МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
Одеський державний університет ім.. І. І. Мечникова
Інститут математики, економіки та механіки

МЕТОДІЧНИЙ ПОСІБНИК

до курсу

“ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ”

Для студентів факультету прикладної математики та механіки

Одеса

2000

Цій методичний посібник відповідає в основному програмі курсу “Функціональний аналіз”, який читається студентам факультету Прикладної математики та механіки.

Вивчення курсу функціонального аналізу на українській мові викликає певні труднощі внаслідок майже відсутності підручників по функціональному аналізу на українській мові.

Посібник складається з п’яти глав. Перша глава присвячена розгляду теорії міри та інтеграла Лебега. В другої главі розглянути метричні та векторіальні нормовані простори, компактні і топологічні простори. Третя глава присвячена теорії лінійних операторів та функціоналів. В четвертій главі розглядаються гільбертові простори і оператори в них. Остання глава присвячена операторним рівнянням і насамперед рівнянням з цілком неперервними операторами. Викладення матеріалу ілюструється прикладами. Також є достатня кількість завдань для самостійної роботи.

Склали: В.Є. Круглов, І. Г. Лободзинська, Ю. С. Процеров

Відповідальний редактор: Г. Я. Попов

Друкується згідно з рішенням Вченої Ради Інституту математики, економіки та механіки.

Глава I

§ 1. Елементарні множини. Міра елементарних множин.

Поняття міри довільної множини точок покликано узагальнити поняття довжини відрізка, площі плоскої фігури, об’єму тіла і т.д. Це поняття виникло у теорії функцій дійсної змінної і широко використовується у різних галузях математики.

Розглянемо систему G множин на площині (x,y) кожне з яких визначається однією з нерівностей виду

$$a \le x \le b, a < x \le b, a \le x < b, a < x < b$$

та однією з нерівностей виду

$$c \le y \le d, c < y \le d, c \le y < d, c < y < d$$

де a,b,c,d довільні числа. Множини, які належать цій системи будемо називати прямокутниками. Замкнутим прямокутником, якщо $a \le x \le b, c \le y \le d$; відкритим прямокутником, якщо $a < x < b, c < y < d$; відрізком, якщо $a = b$ чи $c = d$; точкою, якщо $a = b$ та $c = d$.

Для кожного прямокутника визначимо його міру відповідно з знайомим з геометрії поняттям площі. А саме:

а) міра пустої множини дорівнює нулю;

б) міра непустого прямокутника (замкнутого, відкритого, напіввідкритого) дорівнює $(b-a)(c-d)$.

Таким чином, кожному прямокутнику P з G відповідає число $m(P)$ - його міра, яка задовольняє умовам:

1) $m(P) \ge 0$

2) міра $m(P)$ адитивна, тобто коли P є сума скінченого числа множин без спільних точок $P = \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k, P_j \cap P_i = \varnothing, j \ne i$, то $m(P) = \sum\limits_{k=1}^{n} m(P_k)$.

Означення 1. Плоску множину називатимемо елементарною, якщо Її можливо подати у вигляді об’єднання скінченого числа попарно неперекрівних прямокутників.

Теорема 1. Об’єднання, переріз, різниця та симетрична різниця двох елементарних множин є елементарна множина.

Доведення. Зрозуміло, що переріз двох прямокутників є знову прямокутник. Таким чином, якщо $A = \bigcup\limits_{k} P_k$ та $B = \bigcup\limits_{j} Q_j$ дві елементарні множини, то їх переріз $A \cap B = \bigcup\limits_{k,j} (P_k \cap P_j)$ є елементарною множиною.

Оскільки різниця двох прямокутників є елементарна множина, то віднімаючи з прямокутника якусь елементарну множину одержимо знов елементарну множину. Нехай A і B елементарні множини. Завжди можна знайти прямокутник P, який містить множини A і B . Тоді множина

$$A \cup B = P \setminus [(P \setminus A) \cap (P \setminus B)]$$

буде елементарною. Звідси та з рівностей

$A \setminus B = A \cap (P \setminus B)$ і $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ випливає, що різниця та симетрична різниця двох елементарних множин є елементарна множина.

Зазначимо міру $m'(A)$ елементарної множини таким чином: якщо $A = \bigsqcup_k P_k$, де P_k попарно неперекрівні прямокутники, то $m'(A) = \sum_k m(P_k)$.

Доведемо, що міра $m'(A)$ не залежить від способу розкладу A на суму прямокутників. Нехай $A = \bigcup_k P_k$ і $A = \bigcup_j Q_j$, де P_k та Q_j прямокутники, $P_i \cap P_k = \varnothing, Q_i \cap Q_k = \varnothing, i \neq k.$

Тому що переріз $P_k \cap Q_j$ двох прямокутників є прямокутник, то

$$m'(a) = \sum_k m(P_k) = \sum_{k,j} m(P_k \cap Q_j) = \sum_j m(Q_j)$$

Зокрема, для прямокутників міра m' збігається з мірою m: $m'(P) = m(p)$.

Теорема 2. Якщо A елементарна множина і $\{A_n\}$ скінчена чи зчислена система елементарних множин така, що $A \subset \bigcup_n A_n$ то $m'(A) \leq \sum_n m'(A_n)$.

Доведення. Для будь якого $\varepsilon > 0$ і даної множини A можливо знайти таку замкнуту елементарну множину F, що $F \subset A$ та $m'(F) \geq m'(A) - \varepsilon/2$. Для цього достатньо кожний з k прямокутників P_i, з яких складається множина A, замінити на замкнутий прямокутник F_i, який розташовується усередині A та має площу $m(F_i) > m(P_i) - \varepsilon/2k$.

Далі для кожної множини A_n можливо знайти відкриту множину $G_n \supset A_n$, яка задовольняє умові $m'(G_n) \leq m'(A_n) + \varepsilon/2^{n+1}$.

Зрозуміло, що $F \subset \bigcup_n G_n$.

За лемою Гейне-Бореля з $\{G_n\}$ можливо вибрати скінчену систему множин $G_{n,1}, G_{n,2}, \ldots, G_{n,s}$, яка покриватиме множину F і $m'(F) \leq \sum_{i=1}^{s} m'(G_{n,i})$.

Звідсіля

$$m'(A) \leq m'(F) + \varepsilon/2 \leq \sum_{i=1}^{s} m'(G_{n,i}) + \varepsilon/2 \leq \sum_n m'(A_n) + \varepsilon \sum_n 1/2^{n+1} + \varepsilon/2 = \sum_n m'(A_n) + \varepsilon$$

тобто $m'(A) \leq \sum_n m'(A_n)$.

Нехай множина A є сумою зчисленого числа неперекрівних елементарних множин A_n: $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, тоді $m'(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n)$.

Дійсно, внаслідок адитивності для будь якого N маємо

$$m'(A) \geq m'\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{n} m'(A_n).$$

Якщо $N \to \infty$, то $m'(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n)$.

З цей нерівності та з теореми 2 слідує, що $m'(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n)$.

Ця властивість носить назву σ - адитивності або зчисленої адитивності.

§ 2. Міра Лебега плоских множин.

Нехай множина A належить квадрату $E = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

Означення 2. Зовнішню мірою Лебега множини A називається число

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_k P_k} \sum_k m(P_k),$$

де точна нижня межа береться по усіх можливих скінчених або зчислених систем прямокутників, які покривають множину A.

Якщо A елементарна множина, то $\mu^*(A) = m'(A)$.

Легко бачити, що якщо $A \subset \bigcup_n A_n$, то $\mu^*(A) \le \sum_n \mu^*(A_n)$.

Дійсно, для кожного A_n є така система прямокутників $\{P_{nk}\}$, що $A_n \subset \bigcup_k P_{nk}$ та $\sum_k m(P_{nk}) \le \mu^*(A_n) + \varepsilon/2^n$.

Отже $A \subset \bigcup_n \bigcup_k P_{nk}$ і $\mu^*(A) \le \sum_n \sum_k m(P_{nk}) \le \sum_n \mu^*(A_n)$.

Зокрема, якщо $A \subset B$, то $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$.

Означення 3. Множина A називається вимірною за Лебегом, якщо $\forall \varepsilon > 0$ існує така елементарна множина B , що $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$, де $A \Delta B = A \cup B \setminus A \cap B$ симетрична різниця цих множин.

Функцію μ^*, яка розглядається тільки на лебегових множинах, називають лебеговою мірою та позначають μ .

Зауваження. Введене означення вимірності множини має достатньо наочний зміст: множина вимірна, якщо Ії можливо скільки завгодно точно наблизити елементарними множинами.

Клас вимірних множин будемо означати m_E .

Сукупність m_E вимірних множин замкнута відносно операцій здобуття скінчених або зчислених сум і перерізів, тобто є σ-алгеброю. Функція μ σ-адитивна на m_E , тобто $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, де $A_i \cap A_j = \varnothing, i \ne j$.

Якщо $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ послідовність вкладених одна в одну вимірних множин і $A = \bigcap_n A_n$, то $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Якщо $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ і $A = \bigcup_n A_n$, то $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Вище були розглянуті тільки ті множини, які належали одиничному квадратові $E = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$. Звільнимося від цього обмеження. Уявимо усю площину як суму напіввідкритих квадратів
$E_{nm} = \{(x, y): n < x \le n+1, m < y \le m+1\}$, де n, m цілі.

Будемо вважати плоску множину A вимірною, якщо Ії переріз $A_{nm} = A \cap E_{nm}$ з

кожним квадратом є вимірна множина. При цьому припустимо за означенням
.
$$\mu(A)=\sum_{n,m}\mu(A_{nm}).$$
Якщо цей ряд розбігається, то говорять, що $\mu(A)=+\infty$.

Ми побудували міру Лебега для плоских множин. Аналогічно будується лебегова міра на прямій, в трьохвимірному просторі і т.д. Зокрема на прямій розглядаються відрізки (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$ та $[a,b]$ з мірою $m=b-a$.
Тоді елементарною множиною на прямій буде об'єднання скінченого числа попарно неперекрівних відрізків і $m'(A)=\sum_{i=1}^{n}m\langle a_i,b_i\rangle$.

Завдання.
1. Довести, що в n- вимірному просторі R_n всяка скінчена або зчислена множина точок вимірна та Її міра дорівнює нулю.
2. Знайти міри Лебега множини усіх раціональних точок $[a,b]$ та множини усіх ірраціональних точок цього відрізку.
3. Довести, що всяка відкрита множина точок та всяка замкнута множина точок вимірні за Лебегом.

§ 3. Вимірні функції.

Розглянемо функцію дійсної змінної $f(x)$ з областю визначення X.
Означення 4. Функція $f(x)$називається вимірною, коли для будь-якого дійсного числа c множина $\{x:f(x)<c\}$ вимірна за Лебегом.

Розглянемо деякі властивості вимірних функцій.
Теорема 3. Коли функції $f(x)$ і $g(x)$ вимірні, то будуть вимірними також їх сума, різниця, добуток і частка при умові, що знаменник не звертається до нуля.
Доведення. 1) Якщо функція $f(x)$ вимірна, то очевидно функції $kf(x)$ і $f(x)+a$ вимірні для будь-яких сталих k і a.
2) Якщо $f(x)$ та $g(x)$ вимірні функції, то множина $\{x: f(x)>g(x)\}$ вимірна.
Дійсно, $\{x:f(x)>g(x)\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\{x:f(x)>r_k\}\cap\{x:g(x)<r_k\}\right)$,
де сума береться по усім раціональним числам, занумерованим у будь-якому порядку. Звідкіля маємо, що множина $\{x: f(x)>a-g(x)\}=\{x: f(x)+g(x)>a\}$ вимірна, тобто сума вимірних функцій вимірна.
3) З 1) та 2) слідує вимірність різниці $f(x)-g(x)$.
4) Добуток двох вимірних функцій $f(x)g(x)=\frac{1}{4}\left[(f+g)^2-(f-g)^2\right]$
буде вимірною функцією, якщо ми доведемо, що квадрат вимірної функції є вимірна функція. Останнє слідує з того, що
$\{x: f^2(x)<c\}=\{x: f(x)<\sqrt{c}\}$, якщо $c\geq 0$ та
$\{x:f^2(x)<c\}=\varnothing$, якщо $c<0$.

5) Якщо $f(x)$ вимірна та $f(x)\neq 0$, то $\frac{1}{f(x)}$ буде вимірною, оскільки
$\left\{x:\frac{1}{f(x)}<c\right\}=\left\{x: f(x)>\frac{1}{c}\right\}\cup\{x: f(x)<0\}$ при $c>0$

$$\left\{x:\frac{1}{f(x)}<c\right\}=\left\{x:\frac{1}{c}<x<0\right\} \text{ при } c<0$$

$$\left\{x:\frac{1}{f(x)}<c\right\}=\{x:f(x)<0\} \quad \text{при } c=0.$$

Тоді з 4) та 5) слідує вимірність частки $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Теорема 4. Границя збігаючий при кожному $x\in X$ послідовності вимірних функцій є вимірна функція.

Доведення. Нехай $f_n(x)\to f(x)$, тоді

$$\{x:f(x)<c\}=\bigcap_{k}\bigcup_{n}\bigcap_{m>n}\left\{x:f_m(x)<c-\frac{1}{k}\right\}. \tag{1}$$

Дійсно, якщо $f(x)<c$, то існує таке k що $f(x)<c-\dfrac{2}{k}$. Далі для цього k можливо знайти таке велике n, що при $m\geq n$ виконується нерівність $f_m(x)<c-\dfrac{1}{k}$, а це означає, що x належить до правої частини (1).

Навпаки, якщо x належить правий частині рівності (1), то існує таке k ,що для усіх достатньо великих m $f_m(x)<c-\dfrac{1}{k}$, але тоді $f(x)<c$, тобто x входить в ліву частину (1).

Якщо функції $f_m(x)$ вимірні, то множини $\left\{x:f_m(x)<c-\dfrac{1}{k}\right\}$ вимірні. Через те, що сукупність вимірних множин є σ-алгеброю, то з (1) слідує, що множина $\{x:f(x)<c\}$ вимірна.

Зауваження. Як видно, поняття вимірності функцій не пов'язано з існуванням в розглядуємому просторі будь якої міри. Повинно лише бути виділена система множин, визначених вимірними. Поняття вимірності використовується для функцій, означених на певному просторі X з фіксованою мірою, заданою на будь-який σ- алгебрі його підмножин.

Означення 5. Дві функції $f(x)$ та $g(x)$, означені на одній вимірній множині M називаються еквівалентними $(f\sim g)$, якщо $\mu\{x:f(x)\neq g(x)\}$.

Кажуть, що деяка властивість має місце майже всюди на деякій вимірний за Лебегом множині M, коли вона має місце в усіх точках множини M, за винятком, може, точок деякої множини міри нуль.

Звідсіля дві функції еквівалентні, якщо вони збігаються майже всюди.

Теорема 5. Якщо функція $f(x)$означена на деякій вимірній множині Mта еквівалентна на цій множині деякій вимірній функції $g(x)$, то $f(x)$ вимірна на множині M.

Доведення. Множини $\{x:f(x)<a\}$ та $\{x:g(x)<a\}$ можуть різниться друг від друга тільки множиною міри нуль. Звідсіля, якщо одна з них вимірна, то й друга вимірна.

Означення 6. Послідовність $\{f_n(x)\}$ функцій, означених на деякому простору X з заданою там мірою, зветься збігливою майже всюди к функції $f(x)$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для майже усіх x.

Наприклад, послідовність функцій $f_n(x) = (-x)^n$, означених на $[0,1]$, при $n \to \infty$ збігається к функції $f(x) = 0$ майже всюди (зокрема точки $x = 1$).

Теорема 6. Якщо послідовність вимірних функцій $\{f_n(x)\}$ збігається к $f(x)$ майже всюди на X, то функція $f(x)$ вимірна.

Доведення. Нехай M множина, на якій $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Згідно з умовою $\mu(X \setminus M) = 0$. Функція $f(x)$ вимірна на X по теоремі 4. Через те що на множині міри нуль будь яка функція є вимірною, то $f(x)$ вимірна на $X \setminus M$, отже вона вимірна на X.

Теорема 7 (Єгорова). Нехай M є множина з скінченою мірою та послідовність вимірних функцій $\{f_n(x)\}$ збігається на M майже всюди к $f(x)$. Тоді для будь-якого $\delta > 0$ знайдеться така вимірна множина $M_\delta \subset M$, що

1) $\mu(M_\delta) > \mu(M) - \delta$

2) на множині M_δ послідовність $\{f_n(x)\}$ збігається к $f(x)$ рівномірно.

Означення 7. Послідовність вимірних функцій $\{f_n(x)\}$ збігається згідно з мірою к функції $f(x)$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Теорема 8. Якщо послідовність вимірних функцій $\{f_n(x)\}$ збігається майже всюди к деякій функції $f(x)$, то вона збігається к $f(x)$ згідно з мірою.

Доведення. З теореми 6 випливає, що $f(x)$ вимірна. Нехай A є та множина міри нуль, на якій $f_n(x)$ не збігаються к $f(x)$. Нехай далі

$$M_k(\varepsilon) = \{x : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\};\ R_n(\varepsilon) = \bigcup_{k=n}^{\infty} M_k(\varepsilon);\ M = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\varepsilon)$$

Легко бачити, що усі ці множини вимірні. Через те що $R_1(\varepsilon) \supset R_2(\varepsilon) \supset \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} \mu(R_n) = \mu(M)$$

Доведемо, що $M \subset A$. Справді, якщо $x_0 \notin A$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$,

то для заданого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке n, що $|f_k(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon, k \geq n.$

Звідсіля $x_0 \notin R_n(\varepsilon)$, тем паче $x_0 \notin M.$

Через те що $\mu(A) = 0$, то $\mu(M) = 0$, отже $\mu(R_n(\varepsilon)) \to 0, n \to \infty$

і теорема доведена.

Зауважимо, що з збігливості послідовності функцій згідно з мірою не слідує Її збігливість майже всюди. Наприклад, для кожного натурального k на напівсегменті $(0,1]$ визначимо функції $f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \ldots, f_k^{(k)}$ таким чином

$$f_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, & \dfrac{i-1}{k} < x \leq \dfrac{i}{k} \\ 0, & x \notin \left(\dfrac{i-1}{k}, \dfrac{i}{k}\right] \end{cases}$$

Розглянемо послідовність $f_1^{(1)}, f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, f_1^{(3)}, f_2^{(3)}, f_3^{(3)}, \ldots, f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \ldots, f_k^{(k)}, \ldots$
Вона збігається к нулю згідно з мірою $\mu\left\{x : \left|f_i^{(k)}(x) - 0\right| \geq \varepsilon\right\} = 1/k \to 0, k \to \infty,$
але не збігається в жодній точці.

Однак має місце така

Теорема 9. Нехай послідовність вимірних функцій $\{f_n(x)\}$ збігається згідно з мірою к функції $f(x)$. Тоді з неї можна виділити підпослідовність $\{f_{n_k}(x)\}$, яка збігається к $f(x)$ майже всюди.

Завдання.

1. Довести, що коли при будь-якому c вимірна множина $\{x : f(x) < c\}$,то будуть вимірні множини $\{x : f(x) \leq c\}, \{x : f(x) > c\}, \{x : f(x) \geq c\}$.
2. Довести, що функція $f(x)$, неперервна на замкненій обмеженій множині вимірна на цей множині.
3. Довести, що функція Діріхле $D(x)$, означена на відрізку $[a, b]$, вимірна.

§ 4. Інтеграл Лебега.

Поняття інтеграла Рімана, яке було розглянуто в курсі математичного аналізу, має сенс лише для функцій неперервних або які мають “не занадто багато” точок розриву. Для вимірних функцій, які можуть бути розривні всюди, де вони визначені, інтеграл Рімана не придатен. Разом з тім для цих функцій є поняття інтеграла, яке було розроблено Лебегом. Головна ідея побудови інтеграла Лебега складається в тому, що тут, на різницю від інтеграла Рімана точки x групуються не за ознакою їх близькості на вісі x, а за ознакою близькості значень функції в цих точках.

Введемо спочатку означення інтеграла Лебега для так званих простих функцій, а потім узагальнюємо його на більш широкій клас функцій.

Означення 8. Функція $f(x)$, визначена на деякому простору X з заданою там мірою, зветься простою, якщо вона вимірна і має не більш ніж зчислену кількість значень.

Теорема 10. Функція $f(x)$, яка приймає не більш ніж зчислену кількість різних значень $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ є вимірною тоді і тільки тоді, коли усі множини $A_n = \{x : f(x) = y_n\}$ вимірни.

Доведення. Нехай $y_1 \leq y_2 \leq \ldots$. Необхідність та достатність випливає з наступних міркувань:
якщо $c \leq y_1$, то множина $\{x : f(x) < c\} = \varnothing$ вимірна;
якщо $y_1 < c \leq y_2$, то $\{x : f(x) < c\} = \{x : f(x) = y_1\} = A_1$;
якщо $y_2 < c \leq y_3$, то $\{x : f(x) < c\} = \{x : f(x) = y_1\} \cup \{x : f(x) = y_2\} = A_1 \cup A_2$
і так далі.
Отже, якщо функція $f(x)$ вимірна, то будуть вимірні і множини A_n і навпаки.

Теорема 11. Для того щоб функція $f(x)$ була вимірною необхідно і достатньо щоб вона могла бути зображена як границя рівномірно збіжної послідовності простих вимірних функцій.

Доведення. Достатність випливає з теореми 4 попереднього розділу. Доведемо необхідність. Розглянемо довільну вимірну функцію $f(x)$ та покладемо

$f_n(x) = \dfrac{m}{n}$, якщо $\dfrac{m}{n} \le f(x) < \dfrac{m+1}{n}$, де m -ціле, а n -натуральне.

Зрозуміло, що функції $f_n(x)$ є простими та при $n \to \infty$ вони рівномірно збігаються к $f(x)$, бо $\left|f(x) - f_n(x)\right| \le 1/n$.

Означимо тепер інтеграл Лебега для простих функцій.

Нехай $f(x)$ деяка проста функція, яка має значення

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots; \quad y_i \ne y_j \quad \text{при } i \ne j$$

і A деяка вимірна підмножина множини X . Розглянемо ряд

$$\sum_n y_n \mu(A_n), \quad \text{де} \quad A_n = \{x : x \in A, f(x) = y_n\} . \tag{2}$$

Означення 9. Проста функція $f(x)$ зветься інтегровною або сумовною (згідно з мірою μ) на множині A, якщо ряд (2) збігається абсолютно. Якщо $f(x)$ інтегровна, то сума ряду (2) називається інтегралом Лебега від функції $f(x)$ по множині A і позначається $\int\limits_A f(x) d\mu.$

Лема. Нехай $A = \bigcup\limits_k B_k, B_i \cap b_j = \varnothing$ при $i \ne j$ та на кожній множині B_k функція $f(x)$ приймає тільки одне значення c_k . Тоді $\int\limits_A f(x) d\mu = \sum\limits_k c_k \mu(B_k)$ (3)

при чому функція $f(x)$ інтегровна на A тоді і тільки тоді, якщо ряд (3) збігається абсолютно.

Доведення. Легко бачити, що кожна множина $A_n = \{x : x \in A, f(x) = y_n\}$ є об'єднанням тих B_k, на яких $c_k = y_n$. Тоді

$$\sum_n y_n \mu(A_n) = \sum_n y_n \sum_{c_k = y_n} \mu(B_k) = \sum_k c_k \mu(B_k)$$

Через те що міра не від'ємна

$$\sum_n |y_n| \mu(A_n) = \sum_n |y_n| \sum_{c_k = y_n} \mu(B_k) = \sum_k |c_k| \mu(B_k)$$

і ряди $\sum\limits_n y_n \mu(A_n)$ та $\sum\limits_k c_k \mu(B_k)$ абсолютно збігаються чи розбігаються одночасно.

Розглянемо деякі **властивості інтеграла Лебега від простих функцій**.

А) $\int\limits_A [f(x) + g(x)] d\mu = \int\limits_A f(x) d\mu + \int\limits_A g(x) d\mu$,

при чому з існування інтегралів в правій частині рівності випливає існування інтеграла в лівій частині.

Для доведення припустимо, що $f(x)$ приймає значення f_i на множинах $F_i \subset A$, а $g(x)$ приймає значення g_j на множинах $G_j \subset A$. Тоді

$$J_1 = \int_A f(x) d\mu = \sum_i f_i \mu(F_i) \tag{4}$$

$$J_2 = \int_A g(x) d\mu = \sum_j g_j \mu(G_j) \tag{5}$$

За лемою $J=\int_A [f(x)+g(x)]d\mu=\sum_i\sum_j (f_i+g_j)\mu(F_i \cap G_j)$ (6)

Через те що $\mu(F_i)=\sum_j \mu(F_i \cap G_j);\ \mu(G_j)=\sum_i \mu(F_i \cap G_j)$

з абсолютної збіжності рядів (4) та (5) випливає абсолютна збіжність ряду (6), при цьому $J=J_1+J_2$.

Б) Для будь-якої сталої k

$$\int_A kf(x)d\mu=k\int_A f(x)d\mu$$

при чому з існування інтегралу в правій частині рівності випливає існування інтеграла в лівій частині.

В) Обмежена на A проста функція $f(x)$ інтегровна на A, при чому якщо $|f(x)|\le M$ на A, то $\left|\int_A f(x)d\mu\right|\le M\mu(A)$.

Нехай $J=\sum_i f_i\mu(A_i)$. Тоді $|J|\le\sum_i |f_i|\mu(A_i)$ і .

$$\left|\int_A f(x)d\mu\right|\le\int_A |f(x)|d\mu\le\int_A Md\mu=M\mu(A)$$

Г) Якщо функція $\varphi(x)$ інтегровна на A і майже всюди $|f(x)|\le\varphi(x)$, то $f(x)$ також інтегровна та $\left|\int_A f(x)d\mu\right|\le\int_A \varphi(x)d\mu$.

Дійсно, якщо $f(x)$ та $\varphi(x)$ прости функції, то множину A можливо завдати як суму $A=A'\cup A''$, де $\mu(A'')=0$, а множина A' є об'єднанням скінченого або зчисленого числа множин A_n, на кожної з котрих $f(x)$ та $\varphi(x)$ сталі

$$f(x)=a_n;\ \varphi(x)=b_n;\ |a_n|\le b_n.$$

З інтегровності $\varphi(x)$ випливає

$$\sum_n |a_n|\mu(A_n)\le\sum_n b_n\mu(A_n)=\int_{A'}\varphi(x)d\mu=\int_A \varphi(x)d\mu.$$

Звідсіля $f(x)$ також інтегровна та

$$\left|\int_A f(x)d\mu\right|=\left|\int_{A'} f(x)d\mu\right|=\left|\sum_n a_n\mu(A_n)\right|\le\sum_n |a_n|\mu(A_n)=\int_{A'}|f(x)|d\mu\le\int_A \varphi(x)d\mu$$

Означення 10. Функція $f(x)$ називається інтегровною або сумовною на множині A, якщо існує послідовність простих інтегровних на A функцій $\{f_n(x)\}$, які рівномірно збігаються к $f(x)$. Границю

$$I=\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)d\mu \quad (7)$$

позначають $\int_A f(x)d\mu$ та називають інтегралом Лебега від функції $f(x)$ по множині A.

Це означення буде коректним, якщо виконуються слідуючи умови:

1. Існує границя (7) для будь-якої рівномірно збіжної послідовності $\{f_n(x)\}$ простих інтегровних на A функцій.

2. Ця границя для наданої функції $f(x)$ не залежить від вибору послідовності $\{f_n(x)\}$.

3. Для простих функцій це означення тотожне означенню 9.

Для доведення першої умови достатньо відмітити, що з властивостей А), Б) та В) інтеграла від простих функцій

$$\left|\int_A f_n(x)d\mu - \int_A f_m(x)d\mu\right| \le \mu(A)\sup_{x\in A}|f_n(x)-f_m(x)|$$

Для доведення другої умови треба розглянути дві послідовності $\{f_n(x)\}$ та $\{f_n'(x)\}$ які збігаються к $f(x)$. Через те що

$$|f_n(x)-f_n'(x)| \le |f_n(x)-f(x)| + |f_n'(x)-f(x)| \le \sup_{x\in A}|f_n(x)-f(x)| + \sup_{x\in A}|f_n'(x)-f(x)|,\ n\ge N$$

маємо

$$\left|\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)d\mu - \lim_{n\to\infty}\int_A f_n'(x)d\mu\right| \le \lim_{n\to\infty}\left|\int_A f_n(x)d\mu - f_n'(x)d\mu\right| \le \mu(A)\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in A}|f_n(x)-f_n'(x)|$$

Нарешті для доведення третьої умови достатньо взяти послідовність, у якій $f_n(x)=f(x)$ для усіх x.

Розглянемо **властивості інтеграла Лебега**.

I. $\int_A d\mu = \mu(A)$

II. $\int_A kf(x)d\mu = k\int_A f(x)d\mu$

при чому з існування інтегралу в правій частині рівності випливає існування інтегралу в лівій частині.

III. $\int_A [f(x)+g(x)]d\mu = \int_A f(x)d\mu + \int_A g(x)d\mu$

при чому з існування інтегралів в правій частині рівності випливає існування інтегралу в лівій частині.

Дві останні властивості доводяться переходячи до границі в властивостях А) та Б) інтегралів від простих функцій.

IУ. Обмежена та вимірна на множині A функція $f(x)$ інтегровна на цій множині.

Доводиться переходячи до границі в властивості В) інтеграла від простих функцій з використуванням теореми 11.

У. Якщо функція $f(x)\ge 0$ та інтегровна, то $\int_A f(x)d\mu \ge 0$.

Для простих функцій ця властивість випливає з означення інтегралу. В загальному випадку, якщо $f(x)$ вимірна і невід'ємна, то знайдеться послідовність простих невід'ємних функцій, яка рівномірно збігається до неї.

З останньої властивості відразу випливає, що якщо $f(x)\ge g(x)$ на A то

$$\int_A f(x)d\mu \ge \int_A g(x)d\mu$$

Отже, якщо $m\le f(x)\le M$ для усіх або майже усіх $x\in A$ то

$$m\mu(A) \le \int_A f(x)d\mu \le M\mu(A)$$

УІ. Якщо $\mu(A)=0$, то $\int\limits_A f(x)d\mu=0.$

УІІ. Якщо $f(x)=g(x)$ майже всюди на A,то $\int\limits_A f(x)d\mu=\int\limits_A g(x)d\mu$,

при чому обидва інтеграли існують або не існують одночасно.

Останні дві властивості безпосередньо випливають з означення інтеграла Лебега.

УІІІ. Якщо функція $\varphi(x)$ інтегровна на A і майже всюди $|f(x)|\le\varphi(x)$, то $f(x)$ також інтегровна та $\left|\int\limits_A f(x)d\mu\right|\le\int\limits_A\varphi(x)d\mu$.

Доводиться переходячи до границі в властивості Г) інтеграла від простих функцій з використанням теореми 11.

ІХ. Інтеграли $I_1=\int\limits_A f(x)d\mu$ та $I_2=\int\limits_A|f(x)|d\mu$ існують або не існують одночасно.

З властивості УІІІ з існування інтегралу I_2 випливає існування інтегралу I_1. Для простих функцій з означення інтегралу Лебега з існування інтегралу I_1 випливає існування інтегралу I_2. В загальному випадку це доводиться переходячи до границі з використанням теореми 11.

Теорема 12. Якщо $A=\bigcup\limits_n A_n,\ A_i\cap A_j=\varnothing$ при $i\ne j$, то $\int\limits_A f(x)d\mu=\sum\limits_n\int\limits_A f(x)d\mu$,

при чому з існування інтегралу в лівій частині випливає існування інтегралів та абсолютна збіжність ряду в правій частині.

Доведення. Доведемо спочатку для простої функції $f(x)$, яка приймає значення $y_1,y_2,\dots,y_n,\dots$

Нехай $B_k=\{x:x\in A,\ f(x)=y_k\};\ B_{nk}=\{x:x\in A_n,\ f(x)=y_k\}$.

Тоді $\int\limits_a f(x)d\mu=\sum\limits_k y_k\mu(B_k)=\sum\limits_k y_k\sum\limits_n\mu(B_{nk})=\sum\limits_n\sum\limits_k y_k\mu(B_{nk})=\sum\limits_n\int\limits_{A_n}f(x)d\mu$.

Через те що ряд $\sum\limits_k y_k\mu(B_k)$ збігається абсолютно, а міри множин невід'ємні, то збігаються абсолютно всі ці ряди.

Нехай тепер $f(x)$ будь-яка інтегровна на A функція. Тоді для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться проста інтегровна на A функція $g(x)$ така, що $|f(x)-g(x)|<\varepsilon$.

Для функції $g(x)$ маємо $\int\limits_A g(x)d\mu=\sum\limits_n\int\limits_{A_n}g(x)d\mu$, при чому $g(x)$ інтегровна для будь-якого A_n і ряд збігається абсолютно. Звідсіля випливає, що $f(x)$ інтегровна на A та

$$\sum_n\left|\int\limits_{A_n}f(x)d\mu-\int\limits_{A_n}g(x)d\mu\right|\le\varepsilon\sum_n\mu(A_n)=\varepsilon\mu(A);\left|\int\limits_A f(x)d\mu-\int\limits_A g(x)d\mu\right|\le\varepsilon\mu(A).$$

З цього маємо абсолютну збіжність ряду $\sum\limits_n\int\limits_{A_n}f(x)d\mu$ та оцінку

$$\left|\sum_n\int\limits_{A_n}f(x)d\mu-\int\limits_A f(x)d\mu\right|\le 2\varepsilon\mu(A).$$

Через те, що ε довільне, то $\sum\limits_n \int\limits_{A_n} f(x)d\mu = \int\limits_A f(x)d\mu$.

Наслідок. Якщо $f(x)$ інтегровна на A,то $f(x)$ є інтегровною на будь-якій вимірній множині $A' \subset A$.

Теорема 13. Якщо $A = \bigcup\limits_n A_n$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$ і ряд $\sum\limits_n \int\limits_{A_n} |f(x)| d\mu$ (8)

збігається, то функція $f(x)$ є інтегровною на A та $\int\limits_A f(x)d\mu = \sum\limits_n \int\limits_{A_n} f(x)d\mu$.

Доведення. Нехай $f(x)$ є проста функція, яка приймає значення f_i. Позначимо

$$B_i = \{x : x \in A, f(x) = f_i\}; \quad A_{ni} = A_n \cap B_i,$$

тоді $\bigcup\limits_n A_{ni} = B_i$ та $\int\limits_{A_n} |f(x)| d\mu = \sum\limits_i |f_i| \mu(A_{ni})$.

З збіжності ряду (8) випливає, що збігаються ряди

$$\sum_n \sum_i |f_i| \mu(A_{ni}) = \sum_i f_i \mu(B_i).$$

Збіжність останнього ряда означає, що існує інтеграл $\int\limits_A f(x)d\mu = \sum f_i \mu(B_i)$.

В загальному випадку апроксимуючи $f(x)$ простою функцією $g(x)$ так, щоб $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$, маємо $\int\limits_{A_n} |g(x)| d\mu \leq \int\limits_{A_n} |f(x)| d\mu + \varepsilon\mu(A_n)$.

Через те що $\sum\limits_n \mu(A_n) = \mu(A)$ з збіжності ряда (8) випливає збіжність ряда $\sum\limits_n \int\limits_{A_n} g(x)d\mu$, отже проста функція $g(x)$ є інтегровною і $f(x)$ також інтегровна.

Нерівність Чебишева. Якщо $\varphi(x) \geq o$ на A і $c > 0$, то

$$\mu\{x : x \in A, \varphi(x) \geq c\} \leq \frac{1}{c} \int_A \varphi(x) d\mu.$$

Нехай $A' = \{x : x \in A, \varphi(x) \geq c\}$. Тоді

$$\int_A \varphi(x)d\mu = \int_{A'} \varphi(x)d\mu + \int_{A \backslash A'} \varphi(x)d\mu \geq \int_{A'} \varphi(x)d\mu \geq c\mu(A').$$

Наслідок. Якщо $\int\limits_A |f(x)| d\mu = 0$, то $f(x) = 0$ майже всюди.

Дійсно, з нерівності Чебишева маємо

$$\mu\{x : x \in A, |f(x)| \leq 1/n\} \leq n \int_A |f(x)| d\mu = 0 \text{ для усіх } n.$$

Через те що $\mu\{x : x \in A, f(x) \neq o\} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu\{x : x \in A, |f(x)| \geq 1/n\} = 0$.

Теорема 14. (Абсолютна неперервність інтеграла Лебега).

Якщо $f(x)$ інтегровна на множині A функція, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що $\left| \int\limits_E f(x)d\mu \right| < \varepsilon$ для кожної вимірної множини E з мірою $\mu(E) < \delta$.

Доведення. Якщо $f(x)$ обмежена функція $|f(x)| \leq M$, то

$$\left|\int_E f(x)d\mu\right| \le M\mu(E) < \varepsilon, \text{ коли } \mu(E) < \delta = \varepsilon/M.$$

Нехай $f(x)$ довільна інтегровна на A функція. Позначимо

$$A_n = \{x : x \in A, n \le |f(x)| < n+1\};\ B_N = \sum_{n=0}^{N} A_n;\ C_N = A \setminus B_N.$$

Тоді згідно з теоремою 12 $\int_A |f(x)|d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} |f(x)|d\mu$.

Виберемо N так, що $\sum_{n=N+1}^{\infty} \int_{A_n} |f(x)|d\mu = \int_{C_N} |f(x)|d\mu < \varepsilon/2$.

Нехай $0 < \delta < \dfrac{\varepsilon}{2(N+1)}$. Якщо $\mu(E) < \delta$, то

$$\left|\int_E f(x)d\mu\right| \le \int_E |f(x)|d\mu = \int_{E \cap B_N} |f(x)|d\mu + \int_{E \cap C_N} |f(x)|d\mu.$$

За властивістю У $\int_{E \cap B_N} |f(x)|d\mu \le (N+1)\mu(E) < \varepsilon/2$.

Другий доданок $\int_{E \cap C_N} |f(x)|d\mu = \int_{C_N} |f(x)|d\mu < \varepsilon/2$, так що $\int_E |f(x)d\mu| < \varepsilon$.

Розглянемо зараз перехід до границі під знаком інтеграла Лебега.

Теорема 15 (Лебега). Якщо послідовність $\{f_n(x)\}$ збігається на множині A к функції $f(x)$ і для кожного n $|f_n(x)| \le \varphi(x)$, де $\varphi(x)$ інтегровна на A, то гранична функція $f(x)$ інтегровна на A та

$$\int_A f_n(x)d\mu \to \int_A f(x)d\mu.$$

Доведення. З умов теореми випливає, що $|f(x)| \le \varphi(x)$, тоді по властивості IX функція $f(x)$ є інтегровною.

Візьмемо будь-яке $\varepsilon > 0$. Існує $\delta > 0$ таке, що

$$\int \varphi(x)d\mu < \varepsilon/4, \text{ якщо } \mu(B) < \delta.$$

За теоремою Єгорова множину B можливо вибрати таким чином, що послідовність $\{f_n(x)\}$ збігається рівномірно на $C = A \setminus B$. Отже, існує N таке, що $|f(x) - f_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2\mu(C)}$, коли $n \ge N$ та $x \in C$.

Тоді

$$\left|\int_A f(x)d\mu - \int_A f_n(x)d\mu\right| = \left|\int_C [f(x) - f_n(x)]d\mu + \int_B f(x)d\mu - \int_B f_n(x)d\mu\right| \le$$

$$\le \int_C |f(x) - f_n(x)|d\mu + \int_B |f(x)|d\mu + \int_B |f_n(x)|d\mu < \frac{\varepsilon}{2\mu(C)}\mu(C) + 2\int_B \varphi(x)d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Наслідок. Якщо $|f_n(x)| \le M = const$ і $f_n(x) \to f(x)$ на множині A, то

$$\int_A f_n(x)d\mu \to \int_A f(x)d\mu.$$

Зауваження. Через те що значення функції на множині міри нуль не впливає на значення інтеграла Лебега, то в теоремі Лебега достатньо припустити, що $f_n(x) \to f(x)$ та $|f_n(x)| \le \varphi(x)$ майже всюди на A.

Теорема 16 (Леві). Нехай на множині A

$$f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots \le f_n(x) \le \ldots,$$

де функції $f_n(x)$ інтегровні та їх інтеграли обмежені у сукупності $\int\limits_a f_n(x) d\mu \le K$.

Тоді майже всюди на A існує скінчена границя $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, функція $f(x)$ є інтегровною та $\int\limits_A f_n(x) d\mu \to \int\limits_A f(x) d\mu$.

Доведення. Припустимо, що $f_1(x) \ge 0$ на A, тому що у протилежному випадку можливо розглянути послідовність $f_n^*(x) = f_n(x) - f_1(x)$.

Розглянемо множини

$$\Omega = \{x : x \in A, f_n(x) \to \infty\};\ \Omega_n^{(r)} = \{x : x \in A, f_n(x) \ge r\}.$$

Тоді $\Omega = \bigcap\limits_r \bigcup\limits_n \Omega_n^{(r)}$. З нерівності Чебишева $\mu\left(\Omega_n^{(r)}\right) \le K/r$.

Через те що $\Omega_1^{(r)} \subset \Omega_2^{(r)} \subset \ldots \subset \Omega_n^{(r)} \subset \ldots$ $\quad \mu\left(\bigcup\limits_n \Omega_n^{(r)}\right) \le K/r$, але для будь-якого r

$\Omega \subset \bigcup\limits_n \Omega_n^{(r)}$, отже $\mu(\Omega) \le K/r$. Через то що r довільне число, то $\mu(\Omega) = 0$.

Тому саме ми довели, що монотонна послідовність $\{f_n(x)\}$ майже всюди на A обмежена, отже має скінчену границю $f(x)$. Таким чином $f_n(x) \to f(x)$ майже всюди на A; $f_n(x) \le M$ та $f(x) \le M$.

Отже, з теореми Лебега $f(x)$ є інтегровною та $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f_n(x) d\mu = \int\limits_A f(x) d\mu$.

Теорема 17 (Фату). Якщо послідовність вимірних невід'ємних функцій $\{f_n(x)\}$ збігається майже всюди на множині A к функції $f(x)$ та

$$\int\limits_A f_n(x) d\mu \le K,$$

то $f(x)$ є інтегровною на A і $\int\limits_A f(x) d\mu \le K$.

Доведення. Позначимо $\varphi_n(x) = \inf\limits_{k\ge n} f_k(x)$, $\phi_n(x)$ буде вимірною через те що

$$\{x : \varphi_n(x) < c\} = \bigcup_{k\ge n} \{x : f_k(x) < c\}.$$

Оскільки $0 \le \varphi_n(x) \le f_n(x)$, то $\varphi_n(x)$ є інтегровними та

$$\int\limits_A \varphi_n(x) d\mu \le \int\limits_A f_n(x) d\mu \le K.$$

Тоді $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x) \le \ldots \le \varphi_n(x) \le \ldots$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ майже всюди на A.

За теоремою Леві $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A \varphi_n(x) d\mu = \int\limits_A f(x) d\mu \le K$.

Розглянемо тепер інтеграл Лебега на множині нескінченої міри. Нехай множина X є сумою зчисленого числа множин скінченої міри $X = \bigcup\limits_n X_n$, $\mu(X_n) < \infty$.

В цьому випадку міру μ на X називають σ-скінченою.

Назвемо вичерпною послідовністю будь-яку послідовність $\{X_n\}$ вимірних підмножин множини X, яка задовольняє умові

$$X = \bigcup_n X_n,\ \mu(X_n) < \infty .$$

Означення 11. Вимірна функція $f(x)$, визначена на множині X з σ- скінченою мірою μ, зветься сумовною на X, якщо вона є сумовною на кожній вимірній підмножині $A \subset X$ скінченої міри і для будь-якої вичерпної послідовності $\{X_n\}$ існує $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{X_n} f(x)d\mu$, який не залежить від вибору цієї послідовності.

Цю границю називають інтегралом від функції $f(x)$ по множині X та позначають $\int\limits_X f(x)d\mu$.

Наслідки, яки були одержані раніше для випадку скінченої міри майже завжди можна перенести на інтеграли по множині нескінченої міри. Зокрема теореми Лебега, Леві та Фату будуть справедливі. Істотна різниця складається у тому, що у випадку $\mu(X) = \infty$ обмежена вимірна функція не повинна бути сумовною.

З'ясуємо зв'язок між інтегралами Лебега і Рімана.

Теорема 18. Якщо функція $f(x)$ інтегровна за Ріманом на відрізку $[a,b]$, то вона на цьому відрізку інтегровна й за Лебегом, при чому

$$(R)\int_a^b f(x)dx = (L)\int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu .$$

Доведення. Розглянемо розбиття відрізка $[a,b]$ на 2^n частин точками $x_k = a + \frac{k}{2^n}(b-a)$ та складемо суми Дарбу

$$S_n = \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} M_{nk};\quad s_n = \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} m_{nk},\ \text{де}\ M_{nk} = \sup_{[x_{k-1},x_k]} f(x),\ m_{nk} = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f(x).$$

Згідно з означенням інтеграла Рімана

$$I = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n .$$

Покладемо

$$\bar{f}_n(x) = M_{nk}\ \text{при}\ x_{k-1} \le x < x_k$$
$$\underline{f}_n(x) = m_{nk}\ \text{при}\ x_{k-1} \le x < x_k ,$$

в точці $x = b$ функції $\bar{f}_n(x)$ та $\underline{f}_n(x)$ можливо визначити довільно.

Легко бачити, що $\int\limits_{[a,b]} \bar{f}_n(x)d\mu = S_n$, $\int\limits_{[a,b]} \underline{f}_n(x)d\mu = s_n$.

Оскільки послідовність $\{\bar{f}_n(x)\}$ не зростає, а послідовність $\{\underline{f}_n(x)\}$ не спадає, то $\underline{f}_n(x) \le f(x) \le \bar{f}_n(x)$.

Нехай $\bar{f}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \bar{f}_n(x)$, $\underline{f}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \underline{f}_n(x)$.

Тоді $\int\limits_{[a,b]} \bar{f}(x)d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = I = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \int \underline{f}(x)d\mu$.

Отже $\int\limits_{[a,b]} \bar{f}(x)d\mu = \int\limits_{[a,b]} \underline{f}(x)d\mu = \int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu$.

і майже всюди $\bar{f}(x) = \underline{f}(x) = f(x)$ Таким чином $\int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu = I$.

Зауважимо, що з існування інтеграла Лебега для деякої функції не слідує Ії інтегровність за Ріманом. Наприклад, функція Діріхле на відрізку $[a,b]$ буде вимірною, а за властивістю ІУ інтегровною за Лебегом, проте вона не є інтегровною за Ріманом.

Для абсолютно збігливих невласних інтегралів Рімана існують відповідні інтеграли Лебега. Якщо же невласний інтеграл Рімана збігається умовно, то відповідний інтеграл Лебега не існує, тому що з властивості УІІІ функції $f(x)$ та $|f(x)|$ є сумовними одночасно.

Наприклад, $(R)\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$, але функція $\frac{\sin x}{x}$ не інтегрована за Лебегом тому що інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ розбігається.

Нехай X та Y дві множини, на яких задани σ- алгебри підмножин та відповідно міри μ_X та μ_Y. Розглянемо множину упорядкованих пар $\{(x,y)\} = Z$, яка зветься декартовим добутком множин X та Y.

Нехай $A \in Z$. Позначимо

$$A_X = \{y : (x,y) \in A\} \quad (\ x \text{ фіксовано})$$

$$A_Y = \{x : (x,y) \in A\} \quad (\ y \text{ фіксовано})$$

Задамо на Z міру

$$\mu_X \otimes \mu_Y = \mu(A) = \int\limits_X \mu_Y(A_X)d\mu_X = \int\limits_Y \mu_X(A_Y)d\mu_Y .$$

Теорема 19(Фубіні). Нехай міри μ_X та μ_Y визначені на відповідних σ-алгебрах, σ-адитивні і повні. Нехай далі $\mu = \mu_X \otimes \mu_Y$ і функція $f(x,y)$ інтегровна згідно з мірою μ на множині $A \subset X \times Y$. Тоді

$$\int\limits_A f(x,y)d\mu = \int\limits_X \left(\int\limits_{A_X} f(x,y)d\mu_Y \right) d\mu_X = \int\limits_Y \left(\int\limits_{A_Y} f(x,y)d\mu_X \right) d\mu_Y . \tag{9}$$

Зауваження. З існування інтеграла по A випливає існування повторних інтегралів та їх рівність, но не навпаки. Якщо існує хоч би один з інтегралів

$$\int\limits_X \left(\int\limits_{A_X} |f(x,y)| d\mu_Y \right) d\mu_X \quad \text{або} \quad \int\limits_Y \left(\int\limits_{A_Y} |f(x,y)| d\mu_X \right) d\mu_Y ,$$

то існує $\int\limits_A f(x,y)d\mu$ та справедлива рівність (9).

Глава II.

§ 1. Метричні простори

Не порожня множина X утворює метричний простір, якщо кожній упорядкованій парі Її елементів x, y відповідає число $\rho(x,y) \geq 0$, що задовольняє такі умови:

1) $\rho(x,x) = 0$, якщо $x \neq 0$
2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$
3) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

Число $\rho(x,y)$ називають віддаллю точок (елементів) x, y, а 1) —3) – аксіомами метричного простору.

Означення 1. Послідовність точок $\{x_n\}$ називають збіжною до точки x_0 (позначаємо це $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$), якщо

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0 .$$

Тоді точку x_0 називають границею або граничною точкою послідовності $\{x_n\}$.

Легко бачити, що мають місце такі нерівності

$$\rho(x_1, x_n) \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \ldots + \rho(x_{n-1}, x_n)$$
$$|\rho(x,z) - \rho(y,u)| \leq \rho(x,y) + \rho(z,u)$$
$$|\rho(x,z) - \rho(y,z)| \leq \rho(x,y)$$

Приклади метричних просторів.

1. Нехай $C[a,b]$ буде множина функцій неперервних в $[a,b]$. Для кожної пари x, y Її елементів приймемо

$$\rho(x,y) = \max_{a\leq t\leq b} |x(t) - y(t)| .$$

Збіжність послідовності точок $\{x_n\}$ (до точки x_0) зводиться до рівномірної збіжності в $[a,b]$ послідовності функцій $\{x_n(t)\}$ (до функції $x_0(t)$).

На цій множині елементів віддаль елементів може бути визначена за формулою

$$\rho_1(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt .$$

Легко бачити, що аксіоми 1) – 3) мають місце і в цьому випадку. Але метричний простір (позначається $L_1[a,b]$) буде мати вже інші властивості.

2. Нехай $C^{(p)}[a,b]$ буде множина функцій, що мають неперервні похідні аж до p - того порядку в $[a,b]$

$$\rho(x,y) = \max_{a\leq t\leq b} |x(t) - y(t)| + \max_{a\leq t\leq b} \left|x^{(p)}(t) - y^{(p)}(t)\right|$$

або

$$\rho_1(x,y) = \max_{a\leq t\leq b} |x(t) - y(t)| + \sum_{k=1}^{p} \max_{a\leq t\leq b} \left|x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)\right| .$$

3. Простір $L_p(a,b)(p \geq 1)$ - множина функцій сумовних з p - тим степенем в інтервалі (a,b)

$$\rho(x,y) = \left[\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt\right]^{1/p} .$$

4. Нехай l_p, де $p \geq 1$ буде множина таких послідовностей чисел $\{\xi_n\}$, для яких ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|$ збігається

$$\rho(x,y)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n-\eta_n|^p\right]^{1/p}; \quad x=\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}; \quad y=\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

5. Множина аналітичних функцій $f(z)$, рівномірно неперервних у колі $|z| \leq 1$.
Віддаль означається

$$\rho(f,g)=\max_{|z|\leq 1}|f(z)-g(z)|.$$

Мають місце такі теореми.

Теорема 1. Якщо $\{x_n\}$ збіжна послідовність елементів метричного простору, то буде збіжною і будь-яка Її частинна послідовність.

Теорема 2. Нехай послідовність $\{x_n\}$ збігається к x. Тоді для будь-якого елементу $y \in X$ множина $\{\rho(x_n,y)\}$ обмежена.

Теорема 3. Якщо послідовність $\{x_n\}$ має границю, то вона одна.

Доведення теорем 1 – 3 випливає з означення границі послідовності в метричному просторі.

Нехай X метричний простір, G довільна множина елементів цього простору.

Означення 2. Точку x_0 називають точкою скупчення множини G, якщо існує така послідовність точок $\{x_n\}$, що $x_0 \neq x_n \in G$ і

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_o.$$

Множину всіх точок скупчення множини G називають Її похідною множиною і позначають через G'. Множину $\overline{G}=G+G'$ називають замиканням множини G; множину G називають замкненою, якщо $G' \subset G$, та досконалою, якщо $G'=G$.

Кажуть, що множина G є відкрита множина, якщо Її доповнення (тобто $X \setminus G$) є замкнута множина.

Кожну відкриту множину називають також околом кожної Її точки.

Нехай $x_0 \in X$ і число $r_0 > 0$

$$S(x_0;r_0)=\{x:\rho(x,x_0)<r_0\} \text{ - сфера;}$$

$$\overline{S}(x_0,r_0)=\{x:\rho(x,x_0)\leq r_0\} \text{ - замкнена сфера;}$$

x_0 - центр сфери, r_0 - радіус цієї сфери.

Означення 3. Множина G густа (або щільна) в X, якщо $\overline{G}=X$.

Означення 4. Простір X називають сепарабельним, якщо він містить у собі густу зчислену множину.

Означення 5. Метричний простір називається компактним, якщо кожна нескінченна послідовність точок містить у собі збіжну послідовність.

Легко бачити, що кожний метричний компактний простір є сепарабельний.

Множина M метричного простору X називається предкомпактною, якщо її замикання $\overline{M}$ утворює компактний простір.

Множина G не густа (або ніде не щільна), якщо множина $\overline{G}$ не містить у собі жодної сфери.

Означення 6. Множину G називають множиною першої категорії, якщо вона є зчисленою сумою негустих множин; в протилежному випадку Її називають множиною другої категорії.

Означення 7. Послідовність $\{x_n\}$ елементів метричного простору називається фундаментальною, якщо $\forall \varepsilon > 0$ існує n_0 залежне від ε, що якщо $n,m \geq n_0$

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon .$$

Легко бачити, що якщо послідовність $\{x_n\}$ збіжна, то вона фундаментальна. Навпаки не завжди має місце. Наприклад, X - множина раціональних чисел,

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Ця послідовність чисел фундаментальна, але в множині раціональних чисел не має границі.

Означення 8. Метричний простір називається повним простором, якщо в цьому простору будь-яка фундаментальна послідовність збігається.

Простори $C[a,b]$, R_n, $L_p(a,b)$, l_p є повні простори.

Приклад. Розглянемо простір $C_1[a,b] = \{x(t)$ - неперервні на $[a,b]\}$

$$\rho(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt .$$

Побудуємо послідовність

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & a \le t \le c \\ n(t-c), & c \le t \le c + 1/n \\ 1, & c + 1/n \le t \le b, \quad a < c < b. \end{cases}$$

Легко бачити, що

$$\rho(x_n, x_m) = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \le \frac{1}{n_0} .$$

Якщо $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$, то $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon; \quad n, m \ge n_0$.

Тобто, $\{x_n\}$ фундаментальна послідовність. Але вона не має границі.

Означення 9. Два метричних простора X та X_1 називаються ізометричними, якщо між елементами цих просторів існує взаємно однозначна відповідність і якщо

$$x \leftrightarrow x_1,\ y \leftrightarrow y_1, \quad \rho_X(x,y) = \rho_{X_1}(x_1, y_1).$$

Наприклад, $C[0,1]$ та $C[0,2]$ ізометричні.

Теорема 4 (Хаусдорфа). Нехай X_0 метричний простір. Існує повній метричний простір X (поповнення X_0), що

1) X_0 ізометрично $X_1 \subseteq X$
2) $\overline{X_1} = X$.

Завдання.

1. Показати, що на множині $N = \{1,2,\dots,n,\dots\}$ функція $\rho(n,m) = \left|\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m}\right|$ визначає віддаль.

2. Показати, що якщо дві сфери мають спільну точку, то існує сфера, яка належить перетину цих сфер.

3. Показати, що в метричному просторі $\forall x, y\ (x \ne y)$ існують околи кожної точки, котрі не перетинаються.

4. Показати, що $\forall x \in \overline{G}$ є $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x, \quad x_n \in G$.

5. Нехай X метричний простір, $\rho(x,y)$- віддаль. Показати, що $\rho_1(x,y) = \ln(1 + \rho(xy))$,

$$\rho_2(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} \quad \text{та} \quad \rho_3(x,y)=\min\{\rho(x,y),1\}$$ також є віддалі в X.

6. Довести, що якщо $x_n(t)\to x(t)$ в $C[a,b]$ то $x_n(t)\to x(t)$ в $L_p(a,b)$.

7. Нехай X множина дійсних чисел. Показати, що $\rho(x,y)=arctg|x-y|$ є віддаль. Чи є простір X, коли віддаль означена таким чином, повним?

8. а) При яких α функція $t^{\alpha}\in L_2(0,1)$?

б) При яких p функція $t^{-1/3}\in L_p(0,1)$?

9. Якому з просторів $C[-1,1], L_1(-1,1), L_2(-1,1)$ належать функції

а) $x(t)=sign\,t=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t=0\\ -1, & t<0\end{cases}$ б) $x(t)=\begin{cases}0, & t\le 0\\ t^{-1/2}, & t>0\end{cases}$?

10. Довести, що метричний простір буде повним, якщо будь-яка фундаментальна послідовність містить збіжну частинну послідовність.

§ 2. Означення та елементарні властивості векторіальних просторів.

Нехай X не порожня множина. Кожній упорядкованій парі елементів x,y множини X відповідає елемент $x+y$ множини X (сума елементів x і Y), а кожному числу t і $\forall x\in X$ підпорядковано елемент tx (добуток числа t на елемент x) множини X так, що ці операції задовольняють такі умови

1) $x+y=y+x$
2) $x+(y+z)=(x+y)+z$
3) з $x+y=x+z$ виходить $y=z$
4) $a(x+y)=ax+ay$
5) $(a+b)x=ax+bx$
6) $a(bx)=(ab)x$
7) $1\cdot x=x$

В цьому випадку множину X називають векторіальним або лінійним простором.

Легко бачити, що тоді існує один і тільки один такий елемент (позначимо Θ), що завжди маємо $x+\Theta=x$, а з рівності $ax=bx$ $(x\ne\Theta)$ виходить $a=b$, а також з рівності $ax=ay$ $(a\ne 0)$ виходить $x=y$.

Приймемо такі означення $-x=(-1)\cdot x$ і $x-y=x+(-y)$.

Легко бачити, що метричні простори $C[a,b], C_1[a,b], C^{(k)}[a,b], L_p(a,b), l_p$ є лінійні простори.

Коли $x\ne y$, то множину усіх елементів вигляду $tx+(1-t)x$, де t будь-яке число з $[0,1]$ будемо називати елементом (відрізком), який сполучає x і y.

Множину $G\subset X$ називають конвексною, коли вона містить у собі усі сегменти, що сполучають Ії довільні елементи.

Коли $x_1,x_2,...,x_n$ елементи векторіального простору X, а $c_1,c_2,...,c_n$ будь-яки дійсні числа, то

$$c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i$$

називають лінійною комбінацію елементів $x_1,x_2,...,x_n$.

Означення 10. Елементи $x_1,x_2,...,x_n$ називаються лінійно-незалежними, якщо з рівності

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = 0 \quad (c_i = const)$$

випливає, що $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$.

В протилежному випадку $x_1, x_2, ..., x_n$ лінійно-залежні.

Наприклад, в $C[a,b]$ функції $1, t, t^2, ..., t^n$ лінійно-незалежні.

Означення 11. Множина елементів $x_1, x_2, ..., x_k, ...$ лінійно-незалежна, якщо $\forall n$ система елементів $x_1, x_2, ..., x_n$ лінійно-незалежна.

Якщо в просторі X можливо знайти n лінійно-незалежних елементів, а всякі $n+1$ елемент цього простору лінійно-залежні, то говорять, що простір X має розмір n та визначають $\dim X = n$.

Означення 12. Нехай $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ елементи X (їх скінчене або зчислене число).

$$L = \{c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n\}$$

ннназивають лінійною оболонкою цих елементів.

Замикання $\overline{L}$ будемо називати підпростором X.

Завдання.

1. Нехай X множина многочленів з дійсними коефіцієнтами від змінної t. Лінійні операції означаються звичайно. Чи буде X векторіальним простором?
2. Довести, що якщо система векторів (елементів) $e_1, e_2, ..., e_n$ лінійно-незалежна, то будь-який вектор лінійної оболонки цих векторів тільки єдиним чином подається у вигляді
$$c_1e_1 + c_2e_2 + ... + c_ne_n.$$
3. Довести, що якщо лінійна оболонка L_1 побудована на елементах лінійної оболонки L_2 і $\dim L_1 = \dim L_2$, то $L_1 = L_2$.
4. Довести, що якщо лінійна оболонка L_1 побудована на елементах лінійної оболонки L_2, то $\dim L_1 \le \dim L_2$.
5. Чи утворюють в просторі $C[-1,1]$ підпростір слідуючи множини функцій :

а) монотонні функції; б) многочлени степеню $\le k$; в) функції $\varphi(t)$, які задовольняють умові $x(0) = 0$.

§ 3. Векторіальні (лінійні) нормовані простори.

Векторіальний простір X називається нормованим, коли кожному елементу x цього простору відповідає число (воно називається його нормою та позначається $\|x\|$ або $\|x\|_X$), яке задовольняє такі умови

1) $\|\Theta\| = 0$ і $\|x\| > 0$ для $x \ne \Theta$
2) $\|tx\| = |t| \cdot \|x\|$ для всякого числа t
3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Коли віддаль двох елементів x і y простору X визначимо формулою

$$\rho(x, y) = \|x - y\|,$$

то одержимо, очевидно, метричній простір. Коли, крім цього, простір X є повній, то простір називаємо банаховим, або простором типу (B).

Якщо $\rho(x, y) = \|x - y\|$, то $\rho(x + y, z + y) = \rho(x, z)$; $\rho(\lambda x, \lambda y) = \lambda\rho(x, y)$, якщо $\lambda \ge 0$.

Означення 13. Послідовність елементів $\{x_n\}$ по нормі збігається до x, якщо

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0.$$

Послідовність елементів $\{x_n\}$ фундаментальна в лінійному нормованому просторі X, якщо $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$, що коли $n, m \geq n_0$

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon .$$

Приклади векторіальних нормованих просторів.

1. $C[a,b]$; $\|x\| = \max\limits_{a \leq t \leq b} |x(t)|$

2. $C_1[a,b]$; $\|x\| = \int\limits_a^b |x(t)| dt$

3. $R_n = \{x = (x_1, x_2, ... x_n)\}$; $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}$; x_k – дійсні числа

4. $C_n = \{z = (z_1, z_2, ..., z_n)\}$; $\|z\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |z_k|^2}$; z_k – комплексні числа

5. $L_p(a,b),\ p \geq 1$; $\|x\| = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}$

6. $l_p = \left\{ x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...) : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty \right\}$; $\|x\| = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{1/p}$

Легко довести, що простори $C[a,b], R_n, C_n, L_p(a,b), l_p$ є банахови простори. Простір $C_1[a,b]$ не є простір типу (B).

Теорема 5. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n - y\| = 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} (c_1 x_n + c_2 y_n) = c_1 x + c_2 y \text{ в } X \text{, тобто } \lim_{n\to\infty} \|(c_1 x_n + c_2 y_n) - (c_1 x + c_2 y)\| = 0 .$$

Доведення.

$$\|(c_1 x_n + c_2 y_n) - (c_1 x + c_2 y)\| = \|c_1(x_n - x) + c_2(y_{n-y})\| \leq |c_1| \cdot \|x_n - x\| + |c_2| \cdot \|y_n - y\|$$

за нерівністю трикутника. Звідки

$$\lim_{n\to\infty} \|(c_1 x_n + c_2 y_n) - (c_1 x + c_2 y)\| \leq |c_1| \cdot \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| + |c_2| \cdot \lim_{n\to\infty} \|y_n - y\| .$$

Теорема 6. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_n - \lambda| = 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n x_n = \lambda x \text{ в } X \text{, тобто } \lim_{n\to\infty} \|\lambda_n x_n - \lambda x\| = 0 .$$

Доведення.

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_n x + \lambda_n x - \lambda x\| \leq |\lambda_n| \cdot \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda| \cdot \|x\|$$

Послідовність $\{\lambda_n\}$ обмежена. Тоді існує таке K, що $|\lambda_n| \leq K$ для $\forall n$.

Звідки

$$\lim_{n\to\infty} \|\lambda_n x_n - \lambda x\| \leq K \cdot \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| + \|x\| \cdot \lim_{n\to\infty} |\lambda_n - \lambda| = 0 .$$

Теорема 7. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = x$.

Доведення. $\|x_n\| - \|x\| \leq \|x_n - x\|$ за другою нерівністю трикутника.

Обернене твердження не завжди має місце.

Нехай $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ послідовність елементів в X. Побудуємо таку послідовність

$$S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n, \quad n = 1,2,...$$

Якщо в X існує певна границя S послідовності $\{S_n\}$, коли $n \to \infty$, то кажуть, що ряд $x_1 + x_2 + ... + x_n + ...$ збігається і S його сума

$$S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots$$

Теорема 8. Нехай X банахів простір і нехай існують числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots; a_n > 0$ такі, що $\|x_n\| \le a_n$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається. Тоді існує границя послідовності $\{S_n\}$ в X коли $n \to \infty$, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ збігається.

Доведення. Розглянемо послідовність часткових сум $\{S_n\}$, де $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.
Легко бачити, що послідовність $\{S_n\}$ фундаментальна. Дійсно,

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}\| \le \sum_{i=n+1}^{n+p} \|x_i\| \le \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i .$$

Але ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ збігається. Тому $\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0(\varepsilon)$, що якщо $n \ge n_0$

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i < \varepsilon .$$

Тобто $\|S_{n+p} - S_n\| < \varepsilon$, коли $n \ge n_o$. Але простір X повний, тому існує

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S .$$

Означення 14. Нехай X векторіальний простір, на якому визначені дві норми $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$ (Кожна з них визначена за своїм законом). Норма $\|\cdot\|_1$ не сильніша за норму $\|\cdot\|_2$, якщо існує стала $C_1 > 0$, що $\|x\|_1 \le C_1 \cdot \|x\|_2 \quad \forall x \in X$.
Норма $\|\cdot\|_2$ не слабша за $\|\cdot\|_1$.
Норми $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$ еквівалентні, якщо існують такі сталі $C_1 > 0, C_2 > 0$, що

$$\|x\|_1 \le C_1 \cdot \|x\|_2 , \quad \|x\|_2 \le C_2 \cdot \|x\|_1 , \quad \forall x \in X .$$

Теорема 9. Якщо векторіальний простір X має скінчену розмірність, то будь-яки дві норми в ньому еквівалентні.

Доведення. Нехай векторіальний простір X має скінчену розмірність. Тобто $\forall x \in X$ має вигляд $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n$, де $e_1, e_2, \ldots, e_n$ система лінійно-незалежних елементів з X.
Евклідовою нормою елемента x називається

$$\|x\|_0 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2} .$$

Нехай $\|x\|$ будь-яка норма в X.

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \right\| \le \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \cdot \|e_i\| .$$

За нерівністю Буняковского

$$\|x\| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2} = M \cdot \|x\|_0 . \tag{1}$$

Розглянемо функцію $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \|x\| = \|\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n\|$.
Вважаємо Її як функцію змінних $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Ця функція неперервна. Дійсно

$$|f(\xi_1, \ldots, \xi_n) - f(\eta_1, \ldots, \eta_n)| = \left| \left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \right\| - \left\| \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i \right\| \right| \le \left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i - \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i \right\| \le M \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^2} .$$

Нехай $\forall \varepsilon > 0$. Якщо $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^2} < \dfrac{\varepsilon}{M}$, то $|f(\xi_1,...,\xi_n) - f(\eta_1,...,\eta_n)| < \varepsilon$.

Неперервність доведена.

Розглянемо функцію $f(\xi_1,...,\xi_n)$ на множині точок, для котрих

$$\|x\|_0 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2} = 1.$$

Точка Θ цій множині не належить. Тому $f(\xi_1,...,\xi_n) = \|x\| > 0$.

Неперервна функція на замкненій обмеженій множині досягає найменшого значення (нехай α)

$$f(\xi_1,...,\xi_n) \geq \alpha > 0$$

Нехай x довільний елемент X, $x \neq \Theta$, $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n$.

Тоді, якщо покласти

$$\xi_i' = \frac{\xi_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2}},$$

то елемент $x' = \xi_1' e_1 + ... + \xi_n' e_n$ буде мати евклідову норму $\|x'\|_0 = 1$.

$$\|x'\| = f(\xi_1',...,\xi_n') = \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2}} e_i \right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|_0} \geq \alpha.$$

Звідки

$$\|x\|_0 \leq \frac{1}{\alpha} \|x\|. \tag{2}$$

З (1) і (2) випливає, що $\|x\|$ еквівалентна евклідовій нормі $\|x\|_0$. Тобто, будь-які дві норми еквівалентні одна другій.

Завдання.

1. Показати, що будь-який нормований простір X, який має скінчену розмірність, повний.
2. Нехай X векторіальний нормований простір; $X_0 \subset X$; X_0 має скінчену розмірність $X_0 \neq X$. Довести, що існує елемент x_0, норма якого $\|x_0\| = 1$, $x_0 \notin X_0$, такий що

$$\|x - x_0\| \geq 1, \forall x \in X.$$

3. Довести безпосередньо, що норми

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2 \right)^{1/2}, \quad \|x\|_3 = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|,$$

де $x = (\xi_1,...,\xi_n) \in R_n$ еквівалентні.

4. Чи можливо в R_2 означити норму таким чином

$$a) \quad \|x\| = |\xi_1| + \frac{1}{2}|\xi_2|; \qquad b) \quad \|x\| = \max\{\xi_1 + 2\xi_2|, |\xi_1 - \xi_2|\} \ ?$$

5. Чи будуть еквівалентними в просторі $C[0,1]$ норми

$$\|x\|_1 = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| \quad i \quad \|x\|_2 = \left(\int_0^1 |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} ?$$

6. Довести, що на множині l_∞ усіх обмежених числових послідовностей $x=(\xi_1,\xi_2,...)$, $\|x\|=\sup\limits_k|\xi_k|$ є нормою. Чи буде повним цій простір?

7. Довести, що множина c_0 усіх збігаючи до нуля послідовностей $x=(\xi_1,\xi_2,...)$ с нормою $\|x\|=\sup\limits_k|\xi_k|$ є банаховим простором.

8. Довести, що на множині s усіх числових послідовностей $x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,...)$ є нормою $\|x\|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{|\xi_n|}{1+|\xi_n|}$. Чи буде повним цій простір?

9. В яких з просторів $l_1, l_2, l_\infty, c_0, l_p\ (p\ge 1)$ збігаються (чи розбігаються) слідуючи послідовності

а) $x_n=\left(1,1,...,\overset{n}{1},0,0...\right)$ б) $x_n=\left(1,\frac{1}{2},...,\frac{1}{n},0,0...\right)$ в) $x_n=\left(1,\frac{1}{\sqrt{n}},\frac{1}{\sqrt{n}},...,\overset{n}{\frac{1}{\sqrt{n}}},0,0,...\right)$

г) $x_n=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},...,\overset{n}{\frac{1}{n}},0,0,...\right)$ д) $x_n=\left(\frac{1}{n^\alpha},\frac{1}{n^\alpha},...,\overset{n}{\frac{1}{n^\alpha}},0,0,...\right)$, $\alpha\ge 0$

10. Довести повноту просторів $R_n, C[a,b], L_p(a,b), l_p\ (p\ge 1)$.

11. Довести, що c_0 є замкнутий підпростір в l_∞.

12. Довести, що $C^{(m)}[a,b]$ є незамкнутий підпростір в $C[a,b]$.

13. При яких p,q $\quad l_p\subset l_q$?

§ 4. Компактні простори

Нехай X метричний простір. $S(x_0,r_0)=\{x\in X,\quad \rho(x,x_0)<r_0\}$ - куля з центром в точці x_0 та радіусом r_0: $S(x_0,r_0)\subset X$.

Кулю $S(x_0.r_0)$ будемо називати околом точці x_0.

Нехай M множина з X .

Означення 15. Система множин $\{S(x_\gamma,r_\gamma)\}$, де індекс γ пробігає довільну множину значень Γ, називається покриттям M, якщо $\forall x_0\in M\quad \exists\gamma_0\in\Gamma$ і $\exists x_{\gamma_0}$ таке що $x_0\in S(x_{\gamma_0},r_{\gamma_0})$, або, що те саме, якщо $M\subset\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}S(x_\gamma,r_\gamma)$.

Означення 16. Покриття множини M системою множин $\{S(x_\gamma,r_\gamma)\}$, де $\gamma\in\Gamma$, називається скінченим, якщо множина Γ скінчена.

Означення 17. Нехай у метричному просторі X задано деяку множину M . Тоді при заданому $\varepsilon>0$ множина $E\subset X$ називається ε- сіткою множини M , якщо для довільної точки $x_0\in M\quad \exists a_0\in E:\quad \rho(x_0,a_0)<\varepsilon$.

Ця нерівність рівносильна тому факту, що множина M може бути покрита системою куль радіуса ε (одного і того самого при всіх $a\in E$) з центрами в точках $a\in E$.

Означення 18. ε- сітка називається скінченою, якщо вона складається лише із скінченого числа елементів.

Означення 19. Множина $M\subset X$ називається цілком обмеженою, якщо в $X\quad\forall\varepsilon>0$ знайдеться принаймні одна скінчена ε- сітка.

Метричний простір X називається цілком обмеженим, якщо в цьому просторі $\forall\varepsilon>0$ знайдеться принаймні одна скінчена ε- сітка.

Означення 20. Множина M з X називається предкомпактною, якщо кожна нескінченна послідовність точок містить у собі збіжну послідовність в X. Якщо $M = \overline{M}$, то M називається компактною множиною.

Теорема 10 (Хаусдорфа). Нехай X метричний простір, $M \subset X$. Для того щоб M була предкомпактною необхідно, а в випадку коли X повний простір і достатньо, щоб множина M була цілком обмеженою.

Доведення. Необхідність. Якщо припустити від супротивного, що множина M не є цілком обмеженою, то з неї при деякому $\varepsilon_0 > 0$ можна виділити послідовність $\{x_n\}$, для довільних двох елементів якої $\rho(x_k, x_i) \geq \varepsilon_0$. Тому жодна підпослідовність цієї послідовності не може бути фундаментальною і тім більше збіжною. $\overline{M}$ не буде компактною.

Достатність. Припустимо, що простір X повний, а множина $M \subset X$ цілком обмежена. В такому разі множина $\overline{M}$ також буде цілком обмежена.

Дійсно, якщо $\{x_n\}$ довільна фундаментальна в $\overline{M} \subset X$ послідовність, то в силу повноти простору X ця послідовність збіжна в X до деякої точки x_0. Але, в силу замкненості $\overline{M}$ $x_0 \in \overline{M}$.

Доведемо, що множина $\overline{M}$ цілком обмежена. Тобто покажемо, що $\forall \varepsilon > 0$ в $\overline{M}$ існує принаймні одна скінчена ε - сітка. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ і, використовуючи той факт, що згідно з умовою теореми множина M є цілком обмежена, знайдемо для M яку-небудь $\varepsilon/2$ - сітку $E_{\varepsilon/2} = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, де $n = n(\varepsilon)$, і встановимо, що ця сітка є ε - сіткою для $\overline{M}$.

Дійсно, $\forall x_0 \in \overline{M}$ $\exists x_0' \in M$, що $\rho(x_0, x_0') < \varepsilon/2$, а для $x_0' \in M$ $\exists a_k \in E_{\varepsilon/2}$: $\rho(x_0', a_k) < \varepsilon/2$.

Тому $\forall x_0 \in \overline{M}$ $\exists a_k \in E_{\varepsilon/2}$: $\rho(x_0, a_k) \leq \rho(x_0, x_0') + \rho(x_0', a_k) < \varepsilon$.

Наслідок. Нехай X повний метричний простір, а $M \subset X$. Для того щоб M була предкомпактна достатньо, щоб $\forall \varepsilon > 0$ для M існувала скінчена ε - сіть.

Доведення. Оберемо довільне $\varepsilon > 0$ та зафіксуємо його. Нехай E_1 компактна $\varepsilon/2$ - сіть для M. Множина E_1 компактна, тому для E_1 існує скінчена $\varepsilon/2$ - сіть E_2.

Тобто, $\forall x' \in E_1$ існує $x'' \in E_2$, що $\rho(x', x'') < \varepsilon/2$.

Нехай $\forall x \in M$. Тоді $\exists x' \in E_1$, що $\rho(x, x') < \varepsilon/2$, але $\rho(x', x'') < \varepsilon/2$. Тому

$$\rho(x, x'') \leq \rho(x, x') + \rho(x', x'') < \varepsilon .$$

Таким чином E_2 є скінчена ε - сіть для M і M предкомпактна множина.

Будь-яка предкомпактна множина обмежена.

Таким чином для метричного простору X еквівалентні такі твердження:

а) простір X є компактним;

б) з будь-якої послідовності елементів з X можна вилучити принаймні одну збіжну (в X) підпослідовність;

в) простір X є повним і цілком обмеженим.

Лема. Нехай L підпростір векторіального нормованого простору X $(L \neq X)$. Тоді $\forall \varepsilon > 0$ існує в $X \setminus L$ такий елемент y, що

а) $\|y\|_X = 1$

б) $\|x - y\|_X > 1 - \varepsilon \quad \forall x \in L$.

Доведення. Нехай y_0 будь-який елемент з $X \setminus L$ і

$$d=\inf_{x\in L}\|y_0-x\|_X>0 \quad (L \text{ замкнена множина}).$$

Для $\forall\varepsilon>0 \quad \exists x_0\in L$, що $d\le\|y_0-x_0\|<d+\varepsilon\cdot d$.

Нехай $y=\dfrac{y_0-x_0}{\|y_0-x_0\|_X}$ (елемент $y_0\notin L$, тому $\|y_0-x_0\|_X\ne 0$).

Якщо $x\in L$, то $\|y-x\|_X=\left\|\dfrac{y_0-x_0}{\|y_0-x\|_X}-x\right\|_X=\dfrac{1}{\|y_0-x_0\|}\cdot\left\|y_0-\left(x_0+\|y_0-x_0\|_X\cdot x\right)\right\|_X$.

Тому що $x_0+\|y_0-x_0\|_X\cdot x\in L$, то

$$\|y-x\|_X\ge\frac{d}{d+\varepsilon\cdot d}=1-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}>1-\varepsilon.$$

Лема доведена.

Теорема 11. Нехай X векторіальний нормований простір, L підпростір X. Для того щоб L мав скінчену розмірність необхідно і достатньо, щоб кожна обмежена множина $M\subset L$ була компактною

Доведення. Необхідність. Нехай розмірність L дорівнює n. Тобто кожний елемент $x\in L$ має вигляд $x=\xi_1e_1+\xi_2e_2+...+\xi_ne_n$, де $e_1,e_2,...,e_n$ система лінійно незалежних елементів з X. Евклідова норма елемента x є

$$\|x\|_0=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2}.$$

Розглянемо елемент $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)\in R_n$, якщо ξ_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ дійсні (або відповідно елемент C_n, якщо ξ_i комплексні)

$$\|\xi\|_{R_n}=\|x\|_0.$$

Таким чином L ізометричне R_n (або C_n). В R_n кожна обмежена множина компактна. З цього випливає, що і в L кожна обмежена множина компактна.

Достатність. Нехай L компактний підпростір X.

Нехай x_1 довільний елемент з L, такий що $\|x_1\|_X=1$. Покладемо $L_1=\{c_1x_1\}$.

Якщо $L_1\ne L$, то за лемою в $L\setminus L_1$ існує елемент x_2 такий що

$$\|x_2\|_X=1,\quad \|x_2-x\|_X>1/2\quad \left(x\in L_1,\ \varepsilon=1/2\right), \text{ при цьому } \|x_2-x_1\|_X>1/2.$$

Покладемо $L_2=\{c_1x_1+c_2x_2\}$. Якщо $L_2\ne L$, то $\exists x_3\in L\setminus L_2$ такий що

$$\|x_3\|_X=1,\quad \|x_3-x\|_X>1/2\quad (x\in L_2) \text{ і так надалі.}$$

Якщо для деякого n одержимо, що $L=L_n$, то L має скінчену розмірність, тому що

$$L=\{c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n\}.$$

Якщо такого скінченого n не існує, то ми побудуємо обмежену послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ елементів з L, таку що $\|x_i-x_j\|_X>1/2$ коли $i\ne j$. З такої послідовності неможливо виділити збіжну частинну послідовність, що суперечить тому, що L компактний підпростір.

Завдання.

1. Довести, що компактний простір є сепарабельним.
2. Побудувати на площині компактну множину, ізометричну своїй частині.
3. Нехай E та F компактні множини в метричному просторі X. Довести, що множина $A=\{\lambda\in R,\ \lambda=\rho(x,y),\ x\in E,\ y\in F\}$ є компактна множина.

4. Довести, що будь-який підпростір сепарабельного метричного простору є сепарабельним метричним простором.

5. Довести, що простір l_∞ усіх обмежених числових послідовностей $x=(\xi_1,\xi_2,...)$ з нормою $\|x\|=\sup\limits_n|\xi_n|$ є повним несепарабельним простором.

6. Довести, що простір s усіх числових послідовностей $x=(\xi_1,\xi_2,...)$ з нормою $\|x\|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{|\xi_n|}{1+|\xi_n|}$ є повним сепарабельним простором.

§ 5. Топологічні простори

При доведенні теорем у метричних просторах ми користувались в першу чергу не тією обставиною, що в метричному просторі існує метрика, а тим фактом, що в метричному просторі можна ввести поняття околу точки, а в зв'язку з цим поняття відкритої і замкненої множин, поняття граничної точки і тощо. Однак можна піти іншим шляхом і безпосередньо означати на даної множині систему відкритих множин за допомогою аксіом, не використовуючи поняття метрики. Цей шлях дає значно більшу свободу дій і приводить нас к так званим топологічним просторам, по відношенню до яких метричні простори є важливим, проте частковим випадком.

Означення 21. Довільну множину X назвемо топологічним простором, якщо в цій множині за деяким правилом виділена система підмножин $\tau=\{G_\alpha\}$, яка має такі властивості:

1) порожня множина $\varnothing$ і вся множина X належать до системи τ (тобто існують α',α'', що $G_{\alpha'}=\varnothing,\quad G_{\alpha''}=X$);
2) об'єднання довільної системи множин (скінченої або нескінченої) $G_\alpha\in\tau$ і перетин довільної скінченої кількості множин $G_\alpha\in\tau$ належать τ.

Множина X, в якій введено топологію τ, тобто пару (X,τ), називається топологічним простором T.

При цьому множини, які належать системі τ називаються (за означенням) відкритими.

Означення 22. Околом довільної точки $x\in T$ або множини $A\subset T$ називається довільна відкрита множина, що містить у собі цю точку (або відповідно множину A).

Означення 23. Точка $x\in T$ називається граничною точкою для деякої множини $A\subset T$, якщо в довільному околі цієї точки знайдеться принаймні одна точка з множини A, відмінна від точки x.

Означення 24. Замкненою множиною в топологічному просторі T називається всяка множина, яка є доповненням до відкритої множини.

З означення топологічного простору випливає, що порожня множина $\varnothing$ і вся множина T є замкнені. Також з закону двоїстості випливає, що перетин довільної системи замкнених множин і об'єднання скінченого числа замкнених множин є множиною замкненою.

Означення 25. Замиканням множини A з топологічного простору T називається найменша замкнена множина, яка містить у собі множину A, або, що те саме, перетин найможливіших замкнених множин, які містять у собі множину A. Позначається замикання A через $\overline{A}$ або $[A]$.

Приклади.

1. Якщо в довільній множині X покласти, що система τ складається лише з порожньої множини $\varnothing$ і всієї множини X, то дістанемо топологічний простір $T=(X,\tau)=(X,\{\varnothing,X\})$.

2. Нехай X довільна множина. Будемо вважати відкритими усі його підмножини. Тоді також дістанемо топологічний простір. В ньому усі множини одночасно і відкриті і замкнені. Тоді кожне з них співпадає з своїм замиканням.

Приклади 1 та 2 є тривіальними і тому мало цікавими.

3. Нехай множина X складається з двох різних елементів $X=\{a,b\}$. Будемо вважати відкритими підмножини $G_1=\varnothing, G_2=\{a\}, G_3=\{a,b\}$, то дістанемо топологічний простір, який називається двоточковою зв'язкою. В цьому просторі замкнені такі підмножини: $T, \varnothing, \{b\}$. Замиканням множини $\{a\}$ є T.

4. Довільний метричний простір X, в якому відкриті множини визначаються так, як це робилося раніше, є топологічним простором. Зокрема, простір R_1 є топологічним, якщо відкритими множинами вважати $\varnothing, R_1$ і всі множини, кожна точка яких є внутрішньою.

5. Нехай $X=(0,1)\square(1,2)$ і системою відкритих множин в X є $\varnothing, (0,1), (1,2)$ та X. Цей простір є топологічним.

Нехай на одній і тій же множині X задані дві топології τ_1 і τ_2 і тем самим означені два топологічних простора $T_1=(X,\tau_1)$ і $T_2=(X,\tau_2)$. Говорять, що топологія τ_1 сильніша або тонша ніж топологія τ_2, якщо система множин τ_2 міститься в τ_1. Про топологію τ_2 говорять при цьому, що вона слабше або грубіше ніж топологія τ_1. Наприклад, топологія прикладу 2 сильніша ніж топологія прикладу 1.

Топологічні простори є дуже широкими класами просторів і тому в самому загальному випадку для таких просторів можна дістати порівняно небагато важливих тверджень. Тому серед топологічних просторів ретельно вивчають лише деякі спеціальні простори, які дістаються або за допомогою різних обмежень на систему відкритих множин, або за допомогою введення різних операцій над елементами цих просторів.

Досить часто замість того щоб задавати всі відкрити множини в топологічному просторі, буває зручніше задати лише деякі системи відкритих множин, які мають ту властивість, що за допомогою об'єднання таких множин можна дістати довільну відкриту множину. Так, у метричному просторі X довільна відкрита множина G є, як відомо, множиною внутрішніх точок і тому кожна така множина може бути подана у вигляді об'єднання відкритих куль $U(x,\varepsilon)$

$$G=\bigcup_{x\in G}U(x,\varepsilon), \quad \varepsilon=\varepsilon(x)>0.$$

Ці міркування приводять нас до поняття бази топологічного простору.

Означення 26. Сукупність S відкритих множин G у деякому топологічному просторі T називається базою цього простору, якщо довільна відкрита множина з T може бути зображеною у вигляді об'єднання скінченої або нескінченої системи множин їх сукупності S.

Так, наприклад сукупність усіх відкритих куль (з довільним центром і радіусом) є базою у метричному просторі.

Таким чином топологію τ в просторі T можна задати, зазначив у цьому просторі деяку Ії базу.

Важливий клас топологічних просторів складають простори з зчисленою базою, які містять принаймні одну базу з зчисленої кількості множин.

Якщо в топологічному просторі T є зчислена база, то в ньому обов'язково є зчислена всюди щільна множина, тобто така зчислена множина, замикання якої є T. Дійсно, нехай $\{G_n\}$ зчислена база. Візьмемо у кожній множині G_n довільну точку x_n. Зчислена множина $X=\{x_n\}$ всюди щільна у T, тому що у противному випадку не порожня відкрита множина $G=T\setminus[X]$ не містило би жодної точки з X. А це не може бути оскільки G є сума деяких множин з системи $\{G_n\}$, а $x\in G_n$.

Топологічні простори з зчисленою всюди щільною множиною звуться сепарабельними.

Для метричних просторів має місце обернене твердження: якщо метричний простір є сепарабельним, то в ньому є зчислена база.

Серед топологічних просторів можна виділити простори, які більш близькі по своїм властивостям до метричних просторів. Для цього до означення 21 топологічного простору слід добавити додаткові умови. Однією з таких умов є існування зчисленої бази. Другий важливий тип додаткових умов є так звані аксіоми віддільності.

Означення 27. Топологічний простір T називається T_1- простором, якщо $\forall x, y \in T,\ x \neq y$, існує хоча б один окіл G_x точки x, якій не містить в собі точки y і, навпаки, існує окіл G_y точки y, який не містить точки x.

Ясно, що не кожний топологічний простір є T_1- простором. Так, наприклад простір $X = (0,1) \square (1,2)$ з топологією, введеною раніше у прикладі 5, не є T_1- простором, оскільки при $x = \frac{1}{3},\ y = \frac{2}{3}$ не існує околу точки $x = \frac{1}{3}$, який не містив би в собі точку $y = \frac{2}{3}$.

В T_1- просторі кожна точка є замкненою множиною. Дійсно, якщо $x \neq y$, то існує окіл G_yточки y, який не містить точку x, тобто $y \notin [x]$. Звідки $[x] = x$. Таким чином в T_1- просторі замкнена кожна скінчена множина точок.

Означення 28. Топологічний простір T називається T_2- простором або хаусдорфовим простором, якщо $\forall x, y \in T,\ x \neq y$ існують околи цих точок G_x і G_y, які між собою не перетинаються.

Будь-який хаусдорфов простір є T_1- простором, але не навпаки.

Означення 29. Топологічний простір T називається T_3- простором, якщо $\forall x \in T$ і довільної замкненої множини $F \subset T$, яка не містить в собі точки x, існують відповідно околи G_x і G_F, які між собою не перетинаються.

Простори, які є одночасно T_1- і T_3- просторами, називаються регулярними.

Означення 30. Топологічний простір T називається T_4- простором, якщо для довільних замкнутих множин F_1 і F_2 з простору T, які між собою не перетинаються, існують околи G_{F_1} і G_{F_2}, які також між собою не перетинаються.

Простори, які є одночасно T_1- і T_4- просторами, називаються нормальними.

Будь-який метричний простір є нормальним простором.

Означення 31. Топологічний простір T називається метризованим, якщо на множині елементів цього простору можна ввести метрику $\rho(x, y),\quad x, y \in T$, в такий спосіб, щоб відкриті множини, які породжуються цією метрикою, були саме тими, які визначають цей топологічний простір.

Можна довести, що якщо топологічний простір має зчислену базу і є нормальним, то він буде метризованим і навпаки.

Глава III.

§ 1. Лінійні оператори (операції)

Означення 1. Нехай X і Y є будь-яки не порожні множини. Коли кожному елементові $x \in X$ припорядкуємо якийсь один елемент множини Y, то кажемо, що ми означали операцію (оператор) A в множині X. Елемент, що відповідає елементові x є його значення в Y; множину X називаємо областю, а множину $A(X) \subset Y$ протиобластю нашого оператора. Оператори позначаються так $y = Ax$.

Будемо вважати, що X і Y лінійні нормовані простори.

Означення 2. Оператор A називається неперервним в точці x_0, якщо для кожної послідовності елементів $\{x_n\} \subset X$, збіжної до x_0, маємо

$$\lim_{n \to \infty} Ax_n = Ax_0.$$

Тобто, якщо $\|x_n - x_0\|_X \to 0$, то $\|Ax_n - Ax_0\|_Y \to 0$.

Означення 3. Оператор A називається неперервним в X, якщо $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon)$, що коли

$$\|x_1 - x_2\| < \delta, \quad \|Ax_1 - Ax_2\| < \varepsilon \text{ для } \forall x_1, x_2 \in X.$$

Означення 4. Оператор A називається обмеженим, якщо існує така стала $M > 0$, що

$$\|Ax\|_Y \le M \cdot \|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

Нормою обмеженого оператора називається $\inf\{M\} = \|A\|$, тобто $\|Ax\|_Y \le \|A\| \cdot \|x\|_X$.

Означення 5. Оператор A називається адитивним, якщо

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2.$$

Означення 6. Оператор A називається однорідним, якщо

$$A(\lambda x) = \lambda \cdot Ax, \quad \forall \lambda \text{ - числа.}$$

Однорідний адитивний оператор називається лінійним

$$A(c_1 x_1 + c_2 x_2) = c_1 \cdot Ax_1 + c_2 \cdot Ax_2.$$

Властивості лінійних операторів в нормованих просторах.

Теорема 1. Для того щоб лінійний оператор був неперервним, необхідно і достатньо, щоб він був обмеженим.

Доведення. **Необхідність**. Нехай оператор A неперервний. Доведемо, що він обмежений. Припустимо, що A необмежений, тоді для $\forall n$ можна знайти такий елемент $x_n \in X$, що має місце нерівність

$$\|Ax_n\|_Y > n \cdot \|x_n\|_X, \quad x_n \ne \Theta \tag{1}$$

Маємо послідовність елементів $x_1, x_2, ..., x_n, ...$

Побудуємо іншу послідовність $\xi_n = \dfrac{1}{n \cdot \|x_n\|_X} \cdot x_n$.

З (1) випливає, що $\|\xi_n\|_X = \dfrac{1}{n \cdot \|x_n\|_X} \cdot \|x_n\|_X = \dfrac{1}{n}$.

Таким чином, $\|\xi_n - \Theta\|_X = \dfrac{1}{n} \to 0$, коли $n \to \infty$.

Розглянемо

$$\|A\xi_n\|_Y = \left\|\frac{1}{n\cdot\|x_n\|_X}\cdot Ax_n\right\|_Y = \frac{1}{n\cdot\|x_n\|_X}\cdot\|Ax_n\|_Y > 1 \text{ (згідно з (1)),}$$

тобто $\|Ax_n\|_Y > 1$.

Звідки $\lim\limits_{n\to\infty} A\xi_n \neq 0$, що суперечить неперервності A.

Достатність. Задамо $\varepsilon > 0$. Розглянемо

$$\|Ax_1 - Ax_2\|_Y \le M\cdot\|x_1 - x_2\|_X, \quad (M > 0).$$

Нехай $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$. Тоді, якщо $\|x_1 - x_2\|_X < \delta$

$$\|Ax_1 - Ax_2\|_Y < \varepsilon$$

і A неперервний оператор.

Теорема 2. Якщо лінійний оператор A неперервний в одній точці x_0, то він неперервний в X.

Доведення. Нехай оператор A неперервний в x_0. Тобто, для $\forall\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, що якщо

$$\|x - x_0\|_X < \delta, \quad \|Ax - Ax_0\|_Y < \varepsilon.$$

Нехай тепер x_1 і x_2 два елемента, відстань між котрими менше за δ $\|x_1 - x_2\|_X < \delta$. Тоді

$$\|Ax_1 - Ax_2\|_Y = \|Ax_1 + Ax_0 - Ax_0 - Ax_2\|_Y = \|A(x_1 + x_0 - x_2) - Ax_0\|_Y = \|Ax - Ax_0\|_Y,$$

де $x = x_1 + x_0 - x_2$.

$$\|x - x_0\|_X = \|x_1 + x_0 - x_2 - x_0\|_X = \|x_1 - x_2\|_X < \delta.$$

Тому $\|Ax_1 - Ax_2\|_Y < \varepsilon$ і A неперервний оператор.

Теорема 3. Якщо A лінійний обмежений оператор, то

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X = 1}\|Ax\|_Y$$

Доведення. Нехай $x \in \{x : \|x\|_X = 1\}$

$$\|Ax\|_Y \le \|A\|\cdot\|x\|_X \le \|A\| \text{ коли } \|x\|_X = 1.$$

Таким чином, числова послідовність $\{\|Ax\|_Y\}$ коли $\|x\|_X = 1$ обмежена. Тому існує

$$\sup_{\|x\|_X = 1}\|Ax\|_Y \le \|A\|.$$

Задамо довільне число $\varepsilon > o$. Тоді існує елемент x_ε такий, що

$$\|Ax_\varepsilon\|_Y > (\|A\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|_X \qquad (x_\varepsilon \neq \Theta).$$

Введемо $\xi = \dfrac{x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|_X}$; $\|\xi\|_X = 1$.

$$\|A\xi\|_Y = \frac{1}{\|x_\varepsilon\|_X}\cdot\|Ax_\varepsilon\|_Y > \frac{1}{\|x_\varepsilon\|_X}(\|A\| - \varepsilon)\|X_\varepsilon\|_x = \|A\| - \varepsilon.$$

Тобто, $\sup\limits_{\|x\|_X = 1}\|Ax\|_Y > \|A\| - \varepsilon$. Але ε довільне число, тому $\sup\limits_{\|x\|_X = 1}\|Ax\|_Y \ge \|A\|$.

Звідки $\sup\limits_{\|x\|_X = 1}\|Ax\|_Y = \|A\|$.

Приклад. Нехай $X = C[a,b]$; $K(t,s)$ неперервна функція коли $a \le t, s \le b$.

$$Ax = \int_a^b K(t,s)x(s)ds \in C[a,b] \quad (Y = C[a,b]).$$

Тому що
$$A(c_1x_1+c_2x_2)=\int_a^b K(t,s)[c_1x_1(s)+c_2x_2(s)]ds=c_1\int_a^b K(t,s)x_1(s)ds+c_2\int_a^b K(t,s)x_2(s)ds=c_1Ax_1+c_2Ax_2$$
то A лінійна операція (оператор). Далі
$$\|Ax\|_{C[a,b]}=\max_{a\le t\le b}\left|\int_a^b K(t,s)x(s)ds\right|\le \max_{a\le s\le b}|x(s)|\cdot\max_{a\le t\le b}\int_a^b |K(t,s)|ds=M\cdot\|x\|_{C[a,b]};\quad M=\max_{a\le t\le b}\int_a^b |K(t,s)|ds,$$
то A обмежена операція (оператор).

Лінійний простір лінійних обмежених операторів (операцій).

Нехай X і Y два векторіальних нормованих простора. Розглянемо множину лінійних обмежених операторів, для котрих X область, а Y протиобласть $(X\to Y)$.

1. **Операція додавання**. Сумою двох операторів A_1 і A_2 з $(X\leftarrow Y)$ називається оператор A_1+A_2
$$(A_1+A_2)x=A_1x+A_2x \text{ (означення операції додавання).}$$
Легко бачити, що $A_1+A_2\in(X\to Y)$.

2. **Операція множення числа на оператор**
$$(\lambda A)x=\lambda\cdot Ax;\quad \lambda A\in(X\to Y).$$
Після введення операцій додавання та множення операторів на число $(X\to Y)$ стає векторіальною множиною, елементами якої є оператори.

Кожному обмеженому оператору A відповідає число $\|A\|\ge 0$, яке є його норма. Легко бачити, що $\|A\|=\inf\{M\}$ задовольняє усім умовам норми елемента в нормованому просторі. Таким чином, $(X\to Y)$ є лінійний нормований простір.

Означення 7. Послідовність операторів $\{A_n\}\subset(X\to Y)$ збігається по нормі до оператора $A\in(X\to Y)$, якщо
$$\lim_{n\to\infty}\|A_n-A\|=0.$$
Теорема 4. Нехай X і Y векторіальні простори. Тоді, якщо Y повне (банахове), то простір $(X\to Y)$ також буде повним.

Доведення. Нехай $\{A_n\}$ довільна фундаментальна послідовність операторів з $(X\to Y)$. Тобто, для $\forall\varepsilon>0$ існує $N(\varepsilon)$, що якщо $n,m>N$ $\quad\|A_n-A_m\|<\varepsilon$.

Доведемо, що ця послідовність збігається за нормою до оператора $A\in(X\to Y)$.

Нехай $x\in X$ (довільний але зафіксований). Розглянемо послідовність $\{A_nx\}\subset Y$
$$\|A_nx-A_mx\|_Y\le\|A_n-A_m\|\cdot\|x\|_X.$$
Звідки, $\|A_nx-A_mx\|_Y<\varepsilon_1$, коли $n,m>N$; $\quad \varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{\|x\|_X}$.

В просторі Y послідовність $\{A_nx\}$ фундаментальна. Але простір Y повний. Тому існує
$$\lim_{n\to\infty}A_nx=y \quad \text{в} \quad Y.$$
Нехай $Ax=\lim_{n\to\infty}A_nx$.

Легко довести, що оператор A лінійний. Доведемо, що A обмежений оператор.
$$\|A_n-A_m\|\ge\big|\|A_n\|-\|A_m\|\big|$$
Тому послідовність $\{\|A_n\|\}$ має границю і тому обмежена $\|A_n\|\le K$

$$\|A_n x\|_Y \le \|A_n\| \cdot \|x\|_X \le K \cdot \|x\|_X .$$

Таким чином, $\lim\limits_{n\to\infty}\|A_n x\|_Y = \|Ax\|_Y \le K \cdot \|x\|_X$ і оператор A обмежений.

Доведемо, що $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ за нормою.

$$\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|_X = 1}\|(A_n - A)x\|_Y$$

Але $\|A_n - A\| < \varepsilon$ коли $n, m > N$

$$\|A_n x - A_m x\|_Y \to \|A_n x - Ax\|_Y \le \varepsilon, \quad m \to \infty; \quad \|x\|_X = 1.$$

Таким чином, $\|A_n - A\| < \varepsilon$ і теорема доведена.

Зауваження. Збіжність операторів за нормою називають ще рівномірною збіжністю.

Означення 7. Послідовність операторів $\{A_n\} \subset (X \to Y)$ збігається в кожній точці до оператора $A \in (X \to Y)$, якщо

$$\lim_{n\to\infty} A_n x = Ax \quad \text{для} \quad \forall x \in X$$

(тобто $\lim\limits_{n\leftarrow\infty}\|A_n x - Ax\|_Y = 0$).

Зрозуміло, що з рівномірної збіжності випливає збіжність в кожній точці, але не навпаки.

Приклад. В l_2 розглянемо послідовність операторів

$$A_n x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, 0, 0, ...), \quad x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, \xi_{n+1}, ...); \quad A_n x \in l_2, \quad A_n \in (l_2 \to l_2)$$

$$\|A_n x - x\|_{l_2} = \|(0,0,...,\xi_{n+1},...)\|_{l_2} = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^2\right)^{1/2} \to 0,$$

коли $n \to \infty$ бо ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2$ збіжний.

Таким чином, послідовність $\{A_n\}$ в кожній точці збігається до оператора J

$$Jx = x .$$

Але, якщо ввести елемент $e_{n+1} = \left(0,0,...,0,\overset{n+1}{1},0,...\right)$, то

$$A_n e_{n+1} = (0,0,...0,0,...) = \Theta; \quad \|A_n e_{n+1} - e_{n+1}\|_{l_2} = \|-e_{n+1}\|_{l_2} = 1.$$

Звідки $\|A_n - J\| = \sup\limits_{\|x\|=1}\|A_n x - x\| \ge 1$.

Завдання.

1. Знайти, які з заданих операторів в $L_2(0,1)$

а) задані на всьому просторі; б) лінійні; в) обмежені:

$$A_1 x = \sqrt{|x(t)|}; \quad A_2 x = |x(t)|; \quad A_3 x = x(o), 0 \le t \le 1; \quad A_4 x = t\,x(t);$$

$$A_5 x = \int_{t-c}^{t+c} x(\xi)d\xi,\ x(t) = 0, \text{ якщо } t \notin [0,1]; \quad A_6 x = \varphi(t)x(t),\ \varphi(t) \in C[0,1];$$

$$A_7 x = x(1-t); \quad A_8 x = x[\varphi(t)], \text{ де } \varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1, \exists\varphi'(t) \ge \delta > 0;$$

$$A_8 x = x(t) - \int_0^1 x(t)g(t)dt, \quad \text{де} \quad g(t) \in L_2(0,1), \|g\| = 1.$$

2. Довести, що система двох лінійних операторів A_1 і A_2 $(A_1 \ne \Theta, A_2 \ne \Theta)$ які належать $(X \to Y)$, області значення котрих різні, лінійно незалежні.

3. Нехай $R_n = \{x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)\}$. Довести повноту простору $(R_n \to R_n)$.

4. Знайти норми операторів в $C[0,1]$

$$A_1 x=\int_0^t x(s)ds;\quad A_2 x=\int_0^1 \sin\pi(t-s)x(s)ds;\quad A_3 x=\int_0^1 e^{t-s}x(s)ds;\quad A_4 x=\int_0^1 t^n s^m x(s)ds .$$

5. Довести, що будь-який лінійний оператор $A\in(R_n\to R_m)$ можна подати у вигляді прямокутної матриці розміру $n\times m$. Знайти норму оператора A, якщо норми в R_n та R_m задані таким чином

а) $R_n:\ \|x\|=\max\limits_{1\le i\le n}|\xi_i|;\quad R_m:\ \|x\|=\sum\limits_{i=1}^{m}|\xi_i|$ б) $R_n:\ \|x\|=\sum\limits_{i=1}^{n}|\xi_i|;\quad R_m:\ \|x\|=\max\limits_{1\le i\le m}|\xi_{ii}|$

в) $R_n:\ \|x\|=\sum\limits_{i=1}^{n}|\xi_i|;\quad R_m:\ \|x\|=\sum\limits_{i=1}^{m}|\xi_i|$ г) $R_n:\ \|x\|=\max\limits_{1\le i\le n}|\xi_i|;\quad R_m:\ \|x\|=\max\limits_{1\le i\le m}|\xi_i|$.

§ 2. Добуток операторів

Нехай X,Y і Z векторіальні нормовані простори. Оператор A відображає X на Y, а оператор B відображає Y на Z.

Означення 8. Добутком операторів B і A - BA називається оператор, якій діє з X в Z за законом

$$(BA)x=B(Ax).$$

Теорема 5. Якщо $A\in(X\to Y)$, а $B\in(Y\to Z)$, то $BA\in(X\to Z)$ тобто BA лінійний обмежений оператор.

Доведення. $BA(c_1x_1+c_2x_2)=B(c_1Ax_1+c_2Ax_2)=c_1BAx_1+c_2BAx_2$

$$\|BAx\|_Z\le\|B\|\cdot\|Ax\|_Y\le\|B\|\cdot\|A\|\cdot\|x\|_X .$$

Таким чином, $\|BA\|\le\|B\|\cdot\|A\|$.

Властивості добутку операторів.

1. $(B_1+B_2)A=B_1A+B_2A$
2. $B(A_1+A_2)=BA_1+BA_2$
3. $C(BA)=(CB)A$
4. Нехай J тотожній оператор $Jx=x$, тоді $JA=AJ=A$
5. $BA\ne AB$
6. Якщо $A\in(X\to Y)$ і $B\in(Y\to Z)$, то $BA\in(X\to Z)$ та $\|BA\|\le\|B\|\cdot\|A\|$
7. Нехай послідовність операцій $\{A_n\}$ $(A_n\in(X\to Y), n=1,2,...)$ збігається до оператору $A\in(X\to Y)$ за нормою $\|A_n-A\|\to 0$, а послідовність операторів $\{B_n\}$ $(B_n\in(Y\to Z))$ збігається до оператору $B\in(Y\to Z)$ за нормою $\|B_n-B\|\to 0$, тоді послідовність операторів $\{B_nA_n\}$ за нормою збігається до оператору BA.

Простір $(X\to X)$ є кільце, але не комутативне кільце. Одиниця кільця це тотожній оператор.

Приклад. Нехай $X=C^{(1)}[a,b],\quad Y=C[a,b],\quad Ax=x'(t),\quad By=\int_0^t y(s)ds$

Тоді $ABy=A\left(\int_0^t y(s)ds\right)=\dfrac{d}{dt}\int_0^t y(s)ds=y(t),\quad AB=J$

$$BAx=Bx'(t)=\int_0^t x'(s)ds=x(t)-x(o),\quad BA\ne J$$

Особливу цікавість має множина операторів $(X \to X)$. В цьому просторі існує добуток будь-якого числа операторів. Зокрема, існують так звані степені операторів

$$A^n = A(A^{n-1}), \quad n = 1,2,...$$

Означення 9. Нехай A діє з X в Y ; B діє з Y в X. Оператор B називається лівим оберненим оператором оператора A, якщо $BAx = x, \forall x \in X$, тобто $BA = J$.

Означення 10. Оператор С, який діє з Y в X називається правим оберненим оператором оператора A, якщо $ACy = y, \forall y \in Y$, тобто $AC = J$.

Якщо у оператора А існують лівий і правий обернені оператори, то вони збігаються $B = C$. В цьому випадку кажуть, що A має обернений оператор $B = C = A^{-1}$

$$A^{-1}Ax = x, \quad AA^{-1}y = y .$$

Розглянемо операторне рівняння $Ax = y$, де y відомий елемент простору Y; x шуканий елемент простору X .

Нехай операція A має лівий обернений оператор B і рівняння має розв'язок, тобто існує елемент x_0 такий що $Ax_0 = y$. Тоді

$$BAx_0 = By, \quad x_0 = By .$$

Таким чином в цьому випадку рівняння не може мати більш одного рішення.

Нехай оператор A має правий обернений оператор C. В цьому випадку операторне рівняння завжди має рішення. Дійсно, $x_0 = Cy$ - рішення рівняння

$$Ax_0 = A(Cy) = y .$$

Але рівняння може мати в цьому випадку не одне рішення.

Таким чином, якщо оператор A має обернений оператор A^{-1}, то операторне рівняння $Ax = y$ завжди має розв'язок $x = A^{-1}y$ і він один.

Властивості обернених операторів.

1. Якщо А лінійний оператор, який діє з X в Y і має обернений оператор A^{-1}, то рівняння $Ax = \Theta$ має тільки нульове рішення.

Доведення. Якщо A лінійний оператор, $A \in (X \to Y)$, має A^{-1}, тоді рівняння $Ax = \Theta$ має тільки одне рішення. Але $x = \Theta$ є його рішення. Тому інших рішень немає.

2. Нехай A лінійний оператор, який діє з X в Y і має обернений оператор A^{-1}. Тоді A^{-1} теж лінійний оператор з Y в X. (Якщо A обмежений оператор, то з цього не випливає обмеженість A^{-1}).

Доведення. Розглянемо елемент

$$x_0 = A^{-1}(c_1y_1 + c_2y_2) - c_1A^{-1}y_1 - c_2A^{-1}y_2$$

для будь-яких елементів y_1 та y_2 з Y.

$$Ax_0 = AA^{-1}(c_1y_1 + c_2y_2) - c_1AA^{-1}y_1 - c_2AA^{-1}y_2 = c_1y_1 + c_2y_2 - c_1y_1 - c_2y_2 = \Theta .$$

Тобто, x_0 є рішення $Ax = \Theta$. За першою властивістю $x_0 = \Theta$

$$A^{-1}(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1A^{-1}y_1 + c_2A^{-1}y_2 .$$

3. Нехай X, Y і Z лінійні нормовані простори. Оператори $A \in (X \to Y)$ і $B \in (Y \to Z)$ мають обмежені обернені $A^{-1} \in (Y \to X)$ і $B^{-1} \in (Z \to Y)$. Тоді оператор BA має обмежений обернений оператор $(BA)^{-1} \in (Z \to X)$ і

$$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}; \quad \|(Ba)^{-1}\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|B^{-1}\| .$$

Доведення. Оператор $A^{-1}B^{-1}$ буде і лівим і правим оберненим оператором для BA. Дійсно, $(A^{-1}B^{-1})(BA) = A^{-1}(B^{-1}B)A = A^{-1}A = J$

$$(BA)(A^{-1}B^{-1})=B(AA^{-1})B^{-1}=BB^{-1}=J$$

4. Нехай X і Y лінійні нормовані простори; A лінійний оператор, який ототожнює X на Y, тобто $A(X)=Y$ та існує така стала $m>0$, що

$$\|Ax\|_Y \geq m\|x\|_X \quad \forall x\in X .$$

Тоді існує обернений оператор A^{-1}, який буде обмеженим і

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{m} .$$

Доведення. Нехай y довільний елемент з Y. Тоді існує елемент $x\in X$, що $Ax=y$. За умовою, що $\|Ax\|_Y \geq m\|x\|_X$, легко бачити що такий елемент один.

Дійсно, нехай існує ще один елемент x_1 такий що $Ax_1=y$.

Тоді

$$A(x_1-x)=0, \quad 0=\|A(x_1-x)\|_Y \geq m\|x_1-x\|_X , \quad x_1=x .$$

Таким чином, кожному $y\in Y$ відповідає певний елемент x з X: $A^{-1}y=x$.

Обернений оператор існує.

$$\|x\|_X = \|A^{-1}y\|_X \leq \frac{1}{m}\|Ax\|_Y = \frac{1}{m}\|y\|_Y .$$

Тобто, $\|A^{-1}x\|_Y \leq \frac{1}{m}\|y\|_Y$ і A^{-1} обмежений оператор.

5. (Теорема Банаха). Нехай X банахів простір; A лінійний обмежений оператор, якій діє в X $\left(A\in(X\to X)\right)$ і $\|A\|<1$.

Тоді оператор $J-A$ має обмежений обернений оператор $(J-A)^{-1}$

$$(J-A)^{-1}=J+A+A^2+\ldots+A^n+\ldots; \quad \|(J-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|} .$$

Доведення. Розглянемо послідовність операторів, які діють в X

$$S_n=J+A+A^2+\ldots+A^{n-} , \quad (S_1=J)$$

Легко бачити, що послідовність $\{S_n\}$ буде фундаментальною за нормою

$$\|S_{n+p}-S_n\|=\|A^n+A^{n+1}+\ldots+A^{n+p-1}\| \leq \|A^n\|+\|A^{n+1}\|+\ldots+\|A^{n+p-1}\| \leq \|A\|^n+\|A\|^{n+1}+\ldots+\|A\|^{n+p-1} \leq$$

$$\leq \|A\|^m+\|A\|^{n+1}+\ldots+\|A\|^{n+p-1}+\|A\|^{n+p}+\ldots=\frac{\|A\|^n}{1-\|A\|}$$

Але $\|A\|<1$, тому для $\forall\varepsilon>0$ існує $N(\varepsilon)$, що коли $n\geq N$

$$\|S_{n+p}-S_n\|<\varepsilon .$$

Простір $(X\to X)$ повний. Тому існує оператор S, який є сума збіжного ряду

$$S=J+A+A^2+\ldots+A^n+\ldots$$

S лінійний та обмежений оператор. S є обернений оператор для $J-A$:

$$S(J-A)=\lim_{n\to\infty}S_n(J-A)=J-\lim_{n\leftarrow\infty}A^n=J$$

$$\lim_{n\to\infty}\|A^n\|=\lim_{n\to\infty}\|A\|^n=0$$

Таким чином, $S(J-A)=J$. Легко бачити, що $(J-A)S=J$.

$$(J-A)^{-1}=J+A+A^2+\ldots+A^n+\ldots$$

За властивостями обернених операторів $(J-A)^{-1}$ лінійний $S\in(X\to X)$, тому він обмежений.

$$\left\|(J-A)^{-1}\right\| = \lim_{n\to\infty}\|S_n\| \le 1 + \|A\| + \|A\|^2 + \ldots + \|A\|^n + \ldots = \frac{1}{1-\|A\|}.$$

Теорема Банаха доведена.

Теорема 6. (Продовження лінійного оператора за неперервністю).

Нехай X лінійний нормований простір, L векторіальна множина густа в X $\left(\overline{L} = X\right)$. Нехай A_0 лінійний обмежений оператор, якій визначень на L і діє в повний нормований простір Y. Тоді існує лінійний обмежений оператор A, який визначень на всьому X, діє в Y і

1) $Ax = A_0 x$, якщо $x \in L$
2) $\|A\| = \|A_0\|$

A називається продовженням A_0 на X за неперервністю.

Доведення. L множина густа в X. Тому для кожного $x \in X$ можна знайти послідовність $\{x_n\}$, котра збігається до x

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

В Y їй відповідає послідовність $A_0x_1, A_0x_2, \ldots, A_0x_n, \ldots$

Доведемо, що ця послідовність фундаментальна

$$\|A_0x_n - A_0x_m\|_Y = \|A_0(x_n - x_m)\|_Y \le \|A_0\| \cdot \|x_n - x_m\|_X$$

Для $\forall \varepsilon > 0$ існує $N(\varepsilon)$, що коли $n, m \ge N$

$$\|A_0x_n - A_0x_m\|_Y < \varepsilon$$

Але Y повний простір. Тому $\{A_0x_n\}$ збігається в Y

$$\lim_{n\to\infty} A_0x_n = y \in Y.$$

Елементу x відповідає $y \in Y$.

Доведемо, що цей елемент y не залежить від обраної послідовності, яка збігається до x.

Нехай $x = \lim_{n\to\infty} \xi_n$, а $\overline{y} = \lim_{n\to\infty} A_0\xi_n$.

Тоді $\|y - \overline{y}\|_Y = \lim_{n\to\infty}\|A_0(x_n - \xi_n)\|_Y \le \|A_0\| \cdot \lim_{n\to\infty}\|x_n - \xi_n\| = 0$

$$\overline{y} = y, \quad y = \lim_{n\to\infty} A_0x_n = Ax.$$

Якщо $x \in L$, то x відповідає послідовність $(x, x, \ldots, x, \ldots)$ і $A_0x = Ax$.

Лінійність оператора A очевидна.

Доведемо, що A обмежений оператор і $\|A\| = \|A_0\|$

$$\|Ax\|_Y = \lim_{n\to\infty}\|A_0x_n\| \le \|A_0\| \cdot \lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \|A_0\| \cdot \|x\|,$$

A обмежений і $\|A\| \le \|A_0\|$.

Нехай $x \in L$. Тоді $A = A_0$

$$\|Ax\|_Y = \|A_0x\|_Y \le \|A\| \cdot \|x\|_X \quad \text{і} \quad \|A_0\| \text{ не перевершує } \|A\|.$$

Тобто, $\|A\| = \|A_0\|$.

Завдання.

1. Нехай $P(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ многочлен з додатними коефіцієнтами від $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_n$ лінійні оператори, які діють в R_n. Довести, що

$$\|P(A_1, A_2, \ldots, A_n)\| \le P(\|A_1\|, \|A_2\|, \ldots, \|A_n\|).$$

2. В просторі многочленів, залежних від змінної t, позначимо D оператор диференціювання за t, T - оператор множення на t. Довести, що $DT \ne TD$.

Знайти $DT-TD$.

3. Нехай $B\in(X\to X)$. Довести, що множина операторів A, для котрих $BA=0$ $(BAx=\Theta\in X)$ є підпростір в $(X\to X)$.

4. Довести, що якщо A і B комутативні, то $(AB)^n=A^nB^n$.

5. Нехай $P\in(X\to X)$ і $P^2=P$ (P оператор проектування). Довести, що

$$(J-P)^2=J-P.$$

6. З'ясувати геометричний зміст таких умов

а) $AP=A$ б) $A(J-A)=A$ в) $PA=A$ г) $PA=AP$ д) $PAP=A$ е) $PAP=AP$ є) $PAP=PA$, де A довільний обмежений лінійний оператор, P оператор проектування.

7. Оператор $Ax=x^2+px+q$, де p,q дійсні числа. Побудувати лівий і правий обернені оператори.

8. Довести, що оператор A має обернений, якщо

$$J+\alpha_1A+\alpha_2A^2+...+\alpha_nA^n=0,\quad A \text{ діє в } X,\quad \alpha_i \text{ - числа.}$$

9. Довести, що якщо оператор A задовольняє умові $A^m=0$ для будь-якого m (A діє в просторі X), то оператор $\alpha J-A$ завжди має обернений для любого числа α.

§ 3. Лінійні функціонали.

Нехай X не порожня множина. Коли кожному елементові $x\in X$ припорядкуємо певне число (дійсне чи комплексне), то кажемо, що ми означали функціонал $y=f(x)$. Тобто, функціонал є операція, протиобласть якої є множина чисел. Будемо вважати, що це є множина дійсних чисел. Якщо це є множина комплексних чисел, то на це будемо вказувати окремо.

Нехай X лінійний векторіальний простір, який є областю функціонала $f(x)$.

Функціонал $f(x)$ лінійний, якщо

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)\qquad \text{і}\qquad f(\lambda x)=\lambda f(x).$$

Функціонал $f(x)$ обмежений, якщо існує $M>0$, що

$$|f(x)|\le M\cdot\|x\|_X.$$

Норма обмеженого функціонала це $\inf\{M\}=\|f\|$, тобто точна нижня мережа множини пригодних констант. Як і у випадку обмежених операторів

$$\|f\|=\sup_{\|x\|=1}|f(x)|.$$

Приклад. $X=L_2(0,1)$; $g(t)\in L_2(0,1)$; $f(x)=\int_0^1 x(t)g(t)dt$.

Легко бачити, що функціонал лінійний та обмежений.

Означення 11. Ядром функціоналу $f(x)$ називається множина елементів

$$L=\{x:\ f(x)=0\}\equiv Ker\ f.$$

Легко бачити, що якщо $f(x)$ лінійний функціонал, то $c_1x_1+c_2x_2\in Ker\ f$, якщо $x_1,x_2\in Ker\ f$.

Якщо $f(x)$ неперервний функціонал, то ядро функціоналу $Ker\ f$ є замкнена множина.

Ядро лінійного функціоналу визначає функціонал з точністю до сталого множника, тобто якщо $Ker\ f=Ker\ g$, то $f(x)=cg(x)$.

Теорема 7. (Банаха-Хана). Коли в векторіальному просторі $L \subset X$ (X векторіальний простір) є означений лінійний обмежений функціонал $f_0(x)$, то існує лінійний обмежений функціонал $f(x)$, означений в X, якій задовольняє умови

$$f(x) = f_0(x) \text{ для } x \in L$$

$$\|f\| = \|f_0\|$$

Теорема 8. Для кожного $x_0 \in X$ існує такий лінійний обмежений функціонал $f(x)$, що

$$f(x_0) = \|x_0\| \quad \text{і} \quad \|f\| = 1.$$

Доведення. Нехай L множина елементів виду tx_0 $(t = const)$.

На L визначимо функціонал $f_0(tx_0) = t \cdot \|x_0\|$, якій є лінійним та обмеженим.

Дійсно, якщо $x_1 = t_1 x_0$, $x_2 = t_2 x_0$, то

$$f_0(c_1 x_1 + c_2 x_2) = f_0((c_1 t_1 + c_2 t_2)x_0) = (c_1 t_1 + c_2 t_2)\|x_0\| = c_1 f_0(x_1) + c_2 f_0(x_2).$$

Далі $|f_0(x)| = |t| \cdot \|x_0\| = \|tx_0\| = \|x\|$.

Звідки випливає, що $\|f_0\| = 1$.

За теоремою Банаха-Хана існує лінійний обмежений функціонал $f(x)$, визначений на X і такий що $f(x) = f_0(x)$, коли $x \in L$ і $\|f\| = \|f_0\|$.

Таким чином, $\|f\| = 1$ і $f(x_0) = \|x_0\|$.

Теорема 9. Нехай $f_0(x)$ є будь-який функціонал, означений на множині $G \subset X$. Щоб існував лінійний обмежений функціонал $f(x)$, який означений у просторі X і який задовольняв би умовам

1. $f_0(x) = f(x)$ для $x \in G$
2. $\|f(x)\| \le M$ для певного $M > 0$

необхідно і достатньо, щоб справджувалась нерівність

$$\left| \sum_{i=1}^{r} h_i f_0(x_i) \right| \le M \left| \sum_{i=1}^{r} h_i x_i \right|$$

для кожної скінченої послідовності елементів $x_1, x_2, ..., x_r$ множини G і для кожної скінченої послідовності дійсних чисел $h_1, h_2, ..., h_n$.

Теорема 10. Коли дано замкнений векторіальний простір $L \subset X$ і елемент $y_0 \in X$, що лежить на віддалі $d > 0$ від простору L, то існує лінійний обмежений функціонал $f(x)$, означений у просторі X, який задовольняє умови

1. $f(y_0) = 1$
2. $f(x) = 0$, для $x \in L$
3. $\|f\| = \dfrac{1}{d}$.

Доведення. Розглянемо множину

$$L_1 = (L, x_0) = \{u = x + tx_0\}, \quad \text{де} \quad x \in L, \quad t = const.$$

Задамо на L_1 функціонал $f_0(u) = t$ $(f_0(x_0) = 1)$, $f_0(u)$ лінійний та обмежений.

Нехай $u_1 = x_1 + t_1 x_0$, $u_2 = x_2 + t_2 x_0$.

Тоді $f_0(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 t_1 + c_2 t_2 = c_1 f_0(u_1) + c_2 f_0(u_2)$

$$|f_0(u)| = |t| = \frac{|t| \cdot \|u\|}{\|u\|} = \frac{|t| \cdot \|u\|}{\|x + tx_0\|} = \frac{\|u\|}{\left\| x_0 - \left(-\dfrac{x}{t}\right) \right\|} \le \frac{\|u\|}{d}.$$

Вважаємо, що $u \neq 0, \quad t \neq 0$.

Таким чином, $f_0(u)$ обмежений на L_1 та $\|f_o\| \leq \frac{1}{d}$, d віддаль x_0 від L, тому існує така послідовність елементів $\{x_n\} \subset L$ що $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - x_0\| = d$.

$|f_0(x_n - x_0)| \leq \|f_0\| \cdot \|x_n - x_0\|$, але $|f_0(x_n - x_0)| = 1$,

$1 \leq \|f_0\| \cdot \|x_n - x_0\|, \quad 1 \leq \|f_0\| \cdot d, \quad \|f_0\| \geq \frac{1}{d}$.

Звідки, $\|f_0\| = \frac{1}{d}$.

За теоремою Банаха-Хана існує функціонал $f(x)$, визначений на X, який на L дорівнює $f_0(x)$ і $\|f\| = \|f_0\|$

$$f(x) = f_0(x + 0 \cdot x_0) = 0, \quad x \in L; \quad \|f\| = \|f_0\| = \frac{1}{d}.$$

Розглянемо тепер загальний вигляд лінійних функціоналів у деяких окремих нормованих просторах.

1. Нехай $X = E_n = \left\{ x = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i e_i ; e_1, e_2, ..., e_n \text{ - базис} \right\}$.

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} c_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i f_i ; \quad f(x) \sim (f_1, f_2, ..., f_n)$$

$f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i f_i$ - загальний вигляд лінійного функціонала в E_n.

Нехай $f(x)$ обмежений. Знайдемо $\|f\|$. Це залежить від того яким чином визначена норма в E_n. Нехай $\|x\|_{E_n} = \max\limits_{1\leq i\leq n}|c_i|$.

$$|f(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} c_i f_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |c_i| \cdot |f_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |f_i| \cdot \|x\|_{E_n}.$$

Звідки, $\|f\| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |f_i|$.

З другого боку, якщо розглянути елемент

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} sign\, f_i \cdot e_i \in E_n, \text{ то } \|x_0\|_{E_n} = 1$$

$$f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} sign\, f_i \cdot f_i = \sum_{i=1}^{n} |f_i| = \sum_{i=1}^{n} |f_i| \cdot \|x_0\|_{E_n}, \quad \|f\| = \sum_{i=1}^{n} |f_i|.$$

2. Нехай $X = L_p(a,b)\,(p \geq 1)$, $f(x)$ лінійний обмежений функціонал, означений у просторі $L_p(a,b)$.

Покладемо

$$\xi_t = \xi_t(u) = \begin{cases} 1, & a \leq u \leq t \\ 0, & t < u \leq b, \quad f(\xi_t) = g(t) \end{cases}$$

Доведемо, що $g(t)$ є абсолютно неперервна функція. Нехай $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$ інтервали, що не перекриваються з відповідними кінцями t_i і t_i', де $t_i < t_i'$.

Покладаючи $\varepsilon_i = sign[g(t_i) - g(t_i')]$, маємо

$$\sum_{i=1}^{n}\left|g(t_i)-g(t_i')\right|=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\cdot\left[g(t_i)-g(t_i')\right]=f\left(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\cdot\left[\xi_{t_i}-\xi_{t_i'}\right]\right)\le\|f\|\cdot\left\|\sum_{i=1}^{n}\left[\xi_{t_i}-\xi_{t_i'}\right]\right\|.$$

Тому що функція $\left(\xi_{t_i}-\xi_{t_i'}\right)\varepsilon_i$ має в інтервалі δ_i значення $\varepsilon_i=\pm1$, а поза ними дорівнює нулеві, то за умовою, що інтервали δ_i не перекриваються, маємо

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_{t_i}-\xi_{t_i'}\right)\right\|=\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\delta_i\right|^p\right)^{1/p},\quad \left|\delta_i\right| \text{ - довжина інтервалу } \delta_i.$$

Отже, маємо

$$\sum_{i=1}^{n}\left|g(t_i')-g(t_i')\right|\le\|f\|\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\delta_i\right|^p\right)^{1/p},$$

а з цього виходить, що функція $g(t)$ абсолютно неперервна.

Покладемо тепер $g'(t)=\alpha(t)$. Функція $\alpha(t)$ є інтегровною і тому що $\xi_\alpha=0$, то маємо

$$f(\xi_t)=\int_a^t\alpha(t)dt,\ \text{звідки}\quad f(\xi_t)=\int_a^b\xi_t(u)\alpha(u)du.$$

Нехай $c_1,c_2,...,c_n$ є будь-які числа, $a=t_0<t_1<t_2<...<t_n=b$ і $x(t)=c_i$ для $t_{i-1}\le t<t_i$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$. Маємо

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i\left(\xi_{t_i}-\xi_{t_{i-1}}\right),\quad f(x)=\int_a^b x(t)\alpha(t)dt.$$

Якщо $x(t)$ довільна вимірна обмежена на $[a,b]$ функція, то існує така послідовність $\{x_n(t)\}$ обмежених у своїй сукупності східчастих функцій, що збігаються майже всюди до $x(t)$.

Внаслідок цього $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b\left|x_n(t)-x(t)\right|^p dt=0$, звідки $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$ і

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)\alpha(t)dt=\int_a^b x(t)\alpha(t)dt \quad \text{(неперервність функціоналу).}$$

Нехай $p>1$. Покладемо

$$x_n(t)=\begin{cases}\left|\alpha(t)\right|^{q-1}\cdot sign\,\alpha(t), & \left|\alpha(t)\right|^{q-1}\le n\\ n\cdot sign\cdot\alpha(t), & \left|\alpha(t)\right|^{q-1}>n,\quad \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1\end{cases}$$

Маємо

$$\left|f(x_n)\right|=\left|\int_a^b x_n(t)\alpha(t)dt\right|\le\|f\|\cdot\left(\int_a^b\left|x_n(t)\right|^p dt\right)^{1/p}$$

і тому що

$$\left|x_n(t)\alpha(t)\right|=\left|x_n(t)\right|\cdot\left|\alpha(t)\right|\ge\left|x_n(t)\right|\cdot\left|x_{n-1}(t)\right|^{\frac{1}{q-1}}$$

маємо

$$\int_a^b\left|x_n(t)\right|^{\frac{q}{q-1}}dt\le\|f\|\cdot\left(\int_a^b\left|x_n(t)\right|^p dt\right)^{1/p}.$$

Звідки, зважаючи на те, що $\dfrac{q}{q-1}=1$ одержуємо

$$\left(\int_a^b |x_n(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \le \|f\|.$$

Тому що ця нерівність справедлива для всіх натуральних n, а

$$|x_n(t)|^p \le |\alpha(t)|^{pq-p} = |\alpha(t)|^q$$

і майже всюди

$$\lim_{n\leftarrow\infty} |x_n(t)|^p = |\alpha(t)|^q,$$

то одержуємо

$$\left(\int_a^b |\alpha(t)|^q\,dt\right)^{1/q} \le \|f\|, \quad \alpha(t) \in L_q(a,b).$$

Внаслідок цього, якщо $x(t)$ є довільна вимірна функція, сумовна с p - тим степенем, то добуток $x(t)\alpha(t)$ є інтегровною функцією.

Означимо тепер послідовність $\{x_n(t)\}$ так

$$x_n(t) = \begin{cases} x(t), & |x(t)| \le n \\ n \cdot sign\, x(t), & |x(t)| > n \end{cases}$$

Тоді маємо

$$\|x - x_n\| = \left(\int_a^b |x(t) - x_n(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \quad i \quad \lim_{n\to\infty} \|x(t) - x_n(t)\| = 0.$$

Так що

$$\left|\int_a^b x(t)\alpha(t)dt - f(x_n)\right| = \left|\int_a^b [x(t) - x_n(t)]\alpha(t)dt\right| \le \left(\int_a^b |x(t) - x_n(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |\alpha(t)|^q\,dt\right)^{1/q},$$

$$|f(x)| = \left|\int_a^b x(t)\alpha(t)dt\right| \le \|x\| \cdot \left(\int_a^b |\alpha(t)|^q\,dt\right)^{1/q}.$$

Таким чином,

$$\|f\| = \left(\int_a^b |\alpha(t)|^q\,dt\right)^{1/q}.$$

Якщо $p = 1$, то легко бачити, що $\|f\| = vrai\max\limits_{a\le t\le b} |\alpha(t)|$.

3. $l_p = \left\{ x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...): \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty \right\}$; $\|x\|_{l_p} = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\right)^{1/p}$

Означимо елементи $e_n = \left(0,0,...,0,\overset{n}{1},0,...\right)$; $\|e_n\|_{l_p} = 1$.

$\forall x \in l_p$ має вигляд $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n + ...$

Нехай $f(e_n) = f_n$. Легко довести, що $y = (f_1, f_2, ..., f_n, ...)$ належить l_q $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.

Загальний вигляд лінійного обмеженого функціонала

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n f_n\,; \quad \|f\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^q\right)^{1/q}.$$

Завдання.

1. Чи будуть лінійними в просторі $C[0,1]$ функціонали

а) $f(x)=\int_0^1 x(t)\cos t dt$ б) $f(x)=x(0)$ в) $f(x)=\int_0^1 x(t) sign\left(t-\frac{1}{2}\right)dt$ г) $f(x)=\int_0^1 tx(t^2)dt$

д) $f(x)=\int_0^1 |x(t)|dt$ е) $f(x)=\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)|$ є) $f(x)=\int_0^1 x^2(t)dt$ ж) $f(x)=x'\left(\frac{1}{2}\right)$

Які з них неперервні в $C[0,1]$. Знайти їх норми.

Які з них неперервні в $L_2(0,1)$. Знайти їх норми.

2. Чи будуть лінійними в просторі l_∞ функціонали

а) $f(x)=\xi_1$ б) $f(x)=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ в) $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ г) $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k}{2^k}$

д) $f(x)=\sup\limits_k|\xi_k|$ е) $f_n(x)=\xi_n-\xi_{n-1}$ є) $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k}{k}$ ж) $f(x)=\xi_1\cdot\xi_3$

Які з них неперервні в l_∞. Знайти їх норми.

Які з них неперервні в l_1. Знайти їх норми.

3. Нехай $f(x)=x(t_1)+x(t_2)+...+x(t_n)$; $f:C[a,b]\to R,\ t_i\in[a,b]$.

Довести, що це є лінійний обмежений функціонал. Знайти його норму.

§ 4. Спряжені простори, спряжені оператори

Нехай X і Y лінійні нормовані простори, $y=Ax$ лінійна обмежена операція, означена в X, противообласть $A(X)\subseteq Y$. X^*- сукупність лінійних обмежених функціоналів означених в просторі X, Y^*- відповідно в просторі Y. Простори X^* та Y^* називаються просторами спряженими відповідно до X і Y.

Розглянемо вираз $\varphi(Ax)$, де φ будь-який функціонал, означений у просторі Y. Цей вираз можна розглядати, очевидно, для будь-якого функціоналу, означеного у просторі Y

$x\in X\to Ax\to\varphi(Ax)$ - число. $\psi(x)=\varphi(Ax)$

Легко бачити, що цей функціонал лінійний та обмежений

$$\psi(x_1+x_2)=\varphi(Ax_1+Ax_2)=\varphi(Ax_1)+\varphi(Ax_2)=\psi(x_1)+\psi(x_2)$$

$$\psi(\lambda x)=\varphi(A(\lambda x))=\varphi(\lambda Ax)=\lambda\varphi(Ax)=\lambda\psi(x)\quad (\lambda \text{ дійсне число})$$

$$|\psi(x)|=|\varphi(Ax)|\le\|\varphi\|\cdot\|Ax\|_Y\le\|\varphi\|\cdot\|A\|\cdot\|x\|_X;\quad \|\psi\|\le\|\varphi\|\cdot\|A\|.$$

Таким чином, $\forall\varphi\in Y^*$ ототожнюється функціонал $\psi\in X^*$

$$\psi=A^*\varphi$$

Оператор A^* зветься спряженим (або приєднаним) з A.

Властивості спряжених операторів

1) Нехай $A\in(X\to Y)$, тоді $A^*\in(Y^*\to X^*)$ і $\|A\|=\|A^*\|$.

Доведення. Доведемо, що A^* лінійний та обмежений оператор. Нехай $\forall x\in X$

$$[A^*(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2)](x)=(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2)(Ax)=c_1\varphi_1(Ax)+c_2\varphi_2(Ax)=[c_1A^*\varphi_1+c_2A^*\varphi_2](x)$$

$$A^*(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2)=c_1A^*\varphi_1+c_2A^*\varphi_2$$

$$\|A^*\varphi\|=\|\psi\|\le\|A\|\cdot\|\varphi\|$$

Таким чином, оператор A^* обмежений і $\|A^*\|\le\|A\|$.

Легко бачити, що $\|A^*\|=\|A\|$.

Якщо $A=\Theta$, тобто $Ax=\Theta$ $(\|A\|=0)$, то $A^*=\Theta$:

$$\left(A^*\varphi\right)(x)=\varphi(Ax)=\varphi(0)=0 \quad \forall\varphi\in Y^*$$

$$A^*\varphi=0 \quad i \quad \|A_*\|=0.$$

Нехай $A\neq\Theta$, існує елемент x_0, що $Ax_0\neq 0$, $y_0=Ax_0$.

За теоремою 7 існує функціонал $f\in Y^*$ такий що $f(y_0)=\|y_0\|_Y$ і $\|f\|=1$

$$f(y_0)=f(Ax_0)=\|y_0\|_Y=\|Ax_0\|_Y$$

$$\|Ax_0\|_Y=\left|\left(A^*f\right)(x_0)\right|\le\|A_*f\|\cdot\|x_0\|_X\le\|A^*\|\cdot\|f\|\cdot\|x_0\|_X=\|A^*\|\cdot\|x_0\|_X$$

Звідки $\|A\|$ не перевершує $\|A^*\|$ і $\|A\|=\|A^*\|$.

2) $J^*=J$.

Дійсно, $\left(J^*\varphi\right)(x)=\varphi(Jx)=\varphi(x)=(J\varphi)(x)$.

3) Нехай $A\in(X\to Y)$ і $B\in(X\to Y)$. Тоді $(A+B)^*=A^*+B^*$

Доведення.

$$\left[(A+B)^*\varphi\right](x)=\varphi[(A+B)x]=\varphi(Ax+Bx)=\varphi(Ax)+\varphi(Bx)=\left(A^*\varphi\right)(x)+\left(B^*\varphi\right)(x)=$$

$$=\left[\left(A^*+B^*\right)\varphi\right](x) \quad \text{для} \quad \forall\varphi\in Y^* \text{ і } \forall x\in X$$

Звідки $(A+B)^*=A^*+B^*$.

4) Нехай $A\in(X\to Y)$, $B\in(Y\to Z)$. Тоді $(AB)^*=B^*A^*$.

Доведення.

$$\left[(AB)^*\varphi\right](x)=\varphi[(AB)x]=\left(A^*\varphi\right)(Bx)=\left(B^*A^*\varphi\right)(x) \quad \text{для} \quad \forall\varphi\in Z^* \text{ і } \forall x\in X.$$

$$(AB)^*=B^*A^*.$$

5) Нехай $A\in(X\to Y)$, $B\in(Y\to X)$ і $BA=J$ (B - лівий обернений A).

Тоді $(BA)^*=J^*=J=A^*B^*$ (B^* - правий обернений A^*) і навпаки.

6) Спряжений оператор від оберненого дорівнює оберненому від спряженого

$$\left(A^{-1}\right)^*=\left(A^*\right)^{-1}.$$

Приклади спряжених операцій у деяких просторах.

1) $X=C[a,b]$; $K(t,s)$ - неперервна функція $a\le t,s\le b$.

$Ax=\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds$ - неперервний обмежений оператор, якій діє в $C[a,b]$.

Нехай $\varphi(y)$, де $y\in C[a,b]$ будь-який лінійний обмежений функціонал.

Загальний вигляд лінійного обмеженого функціоналу в $C[a,b]$ такий

$\varphi(y)=\int\limits_a^b y(t)dg(t)$ - де $g(t)$ функція обмеженої варіації (інтеграл Стілтьеса).

$\psi(x)=\varphi[Ax]$ є також лінійний обмежений

$$\psi(x)=\int\limits_a^b x(t)du(t)$$

Нехай $y(t)=Ax=\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds$

$$\int\limits_a^b x(t)du(t)=\int\limits_a^b y(t)dg(t)$$

Розглянемо функцію

$$x_{v,n}=\begin{cases}0, & a\le t\le v\\ 1, & v+\frac{1}{n}\le t\le b\end{cases}$$

та лінійну в проміжку $v\le t\le v+\frac{1}{n}$.

$$\int_a^b x_{v,n}(t)du(t)=\int_a^b\left[\int_a^b K(t,s)x_{v,n}(s)ds\right]dg(t)=\int_a^b x_{v,n}(s)\left[\int_a^b K(s,t)dg(t)\right]ds\,.$$

Нехай $n\to\infty$ для всіх $t\in(a,b)$

$$u(t)=\int_a^b\left[\int_a^b K(t,s)dg(t)\right]ds \qquad (2)$$

Вираз (2) можна розглядати як зображення спряженої операції $A^*g=u(t)$.

2) $X=E_n=\{x:x=c_1e_1+c_2e_2+...+c_ne_n\}$; A - оператор, який визначень матрицею $A=\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$

$$Ax=y,\quad y=d_1e_1+d_2e_2+...+d_ne_n$$

$$x=\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}d_1\\ \vdots\\ d_n\end{pmatrix},\quad d_j=\sum_{i=1}^n a_{ji}c_i$$

$$f(x)=f_1c_1+f_2c_2+...+f_nc_n\,,\quad f(Ax)=(A^*f)(x)$$

$$f(Ax)=\sum_{j=1}^m f_j\left(\sum_{i=1}^n a_{ji}c_i\right)=\sum_{i=1}^n c_i\sum_{j=1}^n a_{ji}f_j\,,\quad A^*f=\sum_{j=1}^n a_{ji}f_j$$

Спряжений оператор визначається спряженою матрицею $A^*=\{a_{ji}\}_{j,i=1}^n$.

Завдання.

1. Знайти в просторі $L_2(0,1)$ оператор, спряжений з оператором

а) $Ax(t)=\int_0^t x(s)ds$ б) $A_\lambda x(t)=\begin{cases}x(t), & t\le\lambda\\ 0, & t>\lambda\end{cases}$

2. Знайти в просторі l_2 оператори, спряжені з операторами

а) $Ax=(0,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,...)$ б) $Ax=(\alpha_1\xi_1,\alpha_2\xi_2,...,\alpha_n\xi_n,...)$ в) $Ax=(0,0,\alpha_1\xi_1,\alpha_2\xi_2,...,\alpha_n\xi_n,...)$

г) $Ax=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,0,0,...)$ д) $Ax=\left(0,0,,...,0,\overset{n}{\xi_1},0,...\right)$,

де $x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,...)$ та α_i числа.

3. Довести, що

а) $c_0^*=l_1$ б) $l_1^*=l_\infty$ в) $l_p^*=l_q$, $1/p+1/q=1$.

§ 5. Слаба збіжність лінійних функціоналів

Означення 12. Кажемо, що послідовність $\{f_n\}$ лінійних функціоналів збігається слабо до функціонала f, якщо маємо

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)\ \text{ для }\ \forall x\in X\,.$$

Функціонал f називається слабою границею послідовності $\{f_n\}$; f - лінійний функціонал.

Якщо функціонали послідовності обмежені $\left(f_n \in X^*\right)$, то послідовність $\{\|f_n\|\}$ обмежена і

$$\|f\| \le \underline{\lim_{n\to\infty}}\|f_n\|$$

Щоб послідовність $\{f_n(x)\}$ лінійних обмежених функціоналів збігалася слабо до функціонала $f(x)$, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови: послідовність $\{\|f_n\|\}$ обмежена, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для всіх елементів деякої густої множини G в X .

Якщо простір X сепарабельний, то кожна множина лінійних обмежених функціоналів на X , норми яких є обмежені в своїй сукупності, є слабо компактна.

Означення 13. Послідовність $\{x_n\}$ елементів простору X називається слабо збіжною до елемента $x \in X$, якщо

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \quad \text{для всіх} \quad f \in X^*.$$

Щоб послідовність $\{x_n\}$ збігалася слабо до x, необхідно і достатньо, щоб послідовність $\{\|x_n\|_X\}$ була обмежена і $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(x_n) = \varphi(x)$ для всіх $\varphi \in K$, де K є множина, густа в X^*.

Якщо послідовність $\{x_n\}$, $x_n \in X$ (лінійного, нормованого) збігається за нормою до елемента x, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - x\|_X = 0$, то послідовність $\{x_n\}$ збігається до x і слабо.

З слабої збіжності послідовності елементів до елементу x збіжність за нормою не випливає.

§ 6. Цілком неперервні оператори

Означення 14. Лінійний оператор називається цілком неперервним, якщо він кожну обмежену множину з X перетворює на компактну (предкомпактну) множину з Y .

$\forall M \subset X, \quad X$ - обмежена; $A(M)$ - компактна (предкомпактна).

Приклад. Нехай X лінійний нормований простір.

$$x_1, x_2, ..., x_n \in X; \quad f_1, f_2, ..., f_n \in X^*$$

Тоді оператор $Ax = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)\cdot x_i$ цілком неперервний.

Властивості цілком неперервних операторів

1) Протиобласть $A(X)$ кожного цілком неперервного оператора є сепарабельна.

Доведення. Нехай K_n є протиобласть множини $\{x : \|x\|_X \le n\}$. Оператор A цілком неперервний. Тому K_n компактна в Y, тобто є сепарабельною множиною. Нехай T_n зчислена множина і $\overline{T_n} = K_n$.

Протиобласть $A(X) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ Зрозуміло, що $T = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T_n$ є зчислена множина і $\overline{T} = A(X)$,

$A(X)$- сепарабельна.

2) Якщо $\{A_n\}$ є послідовність цілком неперервних операторів з $(X \to Y)$, що по нормі збігається к оператору $A \in (X \to Y)$, то A цілком неперервний оператор.

Доведення. Нехай M обмежена множина з X . Тобто існує $R > 0$ таке що $\|x\|_X \le R$, коли $x \in M$. Для $\forall \varepsilon > 0$ існує $n_0(\varepsilon)$, що коли $n \ge n_0$

$$\|A - A_n\| < \varepsilon/R \quad \left(\|A - A_{n_0}\| < \varepsilon/R\right).$$

Нехай $A(M) = K$ і $A_{n_0}(M) = N$.

Множина N є ε - сітка для K. Дійсно, $\forall y \in K$ існує елемент $x \in M$ такий що $y = Ax$. Нехай $y_0 = A_{n_0} x \in N$. Тоді

$$\|y - y_0\|_Y = \|Ax - A_{n_0} x\|_Y \le \|A - A_{n_0}\| \cdot \|x\|_X < \varepsilon/R \cdot R = \varepsilon .$$

Множина N компактна (предкомпактна). За теоремою Хаусдорфа 4 (глава II) $A(M) = K$ є компактна (предкомпактна) множина. Оператор $A \in (X \to Y)$ цілком неперервний.

3) Якщо A_1 та A_2, які належать $(X \to Y)$, є цілком неперервні оператори, то $A = c_1 A_1 + c_2 A_2$ цілком неперервний оператор.

Доведення. Нехай $M \subset X$ обмежена множина. Послідовність $\{x_n\}$ довільна послідовність з M.

$$y_n = Ax_n = c_1 A_1 x_n + c_2 A_2 x_n; \quad x_n \in M .$$

Оператор A_1 цілком неперервний, тому з послідовності $\{A_1 x_n\}$ можна виділити збіжну послідовність $\{A_1 x_{n_k}\}$. Розглянемо послідовність $\{A_2 x_{n_k}\} \subseteq \{A_2 x_n\}$. З цієї послідовності можна виділити збіжну послідовність $\{A_2 x_{n_{k_i}}\}$

$$\{A_2 x_{n_{k_i}}\} \subseteq \{A_2 x_{n_k}\} \subseteq \{A_2 x_n\}, \quad \{x_{n_{k_i}}\} \subseteq \{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\} \subset M .$$

Зрозуміло, що існує границя

$$\lim_{i\to\infty} A x_{n_{k_i}} = c_1 \lim_{i\to\infty} A_1 x_{n_{k_i}} + c_2 \lim_{i\to\infty} A_2 x_{n_{k_i}}$$

Оператор A цілком неперервний.

4) Якщо A є цілком неперервний оператор з $(X \to Y)$, то A^* цілком неперервний оператор.

5) Лінійний цілком неперервний оператор є обмежений, тобто неперервний.

Доведення. Нехай A цілком неперервний оператор. Нехай M множина елементів з X таких що $\|x\|_X = 1$. Розглянемо $A(M)$- протиобласть M.

$A(M)$ обмежена. Існує $R > 0$, що $\|Ax\|_Y \le R, \quad x \in M$.

Нехай тепер x довільний елемент з X $\quad (x \ne \Theta)$. Тоді

$$\frac{x}{\|x\|_X} \in M \quad \text{і} \quad \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right) \right\|_Y \le R .$$

Тобто $\|Ax\|_Y \le R \cdot \|x\|_X$. Оператор A обмежений.

Але, лінійний неперервний оператор не завжди є цілком неперервним.

Приклад. $X = l_2 = \left\{ x : x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...);\ \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty \right\}$; $\|x\|_{l_2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 \right)^{1/2}$

$$e_n = \left(0,...,0,\overset{n}{1},0,... \right); \quad \|e_n\|_{l_2} = 1$$

$M = \{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$- обмежена множина: $\|e_i - e_j\|_{l_2} = \sqrt{2}, \quad i \ne j$

$$Jx = x; \quad J \text{ - лінійний обмежений оператор, } J(M) = M .$$

Але M не є компактна множина (вона не містить збіжної послідовності). Оператор J не є цілком неперервним.

Завдання.

1. Довести, що будь-який лінійний оператор $A \in (R_n \to R_m)$ є цілком неперервним.
2. Довести, що будь-який лінійний оператор $A \in (X \to Y)$ є цілком неперервним, якщо простір X має скінчений розмір.

3. Довести, що будь-який обмежений оператор $A \in (X \to Y)$ є цілком неперервним, якщо простір Y має скінчений розмір.

4. Чи може оператор, який задовольняє умові $P^2 = P$, бути цілком неперервним.

5. Чи будуть цілком неперервними слідуючи оператори в просторі $C[0,1]$? В просторі $L_2(0,1)$?

а) $Ax(t) = \int_0^1 x(s)ds$ б) $Ax(t) = \int_0^1 (ts + t^2 s^2) x(s)ds$

в) $Ax(t) = \int \frac{x(s)}{|x-s|^{\alpha}} ds$ г) $Ax(t) = \int_0^1 x(s^2)ds$

6. Нехай $Ax(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds$ - інтегральний оператор в $L_2(a,b)$ і $\int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2 dtds < \infty$. Довести, що він є цілком неперервним.

7. Довести, що оператор $Ax(t) = \int_0^t \frac{x(s)}{\sqrt{t-s}} ds$ є цілком неперервним в $C[0,1]$.

8. Чи може цілком неперервний оператор мати лівий обернений? Обмежений лівий обернений?

9. Нехай A, B обмежені лінійні оператори, AB- цілком неперервний оператор. Чи обов'язково один з операторів A, B є цілком неперервним?

Глава ІУ

§ 1. Гільбертів простір.

Нехай H комплексний векторіальний простір. Нехай за певним законом кожній парі елементів x і y відповідає комплексне число (x,y), яке задовольняє такі умови

а) $(x,y)=\overline{(y,x)}$

б) $(x_1+x_2,y)=(x_1,y)+(x_2,y)$

в) $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$

г) $(x,x)\geq 0$; якщо $(x,x)=0$, то це можливо тоді і лише тоді, коли $x=\Theta$.

Число (x,y) називають скалярним добутком елементів x та y.

Властивості скалярного добутку

1. $(x,y_1+y_2)=(x,y_1)+(x,y_2)$

Дійсно, $(x,y_1+y_2)=\overline{(y_1+y_2,x)}=\overline{(y_1,x)}+\overline{(y_2,x)}=(x,y_1)+(x,y_2)$.

2. $(x,\lambda y)=\overline{\lambda}(x,y)$

Дійсно, $(x,\lambda y)=\overline{(\lambda y,x)}=\overline{\lambda}\,\overline{(y,x)}=\overline{\lambda}(x,y)$

3. Нерівність Коші-Буняковського $|(x,y)|\leq\sqrt{(x,x)}\cdot\sqrt{(y,y)}$

Доведення. Якщо x (або y) дорівнює Θ, то $(x,y)=0$ і $(x,x)=0$ (або $(y,y)=0$). Тому в цьому випадку нерівність Коші-Буняковского має місце.

Нехай $x\neq\Theta$ і $y\neq\Theta$. Тоді $\forall\lambda\quad (x+\lambda y,x+\lambda y)\geq 0$

$$(x+\lambda y,x+\lambda y)=(x,x)+\lambda(y,x)+\overline{\lambda}(x,y)+|\lambda|^2(y,y)$$

Оберемо $\lambda=-\dfrac{(x,y)}{(y,y)}$. Тоді $\lambda(y,x)=-\dfrac{|(x,y)|^2}{(y,y)}$; $\quad\overline{\lambda}(x,y)=-\dfrac{|(x,y)|^2}{(y,y)}$.

Таким чином $0\leq(x,x)-\dfrac{|(x,y)|^2}{(y,y)}-\dfrac{|(x,y)|^2}{(y,y)}+\dfrac{|(x,y)|^2}{(y,y)}=(x,x)-\dfrac{|(x,y)|^2}{(y,y)}$

Звідки $|(x,y)|^2\leq(x,x)(y,y)$.

4. $(x,\Theta)=0$

В цьому просторі можна визначити норму елемента x, пов'язану з скалярним добутком

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)}.$$

Легко бачити, що всі аксіоми норми мають місце. Наприклад, аксіома трикутника

$$(x+y,x+y)=(x,x)+(y,x)+(x,y)+(y,y)\leq(x,x)+|(y,x)|+|(x,y)|+(y,y)\leq$$

$$\leq\left(\sqrt{(x,x)}\right)^2+2\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}+\left(\sqrt{(y,y)}\right)^2 \quad \text{(за нерівністю Коші-Буняковского)}$$

$$(x+y,x+y)\leq\left[\sqrt{(x,x)}+\sqrt{(y,y)}\right]^2$$

Тобто, $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

Означення 1. Комплексний векторіальний простір H називається гільбертовим простором, якщо він має нескінчену розмірність і є повний простір відносно норми визначеної за скалярним добутком.

Приклади гільбертових просторів.

1. $L_2(a,b)$ - множина функцій, сумовних з другим степенем в інтервалі (a,b).

$$(x(t),y(t))=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt$$

Легко бачити, що всі аксіоми скалярного добутку мають місце.

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}$$

Цей простір є повний простір і має нескінчену розмірність.

2. l_2 - множина послідовностей $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...)$ комплексних чисел, для котрих ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2$ збіжний.

Нехай $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...)$ і $y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n, ...)$ два елементи з l_2

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \overline{\eta_n}; \quad \|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 \right)^{1/2}$$

l_2 є повний простір і має нескінчену розмірність, тобто є гільбертів простір.

Зауваження 1. Якщо векторіальний простір має скінчену розмірність або не є повним (скалярний добуток в ньому визначень), то це не є гільбертів простір.

Наприклад, якщо простір це є множина неперервних на $[a, b]$ функцій і скалярний добуток визначається таким чином $(x, y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)} dt$, то за нормою $\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \left(\int_a^b |x(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}$ цей простір не буде повним. Тобто, він не є гільбертовим простором.

Зауваження 2. Нерівність Коши-Буняковского, яка має місце в гільбертовому просторі має такий вигляд

$$|(x, y)| \le \|x\| \cdot \|y\|.$$

Зауваження 3. Скалярний добуток є неперервною функцією відносно збіжності по нормі. Тобто, якщо $\|x_n - x\| = \sqrt{(x_n - x, x_n - x)} \to 0$ коли $n \to \infty$, а $\|y_n - y\| = \sqrt{(y_n - y, y_n - y)} \to 0$, коли $n \to \infty$, то $\lim_{n \to \infty} (x_n, y_n) = (x, y)$.

Дійсно,

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| = |(x_n, y_n) - (x_n, y) + (x_n, y) - (x, y)| \le |(x_n, y_n) - (x_n, y)| + |(x_n, y_n) - (x, y)| =$$
$$= |(x_n, y_n - y)| + |(x_n - x, y)| \le \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \cdot \|y\|$$

Послідовність $\{\|x_n\|\}$ обмежена (має границю $\|x\|$), тому

$$\lim_{n \to \infty} |(x_n, y_n) - (x, y)| = 0.$$

Завдання.

1. Означати скалярний добуток в просторі многочленів з дійсними коефіцієнтами.
2. Який геометричний зміст нерівності Коши-Буняковского в просторі векторів?
3. Нехай в дійсному векторіальному нормованому просторі норма елемента має таку властивість

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Довести, що в цьому просторі можна визначити скалярний добуток за формулою

$$(x, y) = \frac{1}{4}\|x + y\|^2 - \frac{1}{4}\|x - y\|^2.$$

4. Довести, що в просторі $L_2(a, b)$

$$(x, y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)} w(t) dt,$$

де вагова функція $w(t) > 0$, є скалярним добутком.

5. Нехай $H = l_2$ і $0 < |\alpha| < 1$. Знайти замкнуту лінійну оболонку в l_2 множини усіх елементів $x_n = (1, \alpha^n, \alpha^{2n}, \ldots)$, $\quad n = 1, 2, \ldots$

§ 2. Ортогональність в гільбертовому просторі

Означення 2. Елементи x і y гільбертового простору H називаються ортогональними, якщо $(x, y) = 0$:

$$x \perp y .$$

Означення 3. Нехай L певна множина простору H. Якщо фіксований елемент $x \in H$ ортогональний кожному елементу з L, то кажуть, що $x \perp L$.

Означення 4. Якщо елементи множини $L_1 \subset H$ ортогональні $L_2 \in H$, то кажуть, що множини L_1 та L_2 ортогональні: $L_1 \perp L_2$.

З властивостей скалярного добутку випливає

1) якщо $x \perp x$, тобто $(x, x) = 0$, то $x = \Theta$
2) $\Theta \perp x$, де $\forall x \in H$
3) якщо $x \perp y_1$ і $x \perp y_2$, то $x \perp \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$
4) з неперервності скалярного добутку випливає, що якщо $x \perp y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ і $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y$ в H, то $x \perp y$
5) якщо $x \perp M$ $\quad (M \subset H)$ і $\overline{M} = H$, то $x = \Theta$.

Дійсно, в цьому випадку $x \perp x$, тому $x = \Theta$ (множина M густа в H).

Нехай L замкнена лінійна оболонка з H, M - Ії ортогональне доповнення, тобто сукупність елементів з H, які ортогональні L (позначають $M = L^{\perp}$). Тоді M теж є замкнена лінійна оболонка з H. Це твердження випливає з властивостей скалярного добутку.

Теорема 1. Нехай L замкнена лінійна оболонка з H (підпростір H), M його ортогональне доповнення. Тоді кожний елемент $x \in H$ може бути однозначно зображень

$$x = y + z, \text{ де } y \in L, \quad z \perp L \quad (z \in M).$$

Доведення. Нехай $x \in L$. Тоді $x = x + \Theta \quad (\Theta \in M)$.

Нехай $x \notin L$. Тоді $d = \inf\limits_{y \in L} \|x - y\|^2 = \inf\limits_{y \in L} (x - y, x - y) > 0$ (L замкнена множина).

Оберемо в L послідовність $\{y_n\}$ таку, що $\lim\limits_{n \to \infty} \|x - y_n\|^2 = d$

$$\|x - y_n\|^2 = d_n; \quad \lim_{n \to \infty} d_n = d .$$

Нехай h довільний елемент з L $\quad (h \neq \Theta)$. Тоді $y_n + \lambda h \in L$, де λ будь-яке комплексне число. Тому $\|x - (y_n + \lambda h)\|^2 \geq d$

$$\|x - (y_n + \lambda h)\|^2 = (x - y_n - \lambda h, x - y_n - \lambda h) = \|x - y_n\|^2 - \overline{\lambda}(x - y_n, h) - \lambda(h, x - y_n) + |\lambda|^2 \|h\|^2 \geq d$$

Нехай $\lambda = \dfrac{(x - y_n, h)}{\|h\|^2}$. Одержимо $\|x - y_n\|^2 - \dfrac{|(x - y_n, h)|^2}{\|h\|^2} \geq d$.

Звідки $|(x - y_n, h)| \leq \|h\| \sqrt{d_n - d} \quad \forall h \in L$ (1)

Якщо $h = \Theta$, то нерівність (1) має місце. З цієї нерівності випливає

$$|(y_n - y_m, h)| \leq |(y_n - x, h)| + |(y_m - x, h)| \leq \|h\| \cdot \left[\sqrt{d_n - d} + \sqrt{d_m - d}\,\right].$$

Покладемо $h = y_n - y_m$. Тоді $\|y_n - y_m\| \leq \sqrt{d_n - d} + \sqrt{d_m - d}$.

Але $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = d$. Тому $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon)$, що якщо $n, m \geq n_0$, то

$$\|y_n - y_m\| < \varepsilon .$$

Таким чином послідовність $\{y_n\}$ фундаментальна. Множина L повна, а тому існує елемент $y \in L$, що $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ в H.

Перейдемо до границі в (1)

$$(x - y, h) = 0 \quad \forall h \in L .$$

Тобто, $x - y \perp h; \quad x - y \perp L$. Нехай $x - y = z, \quad z \in M$.

$$x = y + z$$

Доведемо, що кожний елемент $x \in H$ може бути однозначно зображень в такому вигляді.
Нехай $x = y' + z'$, де $y' \in L$, а $z' \perp L$.

$$y + z = y' + z'$$

Тоді $y - y' = z - z'; \quad y - y' \in L$, а $z - z' \perp L$.

$$\|y - y'\|^2 = (y - y', y - y') = (y - y', z - z') = 0; \quad y = y', \quad z = z'$$

Теорема доведена.

Означення 4. Елемент y називається проекцією елемента x на L.

Означення 5. Нехай H векторіальний простір, L та M його підпростори. Якщо кожний елемент x з H єдиним засобом може бути зображень $x = y + z$, де $y \in L, \quad z \in M$, то кажуть, що H є пряма сума L та M

$$H = L \oplus M .$$

Означення 6. Нехай H гільбертів простір, L його підпростір, а M ортогональне доповнення L до H. Тоді $H = L \oplus M$ (за теоремою 1). Але в цьому випадку $L \perp M$. Така пряма сума називається ортогональною. Кажуть, що H є ортогональна сума L та M

$$H = L \oplus M .$$

Теорема 2 (Піфагора). Якщо $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \in H$ та $(x_i, x_j) = 0$, коли $i \neq j$, то $\|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$.

Доведення.

$$\|x\|^2 = (x, x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{j=1}^{n} x_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i, x_j) = \sum_{i=1}^{n} (x_i, x_i) = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 .$$

Зауваження. Якщо $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ (ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ збігається в H до x) та $(x_i, x_j) = 0$ коли $i \neq j$, то

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2$$

внаслідок неперервності скалярного добутку.

Завдання.

1. Довести, що якщо дві множини, які складаються з скінченої кількості елементів, ортогональні, то будуть ортогональні лінійні оболонки, побудовані на цих множинах.
2. Довести, що для любої множини M з гільбертового простору H Її ортогональне доповнення $M^{\perp}$ є підпростір.
3. Довести, що $M^{\perp\perp} = M$ тоді і тільки тоді, якщо M є підпростір H.
4. Довести, що якщо $M \subset N$, то $N^{\perp} \subset M^{\perp}$.
5. Нехай $M = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad x_1, x_2, x_3 \in l_2$. Побудувати $M^{\perp}$, якщо

$$x_1 = \left(0,\ldots,0,\frac{1}{n},0\ldots \right), \quad x_2 = \left(0,\ldots,0,\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},0,\ldots \right), \quad x_3 = \left(0,\ldots,0,\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+2},0,\ldots \right).$$

§ 3. Абстрактні ряди Фурье

Нехай $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ послідовність елементів в гільбертовому просторі H.

Означення 7. Послідовність елементів $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ називається ортогональною, якщо $(x_i, x_j) = 0$, коли $i \neq j$.

Означення 8. Послідовність елементів $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в H називається ортонормованою, якщо
$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Задача. Нехай $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ довільна ортонормована система елементів в H і x довільний елемент H. Розглянемо лінійну комбінацію $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$. Потрібно знайти сталі $\alpha_1, ..., \alpha_n$ таким чином, щоб $\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|^2$ була найменшою. Розглянемо

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|^2 = \left(x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right) = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \overline{c}_k e_k - \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha}_k c_k + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2, \text{ де } c_k = (x, e_k).$$

Але, $\quad |\alpha_k - c_k|^2 = (\alpha_k - c_k)(\overline{\alpha}_k - \overline{c}_k) = |\alpha_k|^2 + |c_k|^2 - \overline{\alpha}_k c_k - \alpha_k \overline{c}_k$.

Тому
$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - c_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2. \qquad (2)$$

Числа c_k залежать від x та обраної ортонормованої системи і не залежать від $\alpha_1, ..., \alpha_n$.

Тому $\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|^2$ буде мінімальною, коли $\alpha_k = c_k$.

Означення 9. Числа $c_k = (x, e_k), \quad k = 1,2,...$ називаються коефіцієнтами Фурье елемента x по системі $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Розглянемо в H такий ряд $c_1 e_1 + c_2 e_2 + ... + c_n e_n + ...$. Цей ряд називається рядом Фурье, який відповідає x.

З (2) при $\alpha_k = c_k$ маємо $\left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$. Звідки $\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \leq \|x\|^2$.

Таким чином, часткові суми ряду $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ обмежені. Тому ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ збігається і його сума не перевершує $\|x\|^2$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2$$

Одержана нерівність називається нерівністю Бесселя.

Нехай $\overline{L}$ замкнена лінійна оболонка елементів ортонормованої системи $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Теорема 2. Довільний елемент $y \in \overline{L}$ можна розкласти в ряд Фурье , який за нормою збігається до y. Коефіцієнти $c_k = (y, e_k)$ задовольняють рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|y\|^2 \qquad \text{(рівність Парсеваля).}$$

Доведення. Нехай $y \in \overline{L}$. Тоді $\forall \varepsilon > 0$ знайдеться такий елемент з L, тобто $\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n$, що

$$\left\| y-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k \right\| < \varepsilon \quad \text{(або 0, якщо } y\in L\text{).}$$

В цьому випадку $\left\| y-\sum_{k=1}^{n}c_k e_k \right\| < \varepsilon$, бо $\left\| y-\sum_{k=1}^{n}c_k e_k \right\| \le \left\| y-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k \right\|$.

Якщо $\forall m \ge n$, то $\left\| y-\sum_{k=1}^{m}c_k e_k \right\| \le \left\| y-\sum_{k=1}^{n}c_k e_k \right\| < \varepsilon$.

Таким чином, якщо $m \ge n(\varepsilon)$, то $\left\| y-\sum_{k=1}^{m}c_k e_k \right\| < \varepsilon$. Тобто ряд $\sum_{k=1}^{\infty}c_k e_k$ збігається і його сума y:

$$y=\sum_{k=1}^{\infty}c_k e_k ; \quad c_k=(y,e_k).$$

Доведемо рівність Парсеваля.

$$0 \le \left\| y-\sum_{k=1}^{n}c_k e_k \right\|^2 = \|y\|^2-\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2 < \varepsilon^2 ; \quad \|y\|^2 < \sum_{k=1}^{n}|c_k|^2+\varepsilon^2 ; \quad \|y\|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2$$

За нерівністю Бесселя $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2 \le \|y\|^2$ (завжди). Таким чином, $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2 = \|y\|^2$.

Означення 10. Ортогональна система елементів $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ називається повною, якщо не існує елемента $x \ne \Theta$, ортогонального кожному e_n.

Означення 11. Система елементів $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ називається замкненою, якщо $\overline{L}=H$ (тобто L всюди щільна в H).

Теорема 3. Для того щоб ортонормована система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ була повною в H, необхідно і достатньо, щоб вона була замкненою.

Доведення. Нехай $\overline{L}$ замкнена лінійна оболонка $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тоді $H=\overline{L}\oplus M$, де M ортогональне поповнення $\overline{L}$ до H (теорема 1). Якщо $H=\overline{L}$, то $M=\{\Theta\}$ і замкнена система повна. Якщо $M=\{\Theta\}$, то $H=\overline{L}$ і повна система замкнена.

Наслідок. Для того щоб кожний елемент $\forall x \in H$ розлагався в ряд Фурье по ортонормованій системі $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ необхідно і достатньо, щоб система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ була повною в H.

Теорема 4 (Рісса-Фішера). Нехай $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ послідовність чисел, для котрої ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2$ збігається, H гільбертів простір, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормована система елементів в H. Тоді існує один елемент $x \in H$, що

1) $x=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e_n$
2) $a_n=c_n=(x,e_n)$
3) $\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2$.

Доведення. Розглянемо такий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n e_n$ і доведемо, що він збігається. Нехай $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k e_k$. Послідовність $\{S_n\}$ фундаментальна в H. Дійсно,

$$\left\|S_{n+p}-S_n\right\|^2=\left(\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k e_k,\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k e_k\right)=\sum_{k=n+1}^{n+p}\left|a_k\right|^2$$

Але, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_k\right|^2$ збігається. Тому $\forall\varepsilon>0,\quad \exists n_0(\varepsilon)$, що коли $n\ge n_0\quad \sum_{k=n+1}^{\infty}\left|a_k\right|^2<\varepsilon$.

Тобто, коли $n\ge n_0\quad \left\|S_{n+p}-S_n\right\|^2<\varepsilon$.

H повний простір. Тому існує елемент $x\in H$, що

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}a_k e_k .$$

$$c_n=\left(x,e_n\right)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\left(e_k,e_n\right)=a_n .$$

$x\in\overline{L}$ (належить замкненій лінійній оболонці $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$). Тому має місце рівність Парсеваля

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left|c_n\right|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|^2 .$$

Наслідок. Розглянемо простір l_2. Елементами l_2 є послідовності $a=\left(a_1,a_2,...,a_n,...\right)$, для котрих ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|^2$ збігається, $\|a\|_{l_2}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|^2\right)^{1/2}$.

Кожному $a\in l_2$ відповідає елемент $x\in H$, для котрого a_n є коефіцієнти Фурье по ортонормовантй системі $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ і $\|x\|_H=\|a\|_{l_2}$.

Якщо система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ повна, то $\forall x\in H$ відповідає елемент з l_2 - $\left(c_1,c_2,...,c_n,...\right)$. Тобто в цьому випадку H та l_2 ізометричні.

Теорема 5 (Рісса). Нехай H гільбертів простір, $f(x)$ лінійний обмежений функціонал на H. Тоді $\forall f(x)\in H^*$ існує такий єдиний елемент $u\in H$, що

$$f(x)=(x,u)\quad \forall x\in H \text{ і } \|f\|=\|u\|_H .$$

Доведення. Нехай $L=Ker\, f=\{x\in H:\quad f(x)=0\}$. Ядро функціонала є лінійна замкнена множина, тобто підпростір в H. Якщо $L=H$, то $f(x)=0$ для $\forall x\in H$ і $f=0$

$$f(x)=(x,\Theta)=0\quad (u=\Theta).$$

Нехай $L\subset H$. За теоремою 1 $H=L\oplus M$, де $M\perp L;\quad M\ne\{\Theta\}$.

Існує елемент $z\in M$ такий що $z\ne\Theta$ і $z\perp L$. Нехай

$$z_1=\frac{x}{f(z)};\quad f\left(z_1\right)=f\left(\frac{z}{f(z)}\right)=1.$$

Візьмемо довільний елемент $x\in H$ і зафіксуємо його.

$\beta=f(x)$. Легко бачити, що $x-\beta z_1\in L$. Дійсно,

$$f\left(x-\beta z_1\right)=f(x)-\beta f\left(z_1\right)=0.$$

Таким чином, $x=y+\beta z_1,\quad \left(y\in L,\, z_1\in M\right)$.

Розглянемо скалярний добуток

$$\left(x,z_1\right)=\left(y+\beta z_1,z_1\right)=\left(y,z_1\right)+\beta\left(x,z_1\right)=\beta\left\|z_1\right\|^2=f(x)\cdot\left\|z_1\right\|^2 .$$

Покладемо $u=\dfrac{z_1}{\left\|z_1\right\|^2}$. Тоді $f(x)=(x,u)$.

Елемент x довільний елемент з H. Тому $\forall x\in H$

$$f(x)=(x,u).$$

Елемент $u\in H$ визначається функціоналом $f(x)$.

$$|f(x)|=|(x,u)|\le\|x\|\cdot\|u\|_H;\quad \|f\|\le\|u\|_H.$$

Якщо $x=u$, то $f(u)=(u,u)=\|u\|_H^2$ і $\|f\|=\|u\|_H$.

Доведемо, що такий елемент для кожного $f(x)\in H^*$ єдиний. Нехай $f(x)=(x,u_1)$. Тоді

$$(x,u)=(x,u_1)\quad \forall x\in H,\ \text{або}\ (x,u-u_1)=0\quad \forall x\in H.$$

Якщо $x=u-u_1$, то $\|u-u_1\|^2=(u-u_1,u-u_1)=0$ і $u=u_1$.

Теорема доведена.

Приклади.

1. $H=L_2(a,b);\quad (x(t),y(t))=\int\limits_a^b x(t)\overline{y(t)}dt$

Загальний вигляд лінійного функціоналу в $L_2(a,b)$ буде

$$f(x)=\int\limits_a^b x(t)\overline{u(t)}dt$$

Тобто, існує така функція $u(t)\in L_2(a,b)$, яка відповідає функціоналу $f(x)$ і

$$\|f\|=\left(\int\limits_a^b|u(t)|^2dt\right)^{1/2}.$$

2. $H=l_2;\quad x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,...),\quad u=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n,...),\quad (x,u)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\xi_n\overline{\eta_n}$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\overline{\eta_n};\quad \|f\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^2\right)^{1/2}.$$

Висновок. H і H^* ізометричні.

Завдання.

1. Довести, що поліноми Чебишева I-го роду $T_n(x)=\cos n\arccos x$ утворюють ортогональну з вагою $w(x)=(1-x^2)^{-1/2}$ систему в просторі $L_2(-1,1)$.
2. Довести, що поліноми Чебишева II-го роду $U_n(x)=(1-x^2)^{-1/2}\sin(n+1)\arccos x$ утворюють ортогональну з вагою $w(x)=(1-x^2)^{1/2}$ систему в просторі $L_2(-1,1)$.
3. Для функції $x(t)$ знайти поліноми $P_n(t),\quad n=1,2,3$ таки, що норма $\|x(t)-P_n(t)\|$ мінімальна в просторі $L_2(-1,1)$

   а) $x(t)=e^t$ б) $x(t)=t^3$.
4. Оператор A визначень за допомогою повної ортонормірованої системи $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ співвідношенням $Ae_n=e_{n+1}$. Довести, що A ізометричний оператор, тобто
$$(Ax,Ay)=(x,y).$$
5. В просторі $L_2(-1,1)$ провести процес ортогоналізації для функцій $1,t,t^2,...$ і показати, що результатом є поліноми Лежандра $P_n(x)=\frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$. Знайти їх норми.
6. В лінійному просторі неперервних на $[0,\infty)$ функцій $x(t)$ таких, що задовольняють умові $\int\limits_0^{\infty}|x(t)|^2e^{-t}dt<\infty$, покладемо
$$(x,y)=\int\limits_0^{\infty}x(t)y(t)e^{-t}dt.$$

Перевірити, що аксіоми скалярного добутку виконуються і ортогоналізувати функції $1, t, t^2, \ldots$ (Знайти перших три полінома).

7. В лінійному просторі неперервних на $(-\infty, \infty)$ функцій $x(t)$ таких, що задовольняють умові $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 e^{-t^2} dt < \infty$, покладемо

$$(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t) e^{-t^2} dt .$$

Перевірити, що аксіоми скалярного добутку виконуються і ортогоналізувати функції $1, t, t^2, \ldots$ (Знайти перших три полінома).

§ 4. Лінійні обмежені оператори в гільбертовому просторі

Нехай H гільбертів простір, A лінійний обмежений оператор, який діє в H $\left(A(H) \subseteq H\right)$, A^* спряжений оператор. З теореми Рісса випливає, що $\forall x, u \in H$

$$(Ax, u) = (x, A^* u).$$

Означення 12. Оператор A називається самоспряженим, якщо $\forall x, u \in H$

$$(Ax, u) = (x, Au), \text{ тобто } A = A^*.$$

Властивості самоспряжених операторів в H

1. Для будь-якого $x \in H$ скалярний добуток (Ax, x) дійсний.

$$(Ax, x) = (x, Ax) = \overline{(Ax, x)}.$$

2. Нехай A лінійний обмежений самоспряжений оператор, який діє в H. Тоді

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| .$$

Позначимо $\sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = Q$.

$$|(Ax, x)| \le \|Ax\| \cdot \|x\| = \|Ax\| \le \|A\|, \text{ тобто } Q \le \|A\|$$

Легко перевірити тотожність

$$\operatorname{Re}(Ax, y) = \frac{1}{4}\{(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y)\}, \quad \forall x, y \in H .$$

Звідки

$$\operatorname{Re}(Ax, y) \le \frac{1}{4}\left\{\|x+y\|^2 \left|\left(A\left(\frac{x+y}{\|x+y\|}\right), \frac{x+y}{\|x+y\|}\right)\right| + \|x-y\|^2 \left|\left(A\left(\frac{x-y}{\|x-y\|}\right), \frac{x-y}{\|x-y\|}\right)\right|\right\} \le$$

$$\le \frac{Q}{4}\left\{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right\} = \frac{Q}{2}\left\{\|x\|^2 + \|y\|^2\right\}.$$

Нехай $\|x\| = 1, \quad y = \dfrac{Ax}{\|Ax\|}$ (припускаємо, що $\|Ax\| \ne 0$). Тоді

$$\|Ax\| = \operatorname{Re}(Ax, y) \le Q, \text{ тобто } \|A\| \le Q .$$

З одержаних нерівностей випливає, що $\|A\| = Q$.

Означення 13. Число λ називається власним значенням оператора A, якщо існує елемент $x_0 \ne 0$, такий що $Ax_0 = \lambda x_0$.

Елемент x_0 називається власним елементом оператора A. Сукупність власних елементів, які відповідають власному значенню λ називається власним підпростором

$$H_\lambda = \{x \in H: \quad Ax = \lambda x\}.$$

3. Власні значення самоспряженого лінійного оператора A дійсні.
Нехай λ власне значення оператора A

$$Ax = \lambda x \quad (x \neq \Theta), \quad (Ax, x) = \lambda(x, x) = \lambda\|x\|^2, \quad \lambda = \frac{(Ax, x)}{\|x\|^2}.$$

4. Якщо λ_1 і λ_2 два власних значення оператора A, $\quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$, то власні підпростори H_{λ_1} і H_{λ_2} ортогональні $H_{\lambda_1} \perp H_{\lambda_2}$.
Нехай $Ax_1 = \lambda_1 x_1 \quad \forall x_1 \in H_{\lambda_1}$ і $x_1 \neq \Theta$

$$Ax_2 = \lambda_2 x_2 \quad \forall x_2 \in H_{\lambda_2} \text{ і } x_2 \neq \Theta.$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$, тому принаймні одне з цих чисел, наприклад λ_1, не дорівнює 0.

$$(x_1, x_2) = \frac{1}{\lambda_1}(Ax_1, x_2) = \frac{1}{\lambda_1}(x_1, Ax_2) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) = 0.$$

5. Нехай A самоспряжений цілком неперервний оператор, який діє в H. Тоді він має принаймні одне власне значення λ_1 і $|\lambda_1| = \|A\|$.
Якщо $A = \Theta$, то $\lambda_1 = 0$. Нехай $A \neq \Theta$. Позначимо

$$m = \inf_{\|x\|=1}(Ax, x), \quad M = \sup_{\|x\|=1}(Ax, x).$$

Зрозуміло, що $\|A\| = \max\{|m|, M\}$. Нехай, наприклад, $\|A\| = M$.
Легко бачити, що $M = \lambda_1$. В H існує така послідовність елементів, що

$$M = \lim_{n\to\infty}(Ax_n, x_n); \quad \|x_n\| = 1.$$

Розглянемо послідовність $\{Ax_n\}$. Оператор A цілком неперервний, тому множина $\{Ax_n\}$ предкомпактна і з неї можна вилучити підпослідовність $\{Ax_{n_k}\}$, яка збігається

$$\lim_{k\to\infty} Ax_{n_k} = y_0; \quad \|x_{n_k}\| = 1$$

$$\|Ax_{n_k} - Mx_{n_k}\|^2 = (Ax_{n_k} - Mx_{n_k}, Ax_{n_k} - Mx_{n_k}) = \|Ax_{n_k}\|^2 - 2M(Ax_{n_k}, x_{n_k}) + M^2 \leq$$
$$\leq \|A\|^2 + M^2 - 2M(Ax_{n_k}, x_{n_k}) = 2M^2 - 2M(Ax_{n_k}, x_{n_k}) \to 0, \quad k \to \infty$$

Таким чином, $\lim_{k\to\infty}[Ax_{n_k} - Mx_{n_k}] = 0$ і існує

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \frac{1}{M} y_0 = x_0; \quad \|x_0\| = 1, \quad Ax_0 - Mx_0 = 0$$

M власне значення A.

6. Якщо тільки число 0 є власним значенням A, то $A = \Theta$.

7. λ_1 є найбільшим за модулем власним значенням оператора A (якщо є інші власні значення).

Нехай λ якесь власне значення A

$$|\lambda| = |\lambda| \cdot \|x\|^2 = |(Ax, x)| \leq \|A\| \cdot \|x\|^2, \quad x \neq \Theta$$

Нехай $\|x\| = 1$, тоді $|\lambda| \leq \|A\| = |\lambda_1|$.

Дуже важливим класом операторів в H є так звані **проективні оператори**.
Нехай L підпростір H $\quad (L \neq H)$. Тоді кожний елемент $x \in H$ має вигляд

$$x = y + z, \text{ де } y \in L, \quad z \perp L.$$

Таким чином $\forall x \in H$ відповідає певний елемент $y \in L$

$$y = P_L x$$

Оператор P_L називається проективним оператором, y - проекція x на L.

Властивості проективних операторів

1. $\forall x \in H$ елементи $P_L x$ і $x - P_L x$ ортогональні

$$P_L x = y, \quad x - P_L x = z, \quad y \perp z .$$

2. Якщо $x \in L$, то $P_L x = x$.

3. $P_L^k = P_L$.

Дійсно, $P_L^2 x = P_L(P_L x) = P_L x, \quad P_L^2 = P_L$ і т.д.

4. Якщо $x \perp L$, то $P_L x = \Theta$.

5. P_L лінійний обмежений оператор і $\|P_L\| = 1$.

$$x_1 = P_L x_1 - (x_1 - P_L x_1), \quad x_2 = P_L x_2 - (x_2 - P_L x_2)$$

$$P_L(c_1 x_1 + c_2 x_2) = c_1 P_L x_1 + c_2 P_L x_2$$

$$\|x\|^2 = \|P_L x\|^2 + \|x - P_L x\|^2, \quad \|P_L x\|^2 \le \|x\|^2, \quad \|P_L x\| \le \|x\|$$

Оператор P_L обмежений і $\|P_L\| \le 1$. Але, якщо $x \in L$, то $P_L x = x$ і $\|P_L x\| = \|x\|$.

Тому $\|P_L\| \ge 1$ і остаточно $\|P_L\| = 1$.

6. Оператор P_L самоспряжений $(P_L x_1, x_2) = (x_1, P_L x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in H$.

$$x_1 = y_1 + z_1, \quad y_1 = P_L x_1; \quad x_2 = y_2 + z_2, \quad y_2 = P_L x_2$$

$$(P_L x_1, x_2) = (y_1, y_2 + z_2) = (y_1, y_2) + (y_1, z_2) = (y_1, y_2)$$

$$(x_1, P_L x_2) = (y_1 + z_1, y_2) = (y_1, y_2) + (z_1, y_2) = (y_1, y_2)$$

Теорема 6. Множина власних значень цілком неперервного самоспряженого оператора A не більш ніж зчислена і

$$A = \sum_k \lambda_k P_{\lambda_k} ,$$

де $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k, ...$ різні власні значення оператора A, P_{λ_k} - проективні оператори на H_{λ_k}.

Нехай $L = \overline{\square_k H_{\lambda_k}}$.

$$H = L \oplus N \text{, де } N \perp L .$$

Теорема 7. Якщо $z \in N$, то $Az = 0$.

Доведення. За теоремою 6 $Az = \sum_k \lambda_k P_{\lambda_k} z$. Але $z \perp H_{\lambda_k}$, тому $P_{\lambda_k} z = 0$ і $Az = 0$.

Теорема 8. Власний підпростір H_{λ_k} цілком неперервного оператора A має скінчену розмірність.

Доведення. Нехай M_0 обмежена множина з H_{λ_k}. Тоді $A(M_0) = \{\lambda_k x: \quad x \in M_0\}$ теж обмежена множина. A цілком неперервний оператор, тому $A(M_0)$ предкомпактна. Звідки M_0 предкомпактна.

Тобто, будь-яка обмежена множина $M_0 \subset H_{\lambda_k}$ предкомпактна. H_{λ_k} має скінчену розмірність.

Нехай H_{λ_k} власний підпростір, n_k його розмірність. Тоді в H_{λ_k} існує n_k лінійно незалежних елементів $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_{n_k}^{(k)}$, $\left(x_i^{(k)} \ne \Theta\right)$. Замість елементів $\left\{x_i^{(k)}\right\}_{i=1}^{n_k}$ побудуємо ортонормовану систему елементів $\left\{e_i^{(k)}\right\}_{i=1}^{n_k}$:

$$y_1^{(k)} = x_1^{(k)}, \quad y_2^{(k)} = x_2^{(k)} + c_{21} x_1^{(k)}$$

c_{21} знайдемо таким чином, щоб $\left(y_2^{(k)}, y_1^{(k)}\right)=0$, звідкіля $c_{21}=-\dfrac{\left(x_2^{(k)}, x_1^{(k)}\right)}{\left\|x_1^{(k)}\right\|^2}$;

$$y_3^{(k)}=x_3^{(k)}+c_{32}x_2^{(k)}+c_{31}x_1^{(k)}$$

c_{32} і c_{31} знайдемо таким чином, щоб $\left(y_3^{(k)}, y_1^{(k)}\right)=0$ і $\left(y_3^{(k)}, y_2^{(k)}\right)=0$.

Легко довести, що за такою схемою можна побудувати ортогональну систему елементів $\left\{y_i^{(k)}\right\}_{i=1}^{n_k}$. Дійсно, нехай побудовано m елементів $(m<n_k)$

$$y_i^{(k)}=x_i^{(k)}+c_{i,i-1}x_{i-1}^{(k)}+\ldots+c_{i,1}x_1^{(k)}, \quad i=\overline{1,m}, \quad \left(y_i^{(k)}, y_j^{(k)}\right)=0 \text{, якщо } i\neq j.$$

Шукаємо $y_{m+1}^{(k)}=x_{m+1}^{(k)}+b_m y_m^{(k)}+\ldots+b_1 y_1^{(k)}$.

Сталі b_j $\left(j=\overline{1,m}\right)$ знайдемо таким чином, щоб $\left(y_{m+1}^{(k)}, y_j^{(k)}\right)=0$ $\left(j=\overline{1,m}\right)$

$$\left(y_{m+1}^{(k)}, y_j^{(k)}\right)=\left(x_{m+1}^{(k)}, y_j^{(k)}\right)+b_j\left\|y_j^{(k)}\right\|^2, \quad b_j=-\frac{\left(x_{m+1}^{(k)}, y_j^{(k)}\right)}{\left\|y_j^{(k)}\right\|^2}; \quad y_j^{(k)}\neq 0.$$

Зрозуміло, що $y_{m+1}^{(k)}=x_{m+1}^{(k)}+c_{m+1,m}x_m^{(k)}+\ldots+c_{m+1,1}x_1^{(k)}$.

Покладемо $e_i^{(k)}=\dfrac{y_i^{(k)}}{\left\|y_i^{(k)}\right\|}$, $\left(e_i^{(k)}, e_j^{(k)}\right)=\delta_{ij}$.

При цьому $\left(e_i^{(k)}, e_j^{(m)}\right)=0$, якщо $k\neq m$.

Висновок. Якщо A самоспряжений, цілком неперервний оператор, який діє в H, то

1) $L=\overline{\square_k H_{\lambda_k}}$ є замкнена лінійна оболонка власних елементів оператора A:

$$\left\{e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \ldots, e_{n_1}^{(1)}, e_1^{(2)}, \ldots, e_{n_2}^{(2)}, \ldots\right\}.$$

2) $\forall y\in L$ можна розкласти в ряд Фурье по ортонормованій системі власних елементів оператора A.

Теорема 9 (Гілберта-Шмідта). Нехай $x\in A(H)$, тобто існує елемент x' такий, що $x=Ax'$. Тоді x можна розкласти в ряд Фурье по ортонормованій системі власних елементів оператора A.

Доведення. За теоремою 1 $x'=y+z$, де $y\in L$, а $z\in N$

$$x=Ax'=Ay+Az=Ay; \quad y=\sum_k\sum_{i=1}^{n_k}c_{ik}e_i^{(k)}$$

$$x=Ay=\sum_k\sum_{i=1}^{n_k}c_{ik}Ae_i^{(k)}=\sum_k\sum_{i=1}^{n_k}c_{ik}\lambda_k e_i^{(k)}.$$

Завдання.

1. В гільбертовому просторі H задана повна ортонормірована система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Нижче приведені формули, які задають оператор A на деякій лінійній підмножині H

а) $Ae_n=e_{n+1}$ б) $Ae_n=\dfrac{1}{n}(e_1+e_2+\ldots+e_n)$ в) $Ae_n=e_1+e_2+\ldots+e_n$

г) $Ae_n=ne_n$ д) $Ae_n=e_{2n}$ е) $Ae_n=\pi^n e_n$ є) $Ae_n=\dfrac{1}{n}e_n$.

Указати ці множини і відмітити, чи є оператор A 1) обмеженим; 2) проективним на цій множині. Де це можливо, знайти норма оператора A.

2. Нехай A і B самоспряжені оператори. Довести, що оператор AB є самоспряженим тоді і тільки тоді, якщо $AB-BA=0$.

3. Довести, що будь-який оператор $A\in(H\to H)$, де H комплексний гільбертів простір, однозначно представимо у вигляді $A=B+iC$, де B,C самоспряжені оператори.

Глава У

§ 1. Принцип нерухомої точки

У математиці дуже часто доводиться розв'язувати рівняння вигляду

$$x = Ax, \tag{1}$$

де A будь-який оператор, що відображає заданий метричний простір X сам у себе. Виявляється, що дуже багато рівнянь цього виду можуть бути розв'язані за допомогою методу, який має назву методу послідовних наближень, або послідовних ітерацій. Цей метод завжди можна застосувати, якщо оператор A є так званим оператором стиску.

Означення 1. Оператор $A\colon X \to X$, який діє у метричному просторі X, називається оператором стиску, якщо існує додатне число $\alpha \in (0,1)$ таке, що $\forall x, y \in X$ виконується нерівність

$$\rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y).$$

Зазначимо, що будь-який оператор стиску є неперервним, оскільки при $x \to x_0$, тобто $\rho(x, x_0) \to 0$, також $\rho(Ax, Ax_0) \le \alpha\rho(x, x_0) \to 0$, тобто $Ax \to Ax_0$.

Означення 2. Для оператора $A\colon X \to X$ деяка точка x_* називається нерухомою точкою, якщо виконується рівність

$$Ax_* = x_*,$$

тобто, якщо ця точка є розв'язком рівняння (1).

Теорема 1 (Принцип нерухомої точки). У повному метричному просторі X для усякого оператору стиску $A\colon X \to X$ існує єдина нерухома точка.

Доведення. Нехай x_0 довільна точка з простору X. Покладемо

$$x_1 = Ax_0, x_2 = Ax_1 = A(Ax_0) = A^2x_0, \ldots, x_{n+1} = Ax_n = A^{n+1}x_0, \ldots$$

Переконаємося, що послідовність $\{x_n\}$ є фундаментальною. Дійсно, $\forall n$ маємо

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(Ax_n, Ax_{n-1}) \le \alpha\rho(x_n, x_{n-1}) \le \alpha^2\rho(x_{n-1}, x_{n-2}) \le \ldots \le \alpha^n\rho(x_1, x_0).$$

Тоді $\forall m, n$ і, наприклад $m \ge n$, внаслідок нерівності трикутника дістаємо

$$\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + \rho(x_{m-1}, x_m) \le$$

$$\le \alpha^n\rho(x_0, x_1) + \alpha^{n+1}\rho(x_0, x_1) + \ldots. + \alpha^{m-1}\rho(x_0, x_1) = \alpha^n\rho(x_0, x_1)\left[1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{m-n-1}\right] \le$$

$$\le \alpha^n\rho(x_0, x_1)\left[1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{m-n-1} + \ldots\right] = \alpha^n\rho(x_0, x_1)\frac{1}{1-\alpha}$$

Тому якщо для довільного $\varepsilon > 0$ вибрати n_0 так, щоб виконувалась нерівність

$$\alpha^n\rho(x_0, x_1)\frac{1}{1-\alpha} < \varepsilon, \text{ то } \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

і послідовність $\{x_n\}$ дійсно є фундаментальною. Тому, враховуючи, що простір X є повним, існує $x_* \in X$ таке, що

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_*.$$

Враховуючи, що оператор A неперервний, шляхом переходу до границі в рівності $Ax_n = x_{n+1}$ при $n \to \infty$ дістанемо $Ax_* = x_*$, тобто бачимо, що точка x_* є нерухомою точкою оператора A.

Доведемо тепер єдиність нерухомої точки x_*. Дійсно, припустивши, що деяка точка $y_* \in X$ також є нерухомою точкою оператора A, тобто $y_* = Ay_*$, дістанемо

$$\rho(x_*, y_*) = \rho(Ax_*, Ay_*) \le \alpha\rho(x_*, y_*), \text{ де } 0 < \alpha < 1.$$

Звідси ж випливає

$$0 \le (1-\alpha)\rho(x_*, y_*) \le 0; \quad \rho(x_*, y_*) = 0; \quad x_* = y_*.$$

Зауваження. Якщо в нерівності

$$\rho(x_n, x_m) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1)$$

перейти до границі при $m \to \infty$, дістанемо

$$\rho(x_n, x_*) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1).$$

Одержана нерівність показує, що відстань між довільним наближенням x_n розв'язку рівняння $x = Ax$ і самим розв'язком x_*, коли $n \to \infty$ прямує до нуля з швидкістю геометричної прогресії з знаменником $\alpha \in (0,1)$.

Приклади.

1. Розглянемо систему лінійних рівнянь вигляду

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i, \quad i = 1,2,...,n.$$

Для того щоб застосувати до цієї системи рівнянь принцип нерухомої точки, запишемо Ії у вигляді операторного рівняння $Ax = x$, де $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, а оператор A відображає R_n у R_n за законом

$$Ax = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j + b_1, \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j + b_2, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j + b_n \right).$$

Введемо в R_n метрику, поклавши

$$\rho(x, y) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|.$$

Тоді

$$\rho(Ax, Ay) = \max_{1 \le i \le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i - \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + b_j \right) \right| = \max_{1 \le i \le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (x_j - y_j) \right| \le$$

$$\le \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j - y_j| \le \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot \max_{1 \le j \le n} |x_j - y_j| = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot \rho(x, y).$$

Одержана нерівність показує, що за умови

$$\max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \alpha < 1$$

оператор A буде оператором стиску. Внаслідок цього система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок, який можна знайти методом послідовних ітерацій.

2. Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма II-го роду

$$x(t) - \lambda \int_a^b K(t,s) x(s) ds = y(t), \quad a \le t \le b,$$

де ядро $K(t,s)$ і права частина $y(t)$ є дані функції, λ - числовий параметр, $x(t)$ шукана функція.

Припустимо, що $K(t,s)$ і $y(t)$ неперервні при $a \le t, s \le b$. Тоді ядро $K(t,s)$ обмежено $|K(t,s)| \le M$. Розглянемо інтегральний оператор

$$z(t) = Ax(t) = \lambda \int_a^b K(t,s) x(s) ds + y(t),$$

який відображає повний метричний простір $C[a,b]$ сам у себе. Маємо

$$\rho(z_1, z_2) = \max_{a \le t \le b} |z_1(t) - z_2(t)| = \max_{a \le t \le b} \left| \lambda \int_a^b K(t,s) [x_1(s) - x_2(s)] ds \right| \le$$

$$\le |\lambda|\cdot\max_{a\le t\le b}\int_a^b |K(t,s)|\cdot|x_1(s)-x_2(s)|ds \le |\lambda|\cdot M(b-a)\cdot\max_{a\le s\le b}|x_1(s)-x_2(s)| = |\lambda|\cdot M(b-a)\rho(x_1,x_2).$$

Оператор A буде оператором стиску, якщо

$$|\lambda|\cdot M(b-a)=\alpha<1,$$

тобто якщо $|\lambda|<\dfrac{1}{M(b-a)}$. В цьому випадку інтегральне рівняння Фредгольма II-го роду має єдиний неперервний розв'язок, який може бути побудован методом послідовних наближень

$$x_{n=1}(t)=\lambda\int_a^b K(t,s)x_n(s)ds+y(t),\quad n=0,1,...$$

3. Розглянемо нескінчену систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$x_i-\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j=b_i,\quad i=1,2,... \tag{2}$$

Назовем розв'язком системи (2) таку числову послідовність $\{x_i^*\}$, що коли $x_i=x_i^*$ ряди в лівої частині (2) збігаються і усі рівняння (2) обертаються в тотожності.
Припустимо, що нескінчена матриця

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n}... \\ a_{21}a_{22}...a_{2n}... \\ \text{L L L L L} \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn}... \\ \text{L L L L } \square \end{pmatrix}$$

системи (2) задовольняє умові

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2<1 \tag{3}$$

Тоді ця матриця визначає у повному просторі l_2 лінійний неперервний оператор A

$$y=Ax+b,\quad x=(x_1,x_2,...),\quad y=(y_1,y_2,...),\quad b=(b_1,b_2,...)$$

$$y_i=\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j+b_i,\quad i=1,2,...$$

Розглянемо

$$\rho(y',y'')=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i'-y_i''|^2\right)^{1/2}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}(x_j'-x_j'')\right|^2\right)^{1/2}$$

З нерівності Коші-Буняковського випливає

$$\rho(y',y'')\le\left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2\cdot\sum_{j=1}^{\infty}|x_j'-x_j''|^2\right)^{1/2}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}\cdot\rho(x',x''),$$

тобто умова (3) дає, що оператор A буде оператором стиску і нескінчена система лінійних алгебраїчних рівнянь (2) має в l_2 єдиний розв'язок.

Зауваження. Нехай A оператор стиску, діючий в банаховому просторі X. Через те що $\rho(x,y)=\|x-y\|$ з нерівності $\rho(Ax,Ay)\le\alpha\rho(x,y)$ випливає нерівність

$\|Ax-Ay\|=\|A(x-y)\|\le\alpha\|x-y\|$,з якої слідує, що $\|A\|\le\alpha<1$. Тоді за теоремою Банаха існує обмежений обернений оператор $(J-A)^{-1}$, тобто існує єдиний розв'язок операторного рівняння $x-Ax=y$, який задається формулою $x=(J-A)^{-1}y$.

Завдання.

1. Знайти умови, коли оператор A з прикладу 1 є оператор стиску, якщо в просторі R_n метрика введена так

$$\text{а)}\quad \rho(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i| \qquad \text{б)}\quad \rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2}.$$

2. Знайти умови, коли інтегральний оператор Фредгольма A з прикладу 2 є оператором стиску в просторі $L_2(a,b)$.

3. Довести, що якщо неперервний оператор A переводить повний метричний простір сам у себе і деяка його степінь $B=A^k$ є оператор стиску, то рівняння $x=Ax$ має єдиний розв'язок. Ви користуючи цей факт довести, що інтегральне рівняння Вольтера II-го роду

$$x(t)-\lambda\int_a^t K(t,s)x(s)ds=y(t), \quad a\le t\le b$$

має єдиний розв'язок для будь-якого значення λ.

§ 2. Лінійні операторні рівняння з цілком неперервним оператором

Нехай X простір Банаха, $A\in(X\to X)$ цілком неперервний оператор. Розглянемо такі операторні рівняння :

$$Ax-x=y \tag{I}$$

$$Ax-x=\Theta \tag{II}$$

А також спряжені рівняння

$$A^*f-f=g \tag{III}$$

$$A^*f-f=\Theta \tag{IУ}$$

Рівняння (III) і (IУ) розглядаються в спряженому просторі X^* (простір X^* є також простір Банаха)

$$(A^*f)(x)=f(Ax)$$

Теорема 2. Нехай $N=\{x\in X:\quad Ax-x=\Theta\}$. N має скінчену розмірність.

Доведення. Нехай M обмежена множина з N. Тоді $M(A)=M$ також обмежена множина. Оскільки A цілком неперервний оператор, то $A(M)$ предкомпактна множина. Звідки M предкомпактна множина. Тобто, будь-яка обмежена множина $M\subset N$ предкомпактна. За теоремою 11 (глава II) множина N має скінчену розмірність.

Лема 1. Існує така стала α, яка визначається оператором A, що якщо $y\in(A-J)(X)$, то принаймні для одного рішення (I)

$$\|\tilde{x}\|\le\alpha\|y\| \tag{4}$$

Доведення. Нехай $L=(A-J)(X)$. Тоді $\forall y\in L$ існує x_0 такий, що $Ax_0-x_0=y$.

Якщо $\forall z\in N$, то x_0+z теж є рішення (I).

Розглянемо функціонал $\varphi(z)=\|x_0+z\|\ge 0$. Існує $\inf\limits_{z\in N}\|x_0+z\|=d$ і тому існує послідовність $\{z_n\}\subset N$ така, що $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(z_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\|x_0+z_n\|=d$.

Через те що $\|z_n\|\le\|x_0+z_n\|+\|x_0\|$, послідовність $\{z_n\}$ обмежена послідовність з N. Оскільки розмірність N скінчена, то послідовність $\{z_n\}$ компактна. З неї можна вилучити збіжну підпослідовність. Будемо вважати, що вона сама збігається

$$\lim_{n\to\infty}z_n=z_0\in N.$$

Таким чином $\tilde{x}=x_0+z_0$ є рішення (I), норма якого найменша (мінімальне рішення).

Доведемо, що $\tilde{x}$ і задовольняє нерівності (4). Розглянемо таку множину

$$\left\{\frac{\|\tilde{x}\|}{\|y\|},\quad y\in L\right\}\quad (\tilde{x}\ \text{відповідне рішення (I)})$$

і доведемо, що ця множина обмежена. Доведення будемо проводити від супротивного. Нехай множина $\left\{\frac{\|\tilde{x}\|}{\|y\|}\right\}$ не обмежена. Тоді існує послідовність $\left\{\frac{\|\tilde{x}_n\|}{\|y_n\|}\right\}\to+\infty$. Не обмежуючи загальності можна вважати, що $\|\tilde{x}_n\|=1$ (λy_n відповідає $\lambda\tilde{x}_n$). Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n\|=0 \ \text{ і } \ \lim_{n\to\infty}y_n=\Theta \ \text{ в } \ X .$$

Послідовність $\{\tilde{x}_n\}$ обмежена. Тому послідовність $\{A\tilde{x}_n\}$ предкомпектна, тобто містить збіжну підпослідовність $\{A\tilde{x}_{n_k}\}$

$$\lim_{k\to\infty}A\tilde{x}_{n_k}=\tilde{x}_0 .$$

Але $\tilde{x}_{n_k}=A\tilde{x}_{n_k}-y_{n_k}$. Переходячи до границі при $k\to\infty$ маємо, що існує $\lim\limits_{k\to\infty}\tilde{x}_{n_k}=\tilde{x}_0$, тобто

$$\tilde{x}_0=A\tilde{x}_0 \ \text{ і } \ \tilde{x}_0\in N .$$

$$\|\tilde{x}_{n_k}-\tilde{x}_0\|\ge\|\tilde{x}_{n_k}\|=1, \text{ що неможливо.}$$

Таким чином, множина $\left\{\frac{\|\tilde{x}\|}{\|y\|}\right\}$ обмежена, тобто існує таке α, що $\frac{\|\tilde{x}\|}{\|y\|}\le\alpha$, а $\|\tilde{x}\|\le\alpha\|y\|$.

Лема доведена.

Лема 2. $L=(A-J)(X)$ є підпростір X.

Доведення. Легко бачити, що L лінійна множина. Нехай $\forall y_1,y_2\in L$. Тоді існують такі x_1 і x_2, що

$$Ax_1-x_1=y_1,\quad Ax_2-x_2=y_2, \text{ а } A(c_1x_1+c_2x_2)-(c_1x_1+c_2x_2)=c_1y_1+c_2y_2 .$$

Звідки $c_1y_1+c_2y_2\in L$.

Доведемо, що L замкнена множина. Нехай $\{y_n\}$ послідовність елементів з L, яка збігається к елементу $y_0\in X$. Доведемо, що $y_0\in L$.

Переходячи якщо це потрібно к підпослідовності можна вважати, що $\|y_n-y_0\|<\frac{1}{2^{n+1}}$. Тоді

$$\|y_{n+1}-y_n\|\le\|y_{n+1}-y_0\|+\|y_n-y_0\|<\frac{1}{2^n}$$

Нехай x_0 мінімальне рішення рівняння $Ax-x=y_1$, x_n мінімальне рішення рівняння $Ax-x=y_{n+1}-y_n$, $n\ge1$. Тоді

$$\|x_n\|\le\alpha\|y_{n+1}-y_n\|<\frac{\alpha}{2^n}\quad \text{(за лемою 1).}$$

Таким чином ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ збігається в X. Нехай $x^*=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$. Легко бачити, що

$$(A-J)x^*=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(A-J)x_k=\lim_{n\to\infty}y_{n+1}=y_0;\quad (A-J)x^*=y_0,\quad y_0\in L .$$

Множина L замкнена.

Теорема 3. Для того щоб для певного $y\in X$ рівняння (I) мало рішення, необхідно і достатньо, щоб $f(y)=0$ для будь-якого f, який задовольняє $A^*f-f=0$.

Доведення. Необхідність. Нехай рівняння (I) має рішення. Тобто, існує $x_0\in X$, що $Ax_0-x_0=y$.

$$f(Ax_0 - x_0) = f(Ax_0) - f(x_0) = (A^* f)(x_0) - f(x_0) = (A^* f - f)(x_0) = 0 .$$

Функціонал $A^* f - f$ на $\forall x \in X$ дорівнює нулю.

Достатність. Нехай $f(y) = 0$ для будь-якого f, яке є рішенням (ІУ). Доведемо, що $y \in L$. Нехай $y \notin L$ (L підпростір X). Тоді існує функціонал $f_0(x)$ такий що

$$f_0(y) = 1, \quad f_0(x) = 0 \text{, якщо } x \in L \text{ і } \|f_0\| = \frac{1}{d} \text{, де } d = \inf_{x \in L} \|y - x\| > 0 .$$

Якщо $\forall x \in X$, то $Ax - x \in L$ і $f_0(Ax - x) = 0$.

$$f_0(Ax - x) = f_0(Ax) - f_0(x) = (A^* f_0 - f_0)(x) = 0 .$$

Тобто, $A^* f_0 - f_0 = 0$. За умовою теореми $f_0(y) = 0$ і ми дійшли до суперечності. Таким чином $y \in L$ і рівняння (І) має розв'язок.

Наслідок. Якщо спряжене рівняння $A^* f - f = \Theta$ має лише тривіальне рішення $f = 0$, то рівняння $Ax - x = y$ має рішення $\forall y \in X$, тобто $L = X$.

Теорема 4. Для того щоб рівняння (ІІІ) для певного $g \in X^*$ мало рішення, необхідно і достатньо, щоб $g(x) = 0 \quad \forall x \in N$.

Доведення. Необхідність. Нехай існує f такий, що $A^* f - f = g$. Тобто

$$(A^* f - f)(x) = g(x) \quad \forall x \in X .$$

Нехай $x \in N$

$$g(x) = (A^* f)(x) - f(x) = f(Ax) - f(x) = f(Ax - x) = 0 .$$

Достатність. На $L = (A - J)(X)$ визначимо функціонал f_0 таким чином $f_0(y) = g(x)$, де x рішення $Ax - x = y \quad (y \in L)$.

Легко бачити, що вибір елементу x, який є рішенням (І) з правою частиною y не має значення. Дійсно, $Ax_0 - x_0 = y$. Тоді $x - x_0 \in N$ і $g(x - x_0) = 0$; $g(x) = g(x_0)$.

f_0 є лінійний функціонал

$$f_0(c_1 y_1 + c_2 y_2) = g(c_1 x_1 + c_2 x_2) = c_1 g(x_1) + c_2 g(x_2) = c_1 f_0(y_1) + c_2 f_0(y_2)$$

$$(\ Ax_1 - x_1 = y_1; \quad Ax_2 - x_2 = y_2\ )$$

Нехай $\tilde{x}$ мінімальне рішення (І), яке відповідає $y \in L$. Тоді $\|\tilde{x}\| \le \alpha \|y\|$ за лемою 1 і

$$|f_0(y)| = |g(\tilde{x})| \le \alpha \|g\| \cdot \|y\|$$

Таким чином f_0 обмежений і $\|f_0\| \le \alpha \|g\|$.

За теоремою Банана-Хана існує лінійний обмежений функціонал f, який на L дорівнює f_0 і $\|f\| = \|f_0\|$.

$$f(Ax - x) = f(y) = f_0(y) = g(x)$$

$$f(Ax - x) = (A^* f - f)(x) = f_0(Ax - x) = g(x), \quad \forall x \in X$$

Тобто, f є рішення (ІІІ).

Наслідок. Якщо рівняння (ІІ) має лише нульове рішення ($N = \{\Theta\}$), то рівняння (ІІІ) має рішення $\forall g \in X^*$.

Теорема 5. Для того щоб рівняння $Ax - x = y$ мало рішення $\forall y \in X \ (X = L)$ необхідно і достатньо, щоб відповідне однорідне рівняння $Ax - x = 0$ мало лише нульове рішення ($N = \{\Theta\}$). В цьому випадку оператор $A - J$ має обмежений обернений оператор $(A - J)^{-1}$.

Доведення. Необхідність. Нехай рівняння (І) має розв'язок $\forall y \in X$. Потрібно довести, що $N = \{\Theta\}$. Будемо доводити від супротивного. Нехай $Ax_1 - x_1 = \Theta$ і $x_1 \ne \Theta$ та x_2 рішення (І) з правою частиною x_1, тобто $Ax_2 - x_2 = x_1$, або $(A-J)x_2 = x_1$. Розглянемо степені оператора $A-J$ і відповідно рівняння $(A-J)^k = \Theta$.

Нехай $N_k = \{x \in X: \ (A-J)^k x = 0\}$, $(N_1 \equiv N)$. Мабуть $x_2 \in N_2$

$$(A-J)^2 x_2 = (A-J)[(A-J)x_2] = (A-J)x_1 = \Theta,$$

але $x_2 \notin N_1$. Нехай $x_{k+1} = (A-J)x_k$. Тоді $x_{k+1} \in N_{k+1}$, $x_{k+1} \notin N_k$ і т. н. Таким чином

$$N_1 \subset N_2 \subset ... \subset N_k \subset ...$$

Тому $\forall \varepsilon > 0$ існує $y_k \in N_k$, що

$$y_k \notin N_{k-1}, \quad \|y_k\| = 1 \ \text{ і } \ \|y_k - x\| > 1/2, \quad x \in N_{k-1} \ \text{ (наприклад } \varepsilon = 1/2 \text{).}$$

Розглянемо послідовність $\{y_k\}_{k=2}^{\infty}$. Вона обмежена, $\|y_k\| = 1$.

Оператор A цілком неперервний, тому послідовність $\{Ay_k\}$ предкомпактна. З неї можна вилучити збіжну (в X) підпослідовність. Розглянемо при $m > n$

$$\|Ay_m - Ay_n\| = \|(A-J)y_m + y_m - (A-J)y_n - y_n\| = \|y_m - [y_n + (A-J)y_n - (A-J)y_m]\|$$

Елемент $z = y_n + (A-J)y_n - (A-J)y_m \in N_{m-1}$. Тому $\|y_m - z\| > 1/2$. Таким чином з $\{Ay_k\}$ не можна вилучити збіжну підпослідовність. Дійшли до суперечності.

Рівняння $Ax - x = \Theta$ має тільки тривіальне рішення, $N = \{\Theta\}$.

Достатність. Нехай рівняння (II) має лише нульове рішення. Треба довести, що $L = X$.

Якщо (II) має лише нульове рішення, то за наслідком теореми 4 рівняння $A^* f - f = g$ має рішення $\forall g \in X^*$. Але оператор A^* цілком неперервний (X^* повний простір) і згідно з першою частиною цієї теореми рівняння $A^* f - f = \Theta$ має лише нульове рішення. Але тоді рівняння $Ax - x = y$ має рішення $\forall y \in X \quad (X = L)$.

Рівняння (I) має тільки одне рішення, тобто існує обернений оператор $(A-J)^{-1} y = x$ (це рішення задовольняє нерівності $\|x\| \le \alpha \|y\|, \quad \alpha > 0$).

$$\|(A-J)^{-1} y\| = \|x\| \le \alpha \|y\|$$

Таким чином $\|(A-J)^{-1}\| \le \alpha$ і оператор $(A-J)^{-1}$ обмежений.

Лема 3. Нехай $f_1, f_2, ..., f_n \in X^*$ лінійно незалежні. Тоді існує сукупність елементів $z_1, z_2, ..., z_n \in X$ біортогональна $\{f_i\}_{i=1}^{n}$, тобто

$$f_i(z_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \ne k \end{cases} \qquad i,k = \overline{1,n}$$

Доведення. Доведемо по індукції.

Якщо $n = 1$, то існує $z_1 \in X$ такий що $f_1(z_1) = 1$.

Нехай $n > 1$. Будемо вважати, що побудовані елементи $z_1, z_2, ..., z_m \quad (m < n)$ такі, що

$$f_i(z_k) = \delta_{ik}, \text{ коли } i,k = \overline{1,m}.$$

Нехай $z_2', z_3', ..., z_{m+1}'$ система елементів біортогональна $f_2, f_3, ..., f_{m+1}$. Тоді для кожного елемента $z \in X$ виду

$$z = \sum_{k=2}^{m+1} \alpha_k z_k' + z_1, \text{ де } f_2(z_1) = f_3(z_1) = ... = f_{m+1}(z_1) = 0$$

маємо $f_1(z) = \sum\limits_{k=2}^{m+1} \alpha_k f_1(z_k') + f_1(z_1)$. Тоді

$$f_1(z)-\sum_{k=2}^{m+1}\alpha_k f_1(z'_k)= f_1(z_1)=1, \quad f_1\left\{z-\sum_{k=1}^{m+1}\alpha_k z'_k\right\}=1$$

Елемент $z'_1 = z-\sum_{k=2}^{m+1}\alpha_k z'_k$ разом з елементами $z'_2, z'_3,..., z'_{m+1}$ є система елементів біортогональна $\{f_i\}_{i=1}^m$ $(m \le n)$.

Лема доведена.

Теорема 6. Нехай $N' = \{f \in X^*: \quad A^* f - f = 0\}$. Множини N та N' мають однакову скінчену розмірність.

Доведення. Раніше було доведено, що N має скінчену розмірність (теорема 2). Зрозуміло, що N' теж має скінчену розмірність. Нехай $\dim N = n, \dim N' = m$. Треба довести, що $n = m$.

Нехай $x_1, x_2,..., x_n$ система лінійно незалежних елементів з N, а $f_1, f_2,..., f_m$ система лінійно незалежних функціоналів з N'. Нехай $m > n$. Побудуємо систему з n функціоналів $\varphi_1, \varphi_2,..., \varphi_n$ біортогональну елементам $x_1, x_2,..., x_n$. Тобто

$$\varphi_i(x_j)=\delta_{ij} =\begin{cases}1, i=j\\ 0, i\neq j\end{cases}$$

Потім знайдемо систему елементів $z_1, z_2,..., z_m$ біортогональну до системи функціоналів $f_1, f_2,..., f_m$. Розглянемо оператор U, який діє в X таким чином

$$Ux = Ax+\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)\cdot z_i \; .$$

Оператор $Wx=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)\cdot z_i$ цілком неперервний, бо діє в підпростір X скінченої розмірності, оператор A цілком неперервний за умовою. Тому U цілком неперервний оператор.

Розглянемо однорідне рівняння $Ux - x = \Theta$. Нехай x_0 рішення цього рівняння $Ux_0 - x_0 = \Theta$. Тоді

$$f_k(Ux_0 - x_0)= f_k(Ax_0 - x_0)+\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x_0)\cdot f_k(z_i), \quad k=\overline{1,n}$$

$$f_k(Ax_0 - x_0)=(A^* f_k - f_k)(x_0)=0$$

Таким чином $\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x_0)\cdot f_k(z_i)=0$ і $\varphi_k(x_0)=0$.

$$Ax_0 - x_0 = Ux_0 - x_0 -\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x_0)\cdot z_i = \Theta \text{, тобто } x_0 \in N \text{. Тоді } x_0 = \sum_{j=1}^{n}c_j x_j \; .$$

Легко бачити, що $c_j = 0$. Дійсно,

$$\varphi_k(x_0)=\sum_{j=1}^{n}c_j\varphi_k(x_j), \quad k=\overline{1,n}; \quad \varphi_k(x_0)=c_k = 0 \text{. Звідки } x_0 = 0 .$$

Рівняння $Ux - x = \Theta$ має лише нульове рішення, тому за теоремою 5 відповідне рівняння $Ux - x = y$ має рішення $\forall y \in X$. За умовою $m > n$, тому $z_{n+1} \in \{z_i\}_{i=1}^m$.

Розглянемо рівняння $Ux - x = z_{n+1}$, нехай x' його рішення.

$$f_{n+1}(z_{n+1})= f_{n+1}(Ux'-x')= f_{n+1}(Ax'-x')+\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x')\cdot f_{n+1}(z_i)=(A^* f_{n+1} - f_{n+1})(x')=0$$

Таким чином $f_{n+1}(Ux'-x')= f_{n+1}(z_{n+1})=0$, але $f_{n+1}(z_{n+1})=1$. Супротивність і $m \le n$.

Таким же чином легко довести, що m не може бути менше за n. (В цьому випадку потрібно розглянути оператор $U^* f = A^* f + \sum_{i=1}^{m} f(z_i) \cdot \varphi_i$). Отже $m = n$ і теорема доведена.

Операторні рівняння з параметром

Нехай X простір Банаха, $A \in (X \to X)$, A цілком неперервний оператор. Розглянемо такі операторні рівняння

$$Ax - \lambda x = y \tag{Ia}$$

$$Ax - \lambda x = \Theta \tag{IIa}$$

$\lambda \in R_1$ (або C_1), $\lambda \neq 0$. Відомо, що $\overline{(\lambda A^*)} = \bar{\lambda} A^*$. Тому спряженими операторними рівняннями будуть

$$A^* f - \bar{\lambda} f = g \tag{IIIa}$$

$$A^* f - \bar{\lambda} f = \Theta \tag{IУa}$$

Означення 3. Число λ називається регулярним значенням оператора A, якщо оператор $A - \lambda J$ має обмежений обернений оператор.

Рівняння $Ax - \lambda x = y$ можна записати таким чином $\frac{1}{\lambda} Ax - x = \frac{1}{\lambda} y$. Оператор $B = \frac{1}{\lambda} A$ є цілком неперервний ($B^* = \frac{1}{\bar{\lambda}} A^*$)

$$A - \lambda J = B - J .$$

Тому в цьому випадку теореми 2 – 6 мають місце.

Ті значення параметра λ, коли (IIa) має ненульові рішення є власні значення оператора A (N_λ - власний підпростір).

З теорем 2 – 6 випливають так звані теореми Фредгольма.

І теорема Фредгольма.

Якщо λ не є власне значення оператора A, то рівняння (Ia) має рішення $\forall y \in X$ $((A - \lambda J)(X) = X)$. В цьому випадку λ є регулярне значення оператора A (теорема 5).

ІІ теорема Фредгольма.

Якщо λ є власне значення оператора A, то $\bar{\lambda}$ є власне значення оператора A^*, а рівняння (IIa) і (IУa) мають однакове число лінійно незалежних рішень.

ІІІ теорема Фредгольма.

Якщо λ є власне значення оператора A, то для того щоб рівняння (Ia) мало рішення при певному $y \in X$ необхідно і достатньо, щоб $f_i(y) = 0$, $i = \overline{1, n}$, де $f_1, f_2, ..., f_n$ система лінійно незалежних рішень (IУa). В цьому випадку рівняння (Ia) має нескінчену кількість розв'язків

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i ,$$

де x_0 певний розв'язок (Ia), $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ загальний розв'язок (IIa).

Розглянемо тепер інтегральні рівняння Фредгольма II-го роду

$$x(t) - \lambda \int_a^b K(t,s) x(s) ds = y(t), \quad a \leq t \leq b , \tag{5}$$

де ядро $K(t,s)$ вимірна функція, яка належить простору L_2 в квадраті $a \leq t, s \leq b$, тобто

$$\int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^2\,dtds < \infty,$$

$y(t)$ деяка задана функція з $L_2(a,b)$, а $x(t)$ - шукана функція з $L_2(a,b)$.
Підпорядкуємо рівнянню (5) інтегральний оператор

$$Ax(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds,$$

який є цілком неперервним в просторі $L_2(a,b)$. Спряжений оператор A^* має вигляд

$$A^* f(t) = \int_a^b \overline{K(s,t)}f(s)ds.$$

Таким чином, якщо $K(t,s) = \overline{K(s,t)}$, то інтегральний оператор Фредгольма буде самоспряженим.

Для інтегрального рівняння (5) мають місце теореми Фредгольма. При цьому власними значеннями будуть ті значення $\frac{1}{\lambda}$, коли однорідне рівняння (5) має ненульові рішення. Теореми Фредгольма дають умови існування рішень, але не дають засобу їх побудови. Розглянемо один клас рівнянь Фредгольма, для якого рішення завжди може бути побудовано. Це так звані інтегральні рівняння з виродженнями ядрами.

Ядро інтегрального рівняння (5) зветься виродженим, якщо воно має вигляд

$$K(t,s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)\beta_i(s),$$

де функції $\alpha_i(t)$ та $\beta_i(s)$ належать $L_2(a,b)$. Будемо також вважати, що функції $\alpha_i(t)$ лінійно незалежні між собою. Теж саме стосується функцій $\beta_i(s)$.

В цьому випадку рівняння (5) можливо записати у вигляді

$$x(t) = \lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(t)\int_a^b \beta_i(s)x(s)ds + y(t)$$

Позначимо через

$$C_i = \int_a^b \beta_i(s)x(s)ds, \quad i = \overline{1,n} \tag{6}$$

Тоді наше рівняння прийме вигляд

$$x(t) = \lambda\sum_{i=1}^{n} C_i\alpha_i(t) + y(t) \tag{7}$$

Таким чином рішення $x(t)$ буде знайдено, якщо будуть найдені числа $C_1, C_2, ..., C_n$. Для їх знаходження підставимо вираз (7) в рівності (6)

$$C_i = \int_a^b \beta_i(s)\left[\lambda\sum_{k=1}^{n} C_k\alpha_k(s) + y(s)\right]ds, \quad i = \overline{1,n}.$$

Якщо позначимо

$$a_{ik} = \int_a^b \beta_i(s)\alpha_k(s)ds, \quad b_i = \int_a^b \beta_i(s)y(s)ds, \quad i,k = \overline{1,n},$$

то для знаходження $C_1, C_2, ..., C_n$ прийдемо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} (1-\lambda a_{11})C_1 - \lambda a_{12}C_2 - \ldots - \lambda a_{1n}C_n = b_1 \\ -\lambda a_{21}C_1 - (1-\lambda a_{22})C_2 - \ldots - \lambda a_{2n}C_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\lambda a_{n1}C_1 - \lambda a_{n2}C_2 - \ldots - (1-\lambda a_{nn})C_n = b_n \end{cases} \tag{8}$$

Існування та єдність рішення системи (8) залежить від детермінанта системи

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \ldots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \ldots & -\lambda a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \ldots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}$$

Нехай рівняння $\Delta(\lambda)=0$ має розв'язки $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p$. Для усіх значень $\lambda \neq \lambda_k$, $k=\overline{1,p}$ детермінант системи $\Delta(\lambda)\neq 0$ і вона має єдиний розв'язок $C_1,C_2,\ldots,C_n$. Таким чином ми побудували рішення (7) інтегрального рівняння (5). При цьому число $\dfrac{1}{\lambda}$ буде регулярним значенням інтегрального оператора.

Якщо $\lambda=\lambda_k$, $k=\overline{1,p}$, то $\Delta(\lambda)=0$ і система (8) або не має розв'язків, або має безліч їх. В цьому випадку треба підставити це значення $\lambda=\lambda_k$ в систему (8) та дослідити Ії. Якщо однорідна система (8) буде мати ненульове рішення, то це рішення є власний елемент інтегрального оператора, якій відповідає власному значенню $\dfrac{1}{\lambda_k}$. Таким чином цей метод дозволяє знаходить власні значення та власні елементи інтегрального оператора з виродженим ядром.

Завдання.

1. Знайти власні значення і підпростор власних функцій інтегрального оператора

$$Ax(t)=\int_0^1 K(t,s)x(s)ds$$

в просторі $L_2(0,1)$, якщо

а) $K(t,s)=\begin{cases} t(s-1), & 0\le t\le s \\ s(t-1), & s\le t\le 1 \end{cases}$ б) $K(t,s)=\begin{cases} \sin\pi t\cos\pi s, & 0\le t\le s \\ \sin\pi s\cos\pi t, & s\le t\le 1 \end{cases}$

2. При якої правої частині $y(t)\in L_2(0,\pi)$ інтегральне рівняння

$$x(t)-\int_0^\pi \sin(t+s)x(s)ds = y(t)$$

має рішення в просторі $L_2(0,\pi)$?

3. При яких $\lambda\in R$ інтегральне рівняння

$$x(t)-\lambda\int_a^b e^{t-s}x(s)ds = 1$$

має рішення в $L_2(a,b)$?

4. Знайти загальні рішення інтегральних рівнянь

а) $x(t)-\lambda\displaystyle\int_0^1 (2ts-4t^2)x(s)ds=0$ б) $x(t)-\lambda\displaystyle\int_0^\pi \cos(t+s)x(s)ds=0$

в) $x(t)-\lambda\displaystyle\int_{-1}^1 (t^2-2st)x(s)ds=t^3-t$ г) $x(t)-\lambda\displaystyle\int_0^1 (2ts+4t^2)x(s)ds=1-2t$

Список літератури

1. Банах С. Курс функціонального аналізу, Радянська школа, Київ, 1948.
2. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ, М., Наука, 1977.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа, М., Наука, 1972.
4. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной, М., Наука, 1974.
5. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс, М., Физматгиз, 1965.

Зміст