РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ. МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНИХ МНОГОЧЛЕНІВ

Навчальний посібник

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів, які навчаються
за напрямами підготовки
«Прикладна математика», «Механіка»
(Лист від 23.02.2010 № 1/11-1148)

Одеса
«Астропринт»
2010

ББК 22.161.68+22.311я7
Р 49
УДК 539.3; 517.4

У запропонованому навчальному посібнику викладено метод ортогональних многочленів, проведено його строге математичне обґрунтування, введено основні означення, доведено основні теореми щодо швидкості збіжності методу. Основну увагу приділено застосуванню метода до розв'язання інтегральних рівнянь першого і другого роду з різними видами сингулярних частин — різницевими, ступеневими ядрами, тощо. Введено нові означення п-ядра та спектрального співвідношення. Особливе місце приділяється застосуванню метода редукції для розв'язання нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, до яких, як відомо, приводить схема методу ортогональних многочленів. У посібнику наведено необхідний довідковий матеріал — таблиці основних спектральних співвідношень та таблиці інтегралів з поліномами Якобі.

Автори:

Г. Я. Попов, В. В. Реут, М. Г. Моісеєв, Н. Д. Вайсфельд

Рецензенти:

В. В. Мелешко, д-р фіз.-мат. наук, проф., зав. кафедри теоретичної та прикладної механіки КНУ ім. Тараса Шевченка;
Я. Г. Савула, д-р фіз.-мат. наук, проф., зав. кафедри прикладної математики ЛНУ ім. Івана Франка;
В. М. Євтухов, д-р фіз.-мат. наук, проф., зав. кафедри диференціальних рівнянь ОНУ імені І. І. Мечникова

Друкується згідно з рішенням вченої ради ОНУ імені І. І. Мечникова.

Протокол № 4 від 04.09.2009 р.

ISBN 978–966–190–365–3

ЗМІСТ

ВСТУП

Метод ортогональних поліномів є частковою реалізацією метода Бубнова — Гальоркіна стосовно до розв'язання інтегральних рівнянь. Але, на відміну від загальної схеми метода Бубнова — Гальоркіна, схема метода ортогональних поліномів вимагає, спершу, попереднього виявлення структури розв'язку для граничних точок області, де задано розв'язуване рівняння. По-друге, схема методу вимагає відокремлення з ядра рівняння такої його частини (що несе особливість ядра), для якої власними функціями є ортогональні поліноми, тобто це вимагає побудови так званих спектральних співвідношень. Саме виконання перерахованих вище вимог і надає методу ортогональних поліномів перевагу під час числової реалізації над методом Бубнова — Гальоркіна, робить метод ортогональних поліномів більш ефективним.

У пропонованому навчальному посібнику викладено основи методу ортогональних поліномів, деякі питання його обґрунтування, питання застосування методу до розв'язання інтегральних рівнянь з особливостями у ядрі (у тому числі з нерухомими особливостями). У зв'язку з питаннями числової реалізації метода ортогональних поліномів наведено квадратурна формула для інтегралів з поліномами Якобі та квадратурна формула Гаусса.

Також у посібнику наведено приклади конкретних задач теплопровідності та теорії пружності, для розв'язання яких використано метод ортогональних поліномів.

Шляхом зведення до інтегралів типу згортки Мелліна обчислено спеціальні інтеграли з класичними поліномами. Наведено список найбільш корисних та часто використовуваних спектральних співвідношень на скінченому та півнескінченному інтервалах, а також деякі інтеграли з класичними поліномами, що часто зустрічаються під час розв'язання задач математичної фізики.

Метою видання цього навчального посібника є допомога студентам у оволодінні головними вузловими моментами методу ортогональних поліномів та його застосуванні під час розв'язку конкретних задач математичної фізики.

Навчальний посібник розраховано на студентів — бакалаврів III–IV курсу факультету «Прикладна математика» та на магістрів і аспірантів.

§ 1. ОРТОГОНАЛЬНІ СИСТЕМИ ФУНКЦІЙ

У цьому параграфі наведені деякі визначення та твердження, які необхідні для подальшого викладення матеріалу.

1.1. ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ І ВЛАСТИВОСТІ

Нехай $w(x)$ є невід'ємною функцією, яка визначена на $[a;\, b]$, а $f(x)$ є такою, що інтеграл Лібега

$$\int_a^b f^2(x)w(x)dx < \infty \qquad (1.1)$$

є збіжним. Клас функцій, який задовольняє умову (1.1), будемо позначати $L_2^w[a;b]$, а функцію $w(x)$ будемо називати ваговою функцією.

Скалярний добуток функцій з класу $L_2^w[a;b]$ введемо наступним чином:

$$(f,g)_w = (f,g) = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx. \qquad (1.2)$$

Згідно до цього норму функції з класу $L_2^w[a;b]$ маємо визначити за формулою

$$\|f\|_w = \|f\| = \sqrt{(f,f)} = \left(\int_a^b f^2(x)w(x)dx\right)^{1/2}. \qquad (1.3)$$

Якщо скалярний добуток (1.2) дорівнює нулю — $(f,g)_w = 0$, то функції $f(x)$ та $g(x)$ будемо називати ортогональними функціями на проміжку $[a;b]$ з вагою $w(x)$.

Послідовність функцій $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x),\ldots$ з $L_2^w[a;b]$ таких, що для $\forall\ n$ норма функцій відрізняється від нуля $\|\varphi_n\| \neq 0$, будемо називати системою функцій та позначати $\{\varphi_n(x)\}$.

Систему функцій $\{\varphi_n(x)\}$ будемо називати ортогональною системою функцій на проміжку $[a;b]$ з вагою $w(x)$, якщо для будь-яких n та m виконується

$$\left(\varphi_n, \varphi_m\right) = \delta_{nm} \left\|\varphi_n\right\|^2, \ \forall n, m . \tag{1.4}$$

Тут δ_{nm} — це символ Кронекера, тобто $\delta_{nn} = 1; \delta_{nm} = 0, n \neq m$.

Якщо при цьому для кожного n виконується, що норма $\left\|\varphi_n\right\| = 1$ для $\forall n$, то систему функцій $\left\{\varphi_n\right\}$будемо називати ортонормованою системою функцій.

Будь-яку ортогональну систему функцій $\left\{\varphi_n\right\}$ можна перетворити на ортонормовану, якщо замінити функцію $\varphi_n\left(x\right)$ на $\varphi_n\left(x\right)\left(\left\|\varphi_n\right\|\right)^{-1}$.

Природно, що виникає питання про можливість зображення довільної функції як суми ортогональних функцій, тобто у зображенні вигляду

$$f\left(x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \varphi_k\left(x\right). \tag{1.5}$$

Припустимо таку можливість: формально помножимо обидві частини (1.5) скалярно на функцію $\varphi_n\left(x\right)$; будемо вважати при цьому, що ряд (1.5) можна почленно інтегрувати —

$$\left(f, \varphi_n\right) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \left(\varphi_k, \varphi_n\right) = f_n \left\|\varphi_n\right\|^2 ,$$

звідки випливає

$$f_n = \frac{\left(f, \varphi_n\right)}{\left\|\varphi_n\right\|^2} = \frac{\int\limits_a^b f\left(x\right)\varphi_n\left(x\right)w\left(x\right)dx}{\int\limits_a^b \varphi_n^2\left(x\right)w\left(x\right)dx}. \tag{1.6}$$

Ряд у правій частині рівності (1.5) називають узагальненим рядом Фур’є функції $f\left(x\right)$ за системою функцій $\left\{\varphi_n\left(x\right)\right\}$, а сталі f_n , що визначаються за формулою (1.6), називають коефіцієнтами Фур’є функції $f\left(x\right)$.

Зауваження: той факт, що ми можемо рахувати коефіцієнти f_n , не дає гарантії того, що ряд (1.5) є збіжним, або, якщо ряд і є збіжним, то його сума є функцією $f\left(x\right)$. Не зупиняючись докладно на цих питаннях (теорію узагальнених рядів Фур’є досить докладно досліджено у курсі математичного аналізу), відмітимо лише ті факти, які будуть потрібні у подальшому.

Суму $\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x) = \tilde{f}_n(x)$ будемо називати наближенням порядку n до функції $f(x)$. Можливість цього наближення будемо оцінювати за нормою $L_2^w[a;b]$, тобто будемо оцінювати інтеграл

$$\left\| f(x) - \tilde{f}_n(x) \right\|^2 = \int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x) \right)^2 w(x) dx. \qquad (1.7)$$

Теорема.

Зі всіх наближень n-го порядку до функції $f(x)$ найкращим у сенсі норми у $L_2^w[a;b]$ є те наближення, для якого $a_k = f_k$ (ще говорять «найкращим у сенсі середньоквадратичного»).

У подальшому викладенні застосовується нерівність Бесселя та рівність Парсеваля. Надаємо їх формулювання (доведення цих фактів можна відшукати у [5]) .

Нерівність Бесселя. Нехай функція $f(x)$ належить до простору $L_2^w[a;b]$. Тоді має місце нерівність

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k^2 \left\| \varphi_k \right\|^2 \le \int_a^b f^2(x) w(x) dx. \qquad (1.8)$$

Якщо замість нерівності (1.8) має місце рівність, то її називають **рівністю Парсеваля**.

Якщо для будь-якої функції $f(x) \in L_2^w[a;b]$ виконується рівність Парсеваля, то говорять, що система функцій $\{\varphi_n(x)\}$ є замкненою системою функцій у $L_2^w[a;b]$. В цьому випадку границя квадрата норми різниці функції та її наближення прямує до нуля:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k \varphi_k(x) \right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k \varphi_k(x) \right]^2 \times$$

$$\times w(x) dx = 0. \qquad (1.9)$$

Якщо має місце граничне співвідношення (1.9), то говорять, що частинні суми узагальненого ряду Фур'є (1.5) збігаються у середньому до функції $f(x)$. Будемо позначати це наступним чином: $f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k \varphi_k(x)$.

1.2. СИСТЕМА ОРТОГОНАЛЬНИХ ПОЛІНОМІВ

Нагадаємо також, що систему функцій $\{\psi_n\}$ називають лінійно-незалежною (ЛНЗ), якщо з рівності

$$\sum_{k=0}^{n} C_k \psi_k(x) = 0$$

випливає, що

$$\sum_{k=0}^{n} (C_k)^2 = 0 .$$

Має місце наступний критерій лінійної незалежності функцій.

Для того щоб система функцій $\{\psi_n\}$ була лінійно-незалежною, необхідно та достатньо, щоби визначник Грама відрізнявся від нуля для будь-якого n:

$$G_n = \begin{vmatrix} (\psi_0,\psi_0) & (\psi_0,\psi_1) & \dots & (\psi_0,\psi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\psi_n,\psi_0) & (\psi_n,\psi_1) & \dots & (\psi_n,\psi_n) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall n. \tag{1.10}$$

З цього критерію випливає ствердження:

Будь-яка ортогональна система функцій є лінійно-незалежною.

Дійсно, нехай $\{\psi_n\}$ є ортогональною системою функцій. Відповідно до визначення тоді виконується співвідношення $(\psi_k,\psi_m) = \delta_{km}\|\psi_k\|^2$. Визначник Грама такої системи функцій дорівнюватиме

$$G_n = \begin{vmatrix} \|\psi_0\|^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \|\psi_1\|^2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \|\psi_n\|^2 \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n} \|\psi_k\|^2 \neq 0, \quad \forall n.$$

За заданою лінійно-незалежною системою функцій $\{\psi_n\}$ завжди можна побудувати ортогональну систему функцій наступним чином:

$$\chi_n = \begin{vmatrix} (\psi_0,\psi_0) & (\psi_0,\psi_1) & \dots & (\psi_0,\psi_n) \\ (\psi_1,\psi_0) & (\psi_1,\psi_1) & \dots & (\psi_1,\psi_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\psi_{n-1},\psi_0) & (\psi_{n-1},\psi_1) & \dots & (\psi_{n-1},\psi_n) \\ \psi_0 & \psi_1 & \dots & \psi_n \end{vmatrix} \tag{1.11}$$

Можна довести, що система функцій $\{\varphi_n\}$, яка побудована за формулою (1.11),

$$\varphi_n(x)=\frac{\chi_n(x)}{\sqrt{G_{n-1}G_n}},\quad n\ge 1\quad \varphi_0(x)=\frac{\chi_0(x)}{\sqrt{G_0}} \tag{1.12}$$

є ортонормованою системою функцій.

Якщо за систему функцій $\{\psi_n(x)\}$ взяти систему функцій $\{x^n\}$, то за допомогою формули (1.11) можна побудувати ортогональну систему поліномів $\{p_n(x)\}$:

$$p_n(x)=\begin{vmatrix} C_0 & C_1 & \dots & C_n \\ C_1 & C_2 & \dots & C_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n-1} & C_n & \dots & C_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix}=\sum_{k=0}^{n} A_{nk}x^k. \tag{1.13}$$

За сталі C_i позначимо моменти $C_i=\int_a^b x^i w(x)dx$, A_{nk} — алгебраїчні доповнення елементів останньої стрічки визначника (1.13).

Ортонормовану систему поліномів позначимо як $\{\pi_n(x)\}$ та побудуємо за формулою

$$\pi_n(x)=\frac{p_n(x)}{\sqrt{G_{n-1}G_n}}, \tag{1.14}$$

де $G_n=\begin{vmatrix} C_0 & \dots & C_n \\ C_n & \dots & C_{2n} \end{vmatrix}$.

Елементи ортогональної системи поліномів $\{p_n(x)\}$ будемо називати ортогональними поліномами, а систему $\{p_n(x)\}$ — системою ортогональних поліномів.

Обчислення коефіцієнтів ортогональних поліномів за формулами (1.13), (1.14) — досить нелегка процедура, особливо при великих значеннях n. Часто як одна з процедур ортогоналізації використовується процедура ортогоналізації Шмідта.

1.3. ВЛАСТИВОСТІ ОРТОГОНАЛЬНИХ ПОЛІНОМІВ

Наведемо деякі важливі властивості ортогональних поліномів. Більш докладно з доведенням цих фактів можна ознайомитися у [14].

1°. Будь-який поліном ступеню $n - q_n(x)$ можна подати у вигляді

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_{nk} p_k(x). \quad (1.15)$$

З (1.15) випливає подання:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} p_k(x). \quad (1.16)$$

2°. Для будь-якої системи ортогональних поліномів $\{p_m(x)\}$ має місце співвідношення

$$(q_n(x), p_m(x)) = 0, \quad m > n, \quad (1.17)$$

де $q_n(x)$ є довільний поліном ступеню n.

3°. Відповідні елементи двох систем поліномів $\{p_n(x)\}$ та $\{p_n^*(x)\}$, які ортогональні на одному проміжку $[a;b]$ та з однією ваговою функцією $w(x)$, відрізняються один від одного не більше ніж на сталий множник, тобто для будь-якого n існує така стала, що виконується рівність $\forall n \, \exists C_n \;\; p_n = C_n p_n^*$.

4°. Три послідовних ортогональних поліномb $p_{m-1}(x)$, $p_m(x), p_{m+1}(x) \quad (m = 1, 2, \ldots)$ задовольняють рекурентну формулу

$$xp_m(x) = \frac{k_{m-1}\|p_m\|^2}{k_m\|p_{m-1}\|^2} p_{m-1}(x) + \left(\frac{l_m}{k_m} - \frac{l_{m+1}}{k_{m+1}}\right) p_m(x) +$$

$$+ \frac{k_m}{k_{m+1}} p_{m+1}(x), \quad (1.18)$$

де k_m, l_m — коефіцієнти при старших ступенях x ортогонального поліному $p_m(x)$, тобто

$$p_m(x) = k_m x^m + l_m x^{m-1} + \sum_{k=0}^{m-2} d_{mk} x^k. \quad (1.19)$$

5°. Якщо логаріфмичну похідну вагової функції $w(x)$ можна подати як співвідношення поліному першого ступеня до поліному другого ступеня, тобто

$$[\ln w(x)]' = \frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} = \frac{A(x)}{B(x)} \quad (1.20)$$

та виконується умова

$$w(x)B(x)\big|_{x=a} = w(x)B(x)\big|_{x=b}\,, \tag{1.21}$$

то поліноми, що ортогональні на проміжку $[a;b]$ з функцією $w(x)$, є розв'язками диференціального рівняння

$$B(x)y''(x)+\left[A(x)+B'(x)\right]y'(x)-\gamma_n y(x)=0\,, \tag{1.22}$$

$$n=0,1,\ldots,\quad \gamma_n = n\left[a_1+(n+1)b_2\right].$$

6°. Якщо вагова функція $w(x)$ ортогональних на проміжку $[a;b]$ поліномів $\{p_n(x)\}$ задовольняє умовам (1.20) та (1.21), то буде виконано співвідношення

$$(\gamma_m-\gamma_n)\int_{\alpha}^{\beta} w(x)p_n(x)p_m(x)dx =$$

$$=\left[Bw(x)\left(p_n(x)p_m'(x)-p_m(x)p_n'(x)\right)\right]\Big|_{\alpha}^{\beta}, \tag{1.23}$$

де γ_n визначаються за формулою (1.22), а проміжок $[\alpha,\beta]$ належить проміжку $[a;b]$ — $[\alpha,\beta]\subset[a;b]$.

7°. Якщо виконано умови (1.20) та (1.21), то вірною є формула Родрига

$$p_n(x)=\frac{C_n}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left[w(x)B^n(x)\right], \tag{1.24}$$

тут C_n є довільна стала (див. властивість 3°).

8°. Якщо інтервал ортогональності є симетричний відносно початку координат та вагова функція є парною, то виконуватиметься рівність

$$p_n(-x)=(-1)^n p_n(x). \tag{1.25}$$

9°. Всі нулі x_j ортогонального поліному $p_n(x)$ є прості та розташовані у проміжку $(a;b)$.

10°. Нулі ортогональних поліномів $p_n(x)$ та $p_{n+1}(x)$ перемежаються.

Більш докладно читач може ознайомитися з цими фактами у [4, 6–8, 12].

§ 2. КЛАСИЧНІ ОРТОГОНАЛЬНІ ПОЛІНОМИ

Будь-яку систему поліномів можна отримати, фіксуючи інтервал ортогональності (a,b) та вагову функцію $w(x)$. Крім того, для остаточної фіксації (див. властивість 3°) можна зробити «нормування», тобто або певним чином вибирати старший коефіцієнт k_n (див. (1.19)), або фіксувати значення поліномів у будь-якій точці, або робити перехід до ортонормованої системи.

2.1. ТАБЛИЦЯ КЛАСИЧНИХ ОРТОГОНАЛЬНИХ ПОЛІНОМІВ

Найчастіше використовують ортогональні поліноми, що наведені у таблиці класичних ортогональних поліномів:

Таблиця 1

$(a;b)$	$w(x)$	k_n	Позначення	Назва
$(-1;1)$	1	$\dfrac{(2n)!}{n(n!)^2}$	$P_n(x)$	Поліном Лежандра
$(-1;1)$	$\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$	$k_0=1$, $2^{n-1}(n\geq 1)$	$T_n(x)$	Поліном Чебишова 1-го роду
$(-1;1)$	$\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$	2^n	$U_n(x)$	Поліном Чебишова 2-го роду
$(-1;1)$	$\left(1-x^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}}$ $\operatorname{Re}\nu>-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{2^n(\nu)_n}{n!}$	$C_n^{(\nu)}(x)$	Поліном Гегенбауера
$(-1;1)$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ $\operatorname{Re}(\alpha,\beta)>-1$	$\dfrac{(n+\alpha+\beta+1)_n}{2^n n!}$	$P_n^{\alpha,\beta}(x)$	Поліном Якобі
$(0,\infty)$	$x^\alpha e^{-x}$ $\operatorname{Re}\alpha>-1$	$\dfrac{(-1)^n}{n!}$	$L_n^{(\alpha)}(x)$	Поліном Лагера

Закінчення табл. 1

$(a;b)$	$w(x)$	k_n	Позначення	Назва
$(-\infty;+\infty)$	e^{-x^2}	2^n	$\mathrm{H}_n(x)$	Поліном Ерміта

Зазначимо деякі властивості класичних поліномів:

а) Значення поліномів на кінцях проміжку ортогональності

$$P_n(1)=1,\quad C_n^{(\nu)}(1)=\frac{(2\nu)_n}{n!},\quad T_n(1)=1, \tag{2.1}$$

$$P_n^{\alpha,\beta}(1)=\frac{(\alpha+1)_n}{n!},\quad U_n(1)=1,\quad L_n^{(\alpha)}(0)=\frac{(\alpha+1)_n}{n!}.$$

Тут $(a)_n$ є символ Похгаммера, $\Gamma(x)$ є гамма-функція Ейлера,

$$(a)_n=a(a+1)\ldots(a+n-1)=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}. \tag{2.2}$$

б) Формули зв'язку ортогональних поліномів.

Поліноми Лежандра, Чебишова та Гегенбауера є частковими випадками поліномів Якобі. Між ними мають місце формули зв'язку (див. властивість 3°, § 1) [1]:

$$\begin{gathered}
P_n(x)=C_n^{(1/2)}(x)=P_n^{0,0}(x),\\
T_n(x)=\frac{n}{2}C_n^{(0)}(x)=g_nP_n^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(x), g_n=\frac{n!}{\left(1/2\right)_n},\\
U_n(x)=C_n^{(1)}(x)=\frac{1}{2}g_nP_n^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(x),\\
C_n^{(\nu)}(x)=\frac{(2\nu)_n}{\left(\nu+1/2\right)_n}P_n^{\nu-\frac{1}{2},\nu-\frac{1}{2}}(x),\\
\mathrm{H}_{2n}(x)=(-1)^n2^{2n}n!L_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(x^2\right),\\
\mathrm{H}_{2n+1}(x)=(-1)^n2^{2n+1}n!L_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(x^2\right)x.
\end{gathered} \tag{2.3}$$

в) Для поліномів Лежандра, Чебишова, Гегенбауера та Ерміта інтервал ортогональності є симетричним відносно початку координат, вагова функція $w(x)$ є парною. Відповідно до формули (1.25) випливає наступне:

$$P_n(-x)=(-1)^n P_n(x), \quad U_n(-x)=(-1)^n U_n(x),$$
$$T_n(-x)=(-1)^n T_n(x), \quad C_n^{\nu}(-x)=(-1)^n C_n^{(\nu)}(x), \tag{2.4}$$
$$\mathrm{H}_n(-x)=(-1)^n \mathrm{H}_n(x).$$

Поліноми Якобі властивості парності не мають, але для них виконується рівність

$$P_n^{\alpha,\beta}(-x)=(-1)^n P_n^{\beta,\alpha}(x). \tag{2.5}$$

г) Для класичних поліномів є вірними рекурентні формули (1.18). А саме, для поліномів Якобі ця формула має зображення:

$$2(n+1)(n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)=$$

$$=(2n+\alpha+\beta+1)\left[(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)x+\alpha^2-\beta^2\right]\times$$

$$\times P_n^{\alpha,\beta}(x)-2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)P_{n-1}^{\alpha,\beta}(x).$$

Якщо тут вибирати α та β у відповідності до формул (2.3), то аналогічні рекурентні співвідношення можна записати для поліномів Лежандра, Чебишова, Гегенбауера.

Ряд важливих властивостей ортогональних поліномів пов'язан з виконанням умов (1.20) та (1.21). Перевіремо, чи задовольняє вагова функція $w(x)$ поліномів Якобі $w(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ цим умовам. З цією метою відшукаємо логарифмічну похідну вагової функції

$$\left[\ln w(x)\right]'=\frac{\beta-\alpha-(\alpha+\beta)x}{1-x^2},$$

тобто логарифмічна похідна вагової функції поліномів Якобі має зображення (1.20), де $A(x)=\beta-\alpha-(\alpha+\beta)x,\ B(x)=1-x^2$. Умову (1.21) також виконано —

$$w(x)B(x)\Big|_{x=\pm1}=(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\Big|_{x=\pm1}=0,$$

оскільки $\operatorname{Re}\alpha>-1, \operatorname{Re}\beta>-1$.

Аналогічним чином перевіряється виконання цих умов для інших класичних поліномів. Подання для коефіцієнтів $A(x)$ та $B(x)$ наведено у таблиці:

Таблиця 2

Номер	Поліном	$A(x)$	$B(x)$
1	$P_n(x)$	0	$1-x^2$
2	$T_n(x)$	x	$1-x^2$
3	$U_n(x)$	$-x$	$1-x^2$
4	$C_n^{(v)}(x)$	$(1-2v)x$	$1-x^2$
5	$P_n^{\alpha,\beta}(x)$	$\beta-\alpha-(\alpha+\beta)x$	$1-x^2$
6	$\mathrm{H}_n(x)$	$-2x$	1
7	$L_n^{(\alpha)}(x)$	$\alpha-x$	x

За допомогою таблиці 2 можна записати диференціальні рівняння (1.22), розв'язками яких є класичні поліноми. Наприклад, поліном Якобі $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ є обмеженим розв'язком такого диференціального рівняння:

$$(1-x^2)y''+\left[(\beta-\alpha)-(\beta+\alpha+2)x\right]y'+n(\alpha+\beta+n+1)y=0. \quad (2.6)$$

2.2. ЗВ'ЯЗОК ОРТОГОНАЛЬНИХ ПОЛІНОМІВ З ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНОЮ ФУНКЦІЄЮ ГАУССА

Класичні поліноми пов'язані з гіпергеометричною функцією Гаусса [1]

$$F(a,b;c;\xi)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(a)_j(b)_j}{(c)_j\, j!}\xi^j \quad (2.7)$$

або з виродженою гіпергеометричною функцією

$$\Phi(a;c;\xi)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(a)_j}{(c)_j\, j!}\xi^j. \quad (2.8)$$

Зазначимо, що якщо a (або b) дорівнює цілому від'ємному числу, то ряди (2.7) та (2.8) обрізаються, отже у такому випадку функції $F(-n,b;c;\xi),\ \Phi(-n;c;\xi)$ є поліномами ступеня n.

Формули зв'язку ортогональних поліномів з гіпергеометричною функцією можна подати у вигляді:

$$P_n^{\alpha,\beta}(x)=\frac{(\alpha+\beta)n}{n!}F\left(-n,\alpha+\beta+n+1;\alpha+1;\frac{1-x}{2}\right),$$

$$C_n^{(v)}(x)=\frac{(2v)_n}{n!}F\left(-n,n+2v;v+\frac{1}{2};\frac{1-x}{2}\right), \tag{2.9}$$

$$U_n(x)=(n+1)F\left(-n,n+2;\frac{3}{2};\frac{1-x}{2}\right),$$

$$T_n(x)=F\left(-n,n;\frac{1}{2};\frac{1-x}{2}\right),$$

$$P_n(x)=F\left(-n,n+1;1;\frac{1-x}{2}\right),$$

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{(\alpha+1)_n}{n!}\Phi(-n;\alpha+1;x).$$

Для поліномів Чебишова можна використовувати наступні подання:

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x),$$

$$U_n(x)=\frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)}.$$

Якщо зробити заміну змінної $\cos\theta=x$, то отримаємо простіші зображення цих поліномів:

$$T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta),\quad U_n(\cos\theta)=\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}. \tag{2.10}$$

2.3. ТАБЛИЦЯ ОРТОГОНАЛЬНОСТІ КЛАСИЧНИХ ПОЛІНОМІВ

У завершення цього параграфу запишемо також важливі співвідношення ортогональності для класичних поліномів та їх норми:

Таблиця 3

Номер	Співвідношення ортогональності	Норма поліному
1	$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \delta_{nm}\lVert P_n\rVert^2$	$\lVert P_n\rVert^2 = \frac{2}{2n+1}$
2	$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \delta_{nm}\lVert T_n\rVert^2$	$\lVert T_n\rVert^2 = \begin{cases} \pi, & n=0 \\ \frac{\pi}{2}, & n \geq 1 \end{cases}$
3	$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}U_n(x)U_m(x)dx =$ $= \delta_{nm}\lVert U_n\rVert^2$	$\lVert U_n\rVert^2 = \frac{\pi}{2}$
4	$\int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}} C_n^{(\nu)}(x)C_m^{(\nu)}(x)dx =$ $= \delta_{nm}\lVert C_n^{(\nu)}(x)\rVert^2$	$\lVert C_n^{(\nu)}\rVert^2 =$ $= \frac{\pi 2^{1-2\nu}}{n!(n+\nu)}\times$ $\times\frac{\Gamma(2\nu+n)}{\Gamma^2(\nu)}$
5	$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} P_n^{\alpha,\beta}(x)\times$ $\times P_m^{\alpha,\beta}(x)dx = \delta_{nm}\lVert P_n^{\alpha,\beta}\rVert^2$	$\lVert P_n^{\alpha,\beta}\rVert^2 =$ $= \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\times$ $\times\frac{\Gamma(\beta+n+1)}{\alpha+\beta+2n+1}$
6	$\int_{0}^{\infty} x^{\alpha}e^{-x}L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x)dx =$ $= \delta_{nm}\lVert L_n^{(\alpha)}\rVert^2$	$\lVert L_n^{(\alpha)}\rVert^2 =$ $= \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}$
7	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{H}_n(x)\mathrm{H}_m(x)dx =$ $= \delta_{nm}\lVert \mathrm{H}_n\rVert^2$	$\lVert \mathrm{H}_n\rVert^2 =$ $= \sqrt{\pi}n!2^n$

§ 3. СХЕМА МЕТОДУ ОРТОГОНАЛЬНИХ ПОЛІНОМІВ

Схему методу ортогональних поліномів наведемо за [12] на прикладі розв'язання інтегрального рівняння з логарифмічним ядром.

3.1. ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ 1-го РОДУ З ЛОГАРІФМИЧНИМ ЯДРОМ

Розглянемо інтегральне рівняння 1-го роду

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|x-s|}\varphi(s)ds = f(x), \quad |x|<1. \tag{3.1}$$

Для його розв'язання методом ортогональних поліномів використаємо спектральне співвідношення А.6.8, що вперше узагальнено для $n \neq 0$ у [10] :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|x-s|}\frac{T_n(s)}{\sqrt{1-s^2}}ds = \mu_n T_n(x), \quad |x|<1, \tag{3.2}$$

$$\mu_0 = \ln 2; \quad \mu_n = n^{-1} \quad (n \geq 1).$$

Не зупиняючись поки що на питаннях обґрунтування, формальний розв'язок інтегрального рівняння (3.1) будемо розшукувати як ряд за поліномами Чебишова

$$\varphi(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k T_k(s). \tag{3.3}$$

За мету ставиться розшукати коефіцієнти φ_k узагальненого ряду Фур'є (3.3).

Підставимо зображення (3.3) до інтегрального рівняння (3.1). Припускаючи, що ряд (3.3) можна почленно інтегрувати, отримаємо наступну рівність:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|x-s|}\frac{T_n(s)}{\sqrt{1-s^2}}ds = f(x).$$

Після подальшого використання спектрального співвідношення (3.2) підрахуємо інтеграл, який стоїть під знаком суми:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \mu_n T_n(x) = f(x). \tag{3.4}$$

Помножимо обидві частини рівності (3.4) скалярно на поліном Чебишова $T_m(x)$ та на вагову функцію $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, після чого проінтегруємо обидві частини за змінною x на інтервалі $(-1;1)$.

$$\int_{-1}^{1} w(x) T_m(x) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \mu_n T_n(x) dx = \int_{-1}^{1} w(x) T_m(x) f(x) dx.$$

Якщо припустити при цьому, що ряд у лівій частині рівності (3.4) можна почленно інтегрувати та використати співвідношення ортогональності поліномів Чебишова (2.11), то отримаємо:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \mu_n (T_n, T_m) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \mu_n \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \mu_n \delta_{nm} \|T_n\|^2 = \varphi_m \mu_m \|T_m\|^2 ,$$

$$\varphi_m \mu_m \|T_m\|^2 = \int_{-1}^{1} \frac{f(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx .$$

З останньої рівності відшукаємо коефіцієнт φ_m:

$$\varphi_m = \frac{f_m}{\mu_m \|T_m\|^2} , \tag{3.5}$$

де за f_m позначимо інтеграл відомої функції

$$f_m = \int_{-1}^{1} f(x) T_m(x) \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} dx .$$

Після підстановки коефіцієнтів φ_m, визначених за формулою (3.5), до співвідношення (3.3) отримаємо розв'язок інтегрального рівняння (3.1), який з урахуванням значень коефіцієнтів μ_m та $\|T_m\|^2$, що записані відповідно формулами (3.2) та (2.11), можна подати у вигляді

$$\varphi(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \left[\frac{1}{\pi \ln 2} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n(s)}{n^{-1}} \int_{-1}^{1} \frac{f(x) T_n(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} \right]. \tag{3.6}$$

3.2. ОБҐРУНТУВАННЯ ОТРИМАНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

Доведемо обґрунтування отриманого розв'язку. З цією метою перепишемо спектральне співвідношення (3.2)

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{H}(x,s)\varphi_n(s)ds = \mu_n\varphi_n(x), \quad |x|<1, \tag{3.7}$$

де

$$\mathrm{H}(x,s) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\left(1-s^2\right)^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{4}}}\ln\frac{1}{|x-s|}; \tag{3.8}$$

$\varphi_n(x) = \dfrac{C_nT_n(x)}{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{4}}}$, C_n — сталі, які фіксуються пізніше.

Зазначимо, що ядро рівняння (3.7) $\mathrm{H}(x,s)$ є симетричним, тобто $\mathrm{H}(x,s) = \mathrm{H}(s,x)$, а також $\mathrm{H}(x,s) \in L_2 \ ([-1;1]\times[-1;1])$, оскільки

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathrm{H}^2(x,s)dxds < +\infty .$$

Покажемо, що система функцій $\{\varphi_n(x)\}$ є ортогональною на проміжку $[-1;1]$ з ваговою функцією $w(x)=1.$ Враховуючи (2.11), зобразимо скалярний добуток функцій

$$(\varphi_n,\varphi_m) = C_nC_m\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)}{\left(1-x^2\right)^{1/4}}\frac{T_m(x)}{\left(1-x^2\right)^{1/4}}dx = C_n^2\delta_{nm}\|T_n\|^2.$$

Якщо вибрати C_n як $C_n = \|T_n\|^{-1}$, то система функцій $\{\varphi_n(x)\}$ буде ортонормованою системою на проміжку $[-1;1]$ з ваговою функцією $w(x)=1$:

$$\varphi_n(x) = \frac{T_n(x)}{\|T_n\|\left(1-x^2\right)^{1/4}} . \tag{3.9}$$

Із зображення (3.7) також випливає, що функції $\varphi_n(x)$ є власними функціями ядра $\mathrm{H}(x,s)$.

Для подальшого обґрунтування будуть потрібні теореми Ріса — Фішера та Гільберта — Шмідта. Наведемо їх формулювання. (Доведення цих теорем можна відшукати, наприклад, у [5].)

Теорема Риса — Фішера.

Якщо система функцій $\{\varphi_n(x)\}$ *є ортонормованою системою на проміжку* $[a;b]$, *а* $C_0, C_1, \ldots, C_n, \ldots$ *— є числова послідовність, то ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} C_n^2$ *збігається тоді і тільки тоді, коли у просторі* $L_2([a;b])$ *існує функція* $f(x)$, *коефіцієнтами узагальненого ряду Фур'є якої (1.5) за системою функцій* $\{\varphi_n\}$ *є сталі* C_n, *тобто* $C_n = (f, \varphi_n)$.

Теорема Гільберта — Шмідта.

Якщо функцію $f(x)$ *можна зобразити у вигляді*

$$f(x) = \int_a^b \mathrm{K}(x,y) g(y) dy,$$

де функція $\mathrm{K}(x,y)$ *— є симетричне ядро, що належить простору* $L_2([a,b]*[a,b])$, $g(y) \in L_2([a;b])$, *то функцію* $f(x)$ *можна розвинути у ряд, який збігається у середньому, за власними функціями ядра* $\mathrm{K}(x,y) - \{\varphi_k(x)\}$, *а саме —*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k \varphi_k(x).$$

Перепишемо рівняння (3.1) з урахуванням позначень (3.8).

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{H}(x,s) \psi(s) ds = g(x), \quad |x| < 1. \qquad (3.10)$$

Тут $g(x)$ є відомою функцією, $\psi(s)$ є новою невідомою функцією; обидві ці функції пов'язані з функціями $f(x)$ та $\varphi(s)$ наступними співвідношеннями:

$$g(x) = f(x)\left(1 - x^2\right)^{-1/4}, \quad \psi(s) = \varphi(s)\left(1 - s^2\right)^{1/4}. \qquad (3.11)$$

У подальшому припустимо, що функція $g(x) \in L_2[-1;1]$ та розв'язок рівняння (3.10) шукатимемо також у класі функцій, які належать L_2.

Помножимо скалярно обидві частини рівності (3.10) на $\varphi_n(x)$ та змінимо порядок інтегрування:

$$\int_{-1}^{1} \psi(s) \int_{-1}^{1} \mathrm{H}(x,s) \varphi_n(x) dx ds = (g, \varphi_n).$$

Скалярний добуток у правій частині рівності існує, що випливає з теореми Гільберта — Шмідта.

Враховуючи симетричність ядра $\mathrm{H}(x,s)$ та спектральне співвідношення (3.7), останню рівність можна переписати наступним чином:

$$\mu_n(\psi,\varphi_n)=(g,\varphi_n).$$

З цього розшукаємо коефіцієнти узагальненого ряду Фур'є (ψ,φ_n) шуканої функції $\psi(s)$ за системою функцій $\{\varphi_n\}$. З теореми Риса — Фішера випливає, що якщо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\psi,\varphi_n)^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(g,\varphi_n)^2}{\mu_n^2} \tag{3.12}$$

збігається, то розв'язок інтегрального рівняння (3.10) має подання

$$\psi(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(g,\varphi_n)}{\mu_n}\varphi_n(s). \tag{3.13}$$

Якщо ряд (3.12) є розбіжний, то рівняння (3.10) у просторі L_2 розв'язків не має.

Зазначимо, що якщо у розв'язок (3.13) підставити співвідношення (3.9), (3.11), то буде отримано такий самий розв'язок інтегрального рівняння, що було здобуто у п.1 цього параграфу. Але у цьому пункті питання умови розв'язуваності інтегрального рівняння (3.12) не обговорювалися.

3.3. ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ 1-го РОДУ З РІЗНИЦЕВИМ ЯДРОМ

Розглянемо тепер розв'язок інтегрального рівняння 1-го роду з різницевим ядром більш загальної форми:

$$\int_{-1}^{1}k(x-s)\varphi(s)ds=f(x),\quad |x|\le 1. \tag{3.14}$$

Найчастіше має місце ситуація, коли ядро цього рівняння можна зобразити у вигляді інтеграла Фур'є —

$$k(y)=\int_{0}^{\infty}\frac{h(t)}{t}\cos ty\,dt. \tag{3.15}$$

Припустимо, що в околі нуля $h(x) = o(x^{\alpha}),\ x > 0,\ \alpha > 0$ та при $t \to \infty$ має місце асимптотика:

$$h(t) = 1 + o\left(t^{-\delta}\right), \quad \delta > 0 .$$

Відокремимо у ядрі так звану сингулярну частину. Для цього використаємо формулу 3.951 (8) з [3]

$$\ln\frac{1}{|y|} = \int_0^{\infty} \frac{\cos ty - e^{-t}}{t} dt .$$

Після елементарних перетворень рівність (3.15) можна записати у поданні:

$$k(y) = \ln\frac{1}{|y|} + D(y), \tag{3.16}$$

де $D(y) = \int\limits_0^{\infty} \frac{\left(h(t) - 1\right)\, \cos ty - e^{-t}}{t} dt$.

Легко перевірити, що останній інтеграл є рівномірнозбіжним, тобто $D(y)$ є обмежена та неперервна функція. Підставимо вираз (3.16) до інтегрального рівняння (3.14):

$$\int_{-1}^{1} \left[\ln\frac{1}{|x-s|} + D(x-s) \right] \varphi(s) ds = f(x), \quad |x| \le 1. \tag{3.17}$$

Розв’язок отриманого рівняння (3.17) будемо розшукувати у поданні (3.3). Після використання спектрального співвідношення (3.2) з (3.17) матимемо

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \left[\mu_n T_n(x) + \int_{-1}^{1} D(x-s) \frac{T_n(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds \right] = f(x).$$

Помножимо обидві частини цього рівняння скалярно на $T_m(x)$ $(m = 0,1,\ldots)$. Враховуючи ортогональність поліномів Чебишова (2.11), отримаємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\varphi_m \mu_m \left\| T_m \right\|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} d_{nm} \varphi_n = f_m, \quad m = 0,1,\ldots, \tag{3.18}$$

де $d_{nm} = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{D(x-s) T_n(s) T_m(x)}{\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-x^2}} ds dx,$

$$f_m = \int_{-1}^{1} f(x)\frac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx\ .$$

Після розв'язання цієї системи знайдемо коефіцієнти φ_m розвинення у ряд (3.3).

Питання щодо розв'язання алгебраїчних систем такого роду та рахування коефіцієнтів d_{nm} будуть обговорені нижче.

3.4. ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ 2-го РОДУ З ЛОГАРІФМИЧНИМ ЯДРОМ

Розглянемо розв'язок інтегрального рівняння 2-го роду з логарифмічним ядром

$$\varphi(x)+\gamma\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|x-s|}\varphi(s)ds = f(x). \tag{3.19}$$

З теореми Гільберта — Шмідта випливає, що для ядра $\mathrm{K}(x,y)$, яке має властивості, що зазначені у формулюванні теореми, має місце білінійне розвинення у ряд, який збігається у середньому:

$$\mathrm{K}(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\varphi_n(x)\varphi_n(y)\,,$$

де λ_n — власні числа, $\varphi_n(x)$ — власні функції ядра $\mathrm{K}(x,y)$.

Для ядра $\mathrm{H}(x,s)$ з (3.8) — його власними функціями, як це продемонстровано раніше, є функції (3.9), а власними числами — числа μ_n (3.2) — білінійне розвинення запишеться у формі

$$\ln\frac{1}{|x-s|}=\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mu_n T_n(x)T_n(s)}{\|T_n\|^2}=\ln 2+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_n(x)T_n(s)}{n}. \tag{3.20}$$

Після формальної підстановки співвідношення (3.20) до інтегрального рівняння (3.19) отримаємо таку рівність:

$$\varphi(x)+\gamma\pi\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n\|T_n\|^{-2}\varphi_n T_n(x)=f(x). \tag{3.21}$$

За φ_n беремо інтеграл

$$\varphi_n=\int_{-1}^{1}T_n(s)\varphi(s)ds\ .$$

Якщо коефіцієнти φ_n відшукані, то з формули (3.21) можна остаточно відшукати зображення шуканої функції $\varphi(x)$.

Помножимо обидві частини рівності (3.21) на $T_m(x)$ та проінтегруємо за змінною x від -1 до 1. Як результат, отримано нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів φ_n, $n = 0,1,2,\ldots$

$$\varphi_m + \gamma\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mu_n}{\|T_n\|^2}d_{nm}\varphi_n = f_m, \quad m = 0,1,\ldots, \tag{3.22}$$

де $f_m = \int_{-1}^{1} f(x)T_m(x)dx$, $d_{nm} = \int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)dx$.

Для підрахунку останнього інтеграла потрібно зробити заміну змінної $x = \cos\theta$ та використати співвідношення (2.10).

Якщо систему алгебраїчних рівнянь(3.22) вдається розв'язати, то розв'язок інтегрального рівняння (3.19) завдяки (3.20) можна подати у вигляді

$$\varphi(x) = f(x) - \gamma\pi\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n\|T_n\|^{-2}\varphi_n T_n(x).$$

Питання розв'язуваності нескінчених систем лінійних алгебраїчних рівнянь розглянуто нижче у параграфі 5.

§ 4. ПОЛІНОМІАЛЬНІ ЯДРА. ТЕОРЕМА ПРО П-ЯДРА

В цьому параграфі узагальнюються результати § 3 та пропонується загальна схема розв'язання інтегральних рівнянь 1-го та 2-го роду методом ортогональних поліномів.

Багато просторових контактних задач, задач для областей з розривами можна привести до розв'язання інтегрального рівняння 1-го роду

$$\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = f(x), \quad x \in [a;b],$$

яке задано або на скінченому, або на півнескінченному проміжку. Для того щоб описати суть методу ортогональних поліномів щодо інтегральних рівнянь, введемо спеціальний клас ядер, фіксований наступним чином.

4.1. ВИЗНАЧЕННЯ ПОЛІНОМІАЛЬНОГО ЯДРА ТА СПЕКТРАЛЬНОГО СПІВВІДНОШЕННЯ

Функцію $\Pi(x,y)$ називають поліноміальним ядром (скорочено П-ядром) на проміжку $[a;b]$, якщо для неї справедливим є співвідношення:

$$\int_a^b \Pi_+(x,y)p_+(y)\pi_n^+(y)dy = \sigma_n g_+(x)\pi_n^-(x), \tag{4.1}$$

$$\int_a^b \Pi_-(y,x)p_-(y)\pi_n^-(y)dy = \sigma_n g_-(x)\pi_n^+(x), \tag{4.2}$$

$x \in [a;b]$, $\sigma_n \neq 0$, $n = 0,1,2,\ldots,\{\pi_n^{\pm}(x)\}$ — це системи поліномів, які є ортонормовані на проміжку $[a;b]$ з ваговою функцією $w_{\pm}(x) = p_{\pm}(x)g_{\mp}(x)$,

$$\Pi_+(x,y) = \Pi(x,y), \quad \Pi_-(x,y) = \Pi(y,x). \tag{4.3}$$

Надалі співвідношення (4.1), (4.2) будуть називатися спектральними, бо вони визначають дискретний спектр інтегрального оператора з ядром $\Pi(x,y)$, що помножене на деякі вагові функції, якщо $\Pi(x,y)=\Pi(y,x)$.

Зауважимо, що якщо $\Pi(x,y)$ є симетричне ядро ($\Pi(x,y)=\Pi(y,x)$), то рівності (4.1) та (4.2) збігаються та

$$p_+(x)=p_-(x),\ g_+(x)=g_-(x),\ \pi_n^+(x)=\pi_n^-(x).$$

Прикладом П-ядра є ядро інтегральних рівнянь, що розглянуті у § 3. В цьому випадку

$$\Pi(x,y)=\ln\frac{1}{|x-y|},\ [a;b]=[-1,1],\ p_+=p_-=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$g_+=g_-=1,\ \pi_n^+(x)=\pi_n^-(x)=T_n(x)\|T_n\|^{-1}.$$

Співвідношення (3.2) є окремим випадком рівності (4.1).

Взагалі тут $\pi_n^{\mp}(x)$ — це поліноми точного ступеня n, тобто коефіцієнти при старшому ступені $k_n^{\pm}\neq 0$ (будемо для визначеності вважати, що $\operatorname{Re}k_n^{\pm}>0$). Ці поліноми є ортонормовані:

$$\int_a^b \pi_n^{\pm}(x)\pi_m^{\pm}(x)w_{\pm}(x)dx=\delta_{nm},\quad w_{\pm}(x)=p_{\pm}(x)g_{\mp}(x). \tag{4.4}$$

Вагові функції можуть бути комплекснозначні.

Якщо вагові функції є невід'ємні та виконано умову

$$\int_a^b\int_a^b\left|\frac{p_-(x)}{g_+(x)}\Pi^2(x,y)\frac{p_+(y)}{g_-(y)}\right|dxdy<+\infty, \tag{4.5}$$

то Π -ядро називають гільбертовим.

Введемо ядро

$$\mathrm{H}(x,y)=\left(\frac{p_-(x)}{g_+(x)}\right)^{1/2} \tag{4.6}$$

та ортонормовані системи функцій

$$\varphi_n^{\pm}(x)=\sqrt{w_{\pm}(x)}\pi_n^{\pm}(x),\quad \int_a^b\varphi_n^{\mp}(x)\varphi_m^{\pm}(x)=\delta_{nm}\,. \tag{4.7}$$

Співвідношення (4.1), (4.2) для гільбертових ядер можна записати тоді у формі

$$\int_a^b \mathrm{H}(x,y)\varphi_n^{\pm}(y)dy = \sigma_n\varphi_n^{\mp}(x),$$

$$\int_a^b \mathrm{H}(y,x)\varphi_n^{\mp}(y)dy = \sigma_n\varphi_n^{\pm}(x). \tag{4.8}$$

Якщо тепер взяти до уваги, що умова (4.5) еквівалентна до умови належності ядра $\mathrm{H}(x,y)$ простору $L_2([a;b]x[a,b])$, то з (4.8), відповідно до теореми Гільберта — Шмідта, буде випливати білінійне розвинення ядра $\mathrm{H}(x,y)$ за ортонормованими функціями $\varphi_n^{\pm}(x)$, яке збігається у середньому. Отже, для гільбертових ядер завжди є справедливим таке білінійне розвинення:

$$\Pi(x,y) = g_+(x)g_-(y)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n\pi_n^-(x)\pi_n^+(y). \tag{4.9}$$

4.2. РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПОЛІНОМІАЛЬНИМИ ЯДРАМИ

Розглянемо тепер схему розв'язування інтегральних рівнянь з поліноміальними ядрами.

1^0 Нехай потрібно побудувати розв'язок інтегрального рівняння першого роду

$$\int_a^b \Pi(x,y)\varphi(y)dy = f(x), \quad a \le x \le b. \tag{4.10}$$

де $f(x) \in L_2([a,b])$ з вагою $p_-(x)$, $\varphi(x) \in L_2([a,b])$ з вагою $p_+(x)$.

Підставимо до інтегрального рівняння (4.10) білінійне розвинення П-ядра (4.9). Ряд (4.9) збігається у середньому (з цього випливає, що його можна почленно інтегрувати), отже після підстановки дістанемо наступне зображення:

$$g_+(x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n\pi_n^-(x)\int_a^b g_-(y)\pi_n^+(y)\varphi(y)dy = f(x). \tag{4.11}$$

Формальний розв'язок цього рівняння будемо шукати через подання:

$$\varphi(y) = p_+(y)\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n\pi_n^+(y). \tag{4.12}$$

Враховуючи, що поліноми $\pi_n^+(y)$ є ортонормованими поліномами на проміжку $[a;b]$ з ваговою функцією $w_+(y) = p_+(y)g_-(y)$, з рівності (4.10) отримаємо

$$g_+(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sigma_m\pi_m^-(x)\varphi_m = f(x). \tag{4.13}$$

Помножимо обидві частини останнього виразу на $p_-(x)\pi_k^-(x)$ та проінтегруємо за змінною x від a до b. Припускаючи, що ряд дозволяє почленне інтегрування та враховуючи ортонормованість поліномів $\pi_k^-(x)$, дістанемо

$$\sigma_k\varphi_k = f_k; \qquad f_k = \int_a^b p_-(x)\pi_k^-(x)f(x)dx\,,$$

звідки відшукаємо коефіцієнти розвинення — φ_k.

Отже,
$$\varphi(y) = p_+(y)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n}{\sigma_n}\pi_n^+(y). \tag{4.14}$$

Отриманий розв'язок (4.14) буде і у строгому сенсі розв'язком рівняння (4.10) (збіжність розуміємо як середнє зважене), якщо $\Pi(x,y)$ є гільбертове ядро та, крім того, збігається ряд з чисел $\left|f_n\sigma_n^{-1}\right|^2$, $n = 0,1,2,\ldots$. Якщо рівняння задане на скінченому інтервалі, то, в силу повноти у просторі L_2 системи поліномів, побудований розв'язок буде у L_2 і единим. У випадку півнескінченного інтервалу це буде мати місце у випадку таких вагових функцій, що забезпечують повноту відповідних π-поліномів.

2⁰ Для розв'язання інтегрального рівняння 2-го роду

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b \Pi(x,y)p(y)\varphi(y)dy = f(x), \tag{4.15}$$

$$f(x),\ \varphi(x) \quad \in L_2([a,b]) \text{ з вагою } p_+(x)g_-(x)$$

з гільбертовим П-ядром маємо використати білінійне розвинення (4.9). За результатом почленного інтегрування розв'язок отримаємо як наступне зображення:

$$\varphi(x) - \lambda g_+(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sigma_m\varphi_m\pi_m^-(x) = f(x), \tag{4.16}$$

$$\varphi_m = \int_a^b g_-(y)\pi_m^+(y)p(y)\varphi(y)dy. \tag{4.17}$$

Помножимо рівність (4.16) на $g_-(x)\pi_n^+(x)p(x)$ та проінтегруємо за змінною x на $(a;b)$. Як результат, дістанемо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\varphi_n - \lambda\sum_{m=0}^{\infty}\sigma_m a_{nm}\varphi_m = f_n \quad (n = 0,1,2,\ldots); \tag{4.18}$$

$$a_{nm} = \int_a^b g_+(x)g_-(x)p(x)\pi_n^+(x)\pi_m^-(x)dx; \tag{4.19}$$

$$f_n = \int_a^b g_-(x)\pi_n^+(x)p(x)f(x)dx. \tag{4.20}$$

Побудований формальним шляхом розв’язок можна обґрунтувати, якщо застосувати методи гільбертового простору, що буде наведено нижче.

3⁰ Наведемо тепер розв’язання інтегрального рівняння 1-го роду більш загального вигляду, ніж рівняння (4.10):

$$\int_a^b \mathrm{K}(x,y)\varphi(y)dy = f(x), \quad a \le x \le b, \tag{4.21}$$

де $f(x) \in L_2([a,b])$ з вагою $p_+(x)$.

Розв’язок рівняння будемо шукати у класі функцій, що належать простору функцій $L_2([a,b])$ з вагою $p_-(x)$.

Зобразимо ядро цього рівняння $\mathrm{K}(x,y)$ наступним чином:

$$\mathrm{K}(x,y) = \Pi(x,y) + D(x,y). \tag{4.22}$$

Зауважимо, що найчастіше функція $\Pi(x,y)$ несе на себе сингулярність ядра $\mathrm{K}(x,y)$, а $D(x,y)$ — у найгіршому випадку є функцією неперервною (як правило, це — будь-яке число раз диференційована функція).

Підставимо співвідношення (4.22) до інтегрального рівняння (4.21):

$$\int_a^b \Pi(x,y)\varphi(y)dy + \int_a^b D(x,y)\varphi(y)dy = f(x).$$

Формальний розв’язок такого рівняння будемо шукати через подання (4.12) $\varphi(y) = p_+(y)\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_m\pi_m^+(x)$. Враховуючи спектральне співвідношення (4.1), отримаємо рівність

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sigma_m g_+(x)\pi_m^-(x)\varphi_m+\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_m\int_a^b D(x,y)p_+(y)\pi_m^+(y)dy=f(x).$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на $p_-(x)\pi_n^-(x)$ та проінтегруємо за змінною x від a до b. Враховуючи, що $\{\pi_n^-(x)\}$ є ортонормовані поліноми з ваговою функцією $w_-(x)=p_-(x)g_+(x)$, як результат отримаємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sigma_n\varphi_n+\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_m d_{nm}=f_n,\quad n=0,1,2,...;$$

$$d_{nm}=\int_a^b p_-(x)\pi_n^-(x)dx\int_a^b D(x,y)p_+(y)\pi_m^+(y)dy;$$

$$f_n=\int_a^b p_-(x)\pi_n^-(x)f(x)dx.$$

Можна легко впевнитися, що коефіцієнти d_{nm} визначають зображення функції $D(x,y)$ у вигляді подвійного ряду за $\pi_n^{\pm}$-поліномами. Якщо зберігати в цьому ряді скінчене число членів, то прийдемо до наступної апроксимації:

$$D(x,y)\approx g_+(x)g_-(y)\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N}d_{nm}\pi_n^-(x)\pi_m^+(y).\qquad(4.23)$$

Для відшукання коефіцієнтів φ_m $(m=0,1,...,N)$, якщо задовільнитися наближеною відповіддю, будемо мати скінчену систему рівнянь

$$\sigma_n\varphi_n+\sum_{m=0}^{N}d_{nm}\varphi_m=f_n\quad(n=0,1,2,...,N).\qquad(4.24)$$

Для решти φ_m $(m=N+1,N+2,...)$ має місце формула $\varphi_m=f_m\sigma_m^{-1}$. При цьому якщо функція $\dfrac{f(x)}{g_+(x)}$ — поліном ступеня *M*, що досить часто зустрічається, наприклад, у контактних задачах, то ряд (4.12) обривається на члені, порядковий номер якого дорівнює $\max(M,N)$.

Апроксимація (4.23) буває зручною не завжди. В багатьох випадках може бути корисним апроксимувати функцію $D(x,y)/g_+(x)g_-(y)$ інтерполяційним поліномом. Крім того, у багатьох контактних задачах природньо використати апроксимацію такого сорту:

$$D(x,y)\approx g_+(x)g_-(y)\sum_{k=0}^{N}\mathrm{A}_k\mathrm{P}_k(x,y),\quad \mathrm{P}_k(x,y)=\sum_{j=0}^{k}a_{kj}x^{k-j}y^j.$$

У такому випадку (4.24) набуває вигляду

$$\sigma_n\varphi_n+\sum_{m=0}^{N-n}b_{nm}\varphi_m=f_n\,(n=0,1,2,\dots,N). \tag{4.25}$$

Ця апроксимація має ту перевагу перед двома попередніми, що матриця коефіцієнтів системи алгебраїчних рівнянь є майже трикутною.

З всього вищесказаного випливає, що найважливішим питанням є питання побудови Π -ядра. Наступні параграфи цієї глави торкаються цього питання.

4.3. ТЕОРЕМА ПРО П-ЯДРА

Для того щоб функція $\Pi(x,y)$ була П-ядром на проміжку $[a;b]$, необхідно та достатньо, щоб виконувалися наступні умови:

а) існують такі функції $p_\pm(x),\,g_\pm(x)$, що

$$\int_a^b\Pi(x,y)p_+(y)y^m dy=g_+(x)\sum_{j=0}^{m}b_{jm}^{+}x^j\ , \tag{4.26}$$

$$\int_a^b\Pi(y,x)p_-(y)y^m dy=g_-(x)\sum_{j=0}^{m}b_{jm}^{-}x^j\ , \tag{4.27}$$

$$b_{mm}^{\pm}\neq 0,\quad m=0,1,2,\dots;$$

б) існують та рівні між собою повторні інтеграли:

$$\int_a^b x^n p_-(x)dx\int_a^b\Pi(x,y)p_+(y)y^m dy=\int_a^b p_+(y)y^m dy\int_a^b\Pi(x,y)p_-(x)x^n dx; \tag{4.28}$$

в) існують моменти

$$C_n^{\pm}=\int_a^b w_\pm(x)x^n dx,\quad n=0,1,\dots\ \left(w_\pm(x)=p_\pm(x)g_\mp(x)\right); \tag{4.29}$$

г) для будь-яких значень $n=0,1,\dots$ визначники Грама мають бути відмінні від нуля —

$$G_n^{\pm}=\begin{vmatrix} C_0^{\pm} & C_1^{\pm} & \dots & C_n^{\pm} \\ C_1^{\pm} & C_2^{\pm} & \dots & C_{n+1}^{\pm} \\ \vdots & & & \\ C_n^{\pm} & C_{n+1}^{\pm} & \dots & C_{2n}^{\pm} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (n=0,1,2,\dots). \qquad (4.30)$$

Доведення.

Необхідність.

Хай $\Pi(x,y)$ — П-ядро, тобто існують такі функції $p_{\pm}(x)$, $g_{\pm}(x)$ та дві системи поліномів ортогональних на $(a;b)$

$$\int_a^b w_{\pm}(x)\pi_n^{\pm}(x)\pi_m^{\pm}(x)dx=\delta_{nm}\ ,\ w_{\pm}(x)=p_{\pm}(x)g_{\mp}(x)$$

такі, що виконано спектральні співвідношення (4.1), (4.2)

$$\int_a^b \Pi_+(x,y)p_+(y)\pi_n^+(y)dy=\sigma_n g_+(x)\pi_n^-(x),$$

$$\int_a^b \Pi_-(y,x)p_-(y)\pi_n^-(y)dy=\sigma_n g_-(x)\pi_n^+(x),\ x\in(a;b).$$

Покажемо, що тоді виконано умови а) — г).

Оскільки $\pi_n^{\pm}(x)$ є поліномами ступеня n, то [14]

$$x^n=\sum_{j=0}^{n}\lambda_{nj}^{\pm}\pi_j^{\pm}(x),\quad \lambda_{nn}^{\pm}\neq 0. \qquad (4.31)$$

Отже, з (4.1), (4.2) можна записати:

$$\int_a^b \Pi_{\pm}(x,y)p_{\pm}(y)y^n dy=g_{\pm}(x)\sum_{j=0}^{n}\lambda_{nj}^{\pm}\sigma_j\pi_j^{\mp}(x), \qquad (4.32)$$

звідки випливає необхідність умови а), причому

$$b_{nn}^{\pm}=\lambda_{nn}^{\pm}k_n^{\mp}\sigma_n\neq 0 \quad (n=0,1,2,\dots). \qquad (4.33)$$

Щоби впевнитися в необхідності умови б) для підрахунку повторних інтегралів у (4.28) потрібно застосувати співвідношення (4.32), (4.31). Необхідність решти умов випливає із наступної леми.

Лема. *Якщо для деякого лінійного функціоналу* $F\{u\}$ *та деякої системи поліномів* $\pi_n(x)$, $k_n\neq 0 \quad (n=0,1,2,\dots)$ *має місце співвідношення*

$$F\{\pi_j(x)\pi_k(x)\}=\delta_{jk}, \qquad (4.34)$$

то існують числа (моменти) $F\left\{x^n x^0\right\} = C_n$*, для яких*

$$G_n = \det\left\|C_{j+k}\right\|_0^n \neq 0 \quad (n = 0,1,2,\ldots). \qquad (4.35)$$

Дійсно, в силу (4.34), (4.31) та лінійності функціонала маємо

$$F\left\{x^n x^0\right\} = F\left\{\frac{x^n \pi_0(x)}{k_0}\right\} = F\left\{\frac{\pi_0(x)}{k_0}\sum_{j=0}^{n}\lambda_{nj}\pi_j(x)\right\} = \frac{\lambda_{n0}}{k_0} = C_n .$$

З іншого боку,

$$C_{j+k} = F\left\{x^j x^k\right\} = F\left\{\sum_{r=0}^{j}\lambda_{jr}\pi_r(x)\sum_{s=0}^{k}\lambda_{ks}\pi_s(x)\right\} = \sum_{r=0}^{\min(k,j)}\lambda_{jr}\lambda_{kr}. \qquad (4.36)$$

Якщо ввести до розгляду трикутну матрицю

$$\Lambda_n = \begin{Vmatrix} \lambda_{00} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_{10} & \lambda_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{n0} & \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \ldots & \lambda_{nn} \end{Vmatrix}, \quad \det\Lambda_n = \prod_{j=0}^{n}\lambda_{jj} \neq 0$$

та транспоновану до неї $\Lambda_n^{'}$, $\det\Lambda_n^{'} = \det\Lambda_n$, то отримана рівність (4.36) визначає, що $\left\|C_{j+k}\right\|_0^n = \Lambda_n\Lambda_n^{'}$ та

$$\det\left\|C_{j+k}\right\|_0^n = \det\Lambda_n,\ \det\Lambda_n^{'} \neq 0 .$$

Доведення необхідності умов а) — г) закінчено.

Достатність.

Нехай виконано умови теореми а) — г). Покажемо тоді, що $\Pi(x,y)$ — П-ядро, тобто існують такі функції $p_\pm(x)$, $g_\pm(x)$ та дві системи поліномів ортогональних на $(a;b)$

$$\int_a^b w_\pm(x)\pi_n^\pm(x)\pi_m^\pm(x)dx = \delta_{nm}\ ,\ w_\pm(x) = p_\pm(x)g_\mp(x)$$

такі, що виконано спектральні співвідношення (4.1), (4.2)

$$\int_a^b \Pi_+(x,y)p_+(y)\pi_n^+(y)dy = \sigma_n g_+(x)\pi_n^-(x),$$

$$\int_a^b \Pi_-(y,x)p_-(y)\pi_n^-(y)dy = \sigma_n g_-(x)\pi_n^+(x).$$

Для цього помножимо обидві частини співвідношення (4.26) на $p_-(x)x^n$ $(n=0,1,2,\ldots)$ та проінтегруємо за змінною x у інтервалі $(a;b)$, після чого у лівій частині переставимо інтеграли завдяки (4.26), (4.27). Як результат використання (4.27) та позначення (4.29) отримаємо

$$\sum_{j=0}^{n} b_{jn}^{-} C_{m+j}^{+} = \sum_{j=0}^{m} b_{jm}^{+} C_{n+j}^{-}. \tag{4.37}$$

Використаємо далі умову г), для чого побудуємо дві системи поліномів —

$$\pi_n^{\pm}(x) = \frac{1}{\sqrt{G_n^{\pm} G_{n-1}^{\pm}}} \begin{vmatrix} C_0^{\pm} & C_1^{\pm} & \ldots & C_n^{\pm} \\ C_1^{\pm} & C_2^{\pm} & \ldots & C_{n+1}^{\pm} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{n-1}^{\pm} & C_n^{\pm} & \ldots & C_{2n-1}^{\pm} \\ 1 & x & \ldots & x^n \end{vmatrix}, \quad k_n^{\pm} = \left(\frac{G_{n-1}^{\pm}}{G_n^{\pm}} \right)^{1/2}. \tag{4.38}$$

Ці дві системи задовольняють умові г).

Введемо позначення алгебраїчного доповнення нижньої стрічки визначника з (4.38) — $\mathrm{A}_{jn}^{\pm}$ $(j=0,1,2,\ldots,n)$. Можна записати

$$\pi_n^{\pm}(x) = \frac{1}{\sqrt{G_n^{\pm} G_{n-1}^{\pm}}} \sum_{j=0}^{n} \mathrm{A}_{jn}^{\pm} x^j. \tag{4.39}$$

Користуючись останньою формулою, а також співвідношенням (4.26), підрахуємо інтеграл

$$\int_a^b \Pi(x,y) p_+(y) \pi_n^{+}(y) dy = g_+(x) P_n^{-}(x),$$

$$P_n^{-}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\mathrm{A}_{jn}^{+}}{\sqrt{G_n^{+} G_{n-1}^{+}}} \sum_{r=0}^{j} b_{rj}^{+} x^r. \tag{4.40}$$

Залишається тепер показати, що поліном $P_n^{-}(x)$ (4.40) відрізняється від поліному $\pi_n^{-}(x)$, який визначається за формулою (4.39), тільки на константу $\sigma_n^{-} \neq 0$, тобто

$$P_n^{-}(x) = \sigma_n^{-} \pi_n^{-}(x).$$

Для цього достатньо показати, що

$$Y_{nm} = \int_a^b P_n^{-}(x) x^m w_-(x) dx = 0, \ (m = 0,1,\ldots,n-1).$$

Підставимо в ліву частину останньої рівності зображення (4.40), враховуючи співвідношення (4.37), отримаємо результат:

$$Y_{nm} = \sum_{j=0}^{n} \frac{A_{jn}^{+}}{\sqrt{G_n^+ G_{n-1}^+}} \sum_{r=0}^{j} b_{rj}^{+} C_{m+r}^{-} = \sum_{j=0}^{n} \frac{A_{jn}^{+}}{\sqrt{G_n^+ G_{n-1}^+}} \sum_{r=0}^{m} b_{rm}^{+} C_{r+j}^{+} =$$

$$= \sum_{r=0}^{m} \frac{b_{rm}^{-}}{\sqrt{G_n^+ G_{n-1}^+}} \sum_{j=0}^{n} A_{jn}^{+} C_{j+r}^{+} = 0,\ m < n.$$

A_{jn}^{+} — це алгебраїчні доповнення нижньої стрічки визначника у (4.38). Останнє є вірним в силу того, що

$$\sum_{j=0}^{n} A_{jn}^{+} C_{r+j}^{+} = 0\,,\ r < m < n,$$

оскільки сумма добутків r-ї стрічки визначника $(r < n)$ на алгебраїчні доповнення іншої n-ї строки дорівнює нулю.

Нарешті, порівнюючи коефіцієнти при x^n у поліномах $P_n^-(x), \pi_n^-(x)$, відшукаємо $\sigma_n^- = b_{nn}^+ k_n^+ \left[k_n^-\right]^{-1} \neq 0$, оскільки $b_{nn}^+, k_n^+ \neq 0$. Отже, доведено, що

$$\int_a^b \Pi(x,y) p_+(y) \pi_n^+(y) dy = \sigma_n^- g_+(x) \pi_n^-(x). \tag{4.41}$$

Аналогічним чином можна довести рівність

$$\int_a^b \Pi(x,y) p_-(x) \pi_n^-(x) dx = \sigma_n^+ g_-(y) \pi_n^+(y), \tag{4.42}$$

де $\sigma_n^+ = b_{nn}^- k_n^- \left[k_n^+\right]^{-1} \neq 0$.

Залишилося показати, що

$$\sigma_n^- = \sigma_n^+ = \sigma_n. \tag{4.43}$$

Ця рівність випливає з умови б). Щоби в цьому впевнитися, обидві частини рівності (4.41) помножимо на $\pi_n^-(x) p_-(x)$ та проінтегруємо за x від a до b. Змінимо порядок інтегрування у лівій частині на підставі (4.28), та порівнюючи з різністю, яку отримано з (4.42) шляхом інтегрування її за змінною x з ваговою функцією $\pi_n^+(y) p_+(y)$ у інтервалі (a,b), дістанемо результат.

Теорему повністю доведено.

Зробимо декілька зауважень. Теорема є справедливою, коли замість (a,b) взяти довільну лінію (або декілька ліній) у комплексній площині. При невід'ємності вагових функцій умова теореми г) виконується автоматично [14]. У випадку гільбертовості ядер умови (4.26), (4.27) та (4.3) еквівалентні. В цьому можна переконатися, якщо ввести ядро (4.6) та зв'язані з ним ітеровані ядра Шмідта, використати положення теореми Гільберта — Шмідта та положення роботи [12].

4.4. ПОБУДОВА П-ЯДРА НА СКІНЧЕНОМУ ПРОМІЖКУ

Введемо до розгляду ядро

$$K(x,y)=\int\limits_a^{\min(x,y)} K_+(x-s)K_-(y-s)\rho(s)ds \quad (a\le x,y\le b) \qquad (4.44)$$

Поставимо запитання: якими мають бути функції K_+, K_-, ρ, щоби це ядро було П-ядром на інтервалі (a,b). Щоби знайти відповідь, почнемо перетворення інтегралів

$$Y_+=\int\limits_a^b K(x,y)\varphi_+(y)dy, \quad Y_-=\int\limits_a^b K(y,x)\varphi_-(y)dy\ , \qquad (4.45)$$

де $\varphi_\pm(y)$ — поки є довільні функції.

Проведемо розбиття інтервалу інтегрування у формулах (4.45) на два — (a,x) та (x,b) та підставимо до них зображення (4.44). Після перестановки інтегралів, що буде обґрунтована у наступному, матимемо

$$Y_\pm=\int\limits_a^x K_\pm(x-s)\rho(s)ds\int\limits_s^x K_\mp(y-s)\phi_\pm(y)dy+$$

$$+\int\limits_a^x K_\pm(x-s)\rho(s)ds\int\limits_x^b K_\mp(y-s)\phi_\pm(y)dy=$$

$$=\int\limits_a^x K_\pm(x-s)\rho(s)ds\int\limits_s^b K_\mp(y-s)\phi_\pm(y)dy\ .$$

Після заміни змінних

$$\xi=x-a,\ s=\xi\tau+a,\ y=\xi\tau+a+t(b-a-\xi\tau),$$

$$ds=\xi d\tau\ ,\ dy=(b-a-\xi\tau)dt\ ,\ \begin{matrix} s=a\sim\tau=0 \\ s=\xi+a-x\sim\tau=1 \end{matrix}\ ,\ \begin{matrix} t=0\sim y=s=\xi\tau+a \\ t=1\sim y=b, \end{matrix}$$

отримаємо

$$\int_0^1 \xi\rho(\xi\tau+a)K_{\pm}(\xi(1-\tau))(b-a-\xi\tau)d\tau\int_0^1 K_{\mp}(t(b-a-\xi\tau))\times$$

$$\times\varphi_{\pm}(\xi\tau+a+t(b-a-\xi\tau))dt=Y_{\pm},\quad(\xi=x-a). \qquad (4.46)$$

Візьмемо

$$\varphi_{\pm}(y)=y^n p_{\pm}(y)\quad(n=0,1,2,...). \qquad (4.47)$$

З співвідношення (4.46) випливає, що подання (4.1), (4.2) буде мати місце, якщо

$$\xi\rho(\xi\tau+a)K_{\pm}(\xi(1-\tau))(b-a-\xi\tau)K_{\pm}(t(b-a-\xi\tau))\times$$

$$\times p_{\pm}(\xi\tau+a+t(b-a-\xi\tau))=g_{\pm}(x)F_{\pm}(\tau,t)\quad(\xi=x-a). \qquad (4.48)$$

Останнє виконуватиметься, коли

$$\rho(s)=(s-a)^{\rho}(b-s)^{\sigma},\quad K_{+}(u)=u^{-\alpha},$$

$$K_{-}(u)=u^{-\beta},\quad p_{\pm}(y)=(b-y)^{-\beta_{\pm}}. \qquad (4.49)$$

Тут

$$\beta_{+}=1+\sigma-\beta,\quad \beta_{-}=1+\sigma-\alpha, \qquad (4.50)$$

$$g_{+}(x)=(x-a)^{1+\rho-\alpha},\quad g_{-}(x)=(x-a)^{1+\rho-\beta}, \qquad (4.51)$$

$$F_{+}(\tau,t)=\tau^{\rho}(1-\tau)^{-\alpha}t^{-\beta}(1-t)^{\beta-\sigma-1},\ F_{-}(\tau,t)=\tau^{\rho}(1-\tau)^{-\beta}t^{-\alpha}(1-t)^{\alpha-\sigma-1}. \qquad (4.52)$$

У результаті підрахунку інтегралів у (4.46), взявши до уваги (4.47)–(4.52), знайдемо

$$b_{nn}^{+}=\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta-\sigma+n)\Gamma(1+\rho+n)}{\Gamma(2+\rho-\alpha+n)\Gamma(1-\sigma+n)}. \qquad (4.53)$$

Формула для b_{nn}^{-} випливає з (4.52) шляхом перестановки параметрів α та β. Таким чином, на основі вищевикладеного отримаємо функцію

$$\Pi^{*}(x,y)=\int_a^c \frac{(s-a)^{\rho}(b-s)^{\sigma}}{(x-s)^{\alpha}(y-s)^{\beta}}ds\left(\mathrm{Re}(1+\rho,1+\sigma,1-\alpha,1-\beta)>0\right), \qquad (4.54)$$

$c=\min(x,y)$.

Може статися, що функція (4.54) є П-ядром. Щоб переконатися в цьому, потрібно перевірити виконання всіх умов теореми про П-ядра.

Умову $b_{nn}^{\pm} \neq 0\,(n = 0,1,2,...)$ та умову в) цієї теореми буде виконано, якщо, окрім обмежень, які накладені на параметри у (4.54), додатково вимагати $\mathrm{Re}(\beta - \sigma, \alpha - \sigma) > 0 \;\; (\sigma \neq 1,2,3)$.

Таким чином, отримано наступні обмеження:

$$\mathrm{Re}(1+\rho, 1+\sigma, 1-\alpha, 1-\beta, \beta-\sigma, \alpha-\sigma) > 0 \quad (\sigma \neq 1,2,3,...). \qquad (4.55)$$

Ці обмеження, що легко перевірити, забезпечують рівність (4.2) та разом з цим роблять вірними перестановки інтегралів, які виконано під час виведення (4.46), (4.48). Залишається показати виконання умови б) теореми про П-ядра. Замість цього доведемо існування П-поліномів для ядра (4.54). З цією метою на основі (4.49) — (4.51) достатньо побудувати поліноми, які задовольняють наступні умови ортонормованості:

$$\int_a^b \frac{\pi_n^+(x)\pi_m^-(x)dx}{(b-x)^{1+\sigma-\beta}(x-a)^{\beta-\rho-1}} = \int_a^b \frac{\pi_n^-(x)\pi_m^+(x)dx}{(b-x)^{1+\sigma-\alpha}(x-a)^{\alpha-\rho-1}} = \delta_{mn}. \qquad (4.56)$$

Взявши до уваги властивості поліномів Якобі $P_n^{\lambda,\mu}(z)$, можна переконатися, що першій умові ортонормованості (4.56) будуть задовольняти поліноми

$$\pi_n^+(x) = \delta_n^+ p_n^{\beta-\sigma-1,1+\rho-\beta}\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right),$$

$$\left(\delta_n^+\right)^2 = \frac{n!\Gamma(1+\rho-\sigma+n)\Gamma(1+\rho-\sigma+2n)}{(b-a)^{1+\rho-\sigma}\Gamma(2+\rho-\beta+n)\Gamma(\beta-\sigma+n)}. \qquad (4.57)$$

Формулу для поліномів $\pi_n^-(x)$ можна здобути з (4.57) шляхом перестановки параметрів α та β. Отже, функція (4.54) дійсно є П-ядро за умови (4.55). Для підрахунку σ — чисел цього ядра можна застосувати формулу (4.43) з урахуванням (4.53), (4.57). Після підстановки у перше спектральне співвідношення (4.1) елементів для П-ядра (4.54), які визначені за формулами (4.49) — (4.51), отримаємо

$$\int_a^b \frac{\Pi^*(x,y)}{(b-y)^{1+\sigma-\beta}} P_n^{\beta-\sigma-1,1+\rho-\beta}\left(\frac{2y-a-b}{b-a}\right)dy =$$

$$=\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta-\sigma+n)\Gamma(1+\rho+n)}{\Gamma(1-\sigma+n)\Gamma(2+\rho-\alpha+n)(x-a)^{\alpha-\rho-1}}P_n^{\alpha-\sigma-1,1+\rho-\alpha}\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right). \quad (4.58)$$

Друге спектральне співвідношення отримаємо з (4.58) перестановкою параметрів α та β та заміною $\Pi^*(x,y)$ на $\Pi^*(y,x)$.

Зауважимо, що П-ядро (4.54) можна виразити через першу функцію Аппеля $F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y)$ [1]

$$F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma,x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_{m+n}m!n!}x^m y^n.$$

Дійсно, розглянемо окремо у (4.54) випадки $x<y, y<x$ та врахуємо інтегральне подання функції Аппеля [1] — формулу Пікара —

$$F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma,x,y)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1\frac{u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}}{(1-ux)^{\beta}(1-ux)^{\beta'}}du,$$

$$\operatorname{Re}\alpha>0, \operatorname{Re}(\gamma-\alpha)>0.$$

Після цього запишемо ядро у зображенні

$$\Pi^*(x,y)=\frac{\Gamma(1+\rho)\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{1-\alpha+\rho}}{\Gamma(2+\rho-\alpha)(y-\alpha)^{\beta}(b-a)^{-\sigma}}\times$$

$$\times F_1\left(1+\rho,-\sigma,\beta,2+\rho-\alpha;\frac{x-a}{b-a},\frac{x-a}{y-a}\right). \quad (4.59)$$

Якщо $y<x$ у формулі (4.59), потрібно замінити α на β та x на y.

Цікавить і таке питання — за яких обмежень на параметри отримане П-ядро (4.54) є гільбертовим? Із визначення випливає, що для цього потрібна невід'ємність вагових функцій $w_{\pm}(x)$ та виконання умови (4.5). У розглядуваному випадку за умов (4.49)–(4.51) невід'ємність буде забезпечено, якщо

$$\operatorname{Im}(\alpha-\sigma,\beta-\sigma,\alpha-\rho,\beta-\rho)=0. \quad (4.60)$$

Умову (4.5) для ядра $\Pi^*(x,y)$, якщо брати до уваги пов'язану з ним за формулою (4.6) функцію $\mathrm{H}^*(x,y)$, можна записати у поданні

$$\int_a^b\int_a^b\left|\mathrm{H}^*(x,y)\right|^2 dxdy<\infty. \quad (4.61)$$

Для $\mathrm{H}^*(x,y)$ є справедливим і таке зображення:

$$\mathrm{H}^*(x,y)=\int_a^b \mathrm{H}_\alpha(x,t)\mathrm{H}_\beta(y,t)dt\,, \tag{4.62}$$

$$\mathrm{H}_\gamma(x,y)=\left(\frac{(b-x)^{\gamma-\sigma-1}(b-y)^{\sigma}}{(x-a)^{1+\rho-\gamma}(y-a)^{-\rho}}\right)^{1/2}\begin{cases}(x-y)^{-\gamma}, & x>y\\ 0, & x<y\end{cases}\quad (\gamma=\alpha,\beta). \qquad (4{,}63)$$

Безпосередньою підстановкою можна переконатися в останньому. За рахунок нерівності Коші — Буняковського, яке застосовано до інтегралу (4.57), для виконання умови (4.61) достатньо, щоб

$$\int_a^b\int_a^b \left|\mathrm{H}_\gamma(x,y)\right|^2 dxdy<\infty \quad (\gamma=\alpha,\beta). \tag{4.64}$$

Інтеграл у цьому співвідношенні за виконання умов (4.55) та умови $2\mathrm{Re}\gamma<1$ підраховується, якщо після підстановки до цього виразу для $\mathrm{H}_\gamma(x,y)$ зробити заміни, які зводять інтервал інтегрування (a,b) до $(0,1)$, та використати формули 9.111 та 7.512 (б) з [3].

Таким чином, за виконання умов (4.55), (4.60), а також умови $2\mathrm{Re}(\alpha,\beta)<1$ функція (4.54) або (4.59) буде гільбертовим П-ядром. З цього випливає зображення

$$\Pi^*(x,y)=\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)(b-a)^{\sigma-\rho-1}(x-a)^{1-\alpha+\rho}(y-a)^{1-\beta+\rho}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\Gamma(1-\sigma+\rho+n)\Gamma(1+\rho+n)P_n^{\alpha-\sigma-1,1+\rho-\alpha}(u)P_n^{\beta-\sigma-1,1+\rho-\beta}(v)}{\Gamma(1-\sigma+n)\Gamma(2-\alpha+\rho+n)\Gamma(2-\beta+\rho+n)(1-\sigma+\rho+2n)^{-1}}\,, \tag{4.65}$$

$$(a\le x,y\le b),\quad u=(b-a)^{-1}(2x-a-b),\quad v=(b-a)^{-1}(2y-a-b).$$

Завдяки наявності у побудованому П-ядрі великої кількості параметрів можна отримати з нього багато інших П-ядер, у тому числі і ті П-ядра, що були розшукані для скінченого інтервалу раніше. Почнемо з випадку $\sigma=\alpha+\beta-\rho-2$. У цьому випадку функція Аппеля у співвідношенні (4.59) зводиться до функції Гаусса $F(\alpha,\beta;\gamma;x)$.

Якщо ввести параметри

$$\mu=1+\rho-\alpha,\quad \gamma=1+\rho-\beta,\quad \nu=\alpha+\beta-1$$

та використати формули 6.574 з [3], то з урахуванням $\mathrm{Re}(1-\nu)>0$, отримаємо таке П-ядро:

$$\frac{\Pi(x,y)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}=\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\nu}\left(\frac{y-a}{b-x}\right)^{\frac{1}{2}\gamma}\left(\frac{x-a}{b-y}\right)^{\frac{1}{2}\mu}\times$$
$$\times W_{\mu,\gamma}^{\nu}\left(\sqrt{(x-a)(b-y)},\sqrt{(b-x)(y-a)}\right).$$

Тут

$$W_{\mu,\gamma}^{\nu}(\xi,\eta)=\int_{0}^{\infty}t^{\nu}J_{\mu}(t\xi)J_{\gamma}(t\eta)dt\text{ —}$$

розривний інтеграл Вебера — Шафхейтліна [1].

Для П-ядра (4.65) спектральне співвідношення та білінійне розвинення отримаємо з (4.58), (4.63), якщо замість (4.59) візьмемо (4.65) та врахуємо, що $\sigma=\alpha+\beta-\rho-2$ та (4.64). Обмеження на параметри будуть мати вигляд

$$\operatorname{Re}(1+\gamma,1+\mu,1+\nu+\mu+\gamma,1+\nu-\mu-$$
$$-\gamma,1-\nu+\gamma-\mu,1-\nu+\mu-\gamma,1-\nu)>0, \tag{4.66}$$
$$\operatorname{Re}(1+\nu-\mu+\gamma,1+\nu-\gamma+\mu)<1,\quad \operatorname{Im}(\mu,\gamma)=0.$$

Два останні обмеження необхідно додавати тільки для гільбертовості ядра (4.65). В роботі Г. Я. Попова «О применении поліномов Якоби к решению интегральных уравнений» (Изв. ВУЗов, Математика, 1966, № 1) можна відшукати багато частинних випадків.

Якщо тепер у (4.59) взяти $\sigma=0$ та врахувати (4.64), то добудемо таке П-ядро:

$$\frac{\Pi(x,y)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}=\frac{1}{2^{\nu}}\frac{(x-a)^{\frac{1}{2}\mu}}{(y-a)^{-\frac{1}{2}\gamma}}W_{\mu,\gamma}^{\nu}\left(\sqrt{x-a},\sqrt{y-a}\right)\ \left(\operatorname{Re}(1-\nu)>0\right). \tag{4.67}$$

Спектральне співвідношення та білінійне розвинення для цього гільбертова ядра (якщо виконано умови $2\operatorname{Re}(\alpha,\beta)<1$, (4.55) та (4.60)) випливають з (4.58) та (4.63) при $\sigma=0$ та (4.64). П-ядро наведено для випадку $a=0,b=1$ у роботі Г. Я. Попова. Там же наведено багаточисленні випадки П-ядер, що зустрічаються досить часто у теорії пружності.

Зупинимося тільки на одному важливому випадку. До нього прийдемо, якщо у (4.67) візьмемо $a=0, b=1, \mu=\gamma=1/2, \nu=0, x=\xi^2, y=\eta^2$ та приймемо до уваги формули 6.576 (2) та 9.121 (6) з [3]. Відповідно до нього спектральне співвідношення та білінійне розвинення

$$\int_0^1 \frac{T_{2n+1}(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} \ln\frac{\xi+\eta}{|\xi-\eta|} d\eta = \frac{\pi}{1+2n} T_{2n+1}(\xi),$$

$$\ln\frac{\xi+\eta}{|\xi-\eta|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{1+2n} T_{2n+1}(\xi) T_{2n+1}(\eta)$$

($0 \le \xi, \eta \le 1, \quad T_n(x)$ — поліном Чебишова)
отримаємо з (4.59) та (4.63), зафіксував параметри таким чином.

Щоби отримати інші П-ядра, потрібно у (4.60) взяти $\sigma = 0, \beta = 2 + \rho - \alpha, 1 + \rho = \nu$. Як результат, запишемо таке подання П-ядра

$$\Pi(x,y) = \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\alpha-\nu)(y-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(x-a)^{\alpha-\nu}|x-y|^{\nu}} \begin{cases} \sin\pi(\alpha-\nu) cosec\,\pi\alpha, & x < y \\ 1, & y < x. \end{cases} \tag{4.68}$$

Його можна записати і так:

$$\Pi(x,y) = \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\alpha-\nu)\left[a_1 sign(x-y) + a_2\right]^{\mu}(y-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(a_2+a_1)^{\mu}(x-a)^{\alpha-\nu}|x-y|^{\nu}},$$

де

$$\alpha = \frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{\sin\pi\nu}{\mathrm{A}}\right), \quad \mathrm{A} = \sqrt{1 - 2a_*^{\mu}\cos\pi\nu + a_*^{2\mu}}, \; a_* = \frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1}.$$

Параметри a_1, a_2, μ, а також однозначна гілка арксинуса, мають бути вибрані так, щоб умову $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$ було забезпечено.

У(4.59)візьмемо $\sigma = 0, \rho = \alpha + \beta - 2 \; (\rho = \nu - 1, \beta = 1 + \nu - \alpha, \nu = \alpha + \beta - 1)$, а також враховуючи (4.60), отримаємо

$$\int_a^b \frac{\left[a^+ + a^- sign(x-y)\right] P_n^{\nu-\alpha,\alpha-1}(v)dy}{|x-y|^{\nu}(y-a)^{1-\alpha}(b-y)^{\alpha-\nu}} = \frac{\pi(v)_n P_n^{\alpha-1,\nu-\alpha}(u)}{n!\sin\pi\alpha\sin\pi(\alpha-\nu)},$$

$$a^{\pm} = \left(2\sin\pi\alpha\sin\pi(\alpha-\nu)\right)^{-1}\left(\sin\pi\alpha \pm \sin\pi(\alpha-\nu)\right).$$

Враховуючи ортогональність поліномів Якобі, можна це зображення записати у вигляді

$$\int_a^b \left[\frac{1}{|x-y|^{\nu}} - 1\right] \frac{1}{\nu} \frac{a^{-1} P_n^{\nu-\alpha,\alpha-1}(v)}{(y-a)^{1-\alpha}(b-y)^{\alpha-\nu}} dy + \frac{a^-}{\nu}\int_a^b \frac{sign(x-y) P_n^{\nu-\alpha,\alpha-1}(v)}{(y-a)^{1-\alpha}(b-y)^{\alpha-\nu}|x-y|^{\nu}} dy =$$

$$= \frac{\pi\Gamma(\nu+n) P_n^{\alpha-1,\nu-\alpha}(n)}{\Gamma(1+\nu)\sin\pi\alpha\sin\pi(\alpha-\nu) n!} - \delta_{n0}\frac{a^+\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\nu-\alpha)}{(b-a)^{-\nu}\nu\Gamma(\nu+1)}.$$

Якщо перейти тут до границі $\nu \to 0$ та окремо розглянути випадки $n = 0$ та $n \neq 0$, то отрімаємо спектральне співвідношення для П-ядра:

$$\Pi(x,y) = \frac{1}{2} sign(x-y) + \frac{tg\pi\alpha}{\pi} \ln \frac{1}{|x-y|}. \qquad (4.69)$$

4.5. ПОБУДОВА П-ЯДРА НА ПІВНЕСКІНЧЕННОМУ ІНТЕРВАЛІ

Щоби побудувати П-ядро на півнескінченному інтервалі таким же шляхом, що у попередньому параграфі, потрібно взяти зображення ядра, що аналогічне до (4.44). Іншу родину П-ядер можна отримати, якщо взяти за основу наступне подання:

$$K(x,y) = \int_{\max(x,y)}^{\infty} K_+(s-x) K_-(s-y) \rho(s) ds. \qquad (4.70)$$

Але швидше до потрібного результату приводить такий формальний спосіб. У спектральному співвідношенні (4.58) візьмемо $a = 0, \sigma = -b$, після чого зробимо граничний перехід $b_1 + b_2 = b$ до ∞. Як результат використання граничних рівностей

$$\lim_{b\to\infty} P_n^{\alpha,b+\beta}(1-2x/b) = L_n^{(\alpha)}(x), \quad \lim_{b\to\infty}(b-x)^b = e^{-x}, \; \lim_{|z|\to\infty} \frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z) z^a} = 1 \qquad (4.71)$$

матимемо

$$\int_0^\infty \frac{\Pi_\infty(x,y)}{e^y} L_n^{(1+\rho-\beta)}(y) dy = \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\rho+n)}{\Gamma(2+\rho-\alpha+n) x^{\alpha-\rho-1}} L_n^{(1+\rho-\alpha)}(x). \qquad (4.72)$$

Тут $L_n^{(\alpha)}(x)$ — поліном Чебишова — Лагерра, П-ядро має вигляд

$$\Pi_\infty(x,y) = \int_0^\chi \frac{e^s s^\rho ds}{(x-s)^\alpha (y-s)^\beta} \quad \left(\mathrm{Re}(1+\rho, 1-\alpha, 1-\beta) > 0, \chi = \min(x,y)\right). \qquad (4.73)$$

Це П-ядро можна виразити через вироджену гіпергеометричну функцію $\Phi_1(\alpha,\beta,\gamma;x,y)$ двох змінних. Для цього у (4.73) для $x < y$ потрібно зробити заміну $s = xt$, та розвинути експоненту у ряд, після чого решту інтегралів також розвинути у ряди за співвідношення x/y. Як результат, матимемо подання:

$$\Pi_\infty(x,y) = \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\rho)}{\Gamma(2+\alpha+\rho)} \Phi_1(1+\rho;\beta,\alpha+\rho+2;x;x/y) \quad (x<y).$$

Коли $x > y$, у правій частині потрібно змінити α на β та x на y.

До таких же результатів можна прийти, якщо безпосередньо використати інтегральне зображення (4.44) при $a = 0$. До результатів, що можна вивести шляхом використання зображення (4.70), прийдемо, якщо у спектральному співвідношенні (4.58) і формулі (4.54) при $\mu = \gamma$ знайти заміну $s = b - t,\ x = b - \xi,\ y = b - \eta$, після чого спрямувати $b \to \infty$. Після використання (4.71) матимемо

$$\int_0^\infty \frac{\Pi_\infty(\xi,\eta)}{\eta^{1+\sigma-\beta}} L_n^{(\beta-\sigma-1)}(\eta) d\eta = \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta-\sigma+n)}{\Gamma(1-\sigma+n)e^{\xi}} L_n^{(\alpha-\sigma-1)}(\xi), \quad (4.74)$$

$$\Pi_\infty(\xi,\eta) = \int_{\max(\xi,\eta)}^\infty \frac{e^{-s} s^\sigma ds}{(s-\xi)^\alpha (s-\eta)^\beta}, \quad \mathrm{Re}(1-\alpha, 1-\beta, \alpha-\sigma, \beta-\sigma) > 0. \quad (4.75)$$

Якщо $\alpha = \beta$, то обидва випадки ($x > y$ та $x < y$) об'єднуються до однієї формули, яка дозволяє спектральне співвідношення (4.74) записати у формі

$$\int_0^\infty \frac{\psi(\mu, 2\mu, |\xi-\eta|) L_n^{(-\mu)}(\eta)}{\eta^\mu \sqrt{e^\eta e^{|\xi-\eta|}} |\xi-\eta|^{1-2\mu}} d\eta = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu+n)}{n! e^{\xi/2}} L_n^{(-\mu)}(\xi) \quad (4.76)$$
$$(\mu = 1-\alpha, 0 < \mathrm{Re}\,\mu < 1)$$

Якщо тут взяти $\mu = v + 1/2$, зробити заміну $\xi = 2x$ та $\eta = 2y$ та використати відому формулу для функції Макдональда $\mathrm{K}_\nu(z)$ [1], отримаємо спектральне співвідношення для П-ядра вигляду

$$\mathrm{K}_\nu(|x-y|)|x-y|^{-\nu}, \quad (4.77)$$

що вперше було відшукано Г. Я. Поповим.

Більш детально засоби побудови П-ядер та поширені таблиці спектральних співвідношень читач може відшукати у [9—11].

Зауважимо на закінчення, що для використання методу ортогональних поліномів вузловим моментом є наявність спектрального співвідношення (4.1), (4.2). Більшість таких спектральних співвідношень наведено у відповідних таблицях [10,11]. Там же викладено деякі способи побудови спектральних співвідношень, обговорено питання, що пов'язані з обчисленням інтегралів, де присутні класичні поліноми, наведено велика кількість задач, розв'язання яких побудовано на використанні методу ортогональних поліномів.

§ 5. НЕСКІНЧЕННІ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ (НСЛАР). МЕТОД РЕДУКЦІЇ

5.1. МЕТОД РЕДУКЦІЇ

Як було продемонстровано у §§ 3,4, розв'язання інтегральних рівнянь приводить до розв'язання нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\varphi_k + \sum_{j=0}^{\infty} a_{kj}\varphi_j = f_k, \quad k = \overline{0,\infty}. \tag{5.1}$$

У матрично-векторному зображенні система (5.1) може бути записана так:

$$(I + A)\varphi = f\,, \tag{5.2}$$

де $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}, f = \{f_k\}_{k=0}^{\infty}, A = \{a_{kj}\}_{k,j=0,\infty}, I = \{\delta_{kj}\}_{kj=\overline{0,\infty}}$, δ_{kj} — символ Кронекеру.

Для наближеного розв'язання системи (5.1) пропонується застосувати метода редукції, що полягає у наступному.

Наближений розв'язок φ_N системи (5.1) розшукується як подання

$$\varphi_N = \{\varphi_k^{(N)}\}_{k=\overline{0,\infty}}; \quad \varphi_k^{(N)} = 0, \quad k = \overline{N+1,\infty}\,, \tag{5.3}$$

де елементи $\varphi_k^{(N)}, k = \overline{0,N}$ є розв'язками скінченої системи алгебраїчних рівнянь (що є редуцированою)

$$\varphi_k^{(N)} + \sum_{j=0}^{N} a_{kj}\varphi_j^{(N)} = f_k, \quad k = \overline{0,N}. \tag{5.4}$$

Редуцирована система (5.4) у матричній формі може бути записана як операторне рівняння

$$(I + A_N)\varphi_N = f_N\,; \tag{5.5}$$

$$f_N = \{f_k \eta_k^{(N)}\}_{k=\overline{0,\infty}}; \quad A_N = \{a_{kj}\eta_k^{(N)}\}_{k,j=\overline{0,\infty}};$$

$$\eta_k^{(N)} = \begin{cases} 1, & k = \overline{0, N} \\ 0, & k = \overline{N+1, \infty}. \end{cases}$$

Пошук розв’язків системи (5.1) проводитиметься у класі l_2, тобто у гільбертовому просторі послідовностей $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=\overline{0,\infty}}$ з нормою

$$\|\varphi\|_{l_2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Теорема 5.1. *Нехай виконано наступні умови:*

1) однорідне рівняння (5.2) має у класі l_2 тільки тривіальний розв’язок, тобто $(I + A)\varphi = 0, \ \varphi \in l_2 \Rightarrow \varphi = 0$,

2) $R_* = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |a_{kj}|^2 < \infty$,

3) $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^2 < \infty$.

Тоді нескінченна система (5.1) однозначно розв’язувана у класі l_2, тобто існує і є єдиною така послідовність φ, $\varphi \in l_2$, що $(I + A)\varphi = f$.

Для досить великих значень N система рівнянь (5.4) є розв’язуваною однозначно та має місце наступна оцінка:

$$\|\varphi - \varphi_N\|_{l_2} \le Q_* \left\{ \|f - f_N\|_{l_2} + \frac{Q_* R_N \|f\|_{l_2}}{1 - Q_* R_N} \right\},$$

$$\|f - f_N\|_{l_2} = \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} |f_k|^2 \right)^{1/2},$$

$$R_N = \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |a_{kj}|^2 \right)^{1/2}. \tag{5.6}$$

з якої випливає збіжність наближеного розв’язку φ_N (5.3), (5.4) до точного розв’язку φ нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (5.1). Величина Q_* в формулі (5.6) додатня та не залежить від значень N.

Доведення цієї теореми наведено у [2, 4].

Зауважимо, що якщо в умові 2) теореми 5.1 величина $R_* < 1$, то умова 1) цієї теореми виконується автоматично, а стала Q_* з формули (5.6) припускає оцінку $Q_* \le (1 - R_*)^{-1}$ [2, 4]. Такі системи називають **регулярними**.

Під час розв'язання конкретних задач математичної фізики найбільші складнощі викликає перевірка умови 1) теореми 5.1. З метою подолання цієї труднощі можна зробити наступне: довести єдність розв'язку вихідного інтегрального рівняння у відповідному класі функцій та його еквівалентність до алгебраїчної системи (5.1), що, як правило, випливає з єдності розв'язку відповідних задач математичної фізики та повноти системи ортогональних поліномів.

Для перевірки умов 2), 3) теореми 5.1 зручно використати схему, яку викладено та обґрунтовано в [11], § 2.2.

На закінчення зауважимо, що питання дослідження нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь та застосування методу редукції для їх наближеного розв'язання викладено в [2, 4, 5].

5.2. ЗБІЖНІСТЬ МЕТОДУ ОРТОГОНАЛЬНИХ ПОЛІНОМІВ

Одним з найважливіших питань під час застосування будь-якого наближеного методу є питання оцінки швидкості його збіжності. Цей параграф присвячено відповіді на це запитання.

Нехай маємо на увазі рівняння

$$\int_{-1}^{1}\{\Pi(t,\tau)+D(t,\tau)\}p^{\nu,\mu}(\tau)\psi(\tau)d\tau=h(t), \tag{5.7}$$

$$t\in(-1;1);\quad \nu,\mu>-1;\quad \rho^{\nu,\mu}(t)=(1-t)^{\nu}(1+t)^{\mu},$$

де ядро $\Pi(t,\tau)$ є ядро поліноміальне, таке, що пов'язане з поліномами Якобі $P_n^{\alpha,\beta}(t),\ n=\overline{0,\infty}$. Припустимо, що оператор

$$\Pi\psi(\tau)=\int_{-1}^{1}\Pi(t,\tau)\rho^{\nu,\mu}(\tau)\psi(\tau)d\tau$$

діє з $L_2([-1;1],\rho^{\nu,\mu}(t))$, $\nu,\mu>-1$ в $L_2([-1;1],\rho^{\alpha,\beta}(t))$, $\alpha,\beta>-1$ та визначається через ортонормовані базиси

$\{q_k^{\nu,\mu}(t)\}_{k=\overline{0,\infty}}$, $\{p_k^{\alpha,\beta}(t)\}_{k=\overline{0,\infty}}$, $p_k^{\alpha,\beta}(t)=\left\|P_k^{\alpha,\beta}\right\|^{-1}P_k^{\alpha,\beta}(t)$; $q_k^{\nu,\mu}(t)=\rho^{\nu,\mu}(t)\,p_k^{\nu,\mu}(t)$, $\rho^{\nu,\mu}(t)=(1-t)^{\nu}(1-t)^{\mu}$ цих гільбертових просторів за допомогою спектрального співвідношення

$$\int_{-1}^{1}\Pi(t,\tau)\rho^{\nu,\mu}(\tau)p_k^{\nu,\mu}(\tau)d\tau=\sigma_k\,p_k^{\alpha,\beta}(t), \tag{5.8}$$

$$k=\overline{0,\infty},\quad t\in(-1;1);\quad \alpha,\beta,\nu,\mu>-1 .$$

$\sigma=\{\sigma_n\}$ — є послідовність, яка має ступеневий порядок $\exists a,A,\,0<a\le A<+\infty,\ a\le|\sigma_k|(k+1)^m\le A,\quad \forall k=0,\infty, m\ge 0$ і цей порядок m є невід'ємний:

$$m\ge 0. \tag{5.9}$$

Апаратом для дослідження та розв'язання таких рівнянь є метод ортогональних поліномів, який набув розвитку у працях Г. Я. Попова, В. М. Александрова, Є. В. Коваленка, Г. Т. Сулима. Як відомо, метод ортогональних поліномів зводить рівняння типу (5.7) до нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь 2-го роду, які далі розв'язуються за допомогою методу редукції. Причому наближений розв'язок цього рівняння будується за розв'язком редуцированої системи. У загальному випадку припускається, що розв'язком рівняння (5.7) є функція $\psi(t)$, що належить класу функцій $L_2\left([-1;1],\rho^{\nu,\mu}(t)\right)$. Але ця функція може належати і до більш вузького класу, тобто бути неперервною або деяке число раз неперервно-диференційованою.

Мета цього параграфу — з'ясувати, при яких, достатньо загальних, обмеженнях на ядро $D(t,\tau)$, праву частину $h(t)$ та на порядок m (5.9) послідовності власних чисел $\sigma=\{\sigma_k\}_{k=0}^{\infty}$ (5.8) можна гарантувати певний ступінь гладкості розв'язку $\psi(t)$ рівняння (5.7), а також отримати при цих обмеженнях оцінки, що визначають порядок швидкості збіжності наближеного розв'язку рівняння (5.7), що будується за методом ортогональних поліномів, до точного розв'язку рівняння (5.7).

Для вирішення поставленого питання М. Г. Моісеєвим [9] проведено дослідження рівняння (5.7) у спеціально підібраних гільбертових просторах типу Соболева з вагою. Основний результат отримано у теоремі, що сформульована наприкінці параграфу. Саме вона визначає гладкість розв'язку рівняння (5.7), а також порядок збіжності наближених розв'язків як за нормами просторів, що перераховані вище, так і за нормою простору $C[-1;1]$.

Розглянемо інтегральне рівняння 1-го роду

$$\mathrm{K}\varphi(t)=(\Pi+D)\varphi(t)=h(t),\quad t\in(-1,1),$$

$$\Pi\varphi(t)=\int_{-1}^{1}\Pi(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau, \tag{5.10}$$

$$D\varphi(t)=\int_{-1}^{1}D(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau ,$$

де ядро $\Pi(t,\tau)$ — поліноміальне, пов'язане з поліномами Якобі $P_n^{\alpha,\beta}(t), n=\overline{0,\infty}$. Для нормованих поліномів Якобі та пов'язаних з ними функцій будемо використовувати позначення

$$p_n^{\alpha,\beta}(t)=\left\|P_n^{\alpha,\beta}\right\|^{-1}P_n^{\alpha,\beta}(t),\quad g_n^{\alpha,\beta}(t)=\rho_\kappa^{\alpha,\beta}(t)p_n^{\alpha,\beta}(t),$$

$$\rho^{\alpha,\beta}(t)=(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}. \tag{5.11}$$

Для інтегрального оператору Π з (5.10) будемо припускати, що він діє з $L_2\left([-1,1],\rho^{\nu,\mu}(t)\right)$, $\nu,\mu>-1$ в $L_2\left([-1,1],\rho^{\alpha,\beta}\right)$, $\alpha,\beta>-1$ та визначається через ортонормовані базиси $\left\{q_\kappa^{\nu,\mu}(t)\right\}, \kappa=\overline{0,\infty}$, $\left\{p_\kappa^{\alpha,\beta}(t)\right\}_{\kappa=0}^{\infty}$ цих гільбертових просторів за допомогою спектрального співвідношення

$$\int_{-1}^{1}\Pi(t,\tau)q_\kappa^{\nu,\mu}(\tau)d\tau=\sigma_\kappa p_\kappa^{\alpha,\beta}(t),\quad t\in(-1,1),\ \kappa=\overline{0,\infty};\quad \alpha,\beta,\nu,\mu>-1\,, \tag{5.12}$$

де послідовність $\sigma=\left\{\sigma_\kappa\right\}_{\kappa=0}^{\infty}$ є обмеженою.

Щодо ядра $D(t,\tau)$ та правої частини $h(t)$, будемо вважати, що $D(t,\tau)\in L_2\left([-1,1]\times[-1,1],\rho^{\alpha,\beta}(t)\times\rho^{\nu,\mu}(\tau)\right)$,

$$h(t)\in L_2\left([-1,1],\rho^{\alpha,\beta}(t)\right). \tag{5.13}$$

Теорема 1.1. *Нехай послідовність* $\sigma=\left\{\sigma_\kappa\right\}_{n=0}^{\infty}$ *з (5.12) обмежена та виконано умови (5.13). Тоді інтегральне рівняння (5.10) еквівалентне до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь*

$$\sigma_k\varphi_k+\sum_{j=0}^{\infty}d_{kj}\varphi_j=h_k,\quad k=\overline{0,\infty},$$

$$d_{kj}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}D(t,\tau)q_k^{\alpha,\beta}(t)q_j^{\nu,\mu}(\tau)d\tau dt,$$

$$h_k=\int_{-1}^{1}h(t)q_k^{\alpha,\beta}(t)dt\ , \tag{5.14}$$

яку можна записати у матричній формі:

$$(Y_\sigma+D)\vec{\varphi}=\vec{h};\quad (Y_\sigma+D):l_2\to l_2, \tag{5.15}$$

$$Y_\sigma=\left\{\sigma_k\delta_{kj}\right\}_{k,j=\overline{0,\infty}};\quad \vec{\varphi}=\left\{\varphi_k\right\}_{k=\overline{0,\infty}},$$

$$D=\{d_{kj}\}_{k,j=\overline{0,\infty}}, \quad \vec{h}=\{h_k\}_{k=\overline{0,\infty}}.$$

Розв'язок інтегрального рівняння (5.10) $\varphi(t)\in L_2\left([-1,1],\rho^{-\nu,-\mu}(t)\right)$ та розв'язок нескінченної системи (5.14), (5.15) $\vec{\varphi}=\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}\in l_2$ пов'язані наступними співвідношеннями:

$$\varphi(t)=\psi(t)\rho^{\nu,\mu}(t), \quad \psi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k p_k^{\nu,\mu}(t).$$

$$\psi(t)\in L_2\left([-1,1],\rho^{\nu,\mu}(t)\right),$$

$$\varphi_k=\int_{-1}^{1}\varphi(t)p_k^{\nu,\mu}(t)dt=\int_{-1}^{1}\psi(t)q_k^{\nu,\mu}(t)dt, \tag{5.16}$$

$$\vec{\varphi}=\{\varphi_k\}_{k=\overline{0,\infty}}\in L_2. \tag{5.17}$$

Доведення.

За рахунок послідовності після рівності $\sigma=\{\sigma_k\}_{k=0}^{\infty}$ з (5.12) та першої умови з (5.13) маємо [5]

$$\int_{-1}^{1}u(t)\int_{-1}^{1}\left[\Pi(t,\tau)+D(t,\tau)\right]v(\tau)d\tau dt=\sum_{k=0}^{\infty}u_k v_k\sigma_k+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}d_{kj}u_k v_j ,$$

$$u_k=\int_{-1}^{1}u(t)p_k^{\alpha,\beta}(t)dt, \quad v_k=\int_{-1}^{1}v(t)p_k^{\nu,\mu}(t)dt.$$

$$\forall u(t)\in L_2\left([-1,1],\rho^{-\alpha,-\beta}(t)\right) \quad \forall v(t)\in L_2\left([-1,1],\rho^{-\nu,-\mu}(t)\right), \tag{Д.1.1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left|d_{kj}\right|^2<\infty. \tag{Д.1.2}$$

Тотожність (Д.1.1) є вірною для будь-яких двох послідовностей $\vec{u}=\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\vec{v}=\{v_k\}_{k=0}^{\infty}$ з простору l_2, якщо функції $u(t), v(t)$ визначаються за цими послідовностями наступним чином:

$$u(t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k q_k^{\alpha,\beta}(t), \quad v(t)=\sum_{j=0}^{\infty}v_k q_k^{\nu,\mu}(t).$$

Нехай функція $\varphi(t)\in L_2\left([-1,1],\rho^{-\nu,-\mu}\right)$ є розв'язком рівняння (5.10). Помножимо обидві частини рівняння (5.10) на довільну функцію $u(t)\in L_2\left([-1,1],\rho^{-\alpha,-\beta}\right)$ та використаємо тотожність (Д.1.1) у відповідності з позначеннями (5.15). Це приводить до рівності

$$\left(\vec{u},\left(Y_\sigma + D\right)\vec{\varphi} - \vec{h}\right) = 0, \quad \forall \vec{u} \in L_2. \tag{Д.1.3}$$

За рахунок обмеженості послідовності σ, нерівності (Д.1.2) та другої умови з (5.13) вектор $\left(Y_\sigma + D\right)\vec{\varphi} - \vec{h} \in L_2$, враховуючи (Д.1.3), отримаємо, що цей вектор є нульовий. Таким чином, послідовність $\vec{\varphi} = \{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in l_2$, що визначена за розв'язком рівняння (5.10) формулою (5.17), є розв'язком нескінченної системи (5.14), (5.15).

Нехай тепер $\vec{\varphi} \in l_2$ є розв'язком системи (5.15). З цього випливає твердження (Д.1.3). Використовуючи тотожність (Д.1.1), отримаємо

$$\int_{-1}^{1} u(t) g(t) dt = 0, \quad \forall u(t) \in L_2\left([-1,1], \rho^{-\alpha,-\beta}\right); \quad g(t) = \mathrm{K}\varphi(t) - h(t), \tag{Д.1.4}$$

де $\varphi(t) \in L_2\left([-1,1], \rho^{-\nu,-\mu}\right)$ визначається за вектором $\vec{\varphi}$ формулою (5.16). За рахунок обмеженості σ та умови (5.13) функція $g(t)$ з (Д.1.4) належить $L_2\left([-1,1], \rho^{\alpha,\beta}(t)\right)$.

Таким чином, з (Д.1.4) випливає, що $\varphi(t)$ — розв'язок рівняння (5.10).

Теорему доведено.

Наближений розв'язок нескінченної системи (5.14) будується за допомогою методу редукції:

$$\left(Y_\sigma + D_N\right)\vec{\varphi} = \vec{h}_N;$$

$$\vec{\varphi}_N = \left\{\varphi_k^{(N)}\right\}_{k=\overline{0,\infty}}; \quad \varphi_k^{(N)} = 0, \quad k = \overline{N+1,\infty};$$

$$\vec{h}_N = \left\{h_k \eta_k^{(N)}\right\}_{k=0}^{\infty}; \quad D_N = \left\{d_{kj}\eta_k^{(N)}\right\}_{k,j=\overline{0,\infty}}; \quad \eta_k^{(N)} = \begin{cases} 1, & k = \overline{0,N} \\ 0, & k = \overline{N+1,\infty} \end{cases}; \tag{5.18}$$

$$\varphi_N(t) = \rho^{\nu,\mu}(t)\psi_N(t), \quad \psi_N(t) = \sum_{k=0}^{N} \varphi_k^{(N)} p_k^{\nu,\mu}(t). \tag{5.19}$$

Формула (5.19) визначає наближений розв'язок інтегрального рівняння (5.10), (5.11), (5.12) за наближеним розв'язком (5.18) нескінченної системи (5.14).

У зображенні (5.16) розв'язку рівняння (5.10) функція $\psi(t) \in L_2\left([-1,1], \rho^{\nu,\mu}(t)\right)$. Але ця функція може належати і більш вузькому класу, тобто бути неперервною, або деяке число раз неперервно-диференційованою.

З'ясуємо далі, за яких достатньо загальних обмежень на ядро $D(t,\tau)$, праву частину $h(t)$ та на послідовність власних чисел

$\sigma = \{\sigma_k\}_{k=0}^{\infty}$ можна гарантувати певний ступінь гладкості функції $\psi(t)$ у зображенні (5.16) роз'язку рівняння (5.10), (5.11), (5.12). Відокремимо відповідні цім обмеженням класи для $D(t,\tau)$, $h(t)$ і σ та отримаємо оцінки, що визначають порядок швидкості збіжності наближених розв'язків (5.18), (5.19) до відповідних точних.

Спершу доведемо лему.

Лема 1.1. *Нехай неперервна у інтервалі* $-1 < x < 1$ *функція* $f(x)$ *має похідну* $f'(x) \in L_2([-1,1], \rho^{\alpha+1,\beta+1}(x))$, $\alpha,\beta > -1$. *Тоді* $f(x) \in L_2([-1,1], \rho^{\alpha,\beta}(x))$ *та* $f(x)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1} \to 0,\ x \to \pm 1$.

Доведення.

Маємо

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt. \qquad (Д.1.5)$$

Зобразимо функцію $f'(t)$ у вигляді

$$f'(t) = \left[f'(t)\left(\rho^{\alpha+1,\beta+1}(t)\right)^{1/2} \right](1-t)^{-1/2-\alpha/2}(1+t)^{-1/2-\beta/2}.$$

Використаємо нерівність Коші-Буняковського

$$\left| \int_0^x f'(t)dt \right|^2 \leq \mathrm{M}_* F(x;\alpha,\beta),$$

$$\mathrm{M}_* = \int_{-1}^{1} \left| f'(x) \right|^2 \rho^{\alpha+1,\beta+1}(x)dx,$$

$$F(x;\alpha,\beta) = \left| \int_0^x (1-t)^{-1-\alpha}(1+t)^{-1-\beta}dt \right|. \qquad (Д.1.6)$$

Легко показати, що $F(x;\alpha,\beta)$ задовольняє наступні оцінки при $0 \leq x \leq 1$

$$F(x;\alpha,\beta) \leq \begin{cases} |\alpha|^{-1}, & -1 < \alpha < 0; \\ -\ln(1-x), & \alpha = 0; \\ |\alpha|^{-1}(1-x)^{-\alpha}, & \alpha > 0. \end{cases} \qquad (Д.1.7)$$

Оскільки $F(x;\alpha,\beta) = F(-x;\beta,\alpha)$, то після заміни у (Д.1.7) α на β отримаємо аналогічні оцінки на інтервалі $-1 < x \leq 0$.

У відповідності до вищезазначеного, зображення (Д.1.5) та оцінки (Д.1.6) та (Д.1.7) забезпечують справедливість обох тверджень леми.

Лему доведено.

Визначення 1. *Будемо говорити, що функція* $f(x)$ *належить класу* $L_2^{(n)}\{\alpha,\beta\}$*, якщо її похідні* $f^{(k)}(x)$, $k=\overline{0,n-1}$ *є неперервними у інтервалі* $-1<x<1$ *та* $f^{(n)}(x)\in L_2\left([-1,1],\rho^{\alpha+n,\beta+n}(x)\right)$, $\alpha,\beta>-1$.

Якщо $f(x)\in L_2^{(n)}\{\alpha,\beta\}$, то за рахунок леми 1.1 маємо $f^{(k)}(x)\in L_2\left([-1,1],\rho^{\alpha+k,\beta+k}(x)\right)$, $k=\overline{0,n}$;

$$\lim_{x\to\pm1} f^{(k)}(x)(1-x)^{\alpha+k+1}(1+x)^{\beta+k+1}=0,\quad k=\overline{0,n-1},\ \alpha,\beta>-1. \quad (5.20)$$

Простір $L_2^{(n)}\{\alpha,\beta\}$ можна зробити гільбертовим, якщо ввести в ньому такий скалярний добуток:

$$[f,\psi]_{(n)}=\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k^{\alpha,\beta}\int_{-1}^{1}f^{(k)}(t)\rho^{\alpha+k,\beta+k}(t)dt\int_{-1}^{1}\psi^{(k)}(\tau)\rho^{\alpha+k,\beta+k}(\tau)d\tau+$$

$$+\int_{-1}^{1}f^{(n)}(t)\psi^{(n)}(t)\rho^{\alpha+n,\beta+n}(t)dt;\quad \alpha>-1;\beta>-1;$$

$$\left[\lambda_k^{\alpha,\beta}\right]^{-1}=2^{\alpha+\beta+2k+1}B(\alpha+k+1,\beta+k+1);$$

$$\|f(t)\|_{L_2^{(n)}\{\alpha,\beta\}}=\|f(t)\|_n=\left([f,f]_{(n)}\right)^{1/2}. \quad (5.21)$$

Скалярний добуток (5.21) введено на випадок простору дійсно-значних функцій. Якщо у (5.21) застосувати знак комплексного спряження над відповідними множниками, отримаємо скалярний добуток для простору комплексно-значних функцій.

Зауважимо, що простори $L_2^{(n)}\{\alpha,\beta\}$ упорядковані за включеннями:

$$L_2\left([-1,1],\rho^{\alpha,\beta}(x)\right)=$$

$$=L_2^{(0)}\{\alpha,\beta\}\supset L_2^{(1)}\{\alpha,\beta\}\supset L_2^{(2)}\{\alpha,\beta\}\supset\ldots\supset L_2^{(n)}\{\alpha,\beta\}\supset\ldots \quad (5.22)$$

Також введемо клас функцій

$$\mathrm{M}_2^{(n)}\{\alpha,\beta\}=\left\{\varphi(x):\exists f(x)\in L_2^{(n)}\{\alpha,\beta\},\varphi(x)=f(x)\rho^{\alpha,\beta}(x)\right\};$$

$$\mathrm{M}_2^{(n)}\{\alpha,\beta\}\subset L_2\left([-1;1],\rho^{-\alpha,-\beta}(x)\right). \quad (5.23)$$

Визначення 2. *Будемо вважати, що послідовність* $S=\left\{S_k\right\}_{k=0}^{\infty}$ *належить до класу* T_n *, якщо* $\exists a, A,\ 0<a\le A$ *такі, що*

$$a\le\left|S_k\right|\left(k+1\right)^{-n}\le A,\quad \forall k=\overline{0,\infty}\ .$$

Надалі використовуватиме позначення

$$\xi_k^{(n)}\left(\alpha,\beta\right)=\sqrt{\left(k-n+1\right)_n\left(k+\alpha+\beta+1\right)_n}\ ,$$

$$S_k^{(n)}=S_k\left(\alpha,\beta;n\right)=\begin{cases}\xi_k^{(k)}\left(\alpha,\beta\right), & k=\overline{0,n-1},\\ \xi_k^{(n)}\left(\alpha,\beta\right), & k=\overline{n,\infty}.\end{cases}\tag{5.24}$$

Як бачимо, послідовність $S^{(n)}=\left\{S_k^{(n)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ з (5.24) належить класу $T_n,\ n=0,1,2,...$.

Теорема 1.2. *Співвідношення*

$$f_k=\int_{-1}^{1}f\left(x\right)q_k^{\alpha,\beta}\left(x\right)dx,\quad k=\overline{0,\infty}\tag{5.25}$$

$$f\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k\,p_k^{\alpha,\beta}\left(x\right),\quad x\in\left(-1,1\right)\tag{5.26}$$

визначають взаємно однозначну відповідність між простором функцій $L_2^{(n)}\left\{\alpha,\beta\right\},\ \alpha,\beta>-1$ *та простором послідовностей* $l_2^{(2n)}$ *з нормою*

$$\left\|\vec{f}\right\|_{(2n)}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|S_k^{(n)}\right|^2\left|f_k\right|^2\right)^{1/2},\ S^{(n)}=\left\{S_k^{(n)}\right\}_{k=0}^{\infty}\in T_n\ ,\tag{5.27}$$

де $S_k^{(n)}$ *визначені у (5.24). Відповідність (5.25), (5.26) є ізоморфізмом, тобто функція* $f\left(x\right)$ *та послідовність* $\vec{f}=\left\{f_k\right\}_{k=0}^{\infty}$ *мають однакові норми (5.21), (5.27) —*

$$\left\|f\left(x\right)\right\|_{L_2^{(n)}\{\alpha,\beta\}}=\left\|\vec{f}\right\|_{(2n)}.\tag{5.28}$$

Якщо $f\left(x\right)\in L_2^{(n)}\left\{\alpha,\beta\right\}$*, то ряди, що виражають похідні функції* $f\left(x\right)$

$$f^{(j)}\left(x\right)=\sum_{k=j}^{\infty}\xi_k^{(j)}\left(\alpha,\beta\right)f_k\,p_{k-j}^{\alpha+j,\beta+j}\left(x\right)\tag{5.29}$$

для $j=\overline{0,n-1}$ *збігаються рівномірно на сегменті* $\left[-1+\varepsilon;1-\varepsilon\right]$ *для кожного фіксованого* $\varepsilon>0$ *. При j, що задовольняють нерівність*

$$0 \le 2j < n - \lambda_j(\alpha,\beta) - 1$$

$$\lambda_j(\alpha,\beta) = \begin{cases} \max(\alpha,\beta,-1/2), & j = 0 \\ \max(\alpha,\beta), & j \ge 1 \end{cases} \tag{5.30}$$

$f^{(j)}(x) \in C[-1,1]$ *та ряди (5.29) збігаються до* $f^{(j)}(x)$ *рівномірно на сегменті* $[-1,1]$.

Доведення.

Для доведення потрібні відомі формули диференціювання поліномів Якобі [3], які в позначеннях (5.11) запишуться наступним чином:

$$\frac{d^n}{dx^n} p_k^{\alpha,\beta}(x) = \xi_k^{(n)}(\alpha,\beta) p_{k-n}^{\alpha+n,\beta+n}(x), \quad k \ge n;$$

$$\frac{d^n}{dx^n} q_{k-n}^{\alpha+n,\beta+n}(x) = (-1)^n \xi_k^{(n)}(\alpha,\beta) q_k^{\alpha,\beta}(x), \quad k \ge n;$$

$$\xi_k^{(n)}(\alpha,\beta) = \sqrt{(k-n+1)_n (k+\alpha+\beta+1)_n};$$

$$\xi_k^{(n)}(\alpha,\beta) > 0, \quad k \ge n; \quad \xi_0^{(0)}(\alpha,\beta) = 1 \tag{Д.1.8}$$

Крім того, потрібна оцінка [14]

$$\max_{t\in[-1;1]} \left| p_k^{\alpha,\beta}(t) \right| \le A(k+1)^s, \quad k = \overline{0,\infty} \quad (\alpha,\beta > -1);$$

$$0 < A = A(\alpha,\beta) < \infty; \quad s = 1/2 + \max(\alpha,\beta,-1/2) \tag{Д.1.9}$$

та асимптотичне подання [14]

$$p_n^{\alpha,\beta}(\cos\theta) = R_* \frac{\cos(N\theta - \gamma)}{(\cos(\theta/2))^{\beta+1/2} (\sin(\theta/2))^{\alpha+1/2}} + O\left(\frac{1}{n}\right);$$

$$N = n + \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+1), \quad \gamma = \frac{\pi}{2}\left(\alpha + \tfrac{1}{2}\right), \; R_* = R_*(\alpha,\beta) < \infty, \tag{Д.1.10}$$

в якому оцінка остаточного члену рівномірна на сегменті $[\varepsilon, \pi-\varepsilon]$ для $\varepsilon > 0$.

Тепер безпосередньо почнемо доведення теореми (1.2).

Нехай $f(x) \in L_2^{(n)}\{\alpha,\beta\}, \alpha,\beta > -1$. За допомогою формул (5.20), (Д.1.8) проінтегруємо частинами у зображенні (5.25) коефіцієнтів Фур'є — Якобі функції $f(x)$. Тоді матимемо:

$$f_k \xi_k^{(n)}(\alpha,\beta) = \int_{-1}^{1} f^{(n)}(x) q_{k-n}^{\alpha+n,\beta+n}(x) dx, \quad k = \overline{n,\infty}$$

$$f_k \xi_k^{(k)}(\alpha,\beta) = \left(\lambda_k^{\alpha,\beta}\right)^{1/2} \int_{-1}^{1} f^{(k)}(x) \rho^{\alpha+k,\beta+k}(x) dx, \quad k = \overline{0,n-1} \qquad \text{(Д.1.11)}$$

Запишемо рівність Парсеваля для коефіцієнтів розвинення функції $f^{(n)}(x)$ за поліномами $p_{k-n}^{\alpha+n,\beta+n}(x), k = \overline{n,\infty}$. Підставимо до неї зображення цих коефіцієнтів у вигляді (Д.1.11). Отриманий вираз та друга формула з (Д.1.11) з урахуванням (5.27) дозволяють записати норму (5.21) функції $f(x)$ наступним чином:

$$\left\| f(x) \right\|_{(n)}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left| S_k^{(n)} \right| \left| f_k \right|^2 = \left\| \vec{f} \right\|_{(2n)} .$$

З цього випливає $\vec{f} = \{f_k\}_{k=\overline{0,\infty}} \in l_2^{(2n)}$. Якщо це так, то розглянемо функцію $f(x)$, яка визначається через $\vec{f}$ за формулою (5.26), а також її похідні $f^{(j)}(x), j = \overline{0,n-1}$. Враховуючи (Д.1.8), можна (поки що формально) записати зображення (5.29) для $f^{(j)}(x)$.

Використовуючи нерівність Коші — Буняковського, матимемо

$$\sum_{k=n}^{\infty} \left| \xi_k^{(j)}(\alpha,\beta) f_k \right| \le \left\| \vec{f} \right\|_{(2n)} \left[A_j^{(n)} \right]^{1/2};$$

$$A_j^{(n)} = \sum_{k=n}^{\infty} \left[\xi_k^{(n-j)}(\alpha+j,\beta+j) \right]^{-2}, \quad j = \overline{0,n-1}. \qquad \text{(Д.1.12)}$$

За рахунок (Д.1.10) та (Д.1.12) ряди (5.29) для $j = \overline{0,n-1}$ збігаються до відповідних похідних функцій $f(x)$ рівномірно на сегменті $[-1+\varepsilon; 1-\varepsilon]$ для кожного фіксованого $\varepsilon > 0$. Отже, $f^{(j)}(x), j = \overline{0,n-1}$ є неперервними у інтервалі $-1 < x < 1$.

Оскільки $\vec{f} \in L_2^{(2n)}$, то за рахунок (5.27) ряд (5.29) при $j = n$ визначає функцію з класу $L_2([-1;1], \rho^{\alpha+n,\beta+n})$, невизначений інтеграл Лебега якої відрізняється від $f^{(n-1)}(x)$ на сталу. Таким чином, $f(x) \in L_2^{(n)}\{\alpha,\beta\}$.

Покажемо, що ряд (5.29) є рівномірно збіжним на сегменті $[-1;1]$. У відповідності до нерівності (Д.1.9) для цього достатньо показати, що ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{\gamma} f_k, \quad \gamma = 2j + \lambda_j + 1/2$$

при j, які задовольняють нерівність (5.30), збігається абсолютно. Останнє можна зробити за допомогою нерівності Коші — Буняковського, враховуючи, що $\vec{f} \in l_2^{(2n)}$.

Теорему доведено.

Зауважимо, що границі зміни j у нерівності (5.30) поширити не можна. Відповідний контрприклад наведено далі.

Нехай

$$n = 1, \alpha = \beta = 0; \lambda_0(0,0) = 0; f(x) = [-\ln x]^{\gamma}, 0 \le x \le e^{-1}, 0 < \gamma < 1/2,$$

$$\int_0^{e^{-1}} |f'(x)|^2 x(e^{-1} - x) dx \le \gamma^2 \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{2-2\gamma}} < \infty .$$

Більш загальні контрприклади принципово не відрізняються від наведеного вище.

З теореми 1.2 випливає наступний наслідок.

Наслідок 1.1. Формули (5.25), (5.26) реалізують взаємно однозначну відповідність між простором $C^{\infty}[-1,1]$ нескінченне число раз неперервнодиференційованих на сегменті $[-1;1]$ функцій та гільбертовим простором швидко спадаючих послідовностей $l_2^{\infty} = \bigcap_{k=0}^{\infty} l_2^{(k)}$.

Визначення 3. Будемо говорити, що функція $g(t,\tau)$ належить класу $L_2^{(n,m)}\{\alpha,\beta;v,\mu\}$, якщо виконано наступні умови:

1) частинні похідні $g^{(k,j)}(t,\tau)$ при $k = \overline{0,n-1}, j = \overline{0,m-1}$ неперервні на множині $-1 < t < 1, -1 < \tau < 1$;

2) похідні $g^{(k,m)}(t,\tau), k = \overline{0,n-1}$ неперервні за змінною t у інтервалі $-1 < t < 1$ майже для всіх $\tau \in (-1;1)$ та для кожного фіксованого $t_* \in (-1;+1)$

$$g^{(\kappa,m)}(t_*,\tau) \in L_2([-1,1], \rho^{\nu+m,\mu+m}(t))$$

3) похідні $g^{(n,j)}(t,\tau), j = \overline{0,m-1}$ неперервні за змінною τ у інтервалі $-1 < \tau < 1$ майже для всіх $t \in (-1,1)$ та для кожного фіксованого $\tau_* \in (-1,1)$

$$g^{(n,j)}(t,\tau_*) \in L_2([-1;1], \rho^{\alpha+n,\beta+n}(t));$$

4) $g^{(n,m)}(t,\tau) \in L_2([-1,1][-1,1], \rho^{\alpha+n,\beta+n}(t) \times \rho^{\nu+m,\mu+m}(\tau))$.

Клас таких функцій утворює гільбертовий простір зі скалярним добутком $\left[g,h\right]_{(n,m)}$ та нормою $\left\|g\right\|_{(n,m)}$, що визначені формулою (Д.1.13).

Має місце двовимірний аналог теореми 1.2.

Теорема 1.3. *Співвідношення*

$$g(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}g_{kj}\,p_k^{\alpha,\beta}(x)\,p_j^{\nu,\mu}(y),$$

$$x\in(-1,1),\quad y\in(-1,1);\quad \nu,\mu,\alpha,\beta>-1,$$

$$g_{kj}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}g(x,y)\,q_k^{\alpha,\beta}(x)\,q_j^{\nu,\mu}(y)\,dydx \tag{5.31}$$

визначають взаємно однозначну відповідність між простором функцій $L_2^{(n,m)}\{\alpha,\beta;\nu,\mu\}$ та простором $l_2^{(2n,2m)}=l_2^{(2n)}\otimes l_2^{(2m)}$ нескінченновимірних матриць $G=\{g_{kj}\}_{k,j=\overline{0,\infty}}$ зі скалярним добутком

$$\left\langle G,H\right\rangle_{(2n,2m)}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left|\xi_k^{(n)}\right|^2\left|\eta_j^{(m)}\right|^2 g_{kj}h_{kj};$$

$$\xi^{(n)}=\left\{\xi_k^{(n)}\right\}_{k=0}^{\infty}\in T_n;\quad \eta^{(m)}=\left\{\eta_k^{(m)}\right\}_{k=0}^{\infty}\in T_m;$$

$$G=\left\{g_{kj}\right\}_{k,j=\overline{0,\infty}};\quad H=\left\{h_{kj}\right\}_{k,j=\overline{0,\infty}};$$

$$\xi_k^{(n)}=S_k(\alpha,\beta;n),\quad \eta_k^{(m)}=S_k(\nu,\mu;m),\quad k=\overline{0,\infty};$$

$$\left\|G\right\|_{(2n,2m)}=\left(\left\langle G,G\right\rangle_{(2n,2m)}\right)^{1/2}, \tag{5.32}$$

де $S_k^{(n)}(\alpha,\beta;n)$ визначені у (5.24).

Відповідність (5.31) є ізоморфізмом, тобто матриця G та функція $g(x,y)$, що пов'язані співвідношенням (5.31), мають однакові норми (5.32), (Д.1.13)

$$\left\|g(x,y)\right\|_{(n,m)}=\left\|G\right\|_{(2n,2m)}. \tag{5.33}$$

Застосовуючи теорему Фубіні, доведення теореми 1.3 проводиться аналогічно до доведення теореми 1.2.

Норма та скалярний добуток у просторі $L_2^{(n,m)}\{\alpha,\beta;\nu,\mu\}$

$$\left[g,h\right]_{(n,m)}=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\lambda_k^{(\alpha,\beta)}\lambda_j^{(\nu,\mu)}I_{k,j}\left[g\right]I_{k,j}\left[h\right]+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k^{(\alpha,\beta)}\int_{-1}^{1}u_k[g](y)u_k[h](y)\rho^{\nu+m,\mu+m}(y)dy+$$

$$+\sum_{j=0}^{m-1}\lambda_j^{(\nu,\mu)}\int_{-1}^{1}V_j[g](x)V_j[h](x)\rho^{\alpha+n,\beta+m}(x)dx+$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}g^{(n,m)}(x,y)h^{(n,m)}(x,y)\rho^{\alpha+n,\beta+n}(x)\rho^{\nu+m,\mu+m}(y)dydx;$$

$$\mathrm{I}_{k,j}[g]=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}g^{(k,j)}(x,y)\rho^{\alpha+k,\beta+k}(x)\rho^{\nu+j,\mu+j}(y)dydx;$$

$$u_k[g](y)=\int_{-1}^{1}g^{(k,m)}(x,y)\rho^{\alpha+k,\beta+k}(x)dx;$$

$$V_k[g](x)=\int_{-1}^{1}g^{(n,k)}(x,y)\rho^{\nu+k,\mu+k}(y)dy;\ \ \|g\|_{(n,m)}=\left[(g,g)_{n,m}\right]^{1/2} \qquad (\text{Д}.1.13)$$

$\alpha,\beta,\nu,\mu>-1$, де $\lambda_\kappa^{\alpha,\beta}$ визначені у (5.21). Зазначимо, що простори $L_2^{(n,m)}\{\alpha,\beta;\nu,\mu\}$ частково упорядковані за вкладаннями

$$L_2^{(n,m)}\{\alpha,\beta;\nu,\mu\}\supset L_2^{(n_1,m_1)}\{\alpha,\beta;\nu,\mu\}\quad n\le n_1,\quad m\le m_1. \qquad (5.34)$$

Теорема 1.4. *Нехай однорідне інтегральне рівняння (5.10) (разом з (5.11), (5.12)) має у просторі* $L_2([-1;1],\rho^{-\nu,-\mu}(t))$ *тільки тривіальний розв'язок*

$$\mathrm{K}\varphi=0,\varphi(t)\in L_2([-1;1],\rho^{-\nu,-\mu}(t))\Rightarrow\varphi(t)=0 \qquad (5.35)$$

Послідовність власних чисел оператора $\Pi-\sigma=\{\sigma_k\}_{k=0}^{\infty}$, *ядро* $D(t,\tau)$ *та права частина* $h(t)$ *задовольняють наступні умови:*

$$\sigma=\{\sigma_k\}_{k=\overline{0,\infty}}\in T_{(-m)},\quad m\ge 0; \qquad (5.36)$$

$$D(t,\tau)\in L_2^{(n,0)}\{\alpha,\beta;\nu,\mu\},\quad h(t)\in L_2^{(n)}\{\alpha,\beta\};\quad n\ge m. \qquad (5.37)$$

Тоді інтегральне рівняння (5.10) має у просторі $L_2([-1;1],\rho^{-\nu,-\mu}(t))$ *єдиний розв'язок* $\varphi(t)\in\mathrm{M}_2^{(n-m)}\{\nu,\mu\}$, *де* $\mathrm{M}_2^{(k)}\{\alpha,\beta\}=\{\varphi(x):\exists f(x)\in L_2^{(k)}\{\alpha,\beta\},\ \varphi(x)=f(x)p^{\alpha,\beta}(x)\}$; $\mathrm{M}_2^{(k)}\{\alpha,\beta\}\subset L_2([-1;1]p^{-\alpha,-\beta}(x))$.

Наближений розв'язок редуцированої системи $\varphi_N(t)=\rho^{\nu,\mu}(t)\psi_N(t)$, $\psi_N(t)=\sum_{k=0}^{N}\varphi_k^{(N)}p_k^{\nu,\mu}(t)$ *збігається тоді до точного розв'язку (5.16), (5.15),* *(5.14) інтегрального рівняння (5.10), причому мають місце наступні оцінки порядку збіжності за нормами* $\left\| f(t) \right\|_{(n)} = \left(\left([f, f] \right)_{(n)} \right)^{1/2}$*:*

$$\left\| \psi(t) - \psi_N(t) \right\|_{L_2^{(s)}\{\nu,\mu\}} \le \mathbb{R}_N N^{-\chi(n-m-s)}, \tag{5.38}$$

$s = \overline{0, n-m}$, $\chi(k) = \max(0, k-1/2)$; $\mathbb{R}_N \to 0$, $N \to \infty$ *для функцій* $\psi(t), \psi_N(t)$ *з зображення (5.16), (5.19).*

Отримано оцінку і для похідних розв'язків $\psi^{(j)}(t)$. *Якщо* j *задовольняє нерівність*

$$0 \le 2j < n - m - \lambda_j - 1,$$

$$\lambda_j = \lambda_j(\nu,\mu) = \begin{cases} \max(\nu, \mu, -1/2), & j = 0 \\ \max(\nu, \mu), & j \ge 1, \end{cases} \tag{5.39}$$

а похідні $\psi^{(j)}(t)$ *— неперервні на сегменті* $[-1;1]$*, то мають місце наступні оцінки:*

$$\max_{t \in [-1;1]} \left| \psi^{(j)}(t) - \psi_N^{(j)}(t) \right| \le R_* \mathrm{H}_N N^{-(n-m-2j-\lambda_j-1)},$$

$$0 \le 2j < n - m - \lambda_j - 1, \quad \psi_N^{(j)}(t) = \sum_{k=j}^{N} \varphi_k^{(N)}(\nu,\mu) \xi_\kappa^{(j)}(\nu,\mu) p_{k-j}^{\nu+j,\mu+j}(t) \tag{5.40}$$

$$0 < R_* < +\infty; \quad \mathrm{H}_N \to 0, \quad N \to \infty .$$

Доведення.

Враховуючи вирази (5.22), (5.34) з теореми 1.1, отримаємо, що інтегральне рівняння (5.10), (5.12) є еквівалентним до нескінченної системи (5.14), (5.15), яку у відповідності з (5.36) можна записати у формі

$$(\mathrm{I} + \mathrm{A})\vec{\varphi} = \vec{f}; \quad \vec{f} = I_\sigma^{-1} \vec{h};$$

$$\mathrm{A} = I_\sigma^{-1} D; \quad I_\sigma^{-1} = \left\{ \left| \sigma_\kappa \right|^{-1} \delta_{k,j} \right\}_{k,j=\overline{0,\infty}}. \tag{Д.1.14}$$

Тоді у відповідності до теореми 1.1 з умови (5.35) випливає, що однорідне матричне рівняння (Д.1.14) має у просторі l_2 тільки тривіальний розв'язок. А з цього, в свою чергу, випливає, що однорідне рівняння (Д.1.14) має тільки тривіальний розв'язок і у більш вузьких просторах

$$l_2^{(2s)}, \quad s=\overline{0,n_*}; \quad n_*=n-m. \qquad (Д.1.15)$$

Використовуючи першу умову (5.37), покажемо, що матричний оператор $\mathrm{A}=I_\sigma^{-1}D$ з (Д.1.14) належить простору $B\left(l_2^{(2s)},l_2^{(2s)}\right), s=\overline{0,n}$ (тут $B(x,y)$ — банаховий простір лінійних обмежених операторів, що діють з банахового простору X в банаховий простір Y) є цілком неперервним. Отримаємо також необхідні у наступному оцінки $\left\|\mathrm{A}_N-\mathrm{A}\right\|_{\binom{2s}{2}}, \; s=\overline{0,n_*}$, де

$$\mathrm{A}_N=I_\sigma^{-1}D_N \qquad (Д.1.16)$$

– є оператор, що породжений редуцированою матрицею з (5.18), а норма $\|\;\|_{\binom{2s}{s}}$ — це норма оператора з $B\left(l_2^{(2s)},l_2^{(2s)}\right)$.

У відповідності до теореми 1.3. з (5.37) випливає, що матриця $\mathrm{A}=I_\sigma^{-1}D\in l_2^{(2n_*,0)}$, а для норм (5.32) цієї матриці маємо

$$\left\|\mathrm{A}\right\|_{(2s,0)}<+\infty, \quad s=\overline{0,n_*};$$

$$\left\|\mathrm{A}-\mathrm{A}_N\right\|_{(2n_*,0)}\le C_N\to 0, \quad N\to\infty;$$

$$\left\|\mathrm{A}-\mathrm{A}_N\right\|_{(2s,0)}\le C_N\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}(k+1)^{-2(n_*-s)}\right)^{1/2}\le C_N N^{-(n_*-s-1/2)}, \quad s=\overline{0,n_*-1}\,.$$

Далі, проводимо міркування аналогично до [6]. Після чого застосуємо нерівність Коші — Буняковського:

$$\left\|\mathrm{A}\right\|_{\binom{2s}{s}}\le\left\|\mathrm{A}\right\|_{(2s,-2s)}\le\left\|\mathrm{A}\right\|_{(2s,0)}<\infty, \quad s=\overline{0,n_*};$$

$$\left\|\mathrm{A}-\mathrm{A}_N\right\|_{\binom{2n_*}{2}}\le C_N\to 0, \quad N\to\infty;$$

$$\left\|\mathrm{A}-\mathrm{A}_N\right\|_{\binom{2s}{2}}\le C_N N^{-(n_*-s-1/2)}, \quad N\to\infty\,. \qquad (Д.1.17)$$

Таким чином, матричний оператор $\mathrm{A}=I_\sigma^{-1}D\in B\left(l_2^{(2s)},l_2^{(2s)}\right), s=\overline{0,n_*}$ є цілком неперервним як границя послідовності компактних операторів [6], що збігаються за операторною нормою (оператори $\mathrm{A}_N=I_\sigma^{-1}D_N$ (Д.1.16) діють у скінченовимірні півпростори).

Реалізуючи другу умову з (5.37) за допомогою теореми 1.2, знайдемо

$$\vec{f}=I_\sigma^{-1}\vec{h}\in l_2^{(2n_*)}; \quad \vec{f}_N=I_\sigma^{-1}h_N;$$

$$\left\|\vec{f}-\vec{f}_N\right\|_{(2n_*)} = F_N \to 0, \quad N \to \infty;$$

$$\left\|\vec{f}-\vec{f}_N\right\|_{(2s)} \le F_N N^{-(n_*-s-1/2)}, \quad s=\overline{0,n_*-1}. \qquad \text{(Д.1.18)}$$

Якщо використати першу частину альтернативи Фредгольма [5], отримаємо, що матричне рівняння (Д.1.14) є однозначно розв'язуваним у $l_2^{(2s)}$, $s=\overline{0,n_*}$ для будь-якої правої частини $\vec{f}\in l_2^{(2s)}$, $s=\overline{0,n_*}$, отже, за теоремою Банаха про обернений оператор [5] матричний оператор $\mathrm{I}+\mathrm{A}$ з (Д.1.14) має обмежений обернений

$$\left(\mathrm{I}+\mathrm{A}\right)^{-1}\in B\left(l_2^{(2s)},l_2^{(2s)}\right) \quad s=\overline{0,n_*}; \quad \left\|\mathrm{I}+\mathrm{A}\right\|^{-1}_{\left(\frac{2s}{2}\right)}=\Gamma_s<\infty \quad \text{(Д.1.19)}$$

У відповідності до (Д.1.18) $\vec{f}\in l_2^{(2n_*)}$, з цього випливає $\vec{\varphi}\in l_2^{(2n_*)}$. За теоремою 1.2 маємо $\varphi(t)\in M_2^{(n_*)}\{\nu,\mu\}$ (5.23).

Таким чином, якщо виконано умови (5.35), (5.36), (5.37), то інтегральне рівняння (5.10) є однозначно розв'язуємим у класі функцій $L_2\left([-1,1],\rho^{-\nu,-\mu}(t)\right)$, причому єдиний розв'язок рівняння (5.10) належить більш вузькому класу $M_2^{(n-m)}\{\nu,\mu\}$ (5.23).

Для оцінки порядку збіжності наближених розв'язків (5.18) та (5.19) до точних розв'язків нескінченної системи (5.15) та інтегрального рівняння (5.10) використаємо відповідну теорему з [6], відповідно до неї оператор $\mathrm{I}+\mathrm{A}_N$ при достатньо великих N має обмежений обернений в $l_2^{(2s)}$, $s=\overline{0,n-m}$, а також має місце наступна оцінка

$$\left\|\vec{\varphi}-\vec{\varphi}_N\right\|_{(2s)} \le \Gamma_s\left\|\vec{f}-\vec{f}_N\right\|_{(2s)}+\frac{\Gamma_s^2\left\|\mathrm{A}-\mathrm{A}_N\right\|_{\left(\frac{2s}{2}\right)}\left\|\vec{f}\right\|_{(2s)}}{1-\Gamma_s\left\|\mathrm{A}-\mathrm{A}_N\right\|_{\left(\frac{2s}{2}\right)}}; \quad s=\overline{0,n-m}, \quad \text{(Д.1.20)}$$

де Γ_s — визначення у (Д.1.19).

Після підстановки оцінок (Д.1.17), (Д.1.18) у (Д.1.19) знайдемо

$$\begin{gathered}\left\|\vec{\varphi}-\vec{\varphi}_N\right\|_{(2s)} \le R_N N^{-\chi(n-m-s)}, \quad s=\overline{0,n-m};\\ \chi(j)=\max(0,j-1/2); \quad R_N\to 0, \quad N\to\infty\end{gathered} \qquad \text{(Д.1.21)}$$

Застосовуючи теорему 1.2 до (Д.1.21), отримаємо оцінки (5.38).

Оскільки функція $\varphi(t)$ (розв'язок рівняння (5.10)) належить класу $M_2^{(n-m)}\{\nu,\mu\}$ (5.23), то в силу теореми 1.2 функція $\psi(t)$ у зображенні (5.16) розв'язку рівняння (5.10) має неперервні на $[-1,1]$ похідні порядку j. Тут порядок j визначається нерівністю (5.30), в якої треба взяти $n = n_* = n - m$. Для того, щоб оцінити рівномірну збіжність наближень (5.19) до функції $\psi(t)$, розглянемо матричні рівняння (Д.1.14) у просторі $l_1^{(u)}$ з нормою

$$\|\vec{\varphi}\|_{l_1^{(u)}} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^u|\varphi_k|. \qquad \text{(Д.1.22)}$$

Норму оператора з $B\left(l_1^{(u)}, l_1^{(u)}\right)$ будемо позначати $\| \; \|_{\binom{u}{1}}$. Можна показати [6], що норма матричного оператора $\mathrm{A} \in \mathrm{B}\left(l_1^{(u)}, l_1^{(u)}\right)$ задовольняє нерівність $(u \geq 0)$

$$\|\mathrm{A}\|_{\binom{u}{1}} \leq \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^u \sup_{j=\overline{0,\infty}}|a_{kj}|(j+1)^{-u} \leq \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^u \gamma_k; \quad \gamma_k = \left(\sum_{j=0}^{\infty}|a_{kj}|^2\right)^{1/2}.$$

Використовуючи цю нерівність за допомогою нерівністі Коші — Буняківського, отримаємо наступні оцінки для норми оператора $\mathrm{A} - \mathrm{A}_N$ (Д.1.14), (Д.1.16)

$$\|\mathrm{A} - \mathrm{A}_N\|_{\binom{u}{1}} \leq \sum_{k=N+1}^{\infty}(k+1)^{u-n_*}\gamma_k(k+1)^{n_*} \leq$$

$$\leq C_N\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}(k+1)^{-2(n_*-u)}\right)^{1/2} \leq C_N N^{-(n_*-u-1/2)};$$

$$C_N = \|\mathrm{A} - \mathrm{A}_N\|_{(2n_*,0)} \to 0, \quad N \to \infty.$$

Аналогично маємо

$$\left\|\vec{f} - \vec{f}_N\right\|_{l_1^{(u)}} \leq F_N N^{-(n_*-u-1/2)}, \quad 0 \leq u < n_* - 1/2,$$

де F_N — визначається за (Д.1.18).

Візьмемо до уваги вкладення $l_1^{(u)} \subset l_2, u \geq 0,$ та отримаємо, що однорідне рівняння (Д.1.14) має в $l_1^{(u)}, u \geq 0$ тільки тривіальний розв'язок.

За такими же міркуваннями, як і під час дослідження матричного рівняння (Д.1.14) у просторах $l_2^{(2s)}, s = \overline{0, n_*}$, отримаємо, що у припущеннях (5.35)–(5.37) матричне рівняння (Д.1.14) однозначно розв'язувано в $l_1^{(u)}, 0 \leq u < n_* - 1/2$ та мають місце оцінки

$$\|\vec{\varphi} - \vec{\varphi}_N\|_{l_1^{(u)}} \leq \mathrm{H}_N N^{-(n_*-u-1/2)}, \quad 0 \leq u < n_* - 1/2; \quad \mathrm{H}_N \to 0, \quad N \to \infty \quad \text{(Д.1.23)}$$

Застосовуючи оцінки (Д.1.23), (Д.1.9), отримаємо (5.40). Теорему доведено.

Наслідок 1.2. Якщо в умовах теореми (1.4) взяти $h(t)\in C^{\infty}[-1;1]$, $D(t,\tau)\in L_2^{(\infty,0)}\{\alpha,\beta;\nu,\mu\}=\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}L_2^{(n,0)}\{\alpha,\beta;\nu,\mu\}$ $(n=\infty)$, то $\vec{\varphi}\in l_2^{(\infty)}$, $\psi(t)\in C^{\infty}[-1;1]$, а також

$$\forall s=\overline{1,\infty},\quad \forall j=\overline{0,\infty}\quad \exists C_{s,j}<+\infty\quad \forall N=\overline{1,\infty};$$

$$\max_{t\in[-1;1]}\left|\psi^{(j)}(t)-\psi_N^{(j)}(t)\right|<C_{s,j}N^{-s}.$$

Для використання теореми (1.4) суттєво важлива наявність умови (5.35). Можна показати, що для достатньо широкого класу рівнянь цю умову виконано.

Продемонструємо це на прикладі рівняння, яке часто зустрічається на практиці:

$$\mathrm{K}_{\lambda}\varphi(t)=\int_{-1}^{1}\mathrm{K}_{\lambda}(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau=h(t),\quad t\in(-1,1)$$

$$\mathrm{K}_{\lambda}(t,\tau)=L_{\lambda}(t-\tau)+D(t,\tau),\tag{5.41}$$

$$L_{\lambda}(t)=\frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{|t|}+ctg\pi\lambda\frac{\operatorname{sgn}t}{2},\quad 0<\lambda<1.$$

Оскільки має місце спектральне співвідношення

$$\int_{-1}^{1}L_{\lambda}(t-\tau)q_k^{-\lambda,\lambda-1}(\tau)d\tau=\sigma_k p_k^{\lambda-1,-\lambda}(t)$$

$$t\in(-1;1);\quad k=\overline{0,\infty},$$

$$\sigma_k=(\sin\pi\lambda)^{-1}k^{-1},\quad k=\overline{1,\infty}\tag{5.42}$$

$$\sigma_0\sin\pi\lambda=\pi/2ctg\pi\lambda-\ln 2-\psi(1-\lambda)+\psi(1),\ 0<\operatorname{Re}\lambda<1,$$

то інтегральне рівняння з ядром (5.41) є частковим випадком рівняння (5.10–5.12), якщо взяти

$$\alpha=\mu=\lambda-1,\quad \beta=\nu=-\lambda.\tag{5.43}$$

З (5.42) випливає, що для рівняння (5.41) в умові на власні числа (5.36) можна взяти $m=1$. (5.44)

Якщо розв’язок рівняння (5.41) розшукується в класі функцій дійснозначних, то умову (5.35) буде виконано, наприклад, у випадку, коли квадратична форма

$$(\mathrm{K}_\lambda\varphi,\varphi)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathrm{K}_\lambda(t,\tau)\varphi(\tau)\varphi(t)d\tau dt \qquad (5.45)$$

є додатньою на лінійному багатовиді

$$L[-1;1]=\underset{p>1}{U}L_p[-1,1] \qquad (5.46)$$

що визначає

$$0\le(\mathrm{K}_\lambda\varphi,\varphi)<\infty,\ \forall\varphi(t)\in L[-1,1];$$

$$(\mathrm{K}_\lambda\varphi,\varphi)=0,\quad \varphi(t)\in L[-1;1]\Rightarrow\varphi(t)=0\,. \qquad (5.47)$$

Перевірка умови (5.47) на лінійному багатовиді $L[-1;1]$ (5.46) пов'язана з тим, що не завжди заздалегідь відомо, до якого найбільш широкого з просторів $L_p[-1;1]\,p>1$ належить розв'язок рівняння (5.41).

Лема 1.2. *Квадратична форма*

$$(L_\lambda\varphi,\varphi)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}L_\lambda(t-\tau)\varphi(\tau)\varphi(t)d\tau dt,\quad 0<\mathrm{Re}\lambda<1$$

є додатньою у сенсі (5.47) на лінійному багатовиді дійснозначних функцій $L[-1;1]$*(5.46).*

Доведення.

Доведення цієї леми базується на білінійному розвиненні

$$\frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{|t-\tau|}=\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k p_k^{-1/2,-1/2}(t)p_k^{-1/2,-1/2}(\tau);$$

$$\mu_0=\ln 2;\quad \mu_k=k^{-1},\quad k=1,2,... \qquad (5.48)$$

та на безпосередньому перевірюваному співвідношенні

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathrm{sgn}(t-\tau)\varphi(\tau)\varphi(t)d\tau dt=0. \qquad (5.49)$$

У відповідності до (5.49) достатньо перевірити умови (5.47) для квадратичної форми $\mathrm{A}(\varphi,\varphi)$, де

$$\pi\mathrm{A}(u,v)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|t-\tau|}u(t)v(\tau)d\tau dt$$

$$u,v\in L_p(-1,1),\quad p>1. \qquad (Д.1.24)$$

Після підстановки (5.48) у (Д.1.24) (поки що формально) отримаємо

$$\mathrm{A}(\varphi,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k\left|\varphi_k\right|^2;\quad \varphi(t)\in L_p(-1,1),\quad p>1$$

$$\varphi_k=\int_{-1}^{1}p_k^{-1/2,-1/2}(t)\varphi(t)dt. \qquad (Д.1.25)$$

Зрозуміло, що $\mathrm{A}(\varphi,\varphi)\geq 0$. Нехай $\mathrm{A}(\varphi,\varphi)=0, \varphi\in L_p(-1;1), p>1$, тоді $\forall k=\overline{0,\infty}, \varphi_k=0$.

З того, що лінійний багатовид всіх поліномів скрізь щільний в $L_q(-1;1), q=p(p-1)^{-1}$, $p>1$ [5], випливає, що $\varphi(t)=0$.

Залишилася необґрунтованою перестановка підсумовування та інтегрування під час отримання (Д.1.25) з (5.48). Треба показати, що

$$\mathrm{A}(u,v)=\mathrm{A}_*(u,v) \qquad (Д.1.26)$$

при $u,v\in L_p(-1,1), p>1$, де

$$\mathrm{A}_*(u,v)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k u_k v_k\ ,$$

$$\begin{pmatrix}u_k\\ v_k\end{pmatrix}=\int_{-1}^{1}\begin{pmatrix}u(t)\\ v(t)\end{pmatrix}p_k^{-1/2,-1/2}(t)dt. \qquad (Д.1.27)$$

У зображенні (5.48) ряд збігається за нормою простору $L_2\left([-1,1][-1,1],\left(1-t^2\right)^{-1/2}\left(1-\tau^2\right)^{-1/2}\right)$. Але скористатися цим фактом та нерівністю Гьольдера безпосередньо для обґрунтування (Д.1.26) не можна, оскільки із збіжності за нормою простору $L_2(-1,1)$ не випливає збіжність за нормою $L_q(-1,1), q>2$.

Пропонуємо наступний шлях.

Розглянемо вироджену білінійну форму

$$\mathrm{A}_N(u,v)=\sum_{k=0}^{N}\mu_k u_k v_k\ , \qquad (Д.1.28)$$

де $u_k v_k$ визначені у (Д.1.27).

Білінійні форми (Д.1.25), (Д.1.28) неперервні за кожним з аргументів у $L_p(-1,1), p>1$. Неперервність форми (Д.1.28) є наочною, а неперервність форми (Д.1.25) у $L_p(-1,1), p>1$ випливає з нерівності Гьольдера

$$\left|\mathrm{A}(u,v)\right| \le \mathrm{B}_* \|u\|_{L_p} \|v\|_{L_p}, \quad p>1,$$

$$\mathrm{B}_*^q = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(\ln|t-\tau|\right)^q d\tau dt < \infty. \qquad (Д.1.29)$$

У відповідності до вищезазначеного про збіжність розвинення (5.48) отримаємо, що

$$\mathrm{A}(u,v) = \mathrm{A}_*(u,v), \quad u,v \in C[-1,1]. \qquad (Д.1.30)$$

Отже,

$$\mathrm{A}(u,u) \ge \mathrm{A}_N(u,u), \quad u \in C[-1,1]. \qquad (Д.1.31)$$

Оскільки $C[-1;1]$ скрізь щільне у $L_p(-1;1), p>1$, то за рахунок зменшеної неперервності білінійних форм (Д.1.25), (Д.1.28) в $\forall L_p(-1,1), p>1$ отримаємо, що нерівність (Д.1.31) є вірною $\forall u \in L_p(-1,1), p>1$. При прямуванні $N \to \infty$ отримаємо

$$\mathrm{A}(u,u) \ge \mathrm{A}_*(u,u), \quad u \in L_p, \quad p>1 \qquad (Д.1.32)$$

Використовуючи нерівність Коші — Буняківського та (Д.1.29), (Д.1.32), знайдемо

$$\left|\mathrm{A}_*(u,v)\right| \le \left[\mathrm{A}_*(u,u)\right]^{1/2} \left[\mathrm{A}_*(v,v)\right]^{1/2} \le$$

$$\le \left[\mathrm{A}(u,u)\right]^{1/2} \left[\mathrm{A}(v,v)\right]^{1/2} \le \mathrm{B}_* \|u\|_{L_p} \|v\|_{L_p}. \qquad (Д.1.33)$$

Оскільки $C[-1,1]$ скрізь щільне в $L_p(-1,1), p>1$, то з (Д.1.30), (Д.1.29), (Д.1.33) випливає, що (Д.1.26) виконано для будь-яких $u(t), v(t) \in L_p(-1,1), p>1$.

Лему 1.2 доведено.

З цієї леми та нерівності Гьольдера [5] випливають вкладення

$$L_2\left([-1;1], \rho^{-\nu,-\mu}(t)\right) \subset L[-1;1], \quad \nu,\mu > -1$$

та

Теорема 1.5.

Нехай виконано наступні умови:

а) $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} D(t,\tau)\varphi(t)\varphi(\tau) d\tau dt \ge 0,$

$\forall \varphi(t) \in L[-1;1] = \underset{p>1}{U} L_p[-1;1];$

б) $\begin{array}{l} D(t,\tau)\in L_2^{(n,0)}\{\lambda-1,-\lambda;-\lambda;\lambda-1\}, \\ h(t)\in L_2^{(n)}\{\lambda-1,-\lambda\}, \quad 0<\lambda<1, \quad n\geq 1; \end{array}$

тоді інтегральне рівняння (5.41) має у лінійному багатовиді дійснозначних функцій $L[-1;1]$ *(5.46) єдиний розв'язок, який належить простору* $M_2^{(n-1)}\{-\lambda,\lambda-1\}$*, та справедливі всі висновки теореми 1.4, коли параметри* α,β,ν,μ,m *задані формулами (5.43), (5.44).*

Таким чином, сформульовано, як від властивостей ядра $D(t,\tau)$ правої частини рівняння $h(t)$ залежить збіжність методу ортогональних поліномів та ступінь гладкості розв'язку рівняння.

§ 6. ОБЧИСЛЕННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ ІНТЕГРАЛІВ З КЛАСИЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ

В цьому параграфі рахуються та досліджуються інтеграли, що зустрічаються під час розв'язання інтегральних рівнянь методом ортогональних поліномів. Водночас наведено приклади деяких спектральних співвідношень.

Обрахування інтегралів проводиться на основі способу, що зображує їх у вигляді згортки Мелліна:

$$h(t)=\int_0^\infty f(\tau)g\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau} \tag{6.1}$$

та відшуканні трансформант Мелліна функцій $f(t)$ та $g(t)$

$$\left[F(s),G(s)\right]=\int_0^\infty\left[f(t),g(t)\right]t^{s-1}dt. \tag{6.2}$$

Суттєво використовується наступна теорема.

Теорема 6.1. *Нехай для деякого дійсного числа* χ *збігається інтеграл*

$$\int_0^\infty t^{\chi-1}\left(\left|f(t)\right|,\left|g(t)\right|\right)dt<\infty, \tag{6.3}$$

тоді

$$h(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\chi-i\infty}^{\chi+i\infty}F(s)G(s)t^{-s}ds\,. \tag{6.4}$$

Причому

$$\int_0^\infty t^{\chi-1}\left|h(t)\right|dt<\infty\,. \tag{6.5}$$

Тут функція $h(t)$ *визначається поданням (6.1), а трансформанта Мелліна* $F(s),G(s)$ *— поданням (6.2).*

Доведення цієї теореми наведено у [13].

6.1. ІНТЕГРАЛИ З РІЗНИЦЕВИМ СТУПЕНЕВИМ ЯДРОМ

Розглянемо інтеграл

$$J_n^-(t)=\int_0^1 \frac{\varepsilon_1 \operatorname{sgn}(\tau-t)+\varepsilon_2}{\tau^{\sigma-\nu}|\tau-t|^\nu} q_n^{\alpha,\beta}(\tau)d\tau\,, \tag{6.6}$$

де $q_n^{\alpha,\beta}(t)=t^\alpha(1-t)^\beta P_n^{\alpha,\beta}(1-2t)$.

Параметри ε_1, ε_2, α, β, ν, σ є довільними у той мірі, у якій це забезпечує існування інтеграла (6.6) у невласному сенсі. Для цього достатньо, щоб

$$\operatorname{Re}(\nu,\sigma-\nu-\alpha)<1. \tag{6.7}$$

Інтеграл (6.6) можна записати у вигляді згортки Мелліна (6.1), якщо взяти

$$f(t)=\begin{cases} t^{1-\sigma} q_n^{\alpha,\beta}(t), & 0\le t\le 1, \\ 0, & t>1; \end{cases}$$

$$g(t)=\frac{\varepsilon_1 \operatorname{sgn}(1-t)+\varepsilon_2}{|1-t|^\nu}.$$

Трансформанта Мелліна (6.2) функції $f(t)$ рахується за допомогою формули 7.391 (4) з [3] та має подання

$$F(s)=\frac{[\beta]_n \Gamma(1+\alpha-\sigma-s)\Gamma(\sigma+n-s)}{\Gamma(\sigma-s)\Gamma(2+\alpha+\beta+n-\sigma+s)},\ [\beta]_n=\frac{\Gamma(\beta+n+1)}{n!}. \tag{6.8}$$

Для підрахунку трансформанти $G(s)$ шлях інтегрування у формулі (6.2) розбивається на два інтервали $(0;1)\cup(1;\infty)$, після чого використано формулу 3.191 з [3]. Як результат, отримаємо:

$$G(s)=\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\Gamma(1-\nu)\Gamma(s)}{\Gamma(1-\nu+s)}+\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\Gamma(1-\nu)\Gamma(\nu-s)}{\Gamma(1-s)}=$$

$$=\Gamma(s)\Gamma(\nu-s)G_*(s),$$

де $$G_*(s)=\left[\Gamma(\nu)\sin\pi\nu\right]^{-1}\left[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\sin\pi(\nu-s)-(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\sin\pi s\right]. \tag{6.9}$$

Для того щоб виконувалася перша умова з (6.3), достатньо, щоб $\chi>\operatorname{Re}(\sigma-1-\alpha)$. Для виконання другої умови достатньо, щоб $0<\chi<\operatorname{Re}\nu$. Отже, з цього випливає, що умови теореми 6.1 виконано, якщо вибрати параметр χ наступним чином:

$$\max\{0, \operatorname{Re}(\sigma-1-\alpha)\} < \chi < \operatorname{Re} v \tag{6.10}$$

Оскільки умова $\operatorname{Re}(\sigma-1-\alpha) < \operatorname{Re} v$ забезпечується існуванням інтегралу (6.6) як невласного інтегралу, то якщо взяти $\operatorname{Re} v > 0$, можна вибрати таке значення параметру χ, щоби мало місце співвідношення (6.10).

З вищезазначеного на основі формули (6.4) інтеграл (6.6) з врахуванням зображення (6.9) має подання

$$J_n^-(t) = \frac{[\beta]_n}{2\pi i}\int_{\chi-i\infty}^{\chi+i\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha-\sigma+s)\Gamma(\sigma+n-s)\Gamma(s)\Gamma(v-s)}{\Gamma(\sigma-s)\Gamma(2+\beta+\beta-\sigma+n+s)} G_*(s) t^{-s} ds. \tag{6.11}$$

Для того, щоб цей інтеграл при $t<1$ можна було записати як суму залишків за полюсами, що лежать у півплощині $\operatorname{Re} s < \chi$, достатньо виконання умов леми Жордана. Щоб перевірити їх виконання, потрібно визначити поведінку підінтегральної функції у формулі (6.11) при великих значеннях $|s|$. При цьому зручно використати оцінку [1]

$$\left|\frac{\Gamma(s+a)}{\Gamma(s+b)}\right| \le B|s|^{\operatorname{Re}(a-b)} \quad (|\arg s| < \pi, 0 < B < \infty). \tag{6.12}$$

Якщо $s=-x\ (x>0)$, то оцінка (6.12) залишається вірною, якщо вважати, що $\operatorname{Im}(a,b)=0$ та виключити точки, що співпадають з полюсами Г-функцій.

Для спрощення аналізу припустимо, що параметри α, β, σ, v — дійсні, та використаємо співвідношення (6.9) та (6.12). Впевнемося, що підінтегральний вираз у формулі (6.11) без врахування множника t^{-s}, який запишемо через подання $t^{-s} = \exp\left(s\ln\frac{1}{t}\right)$, при великих значеннях $|s|$ має асимптотику $O\left(s^{-2-\beta+v}\right)$. Таким чином, якщо $\operatorname{Re}\nu < 1$, $\operatorname{Re}\beta > -1$, то умови леми Жордана буде виконано. Підінтегральна функція у поданні (6.11) має при $\operatorname{Re} s < \chi$ дві серії однократних полюсів у точках $s=-j, s=\sigma-1-\alpha-j \quad (j=0,1,...)$. Візьмемо до уваги, що

$$\operatorname*{Res}_{s=-j}\Gamma(s) = \frac{(-1)^j}{j!}.$$

Замість формули (6.11) матимемо:

$$\frac{J_n^-(t)}{[\beta]_n} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!}\left[\frac{\Gamma(v+j)\Gamma(\sigma+n+j)\Gamma(1+\alpha-\sigma-j)G_*(-j)}{\Gamma(\sigma+j)\Gamma(2+\alpha+\beta-\sigma+n-j)}t^j + \right.$$

$$+\frac{\Gamma(\sigma-1-\alpha-j)\Gamma(1+\alpha+n+j)\Gamma(\nu-\sigma+1+\alpha+j)}{\Gamma(1+\alpha+j)\Gamma(1+\beta+n-j)t^{\sigma-1-\alpha-j}}G_*(\sigma-1-\alpha-j)\Bigg].$$

Зробимо перехід до узагальненої гіпергеометричної функції та остаточно запишемо:

$$J_n^-(t)=\frac{[\beta]_n(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(\sigma)_n\Gamma(1+\alpha-\sigma)}{\Gamma(2+\alpha+\beta-\sigma+n)}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}\sigma+n,\nu,\sigma-1-\alpha-\beta-n\\ \sigma,\sigma-\alpha;t\end{matrix}\right)+$$

$$+\frac{\varepsilon_\nu(1+\alpha)_n}{n!}\frac{\Gamma(\sigma-1-\alpha)\Gamma(1+\alpha+\nu-\sigma)}{\Gamma(\nu)t^{\sigma-1-\alpha}}{}_3F_2\left(\begin{matrix}1+\alpha+n,1+\alpha+\nu-\sigma,-\beta-n\\ 1+\alpha,\ \ 2+\alpha-\sigma;\ \ t\end{matrix}\right);\quad (6.13)$$

$$\varepsilon_\nu=-\varepsilon_1\frac{\sin(\nu/2+\alpha-\sigma)\pi}{\sin\nu\pi/2}-\varepsilon_2\frac{\cos(\nu/2+\alpha-\sigma)\pi}{\cos\nu\pi/2},$$

(a_n) — це факторіальний символ, ${}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\\ \beta_1,\beta_2;x\end{matrix}\right)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_k(\alpha_2)_k(\alpha_3)_k}{(\beta_1)_k(\beta_2)_k}\frac{x^k}{k!}.$

Якщо взяти $t>1$, то інтеграл (6.11) можна також розвинути за залишками, але такими, що рахуються за полюсами, які лежать у півплощині $\mathrm{Re}\,s>\chi$. Як результат, маємо подання $(\gamma=1+\nu-\sigma)$

$$J_n^-(t)=\frac{[\beta]_n(-1)^n\Gamma(\gamma)(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\Gamma(\gamma+\alpha)}{\Gamma(\gamma-n)\Gamma(1+\alpha+\beta+n+\gamma)t^\nu}{}_3F_2\left(\begin{matrix}\nu, & \gamma, & \gamma+\alpha\\ 1+\alpha+\beta+\gamma+n,-\gamma-n; & & \dfrac{1}{t}\end{matrix}\right).\quad (6.14)$$

У відповідності до принципу аналітичного продовження формули (6.13), (6.14) можна вважати вірними і у тих випадках, коли обмеження на параметри, що були зроблені під час їх виведення, порушено (за винятком умови (6.7), яка забезпечує існування інтегралу (6.6) як невласного). Якщо у співвідношенні (6.6) $\varepsilon_2=0$, то можна припустити випадок $\nu=1$, оскільки інтеграл (6.6) у цьому випадку існує у сенсі головного значення за Коші. Якщо значення параметрів є такими, що інтеграл (6.6) є розбіжним і у сенсі невласного інтегралу, і у сенсі Коші, але вирази (6.13), (6.14) мають певні значення, то їх оголошують значеннями інтегралу (6.6) у регулярізованому (узагальненому) сенсі.

Розглянемо тепер деякі часткові випадки інтегралу (6.6). Нехай $\sigma=\nu$. Формула (6.13) у цьому випадку суттєво спрощується:

$$J_n^-(t)=[\beta]_n(\varepsilon_1+\varepsilon_2)E_n^{(\nu)}(t)-[\alpha]_n\varepsilon_\nu^-\sin\pi\nu F_n^{(\nu)}(t),\quad t<1,\qquad (6.15)$$

$$E_n^{(\nu)}(t)=\frac{(\nu)_n\Gamma(1+\alpha-\nu)}{\Gamma(2+\alpha+\beta+n-\nu)}F\begin{pmatrix}\nu+n, & \nu-1-\alpha-\beta-n\\ \nu-\alpha; & t\end{pmatrix},$$

$$F_n^{(\nu)}(t)=\frac{\Gamma(\nu-1-\alpha)}{\Gamma(\nu)\sin\pi\nu t^{\nu-1-\alpha}}F\begin{pmatrix}1+\alpha+n, & -\beta-n\\ 2+\alpha-\nu; & t\end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_\nu^{\pm}=\varepsilon_2\cos\pi(\nu/2-\alpha)\sec\pi\nu/2\pm\varepsilon_1\sin\pi(\nu/2-\alpha)\cos ec\nu\pi/2 .$$

Коли $\varepsilon_1=0, \varepsilon_2=1$ та $\varepsilon_1=1, \varepsilon_2=0$, з зображення (6.15) випливають наступні формули:

$$\int_0^1\frac{q_n^{\alpha,\beta}(\tau)}{|\tau-t|^\nu}d\tau=[\beta]_n E_n^{(\nu)}(t)-\frac{[\alpha]_n 2\sin\nu\pi/2}{\sec\pi(\nu/2-\alpha)}F_n^{(\nu)}(t),$$

$$\int_0^1\frac{\operatorname{sgn}(\tau-t)}{|\tau-t|^\nu}q_n^{\alpha,\beta}(\tau)d\tau=[\beta]_n E_n^{(\nu)}(t)+[\alpha]_n\frac{2\cos\pi\nu/2}{\cos ec\pi(\nu/2-\alpha)}F_n^{(\nu)}(t).$$

У другій з цих отриманих формул візьмемо $\nu=0$. Матимемо співвідношення:

$$\int_0^1\operatorname{sgn}(\tau-t)q_n^{\alpha,\beta}(\tau)d\tau=\begin{cases}-\dfrac{2}{n}q_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(t), & n>0\\ B(\alpha+1,\beta+1)-\dfrac{2t^{\alpha+1}}{\alpha+1}F\begin{pmatrix}1+\alpha, & -\beta\\ 2+\alpha;t & \end{pmatrix}, & n=0.\end{cases}\qquad(6.16)$$

Якщо взяти $\nu=1$, отримаємо рівність

$$\int_0^1\frac{q_n^{\alpha,\beta}(\tau)}{\tau-t}d\tau=\frac{-\pi q_n^{\alpha,\beta}(t)}{tg\pi\alpha}+\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}F\begin{pmatrix}1+n, & -\alpha-\beta-n\\ 1-\alpha; & t\end{pmatrix}.\qquad(6.17)$$

Якщо у формулі (6.17) взяти $\alpha=\beta=-\dfrac{1}{2}$ та врахувати зв'язок полінома Якобі з функцією Гаусса [3]

$$n!P_n^{\alpha,\beta}(x)=(1+\alpha)_n F\left(-n,n+\alpha+\beta+1;\alpha+1;\frac{1-x}{2}\right),\qquad(6.18)$$

то отримаємо наступне важливе спектральне співвідношення:

$$\int_{-1}^1\frac{T_n(y)}{\sqrt{1-y^2}}\frac{dy}{y-x}=\pi U_{n-1}(x),\quad n=1,2,...$$

У випадку, коли у рівності (6.17) $\alpha=\beta=1/2$, отримаємо ще одне спектральне співвідношення —

$$\int_{-1}^{1}\frac{U_{n-1}(y)\sqrt{1-y^2}}{y-x}dy=-\pi T_n(x),\quad n=1,2,\ldots$$

Візьмемо $\alpha=\frac{1}{2},\beta=-\frac{1}{2}$ і також підставимо у (6.18). Це приведе до спектрального співвідношення

$$\int_0^1\sqrt{\frac{\tau}{1-\tau}}\frac{P_n^{1/2,-1/2}(1-2\tau)}{\tau-t}d\tau=\pi P_n^{-1/2,1/2}(1-2t). \tag{6.19}$$

6.2. ІНТЕГРАЛИ З СУМАЦІЙНИМ СТУПЕНЕВИМ ЯДРОМ

Інтеграли з сумаційними ступеневими ядрами — це інтеграли наступної структури:

$$J_n^+(t)=\int_0^1\frac{\tau^{v-\sigma}q_n^{\alpha,\beta}(\tau)}{(\tau+t)^v}d\tau \tag{6.20}$$

Рахують інтеграли (6.20) за схемою попереднього пункту 1, де потрібно за $g(x)$ взяти $g(x)=(1+x)^{-v}$ та врахувати, що на основі формули 3.241 (4) з [3] маємо в позначеннях теореми 6.1

$$G(s)=\frac{\Gamma(s)\Gamma(v-s)}{\Gamma(v)}=\frac{\pi\Gamma(v-s)}{\sin\pi s\Gamma(1-s)\Gamma(v)}. \tag{6.21}$$

Застосуємо теорему 6.1 та візьмемо до уваги співвідношення (6.8) та (6.21). Це приводить до подання інтегралу у вигляді

$$J_n^+(t)=\frac{[\beta]_n}{2\pi i}\int_{\chi-i\infty}^{\chi+i\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha-\sigma+s)(\sigma-s)_n\Gamma(s)\Gamma(v-s)t^{-s}}{\Gamma(v)\Gamma(2+\alpha+\beta-\sigma+n+s)}ds\,.$$

Значення параметру χ визначається з співвідношення (6.10). Остаточно матимемо:

$$J_n^+(t)=\frac{\Gamma(\beta+n+1)(\sigma)_n\Gamma(1+\alpha-\sigma)}{n!\Gamma(2+\alpha+\beta-\sigma+n)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}v, & \sigma+n, & \sigma-1-\alpha-\beta-n\\ \sigma, & \sigma-\alpha; & -t\end{matrix}\right)+$$

$$+\frac{(1+\alpha)_n\Gamma(\sigma-1-\alpha)\Gamma(1+\alpha+v-\sigma)}{n!\Gamma(v)t^{-1-\alpha+\sigma}}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}1+\alpha+n, & 1+\alpha+v-\sigma, & -\beta-n\\ 1+\alpha, & 2+\alpha-\sigma; & -t\end{matrix}\right). \tag{6.22}$$

6.3. ПОДВІЙНІ ІНТЕГРАЛИ З КЛАСИЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ

Розглянемо інтеграли вигляду

$$J_{mn} = \int_0^1\int_0^1 k(\tau,t) q_m^{a,b}(t) q_n^{\alpha,\beta}(\tau) dt d\tau \tag{6.23}$$

для випадку, коли функцію $k(\tau,t)$ можна зобразити у формі

$$k(\tau,t) = t^{\mu}\tau^{-\sigma} g\left(\frac{t}{\tau}\right). \tag{6.24}$$

Метод обрахування інтегралів типу (6.23) базується на теоремі.

Теорема 6.2. *Якщо для деякої функції* $h(t)$ *має місце співвідношення (6.5) та, крім того, виконується*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| Q(1-\chi-it) \right| dt < \infty ,$$

то є вірною формула $\int_0^{\infty} q(t)h(t)dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\chi-i\infty}^{\chi+i\infty} Q(1-s)H(s)ds$, де $Q(s), H(s)$ — *це трансформанти Мелліна, тобто*

$$\left[Q(s), H(s)\right] = \int_0^{\infty} \left[q(t), h(t)\right] t^{s-1} dt .$$

Доведення цієї теореми можна знайти у [16].

Враховуючи подання ядра $k(\tau,t)$ (6.24), зобразимо інтеграл (6.23) як

$$J_{mn} = \int_0^1 t^{\mu} q_m^{a,b}(t) h(t) dt , \tag{6.25}$$

$$h(t) = \int_0^1 \tau^{-\sigma+1} q_n^{\alpha,\beta}(\tau) g\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau} . \tag{6.26}$$

Для того, щоби обчислити трансформанту Мелліна функції $h(t)$, використаємо теорему 6.1, а для обчислення $Q(s)$ використаємо формулу (6.8), коли $\sigma = 1-\mu, \alpha = a, \beta = b$. Як результат, замість співвідношення (6.25) маємо

$$\frac{J_{mn}}{[\beta]_n} = \frac{[b]_m}{2\pi i}\int_{\chi-i\infty}^{\chi+i\infty} \frac{G(s)\Gamma(1+a+\mu-s)\Gamma(m-\mu+s)\Gamma(1+\alpha-\sigma+s)}{\Gamma(2+a+b+m+\mu-s)\Gamma(2+\alpha+\beta+n-\sigma+s)} \times$$

$$\times\frac{\Gamma(\sigma+n-s)}{\Gamma(s-\mu)\Gamma(\sigma-s)}ds, \quad [b]_m=\frac{\Gamma(1+m+b)}{m!}. \tag{6.27}$$

Наприклад, для інтеграла

$$J_{mn}^{+}=\int_0^1\int_0^1\frac{q_m^{a,b}(t)q_n^{\alpha,\beta}(\tau)}{(\tau+t)^{\nu}t^{-\mu}\tau^{\sigma-\nu}}dtd\tau \tag{6.28}$$

роль функції $g(x)$ у формулі (6.26) виконує функція $g(x)=(1+x)^{-\nu}$, трансформанта Мелліна якої визначена у (6.21). Проведемо аналіз, аналогічний тому, що був проведений під час виведення співвідношення (6.10). Він показує, що умови теорем 6.1 та 6.2 буде виконано, якщо

$$b>0, \max\{0,\sigma-1-\alpha\}<\chi<\min\{\nu,\mu+a+1\}.$$

Для того, щоби зробити розвинення інтеграла (6.28) за залишками, достатньо показати, що інтеграл по колу радіуса R з тією самою підінтегральною функцією, що і у формулі (6.27), прямує до нуля, коли радіус кола прямує до нескінченності $R\to\infty$. Можна впевнитися, що це буде виконано, якщо буде мати місце умова $2-\nu+b+\beta>0$. Після розвинення інтегралу (6.27) за залишками у полюсах, що лежать у півплощині $\mathrm{Re}\,s<\chi$, замість (6.28) матимемо

$$\frac{J_{mn}^{+}}{[\beta]_n[b]_m}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!}\left[\frac{\Gamma(\nu+j)\Gamma(1+\alpha-\sigma-j)\Gamma(1+a+\mu+j)(-j-\mu)_m}{\Gamma(2+\alpha+\beta+n-\sigma-j)\Gamma(2+a+b+\mu+m+j)}(\sigma+j)_n+\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma(\sigma-\alpha-1-j)\Gamma(\alpha+\nu-\sigma+1+j)\Gamma(2+a+\alpha+\mu-\sigma+j)(\sigma-\alpha-\mu-j-1)_m}{\Gamma(3+\alpha+a+b+\mu-\sigma+m+j)\Gamma(1+\beta+n-j)\left[(\alpha+1+j)_n\right]^{-1}}\right].$$

6.4. МЕТОД ГАУССА ОБЧИСЛЕННЯ ПОДВІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ

У матеріалі цього параграфу викладається схема застосування формул Гаусса під час обчислення подвійних інтегралів. Всі теоретичні обґрунтування та теореми стосовно цієї теми наведено у монографії В. І. Крилова «Приближенное вычисление интегралов».

Формула Гаусса належить до перших формул, що обчислюють інтеграли з найвищим ступенем точності. Вона використовується для обчислення інтегралів вигляду

$$\int_a^b f(x)dx\,, \tag{6.29}$$

що обчислюються на скінченому проміжку $[a;b]$.

Лінійним перетворенням $t = \dfrac{2x-(b+a)}{b-a}$ відрізок $[a;b]$ завжди можна звести до відрізку $[-1;1]$, тому будемо вважати, що рахуватиме інтеграл

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx. \tag{6.30}$$

Ортогональну систему поліномів з постійною вагою на $[-1;1]$ утворюють поліноми Лежандра

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n\left(x^2-1\right)^n}{dx^n}\,.$$

Для побудови квадратурної формули з n вузлами

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k^{(n)} f\left(x_k^{(n)}\right), \tag{6.31}$$

яка має найвищий ступінь точності $2n-1$, потрібно взяти вузли у коренях полінома Лежандра ступеню n:

$$P_n\left(x_k^{(n)}\right) = 0\,.$$

Коефіцієнти $\mathrm{A}_k^{(n)}$ формули (6.31) мають подання [6]

$$\mathrm{A}_k^{(n)} = \frac{2}{nP_{n-1}\left(x_k^{(n)}\right)P_n'\left(x_k^{(n)}\right)} \tag{6.32}$$

або

$$\mathrm{A}_k^{(n)} = \frac{2}{\left[1-\left(x_k^{(n)}\right)^2\right]\left[P_n'\left(x_k^{(n)}\right)\right]^2}. \tag{6.33}$$

6.5. ІНТЕГРАЛИ ВИГЛЯДУ $\int_a^b (b-x)^{\alpha}(x-a)^{\beta} f(x)dx$ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО ОБЧИСЛЕННЯ КРАТНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Будемо вважати, що лінійним перетворенням $x=\frac{(a+b)}{2}+t\frac{(b-a)}{2}$ вихідні інтеграли зведено до проміжку $[-1;1]$

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} f(x)dx, \quad \alpha>-1, \quad \beta>-1. \tag{6.34}$$

Ортогональною системою поліномів на $[-1,1]$, що відповідає вагової функції $p(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ є система поліномів Якобі $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,(n=0,1,2,\ldots)$.

Для побудови квадратурної формули з n вузлами

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n}\mathrm{A}_k f(x_k), \tag{6.35}$$

що має найвищий ступінь точності $2n-1$, будемо брати її вузли x_k як корені поліному Якобі ступеню n

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x_k)=0\,, \tag{6.36}$$

де коефіцієнти A_k підраховуються за формулами (6.32), (6.33).

Розглянемо часткові випадки квадратурних формул з якобієвою вагою

1) Якщо $\alpha=\beta=-1/2$ та вагова функція є $p(x)=\left(1-x^2\right)^{-1/2}$, то відповідні поліноми Якобі будуть на сталу відрізнятися від поліномів Чебишова першого роду

$$P_n^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(x)=C_nT_n(x)=C_n\cos(n\arccos x)$$

Корені T_n, що є вузлами квадратурної формули, мають значення

$$x_k=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi \quad (k=1,2,\ldots,n),$$

а коефіцієнти

$$\mathrm{A}_k=2^n\frac{\Gamma^2(n+1/2)}{n!\,\Gamma(n)C_n^2n^2}.$$

Отже, квадратурна формула найвищого ступеню точності з вагою $p(x)=\left(1-x^2\right)^{-1/2}$ має вигляд

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)+R(f), \tag{6.37}$$

де залишок $R(f)=\dfrac{\pi}{2^{2n-1}}\dfrac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!},\quad -1<\eta<1$.

2) Якщо $\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}$ та вагова функція $p(x)=\sqrt{1-x^2}$, то відповідні поліноми Якобі будуть на сталу відрізнятися від поліномів Чебишова другого роду

$$P_n^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(x)=\frac{(2n+1)!}{2^{2n}n!(n+1)!}U_n(x).$$

Корені U_n, що є вузлами квадратурної формули, мають значення

$$x_k=\cos\frac{k\pi}{n+1}\quad (k=1,2,...,n),$$

а коефіцієнти

$$\mathrm{A}_k=\frac{\pi}{n+1}\sin^2\frac{k\pi}{n+1}.$$

Отже, квадратурна формула має вигляд

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}f(x)dx=\frac{\pi}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\pi}{n+1}f\left(\cos\frac{k\pi}{n+1}\right)+R(f), \tag{6.38}$$

де залишок

$$R(f)=\frac{\pi}{2^{2n}}\frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!},\quad -1<\eta<1.$$

3) Якщо $\alpha=\dfrac{1}{2},\beta=-\dfrac{1}{2}$ та вагова функція $p(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, то за правилом найвищого ступеню точності отримаємо подання:

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}f(x)dx=\frac{4\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}f\left(\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right)+R(f), \tag{6.39}$$

де залишок $R(f)=\dfrac{\pi}{2^{2n}(2n)!}f^{(2n)}(\eta), -1<\eta<1$.

4) Якщо $a=0,\ b=1,\ \alpha=0,\ \beta=\frac{1}{2}$, то вагова функція $p(x)=\sqrt{x}$. То правило підрахунку буде наступним:

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k f(x_k) + R(f), \tag{6.40}$$

де x_k є квадратами додатніх коренів y_k полінома Лежандра $P_{2n+1}(y)$:

$$x_k = y_k^2,$$

а коефіцієнти

$$\mathrm{A}_k = 2y_k^2 \int_{-1}^{1} \frac{P_{2n+1}(y)}{(y-y_k)P_{2n+1}(y_k)} dy.$$

Остаточний член має вигляд

$$R(f) = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \frac{2}{4n+3} \left\{ \frac{2^{2n+1}\left[(2n+1)!\right]^2}{(4n+2)!} \right\}^2, \quad 0<\eta<1.$$

Розглянемо тепер метод підрахунку інтегралів по багатовимірним областям. За загальним підходом такий інтеграл зводять до декількох послідовно рахованих простих інтегралів. Кожний з останніх рахується за допомогою наближених формул. Пояснимо це на простих прикладах.

Нехай потрібно підрахувати подвійний інтеграл

$$\mathrm{I} = \iint_{\sigma} f(x,y) d\sigma,$$

де область інтегрування σ — це є прямокутник $a \le x \le b, c \le y \le d$. Інтеграл I можна привести до двох простих інтегралів

$$\mathrm{I} = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y) dy \right\} dx$$

Зробивши заміну інтеграла за змінною y квадратурною сумою з m вузлами y_i та коефіцієнтами B_i $\left(i=\overline{1,N}\right)$, а інтеграл за змінною x — квадратурною сумою з n вузлами x_j та коефіцієнтами A_j $\left(j=\overline{1,M}\right)$, отримаємо таке наближене подання вихідного інтегралу

$$\mathrm{I} \approx \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} \mathrm{A}_j \mathrm{B}_i f\left(x_j, y_i\right).$$

Більш докладно питання підрахунку кратних інтегралів високого порядку викладено у [18], де можна ознайомитися також з багатьма прикладами.

§ 7. СИНГУЛЯРНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ (СІР) З НЕРУХОМОЮ ОСОБЛИВІСТЮ

Розглядаються рівняння вигляду

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{\tau - t} + S(\tau,t) + R(\tau,t) \right] \chi(\tau) d\tau = f(t), \quad 0 \le t \le 1 , \qquad (7.1)$$

де $R(\tau,t)$ — це регулярне ядро, $S(\tau,t)$ — сингулярне ядро, що має одну нерухому особливість у точці $\tau = t = 0$, яке можна подати у наступному вигляді:

$$S(\tau,t) = \frac{C_0 \tau^{n-1} + C_1 \tau^{n-2} t + \ldots + C_k \tau^{n-k-1} t^k + \ldots + C_{n-1} t^{n-1}}{d_0 \tau^n + d_1 \tau^{n-1} t + \ldots + d_k \tau^{n-k} t^k + \ldots + d_n t^n} .$$

Типовий приклад такого ядра є, наприклад, ядро [17]

$$S(\tau,t) = \frac{\theta_1}{\tau + t} - \frac{b_1 \tau (\tau - t)}{(\tau + t)^3} . \qquad (7.2)$$

7.1. ЗВЕДЕННЯ СІР З НЕРУХОМОЮ ОСОБЛИВІСТЮ ДО НЕСКІНЧЕННОЇ АЛГЕБРАЇЧНОЇ СИСТЕМИ 1-го РОДУ

Наявність функції $S(\tau,t)$ у ядрі рівняння (7.1) змінює характер поведінки розв'язку при $t \to 0$. Поведінка розв'язку перестає бути кореневою. Найчастіше поведінка розв'язку зберігає ступеневий характер, тобто:

$$\chi(t) = O(t^\alpha), \quad t \to 0, \qquad (7.3)$$

хоча може вести себе і як ступенево-логарифмічна функція

$$\chi(t) = O(t^\alpha \ln^\beta t), \quad t \to 0 .$$

Обмежемося розглядом випадку (7.3). Розв'язок рівняння (7.1) розшукується у зображенні

$$\chi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n q_n^{\alpha,\beta}(t), \qquad (7.4)$$

де

$$q_n^{\alpha,\beta}(t) = t^{\alpha}(1-t)^{\beta} P_n^{\alpha,\beta}(1-2t),$$

де $\beta = -\dfrac{1}{2}$, якщо розв'язок є необмежений при $t \to 1$ та $\beta = \dfrac{1}{2}$ у випадку обмеженого розв'язку.

Підставимо співвідношення (7.4) до співвідношення (7.1) та проінтегруємо з вагою $q_m^{a,b}(t)$ на відрізку $[0;1]$. Як результат, отримаємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь 1-го роду:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(I_{mn} + S_{mn} + R_{mn})X_n = f_m \quad (m = 0,1,...) \tag{7.5}$$

Тут

$$(I_{mn}S_{mn}, R_{mn}) = \int_0^1\int_0^1 \left[\frac{1}{\tau - t}, S(\tau,t), R(\tau,t)\right] \times$$

$$\times q_m^{a,b}(t) q_n^{\alpha,\beta}(\tau) dt d\tau; \quad f_m = \int_0^1 q_m^{a,b}(t) f(t) dt .$$

Параметри a та b вибираються з міркувань простоти обрахування інтегралів I_{mn}, S_{mn}, R_{mn} та f_m.

Методи обрахування інтегралів I_{mn} та S_{mn} розглянуто у § 6 (п. 3), а інтегралів R_{mn} та f_m — розглянуто у п. 5 цього параграфу (обчислення проводиться за допомогою квадратурних формул для інтегралів з поліномами Якобі (7.14)).

У випадку, коли відомо, що рівняння (7.1) є розв'язуваним з точністю до довільної сталої та потрібно відшукати розв'язок, який задовольняє умову

$$\int_0^1 \chi(\tau) d\tau = X , \tag{7.6}$$

де X є задана величина, то можна обидві частини рівняння (7.1) проінтегрувати, а потім звести отриману рівність до системи типу (7.5), після чого підібрати сталу інтегрування з умови (7.6).

7.2. ВИЗНАЧЕННЯ ОСОБЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ

Суттєвим моментом під час розв'язання рівняння (7.1) за допомогою методу ортогональних поліномів є визначення поведінки функції $\chi(t)$, коли $t \to 0$, тобто вибір параметру α. Його має бути вибрано з умови однаковості поведінки лівої та правої частини рівняння (7.1), коли $t \to 0$.

Проілюструємо методику вибору параметру α на прикладі рівняння (7.1) з ядром (7.2). Підставимо розвинення (7.4) до рівняння (7.1), після чого отримаємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n \left[J_n^-(t) + a_1 J_n^{1,1}(t) - b_1 J_n^{3,1}(t) + b_1 t J_n^{3,2}(t) + R_n(t) \right] = f(t), \quad 0 \le t \le 1 .$$

Тут

$$J_n^-(t) = \int_0^1 \frac{q_n^{\alpha,\beta}(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad J_n^{\nu,\sigma} = \int_0^1 \frac{\tau^{\nu-\sigma} q_n^{\alpha,\beta}(\tau)}{(\tau + t)^{\nu}} d\tau, \quad R_n(t) = \int_0^1 q_n^{\alpha,\beta}(\tau) R(\tau, t) d\tau .$$

Візьмемо до уваги формули (6.17), (6.18) та (6.22) та отримаємо співвідношення, коли $t \to 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n \frac{(1+\alpha)_n}{n!} \left\{ -\pi ctg \pi\alpha t^{\alpha} - \frac{\pi t^{\alpha}}{\sin \pi\alpha} a_1 - -\frac{\Gamma(-\alpha)\Gamma(3+\alpha) t^{\alpha}}{2} b_1 + \right.$$
$$\left. + \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(2+\alpha) t^{\alpha}}{2} b_1 + R_n^0(t) \right\} = f(t), \tag{7.7}$$

де $R_n^0(t)$ — функція, яка обмежена, коли $t \to 0$.

Для того щоб усунути особливість t^{α}, необхідно зібрати коефіцієнти при t^{α} у всіх доданках, що входять до лівої частини рівності (7.7), та прирівняти до нуля. Як результат, отримано трансцендентне рівняння для визначення значень параметру α:

$$\frac{1}{\sin \pi\alpha} \left[\cos \pi\alpha + a_1 - b_1 (1+\alpha)^2 \right] = 0, \quad (-1 < \operatorname{Re}\alpha < 1/2).$$

7.3. ЗВЕДЕННЯ СІР З НЕРУХОМОЮ ОСОБЛИВІСТЮ ДО НЕСКІНЧЕННОЇ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ 2-ГО РОДУ

Розглянемо інший підхід до розв’язання рівняння (7.1), що приводить до розв’язання нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку можна розв’язати за допомогою методу редукції.

Нехай розв’язок рівняння (7.1) можна зобразити у вигляді

$$\chi(t)=\frac{At^{\alpha}}{\sqrt{1-t}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{X_n}{g_n}q_n^{1/2,-1/2}(t),\quad g_n=\frac{(1/2)_n}{n!}\,. \tag{7.8}$$

Застосуємо це подання та спектральне співвідношення (6.19). За схемою методу ортогональних поліномів, замість сингулярного інтегрального рівняння (7.1) отримаємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$A\frac{f_m^{(1)}}{g_m}+X_m+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S_{mn}+R_{mn}}{g_n g_m}X_n=\frac{f_m^{(0)}}{g_m},\quad (m=0,1,...) \tag{7.9}$$

де

$$\begin{pmatrix} S_{mn} \\ R_{mn} \end{pmatrix}=\frac{2}{\pi^2}\int_0^1\int_0^1\begin{pmatrix} S(\tau,t) \\ R(\tau,t) \end{pmatrix}q_m^{-1/2,1/2}(t)q_n^{1/2,-1/2}(\tau)dtd\tau\,,$$

$$\begin{pmatrix} f_m^{(0)} \\ f_m^{(1)} \end{pmatrix}=\frac{2}{\pi^2}\int_0^1\begin{pmatrix} f(t) \\ \sigma(t)+\rho(t) \end{pmatrix}q_m^{-1/2,1/2}(t)dt,$$

$$\begin{pmatrix} \sigma(t) \\ \rho(t) \end{pmatrix}=\int_0^1\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\tau-t}+S(\tau,t) \\ R(\tau,t) \end{pmatrix}\frac{\tau^{\alpha}d\tau}{\sqrt{1-\tau}}\,.$$

Тут $\sigma(t)$ рахується за методом, що викладено у § 6, а інтеграли $S_{mn}, R_{mn}, f_m^{(0)}, f_m^{(1)}$ рахуються за допомогою квадратурної формули (7.14) для інтегралу вигляду (7.11) (дивись п. 5 цього параграфу).

Зобразимо коефіцієнти X_n у вигляді

$$X_n=X_n^{(0)}-AX_n^{(1)}\,, \tag{7.10}$$

та підставимо це подання до системи (7.9). З цього отримаємо нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь 2-го роду для визначення коефіцієнтів $X_n^{(i)}\ (i=0,1)$

$$X_m^{(i)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_{mn} + R_{mn}}{g_n g_m} X_n^{(i)} = \frac{f_m^{(i)}}{g_m} \quad (i = 0,1;\, m = 0,1,\ldots).$$

Рівняння для визначення сталої A отримаємо, якщо зображення (7.8) підставимо до умови (7.5), враховуючи подання розв'язку (7.10).

7.4. МЕТОД КОЛОКАЦІЙ

Розглянемо ще один підхід до наближенного розв'язання сингулярного інтегрального рівняння (7.1). Розв'язок рівняння розшукуватиме у вигляді (7.4) або у вигляді (7.8) у випадку обмеження на розв'язок рівняння (7.6). При цьому припустимо, що у рядах, які входять до співвідношень (7.4), (7.8), маємо залишити скінчене число доданків — $N+1$.

Для визначення коефіцієнтів X_m потрібно підставити зазначені вирази до рівняння (7.1) та прирівняти його ліву частину до правої у окремих точках (вузлах колокації). За вузли колокації можна взяти або рівновіддалені точки, або корені поліномів Чебишова $t = t_m$ з відрізку $[0,1]$. Як результат, у випадку використання зображення (7.4) матимемо скінчену систему алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[J_n^{\alpha,\beta}(t_m) + S_n^{\alpha,\beta}(t_m) + R_n^{\alpha,\beta}(t_m) \right] X_n = f(t_m), \quad m = 0,1,\ldots,N,$$

$$\begin{pmatrix} J_n^{\alpha,\beta}(t) \\ S_n^{\alpha,\beta}(t) \\ R_n^{\alpha,\beta}(t) \end{pmatrix} = \int_0^1 \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\tau - t} \\ S(\tau,t) \\ R(\tau,t) \end{pmatrix} q_n^{\alpha,\beta}(\tau) d\tau .$$

Інтеграли $J_n^{\alpha,\beta}(t)$ та $S_n^{\alpha,\beta}(t)$ рахуються методом § 6, а інтеграли $R_n^{\alpha,\beta}(t)$ — за формулою (7.14) (див. п. 5 цього параграфу).

7.5. КВАДРАТУРНІ ФОРМУЛИ ДЛЯ РАХУВАННЯ ІНТЕГРАЛІВ З ПОЛІНОМАМИ ЯКОБІ

Отримаємо квадратурні формули для інтегралів

$$I_m = \int_0^1 f(t) q_m^{\alpha,\beta}(t) dt \,, \tag{7.11}$$

де не потрібно знати нулі поліномів Якобі та враховувати осциляції підінтегральної функції $f(t) q_m^{\alpha,\beta}(t)$.

Розіб'ємо інтервал інтегрування у інтегралі (7.11) на N рівних частин довжиною $\dfrac{1}{N}$:

$$\left[t_j, t_{j+1}\right] \quad (j = 0,1,\ldots,N-1), \quad t_0 = 0, \quad t_N = 1 \,.$$

Будемо вважати, що на кожному сегменті $\left[t_j, t_{j+1}\right]$ функція $f(t)$ є сталою та дорівнює $f(t_j)$, що приведе до наступного наближеного значення інтегралу (7.11)

$$I_m^- = \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) \int_{t_j}^{t_{j+1}} q_m^{\alpha,\beta}(t) dt. \tag{7.12}$$

За друге наближене значення цього же самого інтегралу візьмемо

$$I_m^+ = \sum_{j=1}^{N} f(t_j) \int_{t_{j-1}}^{t_j} q_m^{\alpha,\beta}(t) dt. \tag{7.13}$$

Використаємо далі таке позначення:

$$P_{nj}^{\alpha,\beta}(t) = t^{\alpha+j} (1-t)^{\beta+j} P_{n-j}^{\alpha+j,\beta+j}(1-2t), \quad n, j = 0,1,\ldots$$

Рахуючи інтеграли (7.12) та (7.13) за допомогою співвідношення (6.16), приходимо до квадратурної формули

$$I_m = \frac{I_m^- + I_m^+}{2} = \sum_{k=0}^{N} f(t_k) \frac{P_{m1}^{\alpha,\beta}(t_{k+1}) - P_{m1}^{\alpha,\beta}(t_{k-1})}{m}, \tag{7.14}$$

де $t_{-1} = t_0 = 0, \quad t_{N+1} = t_N = 1$.

Якщо $m = 0$, то маємо вважати

$$\left[m^{-1} P_{m1}^{\alpha,\beta}(t)\right]_{m=0} = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} F(-\beta, \alpha+1; \alpha+2; t).$$

З метою підрахунку функції Гаусса, коли значення t близькі до одиниці $(t \to 1)$, продовжимо її аналітично около точки $t = 1$ за допомогою формули 9.131 з [3].

Квадратурну формулу (7.14) можна уточнити, якщо вважати, що функція $f(t)$ на сегментах $\left[t_j, t_{j+1}\right]$ змінюється за лінійним законом. Зробивши відповідні розрахунки, остаточно отримаємо формулу для рахування I_m:

$$I_m = N\sum_{j=0}^{N-1} \frac{f(t_j) - f(t_{j+1})}{4m(m-1)}\left[P_{m2}^{\alpha,\beta}(t_{j+1}) - P_{m2}^{\alpha,\beta}(t_j)\right] + B(\alpha+1, \beta+1) f(1)\delta_{m0}.$$

Візьмемо до уваги наступні співвідношення:

$$\left.\left[\frac{P_{m2}^{\alpha,\beta}(t)}{4m(m-1)}\right]\right|_{m=0} = \frac{F(-\beta, \alpha+1; \alpha+3; t)}{(\alpha+1)(\alpha+2)t^{-\alpha-2}},$$

$$\left.\left[\frac{P_{m2}^{\alpha,\beta}}{m-1}\right]\right|_{m=1} = \frac{2}{\alpha+2} t^{\alpha+2} F(-\beta-1, \alpha+2; \alpha+3; t).$$

Таким чином, отримано зручні квадратурні формули для обчислення інтегралів з поліномами Якобі.

ДОДАТОК А.
ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ЧВЕРТІ ПЛОЩИНИ З ДЕФЕКТОМ

Як приклад застосування методу ортогональних поліномів розглянемо наступну задачу теплопровідності.

Нехай у чверті площини $(x,y>0)$ задане рівняння Лапласа $u''(x,y)+u^{\cdot\cdot}(x,y)=0 \quad (x\neq a)$ (тут штрих над буквою визначає похідну за змінною x, а точка — за змінною y). На одній границі площини — $x=0$ — заданою є температура, а на іншій — $y=0$ — є заданим тепловий потік. У точках площини $x=a, 0\leq y\leq 1$ розташовано дефект. Під останнім вважатимуться точки площини, під час переходу через які, терплять розриви неперервності першого роду з заданими стрибками шукані механічні характеристики (температура, тепловий потік): $u(a-0,y)-u(a+0,y)=\langle u(a,y)\rangle, \qquad u'(a-0,y)-u'(a+0,y)=\langle u'(a,y)\rangle$. Припускається, що береги тріщини є теплоізольовані.

Такій постановці відповідає наступна крайова задача:

$$\begin{cases} u''(x,y)+u^{\cdot\cdot}(x,y)=0, \quad x,y>0, \quad x\neq a \\ u(0,y)=f(y), \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=0, \quad u^{\cdot}(x,0)=0; \end{cases} \tag{1}$$

$$u'(a-0,y)=0, \quad 0\leq y\leq 1, \tag{2}$$
$$u'(a+0,y)=0, \quad 0\leq y\leq 1.$$

Розв'язок задачі будуватиметься як суперпозиція розв'язків неперервної - $\tilde{u}(x,y)$ та розривної — $u^{*}(x,y)$ задач. Для цього окремо зформулюємо неперервну задачу:

$$\begin{cases} \tilde{u}''(x,y)+\tilde{u}^{\cdot\cdot}(x,y)=0, \quad x,y>0, \\ \tilde{u}(0,y)=f(y), \quad \tilde{u}^{\cdot}(x,y)=0, \\ \lim\limits_{y\to\infty} f(y)=0. \end{cases} \tag{3}$$

Застосуємо до задачі (3) інтегральне sin-перетворення Фур'є:

$$\tilde{u}_\alpha(y) = \int_0^\infty \sin\alpha x \tilde{u}(x,y)dx \qquad (4)$$

взявши до уваги, що $\tilde{u}(x,y)\to 0, \tilde{u}'(x,y), \tilde{u}^{\cdot}(x,y)\to 0,$ коли $x,y\to\infty$.

Інтегральне перетворення першого доданку проводитиметься за схемою

$$\int_0^\infty \sin\alpha x \tilde{u}''(x,y)dx = \left[\tilde{u}'(x,y)\sin\alpha x\right]\Big|_0^\infty - \alpha\int_0^\infty \tilde{u}'(x,y)\cos\alpha x\, dx =$$

$$= -\alpha\left[\tilde{u}(x,y)\cos\alpha x\right]\Big|_0^\infty - \alpha^2\int_0^\infty \tilde{u}(x,y)\sin\alpha x\, dx = \alpha f(y) - \alpha^2\tilde{u}_\alpha(y).$$

З цього випливає задача у трансформантах:

$$\begin{cases} \tilde{u}''_\alpha(y) - \alpha^2\tilde{u}_\alpha(y) = -\alpha f(y), 0 < y < \infty \\ \widehat{u}'_\alpha(0) = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Подальше застосування інтегрального cos-перетворення Фур'є

$$\tilde{u}_{\alpha\beta} = \int_0^\infty \cos\beta y \tilde{u}_\alpha(y)dy \qquad (6)$$

до першого доданку у (5)

$$\int_0^\infty \tilde{u}''_\alpha(y)\cos\beta y dy = \left[\tilde{u}'_\alpha(y)\cos\beta y\right]\Big|_0^\infty - \beta\left[\tilde{u}_\alpha(y)\sin\beta y\right]\Big|_0^\infty - \beta^2\tilde{u}_{\alpha\beta}$$

приводить до подання розв'язку задачі у трансформантам

$$\tilde{u}_{\alpha\beta} = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\int_0^\infty f(\eta)\cos\beta\eta d\eta. \qquad (7)$$

Зображення (7) — це є розв'язок неперервної задачі у трансформантах (4), (6). Послідовно проведемо обернення розв'язку (7):

$$\tilde{u}_\alpha(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tilde{u}_{\alpha\beta}\cos\beta y d\beta = \int_0^\infty f(\eta)\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{2\alpha\cos\beta y\cos\beta\eta}{\alpha^2+\beta^2}d\beta d\eta =$$

$$= \int_0^\infty f(\eta)\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha\left(\cos\beta(y-\eta)+\cos\beta(y+\eta)\right)}{\alpha^2+\beta^2}d\beta d\eta = \frac{1}{2}\int_0^\infty f(\eta)\left[e^{-\alpha|y-\eta|}+e^{-\alpha(y+\eta)}\right]d\eta.$$

Тут використовано, що [3]

$$\int_0^\infty \frac{\cos\beta A}{\alpha^2+\beta^2}d\beta = \frac{\pi}{2\alpha}e^{-|A|\alpha}\ .$$

Після повернення до простору оригіналів розв'язок задачі набуває вигляду

$$\tilde{u}(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\alpha x\,\tilde{u}_\alpha(y)\,d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(\eta)\left[\int_0^\infty \sin\alpha x\,e^{-\alpha|y-\eta|}d\alpha + \int_0^\infty \sin\alpha x\,e^{-\alpha(y+\eta)}d\alpha\right]d\eta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(\eta)\left[\frac{x}{(y-\eta)^2+x^2} + \frac{x}{(y+\eta)^2+x^2}\right]d\eta\,, \qquad (8)$$

під час перетворень враховано, що [3]

$$\int_0^\infty \sin\alpha x\,e^{-\alpha\beta}d\alpha = \frac{x}{B^2+x^2}\ .$$

Тепер розглянемо розривну задачу, тобто врахуємо наявність дефекту — $x=a,\ 0\le y\le 1$.

У цьому випадку інтеграл $\int_0^\infty u''(x,y)\sin\alpha x\,dx$ не існує, оскільки не існує друга похідна $u''(x,y)$ на всьому проміжку $x\in(0;+\infty)$.Тому використаємо узагальнену схему інтегральних перетворень [12]. За цією схемою перетворення других похідних проводитиметься наступним чином:

$$\left(\int_0^{a-0}+\int_{a+0}^\infty\right)u''(x,y)\sin\alpha x\,dx = \left[u'(x,y)\sin\alpha x\right]_0^{a-0} + \left[u'(x,y)\sin\alpha x\right]_{a+0}^\infty -$$

$$-\left(\int_0^{a-0}+\int_{a+0}^\infty\right)\alpha\cos\alpha x\,u'(x,y)\,dx = \sin\alpha a\left[u'(a-0,y)-u'(a+0,y)\right]-$$

$$-\alpha\left\{\left[\cos\alpha x\,u(x,y)\right]_0^{a-0} + \left[\cos\alpha x\,u(x,y)\right]_{a+0}^\infty + \alpha\left(\int_0^{a-9}+\int_{a+0}^\infty\right)\sin\alpha x\,u(x,y)\,dx\right\} =$$

$$= \sin\alpha a\left\langle u'(a,y)\right\rangle - \alpha\cos\alpha a\left\langle u(a,y)\right\rangle - \alpha^2 u_\alpha(y);$$

$$\int_0^\infty u^{\cdot\cdot}(x,y)\sin\alpha x\,dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_0^\infty u(x,y)\sin\alpha x\,dx = u''_\alpha(y).$$

Рівняння крайової задачі (3) у просторі трансформант набуває вигляду

$$\begin{cases} u_\alpha''(y)-\alpha^2 u_\alpha(y)=-\alpha f(y)-\sin\alpha a\langle u'(a,y)\rangle+\alpha\cos\alpha a u(a,y),\ 0<y<\infty, \\ u_\alpha'(0)=0,\quad \langle u'(a,y)\rangle=0,\quad \langle u(a,y)\rangle=\chi(y), \end{cases} \tag{9}$$

де $\chi(y)\equiv 0, |y|>1$.

Гранична умова у (9) отримана наступною послідовністю дій:

$$\int_0^\infty \sin\alpha x \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\Bigg|_{y=0} dx = \left[\frac{\partial}{\partial y}\int_0^\infty u(x,y)\Bigg|_{y=0}^{\sin\alpha x} dx\right] = \frac{\partial}{\partial y}u_\alpha(y)\Bigg|_{y=0} = u_\alpha'(0).$$

За умовами задачі стрибок похідної температури на тріщині дорівнює нулю $\langle u'(a,y)\rangle=0$. Введемо позначення $\langle u(a,y)\rangle=\chi(y)$ та $g(y)=f(y)-\cos\alpha a\langle u(a,y)\rangle=f(y)-\cos\alpha a\chi(y)$.

Як раніше було показано,

$$u_\alpha(y)=\frac{1}{2}\int_0^\infty f(\eta)\left[e^{-\alpha|y-\eta|}+e^{-\alpha(y+\eta)}\right]d\eta,$$

візьмемо $f(\eta)=g(\eta)$ та отримаємо подання

$$u_\alpha(y)=\frac{1}{2}\int_0^\infty g(\eta)\left[e^{-\alpha|y-\eta|}+e^{-\alpha(y+\eta)}\right]d\eta. \tag{10}$$

Продовжимо функцію $g(\eta)$ парним чином $g(-\eta)=g(\eta)$ та розглянемо інтеграл

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty g(\eta)e^{-\alpha(y+\eta)}d\eta=\frac{1}{2}\int_0^\infty g(-\eta')e^{-\alpha|y-\eta'|}(-d\eta')=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 g(\eta')e^{-\alpha|y-\eta'|}d\eta'.$$

З урахуванням останньої рівності та подання функції $g(\eta)$ зображення розв'язку у трансформантах (10) перепишемо наступним чином:

$$u_\alpha(y)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty g(\eta)e^{-\alpha|y-\eta|}d\eta=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty f(\eta)e^{-\alpha|y-\eta|}d\eta+\frac{\cos\alpha a}{2}\int_{-1}^1\chi(\eta)e^{-\alpha|y-\eta|}d\eta. \tag{11}$$

До формули (11) застосуємо обернене sin-перетворення Фур'є

$$u(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\alpha x u_\alpha(y)d\alpha. \tag{12}$$

Візьмемо до уваги, що

$$2\sin\alpha x\cos\alpha a=\sin\alpha\left(x+a\right)+\sin\alpha\left(x-a\right),$$

а також відомий інтеграл [3]

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\alpha x e^{-\alpha|y-\eta|}d\alpha=\frac{x}{\pi\left(\left(y-\eta\right)^2+x^2\right)},$$

остаточно отримаємо розв'язок вихідної задачі (1), (2):

$$u\left(x,y\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f\left(\eta\right)}{x^2+\left(y-\eta\right)^2}d\eta+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\chi\left(\eta\right)\left[\frac{x-a}{\left(x-a\right)^2+\left(y-\eta\right)^2}+\frac{x+a}{\left(x+a\right)^2+\left(y-\eta\right)^2}\right]d\eta. \qquad (13)$$

Встановимо важливе співвідношення:

$$\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{1}{\sqrt{\left(x-a\right)^2+\left(y-\eta\right)^2}}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left\{-\frac{1}{2}\ln\left[\left(x-a\right)^2+\left(y-\eta\right)^2\right]\right\}=-\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{1}{\sqrt{\left(x-a\right)^2+\left(y-\eta\right)^2}}.$$

За рахунок цього співвідношення розв'язок (13) набуває вигляду

$$u\left(x,y\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+\left(y-\eta\right)^2}}f\left(\eta\right)d\eta+\right.$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\chi\left(\eta\right)\left[\ln\frac{1}{\sqrt{\left(x-a\right)^2+\left(y-\eta\right)^2}}+\right.$$

$$\left.\left.+\ln\frac{1}{\sqrt{\left(x+a\right)^2+\left(y-\eta\right)^2}}\right]d\eta\right\}=-\frac{\partial}{\partial x}V\left(x,y\right), \qquad (14)$$

де

$$V\left(x,y\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+\left(y-\eta\right)^2}}f\left(\eta\right)d\eta+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\chi\left(\eta\right)\left[\ln\frac{1}{\sqrt{\left(x-a\right)^2+\left(y-\eta\right)^2}}+\right.$$

$$+\ln\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+(y-\eta)^2}}\Bigg]d\eta\,.$$

Фактично, функція $V(x,y)$ є потенціалом простого шару $\left(V(x)=\int\limits_{l}p(y)\ln\frac{1}{|x-y|}dly\right)$, для якого має місце рівність $\frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial y^2}=0$, звідки випливає, що

$$-\frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial y^2}\;.$$

Щоби задовольнити крайову умову на тріщині (2), продиференцюємо рівність (14) та отримаємо подання похідної

$$u'(x,y)=-\frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial y^2}\,, \tag{15}$$

або

$$u'(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+(y-\eta)^2}}f(\eta)d\eta+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\chi(\eta)\left[\ln\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-\eta)^2}}+\ln\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+(y-\eta)^2}}\right]d\eta\right\}.$$

Задовольнимо умову (2) на одному з берегів тріщини $u'(a-0,y)=0,\quad |y|\le 1$.

З урахуванням зображення похідної (15) отримаємо рівність

$$u'(a-0,y)=\frac{d^2}{dy^2}\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ln\frac{1}{\sqrt{a^2+(y-\eta)^2}}f(\eta)d\eta+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\chi(\eta)\left[\ln\frac{1}{|y-\eta|}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\ln\frac{1}{\sqrt{4a^2+(y-\eta)^2}}\right]dy\right\}=0,\quad |y|\le 1\,. \tag{16}$$

Помножимо обидві частини рівності (16) на 2π та введемо позначення

$$F(y) = -2\frac{d^2}{dy^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\frac{1}{\sqrt{a^2+(y-\eta)^2}}f(\eta)d\eta; .$$

$$R(y,\eta) = \frac{d^2}{dy^2}\ln\frac{1}{\sqrt{4a^2+(y-\eta)^2}} . \quad (17)$$

За їх допомогою запишемо інтегральне рівняння відносно невідомого стрибка температури $\chi(\eta)$:

$$\frac{d^2}{dy^2}\int_{-1}^{1}\chi(\eta)\ln\frac{1}{|y-\eta|}d\eta + \int_{-1}^{1}R(y,\eta)\chi(\eta)d\eta = F(y), \quad |y| \le 1. \quad (18)$$

Це рівняння розв'язуватиметься за допомогою методу ортогональних поліномів. Невідому функцію стрибка розшукуватиме як розвинення у ряд

$$\chi(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty}\chi_n\sqrt{1-\eta^2}U_n(\eta) \quad (19)$$

за невідомими коефіцієнтами χ_n; $U_n(\eta)$ — це поліноми Чебишова другого роду

$$U_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \quad n = 0,1,2,...,$$

які є ортогональними на проміжку $\eta \in [-1;1]$:

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\eta^2}U_n(\eta)U_m(\eta)d\eta = \frac{\pi}{2}\delta_{nm}. \quad (20)$$

Підставимо зображення (19) до інтегрального рівняння (18):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\chi_n\frac{d^2}{dy^2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\eta^2}U_n(\eta)\ln\frac{1}{|y-\eta|}d\eta +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\chi_n\int_{-1}^{1}R(y,\eta)\sqrt{1-\eta^2}U_n(\eta)d\eta = F(y), \quad |y| \le 1. \quad (21)$$

Подальше використання спектрального співвідношення [11]

$$\frac{d^2}{dy^2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\eta^2}U_n(\eta)\ln\frac{1}{|y-\eta|}d\eta = -\pi(n+1)U_n(y), \quad |y| \le 1, \quad n = 0,1,2,... \quad (22)$$

зводить рівняння (21) до вигляду

$$-\pi\sum_{n=0}^{\infty}\chi_n(n+1)U_n(y)+\sum_{n=0}^{\infty}\chi_n\int_{-1}^{1}R(y,\eta)\sqrt{1-\eta^2}U_n(\eta)d\eta=F(y),$$
$$\|y\|\le 1,\quad n=0,1,2,... \tag{23}$$

Помножимо обидві частини рівняння (23) на $U_m(y)\sqrt{1-y^2}$ та проінтегруємо за змінною y на проміжку $y\in[-1;1]$:

$$-\pi\sum_{n=0}^{\infty}\chi_n(n+1)\frac{\pi}{2}\delta_{nm}+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\chi_n\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}U_m(y)\left(\int_{-1}^{1}R(y,\eta)\sqrt{1-\eta^2}U_n(\eta)d\eta\right)dy=$$
$$=\int_{-1}^{1}F(y)\sqrt{1-y^2}U_m(y)dy,\quad m=0,1,2,..., \tag{24}$$

де δ_{nm} — символ Кронекера. З цього випливає нескінченна система лінійних алгебраїчних рівнянь (НСЛАР):

$$-\frac{\pi^2}{2}\chi_m(m+1)+\sum_{n=0}^{\infty}\chi_n R_{nm}=F_m,\quad m=0,1,2,... \tag{25}$$

Тут
$$R_{nm}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-\eta^2}U_n(\eta)U_m(y)R(y,\eta)dyd\eta, \tag{26}$$
$$F_m=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}U_m(y)F(y)dy\,.$$

Інтеграли (26) зручно підрахувати, використовуючи квадратурну формулу Гаусса, застосування якої у такому випадку наведено у § 6.

Розв'язуємо НСЛАР (26) за допомогою методу редукції. Попередньо регулярізуємо систему, для чого помножимо обидві частини рівності на $-\dfrac{2}{\pi^2(m+1)}$:

$$\chi_m^{(N)}+\sum_{n=0}^{N}a_{mn}\chi_n^{(N)}=f_m,\quad m=0,1,2,...,N \tag{27}$$
$$a_{mn}=-\frac{2R_{nm}}{\pi^2(m+1)},\quad f_m=-\frac{2F_m}{\pi^2(m+1)},\quad \chi_m^{(N)}=\lim_{N\to\infty}x_m^{(N)}\,.$$

Як було показано раніше у § 5, щоби довести збіжність методу редукції, потрібно довести регулярність НСЛАР (25), для чого потрібно довести збіжність рядів

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R_{mn}^2}{(m+1)^2},\quad \sum_{m=0}^{\infty}\frac{F_m^2}{(m+1)^2}.$$

Ця задача є прикладом наочного застосування методу ортогональних поліномів для розв'язання багатьох задач математичної фізики.

ДОДАТОК Б.
ЗАДАЧА КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ СКІНЧЕНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ТРІЩИНИ

Розглянемо приклад застосування методу ортогональних поліномів під час розв'язання задач теорії пружності, а саме — задачі концентрації напружень в околі циліндричної тріщини, яка розміщена у пружному середовищі.

1. Постанова задачі. Необмежене пружне середовище $(0<r<\infty, -\pi<\varphi<\pi,\ \ -\infty<z<\infty)$ має тріщину, поверхня якої описується співвідношеннями

$$r=R, -\pi<\varphi<\pi, a\le z\le b \tag{1.1}$$

та піддається впливу деформації кручення довільним навантаженням $\tau_{r\varphi}^0(r,z)$, що породжує переміщення середовища $u_\varphi^0(r,z)$. Метою задачі є визначення коефіцієнту інтенсивності напружень.

Після побудови розривного розв'язку рівнянь рівноваги для дефекту (1.1) за схемою [12], проблему зведено до інтегро-диференціального рівняння

$$\frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{4}\int_a^b\left\langle V(R,\xi)\right\rangle k\left(\frac{z-\xi}{R}\right)d\xi=\tau_{r\varphi}^0(R,z),\quad a\le z\le b, \tag{1.2}$$

де $\left\langle V(R,z)\right\rangle = 2G\left[u_\varphi(R-0,z)-u_\varphi(R+0,z)\right]$ — стрибок переміщень на тріщині, а G — невідомий модуль зсуву.

Ядро рівняння (1.2) має подання

$$k(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{I}_2(\alpha)\mathrm{K}_2(\alpha)\cos\alpha y d\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2\mathrm{I}_2(|\alpha|)\mathrm{K}_2(|\alpha|)e^{i\alpha y}d\alpha, \tag{1.3}$$

де $\mathrm{I}_n(z), \mathrm{K}_n(z)$ — модифіковані функції Бесселя.

Зробимо заміну змінних:

$$z = R\left(C_+ + C_- x\right), \quad \zeta = R\left(C_+ + C_- \xi\right); \quad 2RC_\pm = b \pm a,$$
$$\left\langle V\left(R, RC_+ + RC_- \xi\right)\right\rangle = \varphi(\zeta), \tag{1.4}$$
$$-4RC_- \tau^0_{r\varphi}\left(R, RC_+ + RC_- x\right) = f(x).$$

Після такої заміни інтервал інтегрування у рівнянні (1.2) зведено до інтервалу $[-1;1]$:

$$-\frac{d^2}{dx^2}\int_{-1}^{1} k\left(C_- x - C_- \zeta\right)\varphi(\zeta)\,d\zeta = f(x), \quad |x| \le 1. \tag{1.5}$$

Для відокремлення сингулярної частини ядра використаємо подання (1.3), враховуючи формулу [3]:

$$\mathrm{I}_2(\alpha)\mathrm{K}_2(\alpha) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{J_4(\alpha\tau)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\tau\right)^2}}\,d\tau .$$

Це надає можливість звести перший інтеграл у співвідношенні (1.3) до вигляду

$$k(y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\tau}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\tau\right)^2}}\int_0^\infty \cos\alpha y J_4(\alpha\tau)\,d\alpha. \tag{1.6}$$

Тут останній інтеграл є відомим [3], та після деяких перетворень отримаємо нове зображення ядра рівняння (1.5):

$$k(y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1}{\pi|y|\sqrt{1+4y^{-2}\sin^2 t}}\,dt =$$
$$= \frac{1}{|y|}\sum_{j=1}^{3} C_j F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; j; -\frac{4}{y^2}\right), C_1 = 1; C_2 = -4; C_3 = 3. \tag{1.7}$$

Друга рівність у співвідношенні (1.7) випливає з формул 3.681 (1) у [3]. Щоб відокремити розривну частину рівняння (1.7), потрібно продовжити гіпергеометричну функцію Гаусса в около нуля. Потрібна для цього формула 9.132 (2) з [3] у цьому випадку не працює, бо третій параметр у функції Гаусса є цілим. Щоб подолати ці труднощі, розглянемо замість цілого параметра j параметр $j+\varepsilon$ та використаємо потрібну формулу. У отриманому результаті відшукаємо границю, коли ε прямує до нуля. Остаточно отримаємо:

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};j;-\frac{4}{y^2}\right)=\frac{|y|\Gamma(j)}{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(j-\frac{1}{2}\right)}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_m\left(\frac{3}{2}-j\right)_m}{(m!)^2}\left(-\frac{y^2}{4}\right)^m\times\right.$$

$$\times\left[2\psi(1+m)-\psi\left(\frac{1}{2}+m\right)-\psi\left(\frac{3}{2}-j+m\right)\right]-$$

$$\left.-2\ln\frac{|y|}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_m\left(\frac{3}{2}-j\right)_m}{(m!)^2}\left(-\frac{y^2}{4}\right)^m\right\}. \qquad (1.8)$$

Підставимо зображення (1.8) до (1.7) та отримаємо розривну частину ядра (1.7). Після цього рівняння (1.5) набуває вигляду

$$-\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\ln\frac{1}{|x-\zeta|}+R(C\_x-C\_\zeta)\right]\varphi(\zeta)d\zeta=f(x),\quad |x|\le 1. \qquad (1.9)$$

Регулярна частина ядра має неперервну першу похідну та визначається за формулою

$$R(y)=\ln\frac{2}{|y|}\sum_{m=1}^{\infty}A_m y^{2m}+\sum_{m=0}^{\infty}\psi_m y^{2m},$$

$$A_m=a_m\left(1+\frac{8}{3}m+\frac{4}{3}m^2\right), \qquad (1.10)$$

$$\psi_m=A_m\left[\psi(1+m)-\psi\left(m-\frac{3}{2}\right)\right]-\frac{8(2m-1)(7m-4)}{3(2m-3)}(m!)^2 a_m=$$

$$=(-1)^m\left(\frac{1}{2}\right)_m\left(-\frac{3}{2}\right)_m,$$

де $\psi(z)$ — ψ-функція Ейлера.

2. Розв’язання інтегро-диференціального рівняння за методом ортогональних поліномів.

Використаємо спектральне співвідношення

$$-\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\zeta^2}V_{n-1}(\zeta)\ln\frac{1}{|x-\zeta|}d\zeta=nV_{n-1}(x),\quad |x|\le 1,\quad n=\overline{1,\infty}. \qquad (2.1)$$

У відповідності до (2.1) розв'язок рівняння (1.9) розшукується у зображенні

$$\varphi(\zeta) = \sqrt{1-\zeta^2} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n V_{n-1}(\zeta). \tag{2.2}$$

Після підстановки ряду (2.2) у інтегро-диференціальне рівняння (1.9) та застосування спектрального співвідношення (2.1) та рівності

$$\frac{d}{dz}\left[\sqrt{1-z^2}V_{n-1}(z)\right] = -\frac{nT_n(z)}{\sqrt{1-z^2}}, \quad n = \overline{1,\infty}, \tag{2.3}$$

де $T_n(z)$ — поліноми Чебишова першого роду, помножимо обидві частини на $V_{k-1}(x)\sqrt{1-x^2}$ та проінтегруємо за змінною x. Це зводить інтегро-диференційне рівняння (1.9) до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\psi_k + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{k_n}d_{kn}\psi_n = \frac{f_k}{\sqrt{k}}; \quad \psi_k = \sqrt{k}\varphi_k, \quad k = 1,2,...$$

$$d_{kn} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} R(C\_x - C\_\zeta)\frac{T_k(x)T_n(\zeta)}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\zeta^2}}dxd\zeta, \tag{2.4}$$

$$f_k = \int_{-1}^{1} f(x)\sqrt{1-x^2}V_{k-1}(x)dx.$$

Для підрахунку інтегралів (2.4) пропонується квадратурна формула Гаусса. З цього випливають формули

$$d_{kn} = \frac{\pi^2}{l^2}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l} R(C\_x_i - C\_x_j)T_k(x_i)T_k(x_j), \quad l > k,n;$$

$$f_k = \frac{\pi}{l+1}\sum_{i=1}^{l}\sin^2\frac{i\pi}{l+1}f(x_i^*)V_{k-1}(x_i^*), \tag{2.5}$$

$$x_i = \cos\frac{2i-1}{2l}\pi, \quad x_i^* = \cos\frac{i\pi}{l+1}.$$

Нескінченну систему алгебраїчних рівнянь може бути розв'язано наближено за допомогою методу редукції. Для цього потрібно довести збіжність рядів

$$S_1 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} k_n d_{kn}^2, \quad S_2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k^2}{k}. \tag{2.6}$$

3. Рахування коефіцієнту інтенсивності напружень (КІН). Для обчислення КІН потрібно відшукати границі

$$N_{\mp} = \lim \frac{\sqrt{2\pi(a-z)}}{\sqrt{2\pi(z-b)}} \tau_{r\varphi}(R,z), \quad z \to a-0, \quad z \to b+0.$$

З урахуванням проведеної заміни змінної (1.4) КІН можуть бути записані у поданні

$$N_{\mp} = \lim \frac{\sqrt{\pi(b-a)(-x-1)}}{\sqrt{\pi(b-a)(x-1)}} \tau_{r\varphi}(R, C_{+}R + C\_Rx),$$

$$x \to -1-0, \quad x \to 1+0. \tag{3.1}$$

Враховуючи формули (1.2) та (1.9), маємо зображення дотичних напружень:

$$\tau_{r\varphi}(R, C_{+}R + C\_Rx) = -\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{4\pi R^2}\int_{-1}^{1}\left[\ln\frac{1}{|x-\zeta|} + R(C\_x - C\_\zeta)\right]\times$$

$$\times\varphi(\zeta)d\zeta + \tau_{r\varphi}^{0}(R, C_{+}R + C\_Rx), |x| > 1. \tag{3.2}$$

З метою реалізувати перехід до границі у співвідношенні (3.1) необхідно продовжити спектральне співвідношення (2.1) на інтервал $|x| > 1$. Для цього використаємо формулу з [12]

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|x-s|}\frac{P_m^{\alpha,k-\alpha}(s)}{(1-s)^{-\alpha}(1+s)^{\alpha-k}}ds =$$

$$= \frac{(-2)^{k+1}2^m\Gamma(1+\alpha+m)\Gamma(1+k+m-\alpha)}{m!(1+k+2m)!\left[(m+k)!\right]^{-1}(x-1)^{m+k+1}}\times \tag{3.3}$$

$$\times F\left(1+\alpha+m, m+k+1; 2+k+2m; (1-x)/2\right).$$

Для рахування КІН $N\_$ потрібно використати продовження функції Гаусса в около точки $x=-1$, використовуючи формулу 9.131 (2) з [3], де взяти $k=1, \alpha = 1/2$.

Остаточно замість співвідношення (2.1) отримаємо

$$-\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|x-s|}\sqrt{1-s^2}V_m(s)ds = \frac{(m+1)^2 2^{m+2}}{(x-1)^{m+2}}\left[F\left(\frac{3}{2}+m, m+2; \frac{3}{2}; \frac{x+1}{x-1}\right) - \right.$$

$$-\frac{m+1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{-1-x}}F\left(\frac{3}{2}+m,m+1;\frac{1}{2};\frac{x+1}{x-1}\right)\Bigg],\quad x<-1. \tag{3.4}$$

Після застосування формул (3.2), (2.2) та (3.4), (2.4) отримаємо подання для КІН:

$$N_{-}=\sqrt{\frac{\pi G}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\left(-1\right)^{m+1}\sqrt{m}\psi_{m}. \tag{3.5}$$

Формула (3.5) визначає останнє подання для обчислення КІН.

Приклад цієї задачі демонструє застосування методу ортогональних поліномів, а саме — використання спектрального співвідношення, його аналітичного продовження, застосування методу редукції.

ДОДАТОК В. ТАБЛИЦЯ СПЕКТРАЛЬНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ ТА ДЕЯКИХ ІНТЕГРАЛІВ

Таблиця 1

Номер	Співвідношення
1	$\int_0^1 \frac{P_m^{\mu,\gamma}\left(1-2y^2\right)W_{\mu,\gamma}^{\nu}\left(\sqrt{1-x^2}y,x\sqrt{1-y^2}\right)}{\left(1-y^2\right)^{-\frac{1}{2}-\gamma}y^{-1-\mu}}dy=$ $=\frac{x^{\gamma}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}+\mu}P_m^{\gamma,\mu}\left(1-2x^2\right)}{2^{1-\nu}\Gamma^{-1}\left(m+\sigma_0\right)\Gamma\left(m+1-\nu+\sigma_0\right)},$ $\sigma_0=\frac{1+\nu+\gamma+\mu}{2},\ W_{\mu,\gamma}^{\nu}\left(t,\tau\right)=\int_0^{\infty}\xi^{\nu}J_{\mu}\left(\xi t\right)J_{\gamma}\left(\xi\tau\right)d\xi$
2	$\int_0^1 \frac{W_{\mu,\gamma}^{\nu}\left(r,\rho\right)P_n^{\gamma,-\sigma_+}\left(1-2\rho^2\right)\rho^{1+\gamma}}{\Gamma\left(1+n-\sigma_0\right)\Gamma\left(n+\sigma_0\right)\left(1-\rho^2\right)^{\sigma_-}}d\rho=$ $=2^{\nu-1}\left(n!\right)^{-1}\Gamma^{-1}\left(n+1+\mu\right)r^{\mu}P_n^{\mu,-\sigma_-}\left(1-2r^2\right),$ $2\sigma_0=1+\nu+\gamma+\mu,\quad 2\sigma_{\pm}=1-\nu\pm\left(\gamma-\mu\right)$

Номер	Співвідношення
3	$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\left\lvert\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi+\psi)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi-\psi)}\right\rvert\frac{U_n(\cos\psi)}{\operatorname{cosec}\psi}d\psi=\frac{\sin\varphi U_n(\cos\varphi)}{n+1}$
4	$\int_{-1}^{1}\left[\operatorname{sgn}(x-y)-\frac{tg\pi\left(\frac{1}{2}v-\mu\right)}{tg\frac{1}{2}\pi v}\right]\frac{P_m^{v-\mu;\mu-1}(y)}{\lvert x-y\rvert^{v}(1-y)^{\mu-v}(1+y)^{1-\mu}}dy=$ $=\frac{\pi(v)_m P_m^{\mu-1,v-\mu}(x)}{\cos\pi\left(\frac{1}{2}v-\mu\right)\sin\left(\frac{1}{2}v\pi\right)m!}$
5	$\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{sgn}(x-y)}{\lvert x-y\rvert^{v}}\frac{P_m^{v/2,v/2-1}(y)}{(1-y)^{-v/2}(1+y)^{1-v/2}}dy=\frac{\pi(v)_m P_m^{v/2-1,v/2}(x)}{\sin\left(\frac{1}{2}\pi v\right)m!}$
6	$\int_{-1}^{1}\frac{C_m^{(v/2)}(y)}{\lvert x-y\rvert^{v}\left(1-y^2\right)^{(1-v)/2}}dy=\frac{\pi(v)_m C_m^{(v/2)}(x)}{\cos\left(\frac{1}{2}\pi v\right)m!}$
7	$\int_{-1}^{1}\left[\frac{\operatorname{sgn}(x-y)}{2}+\frac{tg\pi\alpha}{\pi}\ln\frac{1}{\lvert x-y\rvert}\right]\frac{P_n^{-\alpha,\alpha-1}(y)}{(1-y)^{\alpha}(1+y)^{1-\alpha}}dy=$ $=\begin{cases}\frac{1}{2}\pi\operatorname{cosec}\pi\alpha-\sec\pi\alpha\left[\ln 2+\psi(1-\alpha)-\psi(1)\right], & n=0\\ (n\cos\pi\alpha)^{-1}P_n^{\alpha-1,-\alpha}(x), & n=1,2,\ldots\end{cases}$
8	$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{\lvert x-y\rvert}\frac{T_n(y)}{\sqrt{1-y^2}}dy=\begin{cases}\ln 2, & n=0\\ n^{-1}T_n(x), & n=1,2,\ldots\end{cases}$
9	$\frac{1}{\pi}\int_0^{1}\ln\left\lvert\frac{x+y}{x-y}\right\rvert\frac{T_{2m+1}(y)}{\sqrt{1-y^2}}dy=\frac{T_{2m+1}(x)}{2m+1}$

Продовження табл. 1

Но-мер	Співвідношення
10	$$\frac{1}{\pi}\int_0^1 \ln\frac{1}{\left\lvert x^2-y^2\right\rvert}\frac{T_{2m}(y)}{\sqrt{1-y^2}}dy=\begin{cases}\ln 2, & m=0\\ (2m)^{-1}T_{2m}(x), & m=1,2,\ldots\end{cases}$$
11	$$\int_0^1 \operatorname{sgn}(\tau-t)\tau^{\alpha}(1-\tau)^{\beta}P_n^{\alpha,\beta}(1-2\tau)d\tau=$$ $$=\begin{cases}B(\alpha+1,\beta+1)-2(1+\alpha)^{-1}F(1+\alpha,-\beta;2+\alpha;t)t^{\alpha+1}, & n=0\\ -2n^{-1}t^{\alpha+1}(1-t)^{\beta+1}P_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(1-2t), & n>0\end{cases}$$
12	$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\ln\left\lvert\frac{\sin\frac{1}{2}(\xi-\eta)}{\cos\frac{1}{2}\xi\cos\frac{1}{2}\eta}\right\rvert\frac{T_n\left(tg\frac{1}{2}\eta ctg\frac{1}{2}\alpha\right)}{\sqrt{2\cos\eta-2\cos\alpha}}\frac{d\eta}{\cos\frac{1}{2}\eta}=$$ $$=\begin{cases}\sec\frac{1}{2}\alpha\ln\left(2\,ctg\frac{1}{2}\alpha\right), & n=0\\ n^{-1}\sec\frac{1}{2}\alpha T_n\left(tg\frac{1}{2}\xi ctg\frac{1}{2}\alpha\right), & n=1,2,\ldots\end{cases}\quad \lvert\xi\rvert\le\alpha$$
13	$$\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\ln\left\lvert ctg\frac{\xi-\eta}{4}\right\rvert\frac{T_{2n+1}\left(\sin\frac{1}{2}\eta\operatorname{cosec}\frac{1}{2}\alpha\right)}{\sqrt{2\cos\eta-2\cos\alpha}}\cos\frac{1}{2}\eta\,d\eta=$$ $$=(2n+1)^{-1}T_{2n+1}\left(\sin\frac{1}{2}\xi\operatorname{cosec}\frac{1}{2}\alpha\right),\quad \lvert\xi\rvert\le\alpha$$
14	$$\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\ln\left\lvert\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}(\xi-\eta)}\right\rvert\frac{T_{2n}\left(\sin\frac{1}{2}\eta\operatorname{cosec}\frac{1}{2}\alpha\right)}{\sqrt{2\cos\eta-2\cos\alpha}}\cos\frac{1}{2}\eta d\eta=$$ $$=\begin{cases}\ln 2, & n=0\\ (2n)^{-1}T_{2n}\left(\sin\frac{1}{2}\xi\operatorname{cosec}\frac{1}{2}\alpha\right), & n=1,2,\ldots\end{cases}\quad \lvert\xi\rvert\le\alpha$$

Номер	Співвідношення
15	$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\ln\left\|\frac{sh\frac{1}{2}(\xi-\eta)}{ch\frac{1}{2}\xi ch\frac{1}{2}\eta}\right\|\frac{T_n\left(th\frac{1}{2}\eta ctg\frac{1}{2}\alpha\right)}{\sqrt{2ch\alpha-2ch\eta}}\frac{d\eta}{ch\frac{1}{2}\eta}=$$ $$=\begin{cases}\sec h\frac{1}{2}\alpha\ln\left(2cth\frac{1}{2}\alpha\right), & n=0,\\ n^{-1}\sec h\frac{1}{2}\alpha T_n\left(th\frac{1}{2}\xi cth\frac{1}{2}\alpha\right), & n=1,2,...\end{cases}\quad \|\xi\|\le\alpha$$
16	$$\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\ln\left\|cth\frac{\xi-\eta}{4}\right\|\frac{T_{2n+1}\left(sh\frac{1}{2}\eta\operatorname{cosech}\frac{1}{2}\alpha\right)}{\sqrt{2ch\alpha-2ch\eta}}ch\frac{1}{2}\eta d\eta=$$ $$=(2n+1)^{-1}T_{2n+1}\left(sh\frac{1}{2}\xi\operatorname{cosech}\frac{1}{2}\alpha\right),\quad \|\xi\|\le\alpha$$
17	$$\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\ln\left\|\frac{sh\frac{1}{2}\alpha}{sh\frac{1}{2}(\xi-\eta)}\right\|\frac{T_{2n}\left(sh\frac{1}{2}\eta\operatorname{cosech}\frac{1}{2}\alpha\right)ch\frac{1}{2}\eta}{\sqrt{2ch\alpha-2ch\eta}}d\eta=$$ $$=\begin{cases}\ln 2, & n=0\\ (2n)^{-1}T_{2n}\left(sh\frac{1}{2}\xi\operatorname{cosech}\frac{1}{2}\alpha\right), & n=1,2,...\end{cases}\quad \|\xi\|\le\alpha$$
18	$$\int_0^r\frac{P_n^{\beta,\lambda-\nu+1}\left(1-2\rho^2\right)d\rho}{\Gamma(\beta+n+1)\left(r^2-\rho^2\right)^{\nu}\rho^{-1-2\beta}}=\frac{\Gamma(1-\nu)P_n^{\beta-\nu+1,\lambda}\left(1-2r^2\right)}{2\Gamma(2+n+\beta-\nu)r^{2(\nu-\beta-1)}}$$
19	$$\int_0^x U_{2n}(y)dy=\frac{1}{2n+1}T_{2n+1}(x)$$
20	$$\int_0^1\frac{P_n^{\gamma-\nu+1,\beta}\left(1-2\rho^2\right)\rho d\rho}{\Gamma(\beta+n+1)\left(\rho^2-r^2\right)^{\nu}(1-\rho)^{-\beta}}=\frac{\Gamma(1-\nu)P_n^{\gamma,\beta-\nu+1}\left(1-2r^2\right)}{2\Gamma(2+n+\beta-\nu)\left(1-r^2\right)^{\nu-\beta-1}}$$

Номер	Співвідношення
21	$$\int_x^1 \frac{T_{2n+1}(y)}{\sqrt{1-y^2}}dy = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2n+1}U_{2n}(x)$$
22	$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\operatorname{sgn}(x-y)}{\lvert x-y\rvert^{\nu}}+\frac{tg\pi(\nu/2-\alpha)}{\lvert x-y\rvert^{\nu}\,tg\frac{1}{2}\nu\pi}\right]\frac{P_n^{\alpha,k+\nu-\alpha}(y)}{(1-y)^{-\alpha}(1+y)^{\alpha-\nu-k}}dy =$$ $$=\frac{\pi\Gamma(n+\nu+k+1)P_n^{k+\nu-\alpha,\alpha}(x)}{\Gamma(\nu)\sin\frac{1}{2}\pi\nu\cos\left[\pi(\nu/2-\alpha)\right]n!},\quad k=0,1,2,...$$
23	$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x-y)+\frac{tg\pi\alpha}{\pi}\ln\frac{1}{\lvert x-y\rvert}\right]\frac{P_m^{-\alpha,k+\alpha}(y)}{(1-y)^{\alpha}(1+y)^{-\alpha-k}}dy =$$ $$=(m!)^{-1}\Gamma(k+m+1)\sec(\pi\alpha)P_m^{k+\alpha,-\alpha}(x)$$
24	$$\frac{d^2}{dx^2}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{\lvert x-y\rvert}\sqrt{1-y^2}\,U_n(y)dy = -\pi(n+1)U_n(x)$$
25	$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}-\frac{k^2}{x^2}\right)\int_0^1\frac{W_{kk}^{\nu}(x,y)P_n^{k,\varepsilon}(1-2y^2)}{(1-y^2)^{-\varepsilon}y^{-k-1}}dy =$$ $$=\frac{\Gamma(1+\varepsilon+n+k)P_n^{k,\varepsilon}(1-2x^2)}{-2^{-1-\nu}(n+k)!n!\Gamma^{-1}(1+\varepsilon+n)}x^k,\quad 2\varepsilon=1+\nu$$
26	$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\frac{d}{dx}\int_0^1 W_{00}^0(x,y)P_{2n+1}\left(\sqrt{1-y^2}\right)ydy =$$ $$=-2\Gamma^2\left(\frac{3}{2}+n\right)\frac{1}{(n!)^2}(1-x^2)^{-1/2}P_{2n+1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$$
27	$$\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\tau^{\alpha}P_n^{\alpha,k-\alpha}(1-2\tau)}{(1-\tau)^{\alpha-k}(\tau-t)}d\tau = -ctg\pi\alpha\frac{t^{\alpha}P_n^{\alpha,k-\alpha}(1-2t)}{(1-t)^{\alpha-k}}+$$ $$+\operatorname{cosec}(\pi\alpha)P_{n+k}^{-\alpha,\alpha-k}(1-2t),\quad k=0,\pm1,...$$

Номер	Співвідношення
28	$\int\limits_{-1}^{1}\frac{T_n(y)}{\sqrt{1-y^2}(y-x)}dy=\pi U_{n-1}(x),\quad n=1,2,\ldots$
29	$\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}U_{n-1}(y)\frac{dy}{y-x}=-\pi T_n(x),\quad n=1,2,\ldots$
30	$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{1}\sqrt{\frac{\tau}{1-\tau}}P_n^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(1-2\tau)\frac{d\tau}{\tau-t}=P_n^{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(1-2t)$
31	$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{1}\sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}}U_{2n}\left(\sqrt{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau-t}=-\frac{T_{2n+1}\left(\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}$
32	$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{x-y}+\frac{y\,tg^2\alpha}{1+y^2tg^2\alpha}\right)\sqrt{1-y^2}U_n(y)dy=$ $=T_{n+1}(x)+\sin\frac{n\pi}{2}\left(tg\frac{\alpha}{2}\right)^{n+1}$
33	$\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}ctg\frac{\xi-\eta}{2}\frac{T_m\left(tg\frac{\eta}{2}ctg\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2\cos\eta-2\cos\alpha}}\frac{d\eta}{\cos\frac{\eta}{2}}=$ $=\begin{cases}-\pi\sec\frac{\alpha}{2}tg\frac{\xi}{2}, & m=0\\ -\pi\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}\left(\sec\frac{\xi}{2}\right)^2U_{m-1}\left(tg\frac{\xi}{2}ctg\frac{\alpha}{2}\right), & m=1,2,\ldots\end{cases}$
34	$\frac{1}{2}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\operatorname{sgn}(\xi-\eta)\frac{T_m\left(tg\frac{\eta}{2}cthg\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2\cos\eta-2\cos\alpha}}\frac{d\eta}{\cos\frac{\eta}{2}}=$ $=\begin{cases}\sec\frac{\alpha}{2}\arcsin\left(tg\frac{\xi}{2}ctg\frac{\alpha}{2}\right), & m=0\\ -\frac{\sqrt{2\cos\xi-2\cos\alpha}}{m\sin\alpha\cos\frac{\xi}{2}}U_{m-1}\left(tg\frac{\xi}{2}ctg\frac{\alpha}{2}\right), & m=1,2,\ldots\end{cases}$

Закінчення табл. 1

Но-мер	Співвідношення
35	$$\frac{1}{\pi}\left(1-\frac{d^2}{d\xi^2}\right)\int_0^\infty \frac{K_0\left(\lvert\xi-\sigma\rvert\right)}{e^{\xi}\sigma^{\frac{1}{2}-\mu}} L_n^{\mu-1/2}(2\sigma)=$$ $$=\begin{cases}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+n\right)\frac{e^{\xi} I_\mu^{-}(\xi)}{\pi\cdot n!}, \ \xi<0 \\ (-1)^{2\mu}2^{\frac{3}{2}-\mu}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+n\right)L_{n+m-1}^{\frac{5}{2}-\mu}(2\xi), \ \xi\ge 0\end{cases}$$ $$\mu\ge 1,\ I_\mu^{-}(\xi)=2^{\frac{3}{2}-\mu}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\psi\left(n+\frac{3}{2};\ \frac{5}{2}-\mu;\ 2\lvert\xi\rvert\right)$$

Таблиця 2

Но-мер	Співвідношення
1	$$\int_0^\infty\left[e^{-\lvert x-y\rvert}-e^{-(x+y)}\right]\frac{L_n^{(1)}(2y)}{e^y}dy=\frac{xL_n^{(1)}(2x)}{(n+1)e^x}$$
2	$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{K}_v\left(\lvert x-y\rvert\right)L_n^{(\lambda)}(2y)}{y^{-\lambda}e^y\lvert x-y\rvert^v}dy=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(-\lambda)L_n^{(\lambda)}(2x)e^{-x}}{\sqrt{2}\Gamma^{-1}(1+n+\lambda)n!},\quad \lambda=v-1/2$$
3	$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{K}_0\left(\lvert x-y\rvert\right)}{e^y\sqrt{y}}\mathrm{H}_{2n}\left(\sqrt{2y}\right)dy=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}e^{-x}\mathrm{H}_{2n}\left(\sqrt{2x}\right)$$
4	$$\int_0^\infty \left\lvert sh\frac{\xi-\eta}{2}\right\rvert^{-2v}\frac{C_n^{(v)}\left(1-2e^{-\eta}\right)}{e^{v\eta}\left(e^{\eta}-1\right)^{\frac{1}{2}-v}}d\eta=\frac{\pi(2v)_n C_n^{(v)}\left(1-2e^{-\xi}\right)}{\cos(v\pi)n!2^{-2v}e^{v\xi}}$$
5	$$\int_0^\infty \ln\left\lvert cth\frac{\xi-\eta}{4}\right\rvert\frac{T_{2n+1}\left(e^{-\frac{\eta}{2}}\right)}{\left(e^{\eta}-1\right)^{1/2}}d\eta=\frac{\pi T_{2n+1}\left(e^{-\frac{\xi}{2}}\right)}{\frac{1}{2}+\eta}$$ $$\ln\left\lvert cth\frac{z}{4}\right\rvert=\int_0^\infty\frac{th\pi t}{t}\cos zt\,dt$$

Закінчення табл. 2

Номер	Співвідношення
6	$$\int_1^\infty \frac{W_{\gamma,\mu}^{\nu}(\xi,\eta)P_n^{\gamma,-\sigma_+}\left(1-2\eta^{-2}\right)\eta^{-\mu-1}}{\Gamma(1-\sigma_+ + n)\Gamma(\sigma+n)2^{\nu-1}\left(\eta^2-1\right)^{\sigma_+}}d\eta = \left[n!\Gamma(1+\mu+n)\right]^{-1}\times$$ $$\times\xi^{-1-\nu-\mu}P_n^{\mu,-\sigma_-}\left(1-2\xi^{-2}\right),\ 2\sigma=1+\nu+\gamma+\mu,\quad 2\sigma_\pm=1-\nu\pm(\gamma-\mu)$$
7	$$\int_0^\infty J_\alpha\left[(xy)^{1/2}\right]\frac{L_n^{(\alpha)}(y)}{y^{-\frac{\alpha}{2}}e^{\frac{y}{2}}}dy=\frac{2x^{\alpha/2}L_n^{(\alpha)}(x)}{(-1)^n e^{\frac{x}{2}}}$$
8	$$\int_0^\infty \frac{W_{\mu,\gamma}^{\nu}(x,y)x^{1+\mu}}{\left(1+x^2\right)^{1-\nu+\sigma}}P_n^{\mu,\gamma}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)dx=$$ $$=\frac{\Gamma(n+\sigma)y^\gamma\left(1+y^2\right)^{-\sigma}}{2^{1-\nu}\Gamma(n+1+\sigma-\nu)}P_n^{\gamma,\mu}\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right),\quad 2\sigma=1+\nu+\mu+\gamma$$
9	$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \ln\left\|\frac{x+y}{x-y}\right\|U_n\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)\frac{ydy}{\left(1+y^2\right)^2}=\frac{1}{n+1}\frac{x}{1+x^2}U_n\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$
10	$$\int_0^\infty \frac{F\left(\alpha,\rho,1-\alpha+\rho;e^{-\|\xi-\eta\|}\right)P_n^{\rho-\alpha,\alpha-1}\left(1-2e^{-\eta}\right)d\eta}{e^{\frac{1}{2}\rho\|\xi-\eta\|}e^{\frac{1}{2}\rho\eta}\left(e^\eta-1\right)^{1-\alpha}}=$$ $$=\frac{\pi(\alpha)_n(\rho)_n P_n^{\rho-\alpha,\alpha-1}\left(1-2e^{-\xi}\right)}{n!\sin\pi\alpha(1+\rho-\alpha)_n e^{1/2\rho\xi}}$$
11	$$\int_0^x \frac{y^\alpha L_n^{(\alpha)}(y)dy}{(x-y)^\nu}=\frac{\Gamma(1-\nu)\Gamma(\alpha+n+1)L_n^{(\alpha-\nu+1)}(x)}{\Gamma(2-\nu+\alpha+n)x^{\nu-\alpha-1}}$$
12	$$\int_x^\infty \frac{L_n^{(\sigma-\nu)}(y)dy}{(y-x)^\nu e^y}=\Gamma(1-\nu)L_n^{(\sigma-1)}(x)e^{-x}$$
13	$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sgn}(x-y)L_n^{(\alpha)}(y)dy}{e^y y^{-\alpha}}=\begin{cases}-\Gamma(1+\alpha)+\dfrac{2\Phi(1,2+\alpha;x)}{(\alpha+1)x^{-1-\alpha}e^x}, & n=0\\[2ex] \dfrac{2}{n}x^{\alpha+1}e^{-x}L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x), & n>0\end{cases}$$

Таблиця 3

Номер	Співвідношення
1	$\int_0^1 \frac{x^{2\rho+1}P_n^{\alpha,-\beta}\left(1-2x^2\right)dx}{\left(1-x^2\right)^{\beta}}=\frac{\Gamma(\rho+1)\Gamma(1-\beta+n)\Gamma(\alpha-\rho+n)}{2\Gamma(\alpha-\rho)\Gamma(2-\beta+\rho+n)n!}$
2	$\int_{-1}^1 \frac{(1-\xi)^{\alpha}(1+\xi)^{\beta}}{\xi-x}P_n^{\alpha,\beta}(\xi)d\xi=\operatorname{sgn}x\frac{\pi(x-1)^{\alpha}}{\sin\pi\alpha}\frac{P_n^{\alpha,\beta}(x)}{(x+1)^{-\beta}}-$ $-\frac{F\left(n+1,-n-\alpha-\beta;1-\alpha;\frac{1}{2}-\frac{x}{2}\right)}{2^{1-\alpha-\beta}\Gamma^{-1}(\alpha)\Gamma^{-1}(n+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)},\quad x\in[-1;1]$
3	$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2}U_n(\xi)d\xi}{\xi-x}=\frac{\sqrt{x^2-1}U_n(x)}{\operatorname{sgn}x}-\frac{T_{n+1}(x)}{2},\|x\|>1$
4	$\int_0^1 \frac{x^{1+\alpha}P_n^{\alpha,-\beta}\left(1-2x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^{\beta}}J_{\alpha}(xy)dx=\frac{\Gamma(1-\beta+n)J_{\sigma}(y)}{2^{\beta}n!y^{1-\beta}},$ $\sigma=1+\alpha-\beta+2n$
5	$\int_{-1}^1 \begin{bmatrix}\sin\tau t\\ \cos\tau t\end{bmatrix}\frac{T_{n_{\mp}}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=(-1)^n\pi J_{n_{\mp}}(\tau),\quad \begin{matrix}n_-=2n+1\\ n_+=2n\end{matrix}$
6	$\int_{-1}^1 \begin{bmatrix}\sin\tau t\\ \cos\tau t\end{bmatrix}\frac{U_{n_{\mp}}(t)}{\left(1-t^2\right)^{-1/2}}dt=\frac{\pi\Gamma(2+n_{\mp})}{(-1)^n(n_{\mp})!\tau}J_{1+n_{\mp}}(\tau),\quad \begin{matrix}n_-=2n+1\\ n_+=2n\end{matrix}$
7	$\int_0^{\infty}\ln\frac{1}{\|x-y\|}y^{\alpha}e^{y}L_n^{(\alpha)}(y)dy=$ $=\frac{\pi x^{\alpha+1}e^{-x}L_n^{(\alpha+1)}(x)}{\pi\, tg\pi\,\alpha}+n^{-1}\Gamma(1+\alpha)e^{-x}\Phi(-\alpha-n,-\alpha;x),\ n>0$
8	$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{x}{1+x^2tg^2\alpha}\sqrt{1-x^2}U_n(x)dx=\frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{tg^2\alpha}\left(tg\frac{\alpha}{2}\right)^{n+1}$

ПІСЛЯМОВА

Автори цієї книги мали за мету ознайомити читача з методом ортогональних поліномів, що є одним з найважливіших методів розв'язання задач математичної фізики для областей з дефектами.

Для того щоб читачу було зручно знайомитися з матеріалом, на початку наведено основні формули та теореми щодо властивостей ортогональних поліномів.

Всі оригінальні теореми та леми, що наведені у цьому підручнику, наведено з доведенням. Сьогодні нам здавалося корисним ознайомити нашого читача з методикою та засобами доведення, що базуються на класичних теоремах аналізу.

Завершує цю книгу два повних приклади застосування методу ортогональних поліномів для розв'язання задач математичної фізики: задачі теплопровідності та задачі теорії пружності.

Ми також включили у книгу ряд корисних, з нашої точки зору, фактів щодо методів обчислення подвійних та сингулярних інтегралів, а також довідковий матеріал, що містить таблиці основних спектральних співвідношень.

Автори сподіваються, що ця книга буде корисною для студентів, аспірантів та наукових співробітників, наукові інтереси яких пов'язані з розв'язанням задач математичної фізики для областей з дефектами.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1966. — Т. 1. — 296 с.
2. Вулих Б. З. Функциональный анализ. — М.: Физматгиз, 1963. — 264 с.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1962. — 1100 с.
4. Забрейко П. П., Кошелев А. И. Интегральные уравнения.– М.: Наука, 1968. — 447 с.
5. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 744 с.
6. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. — М.–Л.: Гостехиздат, 1950. — 708 с.
7. Лаврентьев М. А., Шабант Б. В. Методы теории функций комплексной переменной. — М.: Наука, 1973. — 678 с.
8. Люк Ю. Специальные функции математической физики и их аппроксимация. — М.: Мир, 1980. — 608 с.
9. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Специальные функции математической физики. — М.: Наука, 1978. — 320 с.
10. Попов Г. Я. О методе ортогональных многочленів в контактных задачах теории упругости // Прикл. матем. и мех. — 1969. — Вып. 3.
11. Попов Г. Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. — Киев: Вища школа, 1982. — 168 с.
12. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. — М.: Наука, 1982. — 344 с.
13. Попов Г. Я. Избранные труды в 2 т. — Одесса: ВМВ, 2008. — 920 с.
14. Сеге Г. Ортогональные многочлены. –М.: Физматгиз, 1962. — 500 с.
15. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. — Львів, 2007.
16. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. — М.–Л.: Гостехиздат, 1948. — 479 с.
17. Atkinson C. Some Fibbon-like inclusion problems // Int. I. Eng. Sci. 1973. — V. 11, № 3.

18. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. — М.: Физматгиз, 1964. — 289 с.
19. Моисеев Н. Г. Краевые задачи плоской теории упругости при наличии дефектов внутри области: Диссерт. ... канд. ф.-м. наук. — Одесса, 1985.

Наукове видання

ПОПОВ Геннадій Якович
РЕУТ Віктор Всеволодович
МОІСЕЄВ Микола Григорович
ВАЙСФЕЛЬД Наталія Данилівна

РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ. МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНИХ МНОГОЧЛЕНІВ

Навчальний посібник

Завідувачка редакції *Т. М. Забанова*
Редактор *Н. Я. Рихтік*
Технічний редактор *М. М. Бушин*
Дизайнер обкладинки *В. І. Костецький*
Коректор *Л. М. Лейдерман*

Здано у виробництво 01.07.2010. Підписано до друку 17.08.2010.
Формат 60х84/16. Папір офсетний. Гарнітура «Newton». Друк офсетний.
Ум. друк. арк. 6,98. Тираж 300 прим. Вид. № 111. Зам. № 435.

Видавництво і друкарня «Астропринт»
65091, м. Одеса, вул. Разумовська, 21
Тел.: (0482) 37-07-95, 37-14-25, 33-07-17, (048) 7-855-855
www.astroprint.odessa.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1373 від 28.05.2003 р.

Рівняння математичної фізики. Метод ортогональних многочленів : навчальний посібник / Г. Я. Попов, В. В. Реут, М. Г. Моісеєв, Н. Д. Вайсфельд. — Одеса : Астропринт, 2010. — 120 с.

P 49

ISBN 978–966–190–365–3

У запропонованому навчальному посібнику викладено метод ортогональних многочленів, проведено його строге математичне обґрунтування, введено основні означення, доведено основні теореми щодо швидкості збіжності методу. Основну увагу приділено застосуванню метода до розв’язання інтегральних рівнянь першого і другого роду з різними видами сингулярних частин — різницевими, ступеневими ядрами, тощо. Введено нові означення п-ядра та спектрального співвідношення. Особливе місце приділяється застосуванню метода редукції для розв’язання нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, до яких, як відомо, приводить схема методу ортогональних многочленів. У посібнику наведено необхідний довідковий матеріал — таблиці основних спектральних співвідношень та таблиці інтегралів з поліномами Якобі.

ББК 22.161.68+22.311я7
УДК 539.3; 517.4