МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І. І. МЕЧНИКОВА
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ЕКОНОМІКИ ТА МЕХАНІКИ

С. А. Щоголєв

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

ОДЕСА
ОНУ
2015

УДК 512.1
ББК 22.141
Щ92

Рекомендовано до друку науково-методичною радою
ОНУ імені І. І. Мечникова.
Протокол № 1 від 16.10.2014 р.

Рецензенти:

П. Д. Варбанець – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерної алгебри та дискретної математики Одеського національного університету імені І. І. Мечникова;

А. В. Плотніков – доктор фізико-математичних наук, професор завідувач кафедри прикладної та обчислювальної математики і САПР Одеської державної академії будівництва та архітектури;

Ю. О. Григор'єв – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики Одеського національного морського університету.

Щоголєв С. А.
Щ92 **Комплексні числа:** навчально-методичний посібник / С. А. Щоголєв. – Одеса : «Одеський національний університет імені І. І. Мечникова», 2015. – 44 с.
ISBN 978-617-689-121-5

Посібник написано відповідно до навчальної програми дисципліни «Вища математика», містить основні поняття, методи, теореми та формули, багато розв'язаних типових задач, а також завдання для самостійної роботи студентів.

Для підготовки бакалаврів за спеціальностями «географія», «геологія».

УДК 512.1
ББК 22.141

ISBN 978-617-689-121-5

1. Поняття про комплексні числа

У розділі «Вступ до аналізу» ми познайомилися з основними числовими множинами.

1. Множина натуральних чисел

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

Сума і добуток двох натуральних чисел є також число натуральне. А ось різниця двох натуральних чисел може і не бути натуральним числом, наприклад, 3-5. Ми кажемо, що множина $\mathbb{N}$ є замкненою відносно операцій додавання та множення, але не є замкненою відносно операції віднімання.

2. Множина цілих чисел

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm n, \dots; n \in \mathbb{N}\}.$$

Сума і добуток, а також і різниця двох цілих чисел є також числом цілим.

А ось частка двох цілих чисел може і не бути цілим, наприклад 3/5. Ми кажемо, що множина $\mathbb{Z}$ є замкненою відносно операцій додавання, множення та віднімання, але не є замкненою відносно операції ділення.

3. Множина раціональних чисел

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} :\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

На множині $\mathbb{Q}$ є можливою і операція ділення чисел (крім ділення на нуль). В той же час, наприклад, рівняння $x^2 = 2$, як було показано у розділі «Вступ до аналізу», не має коренів, що належать множині $\mathbb{Q}$. Щоб розв'язати це рівняння, треба переходити до ще ширшої множини, ніж множина $\mathbb{Q}$.

4. Множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ є об'єднанням множин раціональних та ірраціональних чисел. На множині $\mathbb{R}$ рівняння $x^2 = 2$ вже має корені – це числа $-\sqrt{2}$ та $\sqrt{2}$. Будь-яке дійсне число x може бути зображено точкою на числовій прямій (див. розділ «Вступ до аналізу»). Очевидно, що $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Незважаючи на те, що множина $\mathbb{R}$ значно розширює можливості порівняно з множинами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, тим не менш, залишаються задачі, які неможливо розв'язати і на множині $\mathbb{R}$. Розглянемо, наприклад, квадратне рівняння

$$x^2 + px + q = 0, \tag{1.1}$$

$p, q \in \mathbb{R}$. Дискримінант цього рівняння $d = p^2 - 4q$. Якщо $d > 0$, то рівняння (1.1) має два різні дійсні кореня:

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{d}}{2}, \quad x_2 = \frac{-p + \sqrt{d}}{2}.$$

Якщо $d = 0$, то рівняння (1.1) має дійсні співпадаючі корені:

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}.$$

А ось якщо $d < 0$, то на множині $\mathbb{R}$ рівняння (1.1) не має коренів. На множині $\mathbb{R}$ не визначено операцію добування коренів з від'ємного числа. Таким чином, оперуючи тільки дійсними числами, ми не маємо можливості розв'язати рівняння (1.1). Разом з цим до таких рівнянь (квадратні з від'ємним дискримінантом) приводить досить велика кількість задач практики, наприклад, при дослідженні коливних процесів. І якщо ми не вміємо дослідити математичну модель явища чи процесу, ми не зможемо дослідити і саме це явище, відповідно, процес. Хоча в той же час він реально якось здійснюється і в цій ситуації. Щоб зробити можливим дослідження подібних класів задач, ми змушені розширити і множину $\mathbb{R}$. Крім того, до такої необхідності приводять і закономірності внутрішнього розвитку самої математичної науки. Таким чином, ми приходимо до ще однієї множини чисел, яка отримала назву множини комплексних чисел.

Введемо спочатку наступне поняття.

Означення. *Уявною одиницею* називається число

$$i = \sqrt{-1}.$$

Іноді це означення викликає подив, мовляв, такої величини не існує. Але відмітимо, що її не існує в множині $\mathbb{R}$, а ми зараз як раз виходимо за межі цієї множини.

Означення. *Комплексним числом* називається число вигляду $z = x + iy$, де $x, y \in \mathbb{R}$. При цьому число x називається *дійсною частиною* комплексного числа z і позначається $\operatorname{Re} z$, а число y називається *уявною частиною* комплексного числа z і позначається $\operatorname{Im} z$.

Тобто $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Два комплексні числа $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ називаються *рівними* тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Якщо $\operatorname{Re} z$, то число $z = iy$ називається *суто уявним*.

Дійсні числа є частинним випадком комплексних, а саме таких, у яких уявна частина дорівнює нулю. Множина комплексних чисел позначається символом $\mathbb{C}$. Таким чином маємо ланцюжок включень:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Нехай задано комплексне число $z = x + iy$. Числом, *комплексно спряженим* до числа z, називається число $\overline{z} = x - iy$. Тобто $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \overline{z}$, $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} \overline{z}$.

Очевидно, що $\overline{\overline{z}} = z$.

Наведемо приклади комплексних чисел.

а) $z = 1 + 2i$; $\operatorname{Re} z = 1$, $\operatorname{Im} z = 2$;

б) $z = -3/2 - i\sqrt{2}$; $\operatorname{Re} z = -3/2$, $\operatorname{Im} z = -\sqrt{2}$;

в) $z = i$; $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = 1$;

г) $z = -5i$; $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = -5$;

д) $z = \sqrt{3} + 1$; $\operatorname{Re} z = \sqrt{3} + 1$; $\operatorname{Im} z = 0$.

2. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі

Запис комплексного числа у вигляді $z = x + iy$ називається *алгебраїчною формою* комплексного числа (як ми побачимо у подальшому, це не єдина можлива форма). Нехай задано два комплексні числа $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

Означення. *Сумою* комплексних чисел z_1, z_2 називається комплексне число $z = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

Тобто, щоб скласти два комплексні числа, треба окремо скласти їх дійсні та уявні частини:

$$z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2).$$

Означення. *Різницею* комплексних чисел z_1, z_2 називається комплексне число $z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$.

Таким чином, комплексні числа додаються та віднімаються за звичайними правилами алгебри (число i виноситься за дужки як звичайний спільний множник двох доданків).

Приклад. Нехай $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -4 + 5i$. Тоді $z_1 + z_2 = 3 - 4 + i(2 + 5) = -1 + 7i$; $z_1 - z_2 = (3 - (-4)) + i(2 - 5) = 7 - 3i$.

З правил додавання та віднімання, зокрема, випливає, що сума двох спряжених комплексних чисел є число дійсне, а різниця – суто уявне.

$$z + \overline{z} = x + iy + x - iy = 2x, \quad z - \overline{z} = x + iy - (x - iy) = 2iy.$$

За звичайними правилами алгебри здійснюється і множення комплексних чисел, але з урахуванням рівності $i^2 = -1$:

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + iy_1 x_2 + ix_1 y_2 + i^2 y_1 y_2 =$$
$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Наприклад: $(4+3i)(5-2i) = 4\cdot 5 + 3\cdot 5i - 4\cdot 2i - 6i^2 = 20 + 6 + i(15-8) =$
$= 26 + 7i$.

Перемножимо комплексно спряжені числа:

$$z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2.$$

Тобто добуток двох комплексно спряжених чисел є число дійсне.

Визначимо операцію ділення комплексних чисел.

Означення. *Часткою* чисел $z_1 = x_1 + iy_2$, $z_2 = x_2 + iy_2$ називається число $z = x + iy$, яке задовольняє рівність:

$$zz_2 = z_1. \tag{2.1}$$

Пишемо:

$$z = \frac{z_1}{z_2}.$$

Доведемо, що рівняння (2.1) має єдиний розв’язок, якщо тільки $z_2 \neq 0$, тобто $x_2 \neq 0$, $y_2 \neq 0$. Дійсно, з (2.1) маємо:

$$(x+iy)(x_2+iy_2) = x_1 + iy_1.$$

Або

$$x_2 x + ix_2 y + iy_2 x - y_2 y = x_1 + iy_1.$$

Дорівнюючи окремо дійсні та уявні частини в лівій і правій частинах цієї рівності, отримуємо систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно x, y:

$$\begin{cases} x_2 x - y_2 y = x_1, \\ y_2 x + x_2 y = y_1. \end{cases} \tag{2.2}$$

Визначник системи (2.2)

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix} = x_2^2 + y_2^2 > 0$$

(оскільки $x_2 \neq 0,\ y_2 \neq 0$), отже система (2.2) має єдиний розв'язок:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & -y_2 \\ y_1 & x_2 \end{vmatrix}}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\ , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{vmatrix}}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\ .$$

Таким чином, рівняння (2.1) також має єдиний розв'язок:

$$z = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\ .$$

Практично частку чисел z_1, z_2 зручніше знаходити множенням чисельника та знаменника дробу на число, спряжене знаменнику, а саме:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + iy_1 x_2 - ix_1 y_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} =$$
$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\ .$$

Приклади.

1. Обчислити $(2+3i)(4-5i)+(2-3i)(4+5i)$.

Маємо:

$$(2+3i)(4-5i)+(2-3i)(4+5i) = 8+12i-10i+15+8-12i+10i+15 = 46\ .$$

2. Обчислити $(4-3i)^2 + (2+i)^2$.

Маємо:

$$(4-3i)^2 + (2+i)^2 = 16 - 24i + 9i^2 + 4 + 4i + i^2 =$$
$$= 16 - 24i - 9 + 4 + 4i - 1 = 10 - 20i\ .$$

3. Знайти i^n, де n – будь-яке ціле число.

Почнемо з того, що $i^0 = 1$. Далі:

$$i^1 = i;$$
$$i^2 = -1;$$
$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i;$$
$$i^4 = \left(i^2\right)^2 = \left(-1\right)^2 = 1;$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i;$$
$$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1;$$
$$i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i;$$
$$i^8 = i^7 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = 1.$$

Легко помітити закономірність, а саме, що $\forall\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$i^{4k} = 1; \quad i^{4k+1} = i; \quad i^{4k+2} = -1; \quad i^{4k+3} = -i. \tag{2.3}$$

Розглянемо тепер:

$$i^{-1} = 1/i = -i \quad (\text{оскільки } -i \cdot i = -i^2 = 1);$$
$$i^{-2} = 1/i^2 = 1/(-1) = -1;$$
$$i^{-3} = 1/i^3 = -1/i = i;$$
$$i^{-4} = 1/i^4 = 1/1 = 1;$$
$$i^{-5} = 1/i^5 = 1/i = -i;$$
$$i^{-6} = 1/i^6 = 1/(-1) = -1;$$
$$i^{-7} = 1/i^7 = 1/(-i) = -1/i = i;$$
$$i^{-8} = 1/i^8 = 1/1 = 1.$$

Таким чином, легко бачити, що формули (2.3) справедливі не тільки $\forall\, k \in \mathbb{N}$, а і $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.

4. Обчислити

$$z = \frac{(1+2i)^2 - (2-i)^3}{(1-i)^3 + (2+i)^2}\ .$$

Маємо:

$$z = \frac{1+4i+4i^2-8+12i-6i^2+i^3}{1-3i+3i^2-i^3+4+4i+i^2} = \frac{1+4i-4-8+12i+6-i}{1-3i-3+i+4+4i-1} =$$

$$= \frac{-5+15i}{1+2i} = 5 \cdot \frac{-1+3i}{1+2i} = 5 \cdot \frac{(-1+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = 5 \cdot \frac{-1+3i+2i+6}{1+4} = 5+5i .$$

3. Аксіоматичне введення комплексних чисел

Комплексні числа можна ввести також формально на аксіоматичній основі.

Означення. *Комплексними числами* називаються впорядковані пари дійсних чисел (x, y), якщо для них визначено поняття рівності, а також операції додавання та множення:

1) два комплексні числа (x_1, y_1), (x_2, y_2) вважаються *рівними* тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$;

2) для будь-яких двох чисел (x_1, y_1), (x_2, y_2) визначено число $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, яке називається *сумою* цих чисел;

3) для будь-яких двох чисел (x_1, y_1), (x_2, y_2) визначено число $(x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1)$, яке називається *добутком* цих чисел.

З цих означень, зокрема, випливає, що:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0); \quad (x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1x_2, 0).$$

Це показує, що операції над комплексними числами вигляду $(x, 0)$ співпадають з операціями над дійсними числами. Тому комплексні числа вигляду $(x, 0)$ ототожнюються з дійсними числами: $(x, 0) = x$.

Комплексне число вигляду $(0,1)$ називається *уявною одиницею* і позначається i, тобто $i = (0,1)$. Тоді за означенням добутку:

$$i^2 = i \cdot i = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1.$$

Далі розглянемо:

$$(0,1)(y, 0) = (0, y) = iy , \qquad (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy .$$

Таким чином, будь-яке комплексне число (x, y) можна зобразити у вигляді $x + iy$. Такий вигляд називається *алгебраїчною формою* комплексного числа. Комплексні числа вигляду $(0, y) = iy$ називаються *суто уявними*. Зокрема, число $0 = (0, 0)$ – це єдине число, яке водночас є і дійсним, і суто уявним.

Дійсне число x називається *дійсною частиною* комплексного числа $z=(x,y)$ і позначається $\operatorname{Re}z$, а дійсне число y називається *уявною частиною* комплексного числа $z=(x,y)$ і позначається $\operatorname{Im}z$.

$$x=\operatorname{Re}z, \quad y=\operatorname{Im}z.$$

Число $(x,-y)$ називається *спряженим* до числа (x,y). Пишуть:

$$(x,-y)=\overline{(x,y)}.$$

Очевидно, що $\overline{\overline{(x,y)}}=(x,y)$. Добуток двох спряжених чисел дорівнює:

$$(x,y)\overline{(x,y)}=(x,y)(x,-y)=(x^2+y^2,xy-xy)=(x^2+y^2,0),$$

тобто є числом дійсним.

Операції віднімання та ділення комплексних чисел можна ввести на підставі операцій додавання та множення. Так, *різницею* комплексних чисел (x_1,y_1) та (x_2,y_2) назвемо таке число (x,y), що $(x,y)+(x_2,y_2)=(x_1,y_1)$. Звідси легко отримати, що $x=x_1-x_2$, $y=y_1-y_2$, тобто

$$(x_1,y_1)-(x_2,y_2)=(x_1-x_2,y_1-y_2).$$

Часткою чисел (x_1,y_1) та (x_2,y_2) назвемо число (x,y) таке, що $(x_2,y_2)(x,y)=(x_1,y_1)$. Звідси легко отримати (див. п.2), що, якщо $x_2^2+y_2^2>0$, то

$$x=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}, \quad y=\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

4. Геометрична інтерпретація комплексних чисел

Аксіоматичне введення комплексних чисел як впорядкованої пари двох дійсних чисел дає можливість їх наглядної геометричної інтерпретації. Якщо комплексне число $z=x+iy$ задається впорядкованою парою дійсних чисел (x,y), то цю пару можна розглядати як координати точки на площині. Цю точку природно позначити тією ж самою буквою z (рис. 1).

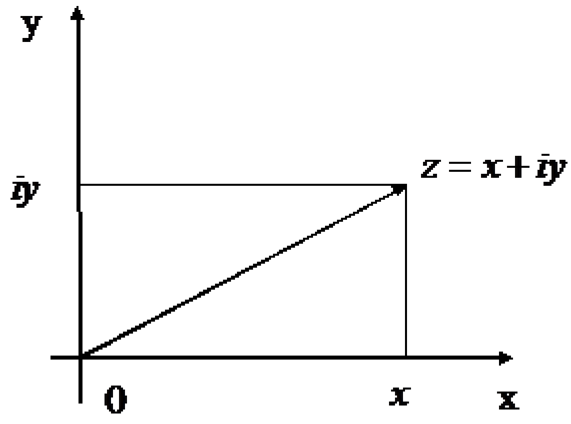


Рис. 1

Разом з цією точкою можна розглянути також і вектор з початком у точці 0 і кінцем у точці z. Цей вектор також позначається буквою z. Зокрема, дійсні числа зображуватимуться точками осі абсцис, а суто уявні числа – точками осі ординат. Тому вісь OX називається *дійсною віссю*, а вісь OY – *уявною віссю.* Площина, на якій зображуються комплексні числа, називається *комплексною площиною.*

Зрозуміло, що числа $z = x + iy$ та $\overline{z} = x - iy$ зображуються точками, симетричними відносно осі OX, а числа $z = x + iy$ та $-z = -x - iy$ – точками, симетричними відносно початку координат (рис. 2).

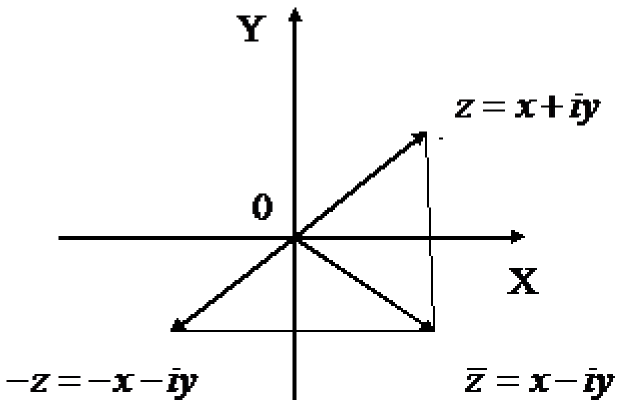


Рис. 2

Сума $z_1 + z_2$ та різниця $z_1 - z_2$ чисел z_1 та z_2 зображуються як вектори, які побудовано за звичайними правилами додавання та віднімання векторів (рис. 3).

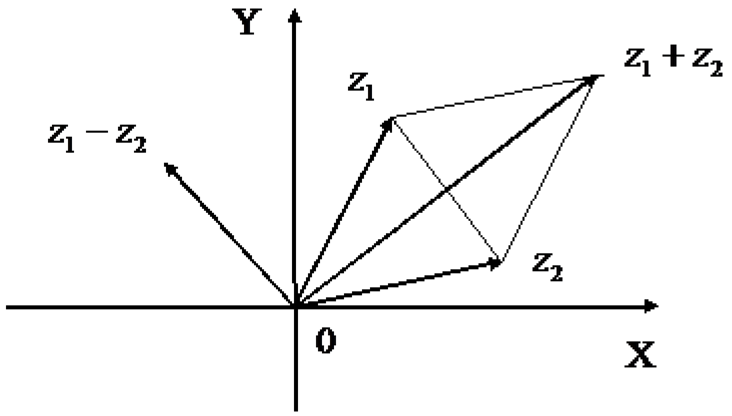


Рис. 3

5. Тригонометрична форма комплексного числа

Розглянемо на комплексній площині точку z, що відповідає комплексному числу $z = x + iy$ (рис. 4).

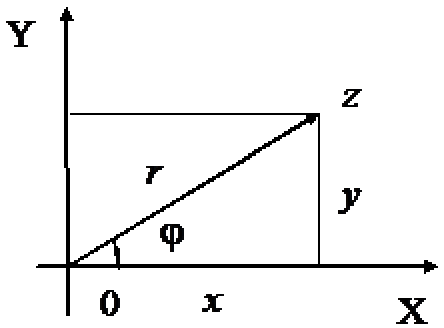


Рис. 4

Положення цієї точки можна однозначно визначити заданням не тільки її декартових координат x та y, але й заданням її полярних координат r та φ (див. розділ «Аналітична геометрія на площині»). При цьому величина $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (полярний радіус точки z) називається *модулем* комплексного числа z і позначається $|z|$, а кут φ (полярний кут точки z) називається *аргументом* комплексного числа z і позначається $\arg z$. Якщо відлік ведеться проти годинникової стрілки (у додатному напрямі), то величина кута φ вважається додатною, а якщо за годинниковою стрілкою (у від'ємному напрямі), то величина кута φ вважається від'ємною. Для числа $z = 0$ аргумент не визначено.

Пишемо:

$$r = |z|, \quad \varphi = \arg z.$$

Як було встановлено у п. 2, $z\bar{z} = |z|$.

З співвідношень між декартовими та полярними координатами точки z маємо:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{5.1}$$

Отже будь-яке комплексне число $z = x + iy$ можна подати у вигляді:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{5.2}$$

Запис комплексного числа z у вигляді (5.2) називається *тригонометричною формою* комплексного числа.

З (5.1) випливає, що:

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{5.3}$$

З рис. 4 видно, що справедливе й зворотне твердження: число φ є аргументом комплексного числа z тоді і тільки тоді, коли виконано обидві рівності (5.3). Отже, для знаходження аргументу комплексного числа $z = x + iy$ треба розв'язати систему рівнянь (5.3). Ця система має безліч розв'язків, і всі ці розв'язки задаються формулою $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, де φ_0 – один з розв'язків системи (5.3). Таким чином аргумент комплексного числа визначається неоднозначно, тобто

$$\arg z = \varphi_0 + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{5.4}$$

Дійсно, якщо ми вектор z будемо обертати навколо початку координат на будь-якій кут, кратний 2π, то ми кожного разу будемо отримувати той самий вектор z і точку z.

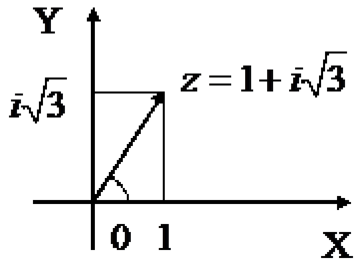
З (5.3) випливає, що

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} . \tag{5.5}$$

Але не всі розв'язки рівняння (5.5) є розв'язками системи (5.3).

Приклади. 1. Наступні числа зобразити точками на комплексній площині та записати у тригонометричній формі.

а) $z = 1 + i\sqrt{3}$. Маємо:



$$r = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2 .$$

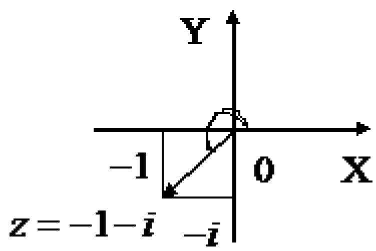
$$\cos\varphi = \frac{1}{2} , \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Звідси $\varphi = \pi/3$, і таким чином:

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

б) $z = -1 - i$.

Маємо:



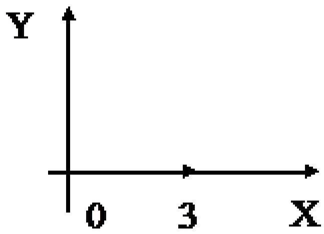
$$r=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}.$$

$$\cos\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Звідси $\varphi=5\pi/4$, і таким чином:

$$-1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

в) $z=3$. Маємо:



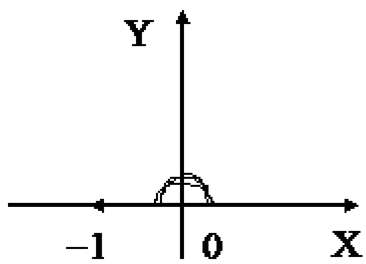
$$r=\sqrt{3^2+0^2}=3.$$

$$\cos\varphi=1, \quad \sin\varphi=0.$$

Звідси $\varphi=0$, і таким чином:

$$3=3(\cos 0+i\sin 0).$$

г) $z=-1$. Маємо:



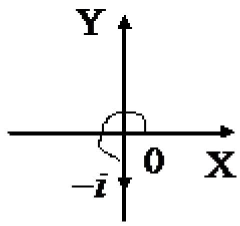
$$r=\sqrt{(-1)^2+0^2}=1.$$

$$\cos\varphi=-1, \quad \sin\varphi=0.$$

Звідси $\varphi = \pi$, і таким чином:

$$-1 = 1 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi) = \cos\pi + i\sin\pi .$$

д) $z = -i$. Маємо:



$$r = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1 .$$

$$\cos\varphi = 0 , \quad \sin\varphi = -1 .$$

Звідси $\varphi = 3\pi/2$, і таким чином:

$$-i = 1 \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} \right) = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} .$$

2. Записати у тригонометричній формі число $z = 2 + \sqrt{3} + i$.
Маємо:

$$r = \sqrt{\left(2 + \sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} .$$

$$\cos\varphi = \frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}} .$$

Звідси

$$\varphi = \arcsin\frac{1}{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}} ,$$

$$2 + \sqrt{3} + i = 2\sqrt{1 + \sqrt{3}} \left(\cos\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}} + i\sin\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}} \right).$$

3. Записати у тригонометричній формі числа

$$z_1 = (-2)\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right), \quad z_2 = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right),$$

$$z_3 = \sin\frac{3\pi}{4} + i\cos\frac{3\pi}{4}\ , \quad z_4 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

За зовнішнім виглядом запису цих чисел може скластися враження, що кожне з них вже й записано в тригонометричній формі. Але, якщо придивитися уважно, то можна помітити, що всі ці вигляди відрізняються від форми (5.2). У числа z_1 у якості r стоїть від'ємне число, що неможливо. У числа z_2 у дужках не «плюс», а «мінус». У числа z_3 число i множиться на косинус, а не на синус. У числа z_4 під знаками синуса та косинуса різні значення φ.

а) $z_1 = (-2)\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right) = -2\cos\frac{\pi}{5} - 2i\sin\frac{\pi}{5}$.

Маємо:

$$r = \sqrt{\left(-2\cos\frac{\pi}{5}\right)^2 + \left(-2\sin\frac{\pi}{5}\right)^2} = \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{5} + 4\sin^2\frac{\pi}{5}} =$$

$$= \sqrt{4\left(\cos^2\frac{\pi}{5} + \sin^2\frac{\pi}{5}\right)} = \sqrt{4} = 2.$$

$$\cos\varphi = \frac{-2\cos\frac{\pi}{5}}{2} = -\cos\frac{\pi}{5}\ , \quad \sin\varphi = \frac{-2\sin\frac{\pi}{5}}{2} = -\sin\frac{\pi}{5}\ ,$$

звідки $\varphi = 6\pi/5$. Таким чином:

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}\right).$$

б) $z_2 = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 3\cos\frac{2\pi}{3} - 3i\sin\frac{2\pi}{3}$.

Маємо:

$$r=\sqrt{\left(3\cos\frac{2\pi}{3}\right)^2+\left(-3\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2}=\sqrt{9\cos^2\frac{2\pi}{3}+9\sin^2\frac{2\pi}{3}}=\sqrt{9}=3.$$

$$\cos\varphi=\frac{3\cos\frac{2\pi}{3}}{3}=\cos\frac{2\pi}{3}\ ,\quad \sin\varphi=-\frac{3\sin\frac{2\pi}{3}}{3}=-\sin\frac{2\pi}{3},$$

звідки $\varphi=4\pi/3$. Таким чином:

$$z_2=3\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

в) $z_3=\sin\frac{3\pi}{4}+i\cos\frac{3\pi}{4}$.

Маємо:

$$r=\sqrt{\sin^2\frac{3\pi}{4}+\cos^2\frac{3\pi}{4}}=1\ .$$

$$\cos\varphi=\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\varphi=\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

звідки $\varphi=7\pi/4$. Таким чином:

$$z_3=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\ .$$

г) $z_4=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=2\cos\frac{\pi}{3}+2i\sin\frac{3\pi}{4}.$

Маємо:

$$r=\sqrt{\left(2\cos\frac{\pi}{3}\right)^2+\left(2\sin\frac{3\pi}{4}\right)^2}=\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{3}+4\sin^2\frac{3\pi}{4}}=$$

$$= \sqrt{4\left(\cos^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{3\pi}{4}\right)} = \sqrt{4\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)} = \sqrt{3}.$$

$$\cos\varphi = \frac{2\cos\frac{\pi}{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \sin\varphi = \frac{2\sin\frac{\pi}{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = -\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Звідси випливає, що кут φ лежить у IV квадранті, і $\operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{2}$. Отже $\varphi = -\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. Таким чином:

$$z_4 = \sqrt{3}\left(\cos\left(-\operatorname{arctg}\sqrt{2}\right) + i\sin\left(-\operatorname{arctg}\sqrt{2}\right)\right).$$

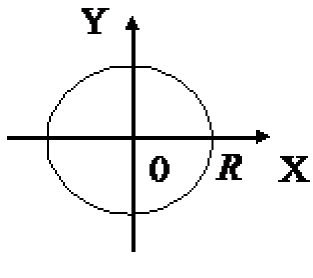
4. Описати множину точок, яка задається:

1) рівністю: $|z| = R$.

Маємо: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = R$, тобто

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Отримали рівняння кола з центром у початку координат і радіуса R. Таким чином, шуканою множиною є саме це коло:



2) рівністю $|z - z_0| = R$, де z_0 – задана фіксована точка комплексної площини.

Нехай $z_0 = x_0 + iy_0$. Тоді

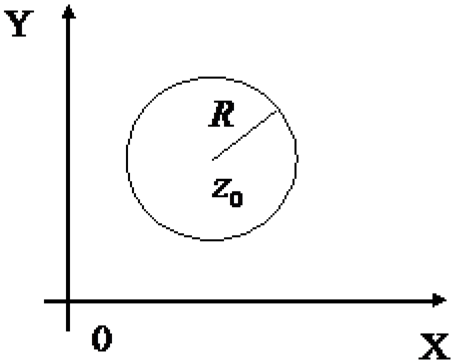
$$|z - z_0| = |x + iy - x_0 - iy_0| = |(x - x_0) + i(y - y_0)| =$$

$$= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R,$$

тобто

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

Таким чином, шуканою множиною є коло з центром у точці z_0 і радіусом R.

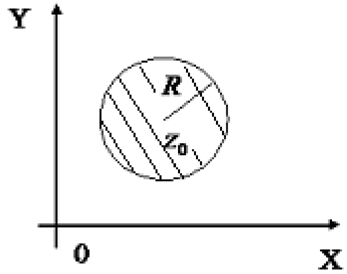


3) нерівністю $|z-z_0|\le R$, де z_0 – задана фіксована точка комплексної площини.

Задана нерівність еквівалентна наступній:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le R^2,$$

де $x_0=\operatorname{Re} z_0$, $y_0=\operatorname{Im} z_0$. Ця нерівність описує круг з центром у точці z_0 і радіусом R:

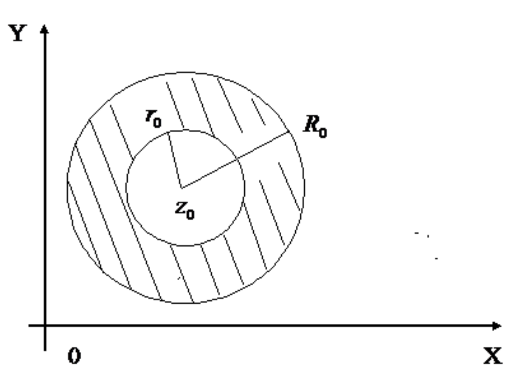


4) нерівністю $r_0\le|z-z_0|\le R_0$.

Ця нерівність еквівалентна наступній:

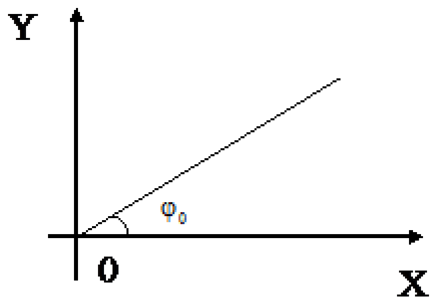
$$r_0^2\le(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le R_0^2,$$

де $x_0=\operatorname{Re} z_0$, $y_0=\operatorname{Im} z_0$. Вона описує кільце між двома концентричними колами з центром у точці z_0 та радіусів r_0 та R_0:



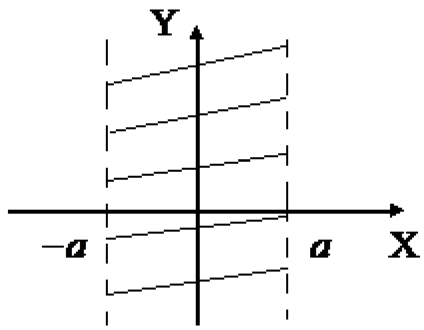
5) рівністю $\arg z = \varphi_0$.

З геометричного змісту аргументу комплексного числа легко зрозуміти, що шуканою множиною є промінь, який виходить з початку координат під кутом φ_0 до додатного напряму осі OX :



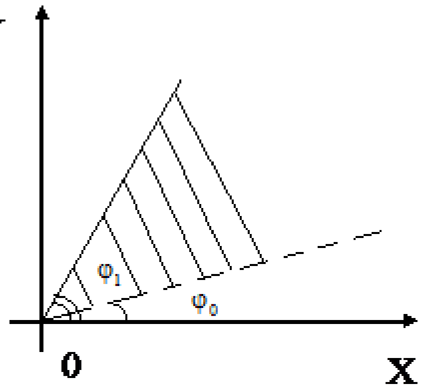
6) нерівністю $|\operatorname{Re} z| < a$, де $a > 0$.

Ця нерівність еквівалентна нерівності $|x| < a$, якою описується смуга
$-a < x < a$ без її межей:



7) нерівністю $\varphi_0 < \arg z \le \varphi_1$.

Легко зрозуміти, що це є сектор, який утворено променями $\arg z = \varphi_0$ та $\arg z = \varphi_1$, але за виключенням променя $\arg z = \varphi_0$:



6. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі

Нехай задано два комплексні числа в тригонометричній формі:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Розглянемо їх добуток:

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \qquad (6.1)$$

Формула (6.1) легко поширюється на будь-яке число множників, тобто, якщо $z_j = r_j(\cos\varphi_j + i\sin\varphi_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, то

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n(\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)). \qquad (6.2)$$

Тобто модуль добутку комплексних чисел дорівнює добутку їх модулів, а аргумент добутку комплексних чисел дорівнює сумі їх аргументів.

Зокрема, якщо $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то з формули (6.2) випливає формула для підведення комплексного числа z у натуральну степінь n:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (6.3)$$

Тобто при підведенні комплексного числа у натуральну степінь n модуль числа підводиться у степінь n, а аргумент числа множиться на n.

Формула (6.3) називається *формулою Муавра*[1].

Розглянемо тепер частку z_1/z_2 у припущенні, що $r_2 \neq 0$. Якщо ця частка є числом $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то $z_1 = z_2 z$, і згідно з формулою (6.1) маємо $r_2 r = r_1$, $\varphi_2 + \varphi = \varphi_1$, звідки $r = r_1/r_2$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Таким чином, дістаємо формулу:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \qquad (6.4)$$

тобто модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці їх модулів (якщо модуль знаменника відмінний від нуля), а аргумент – різниці їх аргументів.

Приклади.

1. Користуючись формулою Муавра знайти $(1+i)^{12}$.

Запишемо число $1+i$ в тригонометричній формі:

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

За формулою Муавра отримаємо:

$$(1+i)^{12} = \left(\sqrt{2}\right)^{12}\left(\cos\frac{12\pi}{4} + i\sin\frac{12\pi}{4}\right) = 2^6(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = 64\cdot(-1) = -64.$$

2. Знайти

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{10}.$$

Запишемо у тригонометричній формі чисельник і знаменник дробу, що у дужках:

---

[1] Муавр Абрахам де (1667–1754) – англійський математик.

$$1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right),\quad 1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

Згідно з формулою (6.4):

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}=\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{7\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{17\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{17\pi}{12}\right)\right).$$

І згідно з формулою Муавра:

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{10}=\left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos\left(-\frac{17\pi}{12}\cdot 10\right)+i\sin\left(-\frac{17\pi}{12}\cdot 10\right)\right)=$$

$$=2^{5}\left(\cos\frac{85\pi}{6}-i\sin\frac{85\pi}{6}\right)=32\left(\cos\left(14\pi+\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(14\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)=$$

$$=32\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)=32\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\cdot\frac{1}{2}\right)=16\sqrt{3}-16i.$$

7. Добування кореня з комплексного числа

Розглянемо комплексне число в тригонометричній формі:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Означення. *Коренем* натурального степеня n з числа z називається таке комплексне число p, що задовольняє рівність: $p^n=z$. Позначаємо:

$$p=\sqrt[n]{z}.$$

Подамо число p також у тригонометричній формі:

$$p=\rho(\cos\theta+i\sin\theta).$$

Тоді згідно з формулою Муавра:

$$p^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

Звідси випливає, що $\rho^n = r$, отже $\rho = \sqrt[n]{r}$, де у правій частині рівності стоїть однозначно визначене значення кореня n-го степеня з додатного дійсного числа r. Аргумент числа p^n дорівнює $n\theta$, але стверджувати, що він дорівнює φ не можна, оскільки аргументи рівних комплексних чисел можуть відрізнятися на величину, кратну 2π. Тому $n\theta = \varphi + 2k\pi$, де $k \in \mathbb{Z}$, звідки:

$$\theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Таким чином:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right). \tag{7.1}$$

Покладемо у цій рівності послідовно $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Отримаємо наступні n значень кореня:

$$p_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right),$$

$$p_1 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi}{n}\right),$$

. . .

$$p_{n-1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n}\right).$$

Всі ці значення різні, серед них нема співпадаючих. Але якщо ми покладемо $k = n$, то отримаємо:

$$p_n = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2n\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2n\pi}{n}\right) =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right)\right)=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)=p_0,$$

тобто ми отримали корінь p_0, який вже було враховано. Покладаючи далі $k = n+1,\ldots,2n-1$, аналогічно отримаємо:

$$p_{n+1}=p_1,\;\; p_{n+2}=p_2,\;\ldots,\; p_{2n-1}=p_{n-1},$$

тобто ми отримуємо ті ж самі значення кореня, що й при значеннях $k=0,1,\ldots,n-1$. Легко зрозуміти, що й при подальших значеннях $k=2n,2n+1,\ldots$, а також при від'ємних цілих k формула (7.1) буде давати тільки такі значення коренів, що й при $k=0,1,\ldots,n-1$ внаслідок 2π-періодичності функцій $\sin x$, $\cos x$. Тобто різні значення кореня n-го степеня з числа z отримуються лише при $k=0,1,\ldots,n-1$. Отже, остаточно для цих значень маємо:

$$p_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\;\; k=0,1,\ldots,n-1. \qquad (7.2)$$

Помітимо, що модулі всіх цих значень однакові і дорівнюють $\sqrt[n]{r}$. Це означає, що точки на комплексній площині, що відповідають цим значенням, розташовані на колі з центром у початку координат і радіусом $\sqrt[n]{r}$. Аргументи кожних двох сусідніх значень відрізняються на величину $2\pi/n$. Це означає, що точками, які відповідають значенням кореня n-го степеня, вказане коло ділиться на n рівних частин (рис. 5).

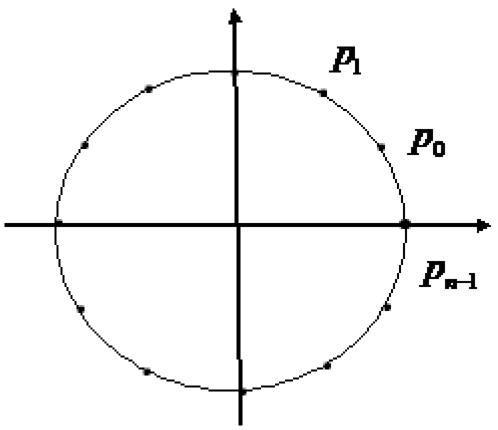


Рис. 5

Приклади.

1. Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{8}$ і відмітити ці значення на комплексній площині.

Запишемо число 8 у тригонометричній формі:

$$8 = 8(\cos 0 + i\sin 0).$$

За формулою (7.2) маємо:

$$p_k = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right), \quad k = 0,1,2.$$

Звідси отримуємо:

$$p_0 = 2(\cos 0 + i\sin 0) = 2,$$

$$p_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3},$$

$$p_2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

Розташування точок p_0, p_1, p_2 на комплексній площині показано на рис. 6. Ці точки ділять коло $|z| = 2$ на 3 рівні частини.

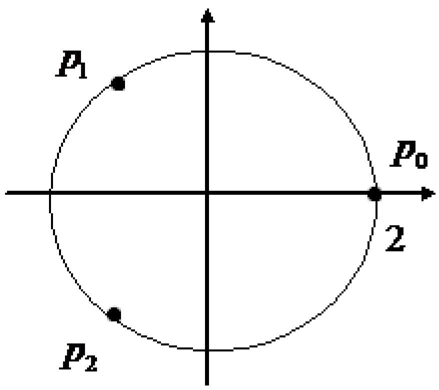


Рис. 6

2. Знайти всі значення кореня:

$$\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i}}\ .$$

Маємо:

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right),\quad 1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

За формулою (6.4) дістанемо:

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\ .$$

Тепер за формулою (7.2) дістанемо:

$$p_k=\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{6}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{6}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{3}\right),$$

$k=0,1,2,3,4,5$.

Звідси отримуємо:

$$p_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,$$

$$p_1=\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}=-\sqrt{\frac{1+\cos\frac{7\pi}{6}}{2}}+i\sqrt{\frac{1-\cos\frac{7\pi}{6}}{2}}=$$

$$=-\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}+i\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}+i\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\ .$$

$$p_2=\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}=-\sqrt{\frac{1+\cos\frac{11\pi}{6}}{2}}+i\sqrt{\frac{1-\cos\frac{11\pi}{6}}{2}}=$$

$$=-\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}+i\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\ .$$

$$p_3=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$p_4=\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{19\pi}{6}}{2}}-i\sqrt{\frac{1-\cos\frac{19\pi}{6}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}-i\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}-i\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\ .$$

$$p_5=\cos\frac{23\pi}{12}+i\sin\frac{23\pi}{12}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{23\pi}{6}}{2}}-i\sqrt{\frac{1-\cos\frac{23\pi}{6}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}-i\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}-i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\ .$$

Тут при обчисленні значень тригонометричних функцій для аргументів, кратних $\pi/12$, скористалися формулами:

$$\cos x=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}},\quad \sin x=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}},$$

де знак перед коренем обирається в залежності від того, у якій чверті лежить кут x.

8. Корені з одиниці

Розглянемо окремо випадок добування кореня n-го степеня з числа 1. Оскільки $1=\cos 0+i\sin 0$, то згідно з формулою (7.2) цей корінь має n значень:

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0,1,\ldots,n-1. \qquad (8.1)$$

Дійсні значення кореня n-го степеня з одиниці отримуються з формули (8.1) при $k = 0$ і $k = n/2$ якщо n парне, і тільки при $k = 0$, якщо n непарне. На комплексній площині значення кореня n-го степеня з одиниці розташовані на одиничному колі $|z| = 1$ і ділять її на n рівних дуг. Одною з точок ділення є число 1. Звідси випливає, що ті значення кореня n-го степеня з одиниці, які не є дійсними, розташовані симетрично відносно дійсної осі, тобто попарно спряжені.

Приклади

1. Знайти значення $\sqrt{1}$.

Згідно з формулою (8.1) маємо:

$$\varepsilon_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \cos\pi + i\sin\pi = -1.$$

Ці корені дійсні (рис. 7).

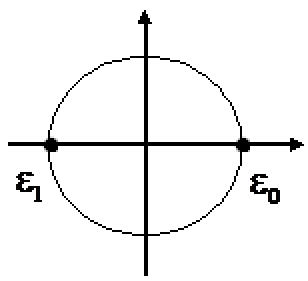


Рис. 7

2 . Знайти значення $\sqrt[3]{1}$.

Згідно з формулою (8.1) маємо:

$$\varepsilon_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1,$$

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Розташування цих коренів на одиничному колі показано на рис. 8.

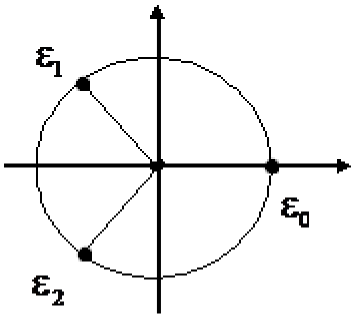


Рис. 8

3. Знайти значення $\sqrt[4]{1}$.

Згідно з формулою (8.1) маємо:

$$\varepsilon_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i,$$

$$\varepsilon_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1, \quad \varepsilon_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

Розташування точок, що відповідають цим значенням, показано на рис. 9.

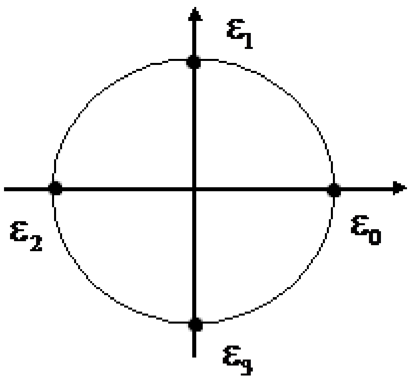


Рис. 9

4. Знайти значення $\sqrt[6]{1}$.

Згідно з формулою (8.1) маємо:

$$\varepsilon_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} ,$$

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} , \quad \varepsilon_3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

$$\varepsilon_4 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon_5 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Розташування точок, що відповідають цим значенням, показано на рис. 10.

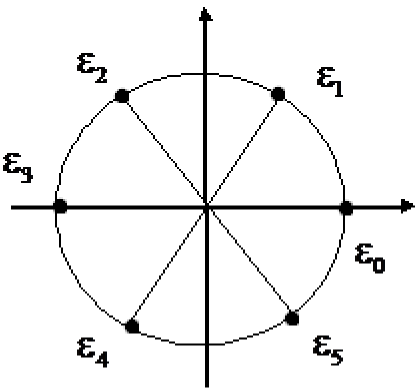


Рис. 10

Всі значення кореня n-го степеня з комплексного числа z можна отримати множенням одного з цих значень (наприклад, p_0) на всі значення кореня n-го степеня з 1. Дійсно, з формул (7.2) і (8.1), а також (6.1), маємо:

$$p_0\varepsilon_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) = p_k .$$

Приклад. Одним зі значень $\sqrt[3]{8}$ є 2. Отже іншими значеннями кореня $\sqrt[3]{8}$ будуть (див. приклад 2 на стор. 29):

$$p_1 = 2\varepsilon_1 = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3},$$

$$p_2 = 2\varepsilon_2 = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

Добуток двох коренів n-го степеня з одиниці також є коренем n-го степеня з одиниці. Дійсно, якщо $\varepsilon^n = 1$, $\eta^n = 1$, то $(\varepsilon\eta)^n = \varepsilon^n\eta^n = 1$. Або, нехай

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad \varepsilon_j = \cos\frac{2j\pi}{n} + i\sin\frac{2j\pi}{n}.$$

Тоді

$$\varepsilon_k\varepsilon_j = \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{2j\pi}{n} + i\sin\frac{2j\pi}{n}\right) =$$

$$= \cos\frac{2(k+j)\pi}{n} + i\sin\frac{2(k+j)\pi}{n} = \varepsilon_{k+j}.$$

Далі, будь-яка степінь кореня n-го степеня з 1 також є коренем n-го степеня з 1. Дійсно:

$$\varepsilon_k^m = \cos\frac{2km\pi}{n} + i\sin\frac{2km\pi}{n} = \varepsilon_{km}.$$

Розглянемо корені степеня m з 1:

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Всі ці корені будуть також коренями степеня jm з 1, де $j \in \mathbb{N}$, оскільки, якщо $\varepsilon^m = 1$, то $\varepsilon^{jm} = (\varepsilon^m)^j = 1^j = 1$.

Звідси, якщо розглянути всю сукупність (8.1) коренів n-го степеня з 1, то деякі з цих коренів будуть коренями n'-го степеня з 1, де n' – дільник числа n. Наприклад, серед коренів 6-го степеня з 1 (приклад 4) є корені 2-го степеня з 1:

$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_3 = -1.$

А також є корені 3-го степеня з 1:

$$\varepsilon_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Числа 2 і 3 є дільниками числа 6.

Разом з цим серед коренів n-го степеня з 1 є такі, що не є коренями ніякого меншого степеня з 1. Такі корені називаються *первісними коренями* n-го степеня з 1. Наприклад, серед коренів 6-го степеня з 1 первісними будуть:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon_5 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

З формули (8.1) і формули Муавра випливає:

$$\varepsilon_1^k = \varepsilon_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{8.2}$$

Оскільки серед чисел ε_k $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ одиниці нема (одиниці дорівнює тільки ε_0), то з (8.2) випливає, що будь-яка степінь числа 1, що менша за n, не буде дорівнювати 1. А це означає, що $\varepsilon_1 = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ є первісним коренем n-го степеня з 1.

Корінь ε n-го степеня з 1 буде первісним тоді і тільки тоді, коли всі його степені ε^k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ різні, тобто ними вичерпуються всі значення кореня n-го степеня з 1. Дійсно, якщо всі вказані степені числа ε різні, то ε буде, очевидно, первісним коренем n-го степеня з 1. А якщо існують такі два натуральні числа k, l $(0 \le k < l \le n-1)$, що виконується рівність $\varepsilon^k = \varepsilon^l$, то $\varepsilon^l / \varepsilon^k = 1$, або $\varepsilon^{l-k} = 1$, тобто ε є коренем з 1 степеня $l-k$ $(1 \le l-k \le n-1)$, отже ε не є первісним.

Число ε_1 у загальному випадку не єдиний первісний корінь n-го степеня з 1. Для відшукання всіх цих коренів є наступна теорема.

Теорема. *Якщо ε є первісним коренем n-го степеня з 1, то число ε^k буде первісним коренем n-го степеня з 1 тоді і тільки тоді, коли k взаємно просто з n, тобто найбільший спільний дільник чисел k і n дорівнює 1.*

<u>Доведення</u>. Позначимо через d – найбільший спільний дільник чисел k і n. Припустимо спочатку, що $d > 1$, тобто k не взаємно просто з n. Тоді існують такі натуральні числа k' і n', що $k = dk'$ і $n = dn'$. Розглянемо:

$$(\varepsilon^k)^{n'} = \varepsilon^{kn'} = \varepsilon^{kn/d} = \varepsilon^{knk'/k} = \varepsilon^{k'n} = (\varepsilon^n)^{k'} = 1^{k'} = 1,$$

тобто корінь ε^k є коренем степеня n' з 1. А це означає, що корінь ε^k не є первісним.

Нехай тепер $d=1$, тобто k взаємно просто з n. Припустимо, що ε^k є коренем степеня m $(1 \le m \le n)$ з 1, тобто не є первісним. Тоді $(\varepsilon^k)^m = \varepsilon^{km} = 1$. Оскільки за умовою теореми ε є первісним коренем n-го степеня з 1, то лише його степені, які кратні n, можуть дорівнювати 1. Звідси випливає, що km є кратним n. Але оскільки $1 \le m \le n$, то числа k і n не можуть бути взаємно простими, що суперечить припущенню. Дійсно, якби k і n були взаємно простими, то їх найменше спільне кратне дорівнювало б їх добутку kn. А у нас вийшло, що їх найменше спільне кратне дорівнює $km < kn$.

Теорему доведено.

Таким чином, число первісних коренів n-го степеня з 1 дорівнює кількості натуральних чисел, які менше n і взаємно прості з n. Зокрема, якщо n число просте, то первісними коренями n-го степеня з 1 будуть всі корені n-го степеня з 1, крім самої 1.

Приклад. Знайти первісні корені з 1 степеня 8.

Числа, що менше 8 і взаємно прості з 8, є 1, 3, 5, 7. Отже первісними будуть корені:

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{8} + i\sin\frac{2\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \ ,$$

$$\varepsilon_3 = \cos\frac{6\pi}{8} + i\sin\frac{6\pi}{8} = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \ ,$$

$$\varepsilon_5 = \cos\frac{10\pi}{8} + i\sin\frac{10\pi}{8} = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \ ,$$

$$\varepsilon_7 = \cos\frac{14\pi}{8} + i\sin\frac{14\pi}{8} = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \ .$$

9. Застосування комплексних чисел до розв'язання квадратних рівнянь

Повернемось тепер до задачі, про яку йшлося у п. 1, а саме, розглянемо квадратне рівняння:

$$x^2 + px + q = 0 \tag{9.1}$$

з дійсними коефіцієнтами p, q у припущенні, що його дискримінант від’ємний, тобто $d = p^2 - 4q < 0$.

Використовуючи формулу для коренів квадратного рівняння, отримаємо:

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{d}}{2} = \frac{-p \pm i\sqrt{-d}}{2} = \frac{-p \pm i\sqrt{4q - p^2}}{2} =$$

$$= -\frac{p}{2} \pm i\frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} .$$

Таким чином, квадратне рівняння з дійсними коефіцієнтами і від’ємним дискримінантом має два комплексно спряжені корені.

Приклади.

1. Знайти корені рівняння:

$$x^2 + 3x + 6 = 0.$$

Маємо:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 24}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-15}}{2} = -\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{15}}{2} .$$

2. Знайти корені рівняння:

$$x^4 - 4 = 0.$$

Розкладемо ліву частину рівняння на множники:

$$x^4 - 4 = \left(x^2 - 2\right)\left(x^2 + 2\right).$$

Тоді наше рівняння розпадається на два незалежні рівняння $x^2 - 2 = 0$ та $x^2 + 2 = 0$. Коренями першого з цих рівнянь є $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, а коренями другого – $x_{3,4} = \pm i\sqrt{2}$. Зауважимо, що всі ці корені можна було б знайти і як всі значення $\sqrt[4]{4}$.

3. Знайти корені рівняння:

$$x^4 + 4 = 0.$$

Корені цього рівняння можна знайти як всі значення $\sqrt[4]{-4}$. Але можна й інакше. Перетворимо ліву частину рівняння наступним чином:

$$x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=\left(x^2+2\right)^2-(2x)^2=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2).$$

Тоді наше рівняння розпадається на 2 незалежні рівняння. Перше з них:

$$x^2-2x+2=0.$$

Його корені:

$$x_{1,2}=1\pm\sqrt{1-2}=1\pm\sqrt{-1}=1\pm i.$$

Друге рівняння:

$$x^2+2x+2=0.$$

Його корені:

$$x_{3,4}=-1\pm\sqrt{1-2}=-1\pm\sqrt{-1}=-1\pm i.$$

У рівняннях, що розглядалися, коефіцієнти були дійсними. Але коефіцієнти квадратного рівняння також можуть бути комплексними.

Приклад. Знайти корені рівняння:

$$x^2-(2+i)x+(-1+7i)=0.$$

Знайдемо дискримінант цього рівняння:

$$d=(2+i)^2-4(7i-1)=4+4i-1-28i+4=7-24i.$$

За формулою коренів квадратного рівняння маємо:

$$x_{1,2}=\frac{2+i+\sqrt{7-24i}}{2}.$$

Зауважимо, що тут під символом $\sqrt{7-24i}$ розуміються обидва значення квадратного кореня з числа $7-24i$, тому у формулі перед знаком $\sqrt{\ }$ ми не пишемо $\pm$.

Запишемо число $7-24i$ у тригонометричній формі:

$$7-24i=25\left(\cos\left(2\pi-\arccos\frac{7}{25}\right)+i\sin\left(2\pi-\arccos\frac{7}{25}\right)\right).$$

Квадратні корені з цього числа:

$$p_0=5\left(\cos\frac{2\pi-\arccos(7/25)}{2}+i\sin\frac{2\pi-\arccos(7/25)}{2}\right)=$$

$$=5\left(\cos\left(\pi-\frac{1}{2}\arccos\frac{7}{25}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{1}{2}\arccos\frac{7}{25}\right)\right)=$$

$$=5\left(-\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{7}{25}\right)+i\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{7}{25}\right)\right)=$$

$$=5\left(-\sqrt{\frac{1+\cos\left(\arccos\frac{7}{25}\right)}{2}}+i\sqrt{\frac{1-\cos\left(\arccos\frac{7}{25}\right)}{2}}\right)=$$

$$=5\left(-\frac{4}{5}+i\frac{3}{5}\right)=-4+3i.$$

Звідси одразу ж маємо: $p_1=4-3i$. Таким чином:

$$x_1=\frac{2+i+(-4+3i)}{2}=-1+2i,\quad x_2=\frac{2+i+(4-3i)}{2}=3-i.$$

Це й є корені нашого рівняння.

Контрольні питання

1. Що таке уявна одиниця?
2. Що таке комплексне число? Що таке суто уявне число? Чи є дійсні числа частинним випадком комплексних чисел? Як саме дійсне число можна отримати з комплексного числа?
3. Як виконуються дії над комплексними числами в алгебраїчній формі?
4. Що уявляє собою комплексне число з геометричної точки зору?
5. Що таке тригонометрична форма комплексного числа? Що таке модуль і аргумент комплексного числа?
6. Чи випливає з рівності двох комплексних чисел рівність їх модулів? Чи випливає рівність їх аргументів?
7. Чому дорівнює модуль добутку двох комплексних чисел? Чому дорівнює аргумент добутку двох комплексних чисел?
8. Чому дорівнює модуль частки двох комплексних чисел? Чому дорівнює аргумент частки двох комплексних чисел?
9. Чому дорівнюють модуль та аргумент комплексного числа, яке підведено до натурального степеня?
10. Як добувається корінь натурального степеня з комплексного числа?
11. Скільки існує різних значень кореня n-го степеня ($n \in \mathbb{N}$) з комплексного числа? Як розташовуються на комплексній площині точки, що відповідають цим значенням?
12. Що таке первісні корені з одиниці?
13. За яким принципом можна знайти всі первісні корені з одиниці?
14. Як використовуються комплексні числа при розв’язанні квадратних рівнянь з від’ємним дискримінантом?

Вправи для самостійного розв'язання

1. Виконати дії над комплексними числами в алгебраїчній формі:

1) $(-5+3i)(2-i)$; 2) $(2{,}5-3{,}7i)^2$; 3) $(\pi+ei)^3$; 4) $i(2+7i)^2$;

5) $\dfrac{4{,}1-2{,}3i}{3{,}2+5{,}1i}$; 6) $\dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i\sqrt{2}}\left(\sqrt{6}+i\right)$; 7) $\left(\dfrac{3-2i}{4+i}\right)^3$; 8) $(1+i)^3-(1-i)^3$;

9) $\left(\dfrac{2+i^5}{1-i^{19}}\right)^3$; 10) $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^4}$; 11) $\dfrac{(2+3i)^4}{(i-1)^3}(3-i)^2$; 12) $\left(i^{11}-i^{27}\right)\left(i^{14}+i^{33}\right)$.

2. З'ясувати за яких умов добуток двох комплексних чисел є суто уявним.

3. Наступні числа зобразити точками на комплексній площині та записати у тригонометричній формі.

1) $z=-7$; 2) $z=5{,}2$; 3) $z=4{,}7i$; 4) $z=-\pi i$; 5) $z=5+5i$; 6) $z=\sqrt{3}-i$;

7) $z=1+i\left(\sqrt{2}-1\right)$; 8) $z=2\left(\sin\dfrac{\pi}{3}+i\cos\dfrac{\pi}{3}\right)$; 9) $z=-3\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}-i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

4. Зобразити на комплексній площині множину точок, яка задається співвідношеннями:

1) $|z+2i|=3$; 2) $|z-1|\le 2$; 3) $1\le|z+i-1|<3$; 4) $|z+3-2i|>\dfrac{3}{2}$;

5) $\arg z=\dfrac{\pi}{4}$; 6) $-\dfrac{\pi}{2}\le\arg z\le\dfrac{\pi}{2}$; 7) $|\pi-\arg z|<\dfrac{\pi}{4}$; 8) $\arg(z-i)=\dfrac{\pi}{3}$;

9) $0<\arg(z+1)<\dfrac{\pi}{6}$; 10) $|z-1|=|z+i|$; 11) $1<\operatorname{Re} z<2$; 12) $|\operatorname{Re}(z-2)|\le 1$;

13) $|\operatorname{Im}(z+i)|>-2$; 14) $|z-1|=|\operatorname{Re} z|$; 15); $|z+2i|=|\operatorname{Im} z|$;

16) $\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z\le 2$; 17) $|z-1|+|z+1|=2a$; 18) $\big||z-i|-|z+i|\big|=2a$.

5. Користуючись формулою Муавра, знайти:

1) $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)^5$; 2) $(-1+i)^6$; 3) $\left(1+\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^4$; 4) $\left(\dfrac{1}{1+i}\right)^{10}$;

5) $\left(1-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$; 6) $\dfrac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1-i)^{20}}+\dfrac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1+i)^{20}}$.

6. Знайти всі значення кореня.

1) $\sqrt[3]{-1}$; 2) $\sqrt[4]{i}$; 3) $\sqrt[3]{-8i}$; 4) $\sqrt[4]{1/256}$; 5) $\sqrt[3]{-8+8i}$; 6) $\sqrt[4]{-8+8i\sqrt{3}}$;
7) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{3}+i}{i}}$; 8) $\sqrt[4]{2-i\sqrt{12}}$; 9) $\sqrt{-11+60i}$; 10) $\sqrt[6]{64}$; 11) $\sqrt[5]{\dfrac{i}{1+i}}$; 12) $\sqrt[3]{-27}$.

7. Знайти всі корені з одиниці степенів 5, 8, 12.

8. Виписати первісні корені з одиниці степенів 8, 12.

9. Розв’язати алгебраїчні рівняння з дійсними коефіцієнтами.

1) $3x^2 - x + 4 = 0$; 2) $x^2 + 4x + 5 = 0$; 3) $4x^2 - 4x + 5 = 0$; 4) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$;
5) $x^5 + 8x^3 + 16x = 0$; 6) $x^4 + 4x^2 + 3 = 0$; 7) $9x^4 + 6x^2 + 2 = 0$; 8) $x^6 + 64 = 0$.

10. Розв’язати квадратні рівняння з комплексними коефіцієнтами.

1) $x^2 - (3-2i)x + (5-5i) = 0$; 2) $(2+i)x^2 - (5-i)x + (2-2i) = 0$.

Список рекомендованої літератури

1. *Валєєв К. Г., Джалладова І. А.* Вища математика. Навч. посібник: У 2-х ч. – К: КНЕУ, 2004. – Ч.1. – 546 с.
2. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М.:Наука, 1971. – 432 с.
3. *Фаддеев Д. К., Соминский И. С.* Сборник задач по высшей алгебре. М.: Наука, 1977. – 288 с.
4. *Минорский В. П.* Сборник задач по высшей математике, М.:Наука, 1987. – 352 с.

Зміст

Навчальне видання

Щоголєв Сергій Авенірович

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

За редакцією автора

Підп. до друку 08.07.2015. Формат 60х84/16.
Умов.-друк. арк. 2,56. Тираж 40 пр.
Зам. № 1183.

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет
імені І. І. Мечникова
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.

Україна, 65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12
Тел.: (048) 723 28 39. E-mail: druk@onu.edu.ua