МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський національний університет ім. І. І. Мечникова

Навчальний посібник

з курсу

"РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ. МЕТОД ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ"

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник
для студентів технічних спеціальностей
вищих навчальних закладів
(Лист № 14/18.2-2449 від 18.11.04 р.)

Одеса
«Астропринт»
2005

ББК 22.161.6я73
Н 15
УДК 517.4(075)

Навчальний посібник має метою доступне та пояснюване багатьма прикладами викладення основного змісту університетського курсу. До нього включений матеріал щодо задачі Штурма - Ліувиля, побудови функції Гріна крайових задач, класичної та узагальненої схеми методу інтегральних перетворень, довідковий матеріал з огляду існуючих інтегральних перетворень та методів їх побудови.

Автори-укладачі:
Г. Я. Попов, В. В. Реут, Н. Д. Вайсфельд

Відповідальний редактор:
В. Є. Круглов

Рецензенти:
М. Я. Тихоненко, доктор фіз.-мат. наук, професор;
І. Ф. Шумлянський, доктор фіз.-мат. наук, професор;
Д. І. Черній, кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Рекомендовано до друку Вченою радою Одеського національного університету ім. І. І. Мечникова.
Протокол № 6 від 2 березня 2004 р.

$Н \frac{1602070100-088}{318-2005}$ Без оголош.

ISBN 966-318-339-X

ЗМІСТ

Передмова

Кількість підручників і посібників українською мовою, присвячених вивченню методу інтегральних перетворень, вкрай обмежено. Даний посібник призначений для студентів відділення "Прикладна математика". У ньому докладно викладені класичні питання, зв'язані з розв'язанням задачі Штурма — Ліувілля для регулярного випадку, зазначені визначальні властивості функції Гріна, різні методи її побудови і метод побудови фундаментальної функції. Приведено відповідні приклади і дані завдання для самостійної роботи.

Докладно викладена загальна схема методу інтегральних перетворень і узагальнена схема методу інтегральних перетворень, запропонованого Г. Я. Поповим. Остання проілюстрована на прикладі розв'язання антиплоскої задачі для випадку перетинних дефектів.

Особливо корисним є розділ, присвячений основним теоремам теорії скінчених інтегральних перетворень Ханкеля і Фур'є. Матеріал цього розділу, як зазначено укладачами, базується на монографії Снеддона "Перетворення Фур'є" — книзі, що давно стала раритетом. Тому довідкова інформація, витягнута з цієї книги, безперечно корисна для читача. До такого ж корисного матеріалу довідкового характеру варто віднести таблиці інтегральних перетворень з монографії Э. М. Карташова "Аналітичні методи в теплопровідності твердих тіл". Запропонований укладачами матеріал зручно об'єднаний у єдиний довідковий матеріал.

Новим є в посібнику розділ, присвячений одному способу побудови інтегральних перетворень, запропонованому Г. Я. Поповим. Цей спосіб проілюстрований на декількох прикладах, де отримані нові інтегральні перетворення для скінчених інтервалів.

Даний навчальний посібник рекомендований для студентів і аспірантів спеціальності "Прикладна математика".

§1. Загальна схема методу інтегральних перетворень

Метод, який викладається, є одним з ефективних засобів розв'язування крайових та початково-крайових задач математичної фізики, що описуються диференціальними рівняннями у частинних похідних.

Слід зауважати, що саме наявність диференціального оператора в частинних похідних є основним утрудненням розв'язування зменшених задач, так як методів побудови загальних розв'язків многомірних диференціальних рівнянь, аналогичних методам побудови загальних розв'язків звичайних диференціальних рівнянь, не існує.

Метод інтегральних перетворень базується на взаємно обернених формулах

$$f_\lambda = \int_{a_0}^{a_1} f(x) K(x, \lambda) dx,$$

$$f(x) = \int_l f_\lambda R(x, \lambda) d\sigma(\lambda),$$

перша з яких визначає трансформанту f_λ функції $f(x)$, що задана на інтервалі $a_0 < x < a_1$, а друга відновлює оригинал функції $f(x)$ за його трансформантою. Функції $K(x, \lambda)$ та $R(x, \lambda)$ називаються ядрами прямого та оберненого перетворення. В другій формулі λ може набувати комплексних значень. У відповідності з цим інтегрування проводиться по контуру l у комплексній площині.

Пояснимо схему методу інтегральних перетворень на прикладі крайової задачі

$$r(x)\frac{\partial}{\partial x}[p(x)\frac{\partial u}{\partial x}] - q(x)u + \sum_{k=0}^{n} P_k(y)\frac{\partial^{n-k} u}{\partial y^{n-k}} = f(x, y), \tag{1.1}$$

$$u = u(x, y), \quad a_0 < x < a_1, \quad b_0 < y < b_1$$

$$U_j[u] \equiv \alpha_{j0} u(a_j, y) + \alpha_{j1}\frac{\partial u}{\partial x}(a_j, y) = A_j(y), \tag{1.2}$$

$$j = 0,1, \quad b_0 < y < b_1,$$

$$V_k[u] \equiv \sum_{s=0}^{n-1}[\beta_{ks}^{(0)}\frac{\partial^s u}{\partial y^s}(x, b_0) + \beta_{ks}^{(1)}\frac{\partial^s u}{\partial y^s}(x, b_1)] = B_k(x), \tag{1.3}$$

$$k = \overline{0, n-1}, \quad a_0 < x < a_1.$$

Тут $r(x)$, $p(x)$, $q(x)$, $P_k(y)$, $f(x,y)$, $A_j(y)$, $B_k(x)$, $j = 0, 1$, $k = 0, ..., n-1$ — задані функції, $u(x,y)$ — невідома функція.

Ідея методу інтегральних перетворень стосовно поставленої задачі (1.1) – (1.3) міститься у переході до відшукування трансформанти

$$u_\lambda(y) = \int_{a_0}^{a_1} r^{-1}(x)K(x,\lambda)u(x,y)dx \tag{1.4}$$

шуканої функції по змінній x.

При цьому ядро інтегрального перетворення $K(x,\lambda)$ повинно бути підібрано так, щоб вихідна двовимірна задача (1.1) - (1.3) трансформувалась в одномірну крайову задачу для $u_\lambda(y)$. Звичайно розв'язання задачі (1.1) — (1.3) методом інтегральних перетворень поділяють на три етапи.

Перший етап. *Підбір ядра інтегрального перетворення та зведення вихідної крайової задачи до одномірної.*

Підбір здійснюється таким чином. Множать рівняння (1.1) на $r^{-1}(x)K(x, \lambda)$ та интегрують його по частинах на відрізку (a_0, a_1). У результаті перший доданок рівняння (1.1) набуде вигляду:

$$\int_{a_0}^{a_1} K(x,\lambda)\frac{\partial}{\partial x}[p(x)\frac{\partial u}{\partial x}]dx = N(y) + \int_{a_0}^{a_1} u\frac{d}{dx}[p(x)\frac{dK}{dx}]dx, \tag{1.5}$$

$$N(y) = [Kp\frac{\partial u}{\partial x} - up\frac{\partial K}{\partial x}]_{x=a_0}^{x=a_1}. \tag{1.6}$$

Якщо тепер враховувати, що ядро $K(x, \lambda)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$r(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dK}{dx}\right] - q(x)K = -\lambda K, \quad a_0 < x < a_1, \tag{1.7}$$

та взяти до уваги (1.5), то замість (1.1) можна записати

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(y)\frac{d^{n-k}u_\lambda}{dy^{n-k}} - \lambda u_\lambda = f_\lambda(y) - N(y), \tag{1.8}$$

$$f_\lambda(y) = \int_{a_0}^{a_1} r^{-1}(x)K(x,\lambda)f(x,y)dx. \tag{1.9}$$

У одержаному диференціальному рівнянні тільки останній доданок має замість трансформанти саму шукану функцію. Щоб виключити її з рівняння, перетворимо вираз (1.6) до вигляду

$$N(y) = \frac{\alpha_{01} u'_x(a_1, y) - \alpha_{11} u(a_1, y)}{\alpha_{01}^2 + \alpha_{11}^2} p(a_1) U_1[K] -$$

$$- \frac{\alpha_{00} u'_x(a_0, y) - \alpha_{10} u(a_0, y)}{\alpha_{00}^2 + \alpha_{10}^2} p(a_0) U_0[K] - \tag{1.10}$$

$$- \frac{\alpha_{01} K'_x(a_1, \lambda) - \alpha_{11} K(a_1, \lambda)}{\alpha_{01}^2 + \alpha_{11}^2} p(a_1) U_1[u] + \frac{\alpha_{00} K'_x(a_0, \lambda) - \alpha_{10} K(a_0, \lambda)}{\alpha_{00}^2 + \alpha_{10}^2} p(a_0) U_0[u].$$

Звідки бачимо, що останній доданок у рівнянні (1.8) не містить невідому функцію $u(x,y)$, якщо ядро інтегрального перетворення буде задовольняти граничні умови

$$U_j[K] \equiv \alpha_{j0} K(\alpha_j, \lambda) + \alpha_{j1} \frac{dK}{dx}(a_j, \lambda) = 0, \ j = 0,1. \tag{1.11}$$

Таким чином, ядро інтегрального перетворення повинно бути розв′язком задачі Штурма — Ліувілля (1.8), (1.11).

На кінці цього посібника наведена таблиця інтегральних перетворень, що відповідають тим чи іншім задачам Штурма — Ліувилля.

Нехай тепер $K(x, \lambda)$ — власна функція задачі Штурма — Ліувілля (1.8), (1.11). Помножимо на $r^{-1}(x)K(x, \lambda)$ граничні умови (1.3) та проінтегруємо по x у межах от a_0 до a_1. Отримаємо:

$$V_k[u_\lambda] = \overline{B}_k(\lambda), \quad k = \overline{0, n-1}, \tag{1.12}$$

де

$$\overline{B}_k(\lambda) = \int_{a_0}^{a_1} r^{-1}(x) K(x, \lambda) B_k(x) dx. \tag{1.13}$$

Таким чином, трансформанта $u_\lambda(y)$ є розв′язком одномірної крайової задачі (1.8), (1.12), в якій

$$N(y) = \frac{\alpha_{01} K'_x(a_0, \lambda) - \alpha_{10} K(a_0, \lambda)}{\alpha_{00}^2 + \alpha_{10}^2} p(a_0) A_0(y) -$$

$$- \frac{\alpha_{01} K'_x(a_1, \lambda) - \alpha_{11} K(a_1, \lambda)}{\alpha_{01}^2 + \alpha_{11}^2} p(a_1) A_1(y). \tag{1.14}$$

Другий етап. *Розв'язання задачи у трансформантах.*

Якщо відома фундаментальна базисна система розв'язків $\Psi_j(y)$, $j = \overline{0, n-1}$ та функція Гріна $G_\lambda(y,\eta)$ крайової задачі (1.8), (1.12), то трансформанту $u_\lambda(y)$ отримаємо за формулою

$$u_\lambda(y) = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{B}_j(\lambda)\Psi_j(y) + \int_{b_0}^{b_1} [f_\lambda(\eta) - N(\eta)] G_\lambda(y,\eta) d\eta. \tag{1.15}$$

Третій етап. *Обернення інтегрального перетворення.*

Щоб завершити розв'язання поставленої крайової задачі, залишається обернути вираз (1.4). Це обернення прямо пов'язано [7] з проблемою розкладення по власних функціях задачі Штурма — Ліувілля. В загальному вигляді воно записується так:

$$u(x,y) = \int_I R(x,\lambda) u_\lambda(y) d\sigma(\lambda). \tag{1.16}$$

Підстановка в (1.16) виразa (1.15) та обчислення отриманних слабозбіжних рядів та інтегралів складає заключний етап розв'язання задачі (1.1) - (1.3).

§ 2. Задача Штурма — Ліувілля

Фундаментальна система розв'язків

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння n-го порядку:

$$L_n u = \sum_{k=0}^{n} p_k(x) u^{(n-k)}(x) = 0. \tag{2.1}$$

Система часткових розв'язків рівняння (2.1) $\{\varphi_k\}, k = 0, n-1$ є фундаментальною, якщо вона складється з n лінійно незалежних функцій. Як відомо з теорії звичайних диференціальних рівнянь, умовою фундаментальності є нерівняння нулю визначника Вронського:

$$W(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) = \begin{vmatrix} \varphi_0 & \varphi_1 & \cdots & \varphi_{n-1} \\ \varphi_0' & \varphi_1' & \cdots & \varphi_{n-1}' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_0^{(n-1)} & \varphi_1^{(n-1)} & \cdots & \varphi_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix} = \det \left\| \varphi_j^{(k)}(x) \right\|_0^{n-1} \neq 0,$$

де $j = \overline{0, n-1}$ та навпаки.

Наприклад,

$$U'' = 0. \tag{2.2}$$

Фундаментальна система розв'язків (ФСР) така:

$$\varphi_0(x) = 1 \quad \varphi_1(x) = x \qquad W(\varphi_0, \varphi_1) = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Можна показати, що будь-яке лінійне однорідне диференціальне рівняння має незлічену множину ФСР. Так, ФСР рівняння (2.2) є і така система функцій:

$$\varphi_0(x) = 1 \quad \varphi_1(x) = x - a \qquad W(\varphi_0, \varphi_1) = \begin{vmatrix} 1 & x-a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Розглянемо рівняння:

$$U'' + \alpha^2 U = 0. \tag{2.3}$$

ФСР така:

$$\varphi_0(x) = \cos\alpha x \quad \varphi_1(x) = \frac{\sin\alpha x}{\alpha} \qquad W(\varphi_0, \varphi_1) = \begin{vmatrix} \cos\alpha x & \dfrac{\sin\alpha x}{\alpha} \\ -\alpha\sin\alpha x & \cos\alpha x \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Наступні системи часткових розв'язків також будуть ФСР (2.3):

$$1)\, \varphi_0(x) = \cos\alpha(x-a), \;\; \varphi_1(x) = \frac{\sin\alpha(x-a)}{\alpha},$$

$$W(\varphi_0, \varphi_1) = \begin{vmatrix} \cos\alpha(x-a) & \dfrac{\sin\alpha(x-a)}{\alpha} \\ -\alpha\sin\alpha(x-a) & \cos\alpha(x-a) \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

$$2)\;\; \varphi_0(x) = \cos\alpha(x-a), \;\; \varphi_1(x) = \cos\alpha(x-b),$$

$$W(\varphi_0, \varphi_1) = \begin{vmatrix} \cos\alpha(x-a) & \cos\alpha(x-b) \\ -\alpha\sin\alpha(x-a) & -\alpha\sin\alpha(x-b) \end{vmatrix} = \alpha\sin(\alpha(b-a)) \neq 0$$

$$\alpha \neq \frac{\pi k}{b-a}.$$

Розглянемо ФСР для рівняння:

$$U'' - \alpha^2 U = 0. \tag{2.4}$$

$$1)\,\varphi_0(x)=ch\alpha x,\;\; \varphi_1(x)=\frac{sh\alpha x}{\alpha},$$

$$W(\varphi_0,\varphi_1)=\begin{vmatrix} ch\alpha x & \dfrac{sh\alpha x}{\alpha} \\ \alpha sh\alpha x & ch\alpha x \end{vmatrix}=ch^2\alpha x-sh^2\alpha x=1\neq 0,$$

$$2)\;\; \varphi_0(x)=ch\alpha(x+a),\;\; \varphi_1(x)=\frac{sh\alpha(x+a)}{\alpha},$$

$$W(\varphi_0,\varphi_1)=\begin{vmatrix} ch\alpha(x+a) & \dfrac{sh\alpha(x+a)}{\alpha} \\ \alpha sh\alpha(x+a) & ch\alpha(x+a) \end{vmatrix}=ch^2\alpha(x+a)-sh^2\alpha(x+a)=1\neq 0.$$

Розглянемо рівняння Эйлера:

$$x^2U''+xU'\pm\alpha^2U=0. \tag{2.5}$$

Зробимо заміну: $x=e^t \;\to\; t=\ln x,\, x>0;\, \dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x},\, \dfrac{dU}{dx}=\dfrac{dU}{dt}\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}\dfrac{dU}{dt}$

$$\frac{d^2U}{dx^2}=\frac{d^2U}{dt^2}\left(\frac{1}{x^2}\right)+\frac{dU}{dt}\left(-\frac{1}{x^2}\right). \tag{2.6}$$

В результаті заміни одержуємо рівняння типу (2.3), ФСР якого записуємо у такому вигляді:

$$\varphi_0(x)=\cos\alpha(t-\ln a)\quad \varphi_1(x)=\frac{\sin\alpha(t-\ln a)}{\alpha}.$$

Зробивши обернену заміну, упевнимося, що одержана система функцій є ФСР:

$$W(\varphi_0,\varphi_1)=\begin{vmatrix} \cos\alpha(\ln x/a) & \dfrac{\sin\alpha(\ln x/a)}{\alpha} \\ -\dfrac{\alpha}{x}\sin\alpha(\ln x/a) & \dfrac{1}{x}\cos\alpha(\ln x/a) \end{vmatrix}=\frac{1}{x}\neq 0.$$

Для другого рівняння в (2.5) приходимо після заміни (2.6) на рівняння типу (2.4). ФСР другого рівняння буде мати вигляд:

$$\varphi_0(x)=ch\alpha(\ln x/a)\quad \varphi_1(x)=\frac{sh\alpha(\ln x/a)}{\alpha}.$$

$$W(\varphi_0,\varphi_1)=\begin{vmatrix} ch\alpha(\ln x/a) & \dfrac{sh\alpha(\ln x/a)}{\alpha} \\ \dfrac{\alpha}{x}sh\alpha(\ln x/a) & \dfrac{1}{x}ch\alpha(\ln x/a) \end{vmatrix} = \frac{1}{x}\neq 0.$$

Розглянемо рівняння (2.5) у випадку, коли $\alpha = 0$:

$$x^2U'' + xU' = 0. \tag{2.7}$$

Зробивши заміну (2.6), одержуємо рівняння вигляду (2.2), ФСР якого можно записати так:

$$\varphi_0(x)=1,\ \ \varphi_1(x)=\ln(x/a)\,, \qquad W(\varphi_0,\varphi_1)=\begin{vmatrix} 1 & \ln(x/a) \\ 0 & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x}\neq 0.$$

Задача Штурма — Ліувілля

Розглянемо однорідне диференціальне рівняння другого порядку

$$Lu(x)\equiv\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right]-q(x)u=-\lambda\,\rho(x)u, \qquad a_0<x<a_1, \tag{2.8}$$

$$p(x)\in C^1[a_0,a_1],\, q(x),\rho(x)\in C[a_0,a_1],$$

$$p(x)>0, q(x)\geq 0, \rho(x)>0 \ \ \text{на}\ \left[a_0,a_1\right]\ \ -\infty<a_0<a_1<\infty,$$

що залежить від довільного чисельного параметру λ. Будемо будувати розв′язки рівняння (2.8), що задовольняють граничні умови

$$V_j[u]\equiv\alpha_j\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=a_j}+\beta_j\,u(a_j)=0,\ \ j=0,1, \tag{2.9}$$

де α_j и β_j — сталі та $\alpha_j^2 + \beta_j^2 > 0$.

Задача побудови нетривіального розв′язку рівняння (2.8), що задовильнює граничним умовам (2.9), має назву **крайова задача Штурма —Ліувілля;** значення параметра λ, для яких задача (2.8), (2.9) має нетривіальний розв′язок, називають **власними числами,** або власними значеннями, а розв′язки, що їм відповідають, — **власними функціями** задачі Штурма — Ліувілля.

Розв′язати задачу Штурма — Ліувілля — це знайти всі її власні значення та всі її власні функції.

Властивості власних значень і функцій

1. Крайова задача (2.8), (2.9) має зліченну множину власних значень, і всі вони дійсні; якщо власні значення упорядкувати по зростанню

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots,$$

то $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

2. Кожному власному значенню задачі Штурма — Ліувілля (2.8), (2.9) відповідає одна власна функція з точністю до постійного множника.

3. Власні функції, що відповідають різним власним значенням, є ортогональними з вагою $\rho(x)$ на відрізку $[a_0, a_1]$, тобто нехай власна функція $U_k(x)$ відповідає власному значенню λ_k, а власна функція $U_n(x)$ — власному значенню λ_n; тоді

$$\int_{a_0}^{a_1} \rho(x) U_k(x) U_n(x) dx = 0, k \neq n. \tag{2.10}$$

4. **(Теорема Стеклова)**. *Якщо функція* $\Phi(x)$:

а) на сегменті $[a_0, a_1]$ *має неперервну похідну та частково неперервну другу похідну;*

б) задовольняє граничні умови (2.9),

то вона розкладається в рівномірний і абсолютно збіжний ряд Фур'є по власних функціях крайової задачі (2.8), (2.9)

$$\begin{aligned} &\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k u_k(x), \\ &\Phi_k = \frac{1}{\|u_k\|^2} \int_{a_0}^{a_1} \rho(x) \Phi(x) u_k(x) dx, \|u_k\|^2 = \int_{a_0}^{a_1} \rho(x) u_k^2(x) dx. \end{aligned} \tag{2.11}$$

5. **(Теорема Рисса)**. *Якщо функція* $\Phi(x)$ *на відрізку* $[a_0, a_1]$ *підсумована з квадратом, то її ряд Фур'є* $\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k u_k(x)$ *збігається до* $\Phi(x)$ *у середньому з вагою* $\rho(x)$, *тобто*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_0}^{a_1} \rho(x) \left[\Phi(x) - \sum_{k=1}^{n} \Phi_k u_k(x) \right]^2 dx = 0. \tag{2.12}$$

З а у в а ж е н н я 1. Теореми про розкладення функції $\Phi(x)$ до ряду по власним функціям крайової задачі мають місце і в випадку, коли граничні умови мають характер періодичності

$$u(a_0)=u(a_1), \quad u'(a_0)=u'(a_1).$$

Зауваження 2. Кінцева точка відрізка $[a_0, a_l]$ називається **сінгулярною**, якщо в цій точці коефіцієнт при старшій похідній в рівнянні дорівнює нулю. В цьому випадку перераховані вище теореми втрачають силу.

ПРИКЛАД 1. Розв'язати задачу Штурма — Ліувілля

$$u'' + \lambda u = 0, \quad u(0)=u(l)=0, \qquad 0 \le x \le l. \tag{2.13}$$

Розглянута задача є частковим випадком крайової задачі (2.8), (2.9) при $a_0=0$, $a_1=l$, $p(x)=1$, $\rho(x)=1$, $q(x)=0$, $\alpha_0=\alpha_1=0$, $\beta_0=\beta_1=1$. Розв'язати задачу Штурма — Ліувілля — це визначити всі власні значення і власні функції. Власні значення задачі Штурма-Ліувілля дійсні, через те розглянемо три випадки:

$$\lambda<0, \quad \lambda=0, \quad \lambda>0.$$

Нехай $\lambda=-\alpha^2<0, \alpha\ne 0.$ Тоді загальний розв'язок рівняння з (2.13) має вигляд:

$$u(x)=C_1 sh\alpha x + C_2 ch\alpha x.$$

Задовольняючи крайові умови, отримаємо систему двух однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь

$$C_2 = 0, \ C_1 sh\alpha l + C_2 ch\alpha l = 0,$$

визначник якої дорівнює $-sh\alpha l$ і, отже, відмінний від нуля ($l>0$, $\alpha\ne 0.$). Отже, $C_1 = C_2 = 0$, і задача має в цьому випадку лише тривіальний розв'язок $u(x) \equiv 0$.

При $\lambda = 0$ загальний розв'язок рівняння з (2.13) має вигляд:

$$u(x) = C_1 x + C_2.$$

Після задовольняння граничним умовам знайдемо

$$C_2=0, \quad C_1 l + C_2 = 0,$$

звідки $C_1 = C_2 = 0$ і $u(x) \equiv 0$, отже, і $\lambda = 0$ у нашому прикладі не є власним значенням.

Нехай $\lambda = \alpha^2$, $(\alpha > 0)$. Тоді загальний розв′язок рівняння з (2.13) має вигляд:

$$u(x) = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x.$$

Задовільняючи крайові умови, отримаємо

$$C_2 = 0, \;\; C_1 \sin \alpha l + C_2 \cos \alpha l = 0,$$

звідки

$$C_1 \sin \alpha l = 0.$$

Припустимо, що $C_1 \neq 0$ (у протилежному випадку $u(x) \equiv 0$). Ось чому $\sin \alpha l = 0$. Звідки нетривіальний розв'язок задачі (2.13) можливий лише при значеннях α, що дорівнюють

$$\alpha_n = \frac{\pi n}{l}, \;\; n = 1,2,...$$

Таким чином

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$$

є власними числами задачі Штурма — Ліувілля (2.13). Їх лічильне число причому $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. Кожному власному числу λ_n відповідає одна лінійно незалежна власна функція $u_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x$. З теорії ортогональних рядів Фур′є відомо, що вони ортогональні

$$\int_0^1 \sin\frac{\pi n}{l}x \cdot \sin\frac{\pi k}{l}xdx = \begin{cases} \frac{l}{2}, \; n = k \\ 0, \; n \neq k \end{cases}$$

і утворюють повну систему у $L_2(0,\text{l})$.

ПРИКЛАД 2. Розв′язати задачу Штурма — Ліувілля

$$u'' + \lambda u = 0, \; u'(0) = u'(l) = 0, \; l > 0 \tag{2.14}$$

Розглянемо три випадки $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$. Нехай $\lambda = -\alpha^2$, $\alpha \neq 0$. Тоді загальний розв′язок диференціального рівняння в (2.14) має вигляд

$$u(x) = C_1 sh\alpha x + C_2 ch\alpha x.$$

Задовольняючи крайові умови в (2.14), приходимо до системи двух лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно C_j (j = 1, 2):

$$\alpha C_1 = 0, \ \alpha C_1 ch\alpha l + C_2 \alpha sh\alpha l = 0,$$

визначник якої дорівнює $\alpha^2 sh\alpha l$ і відмінний від нуля, при цьому $l > 0$, $\alpha \neq 0$. Отже, $C_1 = C_2 = 0$, і в цьому випадку ($\lambda = 0$) крайова задача (2.14) не має нетривіальних розв′язків.

Нехай $\lambda = 0$. Тоді загальний розв′язок диференціального рівняння в (2.14) має вигляд:

$$u(x) = C_1 x + C_2. \tag{2.15}$$

Знайдемо, що при $C_1 = 0$ функція (2.15) задовольняє крайові умови в (2.14). Таким чином, $\lambda = 0$ є власним значенням задачі (2.14), якому відповідає власна функція $u_0(x) = 1$.

Нехай $\lambda = \alpha^2$, $\alpha > 0$. Тоді загальний розв′язок диференціального рівняння в (2.14) має вигляд:

$$u(x) = C_1 \sin\alpha x + C_2 \cos\alpha x.$$

З крайових умов отримаємо систему двух лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь

$$\alpha C_1 = 0, \ \ \alpha C_1 \cos\alpha l - \alpha C_2 \sin\alpha l = 0,$$

визначник якої дорівнює $-\alpha^2 \sin\ \alpha l$, звідки нетривіальні розв′язки можливі лише при $\alpha = \alpha_n = \frac{\pi n}{l}$, n = 1, 2, ... , отже, $\lambda_n = (\frac{\pi n}{l})^2$ — власні числа крайової задачі (2.14), а $u_n(x) = \cos\frac{\pi n}{l}x$ — відповідні до них власні функції.

Об′єднуючи випадки $\lambda = 0$ и $\lambda > 0$, отримаємо, що розв′язком задачі Штурма — Ліувілля (2.14) є власні значення $\lambda_n = (\frac{\pi n}{l})^2$, n = 0, 1, 2, ... і власні функції

$$u_n(x) = \cos\frac{\pi n}{l}x, \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

ПРИКЛАД 3. Розв'язати задачу Штурма — Ліувілля

$$u'' + \lambda u = 0, u'(0) - hu(0) = 0, u'(l) = 0, l > 0, h > 0. \qquad (2.16)$$

Розглянемо три випадка $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$. При $\lambda = -\alpha^2 < 0$, $\alpha \neq 0$ загальний розв'язок диференціального рівняння (2.16) має вигляд:

$$u(x) = C_1 \, sh\alpha x + C_2 \, ch\alpha x.$$

Задовольняючи крайові умови, приходимо до однорідної системи двух лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\alpha C_1 - hC_2 = 0, \quad \alpha C_1 ch\alpha l - \alpha C_2 sh\alpha l = 0,$$

визначник якої дорівнює $\alpha[\alpha ch\alpha l + hsh\alpha l]$, відмінний від нуля при $\alpha \neq 0$, $l > 0$, $h > 0$. Тому $C_1 = C_2 = 0$ і задача в цьому випадку ($\lambda < 0$) має тільки тривіальний розв'язок. Аналогично при $\lambda = 0$ маємо $u(x) = C_1 x + C_2$, де C_1 и C_2 — суть розв'язки системи

$$C_1 = 0, \quad C_1 - C_2 h = 0,$$

що має тільки тривіальний розв'язок.

Нехай $\lambda = \alpha^2 > 0$, $\lambda > 0$. Тоді розв'язок рівняння з (2.16) має вигляд:

$$u(x) = C_1 \sin\alpha x + C_2 \cos\alpha x.$$

Задовольняючи крайові умови з (2.16), отримаємо

$$\alpha C_1 - hC_2 = 0, \; \alpha C_1 \cos\alpha l - \alpha C_2 \sin\alpha l = 0,$$

звідки

$$C_1 = \frac{h}{\alpha} C_2, \quad C_2 \left[\frac{h}{\alpha} - tg\alpha l\right] = 0 \cdot$$

Нетривіальні розв'язки будуть при тих значеннях параметра α, які є коренями трансцендентного рівняння

$$tg\alpha l = \frac{h}{\alpha}, \alpha > 0. \qquad (2.17)$$

Це рівняння має лічильну множину додатних коренів (див. рис. 1), які будемо позначати через α_n.

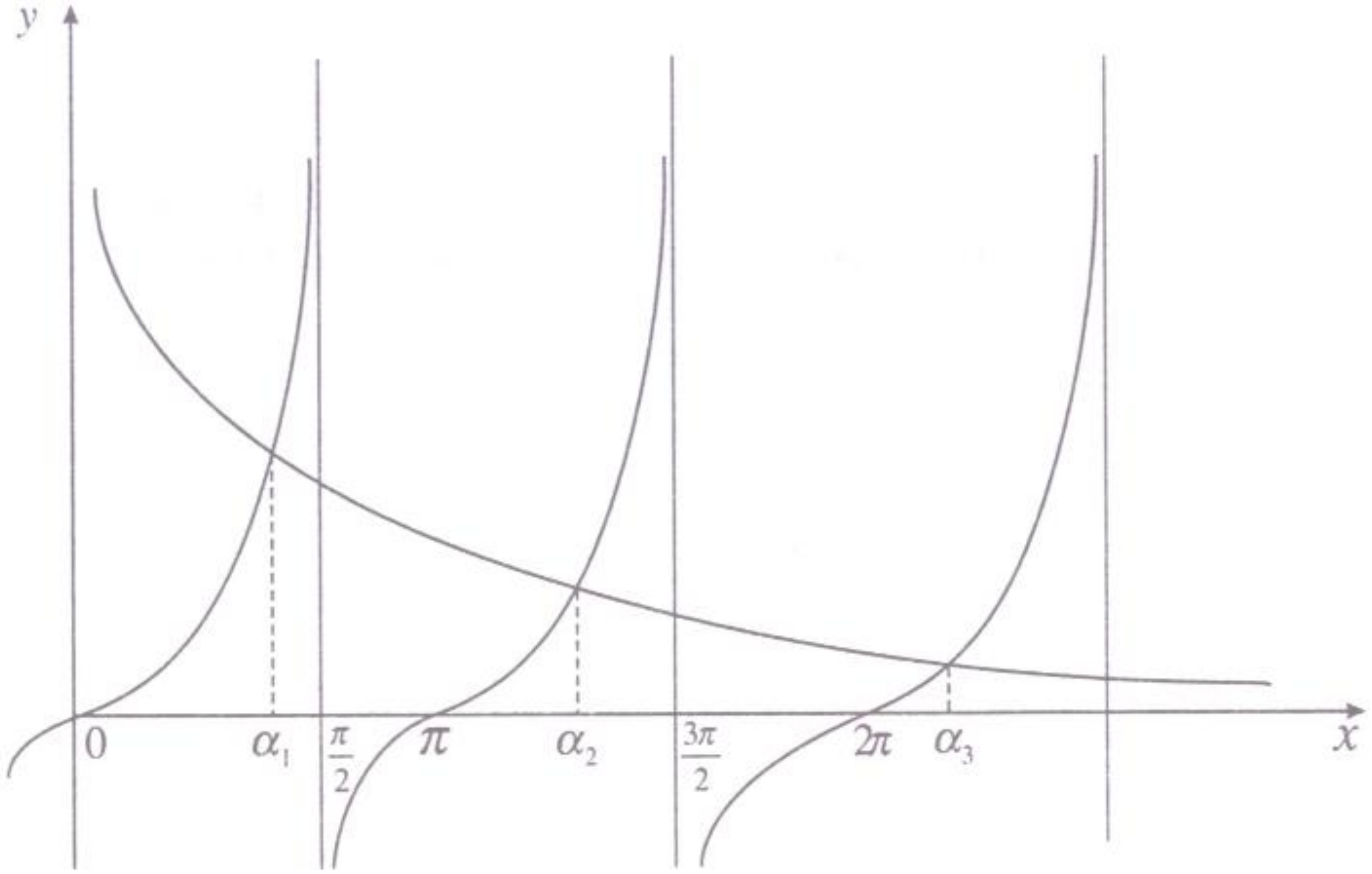


Рис. 1

Кожному α_n відповідає власна функція

$$u_n(x) = \frac{h}{\alpha_n}\sin\alpha_n x + \cos\alpha_n x = \frac{\cos\alpha_n(x-l)}{\cos\alpha_n l}, \tag{2.18}$$

причому легко показати, що ці власні функції ортогональни між собою

$$\int_0^l u_n(x)u_k(x)dx = \begin{cases} \frac{l}{2}(1+\frac{h^2}{\alpha_k^2}) + \frac{h}{2\alpha_k^2}, n = k \\ 0, \quad n \neq k \end{cases}.$$

Таким чином, задача Штурма — Ліувілля (2.16) має розв'язки тільки при $\lambda > 0$, власні числа її є квадратами коренів рівняння (2.17), а власні функції визначені в (2.18).

ПРИКЛАД 4. Розв'язати задачу Штурма — Ліувілля

$$u'' + \lambda u = 0, \ u(-a) = u(a) = 0, \ a > 0. \tag{2.19}$$

Цей приклад можна розв'язувати також, як попередні, перебираючи випадки $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$. Але простіше зробити зміну змінних

$$x_1 = x + a, \quad v(x_1) = u(x).$$

Як результат, крайова задача (2.19) набуде вигляду:

$$v'' + \lambda v = 0, \quad v(0) = v(l) = 0, \; l = 2a > 0, \tag{2.20}$$

а такий приклад ми вже розв′язували (див. приклад 1). Його розв'язок

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \; v_n = \sin\frac{\pi n}{l}x_1, \; n = 1, 2, ...$$

Зробивши обернену заміну, знайдемо розв'язок крайової задачі (2.19)

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{2a}\right)^2, \quad u_n(x) = \sin\frac{\pi n}{2a}(x + a), \quad n = 1, 2, ...$$

ПРИКЛАД 5. Розв′язати задачу Штурма — Ліувілля

$$x(xu')' + \lambda u = 0, \quad u(a) = u(b) = 0, \quad 0 < a \le x \le b < \infty. \tag{2.21}$$

Диференціальне рівняння, що фігурурує в умові, називається рівнянням Эйлера, і, за допомогою підстановки $x = ae^t$, воно зводиться до рівняння з постійними коефіцієнтами. Дійсно, нехай

$$t = \ln\frac{x}{a}, \; v(t) = u(ae^t) = u(x), \; \frac{dx}{dt} = x. \tag{2.22}$$

Тоді

$$\frac{dv}{dt} = \frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = x\frac{du}{dx}, \; \frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d}{dt}(x\frac{du}{dx}) = \frac{d}{dx}(x\frac{du}{dx})\cdot\frac{dx}{dt} = x\frac{d}{dx}(x\frac{du}{dx}).$$

тобто після зміни (2.22) задача (2.21) набуде вигляду:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \lambda v = 0, \; v(0) = v(l) = 0, \; l = \ln\frac{b}{a} > 0$$

і її розв′язок має вигляд (див. приклад 1):

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \; v_n(t) = \sin\frac{\pi n}{l}t, \; n = 1, 2, ...$$

Підставляючи до останньої формули (2.22), знайдемо розв'язок крайової задачі (2.21)

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\ln \frac{b}{a}} \right)^2, u_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{x}{a} \right), n = 1,2,\ldots$$

Приклади для самостійної роботи

Розв′язати такі задачі Штурма — Ліувілля:

1) $u'' + \lambda u = 0, \quad u'(0) = u(l) = 0;$
2) $u'' + \lambda u = 0, \quad u(0) = u'(l) = 0;$
3) $u'' + \lambda u = 0, \quad u(0) = 0, u'(l) + hu(l) = 0;$
4) $u'' + \lambda u = 0, \quad u'(0) = 0, u'(l) + hu(l) = 0;$
5) $u'' + \lambda u = 0, \quad u'(0) - hu(0) = 0, u(l) = 0;$
6) $u'' + \lambda u = 0, \quad u(-l) = 0, \ u'(l) + hu(l) = 0;$
7) $u'' + \lambda u = 0, \quad u'(-l) = 0, \ u'(l) + hu(l) = 0;$
8) $u'' + \lambda u = 0, \quad u'(l) = 0, \ u'(-l) - hu(-l) = 0;$
9) $u'' + \lambda u = 0, \quad u(l) = 0, \ u'(-l) - hu(-l) = 0;$
10) $x(xu')' + \lambda u = 0, \quad u'(a) = u'(b) = 0, 0 < a < b;$
11) $x(xu')' + \lambda u = 0, \quad u'(a) = u(b) = 0, 0 < a < b;$
12) $x(xu')' + \lambda u = 0, \quad u(a) = u'(b) = 0, 0 < a < b.$

§3. Функція Гріна одномірних крайових задач

Означення та основні властивості

Розглянемо крайову задачу

$$Lu = \sum_{k=0}^{n} P_k(x) u^{(n-k)}(x) = f(x), \ a_0 < x < a_1, \tag{3.1}$$

$$U_j[u] = \sum_{i=0}^{1} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{jk}^i y^{(k)}(a_i) = B_j, \ j = 0, \ \ldots, \ n-1, \tag{3.2}$$

де $P_k(x) \in C(a_0, a_1)$, $f(x) \in C(a_0, a_1)$, $P_0(x) \neq 0$, α_{jk}^i — задані числа.

Припустимо, що відомі n-лінійно-незалежних розв′язків $\varphi_j(x)$ $(j = \overline{0, n-1})$ однорідного рівняння (3.1), тобто відома фундаментальна система розв′язків.

Крайові умови (3.2) називаються **неособливими**, якщо

$$\det\left\|U_j[\varphi_k]\right\|_0^{n-1} = \begin{vmatrix} U_0[\varphi_0] & U_0[\varphi_1] & \cdots & U_0[\varphi_{n-1}] \\ U_1[\varphi_0] & U_1[\varphi_1] & \cdots & U_1[\varphi_{n-1}] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{n-1}[\varphi_0] & U_{n-1}[\varphi_1] & \cdots & U_{n-1}[\varphi_{n-1}] \end{vmatrix} \neq 0 . \qquad (3.3)$$

У випадку неособливих крайових умов однорідна крайова задача (3.1), (3.2) має тільки тривіальні розв'язки. Наприклад, у випадку крайової задачі

$$u'' = f, \quad u(0) = u(1) = 0 \qquad (3.4)$$

маємо

$$\begin{aligned} &n = 2, p_0 = 1, p_1 = p_2 = 0, a_0 = 0, a_1 = 1 \\ &\alpha_{00}^0 = \alpha_{10}^1 = 1, \alpha_{01}^0 = \alpha_{11}^0 = \alpha_{00}^1 = \alpha_{11}^1 = \alpha_{01}^1 = \alpha_{10}^0 = 0 \\ &B_0 = B_1 = 0, \\ &Lu = u'', U_0[u] = u(0), U_1[u] = u(1) \qquad (3.5) \\ &\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x \\ &\det\left\|\varphi_j^{(k)}(x)\right\|_0^1 = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

та, отже, $\varphi_k(x)(k = 0,1)$ фундаментальна система розв'язків диференціального рівняння в (3.4) і

$$\varphi_0(0) = 1, \varphi_0(1) = 1, \varphi_1(0) = 0, \varphi_1(1) = 1$$

$$\det\left\|U_j[\varphi_k]\right\|_0^{n-1} = \begin{vmatrix} \varphi_0(0) & \varphi_1(0) \\ \varphi_0(1) & \varphi_1(1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

тобто крайові умови у (3.4) неособливі. У випадку же крайової задачі

$$u'' = f, \quad u'(0) = u'(1) = 0 \qquad (3.6)$$

легко перевірити, що крайові умови є особливими, тому що, однорідна задача (3.6) має нетривіальний розв'язок $u(x) = c$ (c — стала). Та, отже,

$$\det\left\|U_j[\varphi_k]\right\|_0^1 = \begin{vmatrix} \varphi_0'(0) & \varphi_1'(0) \\ \varphi_0'(1) & \varphi_1'(1) \end{vmatrix} = 0 .$$

Функцією Гріна крайової задачі (3.1), (3.2) називають таку функцію двох змінних $G(x,\xi)$, що задана у прямокутнику $a_0 \le x,\ \xi \le a_1$, та для будь-якої функції $f(x)$ функція

$$u(x)=\int_{a_1}^{a_1} f(\xi)G(x,\xi)d\xi$$

є розв′язком крайової задачі

$$Lu = f(x),\ \alpha_0 < x < \alpha_1$$
$$U_j[u]=0,\ j=\overline{0,n-1}.$$

Т е о р е м а. *Для того щоб функція $G(x,\xi)$, що задана у квадратній області $a_0 \le x\xi \le a_1$, була функцією Гріна крайової задачі (3.1), (3.2), необхідно та достатньо, щоб вона задовільняла чотирьом умовам:*

1. $G(x,\xi)$ неперервна і має неперервні похідні по x до n – 2 порядку включно для всіх x і ξ з прямокутника $a_0 < x,\xi < a_1$, зокрема, це має місце і на діагоналі x = ξ.

$$\left.\frac{\partial^m G(x,\xi)}{\partial x^m}\right|_{x=\xi+0} - \left.\frac{\partial^m G(x,\xi)}{\partial x^m}\right|_{x=\xi-0} = 0, \quad m=\overline{0,n-2}\ . \tag{3.7}$$

2. n-1-ша похідна по змінній x $\dfrac{\partial^{n-1}G}{\partial x^{n-1}}$ неперервна всюди у квадраті $a_0 < x\xi < a_1$, за виключенням відрізку x = ξ, при переході через який вона терпить стрибок, що дорівнює

$$\left.\frac{\partial^{n-1} G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=\xi+0} - \left.\frac{\partial^{n-1} G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p_0(\xi)} \tag{3.8}$$

де $p_0(x)$ — коефіцієнт при старшій похідній у диференціальному рівнянні (3.1).

3. У кожному з інтервалів $[a_0, \xi)$ і $(\xi, a_1]$ функція G(x, ξ), як функція аргумента x, задовольняє однорідне рівняння (3.1), тобто

$$LG(x,\xi)=0 \quad (a_0 \le x < \xi, \xi < x \le a_1)\,.$$

4. Функція $G(x, \xi)$ як функція аргумента x задовольняє однорідні граничні умови (3.2), тобто $U_j[G]=0,\ j=\overline{0,n-1}$.

Перший спосіб побудови функції Гріна

Розглянемо побудову функції Грина на основі теореми про чотири її визначних властивісті. За властивістю 3, функція Гріна має вигляд:

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\sum\limits_{j=0}^{n-1}\tilde{a}_j(\xi)\varphi_j(x),\ a_0\le x<\xi\\ \sum\limits_{j=0}^{n-1}\tilde{b}_j(\xi)\varphi_j(x),\ \xi\le x<a_1\end{cases},\tag{3.11}$$

де $\varphi_j(x)\quad(j=\overline{0,n-1})$ — фундаментальна система розв′язків рівняння (3.1), *а* $\tilde{a}_j$ *і* $\tilde{b}_j$ $(j = 0, \ldots, n-1)$ — невідомі функції параметра ξ.

Задовольнимо властивості 1 та 2, тобто підставимо (3.11) до формул (3.7) і (3.8). Враховуючи, що

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^m G(x,\xi)}{\partial x^m}\right|_{x=\xi+0}&=\sum_{j=0}^{n-1}\tilde{b}_j(\xi)\varphi_j^{(m)}(\xi)\\ \left.\frac{\partial^m G(x,\xi)}{\partial x^m}\right|_{x=\xi-0}&=\sum_{j=0}^{n-1}\tilde{a}_j(\xi)\varphi_j^{(m)}(\xi)\end{aligned}\tag{3.12}$$

отримаємо систему лінійних рівнянь

$$\sum_{j=0}^{n-1}C_j(\xi)\varphi_j^{(m)}(\xi)=\quad\begin{cases}0,\ \ m=\overline{0,n-2}\\ \dfrac{1}{p_0(\xi)},\ \ m=n-1\end{cases}\tag{3.13}$$

$$C_j(\xi)=\tilde{b}_j(\xi)-\tilde{a}_j(\xi),\quad j=\overline{0,n-1}.\tag{3.14}$$

Визначник системи (3.13) відрізняється від нуля, тому що є вронскіаном фундаментальної системи, та, отже, система (3.13) має єдиний розв′язок.

Для відшукування $\tilde{a}_j(\xi)$ та $\tilde{b}_j(\xi)$ залишилось використати властивість 4, тобто підставити (3.11) до крайових умов (3.2). Виключаючи тут $\tilde{b}_j(\xi)$, за допомогою (3.14), приходимо до системи n лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $\tilde{a}_j(\xi)$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \tilde{a}_j(\xi) U_k[\varphi_j] = -\sum_{j=0}^{n-1} C_j(\xi) \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_{km}^{j} \varphi_j^{(m)}(a_j), \tag{3.15}$$

визначник якої у випадку неособливих граничних умов відрізняється від нуля, та, отже, система (3.15) має єдиний розв'язок.

Таким чином, визначили $\tilde{a}_j(\xi)$, потім $\tilde{b}_j(\xi) = C_j + \tilde{a}_j(\xi)$ та, отже, відповідно (3.11), саму функцію Гріна.

ПРИКЛАД 1. Побудувати функцію Гріна крайової задачі

$$y''(x) = f(x), \ a < x < b,$$
$$y(a) = 0, \ y(b) = 0.$$

Фундаментальну систему розв'язків однорідного диференціального рівняння $y''(x) = 0$ складають функції:

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = x.$$

Розшукуємо функцію Гріна у вигляді:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \tilde{a}_0(\xi) + \tilde{a}_1(\xi)x, \ a \le x < \xi \\ \tilde{b}_0(\xi) + \tilde{b}_1(\xi)x, \ \xi < x \le b \end{cases}$$

Умови неперервності функції Гріна та стрибка її першої похідної нам дають:

$$\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1\xi - \tilde{a}_0 - \tilde{a}_1\xi = 0$$
$$\tilde{b}_1 - \tilde{a}_1 = 1,$$

звідки, позначивши $C_j = \tilde{b}_j - \tilde{a}_j \quad (j = 0,1)$, отримаємо систему відносно C_j:

$$C_0 + C_1\xi = 0, \qquad C_1 = 1,$$

розв`язок якої $C_0 = -\xi$, $C_1 = 1$.

Задовольняючи крайові умови отримаємо

$$\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 a = 0, \quad \tilde{b}_0 + \tilde{b}_1 b = 0.$$

Враховуючи, що $\tilde{b}_0 = C_0 + \tilde{a}_0 = -\xi + \tilde{a}_0$, $\tilde{b}_1 = C_1 + \tilde{a}_1 = 1 + \tilde{a}_1$, отримаємо систему відносно $\tilde{a}_j$:

$$\tilde{a}_0 + a\tilde{a}_1 = 0, \ -\xi + \tilde{a}_0 + b + b\tilde{a}_1 = 0,$$

з якої $\tilde{a}_0 = a\dfrac{b-\xi}{b-a}$, $\tilde{a}_1 = -\dfrac{b-\xi}{b-a}$,

далі знайдемо

$$\tilde{b}_0 = -b\frac{\xi-a}{b-a},\quad \tilde{b}_1 = \frac{\xi-a}{b-a}.$$

Тоді функція Гріна буде такою

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -\dfrac{(x-a)(b-\xi)}{b-a}, a \le x < \xi \\ -\dfrac{(\xi-a)(b-x)}{b-a}, \xi < x \le b. \end{cases}$$

В цьому випадку вона є симетричною.

Тепер розв′язок крайової задачи можно записати через функцію Грина:

$$y(x) = \int_a^b f(\xi)G(x,\xi)d\xi = -\frac{b-x}{b-a}\int_a^x f(\xi)(\xi-a)d\xi - \frac{x-a}{b-a}\int_x^b f(\xi)(b-\xi)d\xi.$$

ПРИКЛАД 2. Побудувати функцію Грина крайової задачі

$$y''(x) - \lambda^2 y(x) = f(x), \qquad 0 \le x \le l,$$

$$y'(0) = 0, \quad y(l) = 0.$$

Фундаментальна система розв′язків в даному випадку має вигляд:

$$\varphi_0(x) = sh\lambda x, \quad \varphi_1(x) = ch\lambda x.$$

Тому функцію Гріна розшукуємо у вигляді:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \tilde{a}_0 sh\lambda x + \tilde{a}_1 ch\lambda x, 0 < x < \xi < l \\ \tilde{b}_0 sh\lambda x + \tilde{b}_1 chx, 0 < \xi < x < l \end{cases}$$

Відносно $C_j = \tilde{b}_j - \tilde{a}_j\,(j = 0{,}1)$ отримаємо систему

$$\begin{aligned} &C_0 sh\lambda\xi + C_1 ch\lambda\xi = 0 \\ &\lambda C_2 ch\lambda\xi + \lambda C_1 sh\lambda\xi = 1, \end{aligned}$$

розв′язок якої є

$$C_0 = \frac{ch\lambda\xi}{\lambda}, \quad C_1 = -\frac{sh\lambda\xi}{\lambda}.$$

Реалізуючи крайові умови, здобудемо:

$$\lambda\tilde{a}_1 = 0, \quad \tilde{b}_0 sh\lambda l + \tilde{b}_1 ch\lambda l = 0,$$

звідки

$$\tilde{a}_1 = 0, \tilde{b}_1 = -\frac{sh\lambda\xi}{\lambda}, \quad \tilde{b}_0 = \frac{sh\lambda\xi \cdot ch\lambda l}{\lambda sh\lambda l},$$

$$\tilde{a}_0 = \frac{sh\lambda\xi \cdot ch\lambda l - ch\lambda\xi \cdot sh\lambda l}{\lambda sh\lambda l} = \frac{sh\lambda(\xi - l)}{\lambda sh\lambda l}.$$

Функція Гріна набуде вигляду:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{sh\lambda(\xi - l) \cdot sh\lambda x}{\lambda sh\lambda l}, & 0 < x < \xi < l \\ \dfrac{sh\lambda(x - l) \cdot sh\lambda\xi}{\lambda sh\lambda l}, & 0 < \xi < x < l \end{cases}.$$

Для данної задачі функція Гріна також є симетричною і розв'язок крайової задачі визначається за формулою:

$$y(x) = \frac{sh\lambda(x-l)}{\lambda sh\lambda l}\int_0^x sh\lambda\xi\ f(\xi)d\xi + \frac{sh\lambda x}{\lambda sh\lambda l}\int_x^l sh\lambda(\xi - l) f(\xi)d\xi.$$

ПРИКЛАД 3. Побудувати функцію Гріна крайової задачі

$$xy''(x) + y'(x) = f(x), \ 0 < x < l,$$
$$y(0) < \infty, \ y(l) = 0.$$

Тут на лівому кінці интервалу $(0, l)$ задана умова обмеженності розв'язку.

Фундаментальна система розв'язків розглядуваного диференціального оператора має вигляд:

$$\varphi_0(x) = 1, \qquad \varphi_1(x) = \ln x.$$

Функцію Гріна будуємо у формі:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \tilde{a}_0(\xi) + \tilde{a}_1(\xi)\ln x, 0 < x < \xi < l \\ \tilde{b}_0(\xi) + \tilde{b}_1(\xi)\ln x, 0 < \xi < x < l. \end{cases}$$

Відносно $C_j = \tilde{\tilde{b}}_j - \tilde{a}_j \quad (j = 0,1)$ отримаємо систему:

$$C_0 + C_1 \ln\xi = 0, \quad C_1 \cdot \frac{1}{\xi} = \frac{1}{\xi}, \quad \text{звідки}$$

$$C_0 = -\ln\xi, \; C_1 = 1.$$

Задовольним тепер крайові умови. Вимога обмеженості шуканого розв′язку при $x = 0$ еквівалентна умові $G(0, x) < \infty$, звідки $\tilde{a}_1(x) = 0$; друга гранична умова дає $\tilde{\tilde{b}}_0 + \tilde{\tilde{b}}_1 \ln l = 0$, звідки $\tilde{\tilde{b}}_0 = -\tilde{\tilde{b}}_1 \ln l$.

Враховуючи зв′язок між $\tilde{a}_j$, $\tilde{\tilde{b}}_j$ та C_j, отримаємо:

$$\tilde{a}_0 = \ln\frac{\xi}{l}, \; \tilde{a}_1 = 0, \; \tilde{\tilde{b}}_0 = -\ln l, \; \tilde{\tilde{b}}_1 = 1.$$

Функція Гріна наприкінці матиме вигляд:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \ln\frac{\xi}{l}, \; 0 < x < \xi < l \\ \ln\frac{x}{l}, \; 0 < \xi < x < l. \end{cases}$$

Помітимо, що для цієї задачі функція Гріна теж є симетричною.

Побудова фундаментальної функції

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} &Ly \equiv P_0(x)\,y^{(n)} + P_1(x)\,y^{(n-1)} + \;....\; + P_{n-1}(x)\,y' + P_n(x)\,y = f(x) \\ &P_k(x) \in C(a_0, a_1), \; P_0(x) \neq 0, \; a_0 < x < a_1. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Фундаментальною функцією диференціального рівняння (3.1) називається така функція $\Phi(x,t)$, що для будь-якої неперервної функції $f(x)$ функція

$$y(x) = \int_{a_0}^{a_1} f(t)\Phi(x,t)\,dt \tag{3.17}$$

є розв′язком диференціального рівняння (3.16).

Т е о р е м а. *Фундаментальний розв′язок рівняння (3.16) можна побудувати у вигляді*

$$\Phi(x,t)=\begin{cases}Z(x-t), x\geq t\\ 0, x<t\end{cases},$$

де $Z(x)$ *задовольняє однорідне рівняння* $LZ(x) = 0$, $x > 0$ *та початкові умови*

$$Z(0)=Z'(0)= \;....= Z^{(n-2)}(0)=0,\ Z^{(n-1)}(0)=\frac{1}{P_0(t)},$$

причому $P_0(x)$ — *коефіцієнт при старшій похідній у диференціальному рівнянні (3.1).*

Фундаментальний розв′язок $\Phi(x,t)$ диференціального рівняння (3.1), власне кажучи, не є єдиним; він визначається з точністю до доданка

$$\Phi_0(x,t)=\sum_{k=0}^{n-1}C_k(t)\varphi_k(x),$$

де $\varphi_k(x)$ ($k = 0, ..., n-1$) — фундаментальна система розв′язків диференціального рівняння (3.1).

ПРИКЛАД 1. Побудувати фундаментальну функцію диференціального рівняння $y''(x) = f(x)$.

Відповідно до теореми її можна представити у вигляді (3.3), де

$$Z''(x) = 0,\ Z(0) = 0,\ Z'(0) = 1. \tag{3.19}$$

Розв′язуючи крайову задачу (3.4), знаходимо $Z(x) = x$. Тоді

$$\Phi(x,t)=\left\{\begin{matrix}x-t, & x\geq t\\ 0, & x<t\end{matrix}\right\}=\frac{|x-t|}{2}+\frac{x-t}{2},$$

оскільки другий доданок задовольняє однорідне рівняння, то його можна випустити.

Відповідь: $\Phi(x,t)=\dfrac{|x-t|}{2}$.

Задачі

Показати, що функції

а) $\Phi(x,t)=-\dfrac{1}{2|a|}e^{-|a||x-t|}$;

б) $\Phi(x,t)=\dfrac{1}{2}[1+\operatorname{sgn}(x-t)]e^{-|a||x-t|}$;

в) $\Phi(x,t)=\dfrac{1}{2|a|}\sin|a||x-t|$

є фундаментальними функціями відповідно до диференціальних рівнянь

а) $u''- a^2u = f$,

б) $u' - au = f$,

в) $u'' + a^2u = f$.

У задачах математичної фізики часто виникає необхідність побудови фундаментальної функції, що спадає на нескінченності, що дозволяє метод побудови за допомогою контурного інтегрування, запропонований Коші та розвинутий М. Г. Крейном. Викладемо його схему стосовно до рівняння (3.16) з постійними коефіцієнтами. Відповідно до нього фундаментальна функція визначається формулою

$$\Phi(x,t)=g(x-\xi),\ g(x)=\pm\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^\pm}\frac{e^{\mp xz}}{P(z)}dz, \tag{3.20}$$

$$P(z)=P_0z^n+P_1z^{n-1}+\ldots+P_n=P_0(z-z_0)\ldots(z-z_{n-1}). \tag{3.21}$$

Тут C^+ — замкнутий контур, що охоплює деяке число нулів многочлена (3.21), а C^- — аналогічний контур, що охоплює нулі, які залишилися. Додання того, що функція (3.20) є фундаментальною, можна знайти в [7].

Як приклад побудуємо фундаментальну функцію рівняння

$$y^{iv}(x)-2\beta^2y''(x)+\beta^4y(x)=f(x).$$

У розглядуваному випадку многочлен (3.6) має вигляд:

$$P(z)=z^4-2\beta^2z^2+\beta^4=(z+|\beta|)^2(z-|\beta|)^2.$$

Позначимо через C^+ контур, який охоплює двократний полюс $z=|\beta|$, а C^- — двократний полюс $z=-|\beta|$. Тоді, відповідно до (3.20), фундаментальна функція має вигляд:

$$\Phi(x,\xi)=g(x-\xi),\ g(x)=\pm\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^\pm}\frac{e^{\mp xz}}{(z^2-\beta^2)^2}dz. \tag{3.22}$$

Формулу (3.22), використовуючи теорему про лишки для обчислення інтеграла, можна перетворити до вигляду

$$g(x)=\frac{1+|\beta x|}{4|\beta|^3}e^{-|\beta x|}.$$

Фундаментальна базисна система розв′язків

Фундаментальною базисною системою розв′язків крайової задачі (3.1), (3.2) $\psi_\kappa(x)$ ($\kappa = 0,\dots, n-1$) називається система n функцій, що є розв′язками крайових задач:

$$\begin{aligned}&L[\psi_k(x)]=0, \quad a_0<x<a_1,\\ &U_j[\psi_k(x)]=\delta_{jk}, \quad j=\overline{0,n-1}, \quad \delta_{jk}=\begin{cases}1, & j=k\\ 0, & j\neq k\end{cases}.\end{aligned} \tag{3.23}$$

Фундаментальна базисна система розв′язків крайової задачі в випадку неособливих граничних умов легко будується через фундаментальну систему розв′язків однорідного диференціального рівняння $\varphi_\kappa(x)$. Дійсно,тому що $\psi_\kappa(x)$ є розв′язком крайової задачі (3.23),

$$\psi_k(x)=\sum_{m=0}^{n-1}C_m^{(k)}\varphi_m(x), \tag{3.24}$$

де $C_m^{(k)}$ — невідомі сталі.

Підставляючи (3.24) у (3.23), приходимо відносно $C_m^{(k)}$ ($m = 0,\dots, n-1$) до системи n лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{m=0}^{n-1}C_m^{(k)}U_j[\varphi_m]=\delta_{jk}, \quad j=\overline{0,n-1}, \tag{3.24}$$

визначник якої у випадку неособливих граничних умов відрізняється від нуля, та, отже, система (3.25) має розв′язок.

ПРИКЛАД 2. Побудувати фундаментальну базисну систему розв′язків крайової задачі

$$y''(x) = f(x), \quad 0 < x < l, \quad y(0) = 2, \quad y(l) = 3.$$

Відповідно до визначення, фундаментальну базисну систему розв′язків крайової задачі складають функції $\psi_0(x)$ та $\psi_1(x)$ такі, що

$$\begin{cases} \psi_0''(x) = 0 \\ \psi_0(0) = 1, \ \psi_0(l) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \psi_1''(x) = 0 \\ \psi_1(0) = 0, \ \psi_1(l) = 1 \end{cases}.$$

Тому що фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння складають функції $\varphi_0(x) = 1$ та $\varphi_1(x) = x$, то відповідно до (3.24)

$$\psi_0(x) = C_0^{(0)} + C_1^{(0)}x, \quad \psi_1(x) = C_0^{(1)} + C_1^{(1)}x,$$

де $C_m^{(k)}$ $(k,m = 0,1)$ — суть розв'язки системи (3.25)

$$\begin{cases} C_0^{(0)} = 1 \\ C_0^{(0)} + C_1^{(0)}l = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_0^{(1)} = 0 \\ C_0^{(1)} + C_1^{(1)}l = 1 \end{cases},$$

тобто

$$C_0^{(0)} = 1, \quad C_1^{(0)} = -\frac{1}{l}, \quad C_0^{(1)} = 0, \quad C_1^{(1)} = \frac{1}{l}.$$

Звідки маємо

$$\psi_0(x) = 1 - \frac{x}{l}, \quad \psi_1(x) = \frac{x}{l}.$$

Приклади для самостійної роботи

Побудувати фундаментальну базисну систему розв'язків крайових задач

а) $y''(x) = 1, \ y'(0) = 2, \ y(1) = 9$,

б) $y'' - \alpha^2 y = f(x), \ y(0) = 6, \ y(1) = 8$,

в) $y'' + \alpha^2 y = f(x), \ y(0) = 2, \ y'(1) = 6$,

г) $y^{(IV)}(x) = f(x), \ y(-1) = y''(-1) = 0, \ y(1) = y''(1) = 0$.

Другий спосіб побудови функції Гріна

Будемо шукати функцію Гріна крайової задачі (3.1), (3.2) у вигляді

$$G(x,\xi) = \Phi(x-\xi) - \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(x) U_k[\Phi(x-\xi)], \tag{3.26}$$

де $\Phi(x)$ — фундаментальна функція диференціального рівняння (3.1), $\psi_k(x)$ $(k = 0,\ldots,n-1)$ — фундаментальна базисна система розв'язків крайової задачі (3.1), (3.2), U_k ($k = 0,...,n-1$) — оператори граничних умов, визначені у (3.2) та використані по змінній x.

ПРИКЛАД. Побудувати функцію Гріна крайової задачі

$$u'' - \lambda^2 u = f(x),\ 0 \le x \le a$$
$$u'(0) = 1,\ u(a) = 5.$$

Фундаментальна функція, відповідно до п. 3 цього параграфа, має вигляд:

$$\Phi(x-\xi) = -\frac{1}{2\lambda} e^{-\lambda|x-\xi|},$$

причому

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(x-\xi) e^{-\lambda|x-\xi|}.$$

Тоді

$$U_0[\Phi] = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{1}{2}e^{-\lambda\xi}$$
$$U_1[\Phi] = \Phi\big|_{x=a} = -\frac{1}{2\lambda}e^{-\lambda(a-\xi)}.$$

Фундаментальна базисна система розв'язків цієї крайової задачі, відповідно до п. 4 цього параграфа, має вигляд:

$$\psi_0(x) = \frac{sh\lambda(x-a)}{\lambda ch\lambda a},\quad \psi_1(x) = \frac{ch\lambda x}{ch\lambda a}.$$

Тоді, відповідно до формули (3.26), функцію Гріна крайової задачі можна записати у вигляді:

$$G(x,\xi) = -\frac{1}{2\lambda}e^{-\lambda|x-\xi|} + \frac{1}{2}e^{-\lambda\xi}\frac{sh\lambda(x-a)}{\lambda ch\lambda a} + \frac{1}{2\lambda}e^{-\lambda(a-\xi)}\frac{ch\lambda x}{ch\lambda a}.$$

Розв'язки одномірної крайової задачі з неоднорідними граничними умовами

Розглянемо крайову задачу (3.1), (3.2) з неособливими граничними умовами. Нехай для неї побудована функція Гріна $G(x, \xi)$ та фундаментальна базисна система $\psi_j(x)$ ($j = 0,..., n-1$). Тоді її розв'язок можна записати у вигляді

$$u(x) = \int_{a_0}^{a_1} f(\xi)G(x,\xi)d\xi + \sum_{j=0}^{n-1} B_j\psi_j(x). \tag{3.27}$$

З а у в а ж е н н я . Слід відзначити, що, якщо відома функція Гріна крайової задачі

$$\begin{aligned} &P_0(x)u'' + P_1(x)u' + P_2(x)u = f(x), \quad a_0 < x < a_1 \\ &\alpha_{1j}u'(a_j) + \alpha_{0j}u(a_j) = B_j, \quad j = 0,1, \end{aligned} \tag{3.28}$$

то фундаментальну базисну систему можна записати за допомогою співвідношення

$$\psi_j(x) = P_0(a_j)[x_jG(x,a_j) - y_jG^{\bullet}(x,a_j)]\frac{(-1)^j}{x_j\alpha_{1j} + y_j\alpha_{0j}}, \tag{3.29}$$

де x_j, y_j ($j = 0, 1$) — довільні числа такі, що

$$x_j\,\alpha_{lj} + y_j\,\alpha_{0j} \neq 0.$$

Зокрема,

$$\psi_j(x) = P_0(a_j)[\alpha_{1j}G(x,a_j) - \alpha_{0j}G^{\bullet}(x,a_j)]\frac{(-1)^j}{\alpha_{1j}^2 + \alpha_{0j}^2}. \tag{3.30}$$

Тут точка означає частинну похідну по другій змінній.

ПРИКЛАД. Побудувати розвязок крайової задачі

$$u'' - \lambda^2 u = f(x), \quad 0 < x < a,$$

$$u(0) = 1, \quad u(a) = 5.$$

Функція Гріна цієї крайової задачі та фундаментальна базисна система побудовани вище, у п. 5 цього параграфа. Відповідно до формули (3.28), її розв'язок буде мати вигляд:

$$u(x) = \int_0^a f(\xi)G(x,\xi)d\xi + \psi_0(x) + 5\psi_1(x).$$

Відповідно до формули (3.30)

$$\psi_0(x) = G(x,0), \quad \psi_1(x) = G^{\bullet}(x,a)$$

та, отже,

$$u(x) = \int_0^a f(\xi)G(x,\xi)d\xi + G(x,0) + 5G^*(x,a).$$

ПРИКЛАД. Розв′язати крайову задачу

$$y''(x) + \lambda^2 y(x) = f(x),\ 0 < x < l,$$

$$y(0) = A,\ y(l) = B.$$

Фундаментальна система розв'язків у цьому випадку має вигляд $\varphi_0(x) = \sin\lambda x$; $\varphi_1(x) = \cos\lambda x$, що дозволяє розшукувати функцію Гріна у вигляді:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \tilde{a}_0(\xi)\sin\lambda x + \tilde{a}_1(\xi)\cos\lambda x, & 0 < x < \xi < l \\ \tilde{b}_0(\xi)\sin\lambda x + \tilde{b}_1(\xi)\cos\lambda x, & 0 < \xi < x < l. \end{cases}$$

Застосовуючи вже відому методику для визначення $\tilde{a}_j$ та $\tilde{b}_j$, отримаємо:

$$C_0\sin\lambda\xi + C_1\cos\lambda\xi = 0, \quad \lambda C_0\cos\lambda\xi - \lambda C_1\sin\lambda\xi = 1,$$

звідки $C_0 = \dfrac{\cos\lambda\xi}{\lambda}$, $\quad C_1 = -\dfrac{\sin\lambda\xi}{\lambda}$.

Задовольняючи однорідні крайові умови, отримаємо:

$$\tilde{a}_1 = 0, \quad \tilde{b}_0\sin\lambda l + \tilde{b}_1\cos\lambda l = 0,$$

звідки

$$\tilde{a}_0 = -\frac{\sin\lambda(l-\xi)}{\lambda\sin\lambda l}, \tilde{a}_1 = 0, \tilde{b}_0 = \frac{\sin\lambda\xi\cos\lambda l}{\lambda\sin\lambda l}, \tilde{b}_1 = -\frac{\sin\lambda\xi}{\lambda}.$$

Функція Гріна набуде вигляду:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -\dfrac{\sin\lambda x\cdot\sin\lambda(l-\xi)}{\lambda\sin\lambda l}, & 0 < x < \xi < l \\ -\dfrac{\sin\lambda\xi\cdot\sin\lambda(l-x)}{\lambda\sin\lambda l}, & 0 < \xi < x < l. \end{cases}$$

Знайдемо тепер базисні функції $\psi_k(x)$, $k = 0, 1$, розшукуючи їх у вигляді:

$$\psi_0(x) = C_{00}\varphi_0(x) + C_{01}\varphi_1(x), \quad \psi_1(x) = C_{10}\varphi_0(x) + C_{11}\varphi_1(x).$$

Для визначення C_{km} маємо систему:

$$C_{00}\varphi_0(0)+C_{01}\varphi_1(0)=1, \qquad C_{00}\varphi_0(l)+C_{01}\varphi_1(l)=0,$$
$$C_{10}\varphi_0(0)+C_{11}\varphi_1(0)=0, \qquad C_{10}\varphi_0(l)+C_{11}\varphi_1(l)=1,$$

тобто

$$\begin{cases} C_{01}=1, \\ C_{00}\sin\lambda l+C_{01}\cos\lambda l=0, \end{cases} \quad i \quad \begin{cases} C_{11}=0, \\ C_{10}\sin\lambda l+C_{11}\cos\lambda l=1, \end{cases}$$

звідки

$$C_{00}=-ctg\lambda l,\ C_{01}=1,\ C_{10}=\frac{1}{\sin\lambda l},\ C_{11}=0.$$

Тоді базисні функції мають вигляд:

$$\psi_0(x)=\frac{\sin\lambda(l-x)}{\sin\lambda l}, \qquad \psi_1(x)=\frac{\sin\lambda x}{\sin\lambda l}.$$

Розв′язок неоднорідної крайової задачі має вигляд:

$$y(x)=-\frac{\sin\lambda x}{\lambda\sin\lambda l}\int_0^x f(\xi)\sin\lambda(l-\xi)d\xi-\frac{\sin\lambda(l-x)}{\lambda\sin\lambda l}\int_x^l f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi+$$

$$+A\frac{\sin\lambda(l-x)}{\sin\lambda l}+B\frac{\sin\lambda x}{\sin\lambda l}.$$

Завдання для самостійної роботи

Побудувати функції Грина слідуючих крайових задач:

1) $y''(x)=f(x), \quad y(0)=0, \quad y'(l)=0, \quad 0<x<l;$
2) $y''(x)=f(x), \quad y(0)=y'(1), \quad y'(0)=y(1), \quad 0<x<1;$
3) $y''(x)+\lambda^2 y(x)=f(x),\ y(0)=y(l),\ y'(0)=y'(l),\ 0<x<l;$
4) $y''(x)-\lambda^2 y(x)=f(x),\ y(0)=0,\ y(l)=0,\ 0<x<l;$
5) $x^2y''(x)+2xy'(x)=f(x),\ y(0)<\infty,\ y(1)=\mu y'(1),\ 0<x<1;$
6) $x^2y''(x)+xy'(x)-\lambda^2 y(x)=f(x),\ y(0)<\infty,\ y(1)=0,\ 0<x<1;$
7) $y^{IV}(x)=f(x), y(0)=0, y''(0)=0, y(l)=0, y''(l)=0, 0<x<l;$
8) $y^{IV}(x)=f(x), y(0)=0, y'(0)=0, y(l)=0, y'(l)=0, 0<x<l;$
9) $y^{IV}(x)=f(x), y(0)=0, y'(0)=0, y(l)=0, y''(l)=0, 0<x<l.$

§4. Приклади

ПРИКЛАД 1. Підібрати інтегральне перетворення по змінній x та звести задачу до одномірної

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=q(x,t), \quad 0<x<l, 0<t<\infty \\
&\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=0, \quad 0<t<\infty, \\
&u(x,0)=f(x), \quad 0<x<l.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Ця крайова задача є частинним випадком крайової задачі (1.1) – (1.3), в якій

$$\begin{aligned}
&a_0=0, a_1=l, b_0=0, b_1=\infty, n=1, \\
&r(x)=1, p(x)=-a^2, q(x)=0, p_0(t)=1, p_1(t)=0, \\
&\alpha_{00}=\alpha_{10}=0, \alpha_{01}=\alpha_{11}=1, \beta_{00}^{(0)}=1, \beta_{00}^{(1)}=0, \\
&A_0=A_1=0, B_0(x)=f(x).
\end{aligned}$$

При цьому

$$\begin{aligned}
&U_0[u]=\frac{\partial u}{\partial x}(0,t), \quad U_1[u]=\frac{\partial u}{\partial x}(l,t), \\
&V_0[u]=u(x,0).
\end{aligned}$$

Відповідно до (1.4) загальної схеми інтегральне перетворення шукаємо у вигляді

$$u_\lambda(t)=\int_0^l u(x,t)K(x,\lambda)dx,$$

де $K(x, \lambda)$ — невідоме ще ядро інтегрального перетворення. Помножимо обидві частини диференціального рівняння у (4.1) на $K(x, \lambda)$ та проінтегруємо по x у межах від 0 до l:

$$\int_0^l (\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})K(x,\lambda)dx=q_\lambda(t).$$

Розбиваючи інтеграл, що стоїть у лівій частині останньої рівності на два доданки, змінюючи порядок інтегрування та диференцування у першому та інтегруючи по частинах другий доданок маємо

$$\frac{du_\lambda(t)}{dt}+\lambda a^2u_\lambda(t)-a^2\int\limits_0^l u(x,t)[\frac{d^2K}{dx^2}+\lambda K]dx-a^2\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)K(l,\lambda)+$$

$$+a^2u(l,t)\frac{dK}{dx}(l,t)+a^2\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)K(0,\lambda)-a^2u(0,t)\frac{dK}{dx}(0,\lambda)=q_\lambda(t),\quad(4.2)$$

де $\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=0, \frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0.$

Для того, щоб вихідна крайова задача (4.1) трансформувалась до одновимірної крайової задачі відносно $u_\lambda(t)$, необхідно, щоб ядро $K(x, \lambda)$ інтегрального перетворення було розв'язком наступної задачі Штурма — Ліувілля

$$\frac{d^2K}{dx^2}+\lambda K=0,\ 0<x<l;$$
$$\frac{dK}{dx}(0,\lambda)=0,\ \frac{dK}{dx}(l,\lambda)=0.$$

Відповідно до таблиці (А.2) цій задачі Штурма — Ліувілля відповідає скінченне косинус-перетворення Фур′є

$$u_\alpha(t)=\int\limits_0^l u(x,t)\cos\alpha x dx,\ \alpha=\frac{\pi k}{l},\ k=0,\ 1,\ 2,\ \dots \qquad (4.3)$$

тобто

$$K(x,\lambda)=\cos\alpha x,\quad \lambda=\alpha^2. \qquad (4.4)$$

Підставляючи (4.4), (4.3) до (4.2) отримаємо звичайне диференціальне рівняння відносно трансформанти (4.3)

$$u'_\alpha(t)+\alpha^2a^2u_\alpha(t)=q_\alpha(t), \qquad (4.5)$$

де

$$q_\alpha(t)=\int\limits_0^l q(x,t)\cos\alpha x dx.$$

Застосуємо інтегральне перетворення (4.3) до останньої граничної умови в (4.1). Для цього помножимо обидві частині на $K(x,\lambda)=\cos\alpha x$ та проінтегруємо по змінній x у межах від 0 до l. Отримаємо

$$u_\alpha(0) = f_\alpha,\ f_\alpha = \int_0^l f(x)\cos\alpha x dx. \tag{4.6}$$

Таким чином, крайова задача (4.1) за допомогою скінченного косинус-перетворення Фур'є звелася до одномірної крайової задачі (4.5), (4.6).

Зауваження. Крайову задачу (4.1) можна звести до одномірної і за допомогою інтегрального перетворення по змінній t. Для цього використаємо інтегральне перетворення Лапласа (таблиця В). Помножимо перші три рівності в (4.1) на $e^{-\alpha t}$, проінтегруємо по t на интервалі $(0, \infty)$ та, враховуючи останню граничну умову в (4.1), отримаємо

$$a^2\frac{d^2u_\alpha(x)}{dx^2} - \alpha u_\alpha(x) = -q_\alpha(x) - f(x), 0 < x < l,$$
$$\frac{du_\alpha}{dx}(0) = 0, \frac{du_\alpha}{dx}(l) = 0,$$

де

$$q_\alpha(x) = \int_0^\infty q(x,t)e^{-\alpha t}dt.$$

ПРИКЛАД 2. Підібрати інтегральне перетворення

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = g(r,\theta), \quad 0 < a < r < b, -\pi \le \theta \le \pi,\\
&u\ \Big|_{r=a} = f(\theta), \frac{\partial u}{\partial r}\ \Big|_{r=b} = 0,\\
&u\ \Big|_{\theta=-\pi} = u\ \Big|_{\theta=\pi}, \frac{\partial u}{\partial \theta}\ \Big|_{\theta=-\pi} = \frac{\partial u}{\partial \theta}\ \Big|_{\theta=\pi}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Підберемо інтегральне перетворення по змінній θ. Для цього диференціальне рівняння перепишемо у вигляді:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} = r^2 g(r,\theta) \tag{4.8}$$

і будемо шукати ядро інтегрального перетворення

$$u_\lambda(r) = \int_{-\pi}^{\pi} u(r,\theta)K(\lambda,\theta)d\theta.$$

Помножимо обидві частини рівняння (4.8) на $K(\theta,\lambda)$, проінтегруємо по змінній θ у межах від $-\pi$ до π та отримаємо після інтегрування по частинах та використання граничних умов по змінній θ:

$$r^2\frac{d^2u_\lambda}{dr^2}+r\frac{du_\lambda}{dr}-\lambda u_\lambda(r)+\int_{-\pi}^{\pi}u(r,\theta)[\frac{d^2K}{d\theta^2}+\lambda K]d\theta+$$

$$+\frac{\partial u}{\partial\theta}\Big|_{\theta=\pi}[K\Big|_{\theta=\pi}-K\Big|_{\theta=-\pi}]-u\Big|_{\theta=\pi}[\frac{\partial K}{\partial\theta}\Big|_{\theta=\pi}-\frac{\partial K}{\partial\theta}\Big|_{\theta=-\pi}]=$$

$$=r^2\int_{-\pi}^{\pi}g(r,\theta)K(\theta,\lambda)d\theta.$$

Таким чином, для того, щоб вихідна крайова задача (4.7) трансформувалася до одномірної крайової задачі для $u_\lambda(r)$, необхідно, щоб ядро $K(\theta,\ \lambda)$ було розв′язком такої задачі Штурма — Ліувілля:

$$\frac{d^2K}{d\theta^2}+\lambda K=0,$$

$$K\Big|_{\theta=-\pi}=K\Big|_{\theta=\pi},\frac{dK}{d\theta}\Big|_{\theta=-\pi}=\frac{dK}{d\theta}\Big|_{\theta=\pi}.$$

Відповідно до таблиці (А.3) цій задачі Штурма — Ліувілля відповідає скінченне повне інтегральне перетворення Фур′є

$$u_k(r)=\int_{-\pi}^{\pi}u(r,\theta)e^{ik\theta}d\theta,$$

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}u_k(r)e^{-ik\theta}.$$

Підберемо тепер інтегральне перетворення до задачі (4.1) по змінній r. Для цього диференціальне рівняння (4.8) перепишемо у вигляді:

$$r\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=r^2g(r,\theta) \tag{4.9}$$

та будемо шукати інтегральне перетворення відповідно до (1.4) у вигляді

$$u_\lambda(\theta)=\int_a^b u(r,\theta)K(r,\lambda)\frac{dr}{r},$$

тимчасово вважаючи граничні умови по змінній r однорідними (тобто $f(\theta)=0$). Помножимо обидві частини рівняння (4.9) на $r^{-1}K(r,\lambda)$, проінтегрував по змінній r від a до b, отримаємо після інтегрування по частинах

$$\frac{d^2u_\lambda}{d\theta^2}-\lambda u_\lambda+\int_a^b u(r,\theta)[r\frac{d}{dr}(r\frac{dK}{dr})+\lambda K]\frac{dr}{r}+\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=b} bK(b,\lambda)-$$

$$-u\Big|_{r=b} b\frac{dK}{dr}\Big|_{r=b}-\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a} aK(a,\lambda)-u\Big|_{r=a} a\frac{dK}{dr}\Big|_{r=a}=\int_a^b rg(r,\theta)K(r,\lambda)dr.$$

Таким чином, для того, щоб вихідна крайова задача (4.7) трансформувалася до одномірної крайової задачі для $u_\lambda(\theta)$, необхідно, щоби ядро інтегрального перетворення $K(r,\lambda)$ було розв′язком такої задачі Штурма — Ліувілля:

$$r\frac{d}{dr}(r\frac{dK}{dr})+\lambda K=0,\quad 0<a<r<b,$$

$$K\Big|_{r=a}=0,\ \frac{dK}{dr}\Big|_{r=b}=0.$$

Відповідно до таблиці (Б-3) цій задачі відповідає нестандартне скінченне синус-перетворення Мелліна

$$u_\alpha(\theta)=\int_a^b u(r,\theta)\sin(\alpha\ln\frac{r}{a})\frac{dr}{r},$$

$$\alpha=\frac{\pi(2k-1)}{2\ln(b/a)},$$

$$u(r,\theta)=\frac{2}{\ln(b/a)}\sum_{k=1}^{\infty}u_\alpha(\theta)\sin(\alpha\ln\frac{r}{a}).$$

ПРИКЛАД 3. Методом інтегральних перетворень розв′язати крайову задачу

$$\Delta u(x,y)=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=f(x,y),\quad 0<x<a, 0<y<b \tag{4.10}$$

$$u(0,y)=A(y),\quad u(a,y)=B(y), \tag{4.11}$$

$$u(x,0)=g(x),\quad u(x,b)=w(x). \tag{4.12}$$

Дана задача є частинним випадком крайової задачі (1.1) – (1.3), в якій

$$r(x)=p(x)=1,\, q(x)=0,\, n=2,\, p_0(y)=1,$$
$$p_1(y)=p_2(y)=0,\, a_0=0,\, a_1=a,\, b_0=0,\, b_1=b,$$
$$\alpha_{00}=\alpha_{10}=1,\, \alpha_{01}=\alpha_{11}=0,$$
$$\beta_{00}^{(0)}=\beta_{10}^{(1)}=1,\, \beta_{01}^{(0)}=\beta_{11}^{(0)}=\beta_{00}^{(1)}=\beta_{10}^{(0)}=\beta_{01}^{(1)}=\beta_{11}^{(1)}=0.$$

При цьому

$$U_0[u]=u(0,y),\quad U_1[u]=u(a,y),$$
$$V_0[u]=u(x,0),\quad V_1[u]=u(x,b).$$

Відповідно до загальної схеми методу інтегральних перетворень ця задача розв′язується в три етапи.

Перший етап. *Підбір інтегрального перетворення та зведення задачі до одномірної.*

Відповідно до (1.4) загальної схеми інтегральне перетворення по змінній x шукаємо у вигляді

$$u_\lambda(y)=\int_0^a u(x,y)K(x,\lambda)dx,$$

де $K(x,\lambda)$ — невідоме ще ядро інтегрального перетворення. Помноживши обидві частини рівності (4.10), (4.12) на $K(x,\lambda)$, проінтегруємо по змінній x в інтервалі (0,a):

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}K(x,\lambda)dx+\int_0^a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}K(x,\lambda)dx=f_\lambda(y), \tag{4.13}$$

$$\int_0^a u(x,0)K(x,\lambda)dx=g_\lambda, \tag{4.14}$$

$$\int_0^a u(x,b)K(x,\lambda)dx=\varpi_\lambda, \tag{4.15}$$

де

$$[f_\lambda(y),g_\lambda,\varpi_\lambda]=\int_0^a [f(x,y),g(x),\omega(x)]K(x,\lambda)dx.$$

Після зміни порядку інтегрування та диференціювання у другому доданку в (4.13) та інтегрування по частинах у першому доданку маємо

$$u_\lambda''(y) - \lambda u_\lambda(y) + \int_0^a u(x, y)[\frac{d^2 K}{dx^2} + \lambda K]dx + \frac{\partial u}{\partial x}(a, y)K(a, \lambda) -$$

$$-u(a, y)\frac{\partial K}{\partial x}(a, \lambda) - \frac{\partial u}{\partial x}(0, y)K(0, \lambda) + u(0, y)\frac{\partial K}{\partial x}(0, \lambda) = f_\lambda(y). \quad (4.16)$$

Тому що значення $u(a, y)$ та $u(0, y)$ нам відомі (4.11), то для того, щоб вихідна крайова задача (4.10) – (4.12) трансформувалася до одномірної крайової задачі для $u_\lambda(y)$ необхідно, щоб ядро $K(x, \lambda)$ інтегрального перетворення було розв′язком задачі Штурма — Ліувілля

$$\frac{d^2 K}{dx^2} + \lambda K = 0, \quad K(a, \lambda) = K(0, \lambda) = 0.$$

Відповідно до таблиці (А.3) цій задачі відповідає скінченне синус-перетворення Фур′є

$$u_\alpha(y) = \int_0^a u(x, y)\sin \alpha x dx, \quad \alpha = \frac{\pi k}{a}, \quad (4.17)$$

$$u(x, y) = \frac{2}{a}\sum_{k=1}^{\infty} u_\alpha(y)\sin \alpha x, \quad (4.18)$$

де

$$K(x, \lambda) = \sin \alpha x, \quad \lambda = \alpha^2, \quad \alpha = \frac{\pi k}{a}. \quad (4.19)$$

Підставляючи (4.19) до (4.16), (4.14), (4.15), враховуючи (4.11), приходимо до одномірної крайової задачі відносно трансформанти $u_\alpha(y)$:

$$\begin{aligned} &u_\alpha''(y) - \alpha^2 u_\alpha(y) = f_\alpha(y) + B(y)\alpha \cos \alpha a - \alpha A(y) \\ &u_\alpha(0) = g_\alpha, \quad u_\alpha(b) = \omega_\alpha, \end{aligned} \quad (4.20)$$

де

$$\begin{aligned} &f_\alpha(y) = \int_0^a f(x, y)\sin \alpha x dx, \quad g_\alpha = \int_0^a g(x)\sin \alpha x dx, \\ &\omega_\alpha = \int_0^a \omega(x)\sin \alpha x dx. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Другий етап. *Розв'язання задачі у трансформантах.*

За схемою, що викладена вище, будуємо функцію Гріна крайової задачі (4.20) у вигляді

$$G_\alpha(y,\eta) = -\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|y-\eta|} + \frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha\eta}\frac{sh\alpha(b-y)}{sh\alpha b} + \frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha(b-\eta)}\frac{sh\alpha y}{sh\alpha b}, \quad (4.22)$$

причому фундаментальна базисна система зв'язана з нею формулами (3.30)

$$\Psi_0(y) = -G_\alpha^\bullet(y,0), \; \Psi_1(y) = G_\alpha^\bullet(y,b). \quad (4.23)$$

Тоді відповідно до формули (3.27) розв'язок крайової задачі (4.20) можна записати у вигляді:

$$u_\alpha(y) = \int_0^b [f_\alpha(\eta) - \alpha A(\eta) + \alpha B(\eta)\cos\alpha a] G_\alpha(y,\eta)d\eta + \\ + \omega_\alpha G_\alpha^\cdot(y,b) - g_\alpha G_\alpha^\cdot(y,0). \quad (4.24)$$

Третій етап. *Обернення інтегрального перетворення.*

Підставляючи (4.24) до формули обернення скінченного інтегрального синус-перетворення Фур'є (4.18), після зміни порядка интегрування та сумування, враховуючи (4.21), отримаємо:

$$u(x,y) = \int_0^a\int_0^b f(\zeta,\eta)R(x,y,\zeta,\eta)d\eta d\zeta - \int_0^b A(\eta)\frac{\partial R}{\partial\zeta}(x,y,0,\eta)d\eta + \\ + \int_0^b B(\eta)\frac{\partial R}{\partial\zeta}(x,y,a,\eta)d\eta - \int_0^a g(\zeta)\frac{\partial R}{\partial\eta}(x,y,\zeta,0)d\zeta + \quad (4.25) \\ + \int_0^a \omega(\zeta)\frac{\partial R}{\partial\eta}(x,y,\zeta,b)d\zeta,$$

де
$$R(x,y,\zeta,\eta) = \frac{2}{a}\sum_{k=1}^\infty G_\alpha(y,\eta)\sin\alpha x\sin\alpha\zeta, \quad \alpha = \frac{\pi k}{a}. \quad (4.26)$$

Виділяючи слабозбіжну частину ряда (4.26), отримаємо

$$R(x,y,\zeta,\eta) = S(x,y,\zeta,\eta) + R_*(x,y,\zeta,\eta), \quad (4.27)$$

де

$$S(x,y,\zeta,\eta) = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^\infty \frac{\sin\alpha\zeta\sin\alpha x}{\alpha}\left[-e^{-\alpha|y-\eta|} + e^{-\alpha(y+\eta)} + e^{-\alpha(2b-y-\eta)}\right], (4.28)$$

$$R_*(x,y,\zeta,\eta)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi k}{a}\zeta\sin\frac{\pi k}{a}x}{k\left(1-e^{-\frac{2\pi b}{a}k}\right)}\Bigg[e^{-\frac{\pi k}{a}(2b-y-\eta)}-e^{-\frac{\pi k}{a}(2b+y+\eta)}+$$

$$+e^{-\frac{\pi}{a}(4b-y-\eta)}-e^{-\frac{\pi k}{a}(2b+y-\eta)}\Bigg]. \qquad (4.29)$$

Ряд (4.29) разом із всіма своїми частинними похідними є рівномірно збіжним при $0\le x,\zeta\le a, 0\le y,\eta\le b,$ а ряд (4.28) легко сумується методом підсумовування слабо збіжних рядів, що наведений нижче:

$$S(x,y,\zeta,\eta)=\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{\frac{\sin^2\frac{\pi}{2a}(x+\zeta)+sh^2\frac{\pi}{2a}(y-\eta)}{\sin^2\frac{\pi}{2a}(x-\zeta)+sh^2\frac{\pi}{2a}(y-\eta)}}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{\frac{\sin^2\frac{\pi}{2a}(x+\zeta)+sh^2\frac{\pi}{2a}(y+\eta)}{\sin^2\frac{\pi}{2a}(x-\zeta)+sh^2\frac{\pi}{2a}(y+\eta)}}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{\frac{\sin^2\frac{\pi}{2a}(x+\zeta)+sh^2\frac{\pi}{2a}(2b-y-\eta)}{\sin^2\frac{\pi}{2a}(x-\zeta)+sh^2\frac{\pi}{2a}(2b-y-\eta)}}. \qquad (4.30)$$

Формули (4.25), (4.27), (4.29), (4.30) дають розв'язок крайової задачі (4.10) – (4.12).

§5. Перетворення Фур'є

Інтегральні перетворення

Операційне числення, що запропоноване Хевісайдом для дослідження змін по часу деяких процесів у фізиці та електротехніці, формально еквівалентно систематичному застосуванню перетворення Лапласа. Саме такий підхід до операційного числення був взятий до уваги у більшості сучасних посібників. Якщо, наприклад, функція $f(x)$ визначається диференціальним рівнянням та деякими граничними умовами, то часто простіше цю крайову задачу звести до відповідної задачі для функції

$$\varphi(p)=\int_0^\infty f(x)e^{-px}dx, \tag{5.1}$$

яка отримана з $f(x)$ множенням на e^{-px} та інтегруванням по x від 0 до ∞. Функція $\varphi(p)$, що отримана таким чином, є функцією змінної p. Ця функція є трансформантою Лапласа від функції $f(x)$.

Таку точку зору легко узагальнити. Якщо функція $K(\alpha,x)$ є відомою функцією двух змінних α та x та інтеграл

$$I_f(\alpha)=\int_0^\infty f(x)K(\alpha,x)dx \tag{5.2}$$

є збіжним, то він визначає функцію змінної α. Ця функція є інтегральною трансформантою функції $f(x)$ з ядром $K(\alpha,x)$. Найбільш простий приклад ядра

$$K(\alpha,x)=e^{-\alpha x}$$

веде до трансформанти Лапласа (5.1). Інше ядро, яке широко використовується, має вигляд

$$K(\alpha,x)=x^{\alpha-1}.$$

Таке ядро приводить до трансформанти

$$F(\alpha)=\int_0^\infty f(x)x^{\alpha-1}dx\,. \tag{5.3}$$

Інтегральні перетворення такого типу вперше систематично були досліджені Мелліном, тому функція $F(\alpha)$, що визначається співвідношенням

---

*Зміст §§ 5-7 застосований з [14].

(5.3), називається трансформантою Мелліна функції $f(x)$. Інші конкретні види перетворень отримані в тих випадках, коли ядро $K(\alpha,x)$ є синусом або косинусом або є розв'язком диференціального рівняння Бесселя. Такі перетворення будуть визначені та більш детально розглянуті нижче.

З означення (5.2) бачимо, що якщо $f(x)$ та $g(x)$ — дві функції, що мають інтегральні трансформанти з ядром $K(\alpha,x)$, то інтегральна трансформанта їх суми буде така:

$$\int_0^\infty (f+g)K(\alpha,x)dx=\int_0^\infty f(x)K(\alpha,x)dx+\int_0^\infty g(x)K(\alpha,x)dx,$$

тобто є сумою їх інтегральних трансформант. Далі, якщо c є постійною, то

$$\int_0^\infty cf(x)K(\alpha,x)dx=c\int_0^\infty f(x)K(\alpha,x)dx.$$

Ці рівності виявляють, що оператор, який перетворює функцію $f(x)$ в її інтегральну трансформанту $I_f(\alpha)$, є лінійним оператором.

Розглядаючи співвідношення (5.2) як перетворення, що зв'язує функції $f(x)$ та $I_f(\alpha)$, можна побудувати абстрактну теорію перетворень такого типу, користуючись властовостями банахових просторів. Такий підхід був би цікавим з математичної точки зору, але він не є достатньо плодотворним з точки зору застосування в математичній фізиці. Розглянемо тому лише ті властивості інтегральних перетворень, які будуть використані для аналіза крайових задач.

Ядра Фур'є

1. *Ядра Фур'є.* Вище ми бачили, що оператор, який перетворює функцію в її інтегральну трансформанту з ядром $K(\alpha,x)$, є лінійним оператором, який ми означимо як L, так що

$$L(f)=I_f(\alpha).$$

Якщо тепер припустити, що для кожної функції $B(\alpha)$, що належить до певного класу функцій змінної α, рівняння

$$L(f)=B(\alpha)$$

задовольняється однією, і тільки однією, функцією $f(x)$, то легко показати, що існує лінійний оператор L^{-1}, який називається оберненим оператором від L, таким, що рівняння

$$L(f)=B(\alpha) \quad f(x)=L^{-1}(B)$$

є еквівалентими. Наша головна задача — визначення цім обернених операторів для конкретних видів L.

Ці міркування показують, що при певних умовах можливо записати розв′язок інтегрального рівняння

$$I_f(\alpha)=\int_0^\infty f(x)K(\alpha,x)dx \tag{5.4}$$

у вигляді:

$$f(x)=\int_a^b I_f(\alpha)H(\alpha,x)d\alpha\,. \tag{5.5}$$

Формулу типу (5.5), що виражає функцію $f(x)$ через її інтегральну трансформанту (5.4), ми будемо називати формулою обернення. У тому часному випадку, коли розв′язок (5.5) рівняння (5.4) має вигляд:

$$f(x)=\int_0^\infty I_f(\alpha)K(\alpha,x)d\alpha, \tag{5.6}$$

тобто, коли співвідношення між функцією і її інтегральною трансформантою симетрично, ядро $K(\alpha,x)$ називається ядром Фур′є.

Отримаємо тепер необхідну умову того, щоб дана функція була ядром Фур′є. Обмежимося тим випадком, коли ядро $K(\alpha,x)$ є функцією лише від αx

$$K(\alpha,x)=K(x,\alpha)=K(\alpha x),$$

тому що цей випадок має найбільш широке застосування. Головний результат висловимо теоремою:

Теорема 1. *Для того щоб функція $K(\alpha x)$ була ядром Фур′є, необхідно, щоб трансформанта Мелліна $K(s)$ функції $K(x)$ задовольняла функціональне рівняння*

$$K(s)K(1-s)=1\,. \tag{5.7}$$

$K(s)$ є трансформантою Мелліна функції $K(x)$, тобто із визначення (5.3) випливає

$$K(s)=\int_0^\infty K(x)x^{s-1}dx.$$

Щоб довести теорему, помножимо обидві частини рівності (5.4) на α^{s-1} та проінтегруємо по α від 0 до ∞. Як результат отримаємо

$$\int_0^\infty I_f(\alpha)\alpha^{s-1}d\alpha = \int_0^\infty \alpha^{s-1}d\alpha \int_0^\infty f(x)K(\alpha x)dx = \int_0^\infty f(x)dx \int_0^\infty K(\alpha x)\alpha^{s-1}d\alpha,$$

зміна порядку інтегрування обгрунтовується при досить загальних умовах теореми Фубіні. У внутрішньому інтегралі проведемо заміну змінної αx на η, знайдемо

$$\int_0^\infty K(\alpha x)\alpha^{s-1}d\alpha = x^{-s}\int_0^\infty K(\eta)\eta^{s-1}d\eta = x^{-s}K(s),$$

так що

$$\int_0^\infty I_f(\alpha)\alpha^{s-1}d\alpha = \int_0^\infty f(x)x^{-s}dxK(s). \tag{5.8}$$

Покладемо

$$I(s) = \int_0^\infty I_f(\alpha)\alpha^{s-1}d\alpha, \quad F(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx,$$

де $I(s)$ та $F(s)$ є трансформантами Мелліна функцій $I_f(\alpha)$ та $f(x)$ відповідно. Бачимо, що рівність (5.8) можна записати у іншому вигляді:

$$I(s) = K(s)F(1-s). \tag{5.9}$$

З другого боку, помножимо обидві частини рівності (5.6) на x^{s-1} та проінтегруємо по x від 0 до ∞, отримаємо

$$\int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx = \int_0^\infty x^{s-1}dx \int_0^\infty I_f(\alpha)K(\alpha x)d\alpha =$$

$$= \int_0^\infty I_f(\alpha)d\alpha \int_0^\infty K(\alpha x)x^{s-1}dx = \int_0^\infty I_f(\alpha)\alpha^{-s}d\alpha \int_0^\infty K(\eta)\eta^{s-1}d\eta.$$

Це можна записати так:

$$F(s) = I(1-s)K(s).$$

Замінимо в цьому рівнянні s на $1-s$ та знайдемо

$$F(1-s) = I(s)K(1-s). \tag{5.10}$$

Виключаючи відношення $F(1-s)/I(s)$ з рівняння (5.9) та (5.10), бачимо, що $K(s)$ задовольняє функціональне рівняння

$$K(s)K(1-s)=1,$$

як і стверджується у теоремі.

2. *Приклади ядер Фур'є.* а) Як приклад функції, трансформанта Мелліна якої задовольняє рівнянню (5.7), розглянемо $K(x)=A\cos x$, де A — деяка, поки невизначена стала. За означенням маємо

$$K(s)=A\int_0^\infty x^{s-1}\cos x dx=\frac{1}{2}A\left(\int_0^\infty e^{ix}x^{s-1}dx+\int_0^\infty e^{-ix}x^{s-1}dx\right).$$

Ми знаємо, що якщо p є дійсною додатньою величиною, то

$$\int_0^\infty e^{-px}x^{s-1}dx=\frac{\Gamma(s)}{p^s}.$$

Тому формально можна написати

$$\int_0^\infty e^{\pm ix}x^{s-1}dx=e^{\pm\frac{1}{2}\pi is}\Gamma(s).$$

Звідки випливає

$$K(s)=A\cos\left(\frac{s\pi}{2}\right)\Gamma(s),$$

так що

$$K(1-s)=A\cos\left(\frac{s\pi}{2}\right)\Gamma(1-s).$$

Щоб функція $K(x)$ була ядром Фур'є, повинно виконуватися співвідношення

$$1=K(s)K(1-s)=A^2\sin\left(\frac{s\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{s\pi}{2}\right)\Gamma(s)\Gamma(1-s).$$

Але

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\pi\operatorname{cosec}(s\pi),\ \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{s\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin(s\pi),$$

і тому рівняння (5.7) зводиться до рівності $\frac{1}{2}\pi A^2 = 1$, з якої випливає, що $A = (2/\pi)^{1/2}$.

Це вказує на те, що розв′язок інтегрального рівняння

$$F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos(\alpha x)\, dx, \tag{5.11}$$

ймовірно, має вигляд:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_c(\alpha) \cos(\alpha x)\, dx. \tag{5.12}$$

Функція $F_c(\alpha)$, що означена виразом (5.11), називається косинус-трансформантою Фур′є функції $f(x)$. Якщо рівність (5.12) справедлива, то співвідношення між функцією та її косинус-трансформантою Фур′є симетрично. Інакше кажучи, $f(\alpha)$ — косинус трансформанта Фур′є функції $F_c(x)$. Ми повинні відзначити, що визначення $K(s)$ було лише формальним, тому ще не можна затверджувати справедливість формули обернення (5.12).

б) Розрахунки, які аналогичні зазначеним вище, показують, що функція $K(x) = (2/\pi)^{1/2} \sin x$ є також ядром Фур′є. А раз так, то, якщо

$$F_S(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin(\alpha x)\, dx, \tag{5.13}$$

то

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_S(\alpha) \sin(\alpha x)\, dx. \tag{5.14}$$

в) Аналогично, взявши

$$K(x) = x^{1/2} J_\nu(x),$$

де $J_\nu(x)$ означає функцію Бесселя першого роду порядку ν, та використовуючи вираз функції Бесселя

$$\int_0^\infty I_\nu(\alpha t) t^\mu\, dt = \frac{2^\mu \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu\right)}{\alpha^{\mu+1} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu\right)}$$

через Гамма-функцію при $\alpha = 1$ та $\mu = s - \frac{1}{2}$, знайдемо, що

$$K(s)=2^{s-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}s+\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}s+\frac{3}{4}\right)}.$$

Звідки зразу бачимо, що $K(s)$ задовольняє функціональне рівняння (5.7). Тому $x^{1/2}J_\nu(x)$ є ядром Фур'є визначеного вище типу, тобто, якщо ми визначимо функцію g рівністю

$$\overline{g}(\alpha)=\int_0^\infty g(x)(\alpha x)^{1/2}J_\nu(\alpha x)\,dx, \tag{5.15}$$

то $g(x)$ буде виражатися через $\overline{g}(\alpha)$ за допомогою формули обернення

$$g(x)=\int_0^\infty \overline{g}(\alpha)(\alpha x)^{1/2}J_\nu(\alpha x)\,d\alpha. \tag{5.15a}$$

При заміні $g(x)$ на $x^{1/2}f(x)$ та $\overline{g}(\alpha)$ на $\alpha^{1/2}\overline{f}(\alpha)$ ці формули набувають такого вигляду:

$$\overline{f}(\alpha)=\int_0^\infty xf(x)J_\nu(\alpha x)\,dx, \tag{5.16}$$

$$f(x)=\int_0^\infty \alpha\overline{f}(\alpha)J_\nu(\alpha x)\,d\alpha. \tag{5.17}$$

Функцію $\overline{f}(\alpha)$, що визначається виразом (5.16), називають трансформантою Ханкеля порядку ν функції $f(x)$.

3. Несиметричні формули обернення.

Теорема 2. *Для того щоб інтегральне рівняння*

$$I_f(\alpha)=\int_0^\infty f(x)K(\alpha x)\,dx$$

мало розв'язок у вигляді

$$f(x)=\int_0^\infty I_f(\alpha)H(\alpha x)\,d\alpha,$$

необхідно, щоб трансформанти Мелліна $K(s)$, $H(s)$ функцій $K(x)$, $H(x)$ задовольняли функціональне рівняння

$$K(s)H(1-s)=1.$$

За означенням маємо

$$I(s)=\int_0^\infty I_f(\alpha)\alpha^{s-1}d\alpha=\int_0^\infty \alpha^{s-1}d\alpha\int_0^\infty f(x)K(\alpha x)dx=\int_0^\infty f(x)x^{-s}dx\int_0^\infty K(\eta)\eta^{s-1}d\eta,$$

тому

$$I(s)=F(1-s)K(s), \tag{5.18}$$

а також

$$F(s)=\int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx=\int_0^\infty x^{s-1}dx\int_0^\infty I_f(\alpha)H(\alpha x)d\alpha=$$

$$=\int_0^\infty I_f(\alpha)\alpha^{-s}d\alpha\int_0^\infty H(\eta)\eta^{s-1}d\eta=I(1-s)H(s).$$

Замінюючи в останньому виразі s на $1-s$, знайдемо

$$F(1-s)=I(s)H(1-s). \tag{5.19}$$

Виключаючи відношення $F(1-s)/I(s)$ з співвідношень (5.18) та (5.19), отримаємо необхідну умову

$$K(s)H(1-s)=1, \tag{5.20}$$

яка призводить до рівняння (5.7) у випадку $H\equiv K$.

Інтегральна теорема Фур'є

З виразів (5.11) та (5.12) видно, що при певних умовах можна представити функцію $f(x)$ у вигляді подвійного інтеграла

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty f(\eta)\cos(\alpha\eta)\cos(\alpha x)d\eta. \tag{5.21}$$

Крім цього, з теорії рядів Фур'є відомо, що якщо функція $f(x)$ задовольняє певних умовах у замкнутому інтервалі $(0,l)$, то її можна представити у вигляді ряда Фур'є:

$$f(x)=\frac{1}{l}\int_0^l f(\eta)d\eta+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^\infty \cos\frac{n\pi x}{l}\int_0^l f(\eta)\cos\frac{n\pi\eta}{l}d\eta. \tag{5.22}$$

Якщо l вибрати достатньо великим та припустити що, інтеграл $\int_0^\infty f(\eta)\,d\eta$ є збіжним, то перший член ряду (5.22) буде скільки завгодно малим. Далі можна записати:

$$\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi x}{l}\int_0^l f(\eta)\cos\frac{n\pi\eta}{l}\,d\eta=\frac{2\delta\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nx\delta\alpha)\int_0^{\pi/\delta\alpha} f(\eta)\cos(n\eta\delta\alpha)\,d\eta\ ,$$

де вибрано $\delta\alpha=\pi/l$, а праву частину подати у вигляді:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/\delta\alpha} f(\eta)\,d\eta\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left[x(n\delta\alpha)\right]\cos\left[\eta(n\delta\alpha)\right]\delta\alpha.$$

Припустимо, що цей ряд прямує до певної границі при $l\to\infty$, тобто при $\delta\alpha\to 0$ ми для цього граничного значення отримаємо

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\eta\int_0^\infty f(\eta)\cos(x\alpha)\cos(\eta\alpha)\,d\alpha.$$

Підставимо це граничне значення у праву частину виразу (5.22), отримаємо формулу (5.21). Аналогічно, якщо ми відштовхнемося від ряда Фур'є

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\eta)\,d\eta+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(\eta)\cos\left(n\pi\frac{\eta-x}{l}\right)d\eta\ . \qquad (5.23)$$

а потім l спрямуємо до нескінченності, то отримаємо формулу

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)\,d\eta\ .$$

Ці визначення не є строгим доданням співвідношення (5.23). Так, вона не є справедливим у випадку, коли $f(x)$— стала, тому що в цьому випадку інтеграл по η невизначений.

Інтеграли Діріхле

Функція $f(x)$ задовольняє умови Діріхле в інтервалі (a,b), якщо

1) $f(x)$ має лише скінченне число максимумів та мінімумів у інтервалі (a,b);

2) $f(x)$ має лише скінченне число скінчених розривів неперервності у інтервалі (a,b) і не має нескінченних розривів неперервності.

Відзначимо, що якщо деяка функція неперервна у інтервалі (a,b) та має в ньому лише скінченне число максимумів та мінімумів, то вона задовольняє умови Діріхле в цьому інтервалі. Наприклад, функція

$$x/(1+x^2)$$

задовольняє умови Діріхле у проміжку $(-\infty,\infty)$. Функція $(1-x)^{-1}$ не задовільняє умовам Діріхле у інтервалі, який включає точку $x=1$, тому що в цій точці функція має нескінченний розрив неперервності. Функція

$$\sin\frac{1}{x}$$

не задовольняє умови Діріхле в інтервалі, який включає початок координат, тому що вона має нескінченне число максимумів та мінімумів біля початку координат.

Функція задається рівностями

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x<-\beta \\ \lambda & -\beta\le x<-\alpha \\ \mu & -\alpha\le x\le\alpha \\ \nu & \alpha<x<\beta \\ 0 & x>\beta \end{cases}.$$

Ця функція має скінчені розриви неперервності у точках $x=\pm\alpha$, $\pm\beta$, тобто має тільки чотири розрива неперервності у інтервалі $(-\infty,\infty)$. Крім цього, вона має лише скінченне число екстремальних значень, так що задовольняє умови Діріхле на всьому інтервалі $(-\infty,\infty)$.

Т е о р е м а. *Якщо інтеграл* $\int\limits_0^\infty f(x)dx$ *збігається, то*

$$\left|\int\limits_0^N f(x)dx\right|$$

є обмеженим для всякого додатнього значення N.

Доведення цього ствердження випливає з означення збіжності інтеграла з нескінченними межами. Тому що інтеграл

$$\int_0^\infty f(x)dx$$

збігається, повинні існувати число I та додатне число M таке, що при

$N \geq M$
$$\left|\int_0^N f(x)dx - I\right| < \varepsilon ,$$

де ε — довільно задана скільки завгодно мала додатня величина. Цю нерівність можна переписати у вигляді:

$$I - \varepsilon < \int_0^N f(x)dx < I + \varepsilon ,$$

звідки випливає, що при $N \geq M$ число

$$\left|\int_0^N f(x)dx\right|$$

буде менше більшого з двох чисел $|I-\varepsilon|$, $|I+\varepsilon|$.

Нехай далі, при $0 \leq N \leq M$ максимальне значення

$$\left|\int_0^N f(x)dx\right|$$

дорівнює деякому K. Вибираючи тепер число L, що дорівнює більшому з трьох чисел K, $|I-\varepsilon|$, $|I+\varepsilon|$, ми отримаємо, що для всіх значеннь N має місце нерівність.

$$\left|\int_0^N f(x)dx\right| < L ,$$

яке і означає, що $\left|\int_0^N f(x)dx\right|$ обмежений.

Теорема. *Якщо $f(x)$ задовільняє умови Діріхле у інтервалі (a,b), то інтеграли*

$$\int_a^b f(x)\sin(\omega x)dx , \int_a^b f(x)\cos(\omega x)dx$$

прямують до нуля, коли ω прямує до нескінченності, пробігаючи будь-яку послідовність значень.

Щоб довести це твердження, означимо через $a_1, a_2, \ldots, a_p$, вибрані по порядку точки інтервалу (a,b), в яких функція $f(x)$ досягає екстремальних значень або має скінченний розрив неперевності. Заміннюючи a на a_0 та b на a_{p+1}, записуємо

$$\int_a^b f(x)\sin(\omega x)dx = \sum_{r=0}^{p} \int_{a_r}^{a_{r+1}} f(x)\sin(\omega x)dx. \tag{5.24}$$

На кожному із інтервалів (a_r, a_{r+1}) $(r = 0,1,2,\ldots,p)$ функція $f(x)$ є неперервною, монотонно зростаючою чи монотонно спадною, так що можна користуватися другою теоремою інтегрального числення про середнє значення:

$$\int_{a_r}^{a_{r+1}} f(x)\sin(\omega x)dx = f(a_r+0)\int_{a_r}^{\xi}\sin(\omega x)dx + f(a_{r+1}-0)\int_{\xi_r}^{a_{r+1}}\sin(\omega x)dx,$$

де ξ — деяка точка інтервалу (a_r, a_{r+1}) и де використано означення

$$f(a_r+0) = \lim_{y\to 0} f(a_r+y), \qquad f(a_{r+1}-0) = \lim_{y\to 0} f(a_{r+1}-y),$$

якщо y додатнє. Після інтегрування отримаємо

$$\int_{a_r}^{a_{r+1}} f(x)\sin(\omega x)dx = f(a_r+0)\frac{\cos(\omega a_r)-\cos(\omega\xi)}{\omega} +$$

$$+ f(a_{r+1}-0)\frac{\cos(\omega\xi)-\cos(\omega a_{r+1})}{\omega},$$

отже,

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_{a_r}^{a_{r+1}} f(x)\sin(\omega x)dx = 0.$$

Тому що число членів у правій частині рівності (5.24) є скінченним, то знайдемо

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(\omega x)dx = \sum_{r=0}^{p}\lim_{\omega\to\infty} f(x)\sin(\omega x)dx = 0.$$

Аналогічний результат можна легко отримати, коли замість $\sin(\omega x)$ під інтеграл входить $\cos(\omega x)$. Таким чином, будемо мати

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(\omega x)\,dx = \lim_{\omega\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(\omega x)\,dx = 0.$$

Теорема 5. *Якщо $f(x)$ задовольняє умови Діріхле у інтервалі (a,b), де $0 \le a < b$, то інтеграл*

$$\int_a^b f(x)\frac{\sin(\omega x)}{x}dx$$

прямує до нуля при $a>0$ та до $\frac{1}{2}\pi f(+0)$ при $a=0$, коли ω прямує до нескінченності, пробігаючи будь-яку послідовність значень.

Випадок 1. $a>0$ Розподілимо інтервал (a,b) на ряд інтервалів (a_r, a_{r+1}) $(r = 0,1,2,\ldots,p)$, в кожному з яких функція $f(x)$ монотонна та неперервна. У відповідності до другої теореми про середнє значення маємо

$$\int_{a_r}^{a_{r+1}} f(x)\frac{\sin(\omega x)}{x}dx = f(a_r+0)\int_{a_r}^{\xi}\frac{\sin(\omega x)}{x}dx + f(a_{r+1}-0)\int_{\xi_r}^{a_{r+1}}\frac{\sin(\omega x)}{x}dx =$$

$$= f(a_r+0)\int_{\omega a_r}^{\omega\xi}\frac{\sin(\zeta)}{\zeta}d\zeta + f(a_{r+1}-0)\int_{\xi_r}^{\omega a_{r+1}}\frac{\sin(\zeta)}{\zeta}d\zeta,$$

де $a_r \le \xi \le a_{r+1}$. Далі за означенням збіжного інтеграла існує таке число M, що при $N_1 > M$, $N_2 > M$ мають місце нерівності

$$\left|\int_0^{N_1}\frac{\sin\zeta}{\zeta}d\zeta - \frac{1}{2}\pi\right| < \frac{1}{2}\varepsilon,\quad \left|\int_0^{N_2}\frac{\sin\zeta}{\zeta}d\zeta - \frac{1}{2}\pi\right| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

де ε — довільно мале та використане значення інтеграла

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\zeta}{\zeta}d\zeta = \frac{1}{2}\pi.$$

Звідки

$$\left|\int_{N_1}^{N_2}\frac{\sin\zeta}{\zeta}d\zeta\right| < \varepsilon,$$

або інакше кажучи, при $N_2 > N_1$

$$\lim_{N_1\to\infty}\int_{N_1}^{N_2}\frac{\sin\zeta}{\zeta}d\zeta=0.$$

Це дає

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_{a_r}^{a_{r+1}}f(x)\frac{\sin\omega x}{x}dx=0,$$

звідки випливає

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_a^b f(x)\frac{\sin\omega x}{x}dx=\sum_{r=0}^{p}\lim_{\omega\to\infty}\int_{a_r}^{a_{r+1}}f(x)\frac{\sin\omega x}{x}dx=0.$$

Випадок 2. $a=0$ Розподілимо, як і раніше, інтервал $(0,b)$ на ряд інтервалів; нехай a_1 буде першим максимумом чи мінімумом або точкою розриву неперервності функції $f(x)$, що відмінна від нуля. Тоді, так як $f(x)$ неперервна у інтервалі $0<x<a_1$, в цьому проміжку можна знайти таке значення k змінної x, при якому $|f(k)-f(0)|$ буде скіль завгодно малим. Далі, маємо

$$\int_0^b f(x)\frac{\sin\omega x}{x}dx=\int_0^k f(x)\frac{\sin\omega x}{x}dx+\int_k^b f(x)\frac{\sin\omega x}{x}dx. \tag{5.25}$$

Як і у випадку 1, другий інтеграл правої частини прямує до нуля при прямуванні ω до нескінченності. Для першого інтеграла по другій теоремі про середнє маємо

$$\int_0^k f(x)\frac{\sin\omega x}{x}dx=f(+0)\int_0^\xi\frac{\sin\omega x}{x}dx+f(k)\int_\xi^k f(x)\frac{\sin\omega x}{x}dx=$$

$$=f(+0)\int_0^k\frac{\sin\omega x}{x}dx+\left[f(k)-f(0)\right]\int_\xi^k f(x)\frac{\sin\omega x}{x}dx=$$

$$=f(+0)\int_0^{k\omega}\frac{\sin\zeta}{\zeta}d\zeta+[f(k)-f(0)]\int_{\xi\omega}^{k\omega}f(x)\frac{\sin\zeta}{\zeta}d\zeta. \tag{5.26}$$

Розглянемо поведінку другого члена при $\omega\to\infty$. Тому що інтеграл

$$\int_0^\infty\frac{\sin\zeta}{\zeta}d\zeta$$

є збіжним, то

$$\left|\int_0^{k\omega}\frac{\sin\varsigma}{\varsigma}d\varsigma\right|<L,\ \left|\int_0^{\xi\omega}\frac{\sin\varsigma}{\varsigma}d\varsigma\right|<L,$$

звідки

$$\left|\int_{\varsigma\omega}^{k\omega}\frac{\sin\varsigma}{\varsigma}d\varsigma\right|<2L.$$

Тепер виберемо k так, щоб виконувалася нерівність

$$\left|f(k)-f(0)\right|<\frac{\varepsilon}{2L},$$

де ε є довільно малим. Тоді

$$\left|[f(k)-f(0)]\int_{\xi\omega}^{k\omega}\frac{\sin\zeta}{\zeta}d\zeta\right|<\varepsilon,$$

або, по іншому,

$$\lim_{\omega\to\infty}\left|[f(k)-f(0)]\int_{\xi\omega}^{k\omega}\frac{\sin\zeta}{\zeta}d\zeta\right|=0. \tag{5.27}$$

Використовуючи (5.26), (5.27) та підставляючи їх у (5.25) знайдемо

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_0^b f(x)\frac{\sin\omega x}{x}dx=\frac{1}{2}\pi f(+0),\ \ b>0, \tag{5.28}$$

тому що

$$\int_0^\infty\frac{\sin\zeta}{\zeta}d\zeta=\frac{1}{2}\pi.$$

Т е о р е м а. *Якщо $f(x+u)$ задовольняє умови Діріхле в інтервалі $a<u<b$, то*

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x+u)\frac{\sin\omega u}{u}du=\begin{cases} f(x+0)+f(x-0), & a<0<b,\\ f(x+0), & a=0<b,\\ f(x-0), & a<0=b,\\ 0, & 0<a<b, a<b<0.\end{cases}$$

Так, при $a < b \leq 0$ маємо

$$\int_a^b f(u) \sin \omega u \frac{du}{u} = \int_{-b}^{-a} f(-u) \sin \omega u \frac{du}{u},$$

звідки отримаємо

$$\lim_{\varpi \to \infty} \int_a^b f(u) \frac{\sin \varpi u}{u} du = \begin{cases} 0, & a < b < 0 \\ \frac{1}{2} \pi f(-0), & a < b = 0. \end{cases} \tag{5.29}$$

Отже, якщо $a < 0 < b$, то

$$\int_a^b f(u) \frac{\sin \omega u}{u} du = \int_0^{-a} f(-u) \frac{\sin \omega u}{u} du + \int_0^b f(u) \frac{\sin \omega u}{u} du,$$

та з виразів (5.29) і (5.28) отримаємо

$$\lim_{\omega \to \infty} \int_a^b f(u) \frac{\sin \omega u}{u} du = \frac{1}{2} \pi [f(-0) + f(+0)], \ a < 0 < b. \tag{5.30}$$

Т е о р е м а. *Якщо $f(x)$ задовольняє умови Діріхле у інтервалі $-\infty < x < +\infty$ та інтеграл*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

є абсолютно збіжним, то

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \cos \alpha (\eta - x) d\eta = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)].$$

Твердження, що інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

є абсолютно збіжним, означає, що збіжним є інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$. Ми можемо записати

$$\int_0^{\infty} f(\eta) d\eta \int_0^m \cos \alpha (\eta - x) d\alpha - \int_0^m d\alpha \int_0^{\infty} f(\eta) \cos \alpha (\eta - x) d\eta =$$

$$=\int_0^k f(\eta)d\eta\int_0^m \cos\alpha(\eta-x)d\alpha-\int_0^m d\alpha\int_0^k f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)d\eta+$$

$$+\int_k^\infty f(\eta)d\eta\int_0^m \cos\alpha(\eta-x)d\alpha-\int_0^m d\alpha\int_k^\infty f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)d\eta\,.$$

Перші два інтеграли дорівнюють один одному, тому що числа m та k — скінченні. Далі, тому що $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ є абсолютно збіжним, то існує таке число K, що

$$\left|\int_k^\infty |f(\eta)|d\eta\right|<\frac{\varepsilon}{2m}$$

при $k>K$ та довільно малому ε. Звідки випливає, що

$$\left|\int_0^m d\alpha\int_k^\infty f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)d\eta\right|\le\int_0^m d\alpha\int_k^\infty |f(\eta)|d\eta<\frac{1}{2}\varepsilon \quad k>K.$$

Отже,

$$\left|\int_k^\infty f(\eta)d\eta\int_0^m \cos\alpha(\eta-x)d\alpha\right|=\left|\int_{k+x}^\infty f(\eta+x)\frac{\sin m\eta}{\eta}d\eta\right|<\frac{1}{k}\int_k^\infty |f(\eta+x)|d\eta<\frac{\varepsilon}{2k}.$$

Тому для скільки завгодно великого m можна вибрати K таким великим, щоб виконувалася нерівність

$$\left|\int_0^\infty f(\eta)d\eta\int_0^m \cos\alpha(\eta-x)d\alpha-\int_0^m d\alpha\int_0^\infty f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)d\eta\right|<\frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{1}{k}+1\right)<\varepsilon.$$

По-іншому,

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^\infty f(\eta)d\eta\int_0^m \cos\alpha(\eta-x)d\alpha=\lim_{m\to\infty}\int_0^m d\alpha\int_0^\infty f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)d\eta\,.$$

Аналогично можна показати, що

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-\infty}^{0} f(\eta)d\eta\int_{0}^{m}\cos\alpha(\eta-x)d\alpha=\lim_{m\to\infty}\int_{0}^{m}d\alpha\int_{-\infty}^{0} f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)d\eta\,;$$

після додавання з попереднім отримаємо

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)d\eta\int_{0}^{m}\cos\alpha(\eta-x)d\alpha=\lim_{m\to\infty}\int_{0}^{m}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)d\eta\,. \quad (5.31)$$

З іншого боку,

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+u)\frac{\sin mu}{u}du=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\frac{\sin m(\eta-x)}{\eta-x}d\eta=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)d\eta\int_{0}^{m}\cos\alpha(\eta-x)d\alpha=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{m}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)d\eta,$$

Тут використана рівність (5.31). Звідки отримаємо вираз

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)d\eta\,. \quad (5.32)$$

який відомий під назвою інтегральної формули Фур'є. Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x, то

$$f(x+0)=f(x-0)=f(x)$$

та вираз (5.32) набуде такого вигляду

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)d\eta\,. \quad (5.33)$$

Формули обернення для перетворення Фур'є

У тому випадку, коли функція $f(x)$ означена лише для додатніх значеннь змінної x, існують дві важливі спеціальні форми інтегральної формули Фур'є (5.32). Якщо $f(x)$ визначена у проміжку $0\le x<\infty$, то її можна довизначити у проміжку $-\infty<x<0$, вважаючи, що $f(x)=f(-x)$ при $-\infty<x<0$. В цьому випадку маємо

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)d\eta=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)d\eta+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_{-\infty}^{0} f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)d\eta.$$

Далі,

$$\int_{-\infty}^{0} f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)d\eta=\int_0^\infty f(-\eta)\cos\alpha(-\eta-x)d\eta=\int_0^\infty f(\eta)\cos\alpha(\eta+x)d\eta,$$

так що

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)d\eta=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty f(\eta)[\cos\alpha(\eta-x)+\cos\alpha(\eta+x)]d\eta=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(\alpha x)d\alpha\int_0^\infty f(\eta)\cos(\alpha\eta)d\eta.$$

Тому рівність (5.33) можна записати таким чином:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(\alpha x)d\alpha\int_0^\infty f(\eta)\cos(\alpha\eta)d\eta. \tag{5.34}$$

Остання рівність виражає таку теорему

Теорема. *Якщо F_c — косинус-трансформанта Фур′є функції $f(x)$, тобто, якщо*

$$F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(\eta)\cos(\alpha\eta)d\eta, \tag{5.35}$$

то $f(x)$ визначається формулою

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(\alpha)\cos(\alpha x)d\alpha \tag{5.35^a}$$

Формули (5.35) та (5.35ᵃ) відомі як пара взаємних формул для косинус-перетворення Фур′є.

Можна розширити область визначення функції $f(x)$ з інтервала $0<x<\infty$ на інтервал $-\infty<x<\infty$, та визначити її в проміжку $-\infty<x<0$, поклавши

$$f(x)=-f(-x).$$

У такому випадку отримаємо

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)\,d\eta=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\alpha\int_0^{\infty}f(\eta)\left[\cos\alpha(\eta-x)-\cos\alpha(\eta+x)\right]d\eta,$$

та вираз (5.33) прийме вигляд

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin(\alpha x)\,d\alpha\int_0^{\infty}f(\eta)\sin(\alpha\eta)\,d\eta.$$

Отже, отримали теорему.

Теорема. *Якщо* $F_s(\alpha)$ *— синус-трансформанта Фур'є функції* $f(x)$, *тобто якщо*

$$F_s(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(\eta)\sin(a\eta)\,d\eta, \tag{5.36}$$

то $f(x)$ *виражається через* $F_s(\alpha)$ *формулою*

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F_s(\alpha)\sin(\alpha x)\,d\alpha. \tag{5.36ᵃ}$$

Ці формули відомі як пара взаємних формул для синус-перетворення Фур'є.

Можна надати інтегральній формулі Фур'є ще одну форму. Користуючись формулами

$$\int_{-m}^{m}\cos\alpha(\eta-x)\,d\alpha=2\int_0^{m}\cos\alpha(\eta-x)\,d\alpha,\quad \int_{-m}^{m}\sin\alpha(\eta-x)\,d\alpha=0,$$

— вони випливають з того, що $\sin x$ та $\cos x$ відповідно непарна та парна функції від x — отримаємо

$$\int_0^{m}\cos\alpha(\eta-x)\,d\alpha=\frac{1}{2}\int_{-m}^{m}e^{i\alpha(\eta-x)}\,d\alpha.$$

Звідки замість рівності

$$f(x)=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\eta)\,d\eta\int_{0}^{m}\cos\alpha(\eta-x)\,d\alpha$$

отримаємо

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\alpha x}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(\eta)e^{i\eta\alpha}d\eta. \tag{5.37}$$

Теорема. *Якщо* $F(\alpha)$ *— трансформанта Фур'є функції* $f(x)$, *тобто, якщо*

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\alpha x}dx, \tag{5.38}$$

то $f(x)$ *виражається через* $F(\alpha)$ *співвідношенням*

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha. \tag{5.38^{a}}$$

Треба зауважити, що тут співвідношення між функцією $f(x)$ та її трансформантою $F(\alpha)$ не є симетричним, в той же час співвідношення між функцією та її косинус- та синус-трансформантами $F_c(\alpha)$, $F_s(\alpha)$ є симетричними. Співвідношення (5.38) та (5.38[a]) записують часто у такому вигляді. Якщо

$$\overline{f}(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\alpha x}dx, \tag{5.39}$$

то

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f}(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha, \tag{5.39^{a}}$$

де множник $(1/2\pi)^{1/2}$ у визначенні трансформанти не вказується. Потрібно зауважити, що ми маємо право користуватися цими формулами лише тоді, коли $f(x)$ задовольняє умови Діріхле у будь-якому з інтервалів $(-\infty,\infty)$ $(0,\infty)$ та коли інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx$$

є збіжним.

Визначення інтегралів за допомогою формул обернення

Формули обернення, які отримані у останньому пункті, можна використати для обчислення інтегралів, що мають тригонометричні функції. Розглянемо інтеграли

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^{-bx}\cos(\alpha x)\,dx, \qquad I_2 = \int_0^{\infty} e^{-bx}\sin(\alpha x)\,dx.$$

Інтегруючи перший із них по частинах, отримаємо

$$I_1 = \left[-\frac{1}{b}e^{-bx}\cos(\alpha x)\right]_0^{\infty} - \frac{\alpha}{b}\int_0^{\infty} e^{-bx}\sin(\alpha x)\,dx,$$

що можна записати у вигляді:

$$I_1 = \frac{1}{b} - \frac{\alpha}{b}I_2.$$

Аналогичним чином, інтегруючи другий по частинах, знайдемо

$$I_2 = \frac{\alpha}{b}I_1.$$

Розв'язуючи ці рівняння відносно I_1 та I_2, будемо мати

$$I_1 = \frac{b}{\alpha^2 + b^2}, \qquad I_2 = \frac{\alpha}{\alpha^2 + b^2}.$$

Тобто, якщо вважати, що $f(x) = e^{-bx}$, для косинус- та синус-трансформант цієї функції маємо відповідно вирази

$$F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{b}{\alpha^2 + b^2}, \qquad F_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2 + b^2}.$$

Підставляючи ці вирази у формули (5.35[a]) та (5.36[a]), відповідно отримаємо такі інтеграли:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{\alpha^2+b^2}d\alpha = \frac{\pi}{2b}e^{-bx}, \quad \int_0^\infty \frac{\alpha\sin\alpha x}{\alpha^2+b^2}d\alpha = \frac{\pi}{2}e^{-bx}. \tag{5.40}$$

Аналогично, вважаючи, що $f(x)=1$ при $0<x<a$ або 0 при $x>a$, знайдемо,

$$F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\alpha \cos(\alpha x)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\alpha a}{\alpha},$$

і теорема дає нам результат:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha a)\cos(\alpha x)}{\alpha}d\alpha = \begin{cases}1, 0<x<a\\ 0, x\geq a\end{cases}.$$

Складніший інтеграл отримаємо, якщо взяти

$$f(x)=\begin{cases}0 & 0<x<a\\ x & a\leq x\leq b\\ 0 & x>b.\end{cases}$$

В цьому випадку маємо

$$F_s(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_a^b x\sin(\alpha x)dx =$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{a\cos\alpha a - b\cos\alpha b}{\alpha}+\frac{\sin\alpha b-\sin\alpha a}{\alpha^2}\right),$$

і теорема дає значення інтеграла:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\alpha x\left(\frac{a\cos\alpha a-b\cos\alpha b}{\alpha}+\frac{\sin\alpha b-\sin\alpha a}{\alpha^2}\right)d\alpha = \begin{cases}0 & 0<x<a\\ x & a<x<b\\ 0 & x>b\end{cases}.$$

Аналогічно, вважаючи, що у формулах (5.36) та (5.36[a]) $f(x)=1$ при $0<x<a$ та $f(x)=0$ при $x>a$, а

$$F_s(\alpha)=\frac{1}{\alpha}(1-\cos\alpha a)$$

знайдемо, що

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\alpha x\left(\frac{1-\cos\alpha a}{\alpha}\right)d\alpha=\begin{cases}1 & 0<x<a\\ 0 & x<a.\end{cases}$$

Вважаючи, що $f(x)=1$ при $a<x<b$ та $f(x)=0$ у інших точках, отримаємо

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\alpha x\left(\frac{\cos\alpha a-\cos\alpha b}{\alpha}\right)d\alpha=\begin{cases}0 & 0<x<a\\ 1 & a<x<b\\ 0 & x>b\end{cases}$$

Комбінуючи отримані результати, знайдемо

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\alpha x\left(\frac{a-b}{\alpha}+\frac{\cos\alpha a-\cos\alpha b}{\alpha^2}\right)d\alpha=\begin{cases}a-b & 0<x<a\\ x-b & a<x<b\\ 0 & x>b\end{cases}$$

Використавши значення інтеграла

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha x}{\alpha}d\alpha=1 \text{ при } x>0,$$

отримаємо

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\alpha x\left(\frac{h}{\alpha}+\frac{\cos\alpha a-\cos\alpha b}{\alpha^2}tg\psi\right)d\alpha=\begin{cases}h & 0<x<a\\ h+(x-a)tg\psi & a<x<b\\ h+(b-a)tg\psi & x>b.\end{cases}$$

Теорема про згортку для перетворення Фур′є. *Функція*

$$f*g=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(\eta)f(x-\eta)d\eta \tag{5.41}$$

називається згорткою функцій f *та* g *на інтервалі* $(-\infty,\infty)$.

За допомогою теорем, що були доведені раніше, цей інтеграл можна подати в іншому вигляді. А саме:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) f(x-\eta) d\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) d\eta \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-it(x-\eta)} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-itx} dt \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) e^{it\eta} d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) G(t) e^{-itx} dt, \qquad (5.42)$$

де F та G — трансформанти Фур'є функцій f та g. Таким чином, ми отримаємо теорему про згортки:

Теорема. *Якщо $F(t)$ та $G(t)$ є трансформантами Фур'є функцій $f(x)$ та $g(x)$, то трансформантою Фур'є добутку FG є згортка $f \cdot g$; інакше кажучи,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t) G(t) e^{-itx} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) f(x-\eta) d\eta.$$

Аналогічні результати можна отримати для синус- та косинус-трансформант функцій $f(x)$ та $g(x)$. Наприклад, якщо косинус-трансформанти функцій $f(x)$ та $g(x)$ визначити через $F_c(t)$ та $G_c(t)$, то отримаємо

$$\int_{0}^{\infty} F_c(t) G_c(t) \cos(xt) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} F_c(t) \cos(xt) dt \int_{0}^{\infty} g(\eta) \cos(\eta t) d\eta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} g(\eta) d\eta \int_{0}^{\infty} F_c(t) \left[\cos|x-\eta| t + \cos(x+\eta) t \right] dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} g(\eta) \left[f(|x-\eta|) + f(x+\eta) \right] d\eta. \qquad (5.43)$$

Аналогічно, якщо $F_s(t)$ та $G_s(t)$ — синус-трансформанти Фур'є $f(x)$ та $g(x)$, то отримаємо

$$\int_{0}^{\infty} F_s(t) G_s(t) \sin(xt) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} F_s(t) \sin(xt) dt \int_{0}^{\infty} g(\eta) \sin(t\eta) d\eta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty g(\eta)\, d\eta \int_0^\infty F_s(t) \left[\cos|x-\eta| t - \cos(x+\eta)t \right] dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty g(\eta) \left[f(|x-\eta|) - f(x+\eta) \right] d\eta \qquad (5.44)$$

та

$$\int_0^\infty F_s(t) G_s(t) \sin(xt)\, dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty f(\eta) \left[g(|x-\eta|) - g(x+\eta) \right] d\eta. \qquad (5.45)$$

Якщо у лівій частині виразу (5.43) вважати, що $x = 0$, то знайдемо

$$\int_0^\infty F_c(t) G_c(t) dt = \int_0^\infty F_c(t) dt \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty g(\eta) \cos(t\eta)\, d\eta =$$

$$= \int_0^\infty g(\eta)\, d\eta \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_c(t) \cos(t\eta)\, dt = \int_0^\infty f(\eta) g(\eta)\, d\eta, \qquad (5.46)$$

та у частковому випадку, коли f та g співпадають, будемо мати

$$\int_0^\infty \left[F_c(t) \right]^2 dt = \int_0^\infty \left[f(\eta) \right]^2 d\eta. \qquad (5.47)$$

Аналогічні формули

$$\int_0^\infty F_s(t) G_s(t)\, dt = \int_0^\infty f(\eta) g(\eta)\, d\eta, \qquad (5.48)$$

$$\int_0^\infty \left[F_s(t) \right]^2 dt = \int_0^\infty \left[f(\eta) \right]^2 d\eta \qquad (5.49)$$

можна легко отримати для синус-трансформант Фур′є. Відповідна формула для трансформант Фур′є лише трохи відрізняється від попередніх, а саме:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)G(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta)e^{i\eta t}d\eta =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta)d\eta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{i\eta t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(-\eta)g(\eta)d\eta. \qquad (5.50)$$

Зауважимо, що співвідношення (5.50) можна отримати з (5.42) підстановкою $x = 0$. У зв'язку з тим, що формули (5.47) та (5.49) аналогічні до формули Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)\right]^2 dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

з теорії рядів Фур'є, формули (5.46) - (5.50) називаються *співвідношеннями Парсеваля для трансформант Фур'є.*

Ці формули можна використовувати для простих розрахунків деяких інтегралів. Наприклад, у рівностях (5.40) було показано, що косинус-трансформантами Фур'є функцій

$$f(x) = e^{-bx}, \quad g(x) = e^{-\alpha x}$$

є відповідно

$$F_c(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{b}{b^2+t^2}, \qquad G_c(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2+t^2}.$$

Підставляючи ці функції у вираз (5.46), знайдемо

$$\frac{2ab}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{dt}{(\alpha^2+b^2)(b^2+t^2)} = \int_0^{\infty} e^{-(a+b)\eta}d\eta = \frac{1}{\alpha+b},$$

звідки отримаємо значення інтегралу

$$\int_0^{\infty}\frac{dt}{(\alpha^2+b^2)(b^2+t^2)} = \frac{\pi}{2ab(\alpha+b)}$$

звідки отримаємо значення інтеграла

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(a^2+t^2)(b^2+t^2)} = \frac{\pi}{2ab(a+b)}\,. \tag{5.51}$$

Візьмемо для наступного прикладу

$$f(x) = \begin{cases} 1, 0 < x < \lambda \\ 0, x > \lambda \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, 0 < x < \mu \\ 0, x > \mu \end{cases}$$

та зауважимо, що

$$F_c(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin \lambda t}{t}, G_c(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin \mu t}{t}\ ,$$

за допомогою виразу (5.46) одержуємо

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\lambda t)\sin(\mu t)}{t^2}dt = \frac{\pi}{2}\int_0^{\min(\lambda,\mu)} d\eta = \frac{\pi}{2}\min(\lambda,\mu)\,, \tag{5.52}$$

де $\min(\lambda, \mu)$ позначає менше з двох додатніх чисел λ та μ. Далі, якщо у виразі (5.46) брати $g(x) = e^{-\alpha x}, f(x) = 1$ при $0 < x < \lambda$ та $f(x) = 0$ при $x > \lambda$, то отримаємо

$$\frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(\lambda t)dt}{t(a^2+t^2)} = \int_0^\lambda e^{-a\eta}d\eta\,,$$

що призводить до такого результату

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\lambda t)dt}{t\left(a^2+t^2\right)} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1-e^{-\lambda a}}{a^2}\right). \tag{5.53}$$

Ефективність цього методу обчислення інтегралів можна покращити, якщо зауважити, що для трьох трансформант Фур'є F, G, H функцій f, g, h має місце співвідношення

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)H(t)G(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)G(t)dt\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)e^{i\xi}d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{i\xi t} dt \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) e^{i\eta t} d\eta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) d\eta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{i(\xi+\eta)t} dt .$$

Але ми маємо

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{i(\xi+\eta)t} dt = f(-\xi-\eta) ,$$

так що наприкінці отримаємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t) H(t) G(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) f(-\xi-\eta) d\eta .$$

Співвідношення між трансформантами Фур′є похідних функцій

В деяких задачах з застосуванням теорії перетворення Фур′є для розв′язання крайових задач математичної фізики необхідно виразити трансформанту Фур′є функції $d^r f / dx^r$ через трансформанту Фур′є F функції $f(x)$. За означенням трансформанти Фур′є функції $d^r f / dx^r$ маємо

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^r f}{dx^r} e^{i\alpha x} dx = F^{(r)}(\alpha) .$$

Інтегруючи ліву частину рівності по частинах, отримаємо

$$F^{(r)} = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}} e^{i\alpha x} \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}} (i\alpha) e^{i\alpha x} dx.$$

Припускаючи, що $d^{r-1} f / dx^{r-1}$ прямує до нуля, коли $|x|$ прямує до нескінченності, можна написати

$$F^{(r)} = (-ia) F^{(r-1)}.$$

Застосовуючи це правило та повторно припускаючи, що

$$\lim_{|x|\to\infty} \left(\frac{d^s f}{dx^s} \right) = 0, \quad s = 1,\ 2,\ ....,\ r-1,$$

отримаємо

$$F^{(r)} = (-ia)^r F.$$

Таким чином, можна сформулювати теорему.

Т е о р е м а. *Трансформанта Фур'є функції* $d^r f / dx^r$ *є добутком* $(-i\alpha)^r$ *та трансформанти Фур'є функції* $f(x)$, *якщо перші* $(r-1)$ *похідні від* $f(x)$ *зникають при* $x \to \pm\infty$.

Відповідні вирази для косинус- та синус-трансформант Фур'є не є простими. Визначимо

$$F_c^{(r)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{d^r f}{dx^r} \cos(\alpha x) dx, \; F_s^{(r)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{d^r f}{dx^r} \sin(\alpha x) dx. \tag{5.54}$$

Інтегруючи по частинах, отримаємо

$$F_c^{(r)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{d^{r-1} f}{dx^{r-1}} \cos(\alpha x) \right]_0^\infty + \alpha \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{d^{r-1} f}{dx^{r-1}} \sin(\alpha x) dx.$$

Припускаючи, що

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{d^{r-1} f}{dx^{r-1}} \right) = 0, \quad \lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{d^{r-1} f}{dx^{r-1}} \right) = a_{r-1},$$

останнє співвідношення можна записати у вигляді

$$F_c^{(r)} = -a_{r-1} + \alpha F_s^{(r-1)}. \tag{5.55}$$

Аналогічно з другого виразу (5.54) інтегруванням по частинам знайдемо

$$F_s^{(r)} = -\alpha F_c^{(r-1)}. \tag{5.56}$$

З цих співвідношень безпосередньо випливає, що

$$F_c^{(r)} = -a_{r-1} - \alpha^2 F_c^{(r-2)}. \tag{5.57}$$

Застосовуючи цю формулу вдруге, можна виразити $F_c^{(r)}$ або у вигляді суми величин α та $F_c^{(1)}$, або у вигляді суми величин α та F_c. У формулах з'явиться $F_c^{(1)}$ у тому випадку, коли r непарне; $F_c^{(1)}$ можна замінити на $-a_0 + \alpha F_s$. Таким чином ми отримаємо наступні формули:

$$F_c^{(2r)} = -\sum_{n=0}^{r-1} (-1)^n a_{2r-2n-1} \alpha^{2n} + (-1)^r \alpha^{2r} F_c, \tag{5.58}$$

$$F_c^{(2r+1)} = -\sum_{n=0}^{r} (-1)^n a_{2r-2n} \alpha^{2n} + (-1)^r \alpha^{2r+1} F_s, \tag{5.59}$$

які виражають косинус-трансформанти похідних функції $f(x)$ через косинус- та синус-трансформанти функції $f(x)$.

Аналогічні результати мають місце для синус-трансформант. Якщо з співвідношень (5.55) та (5.56) виключити $F_c^{(r)}$, то отримаємо

$$F_s^{(r)} = \alpha a_{r-2} - \alpha^2 F_s^{(r-2)},$$

звідки випливають формули

$$\begin{aligned} F_s^{(2r)} &= -\sum_{n=1}^{r} (-1)^n a_{2r-2n} \alpha^{2n-1} + (-1)^{r+1} \alpha^{2r} F_s, \\ F_s^{(2r+1)} &= -\sum_{n=1}^{r} (-1)^n a_{2r-2n+1} \alpha^{2n-1} + (-1)^{r+1} \alpha^{2r+1} F_c. \end{aligned} \tag{5.60}$$

Деякі окремі випадки цих формул часто зустрічаються. Наприклад, якщо при $x = 0$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d^3 f}{dx^3} = 0,$$

то

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{d^2 f}{dx^2} \cos(\alpha x) dx = -\alpha^2 F_c$$

та

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{d^4 f}{dx^4} \cos(\alpha x) dx = \alpha^4 F_c.$$

Якщо при $x = 0$

$$f = \frac{d^2 f}{dx^2} = 0,$$

то

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{d^2 f}{dx^2} \sin(\alpha x) dx = -\alpha^2 F_s$$

та

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{d^4 f}{dx^4}\sin(\alpha x)dx = \alpha^4 F_s \cdot$$

Перетворення Лапласа

Формула обернення для перетворення Лапласа

При доведенні теорем ми бачили, що якщо інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx \tag{5.61}$$

є розбіжним, то трансформанта Фур'є функції $f(x)$ не існує. Така ситуація має місце у багатьох випадках, що зацікавлюють нас при розв'язанні певних крайових задач, наприклад, при

$$f(x) = \sin\omega x .$$

У такому випадку вирази (6.38) та (6.38[a]) не визначають трансформанту Фур'є F_α функції $f(x)$. У задачах математичної фізики, де розглядаються перехідні процеси, зустрічаються функції $f(x)$ такого типу; для від'ємних значень x ці функції можна вважати такими, що дорівнюють нулю. Інакше кажучи, для $-\infty < x < 0$ можна вважати $f(x) = 0$. Так як інтеграл (5.61) з такою функцією $f(x)$ розбіжний, то замість неї можна взяти функцію

$$f_1(x) = e^{-\gamma x} f(x) , \tag{5.62}$$

де γ — додатня постійна. Тому що тепер $f_1(x)$ задовольняє умови теореми Фур'є та $f_1 = 0$ при $-\infty < x < 0$, то можна написати

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta x} d\eta \int_0^{\infty} f_1(\xi) e^{-i\xi\eta} d\xi .$$

Підставляючи вираз (5.62) до останньої рівності, будемо мати

$$f(x) = \frac{e^{\gamma x}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta x} d\eta \int_0^{\infty} f(\xi) e^{-(\gamma + i\eta)\xi} d\xi .$$

Далі, вважаючи в цій формулі

$$p = \gamma + i\eta,\ \varphi(p) = \int_0^{\infty} f(\xi) e^{-p\xi} d\xi,\ dp = id\eta ,$$

отримаємо такий результат:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \varphi(p) e^{px} dp. \tag{5.63}$$

Функція $\varphi(p)$ називається трансформантою Лапласа. Тому формула (5.63) виражає $f(x)$ через її трансформанту Лапласа. Це означає, що вона є формулою обернення для перетворення Лапласа. Якщо інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

розбіжний, а інтеграл

$$\int_{0}^{\infty} e^{-cx} |f(x)| dx$$

збігається для деякого додатного значення c, то формула обернення (5.63) справедлива при $\gamma > c$.

Т е о р е м а. *Якщо $\varphi(p)$ — аналітична функція комплексної змінної p та має порядок $O(p^{-k})$ у півплощині $R(p) \geq c$, де c, k — дійсні та $k > 1$, то інтеграл*

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \to \pm\infty} \int_{\gamma - i\varphi}^{\gamma + i\beta} \sqrt{e^{px}} \varphi(p) dp$$

уздовж будь-якої прямої $R(p) = \gamma \geq c$ збігається до функції $f(x)$, яка не залежить від γ та трансформанта Лапласа якої є $\varphi(p)$ при $R(p) > c$. Крім того, функція $f(x)$ неперервна при кожному $x \geq 0, f(0) = 0$ та $f(x)$ має порядок $O(e^{\gamma x})$ для всіх $x \geq 0$.

Т е о р е м а про згортки для перетворення Лапласа. *Припустимо, що $\varphi(p)$ та $\psi(p)$ — трансформанти Лапласа функцій $f(x)$ та $g(x)$, маємо*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \varphi(p) \psi(p) e^{px} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{px} \varphi(p) dp \int_{0}^{\infty} g(y) e^{-py} dy =$$

$$= \int_{0}^{\infty} g(y) dy \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{p(x-y)} \varphi(p) dp.$$

Але

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{p(x-y)} \varphi(p) dp = f(x-y),$$

тому
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{px}\varphi(p)\psi(p)dp=\int\limits_{0}^{\infty} g(y)f(x-y)dy.$$

Зауважимо, що $f(x-y)=0$ при $x-y<0$, тобто при $y>x$. Звідки випливає, що підінтегральний вираз дорівнює нулю для $y>x$. Наприкінці отримаємо
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{px}\varphi(p)\psi(p)dp=\int\limits_{0}^{x} g(y)f(x-y)dy. \tag{5.64}$$

Замінюючи у правій частині виразу (5.64) змінну інтегрування y на $\eta=x-y$, будемо мати
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{px}\varphi(p)\psi(p)dp=\int\limits_{0}^{\infty} f(\eta)g(x-\eta)d\eta. \tag{5.65}$$

Це і є теорема про згортки перетворення Лапласа.

Аналогічно можна записати
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{px}\varphi(p)\psi(-p)dp=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{\infty} f(y)dy\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{p(x-y)}\psi(-p)dp=\int\limits_{m}^{\infty} f(y)g(y-x)dy,$$

де m — більше з двох чисел x та 0. Таким чином, якщо $x\geq 0$, отримаємо
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{px}\varphi(p)\psi(-p)dp=\int\limits_{x}^{\infty} f(y)g(x-y)dy.$$

Співвідношення між трансформантами Лапласа похідних окремої функції

Як і у випадку трансформант Фур`є, трансформанту Лапласа функції $d^r f/dx^r$ можна виразити через трансформанту Лапласа функції $f(x)$. За означенням трансформанти Лапласа маємо
$$\varphi^{(r)}(p)=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{d^r f}{dx^r}e^{-px}dx.$$

Інтегруючи по частинах, знайдемо

$$\varphi^{(r)}(p)=\left[\frac{d^{r-1}f}{dx^{r-1}}e^{-px}\right]_0^\infty+p\int_0^\infty\frac{d^{r-1}f}{dx^{r-1}}e^{-px}dx.$$

Функція, що стоїть у дужках, зникає при підстановці верхньої межі, тому вводимо означення

$$f_0^{(r-1)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{d^{r-1}f}{dx^{r-1}}\right)$$

та отримаємо таке співвідношення:

$$\varphi^{(r)}(p)=-f_0^{(r-1)}+p\varphi^{(r-1)}(p),$$

з якого випливає загальна формула

$$\varphi^{(r)}(p)=-\sum_{n=0}^{r-1}p^n f_0^{(r-n-1)}+p^r\varphi(p).$$

Якщо перші $(r-1)$ похідних від $f(x)$ зникають при $x=0$, то ця рівність набуває вигляду

$$\varphi^{(r)}(p)=p^r\varphi(p)\cdot \tag{5.66}$$

Кратні перетворення Фур′є

Теорію перетворення Фур′є функції однієї змінної можна розповсюдити на функції декількох змінних. Припустимо, наприклад, що $f(x, y)$ — функція двух незалежних змінних x та y; тоді функція f, що розглядається як функція від x, має трансформанту Фур′є

$$\overline{f}(\xi,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)e^{i\xi x}dx\ , \tag{5.67}$$

а функція $\overline{f}(\xi,y)$, що розглядується як функція від y, має трансформанту Фур′є

$$F(\xi,\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f}(\xi,y)e^{i\eta y}dy\ . \tag{5.68}$$

Комбінуючи вирази (5.67) та (5.68), бачимо, що співвідношення між функціями $f(x,y)$ та $F(\xi,\eta)$ має вигляд:

$$F(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)e^{i(\xi x+\eta y)}dxdy\,. \tag{5.69}$$

Кажуть, що $F(\xi,\eta)$ є двовимірною трансформантою Фур'є функції $f(x,y)$. Функцію $f(x,y)$ можна виразити через $\overline{f}(\xi,y)$ за допомогою формули

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{f}(\xi,y)e^{-i\xi x}d\xi\;. \tag{5.70}$$

Аналогично з виразу (7.75) знайдемо, що

$$\overline{f}(\xi,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\xi,\eta)e^{-i\eta y}d\eta\;. \tag{5.71}$$

З співвідношень (7.76) та (7.77) випливає формула

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\xi,\eta)e^{-i(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta\;, \tag{5.72}$$

що є формулою обернення для двовимірного перетворення Фур'є. Знайдемо уявлення для трансформанти Фур'є добутку функцій FG:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(\xi,\eta)G(\xi,\eta)e^{-i(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(\xi,\eta)e^{-i(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(u,v)e^{i(\xi u+\eta v)}dudv\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dudv\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(\xi,\eta)e^{-i[(\xi(x-u)+\eta(y-v)]}d\xi d\eta\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)g(x-u,y-v)dudv\,.$$

Вираз у квадратних дужках за означенням є трансформантою Фур'є функції $G(\xi,\eta)$. Таким чином, ми отримали формули згортки

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi,\eta)G(\xi,\eta)e^{-i(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,\ \upsilon)g(x-u,\ y-\upsilon)dud\upsilon. \tag{5.73}$$

Перетворення Ханкеля

Теорема обернення для перетворення Ханкеля

Припустимо, що функція $x^{1/2}J_\nu(x)$ є ядром Фур′є в тому сенсі, що має місце рівність

$$\int_0^\infty (x\alpha)^{1/2} J_\nu(x\alpha)d\alpha \int_0^\infty (\alpha\beta)^{1/2} J_\nu(\alpha\beta) f(\beta)d\beta = f(x)\,. \tag{5.74}$$

Основна теорема, що додає справедливості цій рівності, доводиться за допомогою деяких допоміжних теорем. Перша з них формулюється таким чином:

Т е о р е м а. *Якщо λ — деяке додатнє скінченне число, то*

$$\int_0^\lambda xJ_\nu(ax)J_\nu(bx)dx = \frac{\lambda}{a^2-b^2}\left[aJ_{\nu+1}(\lambda a)J_\nu(\lambda b) - bJ_{\nu+1}(\lambda b)J_\nu(\lambda a)\right].$$

Введемо означення

$$I_\nu(\varepsilon) = \int_\varepsilon^\lambda xJ_\nu(ax)J_\nu(bx)dx = \int_\varepsilon^\lambda x^{\nu+1}J_\nu(ax)x^{-\nu}J_\nu(bx)dx$$

та користуючись відомими формулами з теорії бесселевих функцій

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right] = x^\nu J_{\nu-1}(x)\,, \qquad \frac{d}{dx}\left[x^{-\nu}J_\nu(x)\right] = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)\,,$$

за допомогою інтегрування по частинах знайдемо

$$I_\nu(\varepsilon) = \left[\frac{1}{a}x^{\nu+1}J_{\nu+1}(ax)x^{-\nu}J_\nu(bx)\right]_\varepsilon^\lambda + \frac{b}{a}\int_\varepsilon^\lambda x^{\nu+1}J_{\nu+1}(ax)x^{-\upsilon}J_{\nu+1}(bx)dx =$$

$$= \left[\frac{x}{a}J_{\nu+1}(ax)J_\nu(bx)\right]_\varepsilon^\lambda + \frac{b}{a}\int_\varepsilon^\lambda xJ_{\nu+1}(ax)J_{\nu+1}(bx)dx.$$

При прямуванні ε до нуля, отримуємо

$$I_\nu = \frac{\lambda}{a} J_{\nu+1}(a\lambda) J_\nu(b\lambda) + \frac{b}{a} I_{\nu+1}, \tag{5.75}$$

де враховуємо, що

$$I_\nu = \lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon(\nu).$$

Величини I_ν та $I_{\nu+1}$ симетричні відносно a та b. Змінюючи a та b місцями в співвідношенні (5.75), ми приходимо до такого результату:

$$I_\nu = \frac{\lambda}{b} J_{\nu+1}(b\lambda) J_\nu(a\lambda) + \frac{a}{b} I_{\nu+1}. \tag{5.76}$$

Виключаючи $I_{\nu+1}$ із співвідношень (5.75) та (5.76) отримаємо

$$I_\nu = \frac{\lambda}{a^2 - b^2}[aJ_{\nu+1}(\lambda a) J_\nu(\lambda b) - bJ_{\nu+1}(\lambda b) J_\nu(\lambda a)], \tag{5.77}$$

що і доводить теорему.

Якщо ввести означення

$$H_\nu(\alpha, \beta) = \int_0^\lambda J_\nu(xu)(xu)^{1/2} du \int_\beta^\alpha J_\nu(uy)(uy)^{1/2} f(y) dy, \tag{5.78}$$

то

$$\int_0^\lambda J_\nu(xu)(xu)^{1/2} du \int_0^\infty J_\nu(uy)(uy)^{1/2} f(y) dy =$$

$$= H_\nu(\infty, x+\delta) + H_\nu(x+\delta, x) + H_\nu(x, x-\delta) + H_\nu(x-\delta, 0). \tag{5.79}$$

Тепер необхідно дослідити поведінку $H_\nu(\alpha, \beta)$ при прямуванні λ до нескінченності.

Теорема. *Якщо δ — мале додатне число, то $H_\nu(x-\delta, 0) \to 0$, $H_\nu(\infty, x+\delta) \to 0$ при $\lambda \to \infty$ в припущенні, що інтеграл*

$$\int_0^\infty f(y) dy$$

є абсолютно збіжний.

За означенням маємо

$$H_\nu(x-\delta,0)=\int_0^\lambda J_\nu(xu)(xu)^{1/2}du\int_0^{x-\delta} J_\nu(uy)(uy)^{1/2}f(y)dy=$$

$$=x^{1/2}\int_0^{x-\delta} y^{1/2}f(y)dy\int_0^\lambda J_\nu(xu)J_\nu(yu)udu\ .$$

Інтеграл в правій частині рівності можна обчислити за допомогою попередньої теореми. Як результат отримаємо

$$H_\nu(x-\delta,0)=x^{1/2}\lambda\int_0^{x-\delta}\frac{xJ_{\nu+1}(\lambda x)J_\nu(\lambda y)-yJ_{\nu+1}(\lambda y)J_\nu(\lambda x)}{x^2-y^2}y^{1/2}f(y)dy\ .$$

Для $z>>1$ можна записати

$$J_\nu(z)=\frac{A\cos z-B\sin z}{z^{1/2}}+O(z^{-3/2})\,, \tag{5.80}$$

і тому

$$H_\nu(x-\delta,0)=O(\lambda^{1/2})\int_0^{x-\delta}J_\nu(\lambda y)y^{1/2}(x^2-y^2)^{-1}f(y)dy+$$

$$+O(\lambda^{1/2})\int_0^{x-\delta}J_{\nu+1}(\lambda y)y^{3/2}(x^2-y^2)^{-1}f(y)dy$$

для будь-яких фіксованих x та δ. Далі,

$$\int_0^{x-\delta}y^{1/2}J_\nu(\lambda y)\frac{f(y)}{x^2-y^2}dy=\int_{1/\lambda}^{x-\delta}y^{1/2}J_\nu(\lambda y)\frac{f(y)}{x^2-y^2}dy+\int_0^{1/\lambda}y^{1/2}J_\nu(\lambda y)\frac{f(y)}{x^2-y^2}dy$$

та

$$\int_0^{1/\lambda}y^{1/2}J_\nu(\lambda y)\frac{f(y)}{x^2-y^2}dy=O\left[\int_0^{1/\lambda}(\lambda y)^\nu y^{1/2}\,|\,f(y)\,|\,dy\right]=O\left[\lambda^\nu\int_0^{1/\lambda}y^{\nu+1/2}\,|\,f(y)\,|\,dy\right]=$$

$$=O\left[\lambda^{-1/2}\int_0^{1/\lambda}|\,f(y)\,|\,dy\right]=O(\lambda^{-1/2})\,,$$

якщо інтеграл

$$\int_0^\infty |f(y)|\,dy$$

збіжний, тобто якщо інтеграл

$$\int_0^\infty f(y)dy$$

є абсолютно збіжним. Користуючись виразом (5.80), знайдемо

$$\int_{1/\lambda}^{x-\delta} J_\nu(\lambda y)\frac{y^{1/2} f(y)}{x^2-y^2}dy = \lambda^{-1/2}\int_{1/\lambda}^{x-\delta}\left(A\cos\lambda y + B\sin\lambda y\right)\frac{f(y)dy}{x^2-y^2} = O\left(\lambda^{-1/2}\right).$$

По-іншому,

$$H_\nu(x-\delta,0) = O(\lambda^{-1/2}), \tag{5.81}$$

так що

$$H_\nu(x-\delta,0)\to 0 \tag{5.82}$$

при $\lambda\to\infty$. Доведення того, що

$$H_\nu(\infty, x+\delta)\to 0$$

при $\lambda\to\infty$ здійснюється аналогичним чином, але простіше, так як у цьому випадку y не є малою величиною.

Т е о р е м а. *Якщо* $f(y)$ *— функція з обмеженим змінюваннєм у інтервалі* $(x-\delta,\ x+\delta)$, *де* δ *— мале, та якщо* $\nu >> -1/2$, *то*

$$H_\nu(x+\delta, x)\to\frac{1}{2}f(x+0) \qquad H_\nu(x, x-\delta)\to\frac{1}{2}f(x-0)$$

при $\lambda\to\infty$ *та* $\delta\to 0$.

Справді, якщо $f(y)$ — функція з обмеженим змінюванням у інтервалі $(x-\delta,\ x+\delta)$, то і $y^{-\nu-1/2}f(y)$ буде функцією з обмеженим змінюванням у інтервалі $(x < y\le x+\delta)$, та ми маємо написати

$$y^{-\nu-\frac{1}{2}}f(y)=x^{-\nu-\frac{1}{2}}f(x+0)+\chi_1(y)-\chi_2(y),$$

де $\chi_1(y),\chi_2(y)$ — додатні зростаючі функції, кожна з яких менш ніж деяке додатне число ε, що залежить від δ. Тому

$$H_\nu(x+\delta,x)=x^{-\nu-\frac{1}{2}}f(x+0)\int_0^\lambda J_\nu(xu)udu\int_x^{x+\delta}J_\nu(yu)y^{\nu+1}dy+$$

$$+x^{1/2}\int_0^\lambda uJ_\nu(xu)du\int_x^{x+\delta}J_\nu(yu)y^{\nu+1}\left[\chi_1(y)-\chi_2(y)\right]dy.$$

Відповідно до теореми, перший член дає

$$x^{-\nu}f(x+0)\int_0^\lambda J_\nu(xu)\left[J_{\nu+1}(xu+\delta u)(x+\delta)^{\nu+1}-J_{\nu+1}(xu)x^{\nu+1}\right]du=$$

$$=x^{-\nu}f(x+0)\left[(x+\delta)^{\nu+1}\int_0^\lambda J_\nu(xu)J_{\nu+1}(xu+\delta u)du-x^{\nu+1}\int_0^\lambda J_\nu(xu)J_{\nu+1}(xu)du\right].$$

Відомо, що

$$\int_0^\infty J_\nu(ax)J_{\nu+1}(x)dx=\begin{cases}a^\nu,\ 0<a<1\\ \dfrac{1}{2},\ a=1\\ 0,\ a>1\end{cases}$$

і тому при $\lambda\to\infty$ цей член прямує до значення

$$x^{-\nu}f(x+0)(x^\nu-\frac{1}{2}x^\nu)=\frac{1}{2}f(x+0)\,. \tag{5.83}$$

Член, що включає функцію $\chi_1(y)$, дає

$$x^{1/2}\int_0^\lambda J_\nu(xu)udu\int_x^{x+\delta}J_\nu(uy)y^{\nu+1}\chi_1(y)dy=x^{1/2}\chi_1(x+\delta)\int_\xi^{x+\delta}y^{\nu+1}dy\int_0^\lambda J_\nu(xu)J_\nu(yu)udu=$$

$$=x^{1/2}\chi_1(x+\delta)\int_0^\lambda J_\nu(xu)udu\int_\xi^{x+\delta}y^{\nu+1}J_\nu(yu)dy,\ x<\xi<x+\delta.$$

Далі, маємо

$$\int_\xi^{x+\delta}y^{\nu+1}J_\nu(yu)dy=\frac{1}{u}\left[(x+\delta)^{\nu+1}J_{\nu+1}(xu+\delta u)-\xi^{\nu+1}J_{\nu+1}(\xi u)\right],$$

і тому

$$x^{1/2}\int_0^{\lambda} uJ_{\nu}(xu)du\int_x^{x+\delta} y^{\nu+1}\chi_1(y)J_{\nu}(uy)dy=$$

$$=x^{1/2}\chi_1\,(x+\delta)\int_0^{\lambda} J_{\nu}(xu)du\left[(x+\delta)^{\nu+1}J_{\nu+1}(xu+\delta u)-\xi^{\nu+1}J_{\nu+1}(\xi u)\right]=$$

$$=x^{1/2}(x+\delta)^{\nu+1}\chi_1(x+\delta)\int_0^{\lambda} J_{\nu}(xu)J_{\nu+1}(xu+\delta u)du-x^{1/2}\xi^{\nu+1}\chi_1(x+\delta)\int_0^{\lambda} J_{\nu}(xu)J_{\nu+1}(\xi u)du.$$

Тепер, якщо $x \ge x_0 > 0, y \ge x_0, \nu \ge -1/2$, то

$$\int_0^{\lambda} J_{\nu}(xu)J_{\nu+1}(yu)du=O(1)$$

для всіх значень λ. Тому вклад члена, що включає $\chi_1(y)$, має порядок ε та прямує до нуля при $\delta \to 0$ та будь-якому λ.

Аналогічним чином вклад від інтегралу, що включає $\chi_2(x)$, прямує до нуля при $\delta \to 0$ та $\lambda \to \infty$. Тому з співвідношення (5.83) маємо

$$\mathrm{H}_{\nu}\left(x+\delta,x\right)\to\frac{1}{2}f\left(x+0\right) \tag{5.84}$$

при $\delta \to 0$ та $\lambda \to \infty$. Другу частину теореми про те, що

$$\mathrm{H}_{\nu}\left(x,x-\delta\right)\to\frac{1}{2}f\left(x-0\right), \tag{5.85}$$

при $\delta \to 0$ та $\lambda \to \infty$ можна довести таким же чином. Тепер маємо можливість довести основну теорему.

Т е о р е м а. *Якщо інтеграл*

$$\int_0^{\infty} f\left(y\right)dy$$

є абсолютно збіжним та якщо $f\left(y\right)$ *— функція з обмеженим змінюванням поблизу точки* x*, то для* $\nu \ge -\frac{1}{2}$ *має місце рівність*

$$\int_0^{\infty} J_{\nu}\left(xu\right)\left(xu\right)^{1/2}du\int_0^{\infty} J_{\nu}\left(uy\right)\left(uy\right)^{1/2}f\left(y\right)dy=\frac{1}{2}\left[f\left(x+0\right)+f\left(x-0\right)\right].$$

Цю теорему можна довести безпосередньо на базі двох останніх теорем. Записавши

$$\int_0^{\lambda} J_\nu(xu)(xu)^{1/2}du\int_0^{\infty} J_\nu(uy)(uy)^{1/2} f(y)dy =$$

$$=\mathrm{H}_\nu\left(\infty, x+\delta\right)+\mathrm{H}_\nu\left(x+\delta, x\right)+\mathrm{H}_\nu\left(x, x-\delta\right)+\mathrm{H}_\nu\left(x-\delta, 0\right),$$

а далі вибравши δ таким малим, щоб $f(y)$ була функцією з обмеженим змінюваннєм у інтервалі $x-\delta \le y \le x+\delta$, побачимо, що всі умови теорем виконані, якщо тільки

$$\nu \ge -\frac{1}{2}.$$

Ствердження теореми беспосередньо випливає, якщо спрямувати λ до нескінченності та δ до нуля, а далі використати вирази (5.81) – (5.83).

Якщо функція $f(x)$ в точці x неперервна, тобто

$$f(x+0)=f(x-0)=f(x),$$

то теорема дає таку рівність:

$$\int_0^{\infty} J_\nu(xu)(xu)^{1/2}du\int_0^{\infty} J_\nu(uy)(uy)^{1/2} f(y)dy = f(x). \tag{5.86}$$

Якщо замінити $f(x)$ на $x^{1/2}f(x)$ та ввести означення

$$\overline{f}(u)=\int_0^{\infty} yf(y)J_\nu(uy)dy, \tag{5.87}$$

то рівності (5.86) можна надати інший вигляд:

$$f(u)=\int_0^{\infty} u\overline{f}(u)J_\nu(xu)du. \tag{5.88}$$

Функція $\overline{f}(u)$ називається трансформантою Ханкеля порядку ν функції $f(x)$.

Доведення теореми обернення Ханкеля

Теорема. *Якщо дійсна частина n більше ніж* -1 *та якщо*

$$f(\lambda)=\int_p^q \varphi(\rho)J_n(\lambda\rho)\rho d\rho\,,\quad 0\le p<q\le\infty,$$

то

$$\int_0^\infty f(\lambda)J_n(\lambda r)\lambda d\lambda=\begin{cases}\varphi(r) & p<r<q\\ 0 & 0<r<p,q<r<\infty\end{cases}.$$

Доведення основної теореми базується на інтегралі Ломеля [1]

$$\left(\lambda^2-\mu^2\right)\int_a^b xU_n(\lambda x)V_n(\mu x)dx=\left[U_n(\lambda x)\mu xV_n'(\mu x)-V_n(\mu x)\lambda xU_n'(\lambda x)\right]_a^b,$$

де U_n та V_n — два розв′язки диференціального рівняння Бесселя. Зауважимо, що інтеграли, що знаходиться у лівій частині рівності, є узагальненням інтегралу, що обчислений у попередній теоремі; цей інтеграл можна обчислити таким же чином. Користуючись співвідношенням, де U_n та V_n замінені на функції Бесселя J_n та G_n першого та другого роду, для яких існують асимптотичні вирази

$$G_n(z)\sim\sqrt{\tfrac{2}{\pi z}}\exp\left[i\left(z+\tfrac{1}{4}\pi\right)-\tfrac{1}{2}n\pi i\right],\ -\pi<\arg(z)<\pi\,, \tag{5.89}$$

$$J_n(z)\sim\sqrt{\tfrac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}n\pi\right)\ -\pi<\arg(z)<\pi\,, \tag{5.90}$$

знайдемо, що при дійсному λ та $\operatorname{Im}(\mu)>0$ має місце рівність

$$\left(\lambda^2-\mu^2\right)\int_0^\infty xJ_n(\lambda x)G_n(\mu x)dx=\left(\tfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \tag{5.91}$$

та при $\operatorname{Im}(\mu)<0$

$$\left(\lambda^2-\mu^2\right)\int_0^\infty xJ_n(\lambda x)G_n\left(\mu xe^{i\pi}\right)dx=\left(\tfrac{\lambda}{\mu}\right)^n e^{-in\pi}\ . \tag{5.92}$$

Розглянемо тепер інтеграл

$$I(r)=\int_0^\infty \lambda f(\lambda)J_n(\lambda r)d\lambda\,, \tag{5.93}$$

де $f(\lambda)$ визначається співвідношенням

$$f(\lambda)=\int_p^q \rho\varphi(\rho)J_n(\rho\lambda)d\rho\,,\quad 0\le p<q\le\infty. \tag{5.94}$$

Підставляючи вирази (5.94) у (5.93), отримаємо

$$I(r)=\int_0^\infty \lambda J_n(\lambda r)\,d\lambda\int_p^q \rho\varphi(\rho)J_n(\lambda\rho)\,d\rho=$$

$$=\int_0^\infty \lambda J_n(\lambda r)\,d\lambda\int_p^q \rho\varphi(\rho)\tfrac{1}{\pi i}\left[G_n(\lambda\rho)-e^{in\pi}G_n\left(\lambda\rho e^{i\pi}\right)\right]d\rho\ ,$$

тому що

$$\pi i J_n(z)=G_n(z)-e^{in\pi}G_n\left(ze^{i\pi}\right).$$

Отже,

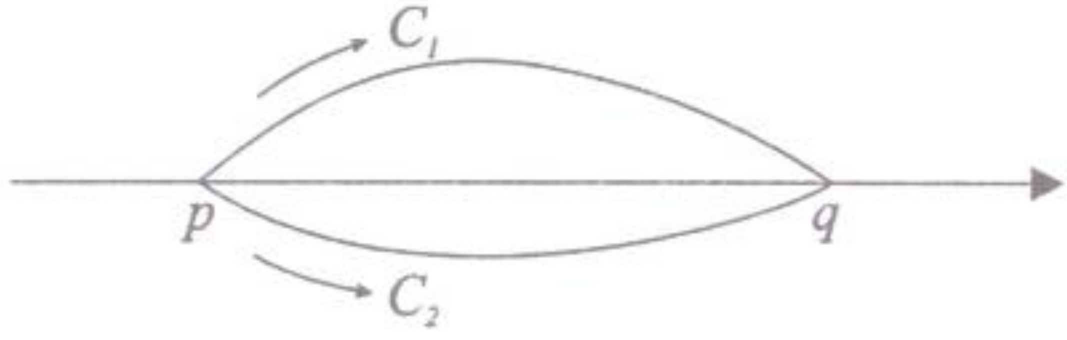
$$I(r)=\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \lambda J_n(\lambda r)\,d\lambda\int_p^q \rho\varphi(\rho)G_n(\lambda\rho)\,d\rho-\frac{e^{in\pi}}{\pi i}\int_0^\infty \lambda J_n(\lambda r)\,d\lambda\int_p^q \rho\varphi(\rho)G_n\left(\lambda\rho e^{i\pi}\right)d\rho=$$

$$=\frac{1}{\pi i}\int_{C_2}\zeta\varphi(\zeta)\,d\zeta\int_0^\infty \lambda J_n(\lambda r)G_n(\lambda\zeta)\,d\lambda-$$

$$-\frac{e^{in\pi}}{\pi i}\int_{C_1}\xi\varphi(\xi)\,d\xi\int_0^\infty \lambda J_n(\lambda J_{\lambda r})G_n\left(\lambda\xi e^{i\pi}\right)d\lambda,$$

де C_1 та C_2 — шляхи, що показані на Рис. 2.

Внутрішні інтеграли можна обчислити за допомогою формул (5.92) та (5.93). Ці формули несправедливі для крайових точок кривих C_1 та C_2, але такі труднощі можна подолати таким чином.



Мал. 2

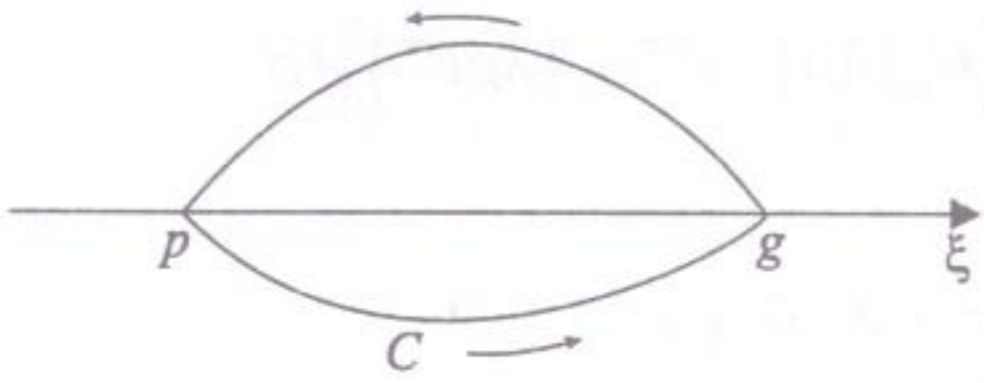
Нехай C_1' та C_2' — криві, що отримують з C_1 та C_2 зрізом з обох кінців невеликих частин. Тоді інтеграли вздовж C_1 та C_2 можна визначити як границі відповідних інтегралів вздовж C_1' та C_2', коли зрізані частини прямують до нуля.

Користуючись таким засобом, отримаємо

$$I(r)=\frac{1}{\pi i}\int_{C_2}\frac{\varphi(\zeta)}{r^2-\zeta^2}\left(\frac{r}{\zeta}\right)^n\zeta\,d\zeta-\frac{1}{\pi i}\int_{C_1}\frac{\varphi(\zeta)}{r^2-\zeta^2}\left(\frac{r}{\zeta}\right)^n\zeta\,d\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\varphi(\zeta)\left(\frac{r}{\zeta}\right)^n\frac{2\zeta}{\zeta+r}\frac{d\zeta}{\zeta-r},$$

де C — замкнений контур між p та q (див. рис. 1). Якщо $\varphi(\zeta)$ — голоморфна функція від ζ у області комплексної площини ζ, що обмежена замкнутим контуром C, то при $p<r<q$ єдиний полюс



підінтегрального виразу усередині C буде у точці $\zeta=r$, якщо же $0<r<p$ або $r>q$, то підінтегральний вираз не має полюсів усередині контура. Тому, застосовуючи теорему Коши, ми знайдемо

$$I(r)=\begin{cases}\varphi(r), & \text{якщо } p<r<q\\ 0, & \text{якщо } 0<r<p \text{ або } r>q\end{cases}.$$

Як приклад застосування формули обернення Ханкеля в такому вигляді наведемо обчислення інтегралу Соніна

$$\int_0^\infty \frac{J_n(\lambda r)J_m(\lambda)}{\lambda^{m-n-1}}d\lambda .$$

Нехай

$$\varphi(\rho)=\frac{2^{1+n-m}}{\Gamma(m-n)}\rho^n\left(1-\rho^2\right)^{m-n-1}.$$

Тоді, по означенню (5.94) при $p=0$, $q=1$ маємо

$$f(\lambda)=\frac{2^{1+n-m}}{\Gamma(m-n)}\int_0^1\rho^{n+1}\left(1-\rho^2\right)^{m-n-1}J_n(\lambda\rho)\,d\rho .$$

Розкладаючи функцію $J_n(\lambda\rho)$ у ряд по зростаючим степеням $\lambda\rho$ та інтегруючи почленно, отримаємо співвідношення

$$f(\lambda)=\frac{2^{1+n-m}}{\Gamma(m-n)}\sum_{s=0}^{\infty}\int_0^1\rho^{n+1}\left(1-\rho^2\right)^{m-n-1}\frac{(-1)^s(\lambda\rho)^{n+2s}\,d\rho}{2^{n+2s}s!\Gamma(n+s+1)},$$

яке при підстановці $\xi=\rho^2$ прийме вигляд

$$f(\lambda)=\frac{1}{\Gamma(m-n)}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\lambda^{n+2s}}{2^{m+2s}}\int_0^1\xi^{n+s}(1-\xi)^{m-n-1}\frac{(-1)^s\,d\xi}{s!\Gamma(n+s+1)}=$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \lambda^{m+2s}}{2^{m+2s}\Gamma(m+s+1)} \frac{\lambda^{n-m}}{s!} = \lambda^{n-m} J_m(\lambda). \qquad (5.95)$$

Враховуючи формули (5.94) та (5.95) та користуючись даною теоремою, отримаємо результат Соніна

$$\int_0^{\infty} \frac{J_m(\lambda) J_n(\lambda r)}{\lambda^{m-n-1}} d\lambda = \begin{cases} \dfrac{r^n \left(1-r^2\right)^{m-n-1}}{2^{m-n-1}\Gamma(m-n)} & \text{при } 0 < r < 1 \\ 0 & \text{при } r > 1 \end{cases}$$

припускаючи, що дійсна частина n більше ніж – 1.

Інші форми інтегральної формули Фур′є-Бесселя

Формули обернення відповідають звичайній теоремі розкладення Фур′є — Бесселя у теорії бесселевих функцій. Існує також і друга теорема розкладення Фур′є — Бесселя, що має вигляд:

$$f(\lambda) = \sum_s A_s T_n(r_s, \lambda), \qquad (5.96)$$

де

$$T_n(r, \lambda) = J_n(r\lambda) G_n(ra) - G_n(r\lambda) J_n(ra),$$

де r_s — додатній корінь трансцендентного рівняння

$$T_n(r, b) = 0. \qquad (5.97)$$

Коефіцієнт A_s визначається виразом

$$A_s = \frac{2r_s^2 J_n^2(r_s b)}{J_n^2(ar_s) - J_n^2(br_s)} \int_a^b u f(u) T_n(r_s, u) du.$$

Сума ряду перетворюється до нуля для $\lambda = a$ та $\lambda = b$ та дорівнює

$$\frac{1}{2}\left[f(\lambda+0) + f(\lambda-0)\right] \quad \text{для} \quad a < \lambda < b.$$

Відповідну інтегральну теорему можна сформулювати таким чином:

Т е о р е м а. *Якщо*

$$f(\lambda) = \int_p^q \rho \varphi(\rho) T_n(\rho, \lambda) d\rho, \text{ то}$$

$$\int_a^\infty \lambda f(\lambda) T_n(r,\lambda)\, d\lambda = \begin{cases} \frac{1}{2} B_n(ra)\left[\varphi(r+0)+\varphi(r-0)\right] & p<r<q \\ 0 & 0<r<p \text{ або } r>q \end{cases}$$

де функція $B_n(z)$ *визначається виразом*

$$B_n(z) = \left(\frac{1}{2}\pi \operatorname{cosec}(n\pi)\right)^2 \left[J_n^2(z) - 2J_n(z)J_{-n}(z)\cos(n\pi) + J_{-n}^2(z)\right].$$

Цю теорему можна довести методом контурного інтегрування. В розглянутому випадку доведення методом інтеграла Діріхле є також простим. Тому що нам потрібно лише припустити, що функція $\varphi(\rho)$ задовільняє умовам Діріхле, то результат буде більш загальним, ніж при доведенні методом контурного інтегрування.

Введемо означення

$$I = \left(r^2 - \rho^2\right) \int_a^h T_n(r,\lambda) T_n(\rho,\lambda) \lambda\, d\lambda$$

та, користуючись співвідношенням, що базується на інтегралі Ломмеля, та рекурентними співвідношеннями

$$xJ_n'(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x), \quad xG'(x) = nG_n(x) - xG_{n+1}(x)$$

отримаємо, що

$$I = rhT_n(\rho,h)\left[J_{n+1}(rh)G_n(ra) - G_{n+1}(rh)J_n(ra)\right] -$$

$$-\rho h T_n(r,h)\left[J_{n+1}(\rho h)G_n(\rho a) - G_{n+1}(\rho h)J_n(\rho a)\right].$$

Замінюючи усі бесселеві функції у правій частині, до яких надходить h, їх асимптотичними виразами, знайдемо

$$I = \frac{\rho - r}{2\pi (r\rho)^{1/2}} e^{in\pi}\left[e^{i(\rho+r)h} G_n\left(rae^{i\pi}\right) G_n\left(\rho a e^{i\pi}\right) + e^{-i(\rho+r)h} G_n(ra) G_n(\rho a)\right] +$$

$$+\frac{\rho + r}{2\pi (r\rho)^{1/2}} e^{in\pi}\left[ie^{i(\rho-r)h} G_n(ra) G_n\left(\rho a e^{i\pi}\right) - ie^{-i(\rho-r)h} G_n\left(rae^{i\pi}\right) G_n(\rho a)\right] + \frac{P}{h},$$

де P є скінченним для будь-якого значення h та має $(\rho - r)$ у вигляді множника. Звідки

$$\lim_{h\to\infty}\int_p^q \rho\varphi(\rho)\,d\rho\int_a^h T_n(r,\lambda)T_n(\rho,\lambda)d\lambda = \lim_{h\to\infty}\left\{\int_p^q \frac{\rho\varphi(\rho)}{2\pi(r\rho)^{1/2}}\frac{\sin(\rho-r)h}{\rho-r}\times\right.$$

$$\left.\times\, e^{in\pi}\left[G_n(ra)G_n\left(\rho ae^{i\pi}\right)+G_n\left(rae^{i\pi}\right)G_n(\rho a)\right]d\rho + J\right\},$$

тут через J означимо інтеграли, що прямують до нуля при прямуванні h до нескінченності.

Застосовуючи теорему Діріхле, будемо мати

$$\lim_{h\to\infty}\int_p^q \rho\varphi(\rho)\,d\rho\int_a^h T_n(r,\lambda)T_n(\rho,\lambda)d\lambda =$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[\varphi(r+0)+\varphi(r-0)\right]e^{in\pi}G_n(ra)G_n\left(rae^{i\pi}\right), & \text{якщо } p<r<q,\\ 0 & \text{якщо } 0<r<p \text{ або } r>q.\end{cases}$$

Змінюючи порядок інтегрування та зауважуючи, що

$$e^{in\pi}G_n(ra)G_n\left(rae^{i\pi}\right)=B_n(ra),$$

бачимо, що теорема доведена.

Інша інтегральна теорема пов'язана з використанням рядів Каптейна, відомих з теорії бесселевих функцій.

Теорема. *Якщо*

$$f(\lambda)=\int_p^q \rho\varphi(\rho)J_\rho(\rho\lambda)\,d\rho, \quad 0\le p\le q, \text{ то}$$

$$\int_0^\infty\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)f(\lambda)J_m(m\lambda)\,d\lambda = \begin{cases}\frac{1}{2}\left[\varphi(m+0)+\varphi(m-0)\right], & p<m<q\\ 0, & 0<m<p \text{ або } m>q.\end{cases}$$

Доводиться теорема за допомогою інтегралів Діріхле. Доведення за допомогою контурного інтегрування можна також провести. З інтеграла Ломмеля випливає

$$\left(m^2-\rho^2\right)\int_a^b\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)U_m(m\lambda)V_\rho(\rho\lambda)\,d\lambda = \left\{\lambda\left[U_m(m\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}V_\rho(\rho\lambda)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-V_\rho(\rho\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}U_m(m\lambda)\right]\right\}_a^b,$$

за допомогою рекурентного співвідношення

$$\frac{d}{dx}J_n(x)=\frac{n}{x}J_n(x)-J_{n+1}(x)$$

отримаємо

$$\int_0^h\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)J_m(m\lambda)J_\rho(\rho\lambda)d\lambda=\frac{h}{\rho^2-m^2}\left[\rho J_m(mh)J_{\rho+1}(\rho h)-\right.$$

$$\left.-mJ_\rho(\rho h)J_{m+1}(mh)\right]-\frac{1}{\rho+m}J_m(mh)J_\rho(\rho h). \tag{5.98}$$

При заміні бесселевих функцій у правій частині рівності їх асимптотичними уявленнями отримуємо

$$I=\frac{2}{\pi\left(\rho^2-m^2\right)(\rho m)^{1/2}}\left\{(\rho+m)\sin\left[(\rho-m)\left(h-\frac{1}{2}\pi\right)\right]-\right.$$

$$\left.-(\rho-m)\sin\left[(\rho+m)\left(h-\frac{1}{2}\pi\right)\right]\right\}+\frac{P}{h},$$

де P — залишається скінченним при прямуванні h до нескінченності. Тому за доведеною раніше теоремою

$$\lim_{h\to\infty}\int_p^q\rho\varphi(\rho)d\rho\int_0^h\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)J_m(m\lambda)J_\rho(\rho\lambda)d\lambda=$$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{h\to\infty}\int_p^q\left(\frac{\rho}{m}\right)^{1/2}\varphi(\rho)\frac{\sin\left[(\rho-m)\left(h-\frac{1}{2}\pi\right)\right]}{\rho-m}d\rho-$$

$$-\frac{2}{\pi}\lim_{h\to\infty}\int_p^q\left(\frac{\rho}{m}\right)^{1/2}\varphi(\rho)\frac{\sin\left[(\rho+m)\left(h-\frac{1}{2}\pi\right)\right]}{\rho+m}d\rho=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[\varphi(m+0)+\varphi(m-0)\right], & \text{якщо } p<m<q,\\ 0 & \text{якщо } 0<m<p \text{ або m} >q.\end{cases}$$

Змінюючи порядок інтегрування, доведемо початкову теорему.

Розглянемо приклад застосування теореми обернення. Відома формула

$$\int_0^\infty u^n e^{-\lambda u} J_m(\rho u)\,du = \frac{(n+m)!}{\left(\lambda^2+\rho^2\right)^{(n+1)/2}} P_n^{-m}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\rho^2}}\right), \quad m \ge n\,.$$

Візьмемо $\lambda = a$, $\rho = m$, $n = 0$, тоді попередня формула набуде вигляду

$$\int_0^\infty e^{-a\lambda} J_m(m\lambda)\,d\lambda = \frac{(m)!}{\left(a^2+m^2\right)^{1/2}} P_0^{-m}\left(\frac{a}{\sqrt{m^2+a^2}}\right), \quad m \ge 0\,.$$

Враховуючи означення $P_n^{-m}(z)$, запишемо початкове співвідношення так:

$$\int_0^\infty e^{-a\lambda} J_m(m\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{\left(a^2+m^2\right)^{1/2}}\left(\frac{\sqrt{m^2+a^2}-a}{m}\right)^m, \; a>0 \; m \ge 0\,.$$

Із теореми обернення випливає, що

$$\int_0^\infty \frac{\rho J_\rho(\rho\lambda)}{\sqrt{a^2+\rho^2}}\left(\frac{\sqrt{a^2+\rho^2}-a}{\rho}\right)^\rho d\rho = \frac{\lambda}{\lambda^2-1}e^{-a\lambda}, \; \lambda \ge 0\,.$$

У випадках, коли a прямує до нуля, отримаємо такі формули

$$\int_0^\infty J_m(m\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{m}, \quad m>0$$

$$\int_0^\infty J_\rho(\rho\lambda)\,d\rho = \frac{\lambda}{\lambda^2-1}, \quad \lambda \ge 0\,.$$

Теорема Парсеваля для трансформант Ханкеля

Теорма про згортки, що існує для перетворення Фур'є та Лапласа, відсутня для перетворення Ханкеля. Але можна отримати досить просту теорему типу теореми Парсеваля.

Нехай $\overline{f}(u)$ та $\overline{g}(u)$ трансформанти Ханкеля функцій $f(x)$ та $g(x)$. Тоді, користуючись означенням $\overline{g}(u)$, можна записати

$$\int_0^\infty u\bar{f}(u)\bar{g}(u)du = \int_0^\infty u\bar{f}(u)du\int_0^\infty xg(x)J_\nu(ux)dx.$$

Змінюючи порядок інтегрування, знайдемо

$$\int_0^\infty u\bar{f}(u)\bar{g}(u)du = \int_0^\infty xg(x)dx\int_0^\infty u\bar{f}(u)J_\nu(ux)du = \int_0^\infty xf(x)g(x)dx.$$

Теорема. *Якщо $f(x)$ та $g(x)$ задовольняють умови теореми обернення та якщо $\bar{f}(u)$ та $\bar{g}(u)$ їх трансформанти Ханкеля порядка $\nu \geq -1/2$, то має місце рівність*

$$\int_0^\infty xf(x)g(x)dx = \int_0^\infty u\bar{f}(u)\bar{g}(u)du.$$

Трансформанти Ханкеля похідних функції

Нехай $\bar{f}_\nu(\xi)$ — трансформанта Ханкеля порядка ν функції $f(r)$, тобто

$$\bar{f}_\nu(\xi) = \int_0^\infty rf(r)J_\nu(\xi r)dr,$$

за означенням трансформантою Ханкеля функції df/dr буде функція

$$\bar{f}_\nu'(\xi) = \int_0^\infty r\frac{df}{dr}J_\nu(\xi r)dr.$$

Інтегрування по частинах дає

$$\bar{f}_\nu'(\xi) = \left[rf(r)J_\nu(\xi r)\right]_0^\infty - \int_0^\infty f(r)\frac{d}{dr}\left[rJ_\nu(\xi r)\right]dr. \qquad (5.99)$$

Але

$$\frac{d}{dr}[rJ_\nu(\xi r)] = J_\nu(\xi r) + \xi\, r J_\nu'(\xi r),$$

та другий член у правій частині набуває вигляду

$$\xi\, r\, J_{\nu-1}(\xi r) - \nu J_\nu(\xi r),$$

так що

$$\frac{d}{dr}[rJ_\nu(\xi r)] = (1-\nu)J_\nu(\xi r) + \xi r J_{\nu-1}(\xi r).$$

Підставляючи цей вираз до рівності (5.99) та припускаючи, що $rf(r)$ прямує до нуля при прямуванні r до нуля або до нескінченності, отримаємо

$$\overline{f}_\nu'(\xi) = (\nu-1)\int_0^\infty f(r)J_\nu(\xi r)dr - \xi\overline{f}_{\nu-1}(\xi). \tag{5.100}$$

Перший член справа є трансформантою Ханкеля порядку ν функції $f(r)/r$, але його можна виразити через трансформанти Ханкеля порядків $\nu \pm 1$ функції $f(r)$. Дійсно, відомо, що

$$\begin{aligned} 2\nu\int_0^\infty f(r)J_\nu(\xi r)dr &= \xi\left[\int_0^\infty rf(r)J_{\nu-1}(\xi r)dr + \int_0^\infty rf(r)J_{\nu+1}(\xi r)dr\right] = \\ &= \xi\overline{f}_{\nu-1}(\xi) + \xi f_{\nu+1}(\xi). \end{aligned} \tag{5.101}$$

Виключаючи інтеграл

$$\int_0^\infty f(r)J_\nu(\xi r)dr \tag{5.102}$$

з співвідношень (5.100) та (5.101), знайдемо

$$\overline{f}_\nu'(\xi) = -\xi\left[\frac{\nu+1}{2\nu}\overline{f}_{\nu-1}(\xi) - \frac{\nu-1}{2\nu}\overline{f}_{\nu+1}(\xi)\right]. \tag{5.103}$$

Формули для трансформант Ханкеля похідних вищого порядку можна отримати шляхом послідовного застосування формули (5.103). Наприклад,

$$f_\nu''(\xi) = -\left[\frac{\nu+1}{2\nu}\overline{f}_{\nu-1}'(\xi) - \frac{\nu-1}{2\nu}\overline{f}_{\nu+1}'(\xi)\right], \tag{5.104}$$

так що, підставляючи значення $\overline{f}_{\nu-1}'(\xi), \overline{f}_{\nu+1}'(\xi)$ з співвідношення (5.103), отримаємо

$$\overline{f}_\nu''(\xi) = \frac{1}{4}\xi^2\left[\frac{\nu+1}{\nu-1}\overline{f}_{\nu-2}(\xi) - 2\frac{\nu^2-3}{\nu^2-1}f_\nu(\xi) + \frac{\nu-1}{\nu+1}\overline{f}_{\nu+2}(\xi)\right]. \tag{5.105}$$

Далі, інтегруючи по частинах, будемо мати

$$\int_0^\infty r\frac{d^2 f}{dr^2}J_\nu(\xi r)dr = -\int_0^\infty \frac{df}{dr}\frac{d}{dr}[rJ_\nu(\xi r)]dr,$$

якщо $rf'(r)$ прямує до нуля при прямуванні r до нуля або до нескінченності. Тому

$$\int_0^\infty r\left(\frac{d^2 f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}\right)J_\nu(\xi r)dr = -\xi\int_0^\infty \frac{df}{dr}rJ'_\nu(\xi r)dr = \xi\int_0^\infty f(r)\frac{d}{dr}\left[rJ'_\nu(r)\right]dr,$$

вважаючи, що $rf(r)$ зникає при $r=0$ та $r=\infty$. За означенням функція Бесселя $J_\nu(\xi r)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\xi\frac{d}{dr}\left[rJ_\nu(\xi r)\right] = -(\xi^2-\frac{\nu^2}{r^2})rJ_\nu(\xi r),$$

а тому має місце співвідношення

$$\int_0^\infty r\left(\frac{d^2 f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}-\frac{\nu^2}{r^2}\right)J_\nu(\xi r)dr = -\xi^2\bar{f}_\nu(\xi), \tag{5.106}$$

де, як і раніше, через $\bar{f}_\nu(\xi)$ означена трансформанта Ханкеля порядка ν функції $f(r)$.

Тут потрібно відрізняти деякі поодинокі випадки цієї загальної формули, що зустрічаються особливо часто. Припускаючи, що в співвідношенні (5.103) $\nu = 1$, отримаємо

$$\int_0^\infty r\frac{df}{dr}J_1(\xi r)dr = -\xi\bar{f}(\xi), \tag{5.107}$$

де $\bar{f}(\xi)$ означена як трансорманта нульового порядку

$$\bar{f}(\xi) = \int_0^\infty rf(r)J_0(\xi r)dr. \tag{5.108}$$

Аналогично, припускаючи, що в співвідношенні (5.106) $\nu = 0$, знайдемо

$$\int_0^\infty r\left(\frac{d^2 f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}\right)J_0(\xi r)dr = -\xi^2\bar{f}(\xi), \tag{5.109}$$

де $\bar{f}(\xi)$, як і раніше, означається виразом (5.108).

§ 6. Співвідношення між трансформантами Ханкеля та трансформантами Фур′є

Розглянемо трансформанту Фур′є $F(\xi_1, \xi_2)$ функції $f(x_1, x_2)$, що залежить лише від змінної $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$. З означення двовимірної трансформанти Фур′є випливає

$$F(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) e^{i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} dx_1 dx_2 .$$

Якщо в цьому інтегралі зробити заміну змінних

$$x_1 = r\cos\theta, x_2 = r\sin\theta, \xi_1 = \rho\cos\varphi, \xi_2 = \rho\sin\varphi$$

та врахувати, що

$$dx_1 dx_2 = r dr d\theta$$

та

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = r\rho\cos(\theta - \varphi),$$

то інтеграл набуде такого вигляду

$$F(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} r f(r) dr \int_0^{2\pi} e^{ir\rho\cos(\theta-\varphi)} d\theta . \tag{6.1}$$

Далі, завдяки періодичному характеру підінтегрального виразу маємо

$$\int_0^{2\pi} e^{ir\rho\cos(\theta-\varphi)} d\theta \equiv \int_0^{2\pi} e^{ir\rho\cos\theta} d\theta .$$

Інтеграл у правій частині — табличний та дорівнює $2\pi J_0(\rho r)$. Тому, припускаючи, що $\rho = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}$, бачимо, що трансформанта Фур′є $F(\xi_1, \xi_2)$ є функцією лише одного тільки ρ та її можна подати у вигляді

$$F(\rho) = \int_0^{\infty} r f(r) J_0(\rho r) dr, \tag{6.2}$$

тобто вона є трансформантою Ханкеля нульового порядку функції $f(r)$. Як відомо, на основі формули обернення Фур′є для кратних перетворень має місце рівність

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi_1, \xi_2) e^{-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} d\xi_1 d\xi_2 ,$$

яку після заміни змінних можна записати так

$$f(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \rho F(\rho)d\rho \int_0^{2\pi} e^{-ir\rho\cos(\theta-\varphi)}d\varphi\ .$$

Інтегрування робиться за схемою, що дана вище. В результаті отримуємо

$$f(r) = \int_0^\infty \rho F(\rho)J_0(r\rho)d\rho\ . \tag{6.3}$$

Вирази (6.2) та (6.3) являють собою формули обернення Ханкеля для випадку $\nu = 0$. Таким чином, такий поодинокий випадок можна вивести з теорії двовимірних перетворень Фур'є. Такий результат легко узагальнити. Якщо $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ — функція тільки від $r = (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)^{1/2}$, то її трансформанта Фур'є за означенням дорівнює

$$F(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}n} \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f(r)e^{i(\xi x)}dx_1dx_2...dx_n\ .$$

де $(\xi \cdot x)$ означає скалярний добуток

$$\xi_1x_1 + \xi_2x_2 + ... + \xi_nx_n\ .$$

Нехай

$$\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_n^2,$$

та після заміни змінних

$$\xi_i = \rho\alpha_i, i = 1,2,...,n\ ,$$

$$y_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, y_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} x_i, j = 2,3,...,n,$$

де коефіцієнти α_{ij} вибрані таким чином, щоб перетворення було ортогональним, знайдемо

$$r = (y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2)^{1/2},$$

$$dx_1dx_2dx_3...dx_n = dy_1dy_2dy_3...dy_n,$$

$$\xi \cdot x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i = \rho\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, = \rho y_1.$$

Нехай

$$\lambda^2 = y_2^2 + y_3^2 + ... + y_n^2,$$

так що

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}...\int\limits_{-\infty}^{\infty} dy_2 dy_3 ... dy_n = \int\limits_0^{\infty} \Omega d\lambda .$$

Вираз для трансформанти Фур'є F можна записати у вигляді:

$$F(\xi_1,...,\xi_n) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy_1 \int\limits_0^{\infty} \Omega d\lambda f(\sqrt{y_1^2 + \lambda^2}) e^{i\rho y_1} \tag{6.4}$$

У таких позначеннях для довільної функції $\Phi(\lambda)$ маємо

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}...\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\sqrt{y_2^2 + ... + y_n^2}) dy_2 ... dy_n = \int\limits_0^{\infty} \Omega \Phi(\lambda) d\lambda . \tag{6.5}$$

Щоб знайти величину Ω зауважимо, що це є елемент об'єму у $(n-1)$-мірному просторі, тому визначається виразом

$$\Omega = \omega \lambda^{n-2}, \tag{6.6}$$

де ω — функція від n, а не від λ. Щоб визначити вигляд цієї величини, розглянемо поодинокий випадок

$$\Phi(\lambda) = e^{-\lambda^2}.$$

Підставляючи цей вираз у співвідношення (6.5) та замінюючи Ω на $\omega\lambda^{n-2}$, отримаємо для визначення постійної ω таке співвідношення:

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy\right)^{n-1} = \omega \int\limits_0^{\infty} \lambda^{n-2} e^{-\lambda^2} d\lambda .$$

Користуючись значеннями означених інтегралів

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \pi^{1/2}, \int\limits_0^{\infty} \lambda^{n-2} e^{-\lambda^2} d\lambda = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right),$$

бачимо одразу, що величина ω виражається у вигляді

$$\omega = \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}. \tag{6.7}$$

Підстановка виразів (6.6) та (6.7) у (6.4) дає

$$F(\xi_1,\ldots,\xi_n) = \frac{1}{{}^{\frac{1}{2}n-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}\right)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dy_1 \int\limits_{0}^{\infty} f(\sqrt{y_1^2+\lambda^2})e^{i\rho y_1}\lambda^{n-2}d\lambda\,.$$

Для обчислення такого інтеграла зробимо таку заміну змінних

$$\lambda = r\sin\varphi, y_1 = r\cos\varphi\,.$$

Звідки отримаємо

$$F(\xi_1,\ldots,\xi_n) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}n-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}\right)}\int\limits_{0}^{\infty} r^{n-1}f(r)dr\int\limits_{0}^{\pi}\sin^{n-2}\varphi e^{i\rho r\cos\varphi}d\varphi.$$

Відомо з таблиць інтегралів, що

$$\int\limits_{0}^{\pi}\sin^{n-2}\varphi e^{i\rho r\cos\varphi}d\varphi = \frac{2^{\frac{1}{2}n-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}\right)}{(\rho r)^{\frac{1}{2}n-1}}J_{\frac{1}{2}n-1}(\rho r)\,.$$

Підставимо це співвідношення у формулу, що визначає $F(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$. Враховуючи, що остання є функцією тільки від змінної ρ, її можна записати як $F(\rho)$. Отримаємо такий результат:

$$\rho^{\frac{1}{2}n-1}F(\rho) = \int\limits_{0}^{\infty} r\left[r^{\frac{1}{2}n-1}f(r)\right]J_{\frac{1}{2}n-1}(\rho r)dr\,,$$

що показує, що функція $\rho^{\frac{1}{2}n-1}F(\rho)$ є трансформантою Ханкеля порядку $\frac{1}{2}n-1$ функції $r^{\frac{1}{2}n-1}f(r)$. Таким чином, при певних обставинах трансформанту Фур′є в n-мірному просторі можна звести до трансформанти Ханкеля в одновимірному просторі. Тому будь-яка теорема, яку можна додати для трансформанти Фур′є функції багатьох змінних, породжує відповідну теорему для трансформант Ханкеля. Наприклад, за допомогою аналогічних міркувань, що застосовуються до формули

$$f(x_1,\dots,x_n)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}n}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi_1,\dots,\xi_n)e^{-i(\xi-x)}d\xi_1 d\xi_2\dots d\xi n\,,$$

стверджується, що

$$r^{\frac{1}{2}n-1}f(r)=\int_0^{\infty}\rho\left[\rho^{\frac{1}{2}n-1}F(\rho)\right]J_{\frac{1}{2}n-1}(\rho r)d\rho\,.$$

Нехай

$$\varphi(r)=r^{\frac{1}{2}n-1}f(r),\;\; \overline{\varphi}(\rho)=\rho^{\frac{1}{2}n-1}F(\rho),\; \nu=\frac{1}{2}n-1,$$

отримаємо взаємні формули

$$\overline{\varphi}(\rho)=\int_0^{\infty}r\varphi(r)J_\nu(\rho r)dr,\; \varphi(r)=\int_0^{\infty}\rho\overline{\varphi}(\rho)J_\nu(\rho r)d\rho\,,$$

що є доведенням теореми обернення Ханкеля.

§ 7. Переворення з скінченними межами

Синус- та косинустрансформанти Фур'є зі скінченними межами

З теорії рядів Фур'є добре відомо, що якщо функція $f(x)$ задовольняє умови Діріхле у інтервалі $0\le x\le\pi$, то ряд

$$\frac{1}{\pi}a_0+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)\,, \tag{7.1}$$

де

$$a_n=\int_0^{\pi}f(x)\cos(nx)dx\,,$$

збігається до $\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]$ у кожній точці інтервалу $(0,\pi)$, в якій функція має розрив неперервності, і до значення $f(x)$ у кожній точці x цього інтервалу, в який функція $f(x)$ неперервна.

Якщо замість коефіцієнтів a_n користуватися означенням косинус-трансформанти Фур'є з скінченими межами, що позначається $\overline{f_c}(n)$ та визначається співвідношенням

$$\overline{f_c}(n) = \int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx\,,$$

то формулювання теореми, що приводиться вище, можна змінити так:

Теорема. *Якщо $f(x)$ задовольняє умови Діріхле у інтервалі $0 \le x \le \pi$ та якщо позначити через*

$$\overline{f_c}(n) = \int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx$$

косинус-трансформанту з скінченними межами, то

$$f(x) = \frac{\overline{f_c}(0)}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{f_c}(n)\cos(nx) \qquad (7.2)$$

у кожній точці інтервалу $(0,\pi)$, в якій $f(x)$ неперервна.

У тих точках інтервалу, в яких $f(x)$ має скінченний розрив неперервності, ліву частину співвідношення (7.2) потрібно замінити на $\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]$. У подальшому ми будемо часто посилатися на цю теорему, як на теорему обернення Фур'є для косинус-трансформант з скінченними межами.

Аналогічна теорема має місце в тому випадку, коли незалежна змінна x змінюється у інтервалі $(0,a)$. В цьому випадку косинус-трансформанта з скінченними межами визначається таким співвідношенням:

$$\overline{f_c}(n) = \int_0^a f(x)\cos(\xi_n x)\,dx\,,$$

де послідовність ξ_n поки що не визначена. Нехай $y = \pi x / a$, тепер знайдемо

$$\overline{f_c}(n)=\frac{a}{\pi}\int_0^{\pi}F(y)\cos\left(\xi_n\frac{ay}{\pi}\right)dy,$$

де через $F(y)$ позначена функція $f(ay/\pi)$. Звідки безпосередньо на основі попередньої теореми можна написати

$$\frac{a}{\pi}F(y)=\frac{1}{\pi}\overline{f_c}(0)+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{f_c}(n)\cos(ny),$$

якщо $a\xi_n/\pi=n$, тобто $\xi_n=n\pi/a$. Повертаючись до змінної x, бачимо, що цей результат можна сформулювати таким чином:

Теорема. *Якщо $f(x)$ задовольняє умови Діріхле у інтервалі $(0,a)$ та якщо*

$$\overline{f_c}(n)=\int_0^{a}f(x)\cos\left(\frac{nx\pi}{a}\right)dx \tag{7.3}$$

визначає косинус-трансформанту з скінченними межами, то функція $f(x)$ у кожній точці інтервалу $(0,a)$, де вона неперервна, виражається за допомогою такого ряду:

$$f(x)=\frac{\overline{f_c}(0)}{a}+\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{f_c}(n)\cos\left(\frac{nx\pi}{a}\right). \tag{7.4}$$

Аналогичні результати справедливі для синус-трансформант з скінченними межами, що визначаються за допомогою співвідношення

$$\overline{f_s}(n)=\int_0^{\pi}f(x)\sin(nx)\,dx. \tag{7.5}$$

Відома з теорії рядів Фур'є теорема про те, що якщо функція $f(x)$ задовольняє умови Діріхле у інтервалі $0\le x\le\pi$, то ряд

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx),$$

де

$$b_n = \int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

збігається до $f(x)$ у кожній точці інтервалу, де функція неперервна у термінах теорії трансформант з скінченними межами, формулюється таким чином:

Т е о р е м а. *Якщо $f(x)$ задовольняє умови Діріхле у інтервалі $(0,\pi)$ та якщо*

$$\overline{f_s}(n) = \int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

її синус-трансформанта з скінченними межами, то

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{f_s}(n)\sin(nx) \tag{7.6}$$

в кожній точці інтервалу $(0,\pi)$, де функція неперервна.

За допомогою простої підстановки $y = \pi x/a$ та міркувань, однакових з тими, що були використані раніше, коли доводилася попередня теорема, доведемо теорему для функцій, що визначені на інтервалі $0 \le x \le a$.

Т е о р е м а. *Якщо $f(x)$ задовольняє умови Діріхле у інтервалі $(0,a)$ та якщо у цьому інтервалі її синус-трансформанта з скінченними межами визначається за допомогою співвідношення*

$$\overline{f_s}(n) = \int_0^{a} f(x)\sin\frac{nx\pi}{a}\,dx\ , \tag{7.7}$$

то в кожній точці інтервалу $(0,a)$, в який функція $f(x)$ неперервна, має місце така рівність

$$f(x) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{f_s}(n)\sin\frac{nx\pi}{a}\ . \tag{7.8}$$

Співвідношення між трансформантами Фур'є зі скінченими межами похідних даної функції

Часто потрібно виразити інтеграли типу

$$\int_0^a \frac{\partial^r f}{\partial x^r} \sin\frac{nx\pi}{a}dx, \int_0^a \frac{\partial^r f}{\partial x^r} \cos\frac{nx\pi}{a}dx$$

через трансформанти Фур'є з скінченними межами функції $f(x)$. Ці обчислення базуються на формулах, що мають перші похідні функції $f(x)$. Наприклад, в результаті інтегрування по частинах отримаємо

$$\int_0^a \frac{\partial f}{\partial x} \sin\frac{nx\pi}{a}dx = \left[f(x)\sin\frac{nx\pi}{a}\right]_0^a - \frac{\pi n}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{\pi nx}{a}dx .$$

Тому що n — це ціле число, то $\sin\left(\pi nx/a\right)$ зникає при $x = 0$ та при $x = a$. Тому якщо визначити $\overline{f_c}(n)$ за допомогою співвідношення (7.3), то можна записати

$$\int_0^a \frac{\partial f}{\partial x} \sin\frac{nx\pi}{a}dx = -\frac{\pi n}{a}\overline{f_c}(n) \tag{7.9}$$

при будь-яких значеннях $f(0), f(a)$, припускаючи, що ці значення не є нескінченні. Аналогічно, інтегруючи по частинах, отримаємо

$$\int_0^a \frac{\partial f}{\partial x} \cos\frac{nx\pi}{a}dx = \left[f(x)\cos\frac{nx\pi}{a}\right]_0^a + \frac{\pi n}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{\pi nx}{a}dx .$$

Тому що $\cos(n\pi) = (-1)^n$ при цілих значеннях n, то результат можна записати в такому вигляді:

$$\int_0^a \frac{\partial f}{\partial x} \cos\frac{nx\pi}{a}dx = (-1)^n f(a) - f(0) + \frac{\pi n}{a}\overline{f_s}(n), \tag{7.10}$$

де через $\overline{f_s}(n)$ позначена синус-трансформанта з скінченними межами, визначена співвідношенням (7.5). У випадку, коли функція $f(x)$ перетворюється на нуль у точках $x = 0$ та $x = a$, тоді має місце рівність

$$\int_0^a \frac{\partial f}{\partial x} \cos\frac{nx\pi}{a}dx = \frac{\pi n}{a}\overline{f_s}(n). \tag{7.11}$$

Формули для вищих похідних можна отримати, повторно застосовуючи основні формули (7.9) та (7.10). Наприклад, з формули (7.9) випливає, що

$$\int_0^a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sin\frac{\pi n x}{a} dx = -\frac{\pi n}{a}\int_0^a \frac{\partial f}{\partial x} \cos\frac{\pi n x}{a} dx,$$

звідки на основі формули (7.10) отримано співвідношення

$$\int_0^a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sin\frac{n x\pi}{a} dx = \frac{\pi n}{a}\left[(-1)^{n+1} f(a) + f(0)\right] - \frac{\pi^2 n^2}{a^2}\overline{f_s}(n). \quad (7.12)$$

В тому випадку, коли $f(0) = f(a) = 0$, остання рівність набуває більш простого вигляду

$$\int_0^a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sin\frac{n x\pi}{a} dx = -\frac{\pi^2 n^2}{a^2}\overline{f_s}(n). \quad (7.13)$$

Аналогічно з формули (7.10) випливає, що

$$\int_0^a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos\frac{n x\pi}{a} dx = (-1)^n f'(a) - f'(0) - \frac{\pi^2 n^2}{a^2}\overline{f_c}(n). \quad (7.14)$$

Якщо похідна $\frac{\partial f}{\partial x}$ перетворюється на нуль у кінцевих точках інтервалу $x = 0,\ x = a$, то має місце співвідношення

$$\int_0^a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos\frac{n x\pi}{a} dx = -\frac{\pi^2 n^2}{a^2}\overline{f_c}(n) \quad . \quad (7.15)$$

Для похідних порядку вище другого формули можна отримати за допомогою методу індукції. При аналізі крайових задач потрібно знати формули похідних четвертого порядку. З співвідношення (7.13) випливає, що, якщо $\partial^2 f / \partial x^2$ перетворюється в нуль в крайових точках інтервалу $x = 0,\ x = a$, то

$$\int_0^a \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \sin\frac{n x\pi}{a} dx = -\frac{\pi^2 n^2}{a^2}\int_0^a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sin\frac{\pi n x}{a} dx = \frac{n^4 \pi^4}{a^4}\overline{f_s}(n). \quad (7.16)$$

Аналогічно, якщо

$$\frac{\partial^{3f}}{\partial x^3} = \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

при $x=0$, $x=a$, то в результаті двократного застосування (7.15) отримаємо

$$\int_0^a \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \cos\frac{nx\pi}{a}\,dx = \frac{n^4\pi^4}{a^4} f_c(n)\,. \tag{7.17}$$

Теорема про згортки для перетворення Фур'є зі скінченними межами

Розглянемо дві функції, $F_1(u)$ та $F_2(u)$ що є парним та непарним періодичним продовженням функції $f(u)$, що визначена у інтервалі $0 \le u \le \pi$. Так, непарне періодичне продовження $F_1(u)$ з періодом 2π функції $f(u)$ у інтервалі $-\pi \le u \le \pi$ визначається так:

$$F_1(u) = \begin{cases} f(u), 0 \le u \le \pi \\ -f(-u), -\pi \le u < 0. \end{cases}$$

Аналогічно для парного періодичного продовження $F_2(u)$ у інтервалі $-\pi \le u \le \pi$ маємо

$$F_2(u) = \begin{cases} f(u), 0 \le u \le \pi \\ f(-u), -\pi \le u < 0. \end{cases}$$

З означення $F_1(u)$ випливає, що якщо $F_1(u)$ та $G_1(u)$ є непарними періодичними продовженнями функцій $f(u)$ та $g(u)$, то

$$\int_{-0}^{\pi} F_1(x-u)G_1(u)\,du = \int_0^x f(x-u)g(u)\,du - \int_0^{\pi} f(u-x)g(u)\,du\,, \tag{7.18}$$

а також тому що функція F_1 періодична,

$$\int_{-\pi}^{0} F_1(x-u)G_1(u)\,du = \int_{\pi-x}^{\pi} f(2\pi-x-u)g(u)\,du - \int_0^{\pi-x} f(u+x)g(u)\,du\,. \tag{7.19}$$

Для інтеграла

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_1(x-u)G_1(u)\,du$$

використаємо позначення $F_1(x)\cdot G_1(x)$ та назвемо такий інтеграл згорткою функцій $F_1(x)$ та $G_1(x)$. Визначивши синус-трансформанту Фур'є з скінченними межами функцій $f(x)$ та $g(x)$ через $\overline{f_s}(n)$, $\overline{g_s}(n)$ відповідно отримаємо

$$\overline{f_s}(n) = \int_0^\pi f(\xi)\sin(n\xi)d\xi, \quad \overline{g_s}(n) = \int_0^\pi g(\eta)\sin(n\eta)d\eta \,.$$

Звідки випливає, що

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{m}\overline{f_s}(n)\overline{g_s}(n)\cos(nx) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi d\xi\int_0^\pi d\eta f(\xi)g(\eta)\sum_{n=1}^{m}\cos(nx)\sin(n\xi)\sin(n\eta)\,,$$

тут проведена зміна порядку підсумовування та інтегрування. Користуючись рівностями

$$4\sin(n\xi)\sin(n\eta)\cos(nx) = \cos(\xi-\eta+x)n + \cos(\xi-\eta-x)n -$$
$$-\cos(\xi+\eta+x)n - \cos(\xi+\eta-x)n$$

та

$$\sum_{r=1}^{m}\cos(r\alpha) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin(m-\frac{1}{2})\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}\,,$$

знайдемо

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{m}\overline{f_s}(n)\overline{g_s}(n)\cos(nx) = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi f(\xi)d\xi\int_0^\pi g(\eta)d\eta\;\times$$

$$\times\left[\frac{\sin(m-\frac{1}{2})(\xi-\eta+x)}{\sin\frac{1}{2}(\xi-\eta+x)} + \frac{\sin(m-\frac{1}{2})(\xi-\eta-x)}{\sin\frac{1}{2}(\xi-\eta-x)} -\right.$$

$$\left.-\frac{\sin(m-\frac{1}{2})(\xi+\eta+x)}{\sin\frac{1}{2}(\xi+\eta+x)} - \frac{\sin(m-\frac{1}{2})(\xi+\eta-x)}{\sin\frac{1}{2}(\xi+\eta-x)}\right].$$

Замінюючи в першому з чотирьох подвійних інтегралів, що стоять справа, змінні інтегрування ξ та η на λ та μ, де

$$\lambda = \xi - \eta + x, \;\; \mu = \eta ,$$

отримаємо

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} f(\xi)d\xi\int_0^{\pi} g(\eta)\frac{\sin(m-\frac{1}{2})(\xi-\eta+x)}{\sin\frac{1}{2}(\xi-\eta+x)}d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} g(\mu)d\mu \int_{x-\mu}^{x+\pi-\mu} f(\lambda+\mu-x)\frac{\sin(m-\frac{1}{2})\lambda}{\lambda}\frac{\frac{1}{2}\lambda}{\sin\frac{1}{2}\lambda}d\lambda .$$

При прямуванні m до нескінченності права частина, як легко бачити, прямує до виразу

$$\frac{1}{4}\int_0^{\pi} g(\mu)f(\mu-x)d\mu .$$

Аналогичним чином обчислюються останні три члена. В результаті отримаємо

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\lambda}\overline{f_s}(n)\overline{g_s}(n)\cos(nx) =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^{\pi} g(\mu)\left[f(x-\mu)+f(2\pi-x-\mu)-f(\mu-x)-f(\mu+x)\right]d\mu .$$

Звідки випливає

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{f_s}(n)\overline{g_s}(n)\cos(nx) = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} F_1(x-\mu)G_1(\mu)d\mu = -\frac{1}{2}F_1(x) * G_1(x) .$$

Користуючись теоремою обернення, знайдемо

$$\int_0^{\pi} F_1(x) * G_1(x)\cos(nx)dx = -2\overline{f_s}(n)\overline{g_s}(n) .$$

Зауважимо ще раз, що співвідношення має маісце лише для функцій $f(x), g(x)$, що задовольняють умови Діріхле у інтервалі $0 \le x \le \pi$.

Перетворення Ханкеля зі скінченними межами

З теорії функцій Бесселя добре відомо, що якщо функція $f(x)$ задовольняє умови Діріхле у інтервалі $0 \leq x \leq a$, то ряд

$$\frac{2}{a^2}\sum_i a_i \frac{J_\mu(x\xi_i)}{[J'_\mu(a\xi_i)]^2},$$

де a_i визначається інтегралом

$$a_i = \int_0^a xf(x)J_\mu(x\xi_i)dx \tag{7.20}$$

та сума береться по всіх додатніх коренях функції $J_\mu(a\xi_i)$, збігається до суми $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$. Це твердження можна записати у вигляді формули обернення для перетворення Ханкеля з скінченними межами

$$\boldsymbol{J}[f(x)] = \int_0^a xf(x)J_\mu(x\xi_i)dx = \overline{f_J}(\xi_i), \tag{7.21}$$

де $\boldsymbol{J}$ позначає операцію обернення для перетворення Ханкеля. Формула (7.21) справедлива для будь-яких функцій $f(x)$, що задовольняють умовам Діріхле у замкнутому інтервалі (0, a).

Теорема. *Якщо $f(x)$ задовольняє умовам Діріхле у інтервалі (0, a) та її трансформанта Ханкеля з скінченними межами у цьому інтервалі визначається за допомогою співвідношення*

$$\overline{f_J}(\xi_i) = \int_0^a xf(x)J_\mu(x\xi_i)dx,$$

де ξ_i — корінь трансцендентного рівняння

$$J_\mu(a\xi_i) = 0, \tag{7.22}$$

то у кожній точці інтервалу (0, a), в якій функція $f(x)$ неперервна,

$$f(x) = \frac{2}{a^2}\sum_i \overline{f_J}(\xi_i)\frac{J_\mu(x\xi_i)}{[J'_\mu(a\xi_i)]^2}, \tag{7.23}$$

де сума береться по всіх додатніх коренях рівняння (7.22).

Особливо важливий випадок має місце, коли $\mu = 0$. Користуючись рекурентним співвідношенням для функцій Бесселя, знайдемо, що

$$J'_0(x) = -J_1(x),$$

тому у випадку $\mu = 0$ ряд (7.23) набуде вигляду

$$f(x) = \frac{2}{a^2}\sum_i \overline{f_J}(\xi_i)\frac{J_0(x\xi_i)}{[J_1(a\xi_i)]^2}. \tag{7.24}$$

У теоремі обернення параметр ξ_i, що входить в означення трансформанти Ханкеля з скінченними межами $\overline{f_J}(\xi_i)$, є розв'язком трансцендентного рівняння (7.22). Інший, більш загальний, вигляд перетворення Ханкеля з скінченними межами можна отримати, якщо в означенні (7.21) вибрати ξ_i як корінь трансцендентного рівняння

$$\xi_i J'_\mu(a\xi_i) + hJ_\mu(a\xi_i) = 0.$$

Для трансформанти такого типу існує теорема обернення.

Теорема. *Якщо $f(x)$ задовольняє умови Діріхле у замкнутому інтервалі $(0;a)$ та її трансформанта Ханкеля з скінченними межами визначається за допомогою рівності*

$$\overline{f_j}(\xi_i) = \int_0^a xf(x)J_\mu(x\xi_i)\,dx,$$

де ξ_i — корінь трансцендентного рівняння

$$\xi_i J'_\mu(\xi_i a) + hJ_\mu(\xi_i a) = 0, \tag{7.25}$$

то у кожній точці інтервалу, де $f(x)$ неперервна,

$$f(x) = \frac{2}{a^2}\sum_i \frac{\xi_i^2\overline{f_j}(\xi_i)}{h^2 + \left(\xi_i^2 - \dfrac{\mu^2}{a^2}\right)}\frac{J_\mu(x\xi_i)}{[J_\mu(a\xi_i)]^2}, \tag{7.26}$$

де сума береться по всіх додатніх коренях рівняння (7.25).

У випадку, коли $\mu = 0$, ряд (7.26) набуває вигляду

$$f(x) = \frac{2}{a^2}\sum_i \frac{\xi_i^2 \overline{f}_j(\xi_i)}{[h^2 + \xi_i^2]} \frac{J_0(x\xi_i)}{[J_0(a\xi_i)]^2},$$

де сума береться по всіх додатніх коренях рівняння

$$hJ_0(\xi_i a) = \xi_i J_1(\xi_i a).$$

У загальному випадку ряд (7.26) можна записати у вигляді

$$f(x) = \frac{2}{a^2}\sum_i \frac{\overline{f}_j(\xi_i)}{1 + \left(\xi_i^2 - \frac{\mu^2}{a^2}\right)\Big/ h^2} \frac{J_\mu(x\xi_i)}{\left[\frac{hJ_\mu(\xi_i a)}{\xi_i}\right]^2}.$$

У відповідності до рівняння (7.25) останній ряд можна перезаписати таким чином:

$$f(x) = \frac{2}{a^2}\sum_i \frac{\overline{f}_j(\xi_i)}{1 + \left(\xi_i^2 - \frac{\mu^2}{a^2}\right)\Big/ h^2} \frac{J_\mu(x\xi_i)}{[J'_\mu(a\xi_i)]^2}, \tag{7.27}$$

де сума береться по всіх додатніх коренях рівняння

$$J_\mu(\xi_i a) = -\frac{\xi_i J'_\mu(\xi_i a)}{h}. \tag{7.28}$$

Коли h у виразах (7.27), (7.28) прямує до нескінченності, то вони перетворюються на вирази (7.23), (7.22).

Дві трансформанти Ханкеля з скінченними межами використовуються у випадках, коли x змінюється у інтервалі $(0, a)$. Якщо область зміни змінної x не включає точку нуль, тобто x належить інтервалу $0 < b \le x \le a$, то потрібно користуватися другим типом перетворення, що означується рівністю

$$\overline{f}_H(\xi_i) = \int_b^a x f(x)[J_\mu(x\xi_i)G_\mu(a\xi_i) - G_\mu(x\xi_i)J_\mu(a\xi_i)]dx. \tag{7.29}$$

У цій рівності через $G_\mu(z)$ позначена функція Беселя другого роду порядка μ. Для трансформанти такого типу існує теорема обернення.

Теорема. *Якщо* $f(x)$ *задовольняє умови Діріхле у області* $b \le x \le a$ *та якщо її трансформанта Ханкеля з скінченними межами у цієї області визначається співвідношенням*

$$H[f(x)] \equiv \bar{f}_H(\xi_i) = \int_b^a x f(x)[J_\mu(x\xi_i)G_\mu(a\xi_i) - J_\mu(a\xi_i)G_\mu(x\xi_i)]\,dx\,,$$

в якому ξ_i *— є корені трансцендентного рівняння*

$$J_\mu(\xi_i b)G_\mu(\xi_i a) - J_\mu(\xi_i a)G_\mu(\xi_i b) = 0\,, \tag{7.31}$$

то у кожній точці інтервалу $(b,\ a)$, *в який функція* $f(x)$ *неперервна*

$$f(x) = \sum_i \frac{2\xi_i^2 J_\mu^2(\xi_i b)\bar{f}_H(\xi_i)}{J_\mu^2(a\xi_i) - J_\mu^2(b\xi_i)}[J_\mu(x\xi_i)G_\mu(a\xi_i) - J_\mu(a\xi_i)G_\mu(x\xi_i)]\,,$$

причому підсумовування розповсюджується по всім додатнім кореням рівняння (7.31).

Властивості перетворення Ханкеля зі скінченними межами

Випадок 1. ξ_i — корінь рівняння (7.22). Найбільш часто зустрічається випадок, коли параметр ξ_i, що входить до означення (7.21) трансформанти Ханкеля $\boldsymbol{J}_\mu[f(x)]$, є корінь трансцендентного рівняння (7.22). Почнемо з розгляду властивостей перетворення цього типу.

Інтегруючи по частинах, бачимо, що

$$\int_0^a x\frac{df}{dx}J_\mu(\xi_i x)\,dx = \left[xf(x)J_\mu(\xi_i x)\right]_0^a - \int_0^a f(x)\frac{d}{dx}[xJ_\mu(x\xi_i)]\,dx\,. \tag{7.32}$$

Якщо припустити, що $\mu \ge 0$, то $\left[xJ_\mu(x\xi_i)\right]$ перетворюється в нуль при $x = 0$, а тому що ξ_i — корінь рівняння (7.22), то $\left[xJ_\mu(x\xi_i)\right]$ перетворюється в нуль при $x = a$. Тому перший вираз у (7.32), що у квадратних дужках, дорівнює нулю. Далі, маємо

$$\frac{d}{dx}[xJ_\mu(x\xi_i)] = J_\mu(x\xi_i) + \xi_i x J_\mu'(x\xi_i)\,.$$

З властивостей функцій Беселя маємо

$$2\xi_i x J_\mu'(x\xi_i) = x\xi_i J_{\mu-1}(x\xi_i) - x\xi_i J_{\mu+1}(x\xi_i)\,, \tag{7.33}$$

з другого боку

$$2\mu J_{\mu}(\xi_i x) = x\xi_i J_{\mu-1}(x\xi_i) + x\xi_i J_{\mu+1}(x\xi_i)$$

та, таким чином,

$$\frac{d}{dx}\left[xJ_{\mu}(x\xi_i)\right] = \frac{\xi_i}{2\mu}(\mu+1)xJ_{\mu-1}(x\xi_i) - \frac{\xi_i}{2\mu}(\mu-1)xJ_{\mu+1}(x\xi_i). \quad (7.34)$$

Підставляючи вираз (7.34) до (7.32), бачимо, що при $\mu > 0$

$$\boldsymbol{J}_{\mu}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{\xi_i}{2\mu}\left[(\mu-1)\boldsymbol{J}_{\mu+1}(f) - (\mu+1)\boldsymbol{J}_{\mu-1}(f)\right]. \quad (7.35)$$

Аналогічно виводиться співвідношення

$$2\mu\int_0^a f(x)J_{\mu}(x\xi_i)dx = \xi_i\int_0^a xf(x)J_{\mu-1}(x\xi_i)dx + \xi_i\int_0^a xf(x)J_{\mu+1}(x\xi_i)dx,$$

яке в позначеннях, що використані у виразі (7.35), можна подати у вигляді

$$\mu\boldsymbol{J}_{\mu}\left(\frac{f}{x}\right) = \frac{\xi_i}{2}\left[\boldsymbol{J}_{\mu+1}(f) + \boldsymbol{J}_{\mu-1}(f)\right]. \quad (7.36)$$

Якщо в співвідношеннях (7.35), (7.36) f замінити на df/dx та скласти їх, отримаємо

$$\boldsymbol{J}_{\mu}\left(\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{df}{dx}\right) = \frac{1}{2}\xi_i\left[\boldsymbol{J}_{\mu+1}\left(\frac{df}{dx}\right) - \boldsymbol{J}_{\mu-1}\left(\frac{df}{dx}\right)\right]. \quad (7.37)$$

Вираз у лівій частині останньої рівності можна отримати і іншим шляхом. Інтегруючи перший член по частинах та залишаючи другий член без змін, знайдемо

$$\int_0^a x\left(\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{df}{dx}\right)J_{\mu}(x\xi_i)dx =$$

$$= \left[x\frac{df}{dx}J_{\mu}(x\xi_i)\right]_0^a - \int_0^a \frac{df}{dx}\left\{\frac{d}{dx}\left[xJ_{\mu}(x\xi_i)\right] - J_{\mu}(x\xi_i)\right\}dx.$$

Перший член в цьому виразі зникає, а другий дорівнює

$$-\xi_i \int_0^a x \frac{df}{dx} J'_\mu(x\xi_i)\,dx$$

та після інтегрування по частинах дає

$$-\xi_i a f(a) J'_\mu(a\xi_i) + \xi_i \int_0^a f(x)[x\xi_i J''_\mu(x\xi_i) + J'_\mu(x\xi_i)]dx\,.$$

Далі, користуючись тим фактом, що функція Беселя $J_\mu(x\xi_i)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$J''_\mu(x\xi_i) + \frac{1}{x\xi_i} J'_\mu(x\xi_i) + \left(1 - \frac{\mu^2}{x^2\xi_i^2}\right) J_\mu(x\xi_i) = 0\,,$$

бачимо, що

$$\int_0^a \left(\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{df}{dx} - \frac{\mu^2 f}{x^2}\right) = x J_\mu(x\xi_i)\,dx =$$

$$= -a\xi_i f(a) J'_\mu(a\xi_i) - \xi_i^2 \int_0^a x f(x) J_\mu(x\xi_i)\,dx\,,$$

або

$$\boldsymbol{J}_\mu\left(\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{df}{dx} - \frac{\mu^2 f}{x^2}\right) = -a\xi_i f(a) J'_\mu(a\xi_i) - \xi_i^2 \boldsymbol{J}_\mu(f)\,. \quad (7.38)$$

Особливо важливі ці результати у випадку, коли $\mu = 0$. Якщо у (7.35) $\mu = 1$, знайдемо

$$\boldsymbol{J}_1\left(\frac{df}{dx}\right) = -\xi_i \boldsymbol{J}_0(f)\,. \quad (7.39)$$

Аналогічно, якщо у (7.38) $\mu = 0$, то користуючись рівністю

$$J'_0(z) = -J_1(z)\,,$$

отримаємо співвідношення

$$J_0\left(\frac{d^2 f}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{df}{dx}\right)=a\xi_i f(a) J_1(a\xi_i)-\xi_i^2 J_0(f). \qquad (7.40)$$

Тому, якщо з умови задачі відомо, що функція $f(a)$ дорівнює нулю, то

$$\boldsymbol{J}_0\left(\frac{d^2 f}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{df}{dx}\right)=-\xi_i^2 \boldsymbol{J}_0(f). \qquad (7.41)$$

Іноді потрібно знати трансфоманти деяких простих функцій. Наприклад, відомо, що

$$\int_0^a x^{\mu+1} J_\mu(x)\,dx=\alpha^{\mu+1} J_{\mu+1}(\alpha).$$

і таким чином, якщо взяти у лівій частині інтеграла $x=\xi_i r, a=\xi_i a$, отримаємо

$$\int_0^a (r^\mu) r J_\mu(\xi_i r)\,dr=\frac{a^{\mu+1}}{\xi_i} J_{\mu+1}(a\xi_i).$$

Остання рівність показує, що

$$\boldsymbol{J}_\mu(x^\mu)=\frac{a^{\mu+1}}{\xi_i}\boldsymbol{J}_{\mu+1}(a\xi_i), \qquad (7.42)$$

а також

$$\boldsymbol{J}_0(c)=\frac{ac}{\xi_i} J_1(a\xi_i), \qquad (7.43)$$

де c — стала. Аналогічно маємо

$$\int_0^a (a^2-x^2) x J_0(\xi_i x)\,dx=\frac{4a}{\xi_i^3} J_1(\xi_i a)-\frac{2a^2}{\xi_i^2} J_0(\xi_i a).$$

Тому що ξ_i — корінь рівняння, то другий член праворуч перетворюється на нуль, тому

$$\boldsymbol{J}_0(a^2 - x^2) = \frac{4a}{\xi_i^3} J_1(a\xi_i). \tag{7.44}$$

Далі, у зв'язку з тим, що

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} J_\mu(\alpha x) + x \frac{d}{dx} J_\mu(\alpha x) + (\alpha^2 x^2 - \mu^2) J_\mu(\alpha x) = 0$$

та

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} J_\mu(\xi_i x) + x \frac{d}{dx} J_\mu(\xi_i x) + (\xi_i^2 x^2 - \mu^2) J_\mu(\xi_i x) = 0,$$

після множення першої рівності на $J_\mu(\xi_i x)$, а другої — на $J_\mu(ax)$ та після віднімання отримаємо

$$(a^2 - \xi_i^2) x J_\mu(\alpha x) J_\mu(\xi_i x) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left\{x\left[J_\mu(\alpha x)\frac{d}{dx} J_\mu(\xi_i x) - J_\mu(\xi_i x)\frac{d}{dx} J_\mu(\alpha x)\right]\right\}.$$

Інтегрування по x від 0 до a з врахуванням того, що $J_\mu(\xi_i a)$ дорівнює нулю, дає

$$(a^2 - \xi_i^2) \int_0^a x J_\mu(\alpha x) J_\mu(\xi_i x)\, dx = \xi_i a J_\mu(\alpha a) J'_\mu(\xi_i a),$$

звідки

$$\int_0^a \frac{J_\mu(\alpha x)}{J_\mu(\alpha a)} x J_\mu(\xi_i x)\, dx = \frac{\xi_i a}{a^2 - \xi_i^2} J'_\mu(\xi_i a).$$

По-іншому,

$$\boldsymbol{J}_\mu\left[\frac{J_\mu(\alpha x)}{J_\mu(\alpha a)}\right] = \frac{\xi_i a}{a^2 - \xi_i^2} J'_\mu(\xi_i a), \tag{7.45}$$

а в окремому випадку

$$\boldsymbol{J}_0\left[\frac{J_0(\alpha x)}{J_0(\alpha a)}\right] = -\frac{\xi_i a}{a^2 - \xi_i^2} J_1(\xi_i a). \tag{7.46}$$

Якщо у виразі (7.43) $c = 1$ та після віднімання отриманого виразу від (7.46) остаточно отримаємо

$$\boldsymbol{J}_0\left[\frac{J_0(\alpha x)}{J_0(\alpha a)} - 1\right] = -\frac{J_1(\xi_i a)a}{\xi_i\left(1 - \xi_i^2/a^2\right)}. \tag{7.47}$$

Випадок 2. Нехай ξ_i-корень рівняння (7.25). Результати, що аналогічні до отриманих вище, справедливі для трансформанти Ханкеля з скінченими межами (7.21), коли параметр ξ_i, що входить до означення цієї трансформанти, є коренем рівняння (7.25). Розглянемо лише одну з властивостей цієї трансформанти. Як і при отриманні співвідношення (7.38), маємо

$$\int_0^a x\left(\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{df}{dx}\right)J_0(\xi_i x)dx =$$

$$= \left[x\frac{df}{dx}J_0(\xi_i x) - \xi_i x f J_0'(\xi_i x)\right]_0^a - \xi_i^2\int_0^a xf(x)J_0(\xi_i x)dx.$$

Вираз, що міститься у дужках, зникає при підстановці нижньої межі. При підстановці верхньої межі отримаємо

$$-\xi_i J_0'(a\xi_i) = hJ_0(a\xi_i),$$

тому що ξ_i — корінь рівняння (7.25). Тим самим показано, що якщо ξ_i — корінь рівняння (7.25), то

$$\boldsymbol{J}_0\left(\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{df}{dx}\right) = aJ_0(a\xi_i)\left(\frac{df}{dx} + hf\right)_{x=a} - \xi_i^2\boldsymbol{J}_0(f). \tag{7.48}$$

Це співвідношення показує, при яких обставинах потрібно користуватися трансформантами Ханкеля з скінченими межами, що визначаються за допомогою рівнянь (7.21) та (7.25); а саме, якщо $f(x)$ визначена у інтервалі $0 \le x \le a$ та якщо

$$\frac{df}{dx} + hf = 0 \text{ при } x = a, \tag{7.49}$$

то

$$\boldsymbol{J}_0\left(\frac{d^2 f}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{df}{dx}\right)=-\xi_i^2\boldsymbol{J}_0(f). \tag{7.50}$$

В и п а д о к 3. ξ_i — корінь рівняння (7.31) Для застосування теореми ми повинні мати співвідношення, що аналогічне співвідношенню (7.38). Інтегруючи по частинах, отримаємо

$$\begin{aligned}
&\int_0^a x\left[J_\mu(x\xi_i)G_\mu(a\xi_i)-J_\mu(a\xi_i)G_\mu(x\xi_i)\right]\left(\frac{d^2 f}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{df}{dx}\right)dx=\\
&\quad=-\xi_i\left\{xf(x)\left[J_\mu'(x\xi_i)G_\mu(a\xi_i)-J_\mu(a\xi_i)G_\mu'(x\xi_i)\right]\right\}+\\
&\quad+\xi_i\int_0^a\left\{xf(x)\frac{d}{dx}\left[J_\mu'(x\xi_i)G_\mu(a\xi_i)-J_\mu(a\xi_i)G_\mu'(x\xi_i)\right]+\right.\\
&\quad\left.+f(x)\left[J_\mu'(x\xi_i)G_\mu(a\xi_i)-J_\mu(a\xi_i)G_\mu'(x\xi_i)\right]\right\}dx.
\end{aligned}$$

Далі можна показати, що

$$J_\mu'(\xi_i b)G_\mu(\xi_i a)-G_\mu'(\xi_i b)J_\mu(\xi_i a)=\frac{1}{\xi_i b}\frac{J_\mu(\xi a_i)}{J_\mu(\xi_i b)}, \tag{7.51}$$

тому що як J_μ та G_μ є розв'язками рівнянь Бесселя, то

$$\begin{aligned}
&\int_0^a x\left(\frac{d^2 f}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{df}{dx}\right)\left[J_\mu(x\xi_i)G_\mu(a\xi_i)-J_\mu(a\xi_i)G_\mu(x\xi_i)\right]dx=\\
&\quad=\int_0^a\left(\frac{\mu^2}{x^2}-\xi_i^2\right)xf(x)\left[J_\mu(x\xi_i)G_\mu(a\xi_i)-J_\mu(a\xi_i)G_\mu(x\xi_i)\right]dx+\\
&\qquad\qquad+\frac{J_\mu(\xi_i a)}{J_\mu(\xi_i b)}f(b)-f(a)
\end{aligned} \tag{7.51^{a}}$$

Отже, в означеннях, що використані у рівності (7.30), ми маємо

$$\boldsymbol{H}_\mu\left(\frac{d^2 f}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{df}{dx}-\frac{\mu^2}{x^2}\right)=\frac{J_\mu(\xi_i a)}{J_\mu(\xi_i b)}f(b)-f(a)-\xi_i^2\boldsymbol{H}_\mu(f). \tag{7.52}$$

Якщо $f(x)$ зникає при $x=a$ та $x=b$, отримаємо

$$\boldsymbol{H}_\mu\left(\frac{d^2 f}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{df}{dx}-\frac{\mu^2}{x^2}\right)=-\xi_i^2\boldsymbol{H}_\mu(f). \tag{7.53}$$

У подальшому буде використана трансформанта цього типу функції $(x^2 - a^2)/x$. З табличних інтегралів можна легко вивести, що

$$\int_0^a (x^2 - a^2) J_1(\xi_i x) dx = \frac{1}{\xi_i^2} [2x J_1(\xi_i x) - \xi_i (x^2 - a^2) J_0(\xi_i x)]_b^a. \quad (7.54)$$

Далі, з урахуванням, що функція Бесселя G_1 задовольняє ті самі рекурентні співвідношення, що і функція J_1, знайдемо

$$\int_0^a (x^2 - a^2) G_1(\xi_i x) dx = \frac{1}{\xi_i^2} [2x G_1(\xi_i x) - \xi_i (x^2 - a^2) G_0(\xi_i x)]_b^a. \quad (7.55)$$

Помноживши співвідношення (7.54) на $G_1(\xi_i a)$, а співвідношення (7.55) на $J_1(\xi_i a)$, після віднімання одного від іншого знайдемо

$$\int_0^a (x^2 - a^2)[J_1(\xi_i x) G_1(\xi_i a) - G_1(\xi_i x) J_1(\xi_i a)] dx =$$

$$= -\frac{b^2 - a^2}{\xi_i} [J_0(\xi_i b) G_1(\xi_i a) - G_0(\xi_i b) J_1(\xi_i a)].$$

Користуючись рекурентними співвідношеннями

$$J_0(\xi_i b) = J_1'(\xi_i b) + \frac{1}{\xi_i b} J_1(\xi_i b), G_0(\xi_i b) = G_1'(\xi_i b) + \frac{1}{\xi_i b} G_1(\xi_i b)$$

та враховуючи, що функції $J_1(\xi_i b), J_1(\xi_i a), G_1(\xi_i b), G_1(\xi_i a)$ задовольняють співвідношення (7.31) та (7.51), отримаємо рівність

$$\int_0^a (x^2 - a^2)[J_1(\xi_i x) G_1(\xi_i a) - G_1(\xi_i x) J_1(\xi_i a)] dx =$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{b \xi_i^2} \frac{J_1(\xi_i a)}{J_1(\xi_i b)},$$

яку в позначеннях, що використані у (7.30), можна записати у вигляді

$$\boldsymbol{H}_1\left(\frac{x^2 - a^2}{x}\right) = \frac{a^2 - b^2}{b \xi_i^2} \frac{J_1(\xi_i a)}{J_1(\xi_i b)}.$$

§ 8. Підсумовування слабозбіжних рядів та інтегралів

З формули суми членів геометричної прогресії випливає

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \tag{8.1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k} = -\ln(1-q), \tag{8.2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}, \tag{8.3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^k = \frac{q(1+q)}{(1-q)^3}. \tag{8.4}$$

Підставляючи до формул (8.1) – (8.4)

$$q = e^{-(A+iB)}, \tag{*}$$

отримаємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(A+iB)} = \frac{e^A - \cos B - i\sin B}{2(chA - \cos B)}, \tag{8.5}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-k(A+iB)} = -\frac{1}{2}\ln\left(1 + e^{-2A} - 2e^{-A}\cos B\right) - i\,arctg\frac{\sin B}{e^A - \cos B}, \tag{8.6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k(A+iB)} = \frac{chA\cdot\cos B - 1 - ishA\cdot\sin B}{2(chA - \cos B)^2}, \tag{8.7}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-k(A+iB)} = \frac{shA[chA\cdot\cos B - 1 - \sin^2 B]}{2(chA - \cos B)^3} - i\frac{\sin B[chA\cdot\cos B - 1 - sh^2 A]}{2(chA - \cos B)^3}. \tag{8.8}$$

Розподіляючи дійсну та уявну частину в (8.5) — (8.8), отримаємо формули:

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kA}\cos kB = \frac{e^{A}-\cos B}{2(chA-\cos B)},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-kA}\sin kB = \frac{\sin B}{2(chA-\cos B)},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}e^{-kA}\cos kB = -\frac{1}{2}\ln(1+e^{-2A}-2e^{-A}\cos B),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}e^{-kA}\sin kB = arctg\frac{\sin B}{e^{A}-\cos B},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-kA}\cos kB = \frac{chA\cdot\cos B-1}{2(chA-\cos B)^{2}},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-kA}\sin kB = \frac{shA\cdot\sin B}{2(chA-\cos B)^{2}}.$$

Аналогично при обчисленні інтегралів вихідними є формули:

$$\int_0^{\infty} e^{-qt}dt = \frac{1}{q}, \int_0^{\infty}\frac{e^{-qt}-e^{-t}}{t}dt = -\ln q, \int_0^{\infty} te^{-qt}dt = \frac{1}{q^{2}}.$$

Після підстановки ($q = A+iB$) приходимо до таких інтегралів

$$\int_0^{\infty} e^{-(A+iB)t}dt = \frac{A-iB}{A^2+B^2},$$

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-(A+iB)t}-e^{-t}}{t}dt = -\ln\sqrt{A^2+B^2} - iarctg\frac{B}{A},$$

$$\int_0^{\infty} te^{-(A+iB)t}dt = \frac{A^2-B^2-2iAB}{(A^2+B^2)^2}.$$

Розподілюючи дійсну та уявну частину, отримаємо:

$$\int_0^\infty e^{-At}\cos Bt dt = \frac{A}{A^2+B^2}, \int_0^\infty e^{-At}\sin Bt dt = \frac{B}{A^2+B^2},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-At}\cos Bt - e^{-t}}{t} dt = -\frac{1}{2}\ln(A^2+B^2), \int_0^\infty e^{-At}\sin Bt \frac{dt}{t} = arctg\frac{B}{A},$$

$$\int_0^\infty te^{-At}\cos Bt dt = \frac{A^2-B^2}{(A^2+B^2)^2}, \int_0^\infty e^{-At}\sin Bt\cdot t dt = \frac{2AB}{(A^2+B^2)^2}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Довести:

1. $\int_0^\infty e^{-px}\sin(qx+\lambda)dx = \frac{q\cos\lambda + p\sin\lambda}{p^2+q^2},$

2. $\int_0^\infty e^{-px}\cos(qx+\lambda)dx = \frac{p\cos\lambda - q\sin\lambda}{p^2+q^2},$

3. $\int_0^\infty e^{-Bx}(1-\cos Ax)\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\ln\frac{A^2+B^2}{B^2},$

4. $\int_0^\infty e^{-Bx}\sin\gamma x\sin ax\frac{dx}{x} = \frac{1}{4}\ln\frac{B^2+(a+\gamma)^2}{B^2+(a-\gamma)^2},$

5. $\int_0^\infty e^{-\beta x}(\cos Ax - \cos Bx)\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\ln\frac{B^2+\beta^2}{A^2+\beta^2},$

6. $\int_0^\infty e^{-\beta x}(\sin Ax - \sin Bx)\frac{dx}{x} = arctg\frac{(A-B)\beta}{AB+\beta^2},$

7. $\int_0^\infty (1-e^{-x})\cos x\frac{dx}{x} = \ln\sqrt{2},$

8. $\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha B} - \cos\alpha t}{\alpha} d\alpha = ln|t| - ln B, B>0,$

$$9. \int_0^\infty t^2 e^{-At} \cos Btdt = \frac{2A(A^2 - 3B^2)}{(A^2+B^2)^3}, A > 0.$$

2. Обчислити

$$1. \int_0^\infty \frac{e^{-\gamma x} - e^{-\beta x}}{x} \cos Bxdx, \qquad 2. \int_0^\infty \frac{e^{-\gamma x} - e^{-\beta x}}{x} \sin Axdx,$$

$$3. \int_0^\infty \frac{e^{-\gamma x} - e^{-\beta x}}{x^2} \sin Axdx, \qquad 4. \int_0^\infty (e^{-\beta x} - e^{-\gamma x} \cos Bx) \frac{dx}{x},$$

$$5. \int_0^\infty e^{-px} \sin^2 Ax \cos Bxdx, \qquad 6. \int_0^\infty e^{-px} \sin^2 Ax \sin Bx \frac{dx}{x},$$

$$7. \int_0^\infty e^{-px} \sin Ax \sin Bx \sin Cxdx, \qquad 8. \int_0^\infty e^{-px} \sin^2 Ax \sin Bx \frac{dx}{x^2},$$

$$9. \int_0^\infty (Ae^{-Bx} \sin Cx - Ce^{-Dx} \sin Ax) \frac{dx}{x^2}.$$

3. Знайти суму ряду

$$1. \sum_{k=0}^\infty e^{-(2k+1)x} \cos(2k+1)y,$$

$$2. \sum_{k=0}^\infty e^{-(2k+1)x} \sin(3k+1)y,$$

$$3. \sum_{k=1}^\infty e^{-2kx} \cos ky,$$

$$4. \sum_{k=0}^\infty (2k+1) e^{-(3k+1)x} \cos(5k+1)y.$$

§ 9. Загальна схема узагальненного методу інтегральних перетворень при наявності одного дефекта

Під дефектом вважається лінія або поверхня, на якій терплять розриви або сама функція $u(x, y)$, або її нормальна похідна до цієї лінії (або поверхні), або і те, і інше. Нехай на координатній лінії $x = a$ при $h_1 \le y \le h_2$ є дефект. Для визначенності розглянемо випадки:

1) коли зазнає розриву розшукувана функція, але задана (однакова на краях) нормальна до цієї лінії похідна, тобто

$$\begin{gathered}\langle u(a,y)\rangle \equiv u(a-0,y) - u(a+0,y) \equiv \chi(y), \\ u'(a+0,y) = u'(a-0,y) = g(y),\, h_1 \le y \le h_2;\end{gathered} \tag{9.1}$$

2) коли зазнає розриву нормальна похідна, але задані значення розшукуваної функції, тобто

$$\begin{gathered}\langle u'(a,y)\rangle \equiv u'(a-0,y) - u'(a+0,y) \equiv \chi(y), \\ u(a+0,y) = u(a-0,y) = g(y),\, h_1 \le y \le h_2.\end{gathered} \tag{9.2}$$

В обох випадках невідома функція $\chi(y) \equiv 0, y \notin (h_1, h_2)$.

Щоб застосувати стандартну схему методу інтегральних перетворень, потрібно область, де поставлена задача, розбити на дві подобласті з сумісною межею по лінії $x = a$, де розташований дефект. Якщо побудовано інтегральне перетворення

$$\begin{gathered}u_\beta(x) = \int_{b_0}^{b_1} K_2(y,\beta) r_2^{-1}(y) u(x,y)\,dy, \\ u(x,y) = \int_{l_2} R_2(y,\beta) u_\beta(x)\,d\sigma_2(\beta),\end{gathered} \tag{9.3}$$

з ядром перетворення $K_2(y,\beta)$, що є розв'язком задачі Штурма — Ліувілля:

$$r_2(p_2 K_2')' - q_2 K_2 = -\beta K_2,\ b_0 < y < b_1;$$

$$V_i[K_2] = 0,\ i = 0,1$$

та граничні умови (1.3) однорідні, то для кожної з підобластей застосовується інтегральне перетворення (9.3) та задовольняються відповідні граничні умови з (1.3). Побудовані таким чином розв язки для підобластей потім зшиваються з врахуванням умов на дефекті (9.1) або (9.2). Як результат одержуються парні інтегральні рівняння. Але цей традиційний шлях не можна застосувати, коли не існує перетворення (9.3). Складності виникають і у випадку, коли умови (1.3) не є однорідними. Варіант, що буде викладено нижче, не потребує розбиття на підобласті та наявності перетворення (9.3). Він базується на інтегральном петерворенні (1.4) по змінній x, що змінюоється у напрямку, що перетинає дефект, та складається з таких операцій.

Домножимо рівняння (1.1) на множник $r_1^{-1}(x)K_1(x,\alpha)$, але інтегрування по частинах проведемо не на всьому інтервалі зараз, а після попереднього розбиття інтервалу інтергування на два: (a_0,a) та (a,a_1). Як результат отримаємо:

$$\int_{a_0}^{a_1} K_1(p_1u')'dx = \int_{a_0}^{a} K_1(p_1u')'dx + \int_{a}^{a_1} K_1\left(\rho,u'\right)' dx = N_a + \int_{a_0}^{a_1} K_1\left(p_1K_1'\right)' dx +$$

$$+n_0[u'(a-0,y)-u'(a+0,y)]-n_1[u(a-0,y)-u(a+0,y)],\ b_0 \le y \le b_1,$$

$$n_0 \equiv n_0(a) = p_1(a)K_1(a,\alpha), \quad n_1 \equiv n_1(a) = p_1(a)K_1'(a,\alpha). \qquad (9.4)$$

Тут N_a визначається формулою (1.6).

Якщо для визначеності вважати, що на дефекті реалізована умова (9.1), врахувати, що в через (1.2),(1.3) $N_a = 0$, а також (1.7) та (9.4), то отримаємо:

$$L_2u_\alpha = -r_2^{-1}(f_\alpha - n_1\chi), b_0 < y < b_1. \qquad (9.5)$$

Це рівняння разом з граничними умовами з (1.8) буде визначати одномірну крайову задачу для трансформанти $u_\alpha(y)$. Формула для розв язку цієї крайової задачі набуде вигляду:

$$-u_\alpha(y) = n_1\int_{h_0}^{h_1} \frac{G_\alpha(y,\eta)\chi(\eta)d\eta}{r_2(\eta)} + \int_{b_0}^{b_1} \frac{G_\alpha(y,\eta)f_\alpha(\eta)d\eta}{r_2(\eta)} - \sum_{j=0}^{1}\Psi_j B_{j\alpha}.$$

Далі, використовуючи формулу обернення (1.16), отримаємо уявлення шуканої функції $u(x,y)$ через невідому функцію $\chi(y)$. Тепер необхідно виділити неравномірно збіжні інтеграли та ряди, що містяться в цьому уявленні, та отримати для них замкнуті відношення, після чого отримати вираз для $u'(x,y)$. Наступна підстановка здобутої похідної в ще нереалізовану другу умову з (9.1) на дефекті приведе до інтегрального (як правило, сінгулярного) рівняння для визначення функції $\chi(y)$. Покажемо це на такій задачі.

Антиплоска задача для пружної півплощини з тріщиною та жорстким включенням

Нехай у пружному півпросторі $(-\infty < x, z < \infty, y \geq 0)$ з вільною від напружень границею є тонке жорстке включення у вигляді полоси: $0 \leq y \leq b, -\infty < z < \infty$, що розташовано у площині $x = 0$. Потрібно визначити поле зміщень та напружень, якщо до зовнішнього краю включення додане рівномірно розподілене зсувне (тобто те, що діє уздовж z) навантаження інтесивності τ_0. Тут можна вважати ненульовим тільки зміщення $w = w(x, y)$ уздовж вісі z (антиплоска деформація), з напружень будуть існувати тільки дотичні напруження:

$$\tau_{yz} = Gw^{\bullet}, \tau_{xz} = Gw', G - \text{модуль зсуву}. \qquad (9.6)$$

Зформульована задача еквівалентна до такої задачі:

$$w'' + w^{\bullet\bullet} = 0, \quad |x| < \infty, y > 0; w^{\bullet}(x,0) = 0, \qquad (9.7)$$

при цьому рівняння Лапласа повинно задовольнятися всюди, крім області, що є занята включенням. При переході через включення дотичне напруження τ_{xz} зазнає розривів, а зміщення неперервні та постійні, тобто

$$\langle \tau_{xz}(0, y) \rangle = G\langle w'(0, y) \rangle = \chi(y), \qquad \chi \equiv 0, \qquad y \geq b, \qquad (9.8)$$

$$w(0, y) = const, \quad 0 \leq y \leq b.$$

Ці умови на включенні є аналог умов (9.1). Щоб отримати аналог умов (9.2), потрібно включення замінити на відповідний розріз (полосовидна тріщина). Якщо на краях розрізу додане однакове по знаку та величині постійне дотичне навантаження $\tau_{xz} = \tau_0$, то замість (9.8) будемо мати:

$$\langle w\ (0, y) \rangle = \varphi(y), \quad 0 \leq y \leq b, \quad \varphi(y) \equiv 0, \quad y \geq b, \qquad (9.9)$$

$$Gw'(-0, y) = Gw'(+0, y) = \tau_{0,} \quad 0 \leq y \leq b.$$

В розглянутому випадку роль інтегрального перетворення (1.4) буде виконувати перетворення Фур'є.

Помножимо рівняння (9.7) на $e^{i\alpha x}$ та проінтегруємо по частинах окремо на інтервалах $(-\infty, -0)$, $(+0, \infty)$. Стосовно першого додатка ця операція приводить до результату:

$$\left(\int_{-\infty}^{-0}+\int_{+0}^{\infty}\right)w'' e^{i\alpha x}dx=\langle w(0,y)\rangle-i\alpha\langle w'(0,y)\rangle-\alpha^2 w_\alpha(y),$$

та за формулами (9.8),(9.9) для трансформант Фур'є отримаємо одновимірну крайову задачу

$$w''_\alpha(y)-\alpha^2 w_\alpha(y)=f(y),\ 0<y<\infty;\ w'_\alpha(0)=0, \tag{9.10}$$

де $f(y)=-G^{-1}\chi(y)$ у випадку включення, тобто (9.8), та $f(y)=i\alpha\varphi(y)$ у випадку тріщини, тобто (9.9).

Спадна на нескінченності фундаментальна функція рівняння з (9.10) визначається формулою

$$\Phi(x,\xi)=-\frac{e^{-|a||x-\xi|}}{2|a|}.$$

Функція Гріна $G_\alpha(y,\eta)$ крайової задачі (9.10) повинна задовільняти умові $G'_\alpha(0,\eta)=0$, отож її можно побудувати у вигляді простої комбінації з фундаментальної функції, тобто

$$G_\alpha(y,\eta)=\Phi(y,\eta)+\Phi(y,-\eta)=-\frac{e^{-|\alpha||y-\eta|}+e^{-|\alpha||y+\eta|}}{2|\alpha|}. \tag{9.11}$$

Таким чином,

$$w_\alpha(y)=\int_0^b[\Phi(y,\eta)+\Phi(y,-\eta)]f(\eta)d\eta=\int_{-b}^b\Phi(y,\eta)f(\eta)d\eta .$$

Тут враховується, що права частина в рівнянні (9.10) дорівнює нулю при $y>b$, та проведено її продовження парним образом на від'ємні значення аргументу.

Отже, у випадку жорсткого включення

$$Gw_\alpha(y)=\int_{-b}^b\frac{e^{-|\alpha||y-\eta|}}{2|\alpha|}\chi(\eta)d\eta .$$

Аналогично у випадку тріщини будемо мати

$$w_\alpha(y)=\int_{-b}^b\frac{e^{-|\alpha||y-\eta|}}{2i|\alpha|}\varphi(\eta)d\eta=\frac{1}{2i\alpha}\int_{-b}^b\frac{\mathrm{sgn}(y-\eta)}{e^{|\alpha||y-\eta|}}\varphi'(\eta)d\eta .$$

При отриманні останньої рівності було виконано інтегрування по частинах та взято до уваги, що $\varphi(b)=0$.

Невідомі функціїї, завдяки зробленому парному продовженню правої частини рівняння (9.10), повинні бути парними, тобто

$$\|\chi(-\eta),\varphi(-\eta)\| = \|\chi(\eta),\varphi(\eta)\|. \tag{9.12}$$

Обертаючи здобуті трансформанти, знайдемо

$$Gw(x,y) = \int_{-b}^{b} \chi(\eta)d\eta \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-|\alpha||y-\eta|}\cos\alpha x}{\alpha}d\alpha\,,$$

$$w(x,y) = -\int_{-b}^{b} \varphi'(\eta)d\eta \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-|\alpha||y-\eta|}\sin\alpha x}{\alpha\operatorname{sgn}(y-\eta)}d\alpha\,. \tag{9.13}$$

Останній інтеграл розраховується за допомогою формули ГР 3.941(1), отже, у випадку тріщини отримаємо формулу для зміщень

$$w(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{b} arctg\frac{x}{y-\eta}\varphi'(\eta)d\eta. \tag{9.14}$$

У випадку задачі про включення зміщення виражаються через розбіжний інтеграл. Це пов'язано з тим, що зміщення у пружній півплощині можна отримати тільки з точністю до аддитивної сталої. Тому, для того, щоб позбавитися розбіжного інтеграла, потрібно перейти або до похідної від зміщень, або до відносних зміщень.

Наприклад, користуючись першою формулою з (9.13), отримаємо

$$G[w(x,y)-w(0,0)] = \int_{-b}^{b}\chi(\eta)d\eta\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{(e^{-\alpha|y-\eta|}\cos\alpha x - e^{-\alpha|\eta|})d\alpha}{\alpha}$$

— збіжний інтеграл для відносних зміщень. Розраховуючи його за допомогою ГР 3.951(8), отримаємо формулу для зміщень (у випадку включення):

$$Gw(x,y) = \frac{1}{4\pi}\int_{-b}^{b}\ln\frac{1}{x^2+(y-\eta)^2}\chi(\eta)d\eta + const\,. \tag{9.15}$$

Користучись (9.15), реалізуємо другу з умов (9.8) на включенні, що приведе до рівняння

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{b}\ln\frac{1}{|y-\eta|}\chi(\eta)d\eta = const, \quad |y| < b, \tag{9.16}$$

розв'язок якого випливає з відомого спектрального співвідношення. Фіксуючи довільну сталу у (9.16) за допомогою умови рівноваги включення

$$\frac{1}{2}\int_{-b}^{b}\chi(\eta)d\eta = \tau_0,$$

знайдемо

$$\pi\chi(\eta) = 2\tau_0(b^2 - \eta^2)^{-1/2}.$$

Ця формула разом з (9.15) дає повний розв'язок задачі про жорстке включення.

Аналогічно, реалізуючи другу з умов (9.9) на тріщині, за допомогою формули (9.14) отримаємо сінгулярне рівняння

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{b}\frac{\varphi'(\eta)}{\eta - y}d\eta = \frac{\tau_0}{G}, \quad |y| < b,$$

для визначення похідної від розкриття тріщини $\varphi(y)$. Застосовуючи спектральне співвідношення [A 12.2], знайдемо

$$\varphi'(\eta) = 2\tau_0 G^{-1}\eta(b^2 - \eta^2)^{-1/2}.$$

Подстановка цього виразу у (9.14) дає повний розв'язок задачі про тріщину.

Випадок перетинних дефектів (загальна схема)

Нехай крім дефекта на лінії $x = a$, є ще дефект на лінії $y = h(c_0 \le x \le c_1)$. Для визначеності будемо вважати, що на ньому реалізуються умови типу (9.1), тобто

$$\begin{gathered}\langle u(x,h)\rangle = \psi(x), \quad \psi(x) \equiv 0, \quad x \notin (c_0, c_1), \\ u^{\bullet}(x, h-0) = u^{\bullet}(x, h+0) = h(x), \quad c_0 \le x \le c_1.\end{gathered} \tag{9.17}$$

Розглянемо крайову задачу для рівняння (1.1), але, для узагальнення, у області: $a_0 < x < a_1, h_0 < y < h_n$ (тобто $[h_0, h_n] \in [b_0, b_1]$). При цьому збережемо дві перші граничні умови з (1.1), а дві других змінемо на такі дві:

$$V_i^o[u] = \beta_{io}^o u(x,h_i) + \beta_1^o u'(x,h_i) = B_i(x),\ a_0 \le x \le a_{1,}\quad i = 0,n. \quad (9.18)$$

Диференціальне рівняння (1.1) повинно задовольнятися всюди всередині області, крім точок, що співпадають з дефектами. На дефектах мають місце відповідно умови (9.1) та (9.17). Для розв'язання зформульованої крайової задачі застосуємо інтегральне перетворення (1.4) за схемою, що описана вище. Як результат отримаємо одномірну крайову задачу

$$L_2 u_\alpha = -r_2^{-1}(f_\alpha + \eta_1 \chi), \quad h_0 < y < h_{n,}\quad y \ne h,\ V_i^0[u_\alpha] = B_{i\alpha},\ i = \overline{0,n} \quad (9.19)$$

для того ж диференціального рівняння (9.5), що і у випадку одного дефекту, але з тією суттєвою різницею, що розв'язок крайової задачі (9.19) повинен мати стрибок при переході через точку h, що визначається формулою

$$\left\langle u_\alpha(h) \right\rangle = \psi_\alpha, \quad \psi_\alpha = \int_{c_0}^{c_1} r_1^{-1}(\xi) K_1(\xi,\alpha) \psi(\xi) d\xi, \quad (9.20)$$

яка отримана в результаті інтегрального перетворення першої з умов з (9.17).

Відповідно до викладеної раніше схеми розв'язок крайової задачі запишеться у вигляді:

$$u_\alpha(y) = \sum_{i=0}^{1} \psi_j(y) B_{i\alpha} - p_2(h) G_\alpha^\bullet(y,h) - \int_{h_0}^{h_1} \frac{G_a(y,\eta)}{r_2(\eta)} f_a(\eta) d\eta -$$

$$- n_1 \int_{h_1}^{h_2} \frac{G_\alpha(y,\eta)\chi(\eta) d\eta}{r_2(\eta)}. \quad (9.21)$$

Тут $G_\alpha(y,\eta)$ та ψ_j — функція Гріна та базисна система розв'язків крайової задачі (9.19). Підставивши (9.21) в (9.1), знайдемо шукану функцію $u(x,y)$ та її похідну. Реалізація других умов з (9.1) та (9.17) на дефектах приводить до системи інтегральних рівнянь відносно функцій $\chi(y)$ та $\psi(x)$.

Тут можна помітити, що викладена схема дозволяє не тільки розв'язувати задачі при наявності перетинних дефектів, але й застосувати цей підхід до випадку, коли є тільки один дефект або декілька, але з одного координатного сімейства. Це може бути більш зручнішим у деяких випадках та базується він на тому, що перетворення звершується, як і у звичайному методі інтегральних перетворень, по змінній, що змінюється уздовж дефекту.

Антиплоска задача для пружної півплощини с перетинними тріщиною та тонким включенням

Розглянемо загальну схему на прикладі антиплоскої задачі про жорстке включення, що розв'язана вище, але ускладнимо постановку наявністю тріщини (з вільними від напружень берегами) на відрізку $y = b, -c \le x \le a$. Тоді до крайової задачі (9.7) та (9.8) необхідно додати такі умови на тріщині:

$$\left\langle w(x,b\right\rangle = \psi(x), \quad \psi \equiv 0, \quad x \notin (-c,a), \quad w^{\bullet}(x,b-0) = w^{\bullet}(x,b+0) = 0. \quad (9.22)$$

Застосуємо перетворення Фур'є до рівняння (9.7) з урахуванням (9.8). Як результат приходимо до одномірної крайової задачі ($y \ne b$)

$$w''_{\alpha}(y) - \alpha^2 w_{\alpha}(y) = -G^{-1}\chi(y), \quad 0 < y < \infty; \quad w'_{\alpha}(0) = 0 \qquad (9.23)$$

з доведенням трансформованої за допомогою перетворення Фур'є першої з умов (9.22) на тріщині:

$$\left\langle w_{\alpha}(b)\right\rangle = \psi_{\alpha} = \int_{-c}^{a} e^{i\alpha\xi}\psi(\xi)d\xi \ . \qquad (9.24)$$

Розв'язок розривної крайової задачі (9.23), (9.24), відповідно до (9.21), запишемо у вигляді:

$$w_{\alpha}(y) = \psi_{\alpha} G_{\alpha}^{\bullet}(y,b) - \frac{1}{G}\int_{0}^{b} G_{\alpha}(y,\eta)\chi(\eta)d\eta \ . \qquad (9.25)$$

Тут $G_{\alpha}(y,\eta)$ — функція Гріна крайової задачі (9.23), визначена формулою (9.11), відповідно до якої

$$2G^{\bullet}(y,b) = e^{-|\alpha||y-b|}\operatorname{sgn}(b-y) + e^{-|\alpha|(y+b)} . \qquad (9.26)$$

У задачах з тріщинами зручно оперувати не з розкриттям тріщини, а з його похідною. Тому преобразуємо формулу перетворимо для ψ_{α} з (9.24), проінтегрувавши по частинах інтеграл

$$\int_{-c}^{a} \psi'(\xi)e^{i\alpha\xi}d\xi = \left[\psi(\xi)e^{i\alpha\xi}\right]_{-c}^{a} - i\alpha\int_{-c}^{a}\psi(\xi)e^{i\alpha\xi}d\xi \ .$$

Заінтегральний член тут зникає, бо розкриття тріщини по краях дорівнює нулю, тому

$$\psi_\alpha = -\frac{1}{i\alpha}\int_{-c}^{a}\psi'(\xi)e^{i\alpha\xi}d\xi .$$

Враховуючи це, на основі (9.25), (9.11) та (9.26) маємо

$$w_\alpha = \frac{1}{G}\int_{-b}^{b}\chi(\eta)\frac{e^{-|\alpha||y-\eta|}}{2|\alpha|}d\eta - \int_{-c}^{a}\frac{\psi'(\xi)e^{i\alpha\xi}d\xi}{2i\alpha}\times\left[e^{-|\alpha||y-b|}\operatorname{sgn}(b-\eta)+e^{-|\alpha||y+b|}\right].$$

Тут функція $\chi(\eta)$ парним образом продовжена на від'ємні значення аргумента з використанням формули (9.11).

За допомогою формул обернення знайдемо

$$w(x,y) = \frac{1}{G}\int_{-b}^{b}\chi(\eta)d\eta\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\alpha x e^{-\alpha|y-\eta|}}{\alpha}d\alpha +$$

$$+\int_{-c}^{a}\psi'(\xi)d\xi\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\alpha(x-\xi)}{\alpha}\left[\frac{\operatorname{sgn}(b-y)}{e^{\alpha|b-y|}}+e^{-\alpha(y+b)}\right]d\alpha. \tag{9.27}$$

Невластиві інтеграли, що містяться у (9.27), розглянуті у попередній задачі. На основі викладеного там записуємо

$$w(x,y) = \frac{1}{4G\pi}\int_{-b}^{b}\ln\frac{1}{x^2+(y-\eta)^2}\chi(\eta)d\eta +$$

$$+\int_{-c}^{c}\psi'(\xi)\left[arctg\frac{x-\xi}{b-y}+arctg\frac{x-\xi}{b+y}\right]d\xi + const,$$

(9.28)

$$w^{\bullet}(x,y) = -\frac{1}{2G\pi}\int_{-b}^{b}\frac{y-\eta}{x^2+(y-\eta)^2}\chi(\eta)d\eta -$$

$$-\int_{-c}^{a}\left[\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(b-y)^2}+\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(b+y)^2}\right]\psi'(\xi)d\xi.$$

Після того як нерівномірно збіжні інтеграли в (9.27) перетворені в потенціали або їх похідні (9.28), можна реалізувати інші умови на дефектах в (9.8) та (9.22). Тут зручно замінити другу умову з (9.8) на таке: $w^{\bullet}(0, y) = 0,\ \ 0 \le y \le b$. Як результат отримаємо систему сінгулярних інтегральних рівнянь

$$\int_{-b}^{b} \frac{\chi(\eta)d\eta}{\eta - y} + \int_{-c}^{a} \left[\frac{2G\pi\xi}{\xi^2 + (b-y)^2} + \frac{2G\pi\xi}{\xi^2 + (b+y)^2} \right] \psi'(\xi)d\xi = 0,\ \ -b \le y \le b;$$

$$\int_{-b}^{b} \frac{(b-\eta)\chi(\eta)d\eta}{x^2 + (b-\eta)^2} - \int_{-c}^{a} \left[\frac{2G\pi}{\xi - x} + \frac{2G\pi(\xi - x)}{(\xi - x)^2 + 4b^2} \right] \psi'(\xi)d\xi = 0,\ \ -c \le x \le a.$$

Зробивши заміну змінної та розбивши інтервал інтегрування $(-c, a)$ на два $(-c, 0) + (0, a)$, цю систему можна привести до системи трьох інтегральних рівнянь, що задані на інтервалі (0,1).

ДОДАТОК А

Таблиця інтегральних перетворень

Послідовність розміщення матеріалів в таблиці принята така:

1. Проміжок, на яком діє перетворення.
2. Відповідна задача Штурма — Ліувілля.
3. Пряме інтегральне перетворення.
4. Формула обернення.

А. Перетворення Фур'є

1) Скінченне синус-перетворення Фур'є

1. $a_0 = 0, a_1 = a$,

2. $u'' + \lambda u = 0, u(0) = u(a) = 0$,

3. $f_\alpha = \int_0^a f(x) \sin \alpha x dx$,

4. $f(x) = \frac{2}{a} \sum_{k=1}^{\infty} f_\alpha \sin \alpha x, \alpha = \frac{\pi k}{a}$.

2) Скінчене косинус-перетворення Фур'є

1. $a_0 = 0, a_1 = a$,

2. $u'' + \lambda u = 0, u'(0) = u'(a) = 0$,

3. $f_\alpha = \int\limits_0^a f(x)\cos\alpha x dx$,

4. $f(x) = \frac{1}{a}[f_0 + 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_\alpha \cos\alpha x], \alpha = \frac{\pi k}{a}$.

3) Повне скінченне перетворення Фур'є

1. $a_0 = -a, a_1 = a$,

2. $u'' + \lambda u = 0, u(-a) = u(a), u'(-a) = u'(a)$,

3. $f_\alpha = \int\limits_{-a}^{a} f(x)e^{i\alpha x} dx$,

4. $f(x) = \frac{1}{2a}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} f_\alpha e^{-i\alpha x}, \alpha = \frac{\pi k}{a}$.

Нестандартні скінченні синус-перетворення Фур'є

4)

1. $a_0 = 0, a_1 = a$,

2. $u'' + \lambda u = 0, u(0) = u'(a) = 0$,

3. $f_\alpha = \int\limits_0^a f(x)\sin\alpha x dx$,

4. $f(x) = \frac{2}{a}\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_\alpha \sin\alpha x, \alpha = \frac{\pi(2k-1)}{2a}$.

5)

$$1.\ a_0 = 0, a_1 = a,$$
$$2.\ u'' + \lambda u = 0, u(0) = 0, u'(a) + hu(a) = 0,$$
$$3.\ f_\alpha = \int_0^a f(x) \sin \alpha x dx,$$
$$4. f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_k} f_\alpha \sin \alpha x.$$

: $\alpha = \alpha_k$ корінь трансцендентного рівняння $\dfrac{tg\,\alpha a}{\alpha} = -\dfrac{1}{h}$,

$$\sigma_k = \frac{a}{2} + \frac{h}{2(\alpha_k^2 + h^2)}.$$

Нестандартні скінченні косинус-перетворення Фур'є

6)

$$1.\ a_0 = 0, a_1 = a,$$
$$2.\ u'' + \lambda u = 0, u'(0) = u(a) = 0,$$
$$3.\ f_\alpha = \int_0^a f(x) \cos \alpha x dx,$$
$$4. f(x) = \frac{2}{a} \sum_{k=1}^{\infty} f_\alpha \cos \alpha x, \alpha = \frac{\pi(2k-1)}{2a}.$$

7)

$$1.\ a_0 = 0, a_1 = a,$$
$$2.\ u'' + \lambda u = 0, u'(0) = 0, u'(a) + hu(a) = 0,$$
$$3.\ f_\alpha = \int_0^a f(x) \cos \alpha x dx,$$
$$4. f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_k} f_\alpha \cos \alpha x,$$

де $\alpha = \alpha_k$ корінь трансцендентного рівняння $\alpha tg \alpha a = h$,

$$\sigma_k = \frac{a}{2} + \frac{h}{2(\alpha_k^2 + h^2)}.$$

Нестандартні скінченні перетворення Фур'є

8)

1. $a_0 = 0, a_1 = a$,
2. $u'' + \lambda u = 0, u'(0) - h_0 u(0) = 0, u'(a) + h_1 u(a) = 0$,
3. $f_\alpha = \int\limits_0^a f(x)[\cos \alpha x + h_0 \frac{\sin \alpha x}{\alpha}]dx$,
4. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_k} f_\alpha [\cos \alpha x + h_0 \frac{\sin \alpha x}{\alpha}]$,

де $\alpha = \alpha_k$ корень трансцендентного рівняння $\frac{tg \alpha a}{\alpha} = \frac{h_0 + h_1}{\alpha^2 - h_0 h_1}$,

$$\sigma_k = \frac{a}{2}(1 + \frac{h_0^2}{\alpha_k^2}) + \frac{h_0}{2\alpha_k^2} + \frac{h_1}{2\alpha_k^2} \frac{\alpha_k^2 + h_0^2}{(\alpha_k^2 + h^2)}.$$

9)

1. $a_0 = 0, a_1 = a$,
2. $u'' + \lambda u = 0, u'(0) - h\ u(0) = 0, u'(a) = 0$,
3. $f_\alpha = \int\limits_0^a f(x)[\cos \alpha x + h\ \frac{\sin \alpha x}{\alpha}]dx$,
4. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_k} f_\alpha [\cos \alpha x + h\ \frac{\sin \alpha x}{\alpha}]$,

де $\alpha = \alpha_k$ корінь трансцендентного рівняння $\alpha tg \alpha a = h$,

$$\sigma_k = \frac{a}{2}(1 + \frac{h^2}{\alpha_k^2}) + \frac{h}{2\alpha_k^2}.$$

10)

$$1. a_0=0, a_1=a,$$
$$2. u''+\lambda u=0, u'(0)-h\ u(0)=0, u(a)=0,$$
$$3.. f_\alpha=\int_0^a f(x)[\cos\alpha x+h\ \frac{\sin\alpha x}{\alpha}]dx,$$
$$4. f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma_k}f_\alpha[\cos\alpha x+h\ \frac{\sin\alpha x}{\alpha}],$$

де $\alpha=\alpha_k$ корінь трансцендентного рівняння $tg\alpha a=-\alpha h$,

$$\sigma_k=\frac{a}{2}(1+\frac{h^2}{\alpha_k^2})+\frac{h}{2\alpha_k^2}\frac{2h^2\alpha_k^2+h^2-\alpha_k^2}{1+h^2\alpha_k^2}.$$

11)

$$1.\ a_0=0,\ a_1=a,$$
$$2.\ u''+\lambda u=0,\ u(a)=0,\ u'(a)+hu(a)=0,$$
$$3.\ f_\alpha=\int_0^\infty f(x)\sin\alpha x dx,$$
$$4.\ f(x)=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\mu_n^2+h^2a^2\right)\sin\alpha x}{\left(\mu_n^2+h^2a^2\right)+ha}f_\alpha,$$

$\alpha=\frac{\mu_n}{a}$, $\mu_n>0$ — корені рівняння $ctg\mu=-\frac{ha}{\mu}$.

12)

1. $a_0 = 0$, $a_1 = a$,

2. $u'' + \lambda u = 0$, $u'(0) = 0$, $u'(a) + hu(a) = 0$,

3. $f_\alpha = \int_0^\infty f(x)\cos\alpha x dx$,

4. $f(x) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\mu_n^2 + h^2a^2\right)\cos\alpha x}{\left(\mu_n^2 + h^2a^2\right) + ha} f_\alpha$,

$\alpha = \frac{\mu_n}{a}$, $\mu_n > 0$ — корені рівняння $ctg\,\mu = \frac{\mu}{ha}$.

13)

1. $a_0 = 0$, $a_1 = a$,

2. $u'' + \lambda u = 0$, $u'(0) + hu(0) = 0$, $u(a) = 0$,

3. $f_\alpha = \int_0^\infty f(x)\Psi(\alpha x)dx$,

$\Psi(\alpha x) = \alpha a\cos\alpha x + ah\sin\alpha x$,

4. $f(x) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Psi(\alpha x)}{\left(\mu_n^2 + h^2a^2\right) + ha} f_\alpha$,

$\alpha = \frac{\mu_n}{a}$, $\mu_n > 0$ — корені рівняння $ctg\,\mu = -\frac{ha}{\mu}$.

14)

1. $a_0 = 0$, $a_1 = a$,

2. $u'' + \lambda u = 0$, $u'(0) + hu(0) = 0$, $u'(a) = 0$,

3. $f_\alpha = \int\limits_0^\infty f(x)\Psi(\alpha x)dx$,

$\Psi(\alpha x) = \alpha a \cos \alpha x + ah \sin \alpha x$

4. $f(x) = \dfrac{2}{a}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\Psi(\alpha x)}{\left(\mu_n^2 + h^2 a^2\right) + ha} f_\alpha$,

$\alpha = \dfrac{\mu_n}{a}$, $\mu_n > 0$ — корені рівняння $ctg\,\mu = \dfrac{\mu}{ha}$.

15)

1. $a_0 = 0$, $a_1 = a$,

2. $u'' + \lambda u = 0$, $u'(0) + h_1 u(0) = 0$, $u'(a) + h_2 u(a) = 0$,

3. $f_\alpha = \int\limits_0^\infty f(x)\Psi(\alpha x)dx$,

$\Psi(\alpha x) = \alpha a \cos \alpha x + ah_1 \sin \alpha x$,

4. $f(x) = \dfrac{2}{a}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\Psi(\alpha x)}{\|\Psi\|^2} f_\alpha$,

$$\|\Psi\|^2 = \frac{a}{2}\left(\mu_n^2 + h_2^2 a^2\right)^{-1}\left\{\left(\mu_n^2 + h_1^2 a^2\right) \times \left[h_2 a + \left(\mu_n^2 + h_2^2 a^2\right)\right] + \right.$$
$$\left. + h_1 a\left(\mu_n^2 + h_2^2 a^2\right)\right\},$$

$\alpha = \dfrac{\mu_n}{a}$, $\mu_n > 0$ — корені рівняння $ctg\,\mu = \dfrac{\mu}{(h_1 + h_2)a} - \dfrac{h_1 h_2 a^2}{(h_1 + h_2)\mu}$.

16)

1. $a_0 = 0$, $a_1 = a$,

2. $u'' + \lambda u = 0$, $u'(0) + hu(0) = 0$, $u'(a) + hu(a) = 0$,

3. $$f_\alpha = \int_0^\infty f(x)\Psi(\alpha x)dx,$$

$\Psi(\alpha x) = \alpha a\cos\alpha x + ah\sin\alpha x$,

4. $$f(x) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Psi(\alpha x)}{\left(\mu_n^2 + h^2a^2\right) + 2ha} f_\alpha,$$

$\alpha = \dfrac{\mu_n}{a}$, $\mu_n > 0$ — корені рівняння $ctg\mu = \dfrac{\mu}{2ha} - \dfrac{ha}{2\mu}$.

17) Напівнескінченне косинус перетворення Фур'є

1. $a_0 = 0, a_1 = \infty,$

2. $u'' + \lambda u = 0, u'(0) = 0, u^{(k)}(x) < \infty, x \to \infty, k = 0,1$

3. $$f_\alpha = \int_0^\infty f(x)\cos\alpha x dx,$$

4. $$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f_\alpha \cos\alpha x d\alpha.$$

18) Напівнескінченне синус перетворення Фур'є

1. $a_0 = 0, a_1 = \infty,$

2. $u'' + \lambda u = 0, u(0) = 0, u^{(k)}(x) < \infty, x \to \infty, k = 0,1$

3. $$f_\alpha = \int_0^\infty f(x)\sin\alpha x dx,$$

4. $$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f_\alpha \sin\alpha x d\alpha.$$

19) Повне перетворення Фур'є

$$1.\ a_0 = -\infty, a_1 = \infty,$$
$$2.\ u'' + \lambda u = 0, u^{(k)}(x) < \infty, x \to \pm\infty, k = 0,1$$
$$3.\ f_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx,$$
$$4.\ f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Б. Перетворення Мелліна

1) Скінченне синус-перетворення Мелліна

$$1. a_0 = a, a_1 = b, 0 < a < b < \infty,$$
$$2. x(xu')' + \lambda u = 0, u(a) = u(b) = 0,$$
$$3. f_\alpha = \int_a^b f(x) \sin(\alpha \ln \frac{x}{a}) \frac{dx}{x},$$
$$4. f(x) = \frac{2}{\ln(\frac{b}{a})} \sum_{k=1}^{\infty} f_\alpha \sin(\alpha \ln \frac{x}{a}), \alpha = \frac{\pi k}{\ln \frac{b}{a}}.$$

2) Скінченне косинус-перетворення Мелліна

$$1. a_0 = a, a_1 = b, 0 < a < b < \infty,$$
$$2. x(xu')' + \lambda u = 0, u'(a) = u'(b) = 0,$$
$$3. f_\alpha = \int_a^b f(x) \cos(\alpha \ln \frac{x}{a}) \frac{dx}{x},$$
$$4. f(x) = \frac{1}{\ln(\frac{b}{a})} [f_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} f_\alpha \cos(\alpha \ln \frac{x}{a}), \alpha = \frac{\pi k}{\ln \frac{b}{a}}.$$

3) Нестандартне скінченне синус-перетворення Мелліна

$$1. a_0 = a, a_1 = b, 0 < a < b < \infty,$$

$$2. x(xu')' + \lambda u = 0, u(a) = u'(b) = 0,$$

$$3. f_\alpha = \int_a^b f(x) \sin(\alpha \ln \frac{x}{a}) \frac{dx}{x},$$

$$4. f(x) = \frac{2}{\ln(\frac{b}{a})} \sum_{k=1}^{\infty} f_\alpha \sin(\alpha \ln \frac{x}{a}), \alpha = \frac{\pi(2k-1)}{2 \ln \frac{b}{a}}.$$

4) Нестандартне скінченне косинус-перетворення Мелліна

$$1. a_0 = a, a_1 = b, 0 < a < b < \infty$$

$$2. x(xu')' + \lambda u = 0, u'(a) = u(b) = 0,$$

$$3. f_\alpha = \int_a^b f(x) \cos(\alpha \ln \frac{x}{a}) \frac{dx}{x},$$

$$4. f(x) = \frac{2}{\ln(\frac{b}{a})} \sum_{k=1}^{\infty} f_\alpha \cos(\alpha \ln \frac{x}{a}), \alpha = \frac{\pi(2k-1)}{2 \ln \frac{b}{a}}.$$

5) Виключний випадок скінченного синус-перетворення Мелліна

$$1. a_0 = 0, a_1 = a,$$

$$2. x(xu')' + \lambda u = 0, u(a) = 0, \left| x^k u^{(k)}(x) \right| < \infty, x \to 0, k = 0,1,$$

$$3. f_\alpha = \int_0^a f(x) \sin(\alpha \ln \frac{x}{a}) \frac{dx}{x},$$

$$4. f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f_\alpha \sin(\alpha \ln \frac{x}{a}) d\alpha.$$

6) Виключний випадок скінченного косинус-перетворення Мелліна

$1. a_0 = 0, a_1 = a,$

$2. x(xu')' + \lambda u = 0, u'(a) = 0, \left| x^k u^{(k)}(x) \right| < \infty, x \to 0, k = 0,1,$

$$3. f_\alpha = \int_0^a f(x) \cos(\alpha \ln \frac{x}{a}) \frac{dx}{x},$$

$$4. f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f_\alpha \cos(\alpha \ln \frac{x}{a}) d\alpha.$$

7) Напівнескінченне перетворення Мелліна

$1. a_0 = 0, a_1 = \infty,$

$2. x(xu')' + \lambda u = 0, \left| x^k u^{(k)}(x) \right| < \infty, x \to 0, x \to \infty, k = 0,1,$

$$3. f_\alpha = \int_0^\infty f(x) x^{\alpha-1} dx,$$

$$4. f(x) = \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} f_\alpha x^{-\alpha} d\alpha.$$

8) Нестандартне напівнескінченне синус-перетворення Мелліна

$1. a_0 = a, a_1 = \infty, 0 < a < \infty,$

$2. x(xu')' + \lambda u = 0, u(a) = 0, \left| x^k u^{(k)}(x) \right| < \infty, x \to \infty, k = 0,1,$

$$3. f_\alpha = \int_a^\infty f(x) \sin(\alpha \ln \frac{x}{a}) \frac{dx}{x},$$

$$4. f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f_\alpha \sin(\alpha \ln \frac{x}{a}) d\alpha.$$

9) Нестандартне напівнескінченне косинус-перетворення Мелліна

$$1. a_0 = a, a_1 = \infty, 0 < a < \infty,$$

$$2. x(xu')' + \lambda u = 0, u'(a) = 0, \left|x^k u^{(k)}(x)\right| < \infty, x \to \infty, k = 0,1,$$

$$3. f_\alpha = \int_a^\infty f(x)\cos(\alpha \ln \frac{x}{a}) \frac{dx}{x},$$

$$4. f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f_\alpha \cos(\alpha \ln \frac{x}{a}) d\alpha.$$

В. Перетворення Лапласа

$$1. a_0 = 0, a_1 = \infty,$$

$$2. u' + \lambda u = 0, u(0) = 1,$$

$$3. f_\alpha = \int_0^\infty f(x) e^{-\alpha x} dx,$$

$$4. f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} f_\alpha e^{\alpha x} d\alpha.$$

Г. Перетворення Ханкеля

$$1. a_0 = 0, a_1 = \infty,$$

$$2. u'' + \frac{1}{x}u' + (\lambda - \frac{\nu^2}{x^2})u = 0, u(0) = 0, |u| < \infty, x \to \infty,$$

$$3. f_\alpha = \int_0^\infty f(x) x J_\nu(\alpha x) dx,$$

$$4. f(x) = \int_0^\infty f_\alpha \alpha J_\nu(\alpha x) d\alpha.$$

Таблиця II*

П. 1. Интегральное преобразование Ханкеля функции $f(\rho)$ для сплошного цилиндра с осесимметричным температурным полем

Область ($\rho = r/R$)	Граничное условие при $\rho = 1$	Интегральное преобразование функции $f(\rho)$	Формула обращения $f(\rho)$	Изображение $\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{df}{d\rho}$
$0 \le \rho \le 1$	I рода	$f(n) = \int_0^1 \rho J_0(\mu_n \rho) f(\rho) d\rho$, $\mu_n > 0$ — корни уравнения $J_0(\mu) = 0$	$f(\rho) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n \rho)}{J_1^2(\mu_n)} \bar{f}(\mu_n)$	$\mu_n f(1) J_1(\mu_n) - \mu_n^2 \bar{f}(\mu_n)$
$0 \le \rho \le 1$	II рода	$\bar{f}(\mu_n) = \int_0^1 \rho J_0(\mu_n \rho) f(\rho) d\rho$, $\mu_n \ge 0$ — корни уравнения $J_1(\mu) = 0$	$f(\rho) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n \rho)}{J_0^2(\mu_n)} \bar{f}(\mu_n)$	$J_0(\mu_n) f'(1) - \mu_n^2 \bar{f}(\mu_n)$
$0 \le \rho \le 1$	III рода (h – относительный коэффициент теплообмена)	$\bar{f}(n) = \int_0^1 \rho J_0(\mu_n \rho) f(\rho) d\rho$, $\mu_n > 0$ — корни уравнения $\mu J_1(\mu) - \mathrm{Bi} J_0(\mu) = 0$ ($\mathrm{Bi} = hR$)	$f(\rho) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2 J_0(\mu_n \rho)}{(\mu_n^2 + \mathrm{Bi}^2) J_0^2(\mu_n)} \bar{f}(\mu_n)$	$J_0(\mu_n)[f'(1) + \mathrm{Bi} f(1)] - \mu_n^2 \bar{f}(\mu_n)$

*Таблиці взяті у [4].

Продовження таблиці II

П. 2. Интегральное преобразование Ханкеля функции $f(\rho)$ для сплошного цилиндра, температурное поле которого не является осесимметричным

Область $\rho = r/R$	Граничное условие при $\rho = 1$	Интегральное преобразование функции $f(\rho)$	Формула обращения	Изображение $\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{df}{d\rho} - \frac{n^2}{\rho^2} f$
$0 \le \rho \le 1$	I рода	$\overline{f}(\mu_{nk}) = \int_0^1 \rho J_0(\mu_{nk}\rho) f(\rho) d\rho$, $\mu_{nk} > 0$ — корни уравнения $J_n(\mu) = 0$; n - целое	$f(\rho) =$ $= 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_n(\mu_{nk}\rho)}{J'^2_1(\mu_{nk})} \overline{f}(\mu_{nk})$	$\mu_{nk} J'_n(\mu_{nk}) f(1) - \mu^2_{nk} \overline{f}(\mu_{nk})$ $(J'_n(z) = \frac{d}{dz} J_n(z))$
$0 \le \rho \le 1$	II рода	$\overline{f}(\mu_{nk}) = \int_0^1 \rho J_n(\mu_{nk}\rho) f(\rho) d\rho$, $\mu_{nk} \ge 0$ — корни уравнения $J'_n(\mu) = 0$ (при $n \ne 0$ $k = 1, 2, 3, \ldots$, при $n = 0$ $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $\mu_{00} = 0$)	$f(\rho) =$ $= 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^2_{nk} J_n(\mu_{nk}\rho)}{(\mu^2_{nk} - n^2) J^2_n(\mu_{nk})} \overline{f}(\mu_{nk})$	$J_n(\mu_{nk}) f'(1) - \mu^2_{nk} \overline{f}(\mu_{nk})$
$0 \le \rho \le 1$	III рода ($\mathrm{Bi} = hR$)	$\overline{f}(\mu_{nk}) = \int_0^1 \rho J_n(\mu_{nk}\rho) f(\rho) d\rho$, $\mu_{nk} > 0$ — положительные корни уравнения $\mu J'_n(\mu) + \mathrm{Bi} J_n(\mu) = 0$ ($\mathrm{Bi} = hR$)	$f(\rho) =$ $= 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^2_{nk} J_n(\mu_{nk}\rho)}{(\mathrm{Bi}^2 + \mu^2_{nk} - n^2) J^2_n(\mu_{nk})} \overline{f}(\mu_{nk})$	$[f'(1) + \mathrm{Bi} f(1)] J_n(\mu_{nk}) -$ $- \mu^2_{nk} \overline{f}(\mu_{nk})$

Продовження таблиці II

П. 3. Интегральные преобразования Ханкеля функции $f(r)$ для полого цилиндра с осесимметричным температурным полем

Область	Граничные условия при	При	Интегральное преобразование функции $f(r)$	Формула обращения
$R_1 \le r \le R_2$	II рода	II рода	$\overline{f}(\mu_k) = \int\limits_{R_1}^{R_2} r\Psi_k\left(\mu_k \frac{r}{R_1}\right) f(r)dr;$ $\Psi_k\left(\mu_k \frac{r}{R_1}\right) = Y_1(\mu_k)J_0\left(\mu_k \frac{r}{R_1}\right) - J_1(\mu_k)Y_0\left(\mu_k \frac{r}{R_1}\right),$ $\mu_k > 0$ — корни уравнения $Y_1(\mu)J_1\left(\mu \frac{R_2}{R_1}\right) - J_1(\mu)Y_1\left(\mu \frac{R_2}{R_1}\right) = 0$ $(\mu_0 = 0, \Psi_0 = 1)$	$f(r) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi_k\left(\mu_k \frac{r}{R_1}\right)}{\lVert\Psi_k\rVert^2}\overline{f}(\mu_k);$ $\frac{1}{\lVert\Psi_k\rVert^2}\begin{cases} \frac{\pi^2\mu_k^2 J_1^2\left(\mu_k \frac{R_2}{R_1}\right)}{2R_1^2\left[J_1^2(\mu_k) - J_1^2\left(\mu_k \frac{R_2}{R_1}\right)\right]}, & k > 0 \\ \frac{2}{R_2^2 - R_1^2} \\ k = 0 \end{cases}$
$R_1 \le r \le R_2$	II рода	III рода (h)	$\overline{f}(\mu_k) = \int\limits_{R_1}^{R_2} r\Psi_k\left(\mu \frac{r}{R_1}\right) f(r)dr;$ $\Psi_k\left(\mu_k \frac{r}{R_1}\right) = Y_1(\mu_k)J_0\left(\mu_k \frac{r}{R_1}\right) - J_1(\mu_k)Y_0\left(\mu_k \frac{r}{R_1}\right),$ $\mu_k > 0$ — корни уравнения $\frac{Y_1(\mu)J_0\left(\mu \frac{R_2}{R_1}\right) - J_1(\mu)Y_0\left(\mu \frac{R_2}{R_1}\right)}{Y_1(\mu)J_1\left(\mu \frac{R_2}{R_1}\right) - J_1(\mu)Y_1\left(\mu \frac{R_2}{R_1}\right)} = \frac{\mu}{hR_1}$	$f(r) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\Psi_k\left(\mu_k \frac{r}{R_1}\right)}{\lVert\Psi_k\rVert^2}\overline{f}(\mu_k);$ $\lVert\Psi_k\rVert^2 = \frac{2R_1^2}{\pi^2\mu_k^2}\left\{J_1^2(\mu_k)\left(1 + \frac{\mu_k^2}{h^2R_1^2}\right)\times\right.$ $\left.\times\left[J_0\left(\mu_k \frac{R_2}{R_1}\right) - \frac{\mu_k}{hR_1}J_1\left(\mu_k \frac{R_2}{R_1}\right)\right]^{-2} - 1\right\}$

Продоження таблиці II

Область	Граничные условия		Интегральное преобразование функции $f(r)$	Формула обращения
	при	При		
$R_1 \le r \le R_2$	I рода	I рода	$\overline{f}(\mu_k) = \int\limits_{R_1}^{R_2} r\Psi_k\left(\mu_k \frac{r}{R_1}\right) f(r)dr;$ $\Psi_k\left(\mu_k \frac{r}{R_1}\right) = J_0\left(\mu_k \frac{r}{R_1}\right) Y_0(\mu_k) - J_0(\mu_k) Y_0\left(\mu_k \frac{r}{R_1}\right),$ $\mu_k > 0$ — корни уравнения $J_0(\mu) Y_0\left(\mu \frac{R_2}{R_1}\right) - Y_0(\mu) - J_0\left(\mu \frac{R_2}{R_1}\right) = 0$	$f(r) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lVert\Psi_k\rVert^2} \Psi_k\left(\mu_k \frac{r}{R_1}\right) \overline{f}(\mu_k);$ $\frac{1}{\lVert\Psi_k\rVert^2} = \frac{\pi^2 \mu_k^2 J_0^2\left(\mu_k \frac{R_2}{R_1}\right)}{2R_1^2\left[J_0^2(\mu_k) - J_0^2\left(\mu_k \frac{R_2}{R_1}\right)\right]}$
$R_1 \le r \le R_2$	I рода	II рода	$\overline{f}(\mu_k) = \int\limits_{R_1}^{R_2} r\Psi_k\left(\mu_k \frac{r}{R_1}\right) f(r)dr;$ $\Psi_k\left(\mu_k \frac{r}{R_1}\right) = Y_0(\mu_k) J_0\left(\mu_k \frac{r}{R_1}\right) - J_0(\mu_k) Y_0\left(\mu_k \frac{r}{R_1}\right),$ $\mu_k > 0$ — корни уравнения $Y_0(\mu) J_1\left(\mu \frac{R_2}{R_1}\right) - J_0(\mu) Y_1\left(\mu \frac{R_2}{R_1}\right) = 0$	$f(r) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\Psi_k\left(\mu_k \frac{r}{R_1}\right)}{\lVert\Psi_k\rVert^2} \overline{f}(\mu_k);$ $\frac{1}{\lVert\Psi_k\rVert^2} = \frac{\pi^2 \mu_k^2 J_1^2\left(\mu_k \frac{R_2}{R_1}\right)}{2R_1^2\left[J_0^2(\mu_k) - J_1^2\left(\mu_k \frac{R_2}{R_1}\right)\right]}$

Продовження таблиці II

Область	Граничные условия при	При	Интегральное преобразование функции $f(r)$	Формула обращения
$R_1 \le r \le R_2$	I рода	III рода (h)	$\bar{f}(\mu_k)=\int\limits_{R_1}^{R_2} r\Psi_k\left(\mu_k\frac{r}{R_1}\right)f(r)dr;$ $\Psi_k\left(\mu_k\frac{r}{R_1}\right)=Y_0(\mu_k)J_0\left(\mu_k\frac{r}{R_1}\right)-J_0(\mu_k)Y_0\left(\mu_k\frac{r}{R_1}\right)$ $\mu_k>0$ — корни уравнения $\frac{Y_0(\mu)J_0\left(\mu\frac{R_2}{R_1}\right)-J_0(\mu)Y_0\left(\mu\frac{R_2}{R_1}\right)}{Y_0(\mu)J_1\left(\mu\frac{R_2}{R_1}\right)-J_0(\mu)Y_1\left(\mu\frac{R_2}{R_1}\right)}=\frac{\mu}{hR_1}$	$f(r)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\Vert\Psi_k\Vert^2}\Psi_k\left(\mu_k\frac{r}{R_1}\right)\bar{f}(\mu_k);$ $\Vert\Psi_k\Vert^2=\frac{2R_1^2}{\pi^2\mu_k^2}\left\{J_0^2(\mu_k)\left(1+\frac{\mu_k^2}{h^2R_1^2}\right)\times\right.$ $\left.\times J_0\left(\mu_k\frac{R_2}{R_1}\right)-\frac{\mu_k}{hR_1}J_1\left(\mu_k\frac{R_2}{R_1}\right)\right)^{-2}-1\right\}$
$R_1 \le r \le R_2$	II рода	I рода	$\bar{f}(\mu_k)=\int\limits_{R_1}^{R_2} r\Psi_k\left(\mu_k\frac{r}{R_1}\right)f(r)dr;$ $\Psi_k\left(\mu_k\frac{r}{R_1}\right)=Y_1(\mu_k)J_0\left(\mu_k\frac{r}{R_1}\right)-J_1(\mu_k)Y_0\left(\mu_k\frac{r}{R_1}\right)$ $\mu_k>0$ — корни уравнения $Y_1(\mu)J_0\left(\mu\frac{R_2}{R_1}\right)-J_1(\mu)Y_0\left(\mu\frac{R_2}{R_1}\right)=0$	$f(r)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\Psi_k\left(\mu_k\frac{r}{R_1}\right)}{\Vert\Psi_k\Vert^2}\bar{f}(\mu_k);$ $\frac{1}{\Vert\Psi_k\Vert^2}=\frac{\pi^2\mu_k^2J_0^2\left(\mu_k\frac{R_2}{R_1}\right)}{2R_1^2\left[J_1^2(\mu_k)-J_0^2\left(\mu_k\frac{R_2}{R_1}\right)\right]}$

Продоження таблиці II

Область	Граничные условия при	При	Интегральное преобразование функции $f(r)$	Формула обращения
$R_1 \le r \le R_2$	III рода (h)	I рода	$\bar{f}(\mu_k) = \int\limits_{R_1}^{R_2} r\Psi_k\left(\mu \dfrac{r}{R_1}\right) f(r)dr;$ $\Psi_k\left(\mu_k \dfrac{r}{R}\right) = Y_0\left(\mu_k \dfrac{R_2}{R_1}\right)J_0\left(\mu_k \dfrac{r}{R_1}\right) - J_0\left(\mu_k \dfrac{R_2}{R_1}\right)Y_0\left(\mu_k \dfrac{r}{R_1}\right),$ $\mu_k > 0$ — корни уравнения $\dfrac{Y_0\left(\mu_k \dfrac{R_2}{R_1}\right)J_0(\mu_k) - J_0\left(\mu_k \dfrac{R_2}{R_1}\right)Y_0(\mu_k)}{Y_0\left(\mu_k \dfrac{R_2}{R_1}\right)J_1(\mu_k) - J_0\left(\mu_k \dfrac{R_2}{R_1}\right)Y_1(\mu_k)} = \dfrac{-\mu_k}{hR_1}$	$f(r) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\Psi_k\left(\mu_k \dfrac{r}{R_1}\right)}{\lVert\Psi_k\rVert^2}\bar{f}(\mu_k);$ $\lVert\Psi_k\rVert^2 = \dfrac{2R_1^2}{\pi^2\mu_k^2}\left\{1 - J_0^2\left(\mu_k \dfrac{R_2}{R_1}\right)\left(1 + \dfrac{\mu_k^2}{h^2R_1^2}\right) \times \right.$ $\left. \times \left[J_0(\mu_k) + \dfrac{\mu_k}{hR_1}J_1(\mu_k)\right]^{-2}\right\}$

Продовження таблиці II

П. 4. Интегральные преобразования Ханкеля функции $f(\rho)$ для полого цилиндра, температурное поле которого не является осесимметричным

Область $R_1 \le r \le R_2$ $\rho = r/R_2$	Граничные условия при $\rho = R_0$	Граничные условия при $\rho = 1$	Интегральное преобразование функции $f(\rho)$	Формула обращения	Изображение $\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{df}{d\rho} - \frac{n^2}{\rho^2}\bar{f}$
$R_0 \le \rho \le 1$ $\left(R_0 = \frac{R_1}{R_2}\right)$	I рода	I рода	$\bar{f}(\mu_{nk}) = \int_{R_0}^{1} \rho \Psi_{nk}(\mu_{nk}\rho) f(\rho) d\rho;$ $\Psi_{nk}(\mu_{nk}\rho) = Y_n(\mu_{nk}R_0) J_n(\mu_{nk}\rho) -$ $- J_n(\mu_{nk}R_0) Y_n(\mu_{nk}\rho),$ $\mu_{nk} > 0$ — корни уравнения $Y_n(\mu R_0) J_n(\mu) - J_n(\mu R_0) Y_n(\mu) = 0,$ n — целое	$f(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Psi_{nk}(\mu_{nk}\rho)}{\lVert\Psi_{nk}\rVert^2} \bar{f}(\mu_{nk});$ $\lVert\Psi_{nk}\rVert^2 = \frac{1}{2} \times$ $\times \left[\Psi'^2_{nk}(\mu_{nk}) - R_0^2 \Psi'^2_{nk}(\mu_{nk}R_0)\right],$ здесь и далее $\Psi'_{nk}(\mu_{nk}R_0) = \left[\frac{d\Psi_{nk}(\mu_{nk}\rho)}{d(\mu_{nk}\rho)}\right]_{\rho=R_0}$ и т. д.	$\mu_{nk} R_0 \Psi'_{nk}(\mu_{nk}R_0) \times$ $\times f(R_0) -$ $- \mu_{nk} \Psi'_{nk}(\mu_{nk}) f(1) -$ $- \mu_{nk}^2 \bar{f}(\mu_{nk})$
$R_0 \le \rho \le 1$	I рода	II рода	$\bar{f}(\mu_{nk}) = \int_{R_0}^{1} \rho \Psi_{nk}(\mu_{nk}\rho) f(\rho) d\rho;$ $\Psi_{nk}(\mu_{nk}\rho) = Y_n(\mu_{nk}R_0) J_n(\mu_{nk}\rho) -$ $- J_n(\mu_{nk}R_0) Y_n(\mu_{nk}\rho),$ $\mu_{nk} > 0$ — корни уравнения $Y_n(\mu R_0) J'_n(\mu) - J_n(\mu R_0) Y'_n(\mu) = 0$	$f(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Psi_{nk}(\mu_{nk}\rho)}{\lVert\Psi_{nk}\rVert^2} \bar{f}(\mu_{nk});$ $\lVert\Psi_{nk}\rVert^2 = \frac{1}{2\mu_{nk}^2} \times$ $\times \left[(\mu_{nk}^2 - n^2) \Psi'^2_{nk}(\mu_{nk}) -\right.$ $\left.- \mu_{nk}^2 R_0^2 \Psi'^2_{nk}(\mu_{nk}R_0)\right]$	$\mu_{nk} R_0 \Psi'_{nk} \times$ $\times (\mu_{nk}R_0) f(R_0) +$ $- \Psi_{nk}(\mu_{nk}) f'(1) -$ $- \mu_{nk}^2 \bar{f}(\mu_{nk})$

Продоження таблиці II

Область $R_1 \le r \le R_2$, $\rho = r/R_2$	Граничные условия при $\rho = R_0$	при $\rho = 1$	Интегральное преобразование функции $f(\rho)$	Формула обращения	Изображение $\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{df}{d\rho} - \frac{n^2}{\rho^2}\bar{f}$
$R_0 \le \rho \le 1$	I рода	III рода ($\mathrm{Bi} = hR$)	$\bar{f}(\mu_{nk}) = \int_{R_0}^{1} \rho \Psi_{nk}(\mu_{nk}\rho) f(\rho)\, d\rho$; $\Psi_{nk}(\mu_{nk}\rho) = Y_n(\mu_{nk}R_0)J_n(\mu_{nk}\rho) - J_n(\mu_{nk}R_0)Y_n(\mu_{nk}\rho)$, $\mu_{nk} > 0$ — корни уравнения $\mathrm{Bi}\Psi_n(\mu) + \mu\Psi'_n(\mu) = 0$; $(\Psi'_n(\mu) = Y_n(\mu R_0)J'_n(\mu) - J_n(\mu R_0)Y'_n(\mu))$	$f(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Psi_{nk}(\mu_{nk}\rho)}{\lVert\Psi_{nk}\rVert^2}\bar{f}(\mu_{nk})$; $\lVert\Psi_{nk}\rVert^2 = \frac{1}{2\mu_{nk}^2} \times \left[(\mathrm{Bi}^2 + \mu_{nk}^2 - n^2)\Psi_{nk}^2(\mu_{nk}) - \mu_{nk}^2 R_0^2 \Psi'^2_{nk}(\mu_{nk}R_0)\right]$	$\mu_{nk}R_0\Psi'_{nk}(\mu_{nk}R_0)f(R_0) + \Psi_{nk}(\mu_{nk}) \times [f'(1) + \mathrm{Bi}f(1)] - \mu_{nk}^2\bar{f}(\mu_{nk})$
$R_0 \le \rho \le 1$	II рода	I рода	$\bar{f}(\mu_{nk}) = \int_{R_0}^{1} \rho \Psi_{nk}(\mu_{nk}\rho) f(\rho)\, d\rho$; $\Psi_{nk}(\mu_{nk}\rho) = Y_n(\mu_{nk})J_n(\mu_{nk}\rho) - J_n(\mu_{nk})Y_n(\mu_{nk}\rho)$, $\mu_{nk} > 0$ — корни уравнения $Y_n(\mu)J'_n(\mu) - J_n(\mu)Y'_n(\mu) = 0$	$f(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Psi_{nk}(\mu_{nk}\rho)}{\lVert\Psi_{nk}\rVert^2}\bar{f}(\mu_{nk})$; $\lVert\Psi_{nk}\rVert^2 = \frac{1}{2\mu_{nk}^2}\left[\mu_{nk}^2\Psi'^2_{nk}(\mu_{nk}) - (R_0^2\mu_{nk}^2 - n^2)\Psi_{nk}^2(\mu_{nk}R_0)\right]$	$-\mu_{nk}\Psi'_{nk}(\mu_{nk})f(1) - R_0\Psi_{nk}(\mu_{nk}R_0)f'(R_0) - \mu_{nk}^2\bar{f}(\mu_{nk})$

Область $R_1 \le r \le R_2$ $\rho = r/R_2$	Граничные условия		Интегральное преобразование функции $f(\rho)$
	при $\rho = R_0$	при $\rho = 1$	
$R_0 \le \rho \le 1$	II рода	II рода	$\bar{f}(\mu_{nk}) = \int\limits_{R_0}^{1} \rho \Psi_{nk}(\mu_{nk}\rho) f(\rho) d\rho;$ $\Psi_{nk}(\mu_{nk}\rho) = Y'_n(\mu_{nk}R_0) J_n(\mu_{nk}\rho) -$ $- J'_n(\mu_{nk}R_0) Y_n(\mu_{nk}\rho),$ $\mu_{nk} \ge 0$ — корни уравнения $Y'_n(\mu R_0) J'_n(\mu) - J'_n(\mu R_0) Y'_n(\mu) = 0,$ $\mu_{00} = 0;\ \Psi_{00} = 1$

Продовження таблиці II

Формула обращения	Изображение $\dfrac{d^2 f}{d\rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{df}{d\rho}-\dfrac{n^2}{\rho^2}\overline{f}$
$f(\rho)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\Psi_{nk}(\mu_{nk}\rho)}{\lVert\Psi_{nk}\rVert^2}\overline{f}(\mu_{nk});$ $\lVert\Psi_{nk}\rVert^2=\dfrac{1}{2\mu_{nk}^2}\times$ $\times\left[(\mu_{nk}^2-n^2)\Psi_{nk}^2(\mu_{nk})-\right.$ $\left.-(\mu_{nk}^2R_0^2-n^2)\Psi_{nk}^2(\mu_{nk}R_0)\right]$ $\lVert\Psi_{0k}\rVert^2=$ $=\begin{cases}\dfrac{2\left[J_1^2(\mu_{0k}R_0)-J_1^2(\mu_{0k})\right]}{\pi^2\mu_{0k}^2J_1^2(\mu_{0k})}, & k>0\\ \dfrac{1}{2}(1-R_0^2), & k=0\end{cases}$	$\Psi_{nk}(\mu_{nk})f'(1)-$ $-R_0\Psi_{nk}(\mu_{nk}R_0)\times$ $\times f'(R_0)-\mu_{nk}^2\overline{f}(\mu_{nk})$

Продоження таблиці II

Область $R_1 \le r \le R_2$ $\rho = r/R_2$	Граничные условия при $\rho = R_0$	при $\rho = 1$	Интегральное преобразование функции $f(\rho)$	Формула обращения	Изображение $\frac{d^2 f}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{df}{d\rho}-\frac{n^2}{\rho^2}\bar{f}$
$R_0 \le \rho \le 1$	II рода	III рода (Bi $= hR$)	$\bar{f}(\mu_{nk}) = \int_{R_0}^{1} \rho \Psi_{nk}(\mu_{nk}\rho) f(\rho) d\rho$; $\Psi_{nk}(\mu_{nk}\rho) = Y_n'(\mu_{nk}R_0) J_n(\mu_{nk}\rho) - J_n'(\mu_{nk}) Y_n(\mu_{nk}\rho)$, $\mu_{nk} > 0$ — корни уравнения $\mathrm{Bi}\Psi_n(\mu) - \mu\Psi_n'(\mu) = 0$, $(\Psi_n'(\mu) = Y_n'(\mu R_0) J_n'(\mu) - J_n'(\mu R_0) Y_n'(\mu))$	$f(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Psi_{nk}(\mu_{nk}\rho)}{\lVert\Psi_{nk}\rVert^2} \bar{f}(\mu_{nk})$; $\lVert\Psi_{nk}\rVert^2 = \frac{1}{2\mu_{nk}^2} \times \left[(\mathrm{Bi}^2 + \mu_{nk}^2 - n^2)\Psi_{nk}^2(\mu_{nk}) - (\mu_{nk}^2 R_0^2 - n^2)\Psi_{nk}^2(\mu_{nk}R_0)\right]$	$\Psi_{nk}(\mu_{nk}) \times [f'(1) + \mathrm{Bi}f(1)] - R_0\Psi_{nk} \times (R_0) f'(R_0) - \mu_{nk}^2 \bar{f}(\mu_{nk})$
$R_0 \le \rho \le 1$	III рода (Bi $= hR$)	I рода	$\bar{f}(\mu_{nk}) = \int_{R_0}^{1} \rho \Psi_{nk}(\mu_{nk}\rho) f(\rho) d\rho$; $\Psi_{nk}(\mu_{nk}\rho) = Y_n(\mu_{nk}) J_n(\mu_{nk}\rho) - J_n(\mu_{nk}) Y_n(\mu_{nk}\rho)$, $\mu_{nk} > 0$ — корни уравнения $\mathrm{Bi}\Psi_n(\mu R_0) - \mu\Psi_n'(\mu R_0) = 0$	$f(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Psi_{nk}(\mu_{nk}\rho)}{\lVert\Psi_{nk}\rVert^2} \bar{f}(\mu_{nk})$; $\lVert\Psi_{nk}\rVert^2 = \frac{1}{2\mu_{nk}^2} \left[\mu_{nk}^2 \Psi_{nk}'^2(\mu_{nk}) - (\mathrm{Bi}^2 R_0^2 + \mu_{nk}^2 R_0^2 - n^2)\Psi_{nk}^2(\mu_{nk}R_0)\right]$	$-R_0\Psi_{nk}(\mu_{nk}R_0) \times [f'(R_0) - \mathrm{Bi}f(R_0)] - \mu_{nk}\Psi_{nk}'(\mu_{nk}) \times f'(1) - \mu_{nk}^2 \bar{f}(\mu_{nk})$

Область $R_1 \le r \le R_2$ $\rho = r/R_2$	Граничные условия при $\rho = R_0$	Граничные условия при $\rho = 1$	Интегральное преобразование функции $f(\rho)$	Формула обращения	Изображение $\frac{d^2 f}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{df}{d\rho}-\frac{n^2}{\rho^2}\overline{f}$
$R_0 \le \rho \le 1$	III рода ($\mathrm{Bi} = hR$)	II рода	$\overline{f}(\mu_{nk}) = \int_{R_0}^{1} \rho \Psi_{nk}(\mu_{nk}\rho) f(\rho) d\rho$; $\Psi_{nk}(\mu_{nk}\rho) = Y_n'(\mu_{nk}) J_n(\mu_{nk}\rho) -$ $- J_n'(\mu_{nk}) Y_n(\mu_{nk}\rho)$, $\mu_{nk} > 0$ — корни уравнения $\mathrm{Bi}\Psi_n(\mu R_0) - \mu\Psi_n'(\mu R_0) = 0$	$f(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Psi_{nk}(\mu_{nk}\rho)}{\lVert\Psi_{nk}\rVert^2} \overline{f}(\mu_{nk})$; $\lVert\Psi_{nk}\rVert^2 = \frac{1}{2\mu_{nk}^2} \times$ $\times \left[(\mu_{nk}^2 - n^2)\Psi_{nk}^2(\mu_{nk}) -\right.$ $\left.- (\mathrm{Bi}^2 R_0^2 + \mu_{nk}^2 R_0^2 - n^2)\Psi_{nk}^2(\mu_{nk} R_0)\right]$	$\Psi_{nk}(\mu_{nk}) f'(1) -$ $- [f'(R_0) - \mathrm{Bi} f(R_0)] \times$ $\times R_0 \Psi_{nk}(\mu_{nk} R_0) -$ $- \mu_{nk}^2 \overline{f}(\mu_{nk})$
$R_0 \le \rho \le 1$	III рода ($\mathrm{Bi}_1 = h_1 R$)	III рода ($\mathrm{Bi}_1 = h_1 R$)	$\overline{f}(\mu_{nk}) = \int_{R_0}^{1} \rho \Psi_{nk}(\mu_{nk}\rho) f(\rho) d\rho$; $\Psi_{nk}(\mu_{nk}\rho) = [\mathrm{Bi}_1 Y_n(\mu_{nk} R_0) -$ $- \mu_{nk} Y_n'(\mu_{nk} R_0)] J_n(\mu_{nk}\rho) -$ $- [\mathrm{Bi}_1 J_n(\mu_{nk} R_0) -$ $- \mu_{nk} J_n'(\mu_{nk} R_0)] Y_n(\mu_{nk}\rho)$, $\mu_{nk} > 0$ — корни уравнения $[\mathrm{Bi}_2 J_n(\mu) + \mu J_n'(\mu)] \times$ $\times [\mathrm{Bi}_1 Y_n(\mu R_0) + \mu Y_n'(\mu R_0)] -$ $[\mathrm{Bi}_2 Y_n(\mu) + \mu Y_n'(\mu)] \times$ $\times [\mathrm{Bi}_1 J_n(\mu R_0) + \mu J_n'(\mu R_0)] =$ $= 0$	$f(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Psi_{nk}(\mu_{nk}\rho)}{\lVert\Psi_{nk}\rVert^2} \overline{f}(\mu_{nk})$; $\lVert\Psi_{nk}\rVert^2 = \frac{1}{2\mu_{nk}^2} \times$ $\times \left[\mu_{nk}^2 \Psi_{nk}'^2(\mu_{nk}) + (\mu_{nk}^2 - n^2) \times\right.$ $\times \Psi_{nk}^2(\mu_{nk}) - \mu_{nk}^2 R_0^2 \Psi_{nk}'^2(\mu_{nk} R_0) -$ $\left.- (\mu_{nk}^2 R_0^2 - n^2)\Psi_{nk}^2(\mu_{nk} R_0)\right]$	$\Psi_{nk}(\mu_{nk}) \times$ $\times [f'(1) + \mathrm{Bi}_2 f(1)]\overline{f} -$ $- R_0 \Psi_{nk}(\mu_{nk} R_0) \times$ $\times [f'(R_0) - \mathrm{Bi}_1 f(R_0)] -$ $- \mu_{nk}^2 \overline{f}(\mu_{nk})$

Продовження таблиці II

П. 5. Интегральные преобразования Лежандра функции $f(\eta)$ для шаровых областей

Область	Граничное условие	Интегральное преобразование функции $f(\eta)$	Формула обращения	Оператор $L(f)$	Его изображение
$-1 \le \eta \le +1$	Периодическая температура	$\bar{f}(n) = \int\limits_{-1}^{+1} f(\eta) \times$ $\times P_n(\eta) d\eta$	$f(\eta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2n+2}{2} \bar{f}(n) P_n(\eta)$	$\frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{df}{d\eta}\right]$	$-n(n+1)\bar{f}(n)$
$0 \le \eta \le 1$	I рода при $x = 0$	$\bar{f}(2n+1) =$ $= \int\limits_0^1 f(\eta) P_{2n+1}(\eta) d\eta$	$f(\eta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (4n+3) \bar{f}(2n+1) P_{2n+1}(\eta)$	$\frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{df}{d\eta}\right]$	$(2n+1)P'_{2n+1}(0) \times$ $\times f(0) -$ $-(2n+1)(2n+2) \times$ $\times \bar{f}(2n+1)$
$0 \le \eta \le 1$	II рода при $x = 0$	$\bar{f}(2n) =$ $= \int\limits_0^1 f(\eta) P_{2n}(\eta) d\eta$	$f(\eta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (4n+1) \bar{f}(2n) P_{2n}(\eta)$	$\frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{df}{d\eta}\right]$	$-P_{2n}(0) f'(0) -$ $-2n(2n+1)\bar{f}(2n)$
$-1 \le \eta \le +1$ $0 \le \varphi \le 2\pi$ $T = T(\eta, \varphi)$	Периодическая температура $T(\eta, \varphi) =$ $= T(\eta, \varphi + 2\pi)$	$T(n, m) =$ $= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-1}^{+1} e^{-im\varphi} P_n^m(\eta) \times$ $\times T(\eta, \varphi) d\eta d\varphi,$ $P_n^{(m)}(\eta)$ — присоединенная функция Лежандра	$T(\eta, \varphi) =$ $= \frac{1}{2\pi} \sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)(n+m)!}{2(n-m)!} \times$ $\times \exp(im\varphi) P_n^m(\eta) T(n, m)$	$\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{dT}{\partial\eta}\right] -$ $-\frac{1}{(1-\eta^2)}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}$	$-n(n+1)\bar{\bar{T}}(n, m)$

Область	Граничное условие	Интегральное преобразование функции $f(\eta)$	Формула обращения	Оператор $L(f)$	Его изображение
$\eta_0 \le \eta \le 1$	I рода при $\eta = \eta_0$	$\overline{f}(n) =$ $= \int\limits_{\eta_0}^{1} P_n^{(-m)}(\eta) f(\eta) d\eta$, n — корни уравнения $P_n^{(-m)}(\eta_0) = 0$; $n > -\frac{1}{2}$, n — не целое число	$f(\eta) =$ $= -\sum\limits_n \frac{(2n+1) P_n^{(-m)}(\eta) \overline{f}(n)}{(1-\eta_0^2) \frac{d}{dn}\left[P_n^{(-m)}(\eta) P^{(-m)'}(\eta_0)\right]}$	$\frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{df}{d\eta}\right] -$ $- \frac{m^2}{1-\eta^2} f(\eta)$, $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$	$(1-\eta_0^2) P_n^{'(-m)} \times$ $\times (\eta_0) f(\eta_0) -$ $- n(n+1)\overline{f}(n)$

ДОДАТОК В

Один метод отримання інтегральних перетворень

1. Почнемо з розв'язання крайової задачі Штурма – Ліувілля

$$L_s y(x,\lambda)-\lambda[r(x)]^{-1} y(x,\lambda)=0, \qquad a_0<x<a_1, \tag{1}$$

$$l_i y(x,\lambda)\equiv \alpha_{i0} y(a_i,\lambda)+\alpha_{i1} y'(a_i,\lambda)=0, \quad i=0,1, \tag{2}$$

де L_s — самоспряжений оператор Штурма — Ліувілля, обумовлений формулою

$$L_s y(x)\equiv -\left[p(x)y'(x)\right]'+q(x)y(x).$$

Будемо вважати $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $r^{-1}(x)$ неперервними функціями на відрізку $[a_0,a_1]$, а $r^{-1}(x)>0$ там же.

Крім того, у системі (1) λ — параметр, $a_i<\infty$ і відмінні від нуля, а α_{i0} — дійсні числа, $i=0,1$.

Для визначення розв'язку крайової задачі (1) виходимо з фундаментальної системи розв'язків $\varphi_0(x,\lambda)$ і $\chi_0(x,\lambda)$ диференціального рівняння з (1).

Щоб, крім диференціального рівняння крайової задачі (1), задовольнити й одну із крайових умов у (1), виберемо розв'язок (1) у виді

$$y(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)l_1\chi_0(x,\lambda)-\chi_0(x,\lambda)l_1\varphi_0(x,\lambda) \tag{3}$$

або у виді

$$y(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)l_0\chi_0-\chi_0(x,\lambda)l_0\varphi_0. \tag{4}$$

Якщо вибрати розв'язок у виді (3), то друга гранична умова в (1) буде тотожньо задоволена, а якщо використовувати (4), те тотожньо буде задоволене перше рівняння. В обох випадках, щоб обидві граничних умови (1) були задоволені, досить, щоб виконувалася рівність

$$l_0\varphi_0(x,\lambda)l_1\chi_0(x,\lambda)-l_0\chi_0(x,\lambda)l_1\varphi_0(x,\lambda)=0. \tag{5}$$

Корені $\lambda=\lambda_j$, $j=0,1,2,\dots$, цього трансцендентного рівняння і будуть власними числами крайової задачі Штурма — Ліувілля (1).

Для остаточного розв'язання останнього потрібно показати, що рівняння (5) має лічильне число дійсних не кратних нулів і власні функції, що відповідають різним власним числам, ортогональни, тобто

$$\int_{a_0}^{a_1} \frac{y(x,\lambda_j)y(x,\lambda_k)}{r(x)}dx = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ \left\| y(x,\lambda_j) \right\|^2, & j = k. \end{cases} \quad (6)$$

Відсутність кратних коренів рівняння (5) випливає з того, що кожному власному λ_j числу відповідає не більш однієї власної функції $y(x,\lambda_j)$. Це показано в роботі [12]. Для доказу лічильності коренів рівняння (5) варто звести крайову задачу до рівносильного їй інтегрального рівняння [12]. З цією метою побудуємо функцію Гріна $G(x,\xi)$ самоспряженої крайової задачі

$$L_s y(x) = f(x), \qquad a_0 < x < a_1,$$

$$l_i y(x) = 0, \qquad i = 0,1. \quad (7)$$

Використовуючи фундаментальну систему розв'язків $y_j(x)$ диференціального рівняння $L_s y_j(x) = 0$, $j = 0,1$, знаходимо базисну систему розв'язків [7] $\psi_j(x)$ крайової задачі (7), тобто функції, що володіють властивістю

$$L_s \psi_j(x) = 0, \qquad a_0 < x < a_1,$$

$$l_i \psi_j(x) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 0,1. \quad (8)$$

Тоді функцію Гріна визначаємо по формулі

$$G(x,\xi) = G(\xi,x) = \begin{cases} c_0 \psi_0(\xi)\psi_1(x), & x < \xi, \\ c_0 \psi_0(x)\psi_1(\xi), & x < \xi, \end{cases}$$

де $c_0^{-1} = p(x)W(\psi_0,\psi_1)$. Ця величина постійна, оскільки вронксіан будь-яких двох лінійно незалежних розв'язків $y_j(x)$, $j = 0,1$, диференціального рівняння з (8) має властивість $p(x)W(y_0,y_1) = \text{const}$, що перевіряється безпосередньо.

Володіючи функцією Гріна крайової задачі (7), зводимо [12] задачу Штурма — Ліувілля (1) до інтегрального рівняння

$$\varphi(x) - \lambda \int_{a_0}^{a_1} \mathcal{K}(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi = 0, \quad a_0 \le x \le a_1, \quad (9)$$

із симетричним і неперервним ядром

$$\mathcal{K}(x,\xi)=\frac{G(x,\xi)}{\sqrt{r(x)r(\xi)}},$$

при цьому $y(x,\lambda)=\sqrt{r(x)}\,\varphi(x)$. У [12] показана рівносильність крайової задачі (1) і інтегрального рівняння (9). Звідси і випливає лічильність і дійсність коренів рівняння (5), тобто власних чисел крайової задачі Штурма – Ліувілля (1) і інтегрального рівняння (9), а також ортогональність (6) власних функцій. Якщо тепер скористатися теоремою розкладання Стеклова [12], то усяку функцію $f(x)$, що задовольняє граничній умові $l_i f(x)=0,\ i=0,1$, і має неперервну другу похідну на відрізку $[a_0,a_1]$, можна розкласти в рівномірно збігаючийся ряд по власних функціях $y(x,\lambda_j)$ задачі Штурма – Ліувіліля:

$$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}c_j y(x,\lambda_j)\,. \tag{10}$$

Скориставшись ортогональністю (6), знайдемо коефіцієнти розкладання c_j. Таким чином, замість (10) будемо мати

$$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{y(x,\lambda_j)}{\left\| y(x,\lambda_j)\right\|^2}\int_{a_0}^{a_1}\frac{y(x,\lambda_j)}{r(x)}f(x)\,dx\,. \tag{11}$$

Якщо тепер узяти до уваги уточнення теореми розкладання Стеклова, зроблене в [12], то отриманий результат можемо сформулювати у виді наступної теореми.

Теорема. *Якщо визначена трансформанта функції* $f(x)$, що задається *формулою*

$$f_i=\int_{a_0}^{a_1}\frac{y(x,\lambda_j)f(x)}{r(x)}dx,$$

то для отримання оригіналу, тобто самої функції $f(x)$, *варто скористатися рядом*

$$f(x)=\sum_{j=0}^{\alpha}\frac{y(x,\lambda_j)}{\left\| y(x,\lambda_j)\right\|^2}\cdot f_j\,,$$

що рівномірно збігається, коли функція $f(x)$ *неперервна на* $[a_0,a_1]$, *має похідну з скінченим числом розривів на* $[a_0, a_1]$ *і задовольняє граничним умовам* $l_i\, f(x) = 0,\ i = 0,1$.

Запропонований метод одержання інтегральних перетворень уже застосовувався в роботі [8] для окремих випадків.

У роботі [9] для одержання нових інтегральних перетворень застосований метод Титчмарша [14]. Викладеним нижче методом виведемо більш загальні інтегральні перетворення, чим отримані в [9].

2. У роботі [9] для функцій $f(\theta)$, заданих на відрізку $[\omega_0, \omega_1]$, де $\omega_0 \le 0,\ \omega_1 < \pi$, було виведено нове інтегральне перетворення, ядром якого була лінійна комбінація сферичних функцій, верхні індекси яких були цілими позитивними числами. Як побачимо нижче, деякі крайові задачі математичної фізики можна розв'язувати точно за допомогою інтегральних перетворень з ядрами, що містять сферичні функції з верхніми індексами, що є позитивними, але не цілими числами. Дамо узагальнення результатів роботи [9] на цей випадок. Для цього розглянемо окремий випадок крайової задачі (1):

$$L_s\, y_m(\theta, \nu) - \nu(\nu+1)\sin\theta\, y_m(\theta,\nu) = 0, \quad \omega_0 < \theta < \omega_1 < \pi, \quad m = 0,1,$$

$$l_i^m\, y_m(\theta,\nu) = 0, \quad i = 0,1, \tag{12}$$

де ν — параметр, диференціальний оператор Штурму L_s має вид

$$L_s\, y(\theta) = -\left[\sin\theta\, y^{\bullet}(\theta)\right]^{\bullet} + \mu^2 \operatorname{cosec}\theta\, y(\theta),$$

а граничні функціонали в (12) визначаються формулами

$$l_i^0\, y(\theta) = y(\omega_i), \quad l_i^1\, y(\theta) = h_i\, y(\omega_i) + y^{\bullet}(\omega_i), \quad i = 0,1, \tag{13}$$

причому h_i — дійсні числа, μ — позитивне (не ціле) число. Крапкою позначена похідна по θ. Фундаментальною системою розв'язків диференціального рівняння з (12) будуть [1] сферичні функції $P_\nu^\mu(\cos\theta)$ і $Q_\nu^\mu(\cos\theta)$, тому відповідно до викладеного в **п. 1** розв'язком крайових задач (12) будуть функції

$$y_m(\theta,\nu) = P_\nu^\mu(\cos\theta)\, l_1^m Q_\nu^\mu(\cos\theta) - Q_\nu^\mu(\cos\theta)\, l_1^m P_\nu^\mu(\cos\theta), \quad m = 0,1, \tag{14}$$

а власні числа $\nu = \nu_j,\ j = 0,1,\ldots,$ будуть визначатися з трансцендентних рівнянь

$$\Omega_{\nu,\mu}^{m} \equiv l_0^m P_\nu^\mu(\cos\theta) l_1^m Q_\nu^\mu(\cos\theta) - l_0^m Q_\nu^\mu(\cos\theta) l_1^m P_\nu^\mu(\cos\theta) = 0, \ m = 0,1. \quad (15)$$

При цьому розкладання (11) запишеться у виді

$$f(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y_m(\theta, \nu_j)}{\left\| y_m(\theta, \nu_j) \right\|^2} \int_{\omega_0}^{\omega_1} y_m(\theta, \nu_j) \sin\theta \, f(\theta) \, d\theta, \qquad k = 0,1. \quad (16)$$

Перш, ніж сформулювати аналог теореми з **п. 1** для розглянутої частки випадку, займемося обчисленням

$$\left\| y_m(\theta, \nu_j) \right\|^2 = \int_{\omega_0}^{\omega_1} y_m^2(\theta, \nu_j) \sin\theta \, d\theta = \sigma_{\mu j}^m, \quad m = 0,1, \quad j = 0,1,2,\ldots$$

Згідно (14) маємо

$$\sigma_{\mu j}^m = b^2 J_\nu^{(1)} + a^2 J_\nu^{(2)} - 2ab J_\nu^{(0)}, \quad (17)$$

$$a = l_1^m P_\nu^\mu(\cos\theta) \equiv l_1^m P_\nu^\mu, \qquad b = l_1^m Q_\nu^\mu(\cos\theta) \equiv l_1^m Q_\nu^\mu,$$

$$\left\{ \begin{matrix} J_\nu^{(1)} \\ J_\nu^{(2)} \end{matrix} \right\} = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \left\{ \begin{matrix} P_\nu^\mu(\cos\theta) \\ Q_\nu^\mu(\cos\theta) \end{matrix} \right\}^2 \sin\theta \, d\theta, \quad J_\nu^{(0)} = \int_{\omega_0}^{\omega_1} P_\nu^\mu(\cos\theta) Q_\nu^\mu(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta.$$

Тут і далі під ν маємо на увазі власні числа ν_j. Для обчислення інтегралів, як і в [8], використовуємо метод Ломмеля [3], заснований на оперуванні з двома диференціальними рівняннями Лежандра

$$L_s U(\theta) = \nu(\nu+1) \sin\theta \, U(\theta), \qquad L_s V(\theta) = \gamma(\gamma+1) \sin\theta \, V(\theta), \quad (18)$$

розв'язками яких відповідно є функції $U(\theta) = P_\nu^\mu(\cos\theta)$, $Q_\nu^\mu(\cos\theta)$ і $V(\theta) = P_\gamma^\mu(\cos\theta)$, $Q_\gamma^\mu(\cos\theta)$, і що дозволяє одержати формулу

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \sin\theta \, U(\theta) V(\theta) \, d\theta = \frac{\left[U(\theta) \dot{V}(\theta) \sin\theta - V(\theta) \dot{U}(\theta) \sin\theta \right]_{\omega_0}^{\omega_1}}{\nu(\nu+1) - \gamma(\gamma+1)}.$$

Спираючись на цю формулу і виконуючи операції аналогічні, пророблених у [8], знаходимо

$$\begin{Bmatrix} J_\nu^{(1)} \\ J_\nu^{(2)} \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2\nu+1}\left[\sin\theta \begin{Bmatrix} P_\nu^\mu(\cos\theta)\dfrac{d}{d\nu}\dot{P}_\nu^\mu(\cos\theta) \\ Q_\nu^\mu(\cos\theta)\dfrac{d}{d\nu}\dot{Q}_\nu^\mu(\cos\theta) \end{Bmatrix} - \right.$$

$$\left. -\sin\theta \begin{Bmatrix} \dot{P}_\nu^\mu(\cos\theta)\dfrac{d}{d\nu}P_\nu^\mu(\cos\theta) \\ \dot{Q}_\nu^\mu(\cos\theta)\dfrac{d}{d\nu}Q_\nu^\mu(\cos\theta) \end{Bmatrix} \right]_{\omega_0}^{\omega_1} - (2\nu+1)J_\nu^{(0)} =$$

$$= \left[\sin\theta\, P_\nu^\mu(\cos\theta)\frac{d}{d\nu}\dot{Q}_\nu^\mu(\cos\theta) - \sin\theta\, \dot{P}_\nu^\mu(\cos\theta)\frac{d}{d\nu}Q_\nu^\mu(\cos\theta) \right]_{\omega_0}^{\omega_1} =$$

$$= \left[\sin\theta\, Q_\nu^\mu(\cos\theta)\frac{d}{d\nu}\dot{P}_\nu^\mu(\cos\theta) - \sin\theta\, Q_\nu^\mu(\cos\theta)\frac{d}{d\nu}\dot{P}_\nu^\mu(\cos\theta) \right]_{\omega_0}^{\omega_1},$$

$$\dot{P}_\nu^\mu(\cos\theta) = \frac{d}{d\theta}P_\nu^\mu(\cos\theta)\cdot \qquad (19)^{a}$$

Підставивши отримані вирази в (17) (причому при підстановці $2J_\nu^{(0)}$ варто використовувати суму двох останніх виразів), одержимо

$$\sigma_{\mu j}^m = \| y_k(\theta,\nu_j) \|^2 = -\left[\frac{\Gamma_{\mu\nu} l_1^m Q_\nu^\mu}{(2\nu+1) l_0^m Q_\nu^\mu} \frac{d}{d\nu}\Omega_{\nu,\mu}^m \right]_{\nu=\nu_j}, \quad m = 0,1, \quad (19)$$

де

$$\Gamma_{\mu\nu} = 2^{2\mu}\cdot \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}(\mu+\nu)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\mu+\nu)\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}(\nu-\mu)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\nu-\mu)\right)}.$$

Приймаючи в увагу (19) і співвідношення (16), установлюємо нове інтегральне перетворення

$$f_j^m = \int_{\omega_0}^{\omega_1} y_m(\theta,\nu_j)\sin\theta\, f(\theta)\, d\theta, \qquad m = 0,1, \qquad j = 0,1,2,\dots, \quad (20)$$

з формулою обернення

$$f(\theta)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{y_m(\theta,\nu_j)}{\sigma_{\mu j}^m}\cdot f_j^m, \qquad m=0,1. \tag{21}$$

При цьому для рівномірної збіжності записаного ряду на функцію $f(\theta)$ варто накласти ті ж обмеження, що й у теоремі.

3. При одержанні сформульованого результату з метою залишатися в рамках регулярності крайової задачі Штурму – Ліувілля зроблене обмеження $\omega_0 \neq 0$. У багатьох задачах потрібно інтегральне перетворення (20) при $\omega_0 = 0$. В роботі [8] таке перетворення для цілих позитивних значень верхніх індексів сферичних функцій, тобто коли $\mu = m$, де m — ціле число, отримано граничним переходом $\omega_0 \to 0$. При цьому використана формула 3.6.1 (2) з [1] для $P_\nu^m(\cos\theta)$, отримана там методом, у якому істотно використовується те, що m — ціле позитивне число. Щоб зробити у формулах (20) і (21) граничний перехід $\omega_0 \to 0$, необхідно мати аналогічну формулу для $P_\nu^\mu(\cos\theta)$ при μ не цілому*. Така формула отримана і має вид (для $0<\theta<\pi$)

$$\tilde{P}_\nu^\mu(\cos\theta)=\frac{\Gamma(\nu+1)\sin^\mu\theta}{\Gamma(\nu+\mu+1)}F\left(1+\mu+\nu,\mu-\nu;1+\mu;\sin^2\frac{\theta}{2}\right). \tag{22}$$

Щоб переконатися в її справедливості, досить перевірити, що $U(\theta)$, обрана у виді (22), задовольняє диференціальному рівнянню Лежандра (18). З представлення (22) випливає, що

$$\begin{aligned}&\tilde{P}_\nu^\mu(\cos\theta)\Big|_{\theta=0}=0, \qquad \mu>0,\\ &l_0^m\tilde{P}_\nu^\mu(\cos\theta)\Big|_{\omega_0=0}=0, \qquad \mu>1.\end{aligned} \tag{23}$$

З огляду на це, зробимо граничний перехід $\omega_0 \to 0$ $(\omega_1=\omega)$ у формулах (20) і (21), причому цей перехід краще зробити у формулі (16), з якої вони отримані. Зазначений граничний перехід попередньо зробимо в трансцендентному рівнянні (15), з якого визначаються власні числа ν_j. У силу (23) трансцендентне рівняння (15) перейде в рівняння

$$l_1^m\tilde{P}_\nu^\mu(\cos\theta)\equiv l_1^m\tilde{P}_\nu^\mu=0, \qquad m=0,1, \qquad \omega_1=\omega, \tag{24}$$

і власні функції (14) будуть визначатися формулами

$$y_m(\theta,\nu)=\tilde{P}_\nu^\mu(\cos\theta)\,l_1^m Q_\nu^\mu. \tag{25}$$

---

* У [10] граничний перехід зроблений некоректно, тому тут внесені відповідні зміни.

При граничному переході $\omega_0 \to 0$ у виразі для $\frac{\partial \Omega_{\nu,\mu}^m}{\partial \nu}$ головний внесок буде вносити доданок $-l_0^m Q_\nu^\mu \frac{\partial}{\partial \nu}(l_1^m P_\nu^\mu)$, тому що $Q_\nu^\mu(\cos\theta)\Big|_{\theta\to 0} \to \infty$.

Якщо все це врахувати у формулі (16), то при $\omega_0 \to 0$ формули (20) і (21) переходять у наступні:

$$f_j^m = \int_0^\omega \tilde{P}_\nu^\mu(\cos\theta)\sin\theta\, f(\theta)d\theta, \qquad m = 0,1, \tag{26}$$

$$f(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{\tilde{P}_\nu^\mu(\cos\theta)}{\left\| \tilde{P}_\nu^\mu(\cos\theta) \right\|^2} \right]_{\nu=\nu_j} \cdot f_j^m, \qquad m = 0,1, \tag{27}$$

тобто як власні функції можна брати

$$y_m(\theta,\nu) = \tilde{P}_\nu^\mu(\cos\theta), \qquad m = 0,1,$$

а норма обчислюється за формулою (19[a]). Важливо відзначити, що трансцендентне рівняння (24) при $m = 0$, $\omega_1 = \; = \omega = \pi/2$ має розв'язок у явному виді. Дійсно, у цьому випадку воно приймає вид

$$\tilde{P}_\nu^\mu\left[\cos\frac{\pi}{2}\right] = \tilde{P}_\nu^\mu(0) =$$

$$= \Gamma(\nu+1)\Gamma(1+\mu)\sqrt{\pi}\left[\Gamma(\mu+\nu+1)\,\Gamma(1+\frac{\mu+\nu}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{\mu-\nu}{2})\right]^{-1} = 0. \tag{28}$$

Якщо врахувати (22), а також формулу 3.8 (50) з [1], то рівняння (28) запишеться у виді

З огляду на полюси Γ-функції, установлюємо дві серії коренів рівняння (29):

$$\left[\Gamma(\mu+\nu+1)\,\Gamma(1+\frac{\mu+\nu}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{\mu-\nu}{2})\right]^{-1} = 0. \tag{29}$$

$$v_j=-\mu-2(j+1)\quad v_j^1=-\mu-j-1,\;\; v_j^2=1+\mu+2j,\quad j=0,1,2,..., \tag{30}$$

причому перші дві серії відкидаємо, оскільки на основі (25) і (22) власні функції $y_0(\theta,\nu_j^1)=0,\ j=0,1,2,\dots$. Отже, власні функції $y_0(\theta,\nu_j)$ згідно (25) будуть визначатися формулою

$$y_0(\theta,\nu_j)=\tilde{P}^{\mu}_{\mu+2j+1}(\cos\theta)=\frac{(2\sin\theta)^{\mu}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\lambda)C^{\lambda}_{2j+1}(\cos\theta),\;\; \lambda=\mu+\frac{1}{2}. \tag{31}$$

(Тут $C_n^{\lambda}(z)$ — многочлени Гегенбауэра). Щоб переконатися в справедливості другої рівності, варто врахувати (22), (30), а також формулу 10.9 (20) з [2]. Щоб записати інтегральне перетворення (26), (27) для розглянутого випадку, потрібно обчислити

$$l_1^0 Q_\nu^\mu\Big|_{\theta=\pi/2}=Q_\nu^\mu(0),\qquad \frac{d}{d\nu}\tilde{P}_\nu^\mu(0)\ \text{при}\ \nu=\mu+2j+1. \tag{32}$$

Користуючись формулою 3.4 (21) з [1], одержуємо

$$Q^{\mu}_{\mu+2j+1}(0)=-\,2^{\mu+1}\cos\mu\pi\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu+j+1)\Gamma^{-1}\left(\frac{3}{2}+j\right). \tag{33}$$

Щоб одержати значення для другого з виразів (32), варто виконати диференціювання (29) по ν і покласти потім $\nu=\mu+2j+1$. У результаті знаходимо

$$\left.\frac{d\,\tilde{P}_\nu^\mu(0)}{d\nu}\right|_{\nu=\mu+2j+1}=\frac{\Gamma(2\mu+2j+1)}{2^{\mu}\,\Gamma\left(\mu+j+\frac{1}{2}\right)}. \tag{34}$$

При одержанні (34) використана рівність

$$\psi(-2j-1)\Gamma^{-1}(-2j-1)=\Gamma(2j+2),\qquad j=0,1,2,\dots,$$

що випливає з формули (1.24) з [7]. Якщо врахувати рівності (31), (33) і (34), то формули (26) і (27) будуть породжувати таке інтегральне перетворення для функцій, заданих на відрізку $[0,\pi/2]$:

$$f_j=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{\mu}\theta\, C^{\lambda}_{2j+1}(\cos\theta)\sin\theta f(\theta)\,d\theta,\qquad \lambda=\mu+\frac{1}{2},$$

$$f(\theta) = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{\lambda-1}\Gamma^2(\lambda)(\lambda+1+2j)}{\pi(\lambda+j)\Gamma(2\lambda+2j)} \sin^{\mu}\theta C_{2j+1}^{\lambda}(\cos\theta)\cdot f_j .$$

При отриманні $y_1(\theta,\nu_j)$, тобто розв'язку задачі (12) при $m=1$ і $0<\theta<\omega$, варто врахувати, що власні числа ν_j — це корені рівняння (24) при $m=1$. Явних формул для коренів цього рівняння не вдалося знайти. Однак це вдається зробити для окремого випадку, коли в граничних функціоналах (13) покласти $h_i=0,\ i=0,1$, і $\omega=\pi/2$. У цьому випадку власна функція буде визначатися формулою

$$y_*(\theta,\nu_j) = \tilde{P}_{\nu_j}^{\mu}(\cos\theta), \quad j=0,1,2,\ldots, \quad 0<\theta<\pi/2, \tag{35}$$

і згідно (13) і (24) власні числа ν_j знаходимо з рівняння

$$\tilde{P}_{\nu}^{\mu}\left[\cos\frac{\pi}{2}\right] = \tilde{P}_{\nu}^{\mu}(0) = \frac{d}{d\theta}\tilde{P}_{\nu}^{\mu}(\cos\theta)\Big|_{\theta=\pi/2} = 0.$$

Виконавши диференціювання виразу (22) по θ і поклавши $\theta=\pi/2$, одержуємо

$$\tilde{P}_{\nu}^{\mu}(0) = \frac{(\mu-1)\Gamma(1+\mu+\nu)}{2(1+\mu)}\ \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\ \frac{\Gamma(2+\mu)\sqrt{\pi}}{\Gamma(3/2+\frac{\mu+\nu}{2})\ \Gamma(1+\frac{\mu-\nu}{2})} = 0. \tag{36}$$

З огляду на полюси гамма-функції Ейлера, виявляємо дві серії коренів трансцендентного рівняння (36):

$$\tilde{\nu}_j = \mu+2j+2, \quad \nu_j^1 = -\mu-j-1, \ \ \nu_j^2 = -1-\mu-2j, \quad j=0,1,2,\ldots$$

При цьому значення з другої та третьої серії не можуть бути власними числами, тому що власні функції, що відповідають їм, (35) у силу (22) будуть дорівнювати нулю. Таким чином, власні функції (35) будуть визначатися формулою

$$y_*(\theta,\nu_j) = P_{\mu+2j+2}^{\mu}(\cos\theta) = \frac{2^{\mu}\Gamma(\lambda)}{\sqrt{\pi}} C_{2j}^{\lambda}(\cos\theta), \qquad \lambda = \mu+\frac{1}{2}.$$

У справедливості другої рівності можна переконатися, якщо врахувати (22), а також формулу 10.9 (21) з [2].

Щоб виявити, який вид набувають формули (26) і (27) для часного випадку, що розбирається, варто визначити

$$l_1^1 Q_{\nu}^{\mu} = \dot{Q}_{\nu}^{\mu}(0), \quad \frac{dl_1^1}{d\nu} P_{\nu}^{\mu} = \frac{d}{d\nu}P_{\nu}^{\mu}(0) \quad \text{при} \quad \nu=\mu+2j+2, \ \ j=0,1,2,\ldots .$$

Скориставшись формулою 3.4 (22) з [1], знаходимо

$$\dot{Q}^{\mu}_{\mu+2j}(0) = -\sqrt{\pi}\, 2^{\mu} (-1)^{j} \cos\mu\pi\, \Gamma(\mu+1+j)\, \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2}+j\right).$$

Далі, після диференціювання (36) по ν і фіксації $\nu = \mu + 2j$ одержимо

$$\frac{d}{d\nu} \tilde{P}^{\mu}_{\nu}(0) \Bigg|_{\nu=\mu+2j} = -\frac{\Gamma(2\mu+2j+1)}{2^{\mu}\, \Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}+j\right)}.$$

З огляду на все це, з (26) і (27) виводимо таке інтегральне перетворення для функцій $f(\theta)$, заданих на відрізку $0 \le \theta \le \pi/2$:

$$f_j = \int_0^{\pi/2} \sin^{\mu}\theta\, C^{\lambda}_{2j}(\cos\theta) \sin\theta\, f(\theta)\, d\theta, \qquad \lambda = \mu + \frac{1}{2},$$

$$f(\theta) = \frac{\sqrt{\pi}\, 2^{2\lambda}\, \Gamma(\lambda)}{\Gamma(1-\lambda)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j+\lambda)(-1)^{j}\, j!}{\Gamma(2j+2\lambda)} \sin^{\mu}\theta\, C^{\lambda}_{2j}(\cos\theta)\, f_j\, . \qquad (37)$$

4. Далі нам знадобиться ще одне інтегральне перетворення, що випливає з розв'язку задачі Штурму – Ліувілля (1), коли $r(x) = 1$, $x = r$, параметр λ замінений на λ^2, а в операторі (2) $p(x) = p(r) = r^2$, $q(x) = q(r) = -1/4$. У результаті одержуємо крайові задачі

$$\left[r^2 v'_m(r,\lambda)\right]' + \left(\frac{1}{4} + \lambda^2\right) v_m(r,\lambda) = 0, \qquad a_0 < r < a_1, \qquad m = 0,1\,,$$

$$l^m_j v_m(r,\lambda) = 0, \;\; i = 0,1, \;\; l^0_i v(r) = v(a_i), \;\; l^1_i v(r) = h_i v(a_i) + v'(a_i)\, . \quad (38)$$

Це окремий випадок ($k = 0$) крайових задач, розв'язаних у [8]. Оскільки з отриманих там розв'язків визначити розв'язок задач (38) шляхом граничного переходу $k \to 0$ важко, будемо розв'язувати крайові задачі (38) з використанням схеми **п.** 1. Безпосередньо перевіркою можна переконатися, що фундаментальною системою розв'язків диференціального рівняння з (38) будуть функції

$$\begin{Bmatrix} \varphi_0(r,\lambda) \\ \chi_0(r,\lambda) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{r}} \begin{Bmatrix} A_{\lambda}(r) \\ B_{\lambda}(r) \end{Bmatrix}, \qquad \begin{Bmatrix} A_{\lambda}(r) \\ B_{\lambda}(r) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sin(\lambda \ln r) \\ \cos(\lambda \ln r) \end{Bmatrix}. \qquad (39)$$

Власні функції крайових задач (38) згідно (4) будуть визначатися формулою

$$v_m(r,\lambda)=\varphi_0(r,\lambda)\,l_0^m\chi_0-\chi_0(r,\lambda)\,l_0^m\varphi_0,\qquad m=0,1. \tag{40}$$

Застосування граничних функціоналів l_i^m до функцій (39) еквівалентно застосуванню до функцій $A_\lambda(r)$ і $B_\lambda(r)$ таких функціоналів:

$$\tilde{l}_i^0 v(r)=v(a_i),\qquad i=0,1,\quad \tilde{l}_i^1 v(r)=a_i^{-1}\mathsf{D}_i v(a_i)+v'(a_i), \tag{41}$$

де

$$\mathsf{D}_i=a_ih_i-1/2,\qquad i=0,1, \tag{42}$$

тому замість (40) можемо записати

$$v_m(r,\lambda)=r^{-1/2}\left[A_\lambda(r)\tilde{l}_0^m B_\lambda-B_\lambda(r)\tilde{l}_0^m A_\lambda\right]. \tag{43}$$

Далі, використовуючи (41) і (39), знаходимо, що

$$\begin{Bmatrix}\tilde{l}_i^1 A_\lambda\\ \tilde{l}_i^1 B_\lambda\end{Bmatrix}=\frac{1}{a_i}\begin{Bmatrix}\mathsf{D}_iA_\lambda(a_i)+\lambda B_\lambda(a_i)\\ \mathsf{D}_iB_\lambda(a_i)-\lambda A_\lambda(a_i)\end{Bmatrix}, \tag{44}$$

і власні функції (43) записуємо у виді

$$\begin{Bmatrix}v_0(r,\lambda)\\ a_0v_1(r,\lambda)\end{Bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{r}}\begin{Bmatrix}\sin(\lambda\ln(r/a_0))\\ D_0\sin(\lambda\ln(r/a_0))-\lambda\cos(\lambda\ln(r/a_0))\end{Bmatrix}. \tag{45}$$

Квадрати норм цих власних функцій будуть визначатися формулами

$$\|v_0(r,\lambda)\|^2=\int_{a_0}^{a_1}\frac{\sin^2(\lambda\ln(r/a_0))}{r}dr=\frac{\gamma}{2},\qquad \gamma=\ln\frac{a_1}{a_0}, \tag{46}$$

$$4a_0^2\|v_1(r,\lambda)\|^2=2(\mathsf{d}_0^2+\lambda^2)\gamma+\lambda^{-1}(\lambda^2-\mathsf{D}_0^2)\sin2\lambda\gamma-\mathsf{d}_0\sin^2\lambda\gamma. \tag{47}$$

В усіх приведених формулах (40)–(47) замість λ варто підставити власні числа λ_k, $k=0,1,2,\dots$.

Власні числа λ_k для задачі Штурму – Лиувилля (38) при $m=0$ згідно (5) з обліком (38), (39) будуть коренями трансцендентного рівняння

$$A_\lambda(a_1)B_\lambda(a_0) - B_\lambda(a_1)A_\lambda(a_0) = 0\,,$$

для якого з урахуванням другої з рівностей (39) корені λ_k знаходимо в явному виді:

$$\lambda_k = \gamma^{-1}k\pi, \qquad k = 0,1,2,\ldots \tag{48}$$

Трансцендентне рівняння для власних чисел λ_k крайової задачі Штурму – Лиувилля (38) при $m=1$ в загальному випадку удалося привести до відомого [6] трансцендентного рівняння

$$\operatorname{tg}\lambda\gamma = \lambda(\mathsf{d}_1 - \mathsf{d}_0)\left[\lambda^2 + \mathsf{d}_0\mathsf{d}_1\right]^{-1}. \tag{49}$$

Асимптотичний розв'язок цього рівняння при великих значеннях k, як легко переконатися з (49), визначається формулою (48).

Згідно п. 1 побудовані розв'язки крайових задач (38) визначають інтегральне перетворення для функцій $f(r)$, заданих на відрізку $[a_0, a_1]$:

$$f_k^m = \int\limits_{a_0}^{a_1} v_m(r,\lambda_k)f(r)\,dr, \quad f(r) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{v_m(r,\lambda_k)}{\|v_m(r,\lambda_k)\|^2}f_k^m, \quad m = 0,1\,, \tag{50}$$

і, зокрема, при $m=0$ будемо мати

$$f_k^0 = \int\limits_{a_0}^{a_1}\frac{\sin\left(\lambda_k \ln\dfrac{r}{a_0}\right)}{\sqrt{r}}f(r)\,dr, \quad f(r) = \frac{2}{\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\left(\lambda_k \ln\dfrac{r}{a_0}\right)}{\sqrt{r}}f_k^0, \;\; \lambda_k = \frac{\pi k}{\gamma}.$$

Розглянемо ще випадок, коли в (38) прийняти $h_0 = h_1 = 0$. Відповідна власна функція, що позначимо через $v_*(r,\lambda)$, повинна задовольняти граничні умови

$$v_*'(a_i,\lambda_k) = 0, \qquad i = 0,1\,. \tag{51}$$

На підставі (45), (51) у цьому випадку власну функцію можна записати у виді

$$2\sqrt{r}\,v_*(r,\lambda_k) = \sin\left(\lambda_k \ln\frac{r}{a_0} + 2\lambda_k\cos\left(\lambda_k \ln\frac{r}{a_0}\right)\right),$$

причому власні числа λ_k тут знаходимо в силу (49) у явному виді і визначаємо по формулі (48). У цьому окремому випадку інтегральне перетворення (50) набуває вид

$$f_k^* = \int_{a_0}^{a_1} v_*(r,\lambda_k) f(r)\,dr, \quad f(r) = \frac{2}{\gamma}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_*(r,\lambda_k)}{\frac{1}{4}+\lambda_k^2} \cdot f_k^*, \quad \lambda_k = \frac{\pi k}{\gamma}.$$

5. При використанні отриманих у попередніх пунктах інтегральних перетворень важливим моментом є перевірка збіжності рядів, що входять у формули обернення, і у випадку їхньої слабкої збіжності — необхідність поліпшення останньої. Для цього потрібно мати асимптотичний (для великих значень j) розв'язок трансцендентних рівнянь, з яких знаходяться власні числа ν_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$

Щоб одержати асимптотичний розв'язок, наприклад, трансцендентного рівняння (15), варто скористатися асимптотичними формулами для великих значень параметра ν функцій $P_\nu^\mu(\cos\theta)$, $Q_\nu^\mu(\cos\theta)$ і їхніх похідних по θ, тобто

$$\dot{P}_\nu^\mu(\cos\theta) = \frac{d}{d\theta} P_\nu^\mu(\cos\theta) =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)(\sin\theta)^{\mu-1}}{\Gamma(\nu-\mu+1)2^\mu \sec\theta} F\left(1+\nu+\mu, \mu-\nu; 1+\mu; \sin^2\frac{\theta}{2}\right) +$$

$$+ \frac{\Gamma(\nu+\mu+2)(\sin\theta)^{\mu+1}}{\Gamma(\nu-\mu)\Gamma(\mu+2)2^{\mu+1}} F\left(2+\nu+\mu, 1+\mu-\nu; 2+\mu; \sin^2\frac{\theta}{2}\right), \qquad (51)$$

$$4\dot{Q}_\nu^\mu(\cos\theta) = 2\Gamma_\nu^\mu \operatorname{tg}^\mu\frac{\theta}{2} \operatorname{cosec}\theta\, F\left(-\nu, \nu+1; \mu+1; \sin^2\frac{\theta}{2}\right) -$$

$$-\cos\mu\pi\,\Gamma(\mu) \operatorname{ctg}^\mu\frac{\theta}{2} \operatorname{cosec}\theta\, F\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \sin^2\frac{\theta}{2}\right) -$$

$$-\Gamma_\nu^\mu \nu(\nu+1)(\mu+1)^{-1} \operatorname{tg}^\mu\frac{\theta}{2} \sin\theta\, F\left(1-\nu, \nu+2; \mu+2; \sin^2\frac{\theta}{2}\right) -$$

$$-\cos\mu\pi\,\Gamma(\mu)\nu(\nu+1)(1-\mu)^{-1} \operatorname{ctg}^\mu\frac{\theta}{2} \sin\theta\, F\left(1-\nu, \nu+2; 2-\mu; \sin^2\frac{\theta}{2}\right), \qquad (52)$$

$$\Gamma_\nu^\mu = \Gamma(-\mu)\,\Gamma(1+\nu+\mu)\,\Gamma^{-1}(1+\nu-\mu) \cdot$$

Формула (51) отримана диференціюванням (22), а формула (52) – диференціюванням формули 3.4 (10) з [1] після заміни $x = \cos\theta$.

У роботі [9] для асимптотичного розв'язання аналогічних трансцендентних рівнянь використані відомі асимптотичні формули 3.9.1 (1) і 3.9.2 (2) з [1] для великих значень нижніх індексів функцій Лежандра. Цього виявилося досить, тому що при цілих верхніх індексах диференціювання цих функцій еквівалентно зміні верхнього індексу на ціле число. У розглянутому випадку верхній індекс μ не є цілим, тому зазначені формули виявляються марними. Таким чином, виникає необхідність одержання асимптотических формул для функцій (51) і (52) для великих значень ν. Метод, використаний при одержанні формул 3.9.1 (1) і 3.9.2 (2) з [1], виявляється неприйнятним. Пропонуємо інший спосіб, заснований на попередньому одержанні асимптотичної формули для функції Гаусса

$$u(\theta) = F\left(\nu + \alpha + 1, -\nu + \alpha; 1 + \alpha + \beta; \sin^2\frac{\theta}{2}\right) \tag{53}$$

при великих значеннях ν. Такі формули отримані в [5] для випадку, коли аргумент функції Гаусса більше одиниці. У нашому випадку він менше одиниці, тому скористатися результатами роботи [5] не представляється можливим. Тут для одержання асимптотичних формул для функції Гаусса (53) використовуємо метод Ліувілля – Стеклова, як у роботі [11] при одержанні асимптотичних формул для ортогональних многочленів. Відповідно до цього методу варто вивести рівняння, якому задовольняє функція (53). Роблячи заміну $z = \sin^2\frac{\theta}{2}$ в диференціальному рівнянні, якому задовольняє $F(\nu + \alpha + 1, \alpha - \nu, 1 + \alpha + \beta; z)$ (формула 2.1 (1) з [1]), одержуємо

$$u^{\bullet\bullet}(\theta) + \left[(1 + 2\alpha)\operatorname{ctg}\theta + 2\beta\operatorname{cosec}\theta\right]u^{\bullet}(\theta) + \left[\nu(\nu + 1) - \alpha(\alpha + 1)\right]u(\theta) = 0.$$

Переходячи до функції

$$y(\theta) = \left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)^{\beta}(\sin\theta)^{\alpha + 1/2} F\left(\nu + \alpha + 1, \alpha - \nu; 1 + \alpha + \beta; \sin^2\frac{\theta}{2}\right), \tag{54}$$

одержуємо диференціальне рівняння

$$y^{\bullet\bullet}(\theta) + \left(\nu + \frac{1}{2}\right)^2 y(\theta) = q(\theta)\, y(\theta), \qquad 0 < \theta < \pi, \tag{55}$$

$$q(\theta)=\left(\alpha^2+\beta^2-\frac{1}{4}\right)\operatorname{cosec}^2\theta-2\alpha .$$

Загальним розв'язком рівняння (55) буде функція (порівняти формулу 8.61.3 з [11])

$$y(\theta)=c_1\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta+c_2\cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta+$$

$$+\frac{1}{2\nu+1}\int\limits_{\pi/2}^{\theta}\sin\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(\theta-t)\right]q(t)\,y(t)\,dt\ , \tag{56}$$

де c_1, c_2 — довільні постійні. Можна переконатися, що інтегральний доданок у (56) разом зі своєю похідною при $\theta=\frac{\pi}{2}$ перетворюється в нуль. Це дозволяє виразити довільні константи через $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $y^{\bullet}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, що відповідно до формули (54) приймуть вид

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=F\left(\nu+\alpha+1,\alpha-\nu;1+\alpha+\beta;\frac{1}{2}\right),$$

$$y^{\bullet}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\beta F\left(\nu+\alpha+1,\alpha-\nu;1+\alpha+\beta;\frac{1}{2}\right)-(\nu-\alpha)(\nu+\alpha+1)\times$$

$$\times\left[2(1+\alpha+\beta)\right]^{-1}F\left(\nu+\alpha+2,1+\alpha-\nu;2+\alpha+\beta;\frac{1}{2}\right). \tag{57}$$

У результаті замість (56) будемо мати

$$y(\theta)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{\nu+\frac{1}{2}}y^{\bullet}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2\nu+1}\int\limits_{\pi/2}^{\theta}\sin\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(\theta-t)\right]q(t)\,y(t)\,dt\ . \tag{58}$$

Тими ж розуміннями, що використані при одержанні формули 8.61.6 з [11], одержуємо, що головний член в асимптотичному розкладанні функції (54) при $\nu \to \infty$ буде міститися в перших двох доданках у правій частині формули (58). Значення $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ і $y^{\bullet}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, що задаються формулами (57), у випадку $\beta = 0,\ \alpha = \mu$ й

$$u(\theta) = F\left(\nu + \mu + 1, \mu - \nu; 1 + \mu; \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

обчислюються по формулі 2.8 (50) з [1]. Підставивши отриманий вираз в (58), записуємо асимптотичну рівність

$$\sqrt{\pi}\,(\sin\theta)^{\mu+1/2}\,F\left(\nu + \mu + 1, \mu - \nu; 1 + \mu; \sin^2\frac{\theta}{2}\right) =$$

$$= \Gamma(1+\mu)\cos\left\{\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4} - \mu\frac{\pi}{2}\right\}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\mu-1/2}\left[1 + O(\nu^{-1})\right]. \qquad (59)$$

У випадку $\beta = 0,\ \alpha = \mu + 1$ й

$$u(\theta) = F\left(\nu + \mu + 2, \mu + 1 - \nu; 2 + \mu; \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

аналогічно одержуємо таку асимптотичну рівність:

$$(\sin\theta)^{\mu+3/2}\,F\left(\nu + \mu + 2, \mu + 1 - \nu; 2 + \mu; \sin^2\frac{\theta}{2}\right) =$$

$$= \pi^{3/2}\Gamma(2+\mu)\cos\left\{\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4} - \mu\frac{\pi}{2}\right\}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\mu-3/2}\left[1 + O(\nu^{-1})\right]. \qquad (60)$$

Використовуючи рівності (59) і (60), на підставі формул (22) і (51), а також асимптотичної формули 1.18 (4) з [1] одержуємо необхідні асимптотичні рівності для $P_\nu^\mu(\cos\theta)$ і $\dot{P}_\nu^\mu(\cos\theta)$:

$$\sqrt{\pi\sin\theta}P_\nu^\mu(\cos\theta)=2^\mu\cos\left\{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}-\mu\frac{\pi}{2}\right\}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\mu-1/2}\left[1+O(\nu^{-1})\right],$$

$$\sqrt{\pi\sin\theta}\dot{P}_\nu^\mu(\cos\theta)=2^{\mu+1}\sin\left\{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}-\mu\frac{\pi}{2}\right\}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\mu+1/2}\left[1+O(\nu^{-1})\right].\quad(61)$$

Для одержання аналогічних формул для $Q_\nu^\mu(\cos\theta)$ і $\dot{Q}_\nu^\mu(\cos\theta)$ потрібно у формулах (57) і (58) розглянути випадок $\beta=\mu$, $\alpha=0$, тобто

$$u(\theta)=F\left(\nu+1,-\nu;1+\mu;\sin^2\frac{\theta}{2}\right).$$

Тут для підрахунку $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ і $y^\bullet\left(\frac{\pi}{2}\right)$ відповідно до формул (57) варто скористатися формулами 7.3.7 (8) і 7.3.7 (10) з [10]. Після підстановки отриманих виразів для $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ й $y^\bullet\left(\frac{\pi}{2}\right)$ у (58) маємо наступну асимптотичну рівність:

$$2^\mu\sqrt{\pi}\,\mathrm{tg}^\mu\frac{\theta}{2}\sqrt{\sin\theta}\,F\left(\nu+1,-\nu;1+\mu;\sin^2\frac{\theta}{2}\right)=$$

$$=\Gamma(\mu+1)\cos\left\{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}-\mu\frac{\pi}{2}\right\}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{-\mu-1/2}\left[1+O(\nu^{-1})\right].\quad(62)$$

У випадку $\beta=\mu$, $\alpha=1$, тобто $u(\theta)=F\left(\nu+2,1-\nu;2+\mu;\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$, для обчислення $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ і $y^\bullet\left(\frac{\pi}{2}\right)$ згідно (57) використані формули 7.3.7 (10) і 7.3.7 (12) з [10]. Підставляючи ці вирази в (58), одержуємо асимптотичну рівність

$$2^\mu\sqrt{\pi}\,\mathrm{tg}^\mu\frac{\theta}{2}(\sin\theta)^{3/2}F\left(\nu+2,1-\nu;2+\mu;\sin^2\frac{\theta}{2}\right)=$$

$$=\Gamma(\mu+2)\sin\left\{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}-\mu\frac{\pi}{2}\right\}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{-\mu-3/2}\left[1+O(\nu^{-1})\right].$$

З формул (62) і (63) шляхом заміни μ на $-\mu$ одержуємо асимптотичні рівності і для

$$F\left(\nu+1,-\nu;1-\mu;\sin^2\frac{\theta}{2}\right),\ F\left(\nu+2,1-\nu;2-\mu;\sin^2\frac{\theta}{2}\right).$$

Отримані асимптотичні рівності для функцій Гаусса дозволяють одержати аналогічно асимптотичні рівності для $Q_\nu^\mu(\cos\theta)$ і $\dot{Q}_\nu^\mu(\cos\theta)$:

$$\sqrt{\sin\theta}\,Q_\nu^\mu(\cos\theta) =$$

$$= -\sqrt{\pi}\,2^{\mu-1}\sin\left\{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}-\mu\frac{\pi}{2}\right\}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\mu-1/2}\left[1+O(\nu^{-1})\right],$$

$$\sqrt{\sin\theta}\,\dot{Q}_\nu^\mu(\cos\theta) =$$

$$= -\sqrt{\pi}\,2^{\mu}\cos\left\{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}-\mu\frac{\pi}{2}\right\}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\mu+1/2}\left[1+O(\nu^{-1})\right]. \quad (64)$$

Виведені асимптотичні представлення для великих значень ν дозволяють легко одержати асимптотичні розв'язки трансцендентних рівнянь (15) і (24). Наприклад, рівняння (15) при $m=0$ буде мати вид

$$\Omega_{\nu,\mu}^0 \equiv P_\nu^\mu(\cos\omega_0)Q_\nu^\mu(\cos\omega_1)-P_\nu^\mu(\cos\omega_1)Q_\nu^\mu(\cos\omega_0)=0\,, \quad (65)$$

а при $m=1$ з обліком (13) його можна записати у виді

$$\Omega_{\nu,\mu}^1 \equiv h_1 h_0\Omega_{\nu,\mu}^0 + h_0\left[P_\nu^\mu(\cos\omega_0)\dot{Q}_\nu^\mu(\cos\omega_1)-\right.$$

$$\left.-\dot{P}_\nu^\mu(\cos\omega_1)Q_\nu^\mu(\cos\omega_0)\right]+h_1\left[\dot{P}_\nu^\mu(\cos\omega_0)Q_\nu^\mu(\cos\omega_1)-\right.$$

$$\left.-P_\nu^\mu(\cos\omega_1)\dot{Q}_\nu^\mu(\cos\omega_0)\right]+\dot{P}_\nu^\mu(\cos\omega_1)\dot{Q}_\nu^\mu(\cos\omega_1)-$$

$$-\dot{P}_\nu^\mu(\cos\omega_1)\dot{Q}_\nu^\mu(\cos\omega_0)=0\,. \quad (66)$$

З аналізу асимптотичних рівностей (61) і (64), випливає, що в трансцендентному рівнянні (66) головний внесок вносять два останні доданки. Підставивши туди асимптотичне представлення для похідних, щомістяться у формулах (61) і (64), одержуємо рівняння

$$\sin\left\{\left(\nu_j + \frac{1}{2}\right)(\omega_1 - \omega_0)\right\} = 0,$$

відкіля знаходимо асимптотичний розв'язок трансцендентного рівняння (66):

$$\nu_j = \pi(\omega_1 - \omega_0)^{-1} j, \tag{67}$$

справедливий для великих значень j. Надходячи аналогічно з трансцендентним рівнянням (65), дійдемо висновку, що отриманий асимптотичний розв'язок (67) справедливий і для нього. У такий же спосіб показуємо, що асимптотичний розв'язок трансцендентних рівнянь (24) при $m = 0$ і $m = 1$ визначається формулою

$$\nu_j = j\pi\omega^{-1} \cdot \nu_j = j\pi\omega^{-1}.$$

6. Проілюструємо застосування отриманих інтегральних перетворень на прикладі побудови точного розв'язку задачі стаціонарної теплопровідності для тіла, що заповнює область $a_0 \le r \le a_1$, $0 \le \theta \le \omega$, $\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1$. Шукану температуру позначимо через $u(r,\theta,\varphi)$. Вона повинна задовольняти [4] рівнянню

$$(r^2 u')' + \frac{(\sin\theta u^{\bullet})^{\bullet}}{\sin\theta} + \frac{u''}{\sin^2\theta} = 0, \quad a_0 \le r \le a_1,\ 0 \le \theta \le \omega,\ \varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1, \tag{68}$$

і граничні умови

$$h_i u(a_i,\theta,\varphi) + u'(a_i,\theta,\varphi) = g_i(\theta,\varphi), \quad h_i = \lambda^{-1}\alpha_i, \quad i = 0,1, \tag{69}$$

$$u^{\bullet}(r,\omega,\varphi) = 0, \quad u(r,\theta,\varphi_i) = 0, \quad i = 0,1. \tag{70}$$

Тут [4] λ — коефіцієнт теплопровідності; α_i — коефіцієнт тепловіддачі на сферичних поверхнях; $g_i(\theta,\varphi)$ — задані функції.

Щоб задовольнити другої з граничних умов (70), застосуємо (думаючи $\varphi_0 = 0$) до сформульованої крайової задачі скінченне синус-перетворення Фур'є [13]

$$u_n(r,\theta) = \int_0^{\varphi_1} \sin(\mu_n\varphi)\, u(r,\theta,\varphi)\, d\varphi, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{\varphi_1}, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{71}$$

У результаті замість (68)–(70) будемо мати

$$\left[r^2 u_n'(r,\theta)\right]' + \operatorname{cosec}\theta\left[\sin\theta u_n^{\bullet}(r,\theta)\right]^{\bullet} - \mu_n \operatorname{cosec}^2\theta u_n(r,\theta) = 0,$$

$$a_0 < r < a_1, \quad 0 < \theta < \omega,$$

$$h_i u_n(a_i,\theta) + u_n'(a_i,\theta) = g_{in}(\theta), \quad i = 0,1, \quad u_n^{\bullet}(r,\omega) = 0.$$

До отриманої крайової задачі застосуємо інтегральне перетворення (26) при $m=1$, поклавши додатково у функціоналі (13) $h_1 = h_0 = 0$. Тоді для трансформанти

$$u_{nj}(r) = \int_0^{\omega} P_\nu^\mu(\cos\theta)\sin\theta u_n(r,\theta)\,d\theta, \tag{72}$$

де $\mu = \mu_n$, а $\nu = \nu_j$ — власні числа, що збігаються з коренями рівняння $\dot{P}_\nu^\mu(\cos\omega) = 0$, одержимо одномірну крайову задачу

$$\left[r^2 u_{nj}'(r)\right]' - \nu_j(\nu_j + 1)u_{nj}(r) = 0, \qquad a_0 < r < a_1,$$

$$h_i u_{nj}(a_i) + u_{nj}'(a_i) = g_{inj}, \qquad i = 0,1.$$

Для розв'язання цієї крайової задачі застосуємо інтегральне перетворення (50) при $m=1$. У результаті одержимо

$$u_{nj}(r) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_1(r,\lambda_k)}{\|v_1(r,\lambda_k)\|^2} \frac{a_0^2 v_1(a_0,\lambda_k)g_{0nj} - a_1^2 v_1(a_1,\lambda_k)g_{1nj}}{\lambda_k^2 + \frac{1}{4} + v_j(v_j+1)}.$$

Після обернення отриманої трансформанти по формулі (27) з наступним оберненням синус-трансформанти Фур'є (71) по відомій [13] формулі одержуємо остаточний вид розв'язку поставленої задачі:

$$u(r,\theta,\varphi) = \frac{2}{\varphi_1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{(2\nu+1)\dot{Q}_\nu^\mu(\cos\omega)P_\nu^\mu(\cos\theta)}{\Gamma_{\mu\nu}\dfrac{d}{d\nu}\dot{P}_\nu^\mu(\cos\omega)}\right]_{\nu=\nu_j}^{\mu=\mu_n} \sin\mu_n\varphi\, u_{nj}(r). \tag{73}$$

Розглянемо окремий випадок розв'язаної задачі, коли $\omega = \pi/2$, і область, зайнята розглянутим тілом, являє собою сферичну оболонку товщиною $a_1 - a_0$ з вирізом $\varphi \in [\varphi_1, 2\pi]$. У цьому випадку замість інтегрального перетворення (72) варто застосувати перетворення (37) і розв'язок розглянутої задачі замість (73) запишеться так:

$$u(r,\theta,\varphi)=\frac{2\sqrt{\pi}}{\varphi_1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^{2\lambda}\Gamma(\lambda)(2j+\lambda)(-1)^j j!}{\Gamma(1-\lambda)\Gamma(2j+2\lambda)}C_{2j}^{\lambda}(\cos\theta)\sin\mu_n\varphi u_{nj}(r),$$

де $\lambda=1/2+\mu_n$.

Література

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. — Т. 1. — Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. — М.: Наука, 1965. — 294 с.

2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. — Т. 2. — Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. — М.: Наука, 1965. — 295 с.

3. *Грей Э., Мэтьюз Г.* Функции Бесселя и их приложение в физике и механиіке. — М.: Изд-во иностр. лит., 1953. — 372 ́с.

4. *Карташов Э. М.* Аналитические методы в теплопроводности твердых тел. — М.: Высш. шк., 1979. — 181 с.

5. *Кратцер А., Франц В.* Трансцендентные функции. — М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 466 с.

6. *Мартыненко Н. А., Пустыльников Л. М.* Конечные интегральные преобразования и их использование в исследовании систем с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1986. — 303 с.

7. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. — М.: Наука, 1982. — 343 с.

8. *Попов Г. Я.* Новые интегральные преобразования с использованием в некоторых краевых задачах математической физики // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 12. — С. 1642-1652.

9. *Попов Г. Я.* О некоторых интегральных преобразованиях и их использование к решению задач математической физики // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, № 6. — С. 810-819.

10. Попов Г.Я. Об одном методе получения интегральных преобразований с применением к построению точных решений краевых задач математической физики // ММФМП. — **46,** № 3. — С. 74-90.

11. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. — М.: Наука, 1986. — 800 с.

12. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. — М.: Физматгиз, 1962. — 500 с.

13. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики: В 5 т. — М.-Л.: Гостехтеориздат, 1951. — Т. 4. — 804 с.

14. *Снеддон И.* Преобразование Фурье. — М.: Изд-во иностр. лит., 1955. — 667 с.

15. *Титчмарш Э. Ч.* Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка: В 2 ч. — М.: Изд-во. иностр. лит., 1960. — Ч. 1. — 278 с.

Навчальний посібник з курсу "Рівняння математичної фізики.
Н 15 Метод інтегральних перетворень" / Автори-укладачі: Г. Я. Попов, В. В. Реут, Н. Д. Вайсфельд. — Одеса: Астропринт, 2005. — 184 с.

ISBN 966–318–339–Х.

Навчальний посібник має метою доступне та пояснюване багатьма прикладами викладення основного змісту університетського курсу. До нього включений матеріал щодо задачі Штурма - Ліувиля, побудови функції Гріна крайових задач, класичної та узагальненої схеми методу інтегральних перетворень, довідковий матеріал з огляду існуючих інтегральних перетворень та методів їх побудови.

Н $\frac{1602070100–033}{318–2005}$ Без оголош.

ББК 22.161.6я73
УДК 517.4(075)

Навчальне видання

Навчальний посібник

з курсу

"РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ. МЕТОД ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ"

Автори-укладачі:

ПОПОВ Геннадій Якович
РЕУТ Віктор Всеволодович
ВАЙСФЕЛЬД Наталія Данилівна

Зав. редакцією *Т. М. Забанова*
Голов. редактор *Ж. Б. Мельниченко*
Технічні редактори *Р. М. Кучинська, Ю. Скобліков*
Коректор *Н. І. Крилова*

Здано до набору 17.01.2005. Підписано до друку 23.06.2005. Формат 60х84/16.
Папір офсетний. Гарнітура "Таймс". Друк офсетний.
Ум. друк. арк. 10,70. Тираж 300 прим. Зам. № 377.

Видавництво і друкарня "Астропринт".
(Свідоцтво ДК № 1373 від 28.05.2003 р.)
65026, м. Одеса, вул. Преображенська, 24.
Тел.: (048) 726-98-82, 726-96-82, (0482) 37-14-25.
www.astroprint.odessa.ua