Рух твердого тіла

У природі існує безліч тіл, які в процесі руху настільки мало змінюють свою форму та розміри, що цими змінами можна знехтувати, і вивчати закони їхнього руху у припущенні, що відстані між частинками тіл не змінюються. Такі тіла називають ***твердими***. Тверде тіло має шість ступенів вільності – три поступальні та три обертальні. Вивчення властивостей цих рухів почнемо з розгляду кінетичної енергії твердого тіла.

19. Кінетична енергія твердого тіла

Розглянемо тверде тіло як систему N точкових частинок з масами m_a, положення яких визначається радіус-векторами $\vec{r}_a(t)$, а швидкості – векторами $\vec{v}_a = \dot{\vec{r}}$. Кінетична енергія такого тіла має вигляд:

$$T = \sum_{a=1}^{N} \frac{m_a v_a^2}{2}. \qquad (19.1)$$

Оскільки тіло тверде, нескінченно мале зміщення $d\vec{r}_a$ його частинки з масою m_a складається з поступального переміщення[1] $d\vec{R}_A$ будь-якої точки A ($\vec{R}_A$ – радіус-вектор точки A, див. Рис.13) цього тіла та обертального переміщення $[d\vec{\varphi}_A, \vec{r}_a^{\,A}]$, яке залежить від радіус-вектора частинки $\vec{r}_a^{\,A}$, проведеного з точки A, та кута повороту $d\vec{\varphi}_A$ навколо точки A:

$$d\vec{r}_a = d\vec{R}_A + [d\vec{\varphi}_A, \vec{r}_a^{\,A}]. \qquad (19.2)$$

Швидкість цієї частинки також має два внески:

$$\vec{v}_a = \vec{V}_A + [\vec{\Omega}_A, \vec{r}_a^{\,A}], \qquad (19.3)$$

де $\vec{V}_A$ – поступальна швидкість точки A, $\vec{\Omega}_A = \dfrac{d\vec{\varphi}_A}{dt}$ –

[1] Це переміщення однакове для усіх частинок тіла.

обертальна (кутова) швидкість твердого тіла навколо точки A.

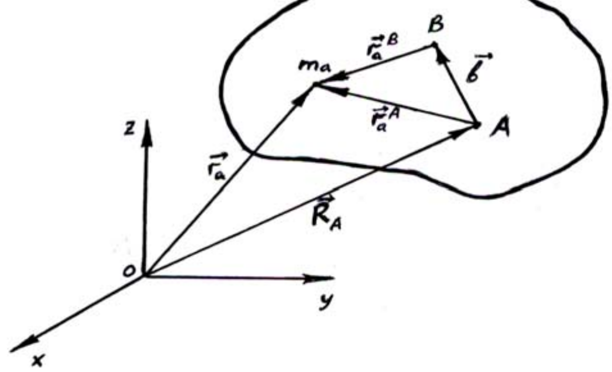

Рис. 13. Положення частинки з масою m_a відносно початку координат $(\vec{r}_a)$, а також відносно точок A $(\vec{r}_a^{\,A})$ та B $(\vec{r}_a^{\,B})$ твердого тіла

Підставимо (19.3) у кінетичну енергію (19.1) та винесемо в кожному із внесків за знак суми множники, які не мають індексу a:

$$T = \frac{V_A^{\,2}}{2}\sum_{a=1}^{N} m_a + [\vec{V}_A, \vec{\Omega}_A]\sum_{a=1}^{N} m_a \vec{r}_a^{\,A} + \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} m_a \left\{ \Omega_A^{\,2} r_a^{A2} - (\vec{\Omega}_A \vec{r}_a^{\,A})^2 \right\}. \tag{19.4}$$

Щоб у останньому доданку винести компоненти кутової швидкості $\vec{\Omega}_A$ з-під знака суми, запишемо відповідні скалярні добутки у тензорній формі:

$$\begin{gathered} \Omega_A^{\,2} = \Omega_{Ai}\Omega_{Ai} = \Omega_{Ai}\Omega_{A\kappa}\delta_{i\kappa}, \\ \vec{\Omega}_A \vec{r}_a^{\,A} = \Omega_{Ai} x_{ai}^A, \\ (\vec{\Omega}_A \vec{r}_a^{\,A})^2 = \Omega_{Ai}\Omega_{A\kappa} x_{ai}^A x_{ak}^A, \end{gathered} \tag{19.5}$$

де

$$\delta_{i\kappa} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \tag{19.6}$$

– символ Кронекера, x_{ai}^A – декартові компоненти радіус-вектора $\vec{r}_a^{\,A}$. У результаті остання сума виразу (19.4) матиме вигляд:

$$\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} m_a \left\{ \Omega_A^{\,2} r_a^{A2} - (\vec{\Omega}_A \vec{r}_a^{\,A})^2 \right\} = \frac{1}{2}\Omega_{Ai}\Omega_{Ak}\sum_{a=1}^{N} m_a (\delta_{ik} r_a^{A2} - x_{ai}^A x_{ak}^A). \tag{19.7}$$

Таким чином, кінетична енергія твердого тіла складається з таких внесків:

$$T = \frac{mV_A^2}{2} + m(\vec{R}_0^A[\vec{V}_A, \vec{\Omega}_A]) + \frac{1}{2} I_{ik}^A \Omega_{Ai} \Omega_{Ak}, \qquad (19.8)$$

де $m = \sum_{a=1}^{N} m_a$ – повна маса твердого тіла, $\vec{R}_0^A = \frac{1}{m}\sum_{a=1}^{N} m_a \vec{r}_a^{\,A}$ – радіус-вектор центру мас тіла відносно точки A,

$$I_{ik}^A = \sum_{a=1}^{N} m_a (\delta_{ik} r_a^{A2} - x_{ai}^A x_{ak}^A) \qquad (19.9)$$

– ***тензор моментів інерції*** твердого тіла відносно точки A. Перший внесок у співвідношенні (19.8) характеризує кінетичну енергію поступального руху твердого тіла (поступального руху точки A, де немовби знаходиться уся маса m твердого тіла). Другий внесок характеризує рух центру мас тіла відносно точки A, останній – кінетичну енергію обертального руху твердого тіла навколо точки A. Якщо другий внесок дорівнює нулю, кінетична енергія твердого тіла матиме вигляд:

$$T = \frac{mV_A^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k, \qquad (19.10)$$

де внески поступальних та обертальних рухів повністю відокремлені один від одного. Окрім тривіальних випадків $\vec{V}_A = 0$ (нема поступального руху) або $\vec{\Omega}_A = 0$ (нема обертального руху), другий внесок дорівнюватиме нулю у випадках:

а) вектор $\vec{R}_0^A = 0$, тобто розглядається обертання твердого тіла навколо центру мас;

б) якісь два з векторів $\vec{R}_0^A$, $\vec{V}_A$, $\vec{\Omega}_A$ паралельні один одному.

Якщо розглядати рух твердого тіла як поступальний рух якоїсь іншої точки твердого тіла (напр., точки B – див. Рис.13) та обертальний рух тіла навколо цієї точки, швидкість частинки з масою m_a матиме внески, аналогічні (19.3):

$$\vec{v}_a = \vec{V}_B + [\vec{\Omega}_B, \vec{r}_a^{\,B}], \qquad (19.11)$$

де $\vec{V}_B$ – поступальна швидкість точки B. З іншого боку, оскільки $\vec{r}_a^{\,A} = \vec{r}_a^{\,B} + \vec{b}$, з (19.3) випливає:

$$\vec{v}_a = \vec{V}_a + [\vec{\Omega}_A, \vec{r}_a^{\;B}] + [\vec{\Omega}_A, \vec{b}], \qquad (19.12)$$

тобто

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + [\vec{\Omega}_B, \vec{b}], \qquad (19.13)$$

$$\vec{\Omega}_B = \vec{\Omega}_A = \vec{\Omega}. \qquad (19.14)$$

Останнє співвідношення вказує, що ***обертальна швидкість усіх точок твердого тіла однакова і не залежить від вибору системи відліку, жорстко пов'язаної з твердим тілом***. Відмітимо, що точку B можна вибрати таким чином, щоб $\vec{V}_B = 0$. У такій системі відліку рух твердого тіла є обертанням навколо вісі, що проходить через точку B. Цю вісь називають ***миттєвою віссю обертання*** твердого тіла. Швидкість частинок перпендикулярна миттєвій вісі обертання:

$$\vec{v}_a = [\vec{\Omega}, \vec{r}_a]. \qquad (19.15)$$

Як випливає з (19.13), (19.14),

$$(\vec{\Omega}\vec{V}_B) - (\vec{\Omega}\vec{V}_A) = (\vec{\Omega}[\vec{\Omega}, \vec{b}]) = (\vec{b}[\vec{\Omega}, \vec{\Omega}]) = 0, \qquad (19.16)$$

тобто скалярний добуток

$$(\vec{\Omega}\vec{V}_B) = (\vec{\Omega}\vec{V}_A) \qquad (19.17)$$

є ***інваріант руху твердого тіла***. У випадку, коли кутова швидкість $\vec{\Omega}$ перпендикулярна поступальній швидкості $\vec{V}_A$ якоїсь точки A твердого тіла, вона перпендикулярна поступальній швидкості будь-якої його точки.

Задача 19.1. Знайти рівняння Ейлера-Лагранжа та інтеграли руху вільного твердого тіла у лабораторній системі відліку.

20. Тензор моментів інерції

Кінетична енергія обертального руху твердого тіла визначається формулою:

$$T_{оберт} = \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k, \qquad (20.1)$$

де I_{ik} – тензор моментів інерції. Якщо тверде тіло – це система матеріальних точок з масами m_a, його тензор моментів інерції є сумою внесків усіх матеріальних точок системи:

$$I_{ik} = \sum_{a=1}^{N} m_a (\delta_{ik} r_a^{\ 2} - x_{ai} x_{ak}), \tag{20.2}$$

але якщо тверде тіло розглядається як суцільне з об'ємною густиною ρ, у цьому виразі треба замінити суму на об'ємний інтеграл, маси частинок m_a – на густину тіла ρ, а радіус-вектор $\vec{r}_a$ та його компоненти треба записати без індексу a:

$$I_{ik} = \int_V \rho(\delta_{ik} r^2 - x_i x_k) dV . \tag{20.3}$$

Для суцільного твердого тіла, яке є нескінченно тонкою поверхнею Σ з поверхневою густиною ρ_Σ, компоненти тензора моментів інерції розраховуються за формулою:

$$I_{ik} = \int_\Sigma \rho_\Sigma (\delta_{ik} r^2 - x_i x_k) ds . \tag{20.4}$$

Аналогічно, для суцільного твердого тіла, яке є нескінченно тонкою лінією L з лінійною густиною ρ_L, компоненти тензора моментів інерції розраховуються за формулою:

$$I_{ik} = \int_L \rho_L (\delta_{ik} r^2 - x_i x_k) dl . \tag{20.5}$$

У формулах (20.3)-(20.5) радіус-вектор $\vec{r}$ та його декартові компоненти x_i визначають положення будь-якої точки, відповідно, об'єму V, поверхні Σ або лінії L.

У загальному випадку компоненти тензора I_{ik} можна записати у вигляді матриці

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}. \tag{20.6}$$

Оскільки символ Кронекера δ_{ik} (19.6) симетричний:

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}, \tag{20.7}$$

з (20.2)-(20.5) випливає, що тензор моментів інерції твердого тіла також симетричний:

$$I_{ik} = I_{ki}, \tag{20.8}$$

тобто з дев'яти компонент у (20.6) незалежних тільки шість. Для твердого тіла як системи матеріальних точок з (20.2) походить, що незалежні компоненти I_{ik} мають вигляд:

$$I_{11} = \sum_{a=1}^{N} m_a (y_a{}^2 + z_a{}^2), \quad I_{22} = \sum_{a=1}^{N} m_a (x_a{}^2 + z_a{}^2),$$
$$I_{33} = \sum_{a=1}^{N} m_a (x_a{}^2 + y_a{}^2), \quad I_{12} = I_{21} = -\sum_{a=1}^{N} m_a x_a y_a, \qquad (20.9)$$
$$I_{13} = I_{31} = -\sum_{a=1}^{N} m_a x_a z_a, \quad I_{23} = I_{32} = -\sum_{a=1}^{N} m_a y_a z_a .$$

Незалежні компоненти тензора моментів інерції суцільного твердого тіла визначаються аналогічно (у вигляді інтегралів (20.3), (20.4) або (20.5) – у відповідності з тим, чи це тіло об'ємне, поверхневе або лінійне).

Однак незалежних компонент у тензора моментів інерції тільки три: за допомогою координатних перетворень у ньому можна привести до нульових значень ще три недіагональні функції[2], тобто можна знайти такий клас систем відліку, де тензор I_{ik} має діагональний вигляд:

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}. \qquad (20.10)$$

Декартова система координат, де тензор I_{ik} набуває вигляду (20.10), називається ***системою головних моментів інерції***, а I_1, I_2, I_3 – ***головними моментами інерції*** твердого тіла. Координатні вісі цієї системи називають ***головними осями інерції*** твердого тіла.

Тверде тіло, тензор моментів інерції якого має вигляд (20.10), називається ***дзигою***. Оскільки у тривимірному просторі до такої форми завжди можливо привести симетричний тензор другого рангу, можна твердити, що ***будь-яке***

[2] З точки зору лінійної алгебри вираз (20.1) представляє собою додатно визначену квадратичну форму, оскільки I_{11}, I_{22}, I_{33}, як це видно з (20.9), не можуть бути від'ємними величинами. Таку квадратичну форму завжди у будь-якій точці простору поворотами у трьох ортогональних площинах можна привести до діагонального вигляду. У загальному випадку ці повороти у кожній точці простору різні. Оскільки простір тривимірний, координатні перетворення у просторі – це перетворення за допомогою трьох незалежних функцій. Тому завжди можна привести цю квадратичну форму до діагонального вигляду не тільки у будь-якій точці простору, але й у просторі у цілому, тобто завжди можна знайти систему відліку, де тензор I_{ik} має діагональний вигляд.

тверде тіло – це дзига.

У залежності від співвідношень між головними моментами виділяють випадки:

$$I_1 = I_2 = I_3 \qquad (20.11)$$

– ***кульова дзига*** (напр., кулька з однорідного матеріалу);

$$I_1 = I_2 \neq I_3 \qquad (20.12)$$

– ***симетрична дзига*** (напр., прямий циліндр з однорідного матеріалу, вісь якого – вісь z);

$$I_1 = I_2 \neq 0, \quad I_3 = 0 \qquad (20.13)$$

– ***жорсткий ротатор*** (напр., лінійна молекула вздовж вісі z);

$$I_1 \neq I_2 \neq I_3 \qquad (20.14)$$

– ***асиметрична дзига*** (будь-яке тривимірне тіло у системі головних осей інерції).

З (20.9) випливає, що сума будь-яких двох головних моментів не може бути меншою за третій головний момент:

$$I_1 + I_2 \geq I_3; \quad I_2 + I_3 \geq I_1; \quad I_3 + I_1 \geq I_2. \qquad (20.15)$$

Відмітимо, що співвідношення між головними моментами інерції твердого тіла (20.11)-(20.15) відбивають його властивості симетрії. Головні вісі інерції кульової дзиги можуть бути направлені як завгодно (але це завжди три взаємно перпендикулярні вісі). Якщо тіло має вісь симетрії, одна з головних осей інерції співпадає з нею, а дві інші лежать у перпендикулярній площині. У тіла, що має площину симетрії, дві головні вісі інерції знаходяться у цій площині, а третя перпендикулярна до них. Жорсткий ротатор – це низка точкових частинок, які знаходяться на фіксованих відстанях одна від одної вздовж прямої лінії, і не можна казати про обертання частинок навколо цієї лінії. Тому жорсткий ротатор – це система з двома обертальними ступенями вільності. Для системи частинок, які знаходяться у одній площині, сума головних моментів відносно осей у цій площині дорівнює головному моменту відносно третьої вісі (яка перпендикулярна площині):

$$I_1 + I_2 = I_3. \qquad (20.16)$$

Розглянемо тепер, яким чином перетворюються компоненти тензора моментів інерції при координатних перетвореннях. З тензорного аналізу відомо, що при переході від координат x_1, x_2, x_3 до координат $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ компоненти будь-якого тензорного поля другого рангу $A_{ik}(x_1, x_2, x_3)$ перетворюються за законом :

$$\widetilde{A}_{ik}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3) =$$

$$= \frac{\partial x_m}{\partial \widetilde{x}_i} \frac{\partial x_n}{\partial \widetilde{x}_k} A_{mn}(x_1(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3), x_2(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3), x_3(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3)) \ , \qquad (20.17)$$

де по індексах, що попарно повторюються, здійснюється підсумування від 1 до 3, хоча знак суми не пишеться (правило підсумовування Ейнштейна). У загальному вигляді застосування цієї формули призводить до занадто громіздких виразів, оскільки, по-перше, кожна компонента тензора $\widetilde{A}_{ik}$ у нових координатах є лінійною комбінацією усіх компонент тензора A_{ik} у старих координатах. Це означає, що $\widetilde{A}_{ik}$ може складатися з декількох доданків (не більше, як з дев'яти), бо у формулі (20.17) стоїть подвійна сума. По-друге, у компоненті A_{mn} кожного з цих доданків треба замінити значення старої координати на нову. З співвідношення (20.17) випливає, що після координатних перетворень компоненти тензора моментів інерції можуть стати функціями координат, що значно ускладнює рівняння руху твердого тіла.

Формула (20.17) істотно спрощується у випадку паралельного перенесення початку координат. Якщо початок декартової системи координат паралельно перенести на вектор $\vec{b}$, радіус-вектор $\vec{r}$ будь-якої точки перетвориться на вектор $\vec{r}'$:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{b} \ . \qquad (20.18)$$

Відповідно, i-та декартова компонента цього вектора:

$$x_i = x_i' + b_i \ . \qquad (20.19)$$

Похідні старих координат за новими $\dfrac{\partial x_m}{\partial x_i'}$ у формулі (20.17) – це просто символи Кронекера (19.6):

$$\frac{\partial x_m}{\partial x_i'} = \delta_{mi} \ . \qquad (20.20)$$

У результаті формула (20.17) стає подібною до перетворень скалярних функцій: кожна компонента $\widetilde{A}_{ik}$ зв'язується лише з такою ж компонентою A_{ik}, і треба тільки підставити у аргументи A_{ik} зв'язок між старими і новими координатами.

Для тензора моментів інерції (20.2) перетворення (20.18), (20.19) приводить до виразу:

$$I'_{ik} = \sum_{a=1}^{N} m_a (\delta_{ik} r_a'^2 - x'_{ai} x'_{ak}) = \sum_{a=1}^{N} m_a (\delta_{ik} (\vec{r}_a - \vec{b})^2 - (x_{ai} - b_i)(x_{ak} - b_k))$$

Після перегруповування внесків з урахуванням положення центру мас тіла $\vec{R} = \dfrac{1}{m} \sum_{a=1}^{N} m_a \vec{r}_a$ (або для декартових компонент: $R_i = \dfrac{1}{m} \sum_{a=1}^{N} m_a x_{ai}$) знаходимо:

$$I'_{ik} = I_{ik} - m(2\delta_{ik} \vec{b}\vec{R} - R_i b_k - b_i R_k) + m(\delta_{ik} b^2 - b_i b_k). \quad (20.21)$$

Якщо первісна система координат є системою центру мас $(\vec{R} = 0)$, формула (20.21) спрощується:

$$I'_{ik} = I_{ik} + m(\delta_{ik} b^2 - b_i b_k). \quad (20.22)$$

У випадку, коли паралельне перенесення відбувається з центру мас вздовж якоїсь головної вісі інерції (напр., вісі x_1), два інші головні моменти тіла набувають доданок mb^2:

$$I'_a = I_a + mb^2, \quad a = 2,3. \quad (20.23)$$

Останнє співвідношення виражає добре відому ***теорему Штейнера***: момент інерції відносно довільної вісі дорівнює сумі моменту інерції відносно паралельної вісі, яка проходить через центр інерції, та добутку маси тіла на квадрат відстані між осями.

Задача 20.1. Знайти головні моменти інерції молекули води.

Задача 20.2. Знайти головні моменти інерції (у системі центру мас) однорідного прямого кругового циліндра радіусу R, довжини l, у якому вирізаний циліндричний отвір радіусу $\dfrac{R}{4}$. Вісь цього отвору паралельна вісі циліндра і знаходиться на відстані $\dfrac{R}{4}$ від неї. Маса циліндра з отвором m.

При обчисленні головних моментів інерції суцільного тіла з отвором можна скористатися адитивністю тензора моментів інерції та обчислювати його компоненти для фіктивної системи двох тіл: суцільного тіла без отвору та тіла з відповідною від'ємною масою, що знаходиться на місці отвору.

21. Рівняння руху твердого тіла

Оскільки тверде тіло – це система жорстко зв'язаних матеріальних точок, рух цієї системи повинен описуватися набором шести рівнянь. Такі рівняння можна отримати, розглядаючи швидкість зміни імпульсу $\frac{d\vec{P}}{dt}$ та швидкість зміни моменту імпульсу $\frac{d\vec{M}}{dt}$ твердого тіла.

Повний імпульс твердого тіла $\vec{P}$ – це сума імпульсів $\vec{p}_a$ окремих частинок тіла:

$$\vec{P} = \sum_{a=1}^{N} \vec{p}_a = \sum_{a=1}^{N} m_a \vec{v}_a \,. \qquad (21.1)$$

Для кожної частинки тіла виконується другий закон Ньютона:

$$\dot{\vec{p}}_a = \vec{F}_a \,, \qquad (21.2)$$

де $\vec{F}_a$ – сила, яка діє на частинку з номером a. Похідна за часом від повного імпульсу

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{a=1}^{N} \dot{\vec{p}}_a = \sum_{a} \vec{F}_a \,. \qquad (21.3)$$

Внаслідок жорстких зв'язків внутрішні сили взаємодії між частинками взаємно компенсують одна одну, і повна сила, що діє на тверде тіло, – це зовнішня сила $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \sum_{a} \vec{F}_a \,. \qquad (21.4)$$

У результаті маємо рівняння для поступального руху твердого тіла

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \,. \qquad (21.5)$$

Рівняння (21.5) визначає зміну імпульсу твердого тіла під впливом зовнішніх сил. Відмітимо, що повний імпульс вільного твердого тіла, як замкненої системи, не повинен змінюватися − див. п.4 (внутрішні сили між частинками твердого тіла повинні повністю компенсувати одна одну).

Швидкість зміни повного моменту імпульсу $\vec{M}$ твердого тіла:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{a=1}^{N}[\vec{r}_a, \vec{p}_a] = \sum_{a=1}^{N}\left([\dot{\vec{r}}_a, \vec{p}_a] + [\vec{r}_a, \dot{\vec{p}}_a]\right). \qquad (21.6)$$

Оскільки $\dot{\vec{r}}_a = \vec{v}_a$, $\vec{p}_a = m_a \vec{v}_a$, перший внесок у дужках відсутній. У другий внесок підставимо (21.2), і для похідної за часом від повного моменту імпульсу знаходимо:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K}, \qquad (21.7)$$

де

$$\vec{K} = \sum_{a=1}^{N}[\vec{r}_a, \vec{F}_a] \qquad (21.8)$$

– момент сил, що діє на тверде тіло (це сума моментів сил, діючих на окремі частинки тіла). Рівняння (21.7) визначає зміну моменту імпульсу твердого тіла під впливом моментів сил, що діють на кожну частинку тіла. Це рівняння описує обертання твердого тіла відносно миттєвої вісі, що проходить через точку O', відносно якої визначений момент імпульсу $\vec{M}$.

При паралельному перенесенні початку координат на вектор $\vec{b}$ (20.18) момент сил перетворюється за законом:

$$\vec{K} = \vec{K}' + [\vec{b}, \vec{F}]. \qquad (21.9)$$

З цього співвідношення випливає, що момент сил, що діє на тверде тіло, не змінюється у таких випадках:

– повна сила $\vec{F}$, що діє на тверде тіло, дорівнює нулю;

– повна сила $\vec{F}$, що діє на тверде тіло, дорівнює нулю ($\vec{F} = 0$), але на тіло діє пара сил, (дві рівні по модулю протилежно направлені сили, які не діють вздовж однієї прямої);

– вектор $\vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{F}$.

Якщо вектори $\vec{K}$ і $\vec{F}$ взаємно перпендикулярні, завжди можна знайти систему відліку, де

$$\vec{K} = [\vec{b}, \vec{F}]. \qquad (21.10)$$

Таких систем відліку нескінченно багато, оскільки від (21.10) можна перейти до нової системи паралельним переносом на вектор $\vec{b}'$, будь-який за модулем, але направлений вздовж вектора $\vec{F}$. Тобто, якщо $\vec{K} \perp \vec{F}$, дія усіх сил на тверде тіло – це просто сила $\vec{F}$, що діє вздовж якоїсь прямої лінії.

Рівняння (21.5), (21.7) – це повна система рівнянь, що описують рух твердого тіла. У загальному випадку ці рівняння мають дуже складну структуру, і далеко не завжди можуть бути знайдені відповідні аналітичні розв'язки. Для розв'язання конкретних задач необхідно виразити момент імпульсу $\vec{M}$ у (21.7) через кутову швидкість $\vec{\Omega}$, а момент сил $\vec{K}$ – через кути поворотів твердого тіла $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ навколо точки O'.

У рамках механіки Лагранжа рух твердого тіла можна описати лагранжианом:

$$L = \frac{mV^2}{2} + m(\vec{R}_0[\vec{V}, \vec{\Omega}]) + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k - U(\vec{R}, \vec{\varphi}), \qquad (21.11)$$

де $\vec{R}$ – радіус-вектор точки O' твердого тіла, відносно якої визначений момент імпульсу $\vec{M}$, і рух якої визначає поступальний рух твердого тіла; $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$ – швидкість цієї точки; $\vec{R}_0$ – радіус-вектор центру мас тіла відносно точки O'; $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ – кути поворотів твердого тіла навколо точки O'; I_{ik} – тензор моментів інерції твердого тіла відносно точки O'; $\vec{\Omega} = \dot{\vec{\varphi}}$ – кутова швидкість твердого тіла; $U(\vec{R}, \vec{\varphi})$ – потенціальна енергія твердого тіла. Оскільки відстані між частинками твердого тіла не змінюються, $U(\vec{R}, \vec{\varphi})$ є потенціальною енергією твердого тіла у зовнішніх полях. Узагальненими координатами функції Лагранжа (21.10) є $\vec{R}, \vec{\varphi}$, узагальненими швидкостями – $\vec{V}, \vec{\Omega}$. Рівняння Ейлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{V}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{R}} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{\Omega}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{\varphi}} = 0 \qquad (21.12)$$

для функції (21.10) є рівняннями руху твердого тіла (21.5), (21.7). Відмітимо, що перевагою метода Лагранжа у порівнянні з підходом Ньютона є те, що рівняння (21.12) можна переписати у будь-яких узагальнених координатах q_a $(a = 1, ..., 6)$ (зробивши відповідну заміну змінних у функції

Лагранжа (21.11)), і метою координатних перетворень є знаходження таких узагальнених координат, у яких рівняння руху твердого тіла можуть бути розв'язані.

Задача 21.1. Знайти функцію Лагранжа та рівняння руху однорідної кульки радіусу R_1, яка котиться у полі сил тяжіння по внутрішній поверхні горизонтальної труби радіусу R_2.

22. Рівняння Ейлера для твердого тіла

Частково структура рівнянь (21.5), (21.7) спрощується, якщо ввести рухому систему відліку, початок координат якої співпадає з центром мас твердого тіла, або систему відліку, у якій тверде тіло має нерухому точку. У таких системах відліку момент імпульсу твердого тіла $\vec{M}$ пов'язаний тільки з кутовою швидкістю тіла $\vec{\Omega}$:

$$\vec{M} = \sum_{a=1}^{N} m_a [\vec{r}_a, \vec{V}_a] = \sum_{a=1}^{N} m_a [\vec{r}_a, [\vec{\Omega}, \vec{r}_a] = \sum_{a=1}^{N} m_a \left(\vec{\Omega} r_a^2 - \vec{r}_a \left(\vec{r}_a \vec{\Omega}\right)\right). \quad (22.1)$$

У тензорних позначеннях цей вираз має вигляд:

$$M_i = \sum_{a=1}^{N} m_a \left(\Omega_i r_a^2 - x_{ai} x_{ak} \Omega_k\right). \quad (22.2)$$

З урахуванням властивостей символу Кронекера (19.6):

$$\Omega_i = \delta_{ik} \Omega_k, \quad (22.3)$$

кутову швидкість Ω_k у формулі (22.2) можна винести за знак суми і скористатися співвідношенням (20.2) для тензора моментів інерції I_{ik}, тобто

$$M_i = I_{ik} \Omega_k. \quad (22.4)$$

Компоненти моменту імпульсу твердого тіла $\vec{M}$ у такій системі відліку лінійно пов'язані з компонентами кутової швидкості $\vec{\Omega}$, але самі ці вектори можуть бути направлені відносно один одного як завгодно. Тільки у випадку, коли рухома система відліку, що пов'язана з центром мас твердого тіла, є системою головних моментів інерції, кожна з компонент моменту імпульсу пропорційна лише відповідній компоненті кутової швидкості:

$$M_1 = I_1 \Omega_1, \quad M_2 = I_2 \Omega_2, \quad M_3 = I_3 \Omega_3, \quad (22.5)$$

і тільки для кульової дзиги (20.11) або жорсткого ротатора (20.13) вектори $\vec{M}$ та $\vec{\Omega}$ колінеарні.

Як було показано у п.20, серед систем відліку, жорстко пов'язаних з твердим тілом, тензор моментів інерції твердого тіла має найпростіший вигляд у системі головних вісей. Тому для опису руху твердого тіла доцільно ввести рухому систему відліку, що обертається з кутовою швидкістю $\vec{\Omega}$. У такій системі відліку приріст будь-якого вектора $\vec{b}$ за рахунок повороту системи відліку на кут $\delta\vec{\varphi}$ навколо довільної вісі можна записати у вигляді

$$\delta\vec{b} = [\delta\vec{\varphi}, \vec{b}] \tag{22.6}$$

аналогічно приросту радіус-вектора $\vec{r}_a$ ($\delta\vec{r}_a = [\delta\vec{\varphi}, \vec{r}_a]$) або швидкості $\vec{v}_a$ ($\delta\vec{v}_a = [\delta\vec{\varphi}, \vec{v}_a]$) будь-якої частинки з номером a (див. (4.10)). Похідна за часом $\dfrac{d\vec{b}}{dt}$ при переході до такої системи відліку складатиметься з внеску похідної $\dfrac{d'\vec{b}}{dt}$, що відповідає за зміну вектора $\vec{b}$ у рухомій системі відліку, та внеску $[\vec{\Omega}, \vec{b}]$, зумовленому обертанням системи відліку з кутовою швидкістю $\vec{\Omega} = \dot{\vec{\varphi}}$:

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{d'\vec{b}}{dt} + [\vec{\Omega}, \vec{b}]. \tag{22.7}$$

Рівняння руху (21.5), (21.7) після переходу у рухому систему відліку мають вигляд:

$$\frac{d'\vec{P}}{dt} + [\vec{\Omega}, \vec{P}] = \vec{F}', \tag{22.8}$$

$$\frac{d'\vec{M}}{dt} + [\vec{\Omega}, \vec{M}] = \vec{K}', \tag{22.9}$$

де вектори $\vec{F}'$ і $\vec{K}'$ визначені відносно рухомої системи відліку.

Оскільки повний імпульс твердого тіла $\vec{P}$ пов'язаний зі швидкістю поступального руху $\vec{V}$ співвідношенням

$$\vec{P} = m\vec{V}, \tag{22.10}$$

де m – повна маса тіла, у декартових координатах x_1, x_2, x_3 рухомої системи відліку рівняння (22.8) мають вигляд:

$$m\frac{d'V_1}{dt} + \Omega_2 V_3 - \Omega_3 V_2 = F_1',$$
$$m\frac{d'V_2}{dt} + \Omega_3 V_1 - \Omega_1 V_3 = F_2', \qquad (22.11)$$
$$m\frac{d'V_3}{dt} + \Omega_1 V_2 - \Omega_2 V_1 = F_3'.$$

Якщо рухома система відліку є системою головних моментів інерції (де виконуються співвідношення (22.5)), рівняння (22.9) у декартових змінних набувають вигляду:

$$I_1\frac{d'\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 = K_1',$$
$$I_2\frac{d'\Omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\Omega_1\Omega_3 = K_2', \qquad (22.12)$$
$$I_3\frac{d'\Omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 = K_3'.$$

Ці рівняння називаються ***рівняннями Ейлера***. Підкреслимо, що декартові компоненти усіх векторів у рівняннях (22.11), (22.12) визначені відносно вісей x_1, x_2, x_3 рухомої системи відліку.

Рівняння (22.12) істотно спрощуються для кульової дзиги (20.11) та жорсткого ротатора (20.13):

$$I\frac{d'\vec{\Omega}}{dt} = \vec{K}' \qquad (22.13)$$

(для жорсткого ротатора з віссю x_3 вектори $\vec{\Omega}$ і $\vec{K}'$ визначені у площині, перпендикулярній вісі x_3).

Система рівнянь (22.11)-(22.12) є замкненою системою шести рівнянь для шести невідомих функцій – компонент векторів $\vec{V}$ та $\vec{\Omega}$. Якщо цю систему вдасться розв'язати, отримаємо ці компоненти як певні функції часу t. Щоб знайти траєкторію руху твердого тіла у нерухомій системі відліку, достатньо виразити компоненти векторів $\vec{V}$ та $\vec{\Omega}$ через первинні координати $\vec{r}, \vec{\varphi}$ та відповідні швидкості $\dot{\vec{r}}, \dot{\vec{\varphi}}$. Підставивши у ці співвідношення $\vec{V} = \vec{V}(t)$ та $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(t)$, будемо мати шість диференціальних рівнянь першого порядку для знаходження траєкторії руху твердого тіла $r = r(t),\ \vec{\varphi} = \vec{\varphi}(t)$ у нерухомій системі відліку.

Для твердого тіла з однією нерухомою точкою треба шукати розв'язки системи рівнянь (22.12). Ця система може бути приведена до квадратур при довільних значеннях інтегралів руху у таких випадках:

– точка опори тіла знаходиться у центрі мас і тому $K_1' = K_2' = K_3' = 0$; головні моменти інерції твердого тіла у цьому випадку можуть бути довільними (асиметрична дзига (20.14));

– точка опори тіла не співпадає з центром мас та лежить на вісі симетрії (напр., вісь x_3), відносно якої два головні моменти інерції співпадають (симетрична дзига (20.12)):

$$I_1 = I_2 \neq I_3;$$

– центр мас лежить у площині, яка проходить через точку опори перпендикулярно вісі симетрії; між головними моментами інерції виконується співвідношення

$$I_1 = I_2 = 2I_3 \tag{22.14}$$

(дзига С.Ковалевської).

Задача 22.1. Знайти траєкторію руху асиметричної дзиги з нерухомим центром мас.

Задача 22.2. Знайти траєкторію руху симетричної дзиги у полі сил тяжіння (сил ваги), коли її точка опори не співпадає з центром мас та лежить на вісі симетрії. Зокрема проаналізувати такі випадки: а) вільна дзига (прискорення сили ваги дорівнює нулю); б) спляча дзига (сила тяжіння діє вздовж вісі симетрії, центр мас дзиги знаходиться вище точки опори); в) швидка дзига (кінетична енергія дзиги значно більше потенціальної).

Задача 22.3. Розглянути рух дзиги С.Ковалевської.

23. Кути Ейлера

Кути обертання твердого тіла навколо якоїсь точки простору, жорстко пов'язаної з тілом, можна вибирати як завгодно. Треба тільки щоб таких кутів було три, оскільки обертання твердого тіла відбуваються у тривимірному просторі. З точки зору розв'язання рівнянь руху твердого тіла інколи зручно використовувати ***кути Ейлера*** ϑ, φ, ψ .

Побудуємо дві системи координат з початком у точці O – нерухомій точці твердого тіла. Одна з цих систем координат з вісями x, y, z – нерухома, а друга з вісями x_1, x_2, x_3 обертається навколо точки O (Рис.14) так само, як тверде тіло. Площина, у якій лежать вісі x_1, x_2 (площина x_1x_2), перетинається з площиною xy нерухомої системи координат вздовж лінії ON, яка називається ***лінією вузлів***. Положення рухомої системи координат відносно нерухомої повністю описується такими кутами: ϑ – це кут між вісями z та x_3; φ – кут між віссю x та лінією вузлів ON у площині xy; ψ – кут між лінією вузлів ON та віссю x_1 у площині x_1x_2. Для

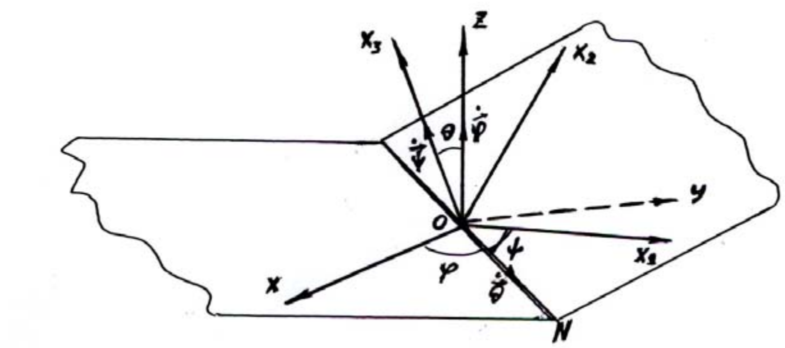

Рис. 14. Кути Ейлера ϑ, φ, ψ

та відповідні кутові швидкості $\dot{\vec{\vartheta}}, \dot{\vec{\varphi}}, \dot{\vec{\psi}}$

того, щоб будь-який реальний поворот твердого тіла однозначно визначався кутами ϑ, φ, ψ, вони повинні змінюватися у таких межах:

$$0 \le \psi \le 2\pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \vartheta \le \pi. \tag{23.1}$$

Якщо вісь x_3 співпадає з віссю власного обертання дзиги, зміна кута ψ відповідає її власному обертанню, зміна кута φ відповідає повороту вертикальної площини, що проходить через вісі z та x_3 (прецесія дзиги); зміна кута ϑ - нутації дзиги. Відповідно, кут ψ називають ***кутом власного обертання***, φ – ***кутом прецесії***, ϑ – ***кутом нутації***. Рух дзиги, при якому кут ϑ не змінюється, називається ***регулярною прецесією***. Якщо кут ϑ змінюється, вісь дзиги, як правило, здійснює малі коливання навколо якогось положення рівноваги. Це і є ***нутація дзиги***.

Швидкості зміни цих кутів є вектори, котрі перпендикулярні площинам, у яких змінюється кут.

Відповідно, вектор $\dot{\vec{\psi}}$ направлений вздовж вісі x_3 (модуль цього вектора дорівнює $\dot{\psi}$), вектор $\dot{\vec{\varphi}}$ направлений вздовж вісі z, а вектор $\dot{\vec{\vartheta}}$ – вздовж лінії вузлів ON. Оскільки кути $\dot{\vec{\vartheta}}, \dot{\vec{\varphi}}, \dot{\vec{\psi}}$ повністю описують будь-який поворот твердого тіла у просторі, для повної кутової швидкості виконується співвідношення:

$$\vec{\Omega} = \dot{\vec{\vartheta}} + \dot{\vec{\varphi}} + \dot{\vec{\psi}}\,. \tag{23.2}$$

Вектори $\dot{\vec{\vartheta}}, \dot{\vec{\varphi}}, \dot{\vec{\psi}}$ мають такі проекції на вісі x_1, x_2, x_3 рухомої системи відліку:

$$\left(\dot{\vec{\psi}}\right)_1 = \left(\dot{\vec{\psi}}\right)_2 = 0\,, \quad \left(\dot{\vec{\psi}}\right)_3 = \dot{\psi}\,, \tag{23.3}$$

$$\left(\dot{\vec{\varphi}}\right)_1 = \dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi\,, \quad \left(\dot{\vec{\varphi}}\right)_2 = \dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi\,, \quad \left(\dot{\vec{\varphi}}\right)_3 = \dot{\varphi}\cos\vartheta\,, \tag{23.4}$$

$$\left(\dot{\vec{\vartheta}}\right)_1 = \dot{\vartheta}\cos\psi\,, \quad \left(\dot{\vec{\vartheta}}\right)_2 = -\dot{\vartheta}\sin\psi\,, \quad \left(\dot{\vec{\vartheta}}\right)_3 = 0\,. \tag{23.5}$$

Підставляючи ці співвідношення у (23.2), знаходимо:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi + \dot{\vartheta}\cos\psi\,, \\ \Omega_2 &= \dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi - \dot{\vartheta}\sin\psi\,, \\ \Omega_3 &= \dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}\,. \end{aligned} \tag{23.6}$$

Якщо рухома система відліку є системою головних моментів інерції, кінетична енергія обертального руху асиметричної дзиги у кутах Ейлера матиме вигляд:

$$\begin{aligned} T_{оберт} &= \frac{I_1}{2}\left(\dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi + \dot{\vartheta}\cos\psi\right)^2 + \\ &+ \frac{I_2}{2}\left(\dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi - \dot{\vartheta}\sin\psi\right)^2 + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}\right)^2\,. \end{aligned} \tag{23.7}$$

24. Рух симетричної дзиги

Як приклад руху твердого тіла розглянемо рух вільної симетричної дзиги, для якої $I_1 = I_2 \neq I_3$ – див. (20.12). Оскільки вільна симетрична дзига – це замкнена система, для неї виконуються закони збереження енергії E, імпульсу $\vec{P}$ та моменту імпульсу $\vec{M}$.

Закон збереження енергії $E = const$ означає, що у процесі руху залишається незмінною повна кінетична енергія дзиги.

Якщо розглядати рух дзиги як поступальний рух її центру мас та обертальний рух навколо центру мас, кінетична енергія дзиги матиме внески (19.10):

$$T = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{I_1}{2}\left(\Omega_1^2 + \Omega_2^2\right) + \frac{I_3}{2}\Omega_3^2, \qquad (24.1)$$

де $\vec{V}_c$ – поступальна швидкість центру мас дзиги, головні моменти I_1, I_3 визначені відносно центру мас. Із закону збереження імпульсу $\vec{P} = const$ випливає, що центр мас дзиги рухається з постійною швидкістю $\vec{V}_c = const$. Якщо центр мас дзиги покоїться, з закону збереження моменту $\vec{M} = const$ знаходимо декілька висновків відносно кутової швидкості $\vec{\Omega}$.

Нехай вісь симетрії дзиги x_3 знаходиться під кутом ϑ до вектора $\vec{M}$. Оскільки вісі x_1 та x_2 у площині, перпендикулярній x_3, можуть бути направлені як завгодно, розмістимо вісь x_1 у площині, де знаходяться вектор $\vec{M}$ та вісь x_3. Тоді вісь x_2 буде перпендикулярною цій площині. Проекції моменту $\vec{M}$ на ці координатні вісі мають такі значення (Рис.15):

$$M_1 = M\sin\vartheta, \quad M_2 = 0, \quad M_3 = M\cos\vartheta. \qquad (24.2)$$

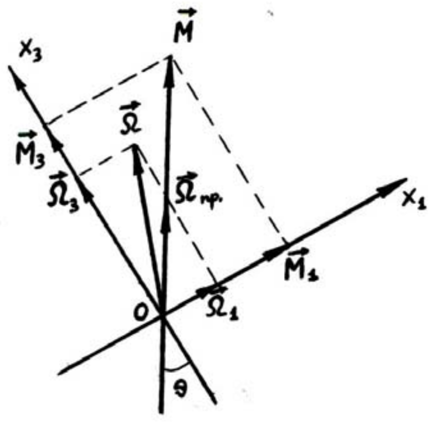

Рис. 15. Проекції векторів $\vec{\Omega}$ та $\vec{M}$ на вісі системи відліку, у якій точка O – центр мас, а вісь x_3 – вісь симетрії симетричної дзиги

Вектор кутової швидкості $\vec{\Omega}$ симетричної дзиги не паралельний вектору $\vec{M}$. Його компоненти:

$$\Omega_1 = \frac{M}{I_1}\sin\vartheta, \quad \Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = \frac{M}{I_3}\cos\vartheta. \tag{24.3}$$

У процесі обертання дзиги навколо центру мас співвідношення (24.2), (24.3) не змінюються. Це позначає, що лінійна швидкість будь-якої точки дзиги $\vec{v} = [\vec{\Omega}, \vec{r}]$ перпендикулярна вектору $\vec{M}$, тобто вісь дзиги обертається навколо вектора $\vec{M}$ з кутовою швидкістю $\vec{\Omega}_{пр}$, описуючи круговий конус. Такий рух, як було сказано вище, називається регулярною прецесією:

$$\Omega_{пр} = \frac{M}{I_1}. \tag{24.4}$$

З (23.7) випливає, що функція Лагранжа обертального руху вільної симетричної дзиґи у кутах Ейлера має вигляд:

$$L = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}\right)^2. \tag{24.5}$$

Оскільки кути ψ та φ – циклічні змінні, відповідні узагальнені імпульси зберігаються:

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = const \ , \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = const \ . \tag{24.6}$$

Таким чином, вільна симетрична дзиґа у кутах Ейлера описується рівняннями:

$$I_1\ddot{\vartheta} = \left(I_1\dot{\varphi}^2\cos\vartheta - p_\psi\right)\dot{\varphi}\sin\vartheta, \tag{24.7}$$

$$p_\psi = I_3\left(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}\right), \quad p_\psi = const, \tag{24.8}$$

$$p_\varphi = I_1\dot{\varphi}\sin^2\vartheta + p_\psi\cos\vartheta \ , \quad p_\varphi = const. \tag{24.9}$$

Якщо напрям вісі z декартової системи координат (див. Рис.14) співпадає з напрямом моменту імпульсу $\vec{M}$ дзиги, узагальнені імпульси p_φ та p_ψ дорівнюють:

$$p_\varphi = M, \quad p_\psi = M\cos\vartheta. \tag{24.10}$$

Тоді з (24.8), (24.9) випливає

$$I_1\dot{\varphi} = M. \tag{24.11}$$

Підстановка (24.10), (24.11) у (24.7) надає:

$$I_1\ddot{\vartheta} = 0, \tag{24.12}$$

тобто узагальнений імпульс p_ϑ також є інтегралом руху:

$$p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = I_1 \dot{\vartheta} = const. \tag{24.13}$$

Оскільки p_ϑ є проекцією вектора $\vec{M}$ на вісь вузлів ON (див. Рис.14), яка перпендикулярна $\vec{M}$,

$$p_\vartheta = 0, \tag{24.14}$$

тобто кут ϑ у процесі обертання дзиги залишається незмінним:

$$\vartheta = const \tag{24.15}$$

Кутова швидкість $\vec{\Omega}$ вільної симетричної дзиги визначається співвідношеннями:

$$\vec{\Omega} = \dot{\vec{\psi}} + \dot{\vec{\varphi}}, \quad \dot{\psi} = \frac{I_3 - I_1}{I_1 I_3} M \cos\vartheta, \quad \dot{\varphi} = \frac{M}{I_1}, \quad \vartheta = const, \tag{24.16}$$

що співпадає з (24.3), (24.4).

Задача 24.1. Знайти функцію Лагранжа (у кутах Ейлера), інтеграли руху та дослідити характер руху симетричної дзиги с нерухомою нижньою точкою у полі сил тяжіння. Встановити, за яких умов кут ϑ дзиги змінюється за часом, як гармонічний осцилятор, та знайти відповідну частоту (частоту нутації дзиги).

25. Рух у неінерціальних системах відліку

Рух будь-яких згаданих вище механічних систем розглядався у інерціальних системах відліку, тобто у системах, пов'язаних між собою перетвореннями Галілея (2.4), (2.5):

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{V}t, \quad t = t', \quad \vec{V} = const. \tag{25.1}$$

У таких системах відліку система тіл відліку (напр., система чотирьох матеріальних точок, що не лежать у одній площині) рухається у одному напрямі з однією та тією ж швидкістю. Відстані між тілами відліку можна використати для визначення одиниць масштабу у трьох взаємно ортогональних напрямках (оскільки простір тривимірний), і величини цих масштабів у інерційних системах відліку з течією часу не змінюються[3]. Іншими словами, система тіл відліку у інерціальних системах відліку рухається як вільне тверде тіло.

Якщо система тіл відліку рухається як тверде тіло зі змінною поступальною швидкістю $\vec{V}(t)$ та змінною обертальною швидкістю $\vec{\Omega}(t)$, то при розрахунках траєкторії руху механічних систем треба враховувати так звані сили інерції, тобто додаткові внески, які з'являються поряд з внесками дійсних сил у рівняннях руху, записаних у формі рівнянь Ньютона. Такі системи відліку називаються ***неінерціальними***. Послідовно знайти повний набір сил інерції, які діють на механічні системи у тих чи інших неінерціальних системах відліку можна тільки у рамках лагранжового підходу, оскільки функція Лагранжа механічної системи – це скалярна функція, тобто функція, форма якої не змінюється при будь-яких координатних перетвореннях.

Щоб проілюструвати, які сили інерції з'являються у неінерціальних системах відліку, розглянемо рух вільної частинки у системі відліку, що рухається поступово зі швидкістю $\vec{V}(t)$, та обертається з кутовою швидкістю $\vec{\Omega}(t)$ відносно лабораторної системи. У лабораторній системі відліку K функція Лагранжа має вигляд (3.1):

$$L = \frac{mv^2}{2}. \tag{25.2}$$

Перейдемо до системи відліку K', у якій швидкість частинки $\vec{v}\,' = \dfrac{d\,\vec{r}\,'}{dt} = \dot{\vec{r}}\,'$, пов'язана зі швидкістю $\vec{v}$ у системі відліку K співвідношенням:

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}(t) + [\vec{\Omega}(t), \vec{r}\,']. \tag{25.3}$$

Підставимо цей вираз у (25.2) та розкриємо квадрат суми:

---

[3] Відмітимо, що у найзагальнішому випадку тіла відліку неінерціальної системи можуть рухатися у будь-яких напрямках з довільними швидкостями. Це призводить до того, що треба враховувати не тільки поступальні та обертальні прискорення системи відліку, але й зміну з часом відповідних масштабів. З такими неінерціальними системами відліку стикаються при дослідженні процесів у рамках загальної теорії відносності Ейнштейна. Далі ці неінерціальні системи відліку розглядати не будемо.

$$L=\frac{mv'^2}{2}+\frac{m\vec{V}(t)^2}{2}+\frac{m[\vec{\Omega}(t),\vec{r}']^2}{2}+ \\ +m\vec{v}'\vec{V}(t)+m\vec{v}'[\vec{\Omega}(t),\vec{r}']+m\vec{V}(t)[\vec{\Omega}(t),\vec{r}']. \qquad (25.4)$$

За властивістю функції Лагранжа (2.2), повна похідна за часом від будь-якої функції часу та вектора $\vec{r}'$ не дає внесків у рівняння руху, і таким доданком можна у функції Лагранжа знехтувати. У (25.4) це другий доданок:

$$\frac{m\vec{V}(t)^2}{2}=\frac{d}{dt}f_1(t), \quad f_1(t)=\frac{m}{2}\int\vec{V}(t)^2dt, \qquad (25.5)$$

а також частина суми четвертого та останнього доданків $m\vec{V}(t)(\vec{v}'+[\vec{\Omega}(t),\vec{r}'])$, котру з урахуванням повної похідної за часом від радіус-вектора $\vec{r}'$ у системі відліку K' (22.7) $\frac{d\vec{r}'}{dt}=\vec{v}'+[\vec{\Omega}(t),\vec{r}']$, можна перетворити до вигляду:

$$m\vec{V}(t)(\vec{v}'+[\vec{\Omega}(t),\vec{r}'])=m\vec{V}(t)\frac{d\vec{r}'}{dt}=\frac{d}{dt}(m\vec{V}(t)\vec{r}')-m\vec{r}'\vec{W}(t), \qquad (25.6)$$

де $\vec{W}(t)=\frac{d\vec{V}(t)}{dt}$ – поступальне прискорення системи відліку K. Таким чином функція Лагранжа вільної частинки у системі відліку K' з законом додавання швидкостей (25.3) матиме вигляд:

$$L=\frac{mv'^2}{2}+\frac{m[\vec{\Omega}(t),\vec{r}']^2}{2}-m\vec{r}'\vec{W}(t)+m\vec{v}'[\vec{\Omega}(t),\vec{r}']. \qquad (25.7)$$

Відповідне рівняння Ейлера-Лагранжа у змінних $\vec{r}'$, $\vec{v}'$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\vec{v}'}-\frac{\partial L}{\partial\vec{r}'}=0 \qquad (25.8)$$

знайдемо з урахуванням того, що в другому доданку (25.7)

$$[\vec{\Omega}(t),\vec{r}']^2=[\vec{\Omega}(t),\vec{r}'][\vec{\Omega}(t),\vec{r}']= \\ =[\vec{r}',[\vec{\Omega}(t),\vec{r}']]\cdot\vec{\Omega}(t)=\Omega(t)^2r'^2-(\vec{\Omega}(t)\vec{r}')^2,$$

а у останньому доданку (25.7) можна циклічно переставити множники $\vec{v}'[\vec{\Omega}(t),\vec{r}']=\vec{r}'[\vec{v}',\vec{\Omega}(t)]$:

$$\frac{\partial L}{\partial\vec{r}'}=m[\vec{\Omega}(t),[\vec{r}',\vec{\Omega}(t)]]-m\vec{W}(t)+m[\vec{v}',\vec{\Omega}(t)], \qquad (25.9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\vec{v}'}=m\vec{v}'+m[\vec{\Omega}(t),\vec{r}'], \qquad (25.10)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}'} = m\dot{\vec{v}}' + m[\dot{\vec{\Omega}}(t), \vec{r}'] + m[\vec{\Omega}(t), \dot{\vec{r}}']. \qquad (25.11)$$

Підставимо (25.9)-(25.11) у (25.8) та запишемо це рівняння у формі рівняння Ньютона:

$$m\dot{\vec{v}}' = m[\vec{\Omega}(t), [\vec{r}', \vec{\Omega}(t)]] - \\ - m\vec{W}(t) + 2m[\vec{v}', \vec{\Omega}(t)] + m[\vec{r}', \dot{\vec{\Omega}}(t)] \; . \qquad (25.12)$$

Усі доданки правої частини рівняння (25.12) – це сили інерції, що діють на вільну частинку у системі відліку K'. Перший доданок $m[\vec{\Omega}(t), [\vec{r}', \vec{\Omega}(t)]]$ – це ***відцентрова сила***, яка перпендикулярна вісі обертання (кутовій швидкості $\vec{\Omega}(t)$) та напрямлена від вісі. Сила інерції $\vec{W}(t)$ пропорційна масі частинки так само, як і сила ваги $m\vec{g}$ ($\vec{g}$ – прискорення сили ваги). Ця аналогія покладена у основу теорії гравітації Ейнштейна – загальної теорії відносності (принцип еквівалентності). Сила $2m[\vec{v}', \vec{\Omega}(t)]$ називається ***коріолісовою***. Ця сила залежить від швидкості частинки. Оскільки вона перпендикулярна до швидкості $\vec{v}'$, роботи над частинкою вона не виконує (ця сила може змінити лише напрям швидкості, але не її модуль). Прикладом дії сили Коріоліса є поворот площини коливань маятника Фуко. Сила $m[\vec{r}', \dot{\vec{\Omega}}(t)]$ пов'язана з обертальним прискоренням частинки та спеціальної назви не має.

На відміну від реальних сил сили інерції є фіктивні сили. Якщо у інерціальних системах відліку компенсація усіх сил, що діють на частинку, призводить до виконання першого закону Ньютона, компенсація сил інерції у неінерціальній системі відліку зовсім не означає, що у такій системі виконується цей закон.

Задача 25.1. Проаналізувати рух маятника Фуко. Довести, що на географічній широті φ площина коливань маятника Фуко повертається за добу на кут $2\pi\cos\varphi$.