чрезвычайно трудно. Зенон предложил около 40 таких апорий, из которых наиболее известны следующие.

1. <u>Дихотомия</u>. Чтобы преодолеть путь от точки A до точки B, нужно сначала преодолеть половину этого пути. Затем половину оставшейся половины. Затем половину оставшегося после этого пути и т. д. И таким образом точка B никогда не будет достигнута, т. е. никакой путь не может быть пройден до конца.

Другой вариант этого парадокса такой: чтобы пройти путь, надо сначала пройти его первую половину. А до этого первую половину этой половины и т. д. И таким образом движение никогда не сможет даже начаться.

2. <u>Ахиллес и черепаха</u>. Ахиллес взялся соревноваться в беге с черепахой. Он даёт ей фору, например, 1000 м. Допустим, что Ахиллес бежит в 10 раз бы-

стрее черепахи. Тогда за то время, за которое Ахиллес пробежит 1000 м, черепаха в ту же сторону проползёт 100 метров. Когда Ахиллес пробежит и эти 100 метров, черепаха проползёт ещё 10 метров, и так далее. Процесс будет продолжаться до бесконечности, и Ахиллес так никогда и не догонит черепаху.

3. Летящая стрела. Летящая стрела неподвижна, так как в каждый момент времени она занимает равное себе положение, то есть покоится; поскольку она покоится в каждый момент времени, то она покоится во все моменты времени, то есть покоится всегда. И движения вообще нет.

Апории Зенона вызывают споры и по сей день. Довольно часто появлялись (и продолжают появляться) попытки математически опровергнуть рассуждения Зенона и тем самым «закрыть тему». Например, построив ряд из уменьшающихся интервалов для апории «Ахиллес и черепаха»

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots,$$

можно легко доказать, что он сходится, его сумма равна 1, так что Ахиллес обгонит черепаху. В этих «опровержениях», однако, подменяется суть спора. В апориях Зенона речь идёт не о математической модели, а о реальном движении, и поэтому нельзя ограничить анализ парадокса внутриматематическими рассуждениями — ведь Зенон как раз и ставит под сомнение применимость к реальному движению идеализированных математических понятий.

В монографии «Основания математики» Д. Гильберт и П. Бернайс замечают: «Обычно этот парадокс пытаются обойти рассуждением о том, что сумма бесконечного числа этих временных интервалов всё-таки сходится и, таким образом, даёт конечный промежуток времени. Однако это рассуждение абсолютно не затрагивает один существенно парадоксальный момент, а именно парадокс, заключающийся в том, что некая бесконечная последовательность следующих друг за другом событий, последовательность, завершаемость которой мы не можем себе даже представить (не только физически, но хотя бы в принципе), на самом деле всё-таки *должна завершиться*»[11].

Серьёзные исследования апорий Зенона рассматривают физическую и математическую модели совместно. Р. Курант и Г. Роббинс полагают, что для разрешения парадоксов необходимо существенно углубить наше понимание физического движения:

---

[11] Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М., 1979. – С. 40.

«Ещё со времен Зенона и его парадоксов все попытки дать точную, математическую формулировку интуитивному физическому или метафизическому понятию непрерывного движения были безуспешными. Нет затруднений в продвижении шаг за шагом по дискретной последовательности значений $a_1, a_2, a_3 \ldots$ Но когда приходится иметь дело с непрерывной переменной x, пробегающей целый интервал значений на числовой оси, то описание того, как x «приближается» к заданному значению X, затруднено тем, что принимаемые значения из интервала не могут быть указаны последовательно в порядке их возрастания. В самом деле, точки прямой представляют везде плотное множество, и не существует точки, «следующей» за данной. Остаётся неизбежное расхождение между интуитивной идеей и точным математическим языком, предназначенным для того, чтобы описывать ее основные линии в научных, логических терминах. Парадоксы Зенона ярко обнаруживают это несоответствие»[12].

Другими словами, парадоксы возникают из-за некорректного применения к реальности идеализированных понятий «точка пространства» и «момент времени», которые не имеют в реальности никаких аналогов, потому что любой физический объект имеет ненулевые размеры, ненулевую длительность и не может быть делим бесконечно[13].

Возникающие кризисы в математике (в том числе и те, о которых будет идти речь далее) в целом играли положительную роль, так как способствовали углублению математических знаний, улучшению понимания этой науки, её особенностей.

Лекция 9. Кризисы математики, связанные с теорией множеств

Бурное развитие математики в XVII – XIX веках привело к созданию качественно новых разделов – дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, позволивших эффективно решить целый ряд практических задач. Успехи математики в описании и предсказании физических явлений превзошли самые смелые ожидания. В то же время XIX век, как отмечалось выше, ознаменовался созданием абстрактных её областей, в частности, та-

[12] Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика. М., 2001. – С. 353.

[13] Интересный анализ апорий Зенона имеется в статье: *Анисов А. М.* Апории Зенона и проблема движения // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН / РАН. Ин-т философии, Обществ. ин-т логики, когнитологии и развития личности. — М., 2000. — Вып. 14 / Редкол.: А. С. Карпенко (отв. ред.) и др. — Стр. 139—153.

ких, как теория множеств, теория групп, теория функций действительного и комплексного переменного, функциональный анализ и других. Но при этом многие математики стали осознавать необходимость более строгого обоснования оснований своей науки. Ещё в XVIII веке отмечалось, что всё огромное здание математической науки лишено логического фундамента и держится на весьма шатких основаниях.

Новой теорией, которая привела к новым противоречиям и обострила уже существовавшие, была *теория бесконечных множеств*. Уже давно математикам приходилось иметь дело с множествами, содержащими бесконечное число элементов, рассматривать бесконечные процессы (например, бесконечные ряды). И непонимание их сущности и особенностей порождало серьёзные противоречия и парадоксы. К ним, в частности, в значительной мере относились и рассмотренные выше апории Зенона. Было очевидно, что бесконечные множества по своим свойствам существенно отличаются от конечных множеств, поэтому привычные операции с конечными множествами просто так переносить на бесконечные множества нельзя.

Решением проблемы бесконечных множеств занялся в конце XIX века *Георг Кантор* (1845–1918). Трудность возникла уже на этапе определения самого понятия множества. Кантор предложил понимать под *множеством* всякую совокупность определённых элементов, которая может быть связана в одно целое с помощью некоторого закона. Понятие же закона он считал исходным, неопределимым. Вместе с тем в его концепции понятие закона играет фундаментальную роль. Закон обеспечивает существование множества. С другой стороны, если множество существует, то, анализируя его элементы, можно указать закон, по которому оно образуется.

Основная идея Кантора сводилась к установлению взаимно-однозначного соответствия между элементами множеств. Если такое соответствие удаётся установить, то такие множества называются *равномощными*, или говорят, что они имеют одинаковую *мощность*. Само понятие мощности множества и состоит в возможности установления взаимно-однозначного соответствия между элементами данного множества и некоторого другого, заранее выбранного множества. Кантор пытался определить понятие мощности так: «Мощностью данного множества A называется та общая идея, которая остаётся у нас, когда мы, мысля об этом множестве, отвлекаемся как от всех свойств его элементов, так и от их порядка»[14]

[14] Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М., 1974. – С. 26.

Очевидно, что для конечных множеств взаимно-однозначное соответствие между их элементами удаётся установить тогда и только тогда, когда эти множества имеют одинаковое число элементов. Элементы таких множеств можно разбить на конечное число пар, каждая из которых будет содержать ровно по одному элементу из каждого множества. Например, множество из 5 книг и множество из 5 шаров можно разбить на 5 пар, каждая из которых будет содержать по одной книге и по одному шару. Поэтому очевидно, что если конечное множество A является подмножеством конечного множества B, причём во множестве B имеются элементы, не входящие во множество A, то между множествами A и B невозможно установить взаимно-однозначное соответствие, то есть эти два множества неравномощны. Для бесконечных множеств ситуация оказалась принципиально иной. Анализ возможности установления такого соответствия для бесконечных множеств привёл к неожиданным, даже на первый взгляд парадоксальным результатам. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Рассмотрим множество A чётных натуральных чисел и множество B нечётных натуральных чисел. Между элементами этих множеств взаимно-однозначное соответствие устанавливается легко:

$$1 \to 2,\ 3 \to 4,\ \ldots,\ 2n-1 \to 2n,\ \ldots$$

Т. е. каждому нечётному числу соответствует следующее за ним чётное. Этот результат выглядит вполне естественным, интуитивно ясно, что чётных чисел должно быть «столько же», сколько и нечётных.

Пример 2. Пусть A – множество всех натуральных чисел, а B – множество чётных натуральных чисел. Взаимно-однозначное соответствие между этими множествами можно установить так:

$$1 \to 2,\ 2 \to 4,\ 3 \to 6,\ \ldots,\ n \to 2n,\ \ldots$$

Т. е. каждому натуральному числу ставится в соответствие удвоенное это число. А этот результат уже в какой-то степени неожиданный. Ведь множество чётных натуральных чисел является истинным подмножеством множества всех натуральных чисел. И по аналогии с конечными множествами казалось бы, что мощность множества A должна быть больше мощности множества B. А оказывается, что эти множества равномощны. Следующие примеры ещё более поразительны.

Пример 3. Пусть даны два отрезка AB и CD, причём $|AB| < |CD|$. Покажем, что мощность множества точек отрезка AB равна мощности множества точек отрезка CD. Т. е. множества точек на *любых* двух отрезках равномощны.

Выполним следующее построение. Расположим отрезки AB и CD параллельно друг другу. Проведём прямые линии AC и BD и обозначим через O точку их пересечения (рис. 13).

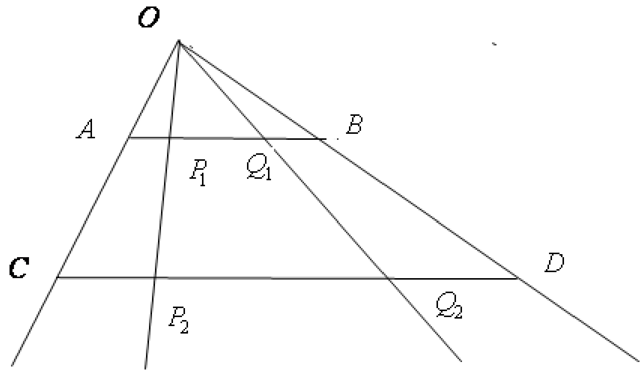


Рис. 13

Пусть P_1 – произвольная точка отрезка AB. Проведём прямую OP_1 и обозначим через P_2 точку пересечения этой прямой с отрезком CD. Очевидно, что такая точка будет единственной, поэтому каждой точке отрезка AB будет соответствовать одна и только одна точка отрезка CD. Теперь на отрезке CD выберем произвольную точку Q_2 и проведём прямую OQ_2. Эта прямая пересечёт отрезок AB в одной единственной точке Q_1. Таким образом, каждой точке отрезка AB соответствует одна и только одна точка отрезка CD и наоборот. Следовательно, между точками этих отрезков установлено взаимно-однозначное соответствие, и, таким образом, множества точек этих отрезков равномощны.

Пример 4. Множества точек на любом отрезке и на бесконечной прямой равномощны.

Пусть дан отрезок AB и прямая l. Опишем на отрезке AB как на диаметре полуокружность и прямую l расположим по касательной к этой полуокружности параллельно отрезку AB (рис. 14). Пусть P_1 – произвольная точка отрезка AB. Опустим из точки P_1 перпендикуляр на прямую l и обозначим через P_2 точку пересечения этого перпендикуляра с полуокружностью. Проведём прямую OP_2 и обозначим через P_3 точку пересечения этой прямой с прямой l. Такая точка будет только одна и, следовательно, каждой точке отрезка AB будет соответствовать одна и только одна точка прямой l. Пусть теперь Q_3 – произвольная точка прямой l. Проведём прямую OQ_3 и обозначим через Q_2 точку пересечения этой прямой с полуокружностью. Опустив из точки Q_2 перпендикуляр на отрезок AB, получим единственную точку Q_1. Следовательно, каждой точке прямой l будет соответствовать одна и только одна точка отрезка AB, и таким образом между точками отрезка AB и прямой l установлено взаимно-однозначное соответствие.

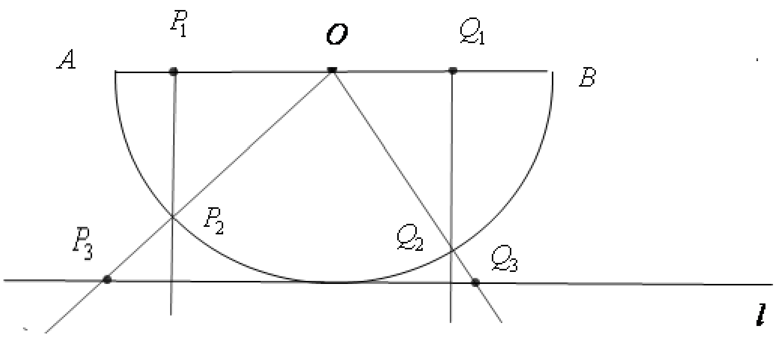


Рис. 14

Можно показать, что множество точек отрезка равномощно не только множеству точек прямой, но и плоскости, и даже пространства, причём размерность пространства не играет роли. И таким образом, во всей Вселенной точек «столько же, сколько» их даже в сколь угодно малом отрезке.

Эти примеры показывают, насколько свойства бесконечных множеств отличаются от свойств конечных. Если мыслить «конечными» категориями, то рассмотренные примеры просто абсурдны.

Кантор предложил метод сравнения мощностей различных множеств. Допустим, есть два множества A и B, причём они неравномощны, т. е. между их элементами нельзя установить взаимно-однозначного соответствия. И во множестве B имеется подмножество B_1, равномощное множеству A. Тогда говорят, что мощность множества B больше мощности множества A. Если говорить о бесконечных множествах, то «наименьшей» мощностью обладают множества, равномощные множеству натуральных чисел. Такие множества называются *счётными* (их элементы можно определённым образом перенумеровать). К ним относятся, например, множества чётных, целых, рациональных чисел. А вот множество точек отрезка или интервала, как можно показать, счётным не является. Но вместе с тем в этом множестве всегда можно выделить счётное подмножество. И, следовательно, множество точек любого отрезка имеет большую мощность, нежели счётные множества. Такие множества получили название множеств мощности *континуума*. Существуют ли множества ещё больших мощностей? Кантор показал, что существуют множества сколь угодно больших мощностей. Т. е. нет множества наибольшей мощности. Основывается такой вывод на анализе так называемого *булеана* данного множества – множества всех подмножеств данного множества. Рассмотрим такой пример. Пусть дано множество из трёх элементов: $A = \{1, 2, 3\}$. Построим его булеан $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Символом $\varnothing$ обозначено пустое множество – как несложно доказать, оно является подмножеством любого множества. Нетрудно видеть, что множество $\tilde{A}$ содержит $8 = 2^3$ элементов. Аналогично легко показать, что булеан множества, состоящего из n элементов, содержит 2^n элементов, и очевидно, что $2^n > n$. Т. е. булеан конечного множества заведомо содержит больше элементов, чем само множество. Аналог этого факта Кантор получил и для бесконечных множеств. Он показал, что булеан бесконечного множества A имеет мощность, большую, чем само множество A. Следовательно, какое бы множество мы ни взяли, всегда можно построить множество большей мощности. Скажем, для булеана данного множества тоже можно построить булеан, для него свой булеан и т. д. И таким образом строить множества всё больших и больших мощностей.

Но уже сам Кантор наткнулся на весьма серьёзный парадокс, к которому привела его теория. Рассмотрим *множество всех возможных множеств*. Обозначим такое «сверхмножество» через Ξ. Как своё подмножество оно содержит любое из мыслимых множеств, поэтому мощность любого множества не может превосходить мощности множества Ξ. Но для множества Ξ тоже можно построить булеан, и его мощность будет больше, чем мощность множества Ξ. С другой стороны этот булеан тоже является множеством и, следовательно, подмножеством множества Ξ, а тогда его мощность не может быть больше мощности множества Ξ.

Этот парадокс (он получил название *антиномии Кантора*) поставил математиков в тупик. В связи с этим у теории Кантора появилось много противников. Одним из возможных выходов был запрет на использование множеств типа Ξ, поскольку его определение неявно содержит ссылку на само себя (множество множеств). С такого типа множествами был связан и ряд других парадоксов, некоторые из которых были обнаружены ещё древними мыслителями. Рассмотрим некоторые из них.

1. *Парадокс лжеца*. Рассмотрим высказывание: «Это утверждение ложно». Обозначим предложение, стоящее в кавычках, через S. Истинно это предложение или ложно? Если S истинно, то истинно то, что оно утверждает, следовательно S ложно. А если S ложно, то ложно то, что оно утверждает, следовательно S истинно. Итак, S истинно тогда и только тогда, когда оно ложно.

2. *Парадокс исключений*. Рассмотрим высказывание: «Нет правил без исключений». Само это высказывание является правилом, следовательно, и из него должны быть исключения. А это означает, что есть правила без исключений. Итак, высказывание отрицает само себя.

3. *Антиномия Рассела*. Есть множества, которые являются элементами самих себя. Например, каталог каталогов – тоже каталог. А есть множества, элементами самих себя не являющиеся. Например, множество всех книг, не является книгой. Пусть T – множество всех множеств, не являющихся элементами самих себя. Является ли T элементом самого себя? Если да, то T должно принадлежать к множествам, не являющимся элементами самих себя, а значит T элементом самого себя не является. А если нет, то T не должно принадлежать к множествам, не являющихся элементами самих себя, а значит T элементом самого себя является. Итак, T является элементом самого себя тогда и только тогда, когда оно таковым не является.

4. *Парадокс брадобрея*. Это вариант антиномии Рассела. Некий брадобрей взял за правило брить всех тех и только тех людей (взрослых мужчин), которые не бреются сами. Тех, что бреются сами, он не бреет. Должен ли такой брадобрей брить сам себя? Если он должен брить сам себя, то получится, что он бреется сам. А значит он не должен брить сам себя. А если он не должен брить сам себя, то получится, что он не бреется сам, а значит он должен брить сам себя. Итак, брадобрей должен брить сам себя тогда и только тогда, когда он не должен брить сам себя.

5. *Парадокс Греллинга-Нельсона*. Есть прилагательные, применимые к самим себе. Например, прилагательное «русский» само по себе является русским, следовательно, оно применимо к себе. Такие прилагательные будем называть *автологическими*. А есть прилагательные, к себе неприменимые, например, «английский» или «длинный». Такие прилагательные будем называть *гетерологическими*. К какому классу тогда относится прилагательное «гетерологический»? Если оно автологическое, то оно применимо к самому себе, а значит оно гетерологическое. А если оно гетерологическое, то оно неприменимо к

самому себе, следовательно, гетерологичным не является, и значит автологично. Итак, это прилагательное автологично тогда и только тогда, когда оно гетерологично.

6. *Парадокс Ришара-Берри*. Каждое целое число допускает множество словесных описаний. Например, число 5 можно описать, как «число пальцев на одной руке» или «число, следующее за числом 4». Рассмотрим теперь все возможные описания, состоящие не более, чем из 100 букв русского алфавита. Таких описаний не более, чем 33^{100}, т. е. конечное число. Поэтому существует лишь конечное множество целых чисел, задаваемых такими описаниями. Следовательно, существуют и числа, такими описаниями не задаваемые. Рассмотрим «наименьшее из чисел, не задаваемое описанием, состоящим не более, чем из ста букв». Но это как раз и есть описание такого числа, и это описание содержит 66 букв, т. е. меньше, чем 100.

7. *Парадокс всемогущего существа*. Может ли всемогущее существо создать камень, который оно не сможет поднять? Если нет, то оно не является всемогущим. А если да, то тоже не является всемогущим, поскольку не сможет поднять.

Есть и другие парадоксы. Их появление беспокоило математиков и логиков, и они пытались найти пути их разрешения. Некоторые логики предлагали различать *семантические* и *логические* парадоксы. Например, парадокс лжеца, парадокс Греллинга-Нельсона, парадокс Ришара-Берри они считали семантическими, так как они основаны на особенностях языка, на котором они высказываются. И затрагивают такие понятия, как истинность и определяемость того или иного словоупотребления. Предполагалось, что строгое определение таких понятий позволит эти парадоксы разрешить. Например, в парадоксе Греллинга-Нельсона отмечалось некорректность разделения прилагательных на автологические и гетерологические. К какому классу отнести, например, прилагательное «тихий»? Если оно произносится тихим голосом, то оно должно быть автологическим, а если громким – то гетерологическим. С другой стороны, антиномии Кантора и Рассела, некоторые другие парадоксы, были более глубокими и отнесены к логическим парадоксам. По мнению Рассела все парадоксы возникают из-за одной логической ошибки, которую он назвал *принципом порочного круга* и описал следующим образом: «То, что содержит всё множество, не должно быть элементом множества». Т. е. нельзя определять объект через класс объектов, содержащий этот самый объект. По терминологии Пуанкаре такие определения называются *непредикативными*, и они незаконны.

В то же время непредикативные определения фактически уже использовались в классической математике. Например, наименьшая верхняя граница множества определялась через класс верхних границ, содержащий ту самую границу, которая подлежала определению. И у математиков не было уверенности в том, что в будущем не появятся новые противоречия. Поэтому в начале XX века проблема непротиворечивости стала весьма остро.

Лекция 10. **Аксиоматика Цермело-Френкеля**

Открытие парадоксов теории множеств и осознание того, что подобные парадоксы могут встретиться и в уже существующей классической математике, заставили математиков и логиков по иному взглянуть на некоторые понятия, переосмыслить их. В первую очередь это относится к понятиям существования, бесконечности, истинности (анализ этих понятий будет темой последующих глав). Со всей остротой выступила проблема непротиворечивости.

Один из возможных путей разрешения проблемы виделся в построении математики как аксиоматической системы, в которой не было бы места указанным парадоксам. На такой аксиоматической основе построена, в частности, геометрия Евклида. И эта геометрия внутренне непротиворечива, парадоксов там нет. Другое дело, что, изменив некоторые аксиомы, мы можем построить другие геометрии, отличные от евклидовой, но которые также будут внутренне непротиворечивы (например, геометрии Лобачевского и Римана).

С необходимостью введения аксиом математики вплотную столкнулись на пороге XX века, когда критически переосмыслили практически все математические достижения предшествующих лет. В результате такого пересмотра выяснилось, что многие постоянно использующиеся в математике доказательства неявно уже опираются на некоторые предположения, которые, тем не менее, не были чётко сформулированы. В частности, это относится к так называемой *аксиоме выбора*. Состоит она в следующем: *если имеется любой набор (конечный или бесконечный) множеств, то всегда можно, выбрав из каждого множества по одному элементу, составить новое множество*. Например, выбрав от каждой области Украины по одному человеку, можно составить представительскую группу из 24 человек.

Впервые чётко сформулировал эту аксиому немецкий математик *Эрнст Цермело* (1871–1953) в работе 1904 года. Но неявно она использовалась и ранее при доказательстве многих теорем топологии, теории меры, алгебры, функционального анализа.

Аксиома выбора стала одной из составных частей системы аксиом, предложенной Э. Цермело и *Абрахамом Френкелем* (1891–1965). Состоит эта система из следующих аксиом.

1. Аксиома объёмности. *Два множества равны тогда и только тогда, когда они состоят из одних и тех же элементов.*

2. Аксиома свёртки. *Любое свойство* $P(x)$ *определяет некоторое множество* A *с помощью условия: элементами множества* A *являются те и только те объекты, которые имеют свойство* P.

3. Аксиома пары. *Если* a *и* b *– различные объекты, то существует множество* $\{a,b\}$, *состоящее точно из объектов* a *и* b.

4. Аксиома объединения. *Для произвольного множества* A *существует множество* B, *которое состоит в точности из всех элементов, входящих в элементы множества* A.

5. Аксиома бесконечности. *Существует хотя бы одно бесконечное множество – множество натуральных чисел* $\mathbb{N}$.

6. Аксиома булеана. *Для любого множества* A *существует множество* $\tilde{A}$ *всех подмножеств множества* A.

7. Аксиома выбора. *Если дано множество* A, *то существует функция* f, *которая ставит в соответствие каждому непустому подмножеству* B *из множества* A *один определённый элемент* $f(B)$ *из множества* B.

8. Аксиома подстановки. *Для любого множества* A *и однозначной функции* f, *определённой на множестве* A, *существует множество, которое состоит в точности из элементов* $f(x)$ *для* $x \in A$.

Приведенная система аксиом является недостаточно определённой. Это связано с вопросом высказывания, которое используется в аксиоме свёртки. Язык высказываний должен описываться более точно, иначе как раз и можно прийти к вышеописанным парадоксам типа парадокса лжеца. Существуют и другие системы аксиом, например, *Геделя-Бернайса* или *фон Неймана*. В частности, в этих системах присутствует так называемая аксиома регулярности: "*В любом семействе множеств есть (по меньшей мере одно) множество* b, *каждый элемент* c *которого не принадлежит данному семейству* a". Другими словами: "Не существует бесконечной последовательности вложенных множеств". Из этой аксиомы, как можно показать, следует запрет на использование множества всех множеств и, таким образом, указанные парадоксы устраняются.

Лекция 11. Доказательство, необходимые свойства доказательства Основные черты доказательства в математике

В жизни, в науке, и, в первую очередь, в математике, нам постоянно приходится сталкиваться с необходимостью строгого обоснования каких-либо суждений, выведения их как непреложного следствия других суждений или положений. Такое обоснование мы называем доказательством. Точнее, под *доказательством* мы понимаем строгое обоснование истинности каких-либо утверждений (*тезисов*) путём их вывода с помощью логических *рассуждений* из определённого набора условий (*посылок*). В математике в общем случае это выглядит так: «Пусть выполняются условия $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Тогда мы с помощью цепочки логических рассуждений устанавливаем, что справедливы утверждения $B_1, B_2, \ldots, B_m$».

В основе всякого доказательства лежит закон логики, заключающийся в том, чтобы всякая мысль была обоснована, т. е. приведены <u>достаточные</u> основания для того, чтобы считать эту мысль истинной. Этот закон был сформулирован выдающимся немецким философом и математиком *Готфридом Вильгельмом Лейбницем* (1646–1716). Доказывать мы можем не только истинность, но и ложность утверждения. В таком случае доказательство называется *опровержением*. Опровергнуть, вообще говоря, легче, чем доказать. Для опровержения тезиса достаточно привести один единственный пример, ему противоречащий. Для доказательства же недостаточно и сотен примеров, его подтверждающих – большое количество таких примеров свидетельствует лишь о *правдоподобности*, но не истинности тезиса. Так, например, в юриспруденции для опровержения виновности подозреваемого достаточно наличия алиби – человек в момент совершения преступления находился в другом месте, поэтому не мог непосредственно сам совершить преступление. В то же время отсутствие алиби, наличие мотивов преступления, наличие возможностей для его совершения, негативная характеристика подозреваемого (совершённые в прошлом преступления) не являются бесспорным доказательством того, что подозреваемый действительно виновен, хотя вроде бы это подтверждают. Сюжеты многих детективных историй построены как раз на таком роковом для подозреваемого, но в действительности невиновного человека стечении обстоятельств.

Отметим, что доказательства в обыденной жизни существенно отличаются от доказательств в математике. Но есть и общие черты. Их мы и постараемся сформулировать.

1. Доказательство правомерно лишь в том случае, если есть чёткая договорённость об истинности тех или иных посылок, т. е. чётко сформулированы $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Заметим, что об их абсолютной истинности говорить нет смысла: одни и те же положения в одной ситуации могут быть истинными, а в другой ложными (например, положение о том, что сумма внутренних углов треугольника равна 180^0, истинно в геометрии Евклида и ложно в геометрии Лобачевского). В математике обычно делается *предположени*е об истинности тех или иных посылок. Тогда, если мы проводим правильные логические рассуждения, этим посылкам будут соответствовать определённые выводы. Если же мы изменим посылки, а рассуждения будут по-прежнему верны (хотя это могут быть, вообще говоря, уже другие рассуждения), то соответственно изменятся и выводы. Другими словами: $\left(B_1, B_2, \ldots, B_m\right) = f\left(A_1, A_2, \ldots, A_n\right)$, где f – правильные рассуждения.

2. Посылки должны быть не только истинными в той или иной системе допущений, они должны быть *достаточным основанием* для принятия тезиса. В жизни зачастую приходится сталкиваться с ситуацией, когда приводятся верные аргументы, но такие, из которых никак не вытекает требуемый тезис, при этом допускаются различные логические ошибки[15]. В математике требование достаточности, в частности, отражается в том, что отказ хотя бы от одной из посылок $A_1, A_2, \ldots, A_n$ делает утверждение неверным. Рассмотрим пример. В дифференциальном исчислении хорошо известна теорема, принадлежащая французскому математику *М. Роллю* (1652–1719).

Теорема Ролля. *Пусть функция* $y = f\left(x\right)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

А1) эта функция непрерывна на отрезке $\left[a, b\right]$,

А2) эта функция дифференцируема хотя бы на интервале $\left(a, b\right)$,

А3) на концах отрезка $\left[a, b\right]$ *значения этой функции совпадают, т. е.* $f\left(a\right) = f\left(b\right)$.

[15] Характеристика этих ошибок и ряд примеров на эту тему приведены в книге: Уёмов А. И. Основы практической логики с задачами и упражнениями. Одесса, 1997.

B. Тогда на интервале (a,b) найдётся по меньшей мере одна точка с такая, в которой производная функции $y = f(x)$ обратится в нуль, т. е. $f'(c) = 0$.

С геометрической точки зрения это означает, что на интервале (a,b) найдётся по меньшей мере одна точка, в которой касательная, проведённая к графику функции $y = f(x)$, будет параллельна оси Ox. На рис. 15 две такие точки c_1 и c_2.

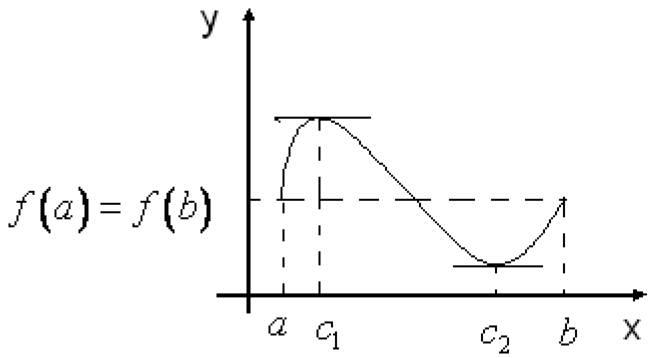


Рис.15

Не вдаваясь в доказательство этой теоремы[16], покажем, что отказ хотя бы от одного из условий *A1, A2, A3* делает утверждение *B* теоремы неверным.

1. Откажемся от условия *A1*, сохранив *A2* и *A3*. Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

[16] Доказательство можно найти, например, в книге: Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М., 1969. – С. 225.

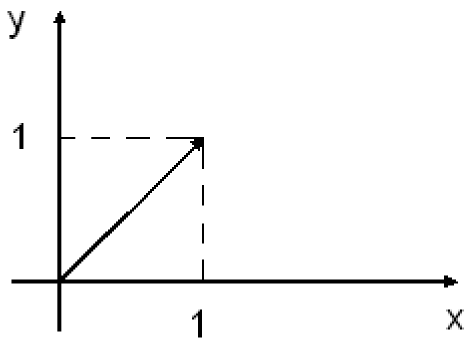


Рис. 16

Для этой функции не существует точки, где $f'(c)=0$, т. к. $f'(x)=1$ для всех $x \in (0,1)$. Таким образом мы привели пример, противоречащий утверждению теоремы, следовательно, это утверждение неверно.

2. Откажемся от условия *A2*, сохранив *A1* и *A3*. Рассмотрим на отрезке $[-1,1]$ функцию $y=|x|$ (рис. 17).

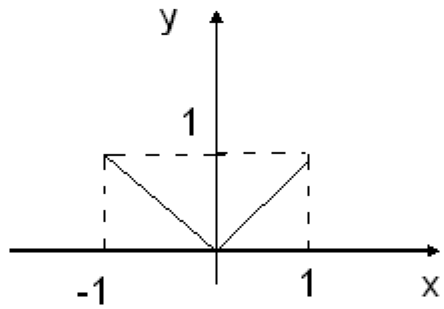


Рис. 17

Снова не существует точки, где $f'(c)=0$, т.к. $f'(x)=1$ при $x>0$, и $f'(x)=-1$ при $x<0$. При $x=0$ производной данной функции не существует. Таким образом, снова приведён пример, противоречащий утверждению теоремы, а значит, опровергающий его.

3. Откажемся от условия *A3*, сохранив *A1* и *A2*. Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ функцию $y=x$ (рис. 18).

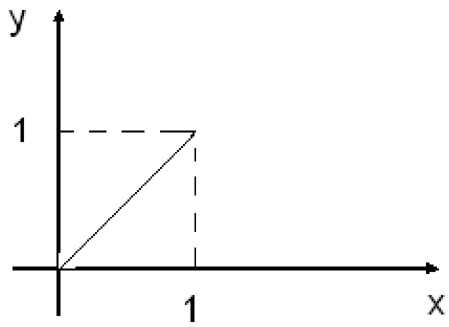


Рис. 18

Снова нет точки, где $f'(c)=0$, т. к. для всех $x \in (0,1)$ выполнено $f'(x)=1$. Таким образом и здесь получен опровергающий пример.

Вместе с тем в математике нередко встречаются случаи, когда всё же оказывается возможным, сохранив утверждения, отказаться от некоторых условий или ослабить их, заменив менее жёсткими. Но связано это с изменением хода рассуждений, заменой их более тонкими. Т. е.

$$\left(B_1, B_2, \ldots, B_m\right) = \tilde{f}\left(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_k\right),$$

где $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_k$ – изменённые посылки, $\tilde{f}$ – изменённые рассуждения.

3. Сама аргументация должна быть достаточно обоснованной. Особенно ярко это проявляется в математике, где ни одно положение, не входящее в принятую систему аксиом, как бы бесспорным оно ни выглядело, никогда не принимается на веру. По этому поводу есть известный анекдот о едущих в поезде по Африке инженере, физике и математике. Они едут в поезде и видят пасущееся стадо зебр, из которых одна белая, без чёрных полос. «Смотрите, – восклицает инженер, – в Африке, оказывается, водятся белые зебры». «Нет, – поправляет его физик, – в Африке есть, по крайней мере, одна белая зебра». «Нет, и это неверно, – замечает математик, – в Африке есть, по крайней мере, одна зебра, которая выглядит белой, по крайней мере, с одной стороны». Для математика не было достаточных оснований считать, что эта зебра вся белая, поскольку он видел лишь одну её сторону, да и здесь не исключал оптического обмана, поэтому сказал «выглядит». Хотя повседневный опыт нам подсказывает, что инженер и физик вряд ли ошиблись.

Такая скрупулёзность математиков иногда вызывает насмешки в их адрес – дескать, доказывают то, что и так очевидно. Глупые насмешки. Далеко не всё то, что кажется очевидным, на деле оказывается истинным. В связи с этим приведём один удивительный пример[17]. Сколько корней имеет уравнение

$$\left(\frac{1}{16}\right)^x = \log_{\frac{1}{16}} x?$$

Зная характер графиков показательной и логарифмической функций с основанием $0 < a < 1$, построим в одной координатной плоскости схематические графики функций, стоящих в левой и правой частях предложенного уравнения:

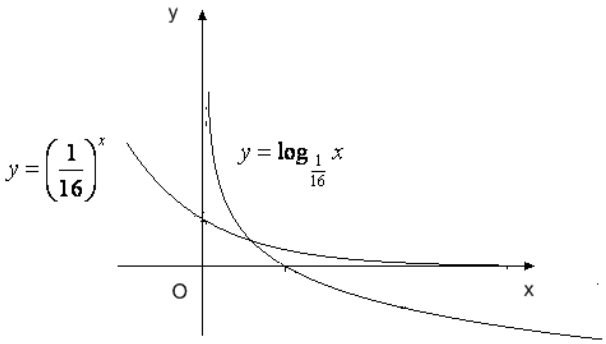


Рис. 19

Визуальное восприятие совершенно чётко фиксирует лишь *одну* точку пересечения этих графиков, следовательно, в соответствии с этим предложенное уравнение имеет единственный корень. Вместе с тем непосредственная подстановка в это уравнение значений $x = 1/2$ и $x = 1/4$ показывает, что оба эти значения являются корнями, т. е. корней, по меньшей мере, два. А более тонкий анализ показывает, что их три. Графики указанных функций, построенные с помощью программы *Maple V*, выглядят на самом деле так:

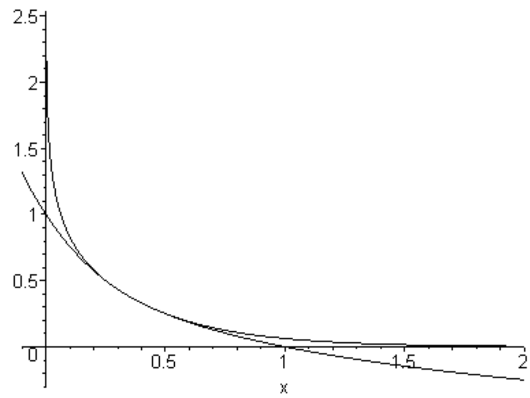


Рис. 20

[17] Суконник Я. В. Математические задачи повышенной трудности. К., 1985. – С. 176.

На участке от 0,2 до 0,5 эти графики почти сливаются.

Множество ярких примеров оптических иллюзий приведено в прекрасных книгах Я. И. Перельмана «Занимательная физика» и «Занимательная математика» и книге И. Д. Артамонова «Иллюзии зрения».

Лекция 12. Виды математических доказательств
Прямое доказательство, примеры

Здесь и в следующих 3-х параграфах мы рассмотрим некоторые виды доказательств, часто используемые в математике. Начнём с так называемого *прямого доказательства*. Такое доказательство базируется на *дедуктивном* методе. В дедуктивном умозаключении тезис необходимо следует из принятых посылок. И если истинны посылки и правильны рассуждения, то истинен и тезис. Т. е. имеет место логический закон, согласно которому из истинного суждения может следовать лишь тоже истинное суждение. К дедуктивным рассуждениям относятся, например, следующие. 1. Все люди смертны. Сократ – человек. Следовательно, Сократ смертен. 2. Если идёт дождь, то земля является мокрой. Дождь идёт. Следовательно, земля мокрая. Можно сказать, что дедуктивное рассуждение – это такое рассуждение, когда из некоторого набора посылок логическим путём устанавливаются следствия из них. То есть это метод рассуждений *от общего к частному*.

Дедуктивный характер носят математические теории, построенные на аксиоматической основе. Аксиомы играют роль посылок (их истинность не подвергается сомнению или принята договорённость об их истинности). А теоремы, выводимые из этих аксиом с помощью логических рассуждений, играют роль тезисов.

Приведём некоторые примеры прямых математических доказательств. Начнём с примера из элементарной геометрии. В число аксиом евклидовой геометрии входят следующие[18]:

Аксиома откладывания отрезков. *На любой полупрямой от её начальной точки можно отложить отрезок заданной длины и только один*.

Аксиома откладывания углов. *От любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой меньшей* 180^0 *и только один.*

[18] Погорелов А. В. Геометрия. Учебник для 7–11 классов средней школы. М., 1993.

<u>Аксиома равных треугольников</u>. *Каков бы ни был треугольник, существует равный ему треугольник в заданном расположении относительно данной полупрямой.*

На основании этих аксиом докажем следующую теорему (признак равенства треугольников по 2-м сторонам и углу между ними).

Теорема. *Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.*

<u>Доказательство</u>. Пусть у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ выполнено: $\widehat{A} = \widehat{A_1}$, $|AB| = |A_1B_1|$, $|AC| = |A_1C_1|$ (рис. 21). Докажем, что эти треугольники равны.

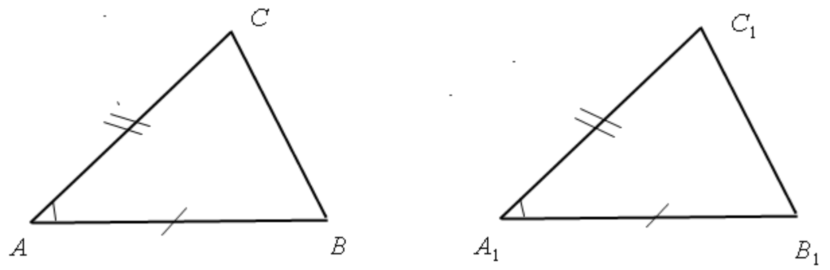


Рис. 21

Пусть $A_1B_2C_2$ – треугольник, равный треугольнику ABC с вершиной B_2 на луче A_1B_1 и с вершиной C_2 в той же полуплоскости относительно прямой A_1B_1, где лежит вершина C_1 (рис. 22, а). На основании аксиомы равных треугольников такой треугольник существует.

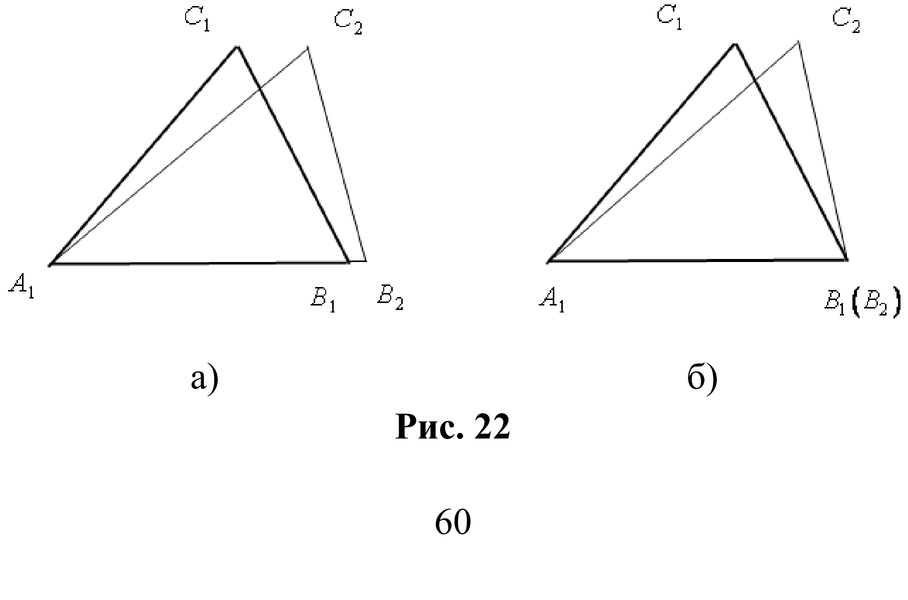
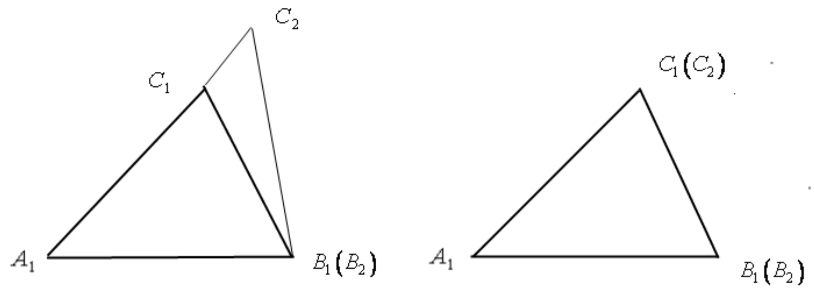


Рис. 22



в) г)

Рис. 22

Так как $|A_1B_1| = |A_1B_2|$, то на основании аксиомы откладывания отрезков вершина B_2 совпадает с вершиной B_1 (рис. 22, б). Так как $\widehat{B_1A_1C_1} = \widehat{B_2A_1C_2}$, то на основании аксиомы откладывания углов луч A_1C_2 совпадает с лучом A_1C_1 (рис. 22, в). Так как $|A_1C_1| = |A_1C_2|$, то на основании аксиомы откладывания отрезков вершина C_2 совпадает с вершиной C_1. Теорема доказана.

Как видим, при доказательстве мы опирались только на аксиомы, и утверждение теоремы получили как непреложное следствие из них.

Следующий пример из элементарной алгебры.

Теорема Виета. *Пусть задано квадратное уравнение*

$x^2 + px + q = 0$,

и x_1, x_2 *– его корни. Тогда имеют место равенства:*

$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q$.

Доказательство. Поскольку x_1, x_2 являются корнями квадратного трёхчлена $x^2 + px + q$, то имеет место равенство: $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$. Раскрывая в правой части скобки и группируя слагаемые, получим равенство: $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 + px + q$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях, получим требуемое.

И наконец, пример из математического анализа. Одним из важнейших понятий математического анализа и всей математики является понятие производной.

Определение. *Производной* функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения этой функции к приращению её аргумента, при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

Обозначается производная функции $y = f(x)$ через $f'(x)$. Таким образом, по определению:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \ .$$

Получим на основании этого определения и правил элементарной алгебры формулу для производной функции $y = x^2$. Имеем:

$$\left(x^2\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x \, .$$

Итак, доказали формулу: $\left(x^2\right)' = 2x$.

Лекция 13. Метод доказательства от противного, примеры

Другим типом доказательства, широко используемого в математике, является метод *доказательства от противного*, или *косвенное* доказательство, которое восходит ещё к Платону. Состоит оно вовсе не в том, что кто-то противный нам пытается что-то доказать, а в следующем. Пусть при выполнении некоторой совокупности условий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ нам нужно доказать некоторое утверждение B. Мы предполагаем, что B неверно. И затем с помощью правильных логических рассуждений приходим к противоречию либо с условиями $A_1, A_2, \ldots, A_n$, либо с некоторыми известными фактами, справедливость которых не подвергается сомнению. Основан такой метод доказательства на логическом законе: если из утверждения A следует утверждение B, то это эквивалентно тому, что из отрицания утверждения B следует отрицание утверждения A. Т. е. в символьном виде: $(A \to B) \Leftrightarrow (\overline{B} \to \overline{A})$. Так вот, вместо того, чтобы доказывать, что из A следует B, мы доказываем, что из отрицания B следует отрицание A. Это и будет означать, что B верно.

Такой тип доказательства нередко используется и в жизни. По образному выражению Марка Твена «косвенное доказательство имеет некоторое сходство с политиканом, поддерживающим своего кандидата тем, что опорочивает его конкурента». Действительно, в предвыборных кампаниях избиратели часто голосуют не столько за своего кандидата, сколько против его конкурента.

Именно методом доказательства от противного мы в Лекции 8 показали, что число $\sqrt{2}$ не является рациональным числом. Предположили, что это не так и пришли к противоречию (попробуйте аналогично доказать, что число $\sqrt{3}$ также не является рациональным). Рассмотрим ещё некоторые примеры. Первый пример возьмём из элементарной геометрии.

Теорема. *Через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную ей прямую и только одну.*

Доказательство. Пусть a – данная прямая, и A – данная точка на ней. Обозначим через a_1 одну из полупрямых прямой a с начальной точкой A (рис. 23).

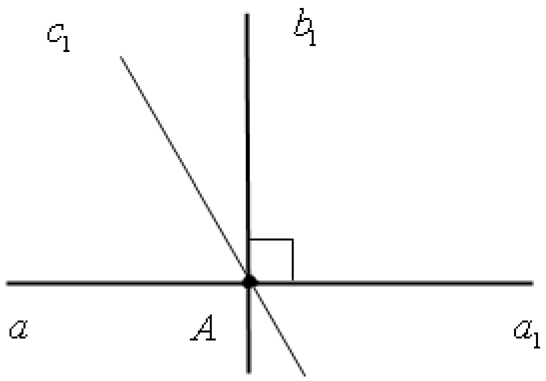


Рис. 23

Отложим от полупрямой a_1 угол (a_1b_1), равный 90^0 (по аксиоме откладывания углов это можно сделать). Тогда прямая, содержащая луч b_1, будет перпендикулярна прямой a.

Допустим, что существует другая прямая, тоже проходящая через точку A и перпендикулярная прямой a. Обозначим через c_1 полупрямую этой прямой, лежащую в одной полуплоскости с лучом b_1.

Углы (a_1b_1) и (a_1c_1), равные каждый 90^0, отложены в одну полуплоскость от полупрямой a_1. Но от полупрямой a_1 в данную полуплоскость можно отложить только один угол, равный 90^0, иначе это будет противоречить аксиоме откладывания углов. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Следующий результат из теории чисел.

Теорема. *Множество простых чисел бесконечно.*

Доказательство. Допустим, вопреки утверждению теоремы, что множество простых чисел конечно. Перенумеруем их: $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Тогда любое другое натуральное число будет составным, и оно обязательно должно делиться хотя бы на одно из перечисленных простых чисел (иначе оно само простое). Рассмотрим число $a = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$. Это число заведомо больше, чем любое из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$, поэтому не входит в них. И оно не делится ни на одно из этих простых чисел, поскольку при делении на любое из них в остатке будет получаться 1. Итак, с одной стороны число a делится хотя бы на одно из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$, а с другой стороны ни на одно из них не делится. Полученное противоречие возникло из предположения о конечности множества простых чисел, поэтому мы вынуждены заключить, что это множество бесконечно. Теорема доказана.

Следующий пример из математического анализа.

Теорема. *Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то этот предел единственный.*

Доказательство. Предположим, вопреки утверждению теоремы, что последовательность $\{x_n\}$ имеет по меньшей мере два предела a и b, причём $a \neq b$. Тогда $|a-b| > 0$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то в соответствии с определением предела последовательности для всякого положительного числа ε найдётся такое натуральное число N_1, что для всех $n > N_1$ будет выполнено неравенство: $|x_n - a| < \varepsilon$. А поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое натуральное число N_2, что для всех $n > N_2$ будет выполнено неравенство $|x_n - b| < \varepsilon$. Обозначим $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда при $n > N$ будут одновременно выполнены оба неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$ и $|x_n - b| < \varepsilon$. Положим $\varepsilon = |a-b|/2$ (это правомерно, поскольку $|a-b| > 0$). Рассмотрим цепочку неравенств:

$$0 < |a-b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |a-b|.$$

Итак $|a-b| < |a-b|$, т. е. число $|a-b|$ меньше самого себя, что невозможно. Противоречие возникло из предположения о неединственности предела. Теорема, таким образом, доказана.

Лекция 14. Метод индукции, примеры. Полная и неполная индукция

Другой метод доказательства, часто используемый в математике (и не только в ней) – это метод *индукции*. Состоит он в том, что мы на основе анализа некоторых частных случаев или опытных данных, пытаемся получить общую закономерность. То есть, если дедукция – это метод рассуждения *от общего к частному*, то индукция – метод рассуждения *от частного к общему*.

Безусловно, с точки зрения формальной логики такой метод является неправильным, ибо он не гарантирует достоверность полученного результата. И действительно, при неверном его применении он вполне может привести к ошибочным выводам (математические примеры мы рассмотрим ниже). Например, из того, что в понедельник, вторник и субботу была хорошая погода, не следует, что хорошая погода была всю неделю. Тем не менее, индуктивные методы заняли прочное место даже в такой точной и логической науке, как математика.

Если есть возможность проанализировать все возможные частные случаи, то тогда мы можем сделать достоверный вывод об общей закономерности. В этом случае индукция называется *полной*. Скажем, мы проверили погоду в понедельник, вторник, среду, четверг, пятницу, субботу и воскресенье. Убедились, что в каждый из этих дней была хорошая погода. И тогда мы имеем полное право сделать вывод о том, что хорошая погода была всю неделю. Аналогично мы можем перебрать всех студентов какой-то группы, все области в Украине, все планеты Солнечной системы и т. д. И выводы, сделанные на основе такого полного перебора, будут достоверными. Полную индукцию можно определить как такое умозаключение, в котором общее заключение о некотором классе объектов делается на основании изучения всех объектов этого класса. Иногда даже полную индукцию не считают индуктивным умозаключением. Более правильно было бы сказать, что полная индукция является своеобразной комбинацией индуктивного и дедуктивного заключения из посылки, в которой утверждается, что исчерпаны все частные случаи. Рассмотрим математический пример.

Утверждение. *Любое чётное число, не большее 30, представимо в виде суммы двух простых чисел.*

Переберём все чётные числа, не большие 30:

$2=1+1$; $4=3+1$; $6=3+3$; $8=5+3$; $10=7+3$; $12=7+5$; $14=11+3$;

16=11+5;   18=11+7;   20=17+3;   22=17+5;   24=19+5;   26=19+7;

28=23+5;   30=23+7.

Итак, мы перебрали все предложенные числа, показали возможность разложения каждого из них в сумму двух простых, поэтому наше утверждение верно.

Разумеется, полная индукция возможна далеко не всегда – перебрать все частные случаи, как правило, не удаётся из-за их большого количества (тем более, бесчисленного их множества) или, даже в случае, когда их немного, невозможности по какой-то причине получить информацию о некоторых из них. Поэтому чаще приходится иметь дело с *неполной* индукцией, то есть когда мы пытаемся делать общий вывод на основе исследования лишь некоторых частных случаев. Безусловно, такой вывод не будет достоверным, но можно говорить о его правдоподобности или вероятности того, что он верен. Собственно под индуктивным заключением понимается, как правило, именно неполная индукция.

К неполной индукции относится перечислительная, аналитическая, научная.

Перечислительная индукция осуществляется на основании повторяемости одного и того же признака у ряда факторов и отсутствия противоречивого случая выводом, что все факторы этого рода имеют указанный признак. Так, обнаруживая массу у всех известных ему предметов, Ньютон обобщил: «Все тела имеют массу». Но подобные обобщения не всегда правомерны. Примером *поспешного обобщения* служит имевшая место история с лебедями: европейцы считали, что все лебеди белые, пока не обнаружили в Австралии черных. Поскольку перечислительная индукция допускает исключения из правил, ее выводы лишь правдоподобны, а не достоверны. Уверенность в их истинности растет с появлением новых подтверждений, но утверждение ее возможно лишь через другие способы умозаключений.

В истории математики также известны примеры поспешного обобщения и, как следствие, получения неверных результатов. Великий французский математик Пьер Ферма рассмотрел последовательность

$$x_n = 2^{2^n} + 1.$$

Заметив, что первые 4 члена этой последовательности (5, 17, 257, 65537) являются простыми числами, он предположил, что и все члены этой последовательности тоже простые числа. И, хотя он этого не доказал, но был настолько в этом уверен, что бросил вызов другим математикам, предлагая этот факт доказать. Но другой великий математик Леонард Эйлер нашёл, что уже следующий, пятый член этой последовательности $2^{32}+1$ не является простым числом, он делится на 641.

Этот пример приведен в замечательной книге Д. Пойа «Математика и правдоподобные рассуждения». Там же приводятся следующие юмористические примеры на тему поспешного обобщения[19]:

Беседа логика, математика, физика и инженера.

«Взгляни на математика, – сказал логик. – Он замечает, что первые 99 натуральных чисел меньше 100, и отсюда с помощью того, что он называет индукцией, заключает, что все натуральные числа меньше 100».

«Физик верит, – сказал математик, – что число 60 делится на все числа. Он замечает, что 60 делится на 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Он проверяет несколько других чисел, например, 10, 20, 30, взятых, как он говорит, наугад. Так как 60 делится и на них, то он считает экспериментальные данные достаточными».

«Да, но взгляни на инженера, – возразил физик. – Инженер подозревает, что все нечётные числа простые. Во всяком случае, 1 можно рассматривать как простое число. Затем идут числа 3, 5, 7 – очевидно простые. Затем идёт 9 – досадный случай (число 9 не является простым, оно делится на 3). Но после 9 идут 11 и 13 – конечно же, простые числа. И инженер считает 9 ошибкой эксперимента».

Аналитическая индукция с целью исключить случаи *поспешного обобщения* предполагает выбор наиболее типичных факторов, разнородных по времени и другим возможным условиям. Например, о качестве партии товара судят по образцам из разных вагонов и разных мест вагона (при перечислительной индукции, проверяющие полностью проверили бы 2 вагона из 50 и, уморившись, решили бы: «Да че там проверять – вся партия такая!» – а в следующем вагоне могла бы начаться другая картина).

Научная индукция обобщает путем отбора необходимых и исключения случайных обстоятельств, учитывая важнейшую из необходимых связей – причинную и при условии, что выбранная связь сочтена причинной не ошибочно, дает абсолютно достоверную информацию обо всех явлениях какого-либо

[19] Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М., 1975. – С. 31–33.

класса на основании изучения некоторого их числа. При этом возможность установления причинной связи обусловлена тем, что *если достоверно известно, что во всяких ситуациях, при всяких стечениях обстоятельств только одно в своем отличии необходимо для отличия в исследуемом явлении, то оно и есть его причина.*

Методика научной индукции приближается к дедуктивной, замыкая круг возможного мышления (дедукция → аналогия → индукция → дедукция), и предусматривает следующие частные способы установления причинных связей (способы установления необходимости)[20]:

Метод сходства: если во всяких ситуациях среди всех предшествующих явлению обстоятельств только одно явилось обязательным, то оно и есть его очевидной (наиболее вероятной) причиной (оно, по-видимому, необходимо).

Метод различия, лежащий в основе экспериментов и тестов: если во всяких ситуациях, при разных стечениях обстоятельств отсутствие только одного из них явилось обязательным для отсутствия явления, то оно и есть его самой очевидной (наиболее вероятной) причиной.

Метод сходства и различия, для достижения 100% достоверности, объединяющий два предыдущих: если во всяких случаях явление неразрывно связано с каким-то одним обстоятельством, то оно и есть его действительная причина.

Метод сопутствующих изменений, применяемый при невозможности отделения одних обстоятельств от других: если во всяких ситуациях видоизменение одного из обстоятельств всегда связано с видоизменением другого, то оно и есть самой вероятной причиной.

Метод остатков: если достоверно известно, что определенная часть известных причин могла вызвать лишь часть результата, то вполне вероятно, что оставшаяся часть результата вызвана остальными *и з в е с т н ы м и* причинами.

Индукция часто начинается с наблюдения. Натуралист может наблюдать жизнь птиц, кристаллограф – формы кристаллов. На основе изучения свойств отдельных объектов мы можем делать предположения об их общем свойстве. Это предположение, безусловно, имеет некоторые *наводящие контакты* с фактами, с опытом. А. Н. Колмогоров в книге «Математика, наука и профессия» пишет о том, как ещё в 5-летнем возрасте он подметил закономерность:

$$1^2 = 1,\ 1+3 = 2^2,\ 1+3+5 = 3^2,\ 1+3+5+7 = 4^2, \ldots$$

[20] Более подробно об этих методах см. в цит. выше книге А. И. Уёмова «Основы практической логики».

На основании этих частных случаев можно (ниже мы это сделаем с помощью метода математической индукции) получить общую закономерность: сумма первых нечётных натуральных чисел равна квадрату натурального числа (эта закономерность была известна ещё пифагорейцам, см. Лекцию 7).

Наводящие контакты приводят к некоторому предположению, *пробному утверждению*. Это утверждение ни в какой степени не является доказанным, оно является лишь попыткой подойти к истине. Продвижением на пути к этой истине могут служить *подкрепляющие контакты*. Вернёмся к утверждению, рассмотренному выше: все чётные числа, не большие 30, представимы в виде суммы двух простых чисел. Мы это утверждение доказали методом полной индукции. Существует более общее утверждение, носящее название *гипотезы Гольдбаха*: *любое чётное число представимо в виде суммы двух нечётных простых чисел*. Проверка чётных чисел, не больших 30, может служить наводящими контактами. Чтобы попытаться доказать гипотезу Гольдбаха или опровергнуть её, нужно её испытать. Мы это сделаем, если исследуем какое-нибудь новое чётное число и выясним, является ли оно суммой двух нечётных простых чисел или нет. Например: 60=53+7; 72=53+19; 126=107+19 и т. д. Результаты, получаемые нами, благоприятствуют этому предположению, делают его более правдоподобным (это и есть подкрепляющие контакты), но не доказывают его.

Лекция 15. **Метод математической индукции, примеры**

В математике широко используется разновидность индуктивного рассуждения, которая называется *методом математической индукции*. Состоит он в следующем. Пусть требуется доказать, что некоторое утверждение $P(n)$ справедливо для любого натурального числа n. Сначала доказывается его справедливость при $n=1$, т. е. доказывается, что $P(1)$ – верно. Это утверждение называется *базой индукции*. Затем предполагается, что $P(n)$ справедливо для $n=k$, т. е. $P(k)$– верно. Это предположение называется *предположением индукции*. И затем отсюда доказывают, что $P(n)$ справедливо и для $n=k+1$, т. е. $P(k+1)$ – верно. Это называется *выводом индукции*. Если это удаётся сделать, это и будет означать, что предложение $P(n)$ справедливо для любого натурального числа n. В самом деле, из его справедливости при $n=1$ будет следовать справедливость при $n=2$, из справедливости при $n=2$ будет следовать справедливость при $n=3$ и т. д. То есть по сути мы здесь имеем дело с вариантом полной индукции.

Иногда на первом этапе отдельно доказывают справедливость утверждения $P(n)$ не только для $n=1$, но и для $n=2$ и даже для $n=3$, т. е. делают базу индукции более мощной, и тем самым предположение индукции более правдоподобным. К тому же при некоторых значениях n могут возникать так называемые особые случаи, которые могут существенно отличаться от других по методу доказательства и даже по характеру результата. Кроме того, само предположение индукции нередко получают именно из анализа нескольких частных случаев, стараясь подметить возникающую при этом закономерность.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Доказать, что сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $180^0 \cdot (n-2)$.

Проведём доказательство методом математической индукции по числу n. При $n=3$ (случай $n<3$ не имеет смысла) получаем треугольник, сумма внутренних углов которого равна 180^0, т. е. $180^0 \cdot (3-2)$, и таким образом утверждение справедливо. База индукции есть. Пусть утверждение справедливо для некоторого $n=k>3$, т. е. сумма внутренних углов выпуклого k-угольника равна $180^0 \cdot (k-2)$. Покажем, что утверждение справедливо для $n=k+1$, т. е. сумма внутренних углов выпуклого $(k+1)$-угольника равна $180^0 \cdot (k+1-2) = 180^0 \cdot (k-1)$. Разобьём выпуклый $(k+1)$-угольник $A_1A_2A_3...A_kA_{k+1}$ на выпуклый k-угольник $A_1A_2A_3...A_k$ и треугольник $A_1A_kA_{k+1}$ (рис. 24). Сумма внутренних углов $(k+1)$-угольника $A_1A_2A_3...A_kA_{k+1}$ будет складываться из суммы внутренних углов k-угольника $A_1A_2A_3...A_k$, которая по предположению индукции равна $180^0 \cdot (k-2)$, и суммы внутренних углов треугольника $A_1A_kA_{k+1}$, которая равна 180^0.

То есть сумма внутренних углов $(k+1)$-угольника равна $180^0 \cdot (k-2) + 180^0 = 180^0 \cdot (k-2+1) = 180^0 \cdot (k-1)$, что и требовалось доказать.

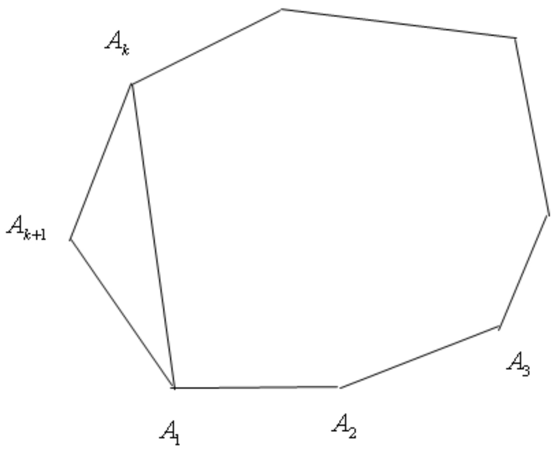


Рис. 24

Пример 2. Доказать, что для любого натурального числа n число $7^n - 6 \cdot 2^n$ делится на 5.

При $n = 1$ получаем число $7 - 6 \cdot 2 = -5$, которое, очевидно, делится на 5. Таким образом, база индукции у нас есть. Для большей уверенности проверим ещё случай $n = 2$. Получим $7^2 - 6 \cdot 2^2 = 25$, т. е. тоже делится на 5. Предположим, что наше предположение справедливо для $n = k$, т. е. число $7^k - 6 \cdot 2^k$ делится на 5. Это будет означать, что $7^k - 6 \cdot 2^k = 5m$, где m – целое число. Покажем, что предположение справедливо для $n = k + 1$, т. е. число $7^{k+1} - 6 \cdot 2^{k+1}$ делится на 5. В самом деле, рассмотрим:

$$7^{k+1} - 6 \cdot 2^{k+1} = 7 \cdot 7^k - 6 \cdot 2 \cdot 2^k = (5+2) \cdot 7^k - 2 \cdot 6 \cdot 2^k = 5 \cdot 7^k + 2 \cdot 7^k - 2 \cdot 6 \cdot 2^k =$$
$$= 5 \cdot 7^k + 2\left(7^k - 6 \cdot 2^k\right) = 5 \cdot 7^k + 2 \cdot 5m = 5 \cdot \left(7^k + 2m\right).$$

Последнее число, очевидно, делится на 5, и, тем самым, требуемое доказано.

Пример 3. Доказать, что для любого натурального числа n справедливо равенство (см. Лекции 7, 14):

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2.$$

Для $n = 1$ получим: $1 = 1^2$.

Для $n = 2$ получим: $1 + 3 = 2^2$, т. е. база индукции у нас есть. Предположим, что требуемое равенство справедливо для $n = k$, т. е.

$$1 + 2 + 3 + \cdots (2k - 1) = k^2.$$

Докажем, что требуемое равенство справедливо для $n = k + 1$, т. е. имеет место соотношение:

$$1 + 2 + 3 + \cdots (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

В самом деле, рассмотрим:

$$1+2+3+\cdots(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)=(k+1)^2,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично доказываются и более сложные выражения для сумм.

Пример 4. Доказать, что для любого натурального числа n верно равенство:

$$1+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Проверим справедливость утверждения для $n=1$. Действительно,

$$1=\frac{1(1+1)(2+1)}{6},$$

и, таким образом, база индукции есть. Предположим справедливость требуемого равенства для $n=k$, т. е.

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Покажем, что требуемое равенство справедливо и для $n=k+1$, т.е.

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Действительно:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=(k+1)\left(\frac{k(2k+1)}{6}+(k+1)\right)=$$

$$=(k+1)\left(\frac{2k^2+7k+6}{6}\right)=(k+1)\frac{(k+2)(2k+3)}{6},$$

что и требовалось доказать.

С помощью метода математической индукции можно доказать и знаменитую формулу *бинома Ньютона*:

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+\ldots+C_n^ka^{n-k}b^k+\ldots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n,$$

$C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – так называемые биномиальные коэффициенты. Индукция проводится по числу n с использованием соотношения:

$$C_{n+1}^{k+1}=C_n^k+C_n^{k+1}$$

(попытайтесь провести доказательство самостоятельно). Используя формулу бинома Ньютона и метод математической индукции, решим следующую задачу[21].

Пример 5. Решить уравнение:

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}{n!}=0.$$

Данное уравнение является алгебраическим уравнением n-й степени. Обозначим его левую часть через $f_n(x)$. Тогда уравнение запишется как $f_n(x)=0$. Легко видеть, что уравнение $f_1(x)=0$, т. е. уравнение $1-x=0$ имеет корень $x_1=1$, а уравнение $f_2(x)=0$, т. е. уравнение

$1-\dfrac{x}{1}+\dfrac{x(x-1)}{2}=0$ или $x^2-3x+2=0$ имеет корни $x_1=1,\ x_2=2$. Это уже даёт возможность сделать предположение, что уравнение $f_n(x)=0$ имеет корни $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3,\ldots,x_{n-1}=n-1,\ x_n=n$. Докажем это предположение методом математической индукции. При $n=1$ и $n=2$, как мы убедились, это предположение верно. Предположим, что оно верно для $n=k$, т. е. уравнение $f_k(x)=0$ имеет корни $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3,\ldots,x_k=k$, и покажем, что уравнение $f_{k+1}(x)=0$ имеет корни $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3,\ldots,x_k=k,\quad x_{k+1}=k+1$, т. е. дополнительно к корням уравнения $f_k(x)=0$ ещё корень $x_{k+1}=k+1$. Поскольку

$$f_{k+1}(x)=f_k(x)+(-1)^{k+1}\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)(x-k)}{(k+1)!},$$

то все корни уравнения $f_k(x)=0$ будут и корнями уравнения $f_{k+1}(x)=0$. Рассмотрим

$$f_{k+1}(k+1)=1-\frac{k+1}{1}+\frac{(k+1)k}{2!}-\frac{(k+1)k(k-1)}{3!}+\ldots+$$
$$+(-1)^{k+1}\frac{(k+1)k(k-1)\cdots2\cdot1}{(k+1)!}.$$

Покажем, что это выражение равно нулю. В самом деле, его можно записать так:

---

[21] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. М., 1976. – С. 55.

$$1 - C_{k+1}^1 + C_{k+1}^2 - C_{k+1}^3 + \ldots + (-1)^{k+1} C_{k+1}^{k+1},$$

а это есть не что иное, как разложение по формуле бинома Ньютона $(1+x)^{k+1}$ при $x=-1$, следовательно, оно действительно равно нулю. Отсюда вытекает, что число $x_{k+1} = k+1$ также является корнем уравнения $f_{k+1}(x) = 0$, что в совокупности с ранее найденными корнями $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3, \ldots, x_k = k$ и даёт требуемый результат.

С неверным применением метода математической индукции, подменой понятий связаны многие математические шутки и софизмы. Приведём некоторые примеры.

1. Требуется доказать, что все лошади одной масти. Проведём индукцию по числу лошадей. Одна лошадь – одной масти (это её собственная масть). Предположим, что утверждение справедливо для n лошадей, т. е. любые n лошадей – одной масти. Покажем, что тогда и $n+1$ лошадей тоже одной масти. Рассмотрим табун из $n+1$ лошадей. Заберём из него одну лошадь, останется n лошадей, они, по предположению индукции, одной масти. Вернём отобранную лошадь в табун и заберём из него другую лошадь. Оставшиеся n лошадей снова будут одной масти. И так мы переберём все $n+1$ лошадей. Каждая из них, таким образом, будет одной масти с остальными, следовательно, все $n+1$ лошадей одной масти.

Одной масти и *одной и той же* масти – разные понятия. В задаче на самом деле подразумевается именно одной и той же масти. А применительно к одной лошади это понятие теряет смысл.

2. Требуется доказать, что все натуральные числа равны между собой. То есть, что для любых двух натуральных чисел n и m выполнено равенство $n = m$. Переформулируем это в таком виде: для любого натурального числа $M > 0$ и любых n и m, удовлетворяющих равенству $\max(n,m) = M$, должно выполняться и равенство $n = m$.

Докажем это индукцией по числу M. Если $M = 1$, то n и m, будучи натуральными, оба равны 1 (напомним, что нуль не является натуральным числом). Поэтому в этом случае $n = m$, и база индукции, таким образом, есть. Предположим, что утверждение доказано для некоторого значения $M = N$. Докажем, что оно справедливо для $M = N+1$. Пусть $\max(n,m) = N+1$. Тогда $\max(n-1, m-1) = N$, и, по предположению индукции, $n-1 = m-1$. А тогда $n = m$, что и требовалось доказать.

Заметим здесь, что $n-1$ или $m-1$ может не быть натуральным числом (например, при $n=1$, $m=2$), поэтому вывод неверен.

Лекция 16. Проблема бесконечности в математике
Актуальная и потенциальная бесконечность

Понятие бесконечности настолько пронизывает математику, что некоторые учёные (например, Вейль) определяют её как науку о бесконечном. Различные попытки обоснования математики существенно зависят от подхода к проблеме бесконечности.

Понятие бесконечности первоначально возникло в астрономических исследованиях, в Древнем Египте, Индии, Древней Греции. В древнегреческой философии понятие бесконечности впервые появилось у материалистов милетской школы. В частности, *Анаксимандр* (610–546 гг. до н. э.) учил, что материя бесконечна во времени и пространстве, Вселенная бесконечна, число миров также бесконечно. Другой философ *Анаксимен* (585–525 гг. до н. э.) считал, что вечный круговорот материи и есть бесконечность. Как математическая категория бесконечность впервые появляется, по-видимому, у *Анаксагора* (500–428 гг. до н. э.). В соответствии с его концепцией вещи бесконечно делимы, нет последней ступени делимости материи, для всякого даже очень большого числа обязательно найдётся ещё большее число.

Начиная с Аристотеля, математики проводили различие между так называемыми актуальной и потенциальной бесконечностью. *Актуальная бесконечность* возникает тогда, когда бесконечный процесс рассматривается как завершённый, и можно говорить о результате завершения этого процесса. *Потенциальная бесконечность* – это бесконечность, рассматриваемая как никогда не завершающийся процесс.

Как наука о количественных и пространственных отношениях реального мира, математика абстрагируется от качественных особенностей вещей и процессов. Это касается и использования бесконечности. В рамках математики можно выделить три типа абстракций, на основе которых можно прийти к трём различным формам бесконечности.

1. Фактическая бесконечность. Она возникает тогда, когда мы имеем дело с конечными числами, но настолько большими, что они неизмеримо превосходят все реальные размеры. Например, 10^{100} для математики число конечное. Но, учитывая, что, например, расстояние до самой удалённой галактики равно

10^{27} см, то для реальных размеров это фактически бесконечность. Это же относится и к бесконечной делимости объектов. В реальном мире она невозможна из-за атомарной структуры вещества. А в математике – возможна. Поэтому, например, 10^{-100} для математика число конечное, отличное от нуля. А для физика оно равно нулю, причём не приближённо, а <u>точно</u>. На этом основаны многие различия между физическим и математическим подходом к изучению реальной действительности. Например, определённый интеграл для математика это сумма бесконечно большого числа бесконечно малых величин. А для физика – сумма очень большого числа очень малых величин.

Есть работы, в которых обсуждается возможность применения фактической бесконечности для обоснования математики. Полагают, что в результате становится более осязательной связь с реальным миром, и, вследствие этого, облегчается применение математики к изучению реальных явлений и процессов. Но введение фактической бесконечности породило бы огромные трудности. Мы должны были бы отказаться от идеи неограниченной продолжимости натурального ряда чисел. Все операции над натуральными числами (сложение, умножение) оказались бы невозможными, поскольку их результат мог бы вывести за пределы фактической бесконечности. Абсолютно неясно, что делать с точками континуальных множеств (например, сколько точек на отрезке). Если есть фактическая бесконечность, то на отрезках различной длины должно быть различное число точек, что, очевидно, противоречит равномощности этих множеств (см. Лекцию 9). И что вообще понимать под точкой?

2. <u>Понятие актуальной бесконечности</u> вводится на основе абстракции абсолютной осуществимости, как бесконечности завершённой, заданной всеми своими элементами. Например, множество натуральных чисел, множество точек отрезка прямой линии и т. д. Актуальная бесконечность носит идеализированный характер, который состоит в том, что о бесконечном множестве мы рассуждаем по аналогии с конечными множествами. В процессе образования этого понятия нужно учитывать следующие моменты.

1) Имея набор конструктивных операций для построения математических объектов, мы допускаем, что эти объекты не только потенциально осуществимы, но и фактически построены, и, следовательно, все результаты построений существуют одновременно.

2) Воображаемая совокупность объектов рассматривается как реальная, и к ней применимы методы классической логики.

3) Эта воображаемая совокупность представляется как существующая независимо от набора конструктивных операций.

4) Начинаем представлять бесконечные совокупности одновременно существующих объектов, не связанные с конструктивными операциями даже своим происхождением. При этом в качестве основного способа рассуждений используется аксиоматический метод.

Актуальная бесконечность является сильной абстракцией, и интуитивно она постигается с трудом. Она опирается на гипотезу абсолютной осуществимости. Ещё Аристотель возражал против использования актуальной бесконечности. В своей «Физике» он утверждал: «Остаётся альтернатива, согласно которой бесконечность имеет лишь потенциальное существование. Актуальная же бесконечность не существует». По его мнению, в концепции актуальной бесконечности математика не нуждается вообще. В средневековье этот тезис звучал так: *Infinitum actu non datur*.

Последующие дискуссии лишь затемняли суть дела. Математики говорили о бесконечности как о числе, не давая явного её определения. Даже Эйлер утверждал, что $1/0=\infty$, а также, что $2/0$ вдвое больше, чем $1/0$.

Большинство математиков (Лейбниц, Коши, Гаусс и др.) чётко понимали различие между актуальной и потенциальной бесконечностью и отказывались рассматривать актуальную бесконечность. По утверждению Декарта «бесконечность распознаваема, но не познаваема». Гаусс писал: «В математике бесконечную величину никогда нельзя использовать, как нечто окончательное; бесконечность – не более, чем *facon de parle* (манера выражаться), означающая предел, к которым стремятся одни величины, когда другие бесконечно убывают».

В определённой степени теория бесконечных множеств Кантора выступила против традиционных представлений о бесконечности, разделяемых великими математиками прошлого. Идеи Кантора позволяли сравнивать два актуально бесконечных множества и устанавливать, содержат ли они «одинаковое» число элементов или нет. Он вообще определил бесконечное множество как такое множество, которое можно поставить в соответствие со своим истинным (т. е. отличным от всего множества) подмножеством.

3. <u>Потенциальная бесконечность</u>. В её основе лежит гипотеза потенциальной осуществимости. Она допускает построение не только таких объектов, которые можно осуществить практически (хотя бы в принципе), но и потенциально осуществимых, т. е. в предположении, что мы обладаем соответствующими возможностями.

Понятие потенциальной бесконечности вводится как неограниченный процесс построения математических объектов, не имеющий последнего шага. Элементы такой бесконечности не существуют одновременно, они последовательно возникают в процессе построения. Идея потенциальной бесконечности интуитивно яснее, чем актуальная бесконечность. Вместе с тем потенциальная бесконечность представляет собой значительную идеализацию. Она не может существовать в реальном мире с теми свойствами, которые приписывает ей математика.

Теория пределов, лежащая в основе анализа, была построена именно с использованием идеи потенциальной бесконечности. Мы не можем реально осуществить бесконечный процесс, но мы можем представить себе, что произошло бы, если бы такая возможность была. Отсюда концепция $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Вообще, понятие потенциальной бесконечности является одним из фундаментальных понятий всей математики. Во многих рассуждениях и вычислениях предполагается идея потенциальной осуществимости. В значительной степени на эти идеи опирается и само обоснование математики.

В полном своём объёме математическая бесконечность может быть постигнута лишь посредством учёта взаимосвязи потенциальной и актуальной её форм.

Лекция 17. Проблема истины в математике

Проблема истины в науке – это проблема философская. Строгого определения понятия «истина» не существует. Философский словарь даёт такое определение: *истина* – это такое содержание знания (данных чувственного опыта, интуиции, суждений, теорий), которое тождественно предмету знания. В подавляющем большинстве случаев это тождество и его границы лишь относительны, условны, приблизительны. Наиболее жёстко это тождество может контролироваться в теории познания. Самая эффективная реализация этого требования имеет место в логико-математических дисциплинах. Однако и там абсолютное тождество недостижимо.

Трудности, возникающие при определении понятия «истина», приводили философов к *релятивизму*: кому как кажется, так и есть на самом деле. Т. е. истина у каждого своя, а общей объективной истины не существует.

Параллельно с этим были и концепции объективной истины, в частности, концепция Аристотеля: истина не зависит от мнения отдельных людей, а существует объективно.

Определение Аристотеля называется *семантическим* определением истины (*семантика* – наука об отношении языковых высказываний к внеязыковой действительности), поскольку истинность высказывания здесь определяется соответствием данного высказывания тому, что лежит вне языка. Сущность семантического определения истины логик *Альфред Тарский* (1901–1983) выразил так: «Высказывание *P* истинно тогда и только тогда, когда имеет место *P*». Например, высказывание «идёт снег» истинно тогда и только тогда, когда идёт снег. Это не тавтология: в левой части – предложение, в правой части – реальное положение дел. Сущность определения в том, что истинным предложением является то, содержание которого соответствует объективному положению дел.

Объективность истины является её важнейшей характеристикой. Но одной объективности мало. Важна проблема соотношения в истине *абсолютного* и *относительного* моментов.

Истины, с которыми мы встречаемся в науке и повседневной деятельности, являются относительными. Из них складывается абсолютная истина.

В математике её абстрактный характер накладывает свой отпечаток на решение проблемы истины. С её абстрактными объектами (например, линия без ширины) нельзя проводить реальных экспериментов и тем самым устанавливать соответствие реальному положению вещей. При аксиоматическом построении математических теорий вопрос об истинности теории сводится к вопросу об истинности аксиом и применяемых для доказательства логических способов рассуждений. В рамках чистой математики строгость доказательства имеет первостепенное значение для признания теоремы истинной. Но само понятие строгости доказательства нуждается в философском анализе.

Математические понятия и теории дают объективно истинное знание о свойствах реального мира. Критерием истинности этого знания является практика, понимаемая в достаточно широком смысле.

Для понимания природы математической истины важно представить себе тот метод, с помощью которого она получается. Всякое логическое доказательство непосредственно свидетельствует не об истинности той или иной теоремы, а о том, что эта теорема логически следует из принятых аксиом. Например, та же теорема Пифагора в неевклидовой геометрии оказывается неверной. Поэтому истинность теорем находится в прямой зависимости от истинности аксиом. А этот вопрос решался по-разному на разных этапах развития аксиоматического метода. Первоначально, когда аксиомам приписывали единственную интерпретацию, их истинность считалась самоочевидной. По мнению Аристотеля, даже настолько очевидной, что она не требует никакого доказательства. Принимая эти аксиомы за самоочевидные истины, мы приписываем этот признак и математическим истинам. Но такой взгляд не выдерживает критики. Во-первых, часто доказываются теоремы, более очевидные, чем аксиомы (например, что кратчайшим расстоянием от точки до прямой является длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую). Во-вторых, есть немало аксиом, противоречащих интуиции, например, аксиомы, лежащие в основе неевклидовых геометрий.

Другой аспект проблемы состоит в том, что формальные системы создаются для изучения реального мира, и нужно знать, в какой степени они приспособлены для его изучения. Этот аспект связан с истинностью всей системы как целого. Иногда такой вид истинности называют *квазиистинностью* или *приемлемостью*. Эта проблема («непостижимой применимости математики к реальному миру» по выражению М. Клайна[22]) привлекала к себе внимание учёных. Например, А. Эйнштейн писал: «Почему возможно такое превосходное соответствие математики с реальной действительностью, если она сама является только произведением человеческой мысли, не связанной ни с каким опытом? Может ли человеческий разум без всякого опыта путём одного только размышления постичь свойства реальных вещей?»

На вопрос «Почему математика «работает»?» было предложено несколько различных ответов. Некоторые (например, Д. Дидро) считают, что математики специально подбирают свои аксиомы так, чтобы выводимые из них следствия согласовывались с опытом. Математик сравнивался с игроком, который играет по им же самим придуманным абстрактным правилам.

Имеется и другое объяснение эффективности математики, восходящее к Канту. Он утверждал, что мы не знаем и не можем знать природу. Мы ограничены чувственными восприятиями, но наш разум организует их в соответствии с тем, что диктуют присущие ему врождённые структуры. Например, наши пространственные восприятия мы организуем в соответствии с законами евклидовой геометрии, так как этого требует наш разум.

Анри Пуанкаре (1854–1912) предложил ещё одно решение, получившее название *конвенционализма* (см. Лекцию 21).

Однако весь ход науки показывает, что многие важнейшие понятия науки нельзя описать в терминах чувственного опыта. Например, микрочастица, обладающая одновременно волновыми и корпускулярными свойствами, принцип неопределённости в квантовой механике и другие.

До сих пор мы говорили об истинности в плане соответствия наших утверждений действительности. В повседневной практике и в науке, как правило, руководствуются именно таким понятием истины. Но в силу его неопределённости оно не может быть использовано для анализа формальных систем.

[22] Клайн М. Математика. Утрата определённости. М., 1984.

Как и другие понятия естественного языка, понятие истины нередко употребляется в разных смыслах. Вследствие этой неоднозначности и возникают парадоксы типа парадокса лжеца (см. Лекцию 9), приписываемого *Эвбулиду*. По легенде древнегреческий философ *Диодор Кронос*, будучи не в силах разрешить этот парадокс, от огорчения скончался. Другой философ покончил с собой. А. Тарский вообще считает парадокс лжеца неразрешимым в рамках естественных языков. Они настолько богаты и неопределённы, что в них можно сформулировать предложения самого экстравагантного типа. И Тарский предлагает перейти к другим, специально построенным языкам. Такими языками являются, например, формализованные языки математики.

Кроме того, парадокс лжеца возникает от того, что мы используем тот же самый естественный язык в одном случае для сообщения информации о некоторых объектах действительности, а в другом – чтобы говорить о самих выражениях языка. Эта неопределённость и создаёт противоречивую ситуацию. Понятия истины и лжи употребляются и для характеристики самих высказываний, и для соответствия высказываний с действительностью. Таким образом, естественный язык используется в разных целях: с одной стороны для формулировки выражений языка, а с другой стороны для того, чтобы говорить о самих этих выражениях. Подобные языки называются *семантически замкнутыми*. Поэтому для точного определения понятия истины необходимо использование языков другого типа.

***Лекция 18*. Проблема существования в математике**

Другая важная философская проблема математики – это проблема существования. В математическом языке под термином «существование» понимается наличие объектов, обладающих определёнными математическими свойствами (например, существование треугольника, подобного данному, существование корня заданного уравнения, существование решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего наперёд заданным условиям и т. д.).

Отметим в этой связи одну важную вещь. Существование реального процесса или явления и существование решения математической задачи, описывающей этот процесс – далеко не одно и то же. Математическая модель физического явления не может быть полностью адекватной самому явлению, поскольку при её составлении, как правило, отбрасываются многие, на первый взгляд, второстепенные факторы, которые, тем не менее, в каком-то смысле могут влиять на реальный результат. Поэтому из существования решения физической задачи, вообще говоря, не следует существования решения соответствующей математической. Существование этого решения можно установить лишь чисто математическими методами. Может быть и обратная ситуация, когда решение математической задачи существует, но физически оно не реализуется, например, в случае так называемых неустойчивых решений дифференциальных уравнений.

Вместе с тем среди математиков не было единства в интерпретации термина «существование». Одна из концепций понятия существования принадлежит Г. Кантору. В соответствии с ней существующий объект следует понимать как такой объект, который «занимает на основе определений вполне определённое место в нашем рассудке, вполне ясно отличается от всех остальных частей нашего мышления, находится с ним в определённых отношениях и, таким образом, видоизменяет субстанцию нашего духа». Такого рода реальность Кантор называет *интрасубъективной* или *имманентной*, которую он отличает от реальности *транссубъективной* или *транзиентной*. Последняя приписывается числам "постольку, поскольку их приходится рассматривать как выражения или отображения процессов во внешнем мире, противостоящем интеллекту". Внешний мир, что немаловажно, включает как "телесную", так и "духовную природу". "Для меня, – пишет Кантор, – не подлежит никакому сомнению, что оба эти вида реальности всегда совпадают в том смысле, что какое-нибудь понятие, принимаемое за существующее в первом отношении, обладает в известных, даже бесконечно многих отношениях транзиентной реальностью"[23].

Другая концепция существования принадлежит голландскому математику *Лёйтзену Брауэру* (1881–1966), одному из основоположников *интуиционизма* (см. Лекцию 20). В соответствии с ней понимание существования предмета в математике основано на возможности непосредственно указать на этот предмет с помощью определенной завершенной процедуры. Иными словами, предмет существует тогда, когда может быть сконструирован: *esse = construi*.

Ещё одно понимание существования принадлежит А. Пуанкаре, и оно состоит в свободе от противоречий. «В математике слово «существующее» имеет только один смысл и обозначает «свободное от противоречий». . . определяя какой-либо объект, мы утверждаем, что определение не заключает противоречия»[24].

---

[23] Кантор Г. Труды по теории множеств. М., 1985. – С. 79.

[24] Пуанкаре А. О науке. М., 1983. – С. 373.

В настоящее время термин «существование» в математике понимается в основном в двух смыслах:

1) *конструктивный*: объект существует, если указан способ его построения;

2) *логический*: существование объекта (при наличии его определения) доказано логическим путём, но способ его построения не указан.

Рассмотрим соответствующие примеры.

Теорема (о существовании перпендикуляра к прямой). *Из любой точки, не лежащей на данной прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляр и только один.*

<u>Доказательство</u> проведём конструктивным путём, т. е. фактическим построением перпендикуляра. Пусть a – данная прямая и A – не лежащая на ней точка (рис. 25). Проведём через какую-нибудь точку прямой a перпендикулярную прямую (это возможно на основании теоремы, доказанной на стр. 63). А теперь проведём через точку A параллельную этой прямой – прямую b.

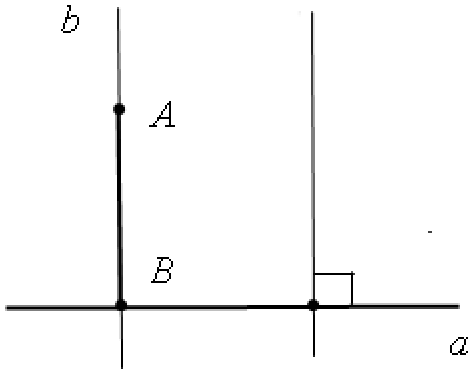


Рис. 25

Прямая b будет перпендикулярна прямой a, так как прямая a, будучи перпендикулярна одной из параллельных прямых, будет перпендикулярна и другой. Пусть B – точка пересечения прямых a и b. Отрезок AB прямой b и есть перпендикуляр, проведенный из точки A к прямой a. Тем самым существование доказано

Докажем ещё единственность перпендикуляра AB. Здесь используем метод доказательства от противного. Допустим, что существует ещё один перпендикуляр AC. Тогда у треугольника ABC будут два прямых угла, что невозможно. Теорема полностью доказана.

Нередко в математике конструктивное построение объекта осуществляется с помощью построения некоторого бесконечного процесса, например, некоторой последовательности объектов, пределом которой и является искомый объект. Т. е. используется идея потенциальной бесконечности. Если удаётся доказать сходимость этого процесса к искомому объекту, то тем самым доказано и существование этого объекта. Часто в таких ситуациях используется так называемый *принцип сжимающих отображений*, который в упрощённой его интерпретации состоит в следующем. Пусть задан некоторый отрезок $[a,b]$ числовой прямой. И пусть задано некоторое отображение Φ этого отрезка в себя. Т. е., если $x \in [a,b]$, то $\Phi(x) \in [a,b]$. Отображение Φ называется *сжимающим на отрезке* $[a,b]$, если для любых точек $x, y \in [a,b]$ выполнено неравенство:

$$\left|\Phi(x)-\Phi(y)\right| \le q\left|x-y\right|,$$

где $0<q<1$. Число q называется *коэффициентом сжатия*.

Пример. Покажем, что отображение $\Phi(x)=x^2$ является сжимающим на отрезке $[-r,r]$, где $0<r<0.5$. В самом деле, пусть x, y – любые две точки из отрезка $[-r,r]$. Рассмотрим:

$$\left|\Phi(x)-\Phi(y)\right| = \left|x^2-y^2\right| = \left|x+y\right|\cdot\left|x-y\right| \le \left(\left|x\right|+\left|y\right|\right)\cdot\left|x-y\right| \le q\left|x-y\right|,$$

где $q=2r<1$.

Точка $x^* \in [a,b]$ называется *неподвижной точкой* для отображения $\Phi(x)$, если $\Phi(x^*)=x^*$. Например, для отображения $\Phi(x)=x^2$ неподвижной является точка $x^*=0$.

Теорема (принцип сжимающих отображений). *Пусть отображение* Φ *отображает отрезок* $[a,b]$ *в себя и является на этом отрезке сжимающим с коэффициентом сжатия* q. *Тогда на отрезке* $[a,b]$ *отображение* Φ *имеет единственную неподвижную точку* x^*. *Пусть* x_0 *– произвольная точка отрезка* $[a,b]$. *Образуем последовательность* $x_n=\Phi(x_{n-1})$, $n=1,2,\ldots$ *Тогда все* *элементы этой последовательности принадлежат отрезку* $[a,b]$, *и* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$. *Кроме того, справедлива оценка скорости сходимости:*

$$\left|x_n - x^*\right| \le \frac{q^n}{1-q}\left|\Phi(x_0) - x_0\right|.$$

Не вдаваясь в доказательство этой теоремы[25], проиллюстрируем её использование на примере следующей задачи.

Пример. Доказать, что существует такое положительное число x, квадрат которого равен 2.

Иными словами показать, что существует корень уравнения $x^2 - 2 = 0$, удовлетворяющий условию $x > 0$.

С геометрической точки зрения это число – та же длина гипотенузы прямоугольного треугольника с единичными катетами (см. Лекцию 8).

Для доказательства применим принцип сжимающих отображений. Зададим некоторое начальное значение $x_0 > 1$. И построим последовательность $\{x_n\}$ по следующей рекуррентной формуле:

$$x_n = \Phi(x_{n-1}),\ n = 1, 2, \dots ,\qquad (*)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).\qquad (**)$$

Эта последовательность получается на основе соотношений:

$$x \cdot x = 2;\ \ x = \frac{2}{x};\ \ x + x = x + \frac{2}{x};\ \ 2x = x + \frac{2}{x};\ \ x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

Покажем, что отображение Φ является сжимающим на отрезке $[1;2]$. Пусть x и y – произвольные числа из отрезка $[1;2]$. Тогда нетрудно проверить, что

$$\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{xy}\right| \le \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим:

[25] Доказательство имеется, например, в книге: Треногин В. А. Функциональный анализ. М., 1980. – С. 391.

$$\left|\Phi(x)-\Phi(y)\right|=\left|\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)-\frac{1}{2}\left(y+\frac{2}{y}\right)\right|=\left|\frac{1}{2}(x-y)-\frac{x-y}{xy}\right|=\left|\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{xy}\right)(x-y)\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{xy}\right|\cdot\left|x-y\right|\le\frac{1}{2}\left|x-y\right|.$$

Таким образом, отображение Φ действительно является сжимающим с коэффициентом $q=1/2<1$. Следовательно, на отрезке $[1;2]$ имеется неподвижная точка x^* отображения Φ, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$. Покажем, что именно эта точка и есть искомый корень нашего уравнения. В самом деле, поскольку для неподвижной точки выполнено равенство $\Phi\left(x^*\right)=x^*$, то из выражения (**) для $\Phi(x)$ получим:

$$x^*=\frac{1}{2}\left(x^*+\frac{2}{x^*}\right).$$

А отсюда и следует, что $\left(x^*\right)^2=2$, что и требовалось доказать.

Итак, мы доказали существование искомого корня конструктивным путём, указав фактическую процедуру его построения (как предела построенной нами последовательности). Более того, эта же процедура позволяет найти искомый корень приближённо со сколь угодно высокой степенью точности. Аналогичным способом доказываются многие теоремы существования решений дифференциальных уравнений.

Ту же задачу можно решить и логическим путём, доказав лишь существование искомого корня. Для этого нам придётся привлечь теорию сечений во множестве рациональных чисел, предложенную немецким математиком *Рихардом Дедекиндом* (1831–1916)[26].

Рассмотрим разбиение множества всех рациональных чисел на два непустые множества A и A'. Будем называть такое разбиение *сечением*, если выполнены условия:

1) каждое рациональное число попадает в одно и только в одно множество из множеств A или A';

2) любое число a множества A меньше любого числа a' множества A'.

Множество A называется *нижним классом* сечения, множество A' – *верхним классом*.

[26] Подробнее см. в книге: Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М., 1969. – С. 17–19.

Рассмотрим теперь такое сечение. Отнесём к классу A все положительные рациональные числа a, для которых $a^2 < 2$, число 0 и все отрицательные рациональные числа. К классу A' отнесём все положительные рациональные числа a', для которых $\left(a'\right)^2 > 2$.

Покажем, что класс A не имеет наибольшего числа. Действительно, пусть такое число существует, обозначим его a_0. Это число рациональное, и для него выполнено $a_0^2 < 2$. Покажем, что можно подобрать такое натуральное число n, что будет выполнено:

$$\left(a_0 + \frac{1}{n}\right)^2 < 2. \qquad (*)$$

Это и будет означать, что a_0 не является наибольшим в классе A – число $a_0 + 1/n$ также будет принадлежать классу A, но $a_0 + 1/n > a_0$.

Действительно, записав неравенство (*) как

$$a_0^2 + 2a_0\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} < 2,$$

перепишем его в виде:

$$\frac{2a_0 n + 1}{n^2} < 2 - a_0^2.$$

Заменив это неравенство более сильным:

$$\frac{2a_0 n + n}{n^2} < 2 - a_0^2, \qquad (**)$$

и, сократив на n,

$$\frac{2a_0 + 1}{n} < 2 - a_0^2,$$

получим:

$$n > \frac{2a_0 + 1}{2 - a_0^2}.$$

Т.е. взяв, например,

$$n = \left[\frac{2a_0 + 1}{2 - a_0^2}\right] + 1,$$

мы получим, что неравенство (**) выполнено, и, следовательно, и подавно выполнено неравенство (*). Таким образом, класс A действительно не имеет наибольшего элемента.

Аналогично доказывается, что класс A' не имеет наименьшего элемента. Следовательно, рационального числа, которое было бы пограничным между этими классами, не существует. Такое сечение определяет иррациональное число α, и для этого числа выполнено: $\alpha^2 = 2$. Таким образом, существование нужного нам числа доказано.

Другим примером, в котором доказывается лишь существование искомого объекта без указания алгоритма его построения, является приведенная в п.11 теорема Ролля. Там лишь утверждается наличие точки c, в которой производная функции обращается в нуль, но явно найти эту точку в общем случае не удаётся. Такая же ситуация и в более общей теореме *Лагранжа*[27].

Лекция 19. Логицизм. Системы Г. Фреге и Б. Рассела

Парадоксы, возникшие в математике, привели к необходимости пересмотра её оснований. Мнения математиков по поводу путей преодоления этих противоречий разделились. Возникло несколько направлений, среди которых выделяются два: *логицизм* и *интуиционизм*. Здесь мы рассмотрим первое из них.

Основной тезис логицистов состоит в том, что математика может быть полностью выведена из логики. Истоки логицизма восходят к XVII веку. Уже тогда предпринимались попытки обоснования математики посредством более общих принципов и методов, носящих логический характер. Ещё Декарт высказывал идею о создании всеобщей универсальной математики, а дедуктивный метод логики считал универсальным методом познания. Арифметика и геометрия, с его точки зрения, представляют собой лишь частные случаи применения этого метода к числам и фигурам.

Особенно много внимания этим вопросам уделял Лейбниц. Он считал, что вычисление можно применять не только в математике, но и в любых рассуждениях вообще. Он мечтал о создании нового метода, который бы позволял сводить любое рассуждение к вычислению. И с его помощью надеялся решать не только научные, но и богословские, и политические проблемы. По мысли Лейбница математика представляет собой лишь частный случай метода всеобщей характеристики, который является логическим учением.

Лейбниц различал *истины основания* (или необходимые истины) и *истины факта* (случайные истины). Истина необходима, если противоположное утверждение приводит к противоречию. Утверждения о том, что бог существует, что все прямые углы равны между собой – необходимые истины. Если же исти-

[27] Там же. – С. 226 – 228.

на не является необходимой, то она называется случайной. Соответствующие утверждения могут быть как истинными, так и ложными. Например, утверждение о том, что в природе встречаются углы, в точности равные 90^0.

Поскольку математические истины необходимы, они должны быть выводимы из логики, принципы которой также необходимы.

Первым этапом в развитии новой логики было создание *алгебры логики*, где метод исчислений применялся для анализа классической (аристотелевской) логики. Эти проблемы разрабатывались в трудах *Дж. Буля, Ч. Пирса* и других. Второй этап был связан с развитием *логики отношений*.

Для осуществления программы логицизма – сведения математики к логике, необходимо было свести саму математику к небольшому числу исходных понятий и утверждений. Такая работа была проделана Г. Фреге, Р. Дедекиндом, Дж. Пеано, Г. Кантором и другими. Исследование *Готлоба Фреге* (1848–1925) представляет собой первое конкретное осуществление программы логицизма. Суть её сводится к тому, чтобы исходные понятия математики определить в терминах логики, а её фундаментальные законы доказать как теоремы логики. Основные результаты своих исследований Фреге изложил в двухтомной работе «Основные законы арифметики». Символика Фреге в этой работе чрезвычайно сложна и трудная для восприятия. Видимо, по этой причине его исследования остались малоизвестными и оказали слабое влияние на современников.

Фреге впервые показал, что можно чисто логическим путём выразить то обстоятельство, что два класса имеют одинаковое число элементов. Для этого он использует понятие *равночисленности* классов, родственное понятию равномощности множеств, введённому Кантором. Из основных принципов логики Фреге пытался вывести всю арифметику, а из неё – алгебру, анализ, аналитическую геометрию.

Схожим был подход Фреге и к языку. Структуры языка он рассматривал по аналогии со структурами математики. Каждое языковое выражение он считал построенным по схеме: функтор и его аргумент. Например, в математике: x^2 – функция. Если вместо переменной x подставить какое-либо число, то в результате тоже получится число. Например, при $x=3$ получим $x^2=9$. Аналогично и в языке. Если в выражении «(x) является красным» вместо x подставить конкретное имя, то получим определенное предложение, которое может быть истинным или ложным. Например, при x=помидор получаем истинное высказывание, а при x=огурец – ложное.

Вместе с тем программа Фреге в итоге потерпела неудачу. Когда работа над «Основными законами арифметики» была закончена, он получил письмо от

Б. Рассела, в котором тот указывал, что Фреге использует «множество всех множеств», что делает его систему противоречивой. Это так потрясло Фреге, что от дальнейших попыток выведения математики из логики он отказался.

Исследования Фреге продолжил выдающийся английский математик и логик *Бертран Рассел* (1872–1970). Родился он 18 мая 1872 года в старинной аристократической семье. Он рано лишился родителей, его и старшего брата воспитывала бабушка, нанявшая для внуков швейцарских и немецких гувернёров. Братья учились в атмосфере, сочетавшей аристократическое уединение и свободомыслие. Опытные учителя, хорошая библиотека способствовали прекрасному образованию и обеспечивали досуг, необходимый для чтения и размышлений.

В конце 1889 года 18-летний Рассел был принят в Тринити-колледж при Кембриджском университете. Его главные интересы в это время сосредоточились на основательном изучении математики и философии. Результатом стала докторская диссертация «Об основах геометрии», которую он защитил в 1897 году. Рассел интересовался также политическими проблемами, размышлял о проблеме переустройства мира на принципах реформизма и демократического движения.

Перед Первой мировой войной Рассел совместно с другим математиком и философом *Альфредом Уайтхедом* (1861–1947) написал ставшей классической монографию «Принципы математики» .

Первая мировая война стала для учёного огромным нравственным потрясением. Он занял активную пацифистскую позицию, примкнув к Союзу демократического контроля. Члены этой организации ратовали за учреждение международного совета для гарантии соглашений по спорным вопросам, призывали к сокращению вооружений и отказу от призыва на военную службу. Ужасы войны заставили Рассела усомниться в человеческой добродетели и навели на мысль о необходимости изменения психологии человека с помощью правильного воспитания и образования.

Огромную роль в судьбе Рассела играли женщины. Официально он был женат четыре раза, но романов у него было намного больше. В любви он искал вдохновение, но быстро охладевал к предмету страсти. Позже публика задавалась каверзным вопросом: как может рассуждать о морали человек, женатый в четвёртый раз?

Последние годы жизни Рассел провёл в Северном Уэльсе. Почти до самой смерти в 98-летнем возрасте учёный оставался энергичным и деятельным.

Нас будет интересовать вклад Рассела в основания математики, как яркого представителя логистического направления. Он продолжил исследования

Фреге, но уже на существенно реформированной основе. Для устранения парадоксов Рассел ввёл так называемую *иерархию типов*. Тип он определял как совокупность аргументов, для которых функция имеет смысл (сродни области определения функции в математике). В основе теории типов лежит простая идея. Индивидуум или какой-то определённый объект имеют тип 0. Любое утверждение о свойстве этого объекта имеет тип 1. Всякое утверждение о свойстве свойства этого объекта имеет тип 2. Т. о. каждое утверждение о некотором объекте принадлежит к более высокому типу, чем сам этот объект. Кроме того, нельзя говорить о множестве, принадлежащем самому себе.

Рассмотрев на основе теории типов все известные парадоксы, Рассел и Уайтхед показали, что теория типов позволяет их избежать. Например, парадокс высказываний (см. Лекцию 9). При обычной интерпретации высказывание «из всех правил имеются исключения» применимо и к самому высказыванию, вследствие чего и возникает противоречие. Но в теории типов общее правило принадлежит к более высокому типу, и всё, что в нём утверждается о конкретных правилах, к нему самому неприменимо. Следовательно, из общего правила исключений может не быть.

Аналогичным образом разрешается парадокс Греллинга-Нельсона. Он является не чем иным, как определением всех гетерологических слов и поэтому принадлежит к более высокому типу, чем любое гетерологическое слово. Следовательно, вопрос о том, гетерологично ли само прилагательное «гетерологический», неправомерен.

В рамках теории типов находит своё решение и парадокс лжеца. Рассел излагает это решение следующим образом. Высказывание «Я лгу» означает «Существует утверждение, которое я высказываю, и оно ложно», или «Я высказываю утверждение p, и p ложно». Если p принадлежит к n-му типу, то утверждение относительно p принадлежит к более высокому типу. Следовательно, если утверждение относительно p истинно, то само p ложно, а если утверждение относительно p ложно, то само p истинно. Таким образом противоречия не возникает.

Аналогичным образом теория типов решает и парадокс Ришара – Берри. Опять-таки высказывание более высокого типа содержит некоторое утверждение о высказывании более низкого типа.

Вместе с тем теория типов порождает и определённые трудности. Если попытаться положить её в основу строгого обоснования математики, то все построения становятся чрезвычайно сложными. Например, в «Основаниях математики» два объекта a и b считаются *равными*, если любое высказывание, применимое к a, применимо также и к b, и наоборот. Но различные высказывания принадлежат, вообще говоря, к различным типам. Следовательно, понятие равенства становится необычайно сложным. Аналогичные трудности возникают и в связи с понятием числа: так как иррациональные числа определяются через рациональные, а рациональные – через натуральные числа, то иррациональные числа принадлежат к более высокому типу, чем целые числа. Таким образом, система вещественных чисел оказывается состоящей из чисел различных типов. Следовательно, вместо того, чтобы сформулировать одну теорему для всех вещественных чисел, мы должны формулировать теоремы для каждого типа в отдельности, поскольку теорема, применимая к одному типу, автоматически на другой тип не переносится.

Чтобы избежать подобных осложнений, Расселу и Уайтхеду пришлось вводить ряд аксиом, логический характер которых оспаривается многими математиками. В частности, это относится к *аксиоме бесконечности*, гласящей: для любого натурального числа n найдётся другое натуральное число, большее, чем n. Эта аксиома апеллирует к существованию бесконечного числа объектов мира, которые отличны от объектов логики. Таким образом, это не чисто логическая гипотеза.

Серьёзные возражения вызвала также *аксиома сводимости* (или *аксиома редукции*), которая гласит: любое высказывание более высокого типа эквивалентно одному из высказываний первого типа. Т. е. другими словами, для всякого непредикативного определения внутри данного логического типа существует эквивалентное ему предикативное определение. В качестве оправдания введения этой аксиомы Рассел и Уайтхед приводят чисто прагматические соображения: эта аксиома позволяет вывести предложения, которые без неё нельзя было бы доказать. Но такие аргументы математики считают малоубедительными. В какой-то мере это признавал и сам Рассел.

Рассел и Уайтхед использовали также *аксиому выбора* (см. Лекцию10), которая породила больше дискуссий и споров, чем любая другая аксиома.

Использование этих трёх аксиом (бесконечности, сводимости и выбора) поставила под сомнение основной тезис логицизма: о возможности вывести всю математику из логики. Кроме того, логицизм подвергался серьёзной критике и во многих других отношениях.

Чтобы ответить на вопрос, сводится ли математика к логике, необходимо уточнить сами эти понятия. Можно так определить предмет логики, что математика окажется её частью. Такую тенденцию содержит логицизм. Но есть и противоположная тенденция: рассмотрение логических систем как части математики. Это характерно для интуиционистов, по мнению которых математика совпадает с областью точного знания. Ясно, что вопрос о взаимоотношении математики и логики нельзя решить без серьёзного анализа истории развития этих наук, ибо только такой анализ может показать, как исторически расширялся предмет их исследования и дать возможность выявить центральную идею и цель каждой из них.

Когда в математике говорят о логике, то в это вкладывают различные смыслы:

1) логика – наука, исследующая законы дедуктивного рассуждения вообще; такой подход ближе стоит к философии, чем к математике, и в этом смысле можно говорить о логике как части философии;

2) для изучения теории дедуктивного вывода оказывается плодотворным применение формальных методов математики; и здесь следует говорить скорее о применении математики к логике, чем о логике в прямом смысле слова;

3) можно говорить о различных логических теориях и системах (аристотелевская, математическая, многозначная и т. д.).

Когда логицисты говорят о сведении математики к логике, они имеют ввиду логику, представимую в виде различных формальных систем или исчислений. Но в таких системах наряду с чисто логическими терминами встречаются и математические термины. А логицисты не делают различия между ними. В то время как математическими терминам и аксиомам можно дать различные интерпретации, логические термины во всех интерпретациях имеют одно и тоже значение. Когда с помощью логики мы хотим формализовать какую-либо теорию, к логическим терминам, аксиомам и правилам вывода всегда добавляются специфические термины и аксиомы формализуемой теории. Поэтому математика не выводима из формальной логики. Для построения математики необходимы аксиомы, обладающие *внелогической* структурой.

Лекция 20. **Интуиционизм и конструктивизм**

Интуиционисты пытались обосновать истинность математики, ссылаясь на человеческий разум. Выводы из логических рассуждений они считали менее надёжными, чем интуитивные соображения.

В широком смысле слова интуиционизм восходит к *Декарту* и *Паскалю*. В «Правилах для руководства ума» Декарта говорится: «имеются только два действия нашего интеллекта, с помощью которых мы можем прийти к познанию вещей, не боясь ошибок: интуиция и дедукция. Под интуицией я понимаю понятие ясного и внимательного ума, порождаемого естественным светом разума. И оно более достоверное, чем дедукция».

Многие положения интуиционизма были предвосхищены *Иммануилом Кантом* (1724–1804). В истории мировой философской мысли Канта принято считать родоначальником немецкой классической философии. Он считал, что свои ощущения мы получаем из предполагаемого внешнего мира, но эти восприятия не дают существенного знания. Восприятия организуются разумом, и эти организации являются интуитивным представлением о пространстве и времени. Они не существуют сами по себе, а являются творениями нашего разума. Знание может начинаться из опыта, но настоящим его источником является разум. Математика даёт блестящий пример того, как далеко мы можем продвинуться в априорном знании. Математические теоремы Кант относит к так называемым *синтетическим суждениям*, т. е. доставляющим нам новое знание, в отличие от суждений аналитических, как, например, «все тела протяжённые», так как понятие тела уже включает свойство протяжённости. Примером синтетического суждения может служить следующее: «отрезок прямой есть кратчайшее расстояние между двумя точками».

Все опытные эмпирические суждения – синтетичны. Но возможны и априорные синтетические суждения. В частности, Кант приписывал априорный синтетический характер евклидовой геометрии.

Непосредственным предшественником современного интуиционизма был немецкий математик *Леопольд Кронекер* (1823–1891). Широко известно его высказывание: «Господь создал целые числа, всё остальное – дело рук человеческих». Сложную логическую концепцию числа Кантора и Дедекинда, базирующуюся на теоретико-множественной основе, Кронекер считал менее надёжной, чем непосредственное принятие целых чисел. По его мнению целые числа интуитивно понятны и не нуждаются в более строгом обосновании. И все остальные математические понятия следует строить так, чтобы их смысл был интуитивно понятен.

Точку зрения Кронекера в значительной степени разделял и А. Пуанкаре – он считал, что не следует давать определения целым числам или выводить их свойства на аксиоматической основе. Наша интуиция предшествует такому выводу. Пуанкаре резко отрицательно относился к громоздким обозначениям логицистов. В своей книге «Наука и метод» он приводит определение единицы, используемое Бурали-Форти[28]:

[28] Пуанкаре А. О науке. М., 1983. – С. 377.

$$1 = \iota T' \left\{ \mathrm{Ko} \cap \left(u, h \right) \varepsilon \left(u \varepsilon \, \mathrm{Un} \right) \right\}.$$

И ехидно замечает: «Это определение в высшей степени подходит для того, чтобы дать представление о числе 1 тем, кто о нём никогда не слышал. . . я опасаюсь, что это определение заключает *petitio principii*[29], так как я вижу цифру 1 в первой части и изображённое буквами слово «один» (Un) во второй части равенства».

Идеи Кронекера, Пуанкаре, Бореля, Лебега и других математиков вошли в окончательную версию интуиционизма, разработанную *Лёйтзеном Брауэром* (1881–1966). Интуиционистская позиция Брауэра проистекает из его общефилософских взглядов. По его мнению, математика – это человеческая деятельность, которая начинается и проистекает в разуме человека. Вне человеческого разума математика не существует. Следовательно, математика не зависит от реального мира. Математическое мышление, по Брауэру, представляет собой процесс мысленного построения, создающего свой собственный мир, не зависящий от опыта и ограниченный лишь тем, что в его основе лежит математическая интуиция. Кроме того, математика по своей природе синтетична. Она занимается составлением истин, а не выводит их из логики. Интуиция, а не опыт или логика определяет, согласно Брауэру, правильность и преемственность идей.

Брауэр подверг также критическому анализу отношение математики к языку. Математика – полностью автономный, находящий основание в самом себе вид человеческой деятельности. Она не зависит от языка. Слова или словесные связки используются в математике лишь для передачи истин. Математические идеи уходят своими корнями в человеческий разум глубже, чем язык. Мир интуитивных математических представлений противостоит миру восприятий, а именно к последнему принадлежит язык, служащий для повседневного общения. Сами математические идеи не зависят от словесного одеяния, в которые их облекает язык. Математическая мысль является точной и однозначной, а язык, как средство её выражения, содержит неточности и неясности. Поэтому ошибочно судить о математике по языку науки, а не мысли. В связи с этим создание различных языков науки, как и проблема формализации математического знания, имеет для интуиционистов второстепенное значение.

Ещё более решительную позицию, резко контрастирующую с логицизмом, интуиционизм занимает в отношении логики. Логика принадлежит языку. И не является надёжным инструментом для открытия истин. Логические прин-

[29] логическую ошибку

ципы – это закономерности, наблюдаемые апостериорно в языке. Самые значительные успехи в математике достигнуты не за счёт усовершенствования логической формы, а в результате изменения основ теории. Логика строится на математике, а не математика на логике. И математика не нуждается в поддержке со стороны логики. Тем не менее, интуиционисты не отказываются целиком от классической логики, но иначе истолковывают и ограничивают область её применения. Любая логическая теорема с их точки зрения есть математическая теорема наивысшей общности. И таким образом, не математика является частью логики, как у логицистов, а логика частью математики.

Одна из основных идей интуиционизма состоит в том, что понятие существования в математике какого-либо объекта они связывают с возможностью построения этого объекта. Вместе с тем вопрос о возможности построения этого объекта возникает в связи с определением этого объекта. Может случиться, что объекта, характеризуемого определением, не существует. Если существование можно установить с помощью конструкции из более простых объектов, то мы имеем дело с *конструктивным* определением. Если существование вытекает из логической необходимости, то мы имеем *экзистенциальное* определение. Интуиционисты такие определения отвергают.

Рассмотрим пример. *Числами-близнецами* называют простые числа вида $k-2$ и k. Например, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19 и т. д. Назовём число K – *наибольшим* простым числом, таким, что $K-2$ тоже простое, если таким числом является число $K>1$. И полагаем $K=1$, если числа, большего единицы, удовлетворяющего требуемому условию, не существует.

Для логициста такое определение вполне удовлетворительно, независимо от того, известно или нет, что последняя пара чисел-близнецов существует. То, что реально вычислить K мы не в состоянии, для логициста несущественно. Интуиционист же будет считать приведенное определение числа K лишённым смысла до тех пор, пока не будет указан алгоритм его вычисления, т. е. пока не будет решена проблема конечности или бесконечности множества пар чисел-близнецов.

В соответствии с этим и в математических теоремах о существовании для интуиционистов главную ценность представляет не столько сама теорема, сколько построение, с помощью которого она доказывается. И тогда сама математика рассматривается не как теория, а как особый род деятельности, состоящей в умственном построении определённых объектов из первоначальных.

Иная, нежели у логицистов, и интуиционистская проблема обоснования математики. В то время как логицисты видят источники парадоксов не столько в математике, сколько в логике, интуиционисты корень зла видят в неправильном истолковании математической бесконечности. Бесконечное, по их мнению, рассматривается по аналогии с конечным, что особенно ярко обнаруживается в канторовой теории множеств. Парадоксы возникают именно там, поскольку бесконечностью оперируют как завершённым процессом (актуальной бесконечностью). Если от такого подхода отказаться, то парадоксы исчезнут. Интуиционисты рассматривают бесконечность как не завершающийся процесс. Поэтому вместо термина «множество» Брауэр использует термин «поток», а Вейль – «последовательность». Последовательности, определённые с помощью какого-либо закона, – лишь часть возможных. Иные можно сконструировать как возникающие путём актов свободного выбора. Например, последовательность: *О, Д, Т, Ч, П, Ш,. . .* Как её продолжить? Заметив, что это первые буквы числительных (один, два, три, четыре, пять, шесть), можно продолжить так: . . .*С, В, Д,. . .* Но никто не сказал, что это единственный способ. Мы можем продолжить как угодно. Например, снова повторив ту же самую группу букв: *О, Д, Т, Ч, П, Ш, О, Д, Т, Ч, П, Ш, О, Д, Т, Ч, П, Ш, . .*

В соответствии со своими взглядами интуиционисты решают и основной философский вопрос математики. Математические объекты обладают не только чисто формальным, но и содержательным значением. Они непосредственно постигаются мыслящим духом, следовательно, математическое познание не зависит от опыта.

Интерес представляет и их учение о собственно *интуиции*. Она рассматривается как единственный источник математики, доставляющий нам с непосредственной ясностью её понятия и выводы. Очень тесна связь интуиции с индукцией – индуктивный закон устанавливается интуитивно. Рассматривая интуицию как сверхчувственную и сверхлогическую способность нашего сознания, интуиционисты не могут найти её рационального объяснения, поэтому нередко связывают её с верой и богом: «Теоретическая интуиция покоится на вере – вере в реальность внешнего мира или в реальность божества» (Вейль).

В качестве критерия истины в математике интуиционисты выдвигают интуитивную ясность утверждения. Эта точка зрения ведёт к субъективизму – разным людям ясность утверждения может казаться различной, а также одному и тому же человеку в разное время.

Наряду с ошибочностью многих взглядов у интуиционистов было и немало ценных идей. В частности, они способствовали возникновению конструктивного направления в математике и концепции алгоритма. *Конструктивная математика* существенно отличается от классической тем, что в ней ограничиваются лишь исследованием конструктивных объектов (т. е. таких, для которых можно указать алгоритм их построения). Понятие конструктивного объекта считается исходным и потому не определяется, а только поясняется. Различают *элементарные* конструктивные объекты, а также объекты, которые могут быть построены из них по некоторым правилам. В качестве простейшего примера таких объектов могут служить слова в некотором алфавите. Элементарными конструктивными объектами здесь являются буквы, а способ построения сводится к написанию отдельных букв рядом друг с другом. При этом необязательно, чтобы буквы и слова понимались в их обычном смысле. В качестве слова мы можем рассматривать, например, натуральное число. Тогда единственной буквой алфавита может служить, например, штрих или палочка. Такие абстрактные алфавиты широко используются, например, в теории алгоритмов. Оперирование конструктивными объектами предполагает умение различать и отождествлять их. Таким образом, абстракция отождествления (см. Лекцию 2) является совершенно необходимой для конструктивной математики.

Рассматривая лишь конструктивные объекты, конструктивисты иначе понимают сами математические суждения и логические правила оперирования ими. В конструктивной математике существование объекта с заданными свойствами лишь тогда считается доказанным, когда указан способ потенциально осуществимого построения объекта с этими свойствами.

Конструктивная математика, как и классическая, имеет своей конечной целью разработку идей и методов исследования количественных отношений реального мира. Эти методы впоследствии могут быть использованы в естествознании, технике и других приложениях.

***Лекция 21*. Конвенционализм А. Пуанкаре**

Анри Пуанкаре – один из величайших математических гениев в истории, родился 29 апреля 1854 г. в Нанси в семье профессора медицины. С самого детства за Анри закрепилась репутация рассеянного человека, которую он сохранил на всю жизнь. В детстве он перенёс дифтерию, которая осложнилась временным параличом ног и мягкого нёба. Болезнь затянулась на несколько месяцев, в течение которых он не мог ни ходить, ни говорить. За это время у него очень сильно развилось слуховое восприятие и, в частности, появилась необычная способность — цветовое восприятие звуков, которое осталось у него до конца жизни.

Хорошая домашняя подготовка позволила Анри в восемь с половиной лет поступить сразу на второй год обучения в лицее. Там его отметили как прилежного и любознательного ученика с широкой эрудицией. На этом этапе его интерес к математике умерен — через некоторое время он переходит на отделение словесности. 5 августа 1871 года Пуанкаре получил степень бакалавра словесности с оценкой «хорошо». Через несколько дней Анри изъявил желание участвовать в экзаменах на степень бакалавра (естественных) наук, который ему удалось сдать, но лишь с оценкой «удовлетворительно», поскольку на письменном экзамене по математике он по рассеянности ответил не на тот вопрос.

В последующие годы математические таланты Пуанкаре проявлялись всё более и более явно. В октябре 1873 года он стал студентом престижной парижской Политехнической школы, где на вступительных экзаменах занял первое место. Его наставником по математике был знаменитый французский математик Шарль Эрмит. В следующем году Пуанкаре опубликовал в «Анналах математики» свою первую научную работу по дифференциальной геометрии.

По результатам двухлетнего обучения (1875) Пуанкаре приняли в Горную школу, наиболее авторитетное в то время специальное высшее учебное заведение. Там он через несколько лет (1879) под руководством Эрмита защитил докторскую диссертацию, о которой Гастон Дарбу, входивший в состав комиссии, сказал: «С первого же взгляда мне стало ясно, что работа выходит за рамки обычного и с избытком заслуживает того, чтобы её приняли. Она содержала вполне достаточно результатов, чтобы обеспечить материалом много хороших диссертаций».

Получив учёную степень, Пуанкаре начал преподавательскую деятельность в университете города Кан в Нормандии (декабрь 1879 года). Тогда же он опубликовал свои первые серьёзные статьи – они посвящены введённому им классу автоморфных функций.

Там же, в Кане, он познакомился со своей будущей женой Луизой Пулен д’Андеси. 20 апреля 1881 года состоялась их свадьба. У них родились сын и три дочери.

Оригинальность, широта и высокий научный уровень работ Пуанкаре сразу поставили его в ряд крупнейших математиков Европы и привлекли внимание других видных математиков. В 1881 году Пуанкаре был приглашён занять должность преподавателя на Факультете наук в Парижском университете и принял это приглашение. Параллельно, с 1883 по 1897, он преподавал математический анализ в Высшей Политехнической школе.

В 1881–1882 годах Пуанкаре создал новый раздел математики – качественную теорию дифференциальных уравнений. Он показал, каким образом можно, не решая уравнения (поскольку это не всегда возможно), получить практически важную информацию о поведении семейства решений. Этот подход он с большим успехом применил к решению задач небесной механики и математической физики.

Десятилетие после завершения исследования автоморфных функций (1885–1895) Пуанкаре посвятил решению нескольких сложнейших задач астрономии и математической физики. Он исследовал устойчивость фигур планет, сформированных в жидкой (расплавленной) фазе, и обнаружил, кроме эллипсоидальных, несколько других возможных фигур равновесия.

Осенью 1886 года 32-летний Пуанкаре возглавил кафедру математической физики и теории вероятностей Парижского университета. Символом признания Пуанкаре ведущим математиком Франции стало избрание его президентом Французского математического общества (1886) и членом Парижской академии наук (1887).

В 1885 году король Швеции Оскар II организовал математический конкурс и предложил участникам на выбор четыре темы. Самой сложной была первая: рассчитать движение гравитирующих тел Солнечной системы. Пуанкаре показал, что эта задача (т. н. задача трёх тел) не имеет законченного математического решения. Тем не менее, Пуанкаре вскоре предложил эффективные методы её приближённого решения. В 1889 году Пуанкаре (совместно с Полем Аппелем, исследовавшим четвёртую тему), получил премию шведского конкурса. Один из двух судей Геста Миттаг-Леффлер, писал о работе Пуанкаре: «Премированный мемуар окажется среди самых значительных математических открытий века». Второй судья, Карл Вейерштрасс, заявил, что после работы Пуанкаре «начнётся новая эпоха в истории небесной механики». За этот успех французское правительство наградило Пуанкаре орденом Почётного легиона.

В августе 1900 года Пуанкаре руководил секцией логики Первого Всемирного философского конгресса, проходившего в Париже. Там он выступил с программным докладом «О принципах механики», где изложил свою философию конвенционализма: принципы науки суть временные условные соглашения, приспособленные к опыту, но не имеющие прямых аналогов в реальности. Эту платформу он впоследствии детально обосновал в книгах «Наука и гипотеза» (1902), «Ценность науки» (1905) и «Наука и метод» (1908). В них он также описал своё ви́дение сущности математического творчества, в котором главную роль играет интуиция, а логике отведена роль обоснования интуитивных прозрений. Ясный стиль и глубина мысли обеспечила этим книгам значительную популярность, они были сразу же переведены на многие языки.

В 1903 году Пуанкаре был включён в группу из 3 экспертов, рассматривавших улики по «делу Дрейфуса». На основании единогласно принятого экспертного заключения кассационный суд признал Дрейфуса невиновным.

Основной сферой интересов Пуанкаре в XX веке становятся физика (особенно электромагнетизм) и философия науки. Пуанкаре показывает глубокое понимание электромагнитной теории, его проницательные замечания высоко ценят и учитывают Лоренц и другие ведущие физики. С 1890 года Пуанкаре опубликовал серию статей по теории Максвелла, а в 1902 году начал читать курс лекций по электромагнетизму и радиосвязи. В своих статьях 1904—1905 годов Пуанкаре далеко опережает Лоренца в понимании ситуации, фактически создав математические основы теории относительности (физический фундамент этой теории разработал Эйнштейн в 1905 году).

В 1906 году Пуанкаре избран президентом Парижской академии наук. В 1908 году он тяжело заболел и не смог сам прочитать свой доклад «Будущее математики» на Четвёртом математическом конгрессе. Первая операция закончилась успешно, но спустя 4 года состояние Пуанкаре вновь ухудшилось. Скончался в Париже после операции от эмболии 17 июля 1912 года в возрасте 58 лет. Похоронен в семейном склепе на кладбище Монпарнас.

Вероятно, Пуанкаре предчувствовал свою неожиданную смерть, так как в последней статье описал нерешённую им задачу («последнюю теорему Пуанкаре»), чего никогда раньше не делал. Спустя несколько месяцев эта теорема была доказана Джорджем Биркгофом. Позже при содействии Биркгофа во Франции был создан Институт теоретической физики имени Пуанкаре.

Философия конвенционализма Пуанкаре состоит в следующем. В книге «Наука и гипотеза» он утверждал, что некоторые основные положения науки следует понимать как *конвенции* – условно принятые соглашения, с помощью которых учёные выбирают конкретное теоретическое описание физических явлений из ряда возможных описаний. Эти конвенции должны быть взаимно непротиворечивы и должны отражать отношения между вещами. Произвольны ли эти конвенции? Нет, иначе они были бы бесплодны. Опыт предоставляет нам свободный выбор, но помогает выбрать путь, наиболее удобный. В частности показательно следующее его утверждение[30]:

«Геометрические аксиомы не являются ни синтетическими априорными суждениями, ни опытными фактами. Они суть условные положения (соглашения): при выборе между всеми возможными соглашениями мы руководствуемся опытными фактами, но сам выбор остаётся свободным и ограничен лишь необходимостью избегать всякого противоречия. Поэтому-то постулаты могут оставаться строго верными, даже когда опытные законы, которые определяли их выбор, оказываются лишь приближёнными.

[30] Пуанкаре А. О науке. М.,1983. – С. 40–41.

Другими словами, аксиомы геометрии (я не говорю об аксиомах арифметики) суть не более, чем замаскированные определения».

Пуанкаре считал, что существует бесконечно много теорий, которые в состоянии адекватно объяснить и описать любую область опыта. Выбор теории, вообще говоря, произволен, хотя более простой теории отдаётся предпочтение перед более сложной.

Один из примеров, приводимых Пуанкаре для демонстрации условности соглашений в науке, связан с определением массы Юпитера. Эту массу можно рассчитать, исходя из наблюдений за его спутниками, из возмущений больших планет, вызываемых притяжением Юпитера, и из возмущений путей малых планет и астероидов. Нетрудно убедиться, что эти три способа дадут близкие между собой, но всё же различные величины. Опытный результат можно объяснить, положив, что во всех случаях коэффициент притяжения неодинаков. Придя к такому соглашению, легко увязать между собой данные астрономических наблюдений.

Пример удачного соглашения в математике связан с понятием факториала. Факториалом натурального числа n (обозначается $n!$) называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n. Т. е. по определению $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. Например, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. 1!=1. Понятие факториала определено лишь для натуральных чисел. Вместе с тем многие математические закономерности приводят к тому, что под знаком факториала приходится рассматривать 0, который не является натуральным числом. К тому же величина 0! нередко оказывается в знаменателях различных выражений. Поэтому принято соглашение считать 0! равным 1 (так же, как и 1!) . И это соглашение оказалось очень удобным и не приводящим ни к каким противоречиям.

Лекция 22. Формализм
Гильбертовская программа обоснования математики

Формалистический взгляд на математику, сводящий её к оперированию формулами, возник сравнительно недавно. Особенно он усилился после внедрения аксиоматического метода.

Формалистическое направление в математике связано в первую очередь с фигурой *Давида Гильберта* (1862–1943) – ещё одного из самых выдающихся математиков XIX–XX столетий. Родился он в Велау близ Кенигсберга в Пруссии, окончил в Кенигсберге университет, получив степень доктора философии. В 1885 году Гильберт защитил диссертацию по теории инвариантов, научным руководителем которой был Линдеман, а в следующем году стал профессором математики в Кёнигсберге. В ближайшие несколько лет фундаментальные открытия Гильберта в теории инвариантов выдвинули его в первые ряды европейских математиков. В 1895 году он переходит в Гёттингенский университет, где на должности профессора оставался фактически до конца жизни. Среди прямых учеников Гильберта были известные математики Эрнст Цермело, Герман Вейль, Джон фон Нейман, Рихард Курант, Гуго Штейнгауз, математик и второй чемпион мира по шахматам Эммануил Ласкер. Многие другие учёные считали себя учениками Гильберта.

В 1900 году на Втором Международном математическом конгрессе Гильберт формулирует знаменитый список из 23 нерешённых проблем математики, послуживший указателем приложения усилий математиков на протяжении всего XX века.

В 1930 году Гильберт ушёл в отставку, хотя время от времени читал лекции студентам.

После прихода гитлеровцев к власти в Германии Гильберт жил в Гёттингене в стороне от университетских дел. Многие его коллеги, имевшие недостаточно арийских предков или родственников, были вынуждены эмигрировать. Умер Гильберт 14 февраля 1943 года в Гёттингене.

Вундеркиндом он не был, а был типичным "классиком". То есть, Гильберт поочередно старался понять каждую область математики на всю ее глубину и решить в ней те задачи, которые его интересовали. Когда полет фантазии и творческий взрыв прекращались, Гильберт оставлял это поле деятельности своим ученикам. Но оставлял в полном порядке, написав хороший учебник для всех последователей и прочтя соответствующий курс для студентов.

Бывало и наоборот: Гильберт объявлял на следующий учебный год спецкурс по новой для себя области математики. За лето он входил в курс дела и дальше изучал новую науку, обучая ей студентов — как бы ведя группу альпинистов на траверс незнакомого хребта. Попасть в состав такой штурмовой группы считалось большой честью и очень трудным испытанием. Гильберт был заботлив со всеми учениками, в которых он замечал "искру Божью". Но если она угасала, то он вежливо советовал им сменить род деятельности, — например, ограничиться преподаванием математики. Бывали и другие варианты: ученики Гильберта становились физиками, инженерами и даже литераторами. Об одном бывшем питомце Гильберт отозвался так: "Да, он стал поэтом — и правильно сделал. Для математики ему не хватало фантазии!" О том, что кому-то может не хватить трудолюбия, Гильберт не говорил; бездельников он не считал полноценными людьми.

Гильберт был удачлив в дружбе, но не так везуч в семейной жизни. С женою Кете они жили душа в душу; но единственный сын родился слабоумным, и врачи сказали, что так будет и впредь. Поэтому семьей Гильберта сделались его ученики из почти всех стран Европы и Америки. Гильберт регулярно устраивал совместные чаепития и турпоходы, во время которых математические дискуссии прерывались студенческим трепом обо всем на свете. Для чопорной немецкой профессуры такой стиль общения со студентами был непривычен; но авторитет Гильберта сделал его нормой в Геттингене, а ученики и стажеры разнесли эту норму по всему свету. В России ее внедрили Дмитрий Егоров, Николай Лузин и их ученики: Павел Александров, Павел Урысон, Андрей Колмогоров.

Гильберт внёс фундаментальный вклад во многие области математики – геометрию, теорию чисел, теорию дифференциальных уравнений. В области обоснования математики он явился основоположником *формализма*.

В 20-е годы XX века Гильберт выступил с особой программой обоснования математики, где формалистические идеи играют заметную роль, хотя программа не сводится целиком к ним. С помощью формализации математики Гильберт пытался преодолеть трудности её обоснования, защитить её от критики интуиционистов. Основным оружием для этого он выбирает аксиоматический метод, с помощью которого Гильберту удалось дать строгое обоснование геометрии Евклида. Гильберт был убеждён в том, что классическая математика свободна от противоречий, а парадоксов теории множеств можно избежать, если внимательно следить за способами образования понятий.

Общие идеи своей программы Гильберт сформулировал в 1904-м году в докладе «Об основаниях логики и арифметики» в Гейдельберге. Наиболее полное выражение эта программа получила в фундаментальном двухтомном труде «Основания математики», написанном совместно с П. Бернайсом[31]. Основная идея этой программы состоит в том, чтобы выразить классическую математику в виде формализованной аксиоматической системы, а затем доказать её непротиворечивость. Однако содержательный аксиоматический метод, который Гильберт использовал при обосновании евклидовой геометрии, не годился для этой цели. При содержательном понимании аксиом мы не гарантированы от обращения к интуиции и смыслу исходных утверждений. Кроме того, при таком подходе точно не указываются те способы логического вывода, которые применяются для получения теорем из аксиом. Поэтому Гильберт отказался от рассмотрения аксиом как содержательных утверждений. Он представил аксио-

[31] Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Т. 1. Логические исчисления и формализация арифметики. М., 1979. Т. 2. Теория доказательств. М., 1982.

мы с помощью логических и математических символов в виде формулы, а процесс выведения теорем из аксиом тогда превращается в процесс преобразования этих формул-аксиом в доказуемые формулы, согласно точно установленным правилам преобразования или вывода.

Этот подход можно проиллюстрировать на следующем примере[32]. Возьмём в качестве исходного объекта (формулы-аксиомы) цифру 1. В качестве операции порождения (правила вывода) – приписывание 1.Объекты, получающиеся при отправлении от цифры 1 в результате такой операции, например, как 1, 11, 111, 1111, представляют собой фигуры следующего вида: они начинаются и оканчиваются цифрой 1; после каждой цифры 1, не являющейся концом данной фигуры, идёт следующая за ней 1. Фигуры эти возникают в результате применения порождающей операции и, следовательно, являются результатами некоторых конкретных завершающихся построений; эти построения могут быть аннулированы путём последовательных применений обратного процесса ликвидации. Таким образом можно получать все цифры: 2:=11; 3:=111 и т. д.

Тогда и в общем случае на получающиеся формулы можно смотреть как на некоторую последовательность символов. Интуитивный момент при таком подходе сведён к минимуму – только лишь умению различать символы, что может делать и машина. Любое доказательство будет представлять собой конечную последовательность формул, в которой последняя является доказуемой, а предыдущие – либо аксиомами, либо доказанными теоремами.

Гильберт стремился не столько к формализации классической математики, сколько к доказательству непротиворечивости тех систем, которые получаются в результате такой формализации. Обычный способ доказательства такой непротиворечивости в интерпретации или модели, для этой системы из объектов какой-либо другой теории, в непротиворечивости которой мы не сомневаемся. Такие доказательства носят относительный характер. В качестве такой модели чаще всего используется теория множеств. Но Гильберт стремился доказать непротиворечивость аксиоматической системы, которая формализует теорию множеств. А для этого трудно подыскать подходящую систему понятий.

Новый шаг, сделанный Гильбертом в решении проблемы непротиворечивости, состоял в прямом доказательстве аксиоматических систем, формализующих классическую математику. Этот прямой путь состоял в том, чтобы убедиться, что, исходя из принятых аксиом, и, используя точно указанные правила вывода, мы никогда не придём к противоречию, т. е. к одновременному

---

[32] Там же. Т. 1. – С. 46.

доказательству и опровержению некоторой формулы. Для этого Гильберту пришлось присоединить к формальной математике в некотором смысле новую математику, которую он назвал *метаматематикой* (или *теорией доказательств*).

Для объяснения программы Гильберта часто используют аналогию с шахматами. Аксиомам формальной математики в шахматах соответствует определённое расположение фигур в начале партии. Оно, кстати сказать, не является раз и навсегда закреплённым. Как можно изменять аксиомы, так можно изменять и начальное положение в шахматной игре. Например, в «фишеровских» шахматах оно совершено иное, нежели в классических. Передвижение фигур согласно принятым правилам (конь ходит буквой «Г» и т. д.) соответствует правилам вывода в формальной математике. В результате передвижения фигур получаются новые позиции – это соответствует новым формулам. Финальная позиция (выигрыш одной из сторон или ничья) соответствует доказуемой формуле.

Успешное осуществление программы, выдвинутой Гильбертом, означало бы окончательное обоснование классической математики. Хотя противники Гильберта отмечали, что доказательство непротиворечивости формальных систем математики не гарантирует материальной истинности её интерпретаций, т. е. обычной содержательной математики. Однако сам Гильберт под существованием математических объектов понимал их непротиворечивость, в этом его концепция была сходной с концепцией А. Пуанкаре (см. Лекцию 18). Поэтому доказательство этой непротиворечивости он считал достаточным для надёжности выводов классической математики.

Но при доказательстве непротиворечивости формальных систем обнаружилась принципиальная невозможность осуществления программы Гильберта в её первоначальном виде. Наибольшее значение для оценки этой программы имеют результаты, о которых пойдёт речь в следующем параграфе.

*Лекция 23***. Теорема К. Гёделя о неполноте и её влияние на исследования по обоснованию математики**

В 1931-м году появилась работа немецкого математика Курта Гёделя (1906–1978) «О формально неразрешимых утверждениях математики и родственных систем», которая произвела эффект разорвавшейся бомбы. Там содержалось два поразительных результата. Один из них гласил, что непротиворечивость любой достаточно мощной математической системы, охватывающей арифметику целых чисел, не может быть установлена средствами самой этой системы на основе математических принципов, принятых в основаниях математики различными направлениями: логицистами, формалистами и представителями теоретико-множественного направления. Этот результат являлся следствием из установленного автором другого, не менее поразительного результата, который известен как *теорема Гёделя о неполноте.* Она утверждает, что если формальная теория, включающая арифметику целых чисел, непротиворечива, то она неполна. Иначе говоря, существует имеющее смысл утверждение арифметики целых чисел, которое в рамках данной теории невозможно ни доказать, ни опровергнуть. Фактически теорема Гёделя о неполноте утверждает, что ни одна система математических и логических аксиом, арифметизируемая тем или иным способом, не позволяет охватить даже все содержащиеся только в ней истины, не говоря уже о всей математике, поскольку любая содержащаяся в ней система аксиом неполна. В любой аксиоматической системе существуют утверждения, недоказуемые в рамках данной системы.

Из этой теоремы следует, что для доказательства непротиворечивости такой системы приходится применять методы, которые формализуются в другой, более мощной формальной системе. Но и в этой другой системе тоже найдутся утверждения, которые средствами этой другой системы невозможно ни доказать ни опровергнуть. Для их доказательства нужны средства ещё третьей системы и т. д. Таким образом, возникает целая иерархия формальных систем, каждая из которых будет превосходить предшествующую. Поэтому полная формализация не может быть завершена на каком-то определённом этапе развития математики. Она представляет собой процесс приближения к более точному и адекватному отображению содержания математической науки, которая непрерывно расширяется и совершенствуется, что содействует её прогрессу.

Результаты Гёделя потрясли математику. Невозможность доказать непротиворечивость наносила смертельный удар формалистской концепции Гильберта, который не сомневался в успехе своего намерения доказать непротиворечивость всей математики. Результат Гёделя настолько расстроил Гильберта, что он прекратил работу над своей программой, хотя в «Основаниях математики» утверждал: «. . . возникшее на определенное время мнение, будто из некоторых недавних результатов Гёделя следует неосуществимость моей теории доказательств, является заблуждением. Этот результат на самом деле показывает только то, что для более глубоких доказательств непротиворечивости финитная точка зрения должна быть использована некоторым более сильным образом, чем это оказалось необходимым при рассмотрении элементарных формализмов»[33]. Но эти результаты задевали далеко не только гильбертовскую программу. Гёдель доказал, что какой бы подход к математике на основе надёжных логических принципов мы ни избрали, нам всё равно не удастся доказать непротиворечивость математики. То есть математика лишалась преимущества абсолютной достоверности своих результатов. Вследствие этого из теоремы Гёделя делались крайне пессимистические выводы. Считали, что это открытие наносит удар вообще по всем исследованиям в области оснований математики. В действительности удар наносится лишь по тем попыткам обоснования математики, которые предпринимались Гильбертом.

Приведём один любопытный пример. Рассмотрим последовательность (*гёделевская последовательность*):

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{x_{n-1}}{2}, \; \textit{если} \; x_{n-1} - \textit{чётно}, \\ 3x_{n-1}+1, \; \textit{если} \; x_{n-1} - \textit{нечётно}. \end{cases}$$

Будем задавать различные начальные значения x_1. Возьмём $x_1 = 5$. Построим несколько членов этой последовательности: 5, 16, 8, 4, 2, 1. Пришли к 1. Возьмём другое начальное значение $x_1 = 21$. Имеем: 21, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1. Снова пришли к 1. Возьмём $x_1 = 30$. Имеем: 30, 15, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2,1. И снова пришли к 1. Оказывается, что, независимо от начального значения, мы всегда приходим к единице, хотя доказательства этого факта (так же, как и его опровержения) не существует.

Теорема Гёделя о неполноте породила ряд побочных проблем. Например, можно ли определить, доказуемо или недоказуемо любое заданное утверждение? Этот вопрос известен под названием *проблемы разрешимости*. Главную роль здесь играет так называемая *разрешающая процедура*. Например, чтобы решить вопрос о делимости одного натурального числа на другое, мы можем осуществить процесс деления. Если остаток от деления оказывается равным нулю, то это означает, что факт делимости имеет место. В 1936-м году *Алонсо Чёрч* (1903–1995) показал, что в общем случае разрешающая процедура невозможна. То есть не существует способа, позволяющего заранее определить, можно ли доказать или опровергнуть данное утверждение. Одни утверждения

[33] Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М., 1979. – С. 19.

можно доказать и опровергнуть одновременно, другие нельзя ни доказать, ни опровергнуть – они неразрешимы, но их неразрешимость не очевидна заранее. Гипотеза Гольдбаха о том, что любое чётное число представимо в виде суммы двух простых чисел (см. Лекцию 14), пока не доказана. Она может оказаться неразрешимой в системе аксиом арифметики, но её неразрешимость не очевидна.

Таким образом, формализация математики по существу никогда не может быть завершена. Результаты Гёделя показывают, что попытки обоснования математики в рамках самой этой науки обречены на неудачу.

После работ Гёделя всё большее число математиков и логиков склоняется к тому, что творческие и интуитивные аспекты математической работы не поддаются логической формализации, и математика – это не деятельность идеального, никогда не совершающего ошибок математика, а открытая самонастраивающаяся и самокорректирующаяся система, нуждающаяся в непрерывном информационном взаимодействии с внешней средой. Идеал такой математики – не формализация всех своих теорий, а создание некоторой эвристической не дедуктивной процедуры решения проблем. Логика математики в таком понимании – логика не только обоснования, но и изобретения гипотез. Но такая логика пока что дело будущего.

Список рекомендованной литературы

1. Рузавин Г. И. О природе математического знания. М.: Мысль, 1968. – 302 с.
2. Клайн М. Математика. Утрата определённости. М.: Мир, 1984. – 434 с.
3. Клайн М. Математика. Поиск истины. М.: Мир, 1988. – 295 с.
4. Светлов В. А. Философия математики. М.: КомКнига, 2006. – 208 с.
5. Пуанкаре А. О науке. М.: Наука, 1990. – 736 с.
6. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975. – 464 с.
7. Уёмов А., Сараева И., Цофнас А. Общая теория систем для гуманитариев. Warszava: Wydawnictwo Universitas Rediviva, 2001. – 276 с.
8. Александров А. Д. Проблемы науки и позиция учёного. Л.: Наука, 1988. – 510 с.
9. Лукьянец В. С. Философские основы математического познания. К.: Наукова думка, 1980. – 192 с.
10. Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики. М.Наука, 1984. – 284 с.
11. Каганов М. И., Любарский Г. Я. Абстракции в математике и физике. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 352 с.

Темы докладов и рефератов

1. Метод абстракции.
2. Основные способы математической абстракции и формирование исходных понятий математики.
3. Специфика предмета математики и особенности математической абстракции.
4. Аксиоматический метод, его роль в математике.
5. Проблема бесконечности и вопросы обоснования математики.
6. Проблема существования в математике.
7. Парадоксы теории множеств и пути их разрешения.
8. Взаимосвязь математики и лингвистики.
9. Формальные грамматики и формальные языки.
10. Аналогия в научном исследовании.
11. Моделирование как метод научного познания.
12. Доказательство и правдоподобные рассуждения, их связь.
13. Гипотеза как форма научного познания.
14. Научная проблема, решение проблем, как показатель прогресса науки.
15. Гипотетико-дедуктивный метод, метод математической гипотезы как разновидность гипотетико-дедуктивного метода.
16. Абдукция и объяснительные гипотезы.
17. Методы анализа и построения научных теорий.
18. Гуманитарные методы исследования.
19. Системный метод исследования.
20. Исходные понятия и проблемы теории систем.
21. Математика и диалектика.
22. Проблема пространства в математике. Развитие топологии.
23. Гильбертовская программа обоснования математики.
24. Классификация ошибок в доказательствах.
25. Роль чисел в философских концепциях Пифагора.
26. Философское наследие Анри Пуанкаре.
27. Роль математики в обосновании философских концепций.
28. Математика как язык науки.
29. Когнитивное творчество, его сущность, механизм и основания.
30. Математика и искусство.

Содержание

Лекция 1. Математика, особенности, отличающие её от других наук 3
Лекция 2. Характеристика метода абстракции 7
Лекция 3. Основные этапы развития математики 11
Лекция 4. Отношение математики к действительности и к другим наукам 13
Лекция 5. Математика и философия 18
Лекция 6. Математика и философия Древней Греции. Фалес Милетский 20
Лекция 7. Философские взгляды и математические достижения Пифагора Самосского и его школы 25
Лекция 8. Первый кризис основ математики 39
Лекция 9. Кризисы математики, связанные с теорией множеств 42
Лекция 10. Аксиоматика Цермело – Френкеля 51
Лекция 11. Доказательство, необходимые свойства доказательства. Основные черты доказательства в математике 53
Лекция 12. Виды математических доказательств. Прямое доказательство, примеры 59
Лекция 13. Метод доказательства от противного, примеры 62
Лекция 14. Метод индукции, примеры. Полная и неполная индукция 65
Лекция 15. Метод математической индукции, примеры 69
Лекция 16. Проблема бесконечности в математике. Актуальная и потенциальная бесконечность 75
Лекция 17. Проблема истины в математике 78
Лекция 18. Проблема существования в математике 81
Лекция 19. Логицизм. Системы Г.Фреге и Б.Рассела 88
Лекция 20. Интуиционизм и конструктивізм 93
Лекция 21. Конвенционализм А.Пуанкаре 98
Лекция 22. Формализм. Гильбертовская программа обоснования математики 102
Лекция 23. Теорема К. Геделя о неполноте и её влияние на исследования по обоснованию математики 106
Список рекомендованной литературы 110
Темы докладов и рефератов 111

Навчальне видання

Щоголєв Сергій Авенірович

ФІЛОСОФІЯ МАТЕМАТИКИ

Конспект лекцій

для студентів гуманітарних спеціальностей

Російською мовою

За редакцією автора

Підп. до друку 02.07.2015. Формат 60х84/16.
Умов.-друк. арк. 6,63. Тираж 50 пр.
Зам. № 1190.

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет
імені І. І. Мечникова
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.

Україна, 65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12
Тел.: (048) 723 28 39. E-mail: druk@onu.edu.ua