МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І. І. МЕЧНИКОВА
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ЕКОНОМІКИ ТА МЕХАНІКИ

С. А. Щоголєв

ТЕОРІЯ РЯДІВ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

ОДЕСА
ОНУ
2015

УДК 512.1
ББК 22.161
Щ92

Рекомендовано до друку науково-методичною радою
ОНУ імені І. І. Мечникова.
Протокол № 1 від 16.10.2014 р.

Рецензенти:

А. О. Кореновський – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичного аналізу Одеського національного університету імені І. І. Мечникова;

А. В. Плотніков – доктор фізико-математичних наук, професор завідувач кафедри прикладної та обчислювальної математики і САПР Одеської державної академії будівництва та архітектури;

Ю. О. Григор'єв – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики Одеського національного морського університету.

Щоголєв С. А.
Щ92 **Теорія рядів:** навчально-методичний посібник / С. А. Щоголєв. – Одеса : «Одеський національний університет імені І. І. Мечникова», 2015. – 76 с.
ISBN 978-617-689-122-2

Посібник написано відповідно до навчальної програми дисципліни «Математичний аналіз», містить основні поняття, методи, теореми та формули, багато розв'язаних типових задач, а також завдання для самостійної роботи студентів.

Для підготовки бакалаврів за спеціальностями «фізика», «прикладна фізика», «астрономія».

УДК 512.1
ББК 22.161

ISBN 978-617-689-122-2

Глава 1. Числові ряди

1.1. Поняття числового ряду. Збіжність числового ряду

У відомому фільмі 30-х років минулого століття "Петро Перший" цар Петро задає малому хлопчику таку задачу: "Летіла гуска, за нею половина гуски, за нею чверть гуски, за нею восьма частина гуски і тощо до нескінченності, тобто за кожною частиною гуски летить її половина. Скільки всього летіло гусок?" Маленький хлопчик знайшовся і відповів: "А половина гуски не літає". Цар Петро розсміявся, і на цьому інцидент було вичерпано. Але уявимо собі, що хлопчисько насправді спробував би розв'язати задачу, що задав цар. Що у нього вийшло б? Оскільки за кожною частиною гуски летить її половина, то для розв'язання задачі треба знайти суму:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$$

Особливість цієї суми полягає у тому, що вона містить нескінченну кількість доданків. Що розуміти під такою сумою? Чи взагалі існує вона? Розглянемо ще один приклад, вже не жартівливий, а який зустрічається в науках про Землю. Нехай є деякий резервуар, в якому послідовно накопичуються осадки. Припустимо, що з самого початку в резервуарі вже є деяка кількість a $м^3$ осадків. І за кожний наступний рік у резервуарі відкладається ще d $м^3$ осадків. Після 5 років сукупна кількість осадків буде $a+5d$ $м^3$, після n років – $a+nd$ $м^3$. Якщо спробувати скласти всі ці величини, припустивши, що n необмежено зростає, то у нас вийде:

$$a+(a+d)+(a+2d)+\ldots+(a+nd)+\ldots$$

Легко зрозуміти, що скінченного значення цієї суми не існує.

Суми з нескінченною кількістю доданків іноді викликають із-за їх неправильного розуміння цікаві парадокси. Розглянемо наступний приклад. Чому дорівнює сума:

$$s=1-1+1-1+1-1+\ldots\ ?$$

З одного боку:

$$s=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots=0+0+0+\ldots=0.$$

З другого:

$$s=1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\ldots=1-0-0-0-\ldots=1.$$

З третього:

$s = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + ...) = 1 - s$, звідки $s = \frac{1}{2}$, і таким чином:

$0 = 1 = \frac{1}{2}$.

Цікаво, що свого часу знайшлися вчені, які тлумачили цей "результат" вельми своєрідно: оскільки $0 = \frac{1}{2}$, то це підтверджує, що Бог створив світ з нічого.

Наведені приклади свідчать про те, що суми з нескінченною кількістю доданків мають властивості, які суттєво відрізняються від звичайних скінченних сум. Разом з тим суми такого типу мають дуже важливе значення як для самої математики, так і для її застосувань. Тому метою даного розділу нашого курсу буде оволодіння теорією таких сум, або, як їх називають, рядів, і вміння застосувати їх до розв'язання практичних задач.

Перейдемо тепер до точних математичних означень і формулювань.

Означення. Нехай задано послідовність чисел

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \qquad (1.1.1)$$

Формальний вираз вигляду

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1.1.2)$$

називається *числовим рядом* , а самі числа (1.1.1) – *членами* цього ряду. Вираз a_n називається *загальним членом ряду*. Це формула, яка задає залежність члена ряду від його номера.

Замість виразу (1.1.2) часто використовують символ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ .$$

Означення. Суми

$$A_1 = a_1,\ A_2 = a_1 + a_2,\ A_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots,$$

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \ldots$$

називаються *частинними сумами* ряду (2).

Легко помітити, що ці суми у свою чергу утворюють числову послідовність $\{A_n\}$.

Означення. Якщо існує скінченна границя

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n, \qquad (1.1.3)$$

то ряд (2) називається *збіжним*, а число A сумою ряду. Якщо $\lim\limits_{n \to \infty} A_n$ не існує. або є нескінченним, то ряд (1.1.2) називається *розбіжним***.**

Таким чином, питання про збіжність ряду (1.1.2) за означенням рівносильно питанню про існування скінченної границі (1.1.3). І навпаки, яку б послідовність $\{x_n\}$ ми б ні взяли, питання про наявність у неї скінченної границі може бути зведено до питання про збіжність ряду

$$x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) + \ldots,$$

для якого частинними сумами є як раз елементи послідовності $\{x_n\}$.

Приклади.

1. Розглянемо ряд, з яким ми вже мали справу:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}. \qquad (1.1.4)$$

Складемо частинні суми:

$$A_1 = 1,\ A_2 = 1 - 1 = 0,\ A_3 = 1 - 1 + 1 = 1,\ A_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0,$$
$$\ldots, A_{2m} = 0,\ A_{2m+1} = 1, \ldots$$

тобто ці суми утворюють послідовність

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots, \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2}, \ldots$$

У розділі «Вступ до аналізу» ми довели, що ця послідовність не має границі (ні скінченної, ні нескінченної), отже ряд (1.1.4) є розбіжним. Таким чином, коли ми намагалися знайти його суму, ми "шукали чорну кішку в темній кімнаті, коли її там нема".

2. Розглянемо суму геометричної прогресії

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}.$$

Легко помітити, що ряд (1.1.4) отримується з цього ряду при $q = -1$, і , як ми довели, у цьому випадку він розбігається. Нехай тепер $q = 1$. Тоді маємо ряд

$$1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$$

Очевидно, що його частинні суми:

$$A_1 = 1,\ A_2 = 2,\ \ldots, A_n = n, \ldots \text{ , і тому } \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty,$$

отже ряд розбіжний.

Нехай $|q| > 1$. Тоді, використовуючи формулу суми n перших членів геометричної прогресії, матимемо:

$$A_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q},\ \lim_{n\to\infty} A_n = \frac{1}{1 - q} \lim_{n\to\infty} (1 - q^n).$$

Оскільки при $|q|>1$: $\lim\limits_{n\to\infty}|q|^n=\infty$, то скінченної границі для $\{A_n\}$ не існує, і ряд розбіжний. Якщо $|q|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$, і $\lim\limits_{n\to\infty} A_n=\frac{1}{1-q}$, отже ряд збіжний, та його сума дорівнює $\frac{1}{1-q}$. Помітимо, що у жартівливій задачі Петра I про гусок, яку розглянуто на початку параграфу, виникає саме такий ряд при $q=\frac{1}{2}$, отже внаслідок цього "летіло" $\frac{1}{1-1/2}=\frac{1}{1/2}=2$ гуски.

3. Розглянемо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$$

Складемо n-у частинну суму цього ряду:

$$A_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-2)(n-1)}+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Подамо її у вигляді:

$$A_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Тепер знайдемо:

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Отже ряд збіжний, та його сума дорівнює 1.

1.2. Властивості збіжних числових рядів

Збіжні числові ряди підпорядковуються наступним властивостям:

Розглянемо ряд, що отримано з ряду (1.1.2) відкиданням від нього перших m членів:

$$a_{m+1}+a_{m+2}+\ldots+a_{m+k}+\ldots=\sum_{n=m+1}^{\infty}a_n. \qquad (1.2.1)$$

Цей ряд називається залишком ряду (1.1.2) після m-го члена і позначається R_m.

Властивість 1. *Якщо збігається ряд* (1.1.2), *то збігається й будь-який з його залишков, і навпаки – із збіжності залишку* (1.2.1) *випливає збіжність ряду* (1.1.2).

Доведення. Позначимо через A'_k k-у частинну суму ряду (1.2.1):

$$A'_k = a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_{m+k} .$$

Тоді маємо:

$$A'_k = A_{m+k} - A_m . \qquad (1.2.2)$$

Якщо ряд (1.1.2) збігається, то $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, і $\lim_{k\to\infty} A_{m+k} = A$, отже існує $\lim_{k\to\infty} A'_k = A - A_m$, звідки випливає, що ряд (1.2.1) збігається. Якщо тепер припустимо, що ряд (1.2.1) збігається, то існує $\lim_{k\to\infty} A'_k = A'$. Покладемо у рівності (1.2.2) $n = m + k$, тоді $k = n - m$, і з співвідношення (1.2.2) отримуємо: $A_n = A_m + A'_{n-m}$. Оскільки ряд (1.2.1) збігається, то існує $\lim_{n\to\infty} A'_{n-m} = A'$, і звідси випливає, що існує $\lim_{n\to\infty} A_n = A_m + A'$, тобто ряд (1.1.2) збіжний. Теорему доведено.

Інакше кажучи, відкидання скінченного числа початкових членів ряду не впливає на його збіжність (але впливає на його суму).

Властивість 2. *Якщо ряд (1.1.2) збігається, то* $\lim_{m\to\infty} R_m = 0$.

Доведення. Маємо: $A = A_m + R_m$, отже $R_m = A - A_m$. Оскільки $A = \lim_{m\to\infty} A_m$, то $\lim_{m\to\infty} R_m = \lim_{m\to\infty}(A - A_m) = A - \lim_{m\to\infty} A_m = A - A = 0$.

Властивість 3. *Якщо всі члени збіжного ряду помножити на одне й те ж число* c*, то збіжність ряду не порушиться, а його сума помножиться на число* c.

Доведення. Помножимо всі члени збіжного ряду (1.1.2) на число c. Отримаємо новий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$. Позначимо $\overline{A}_n$ його частинну суму з номером n, тобто $\overline{A}_n = \sum_{k=1}^{n} ca_k$. Якщо $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ – частинна сума з номером n ряду (1.1.2), то $\overline{A}_n = cA_n$. Отже:

$$\lim_{n\to\infty} \overline{A}_n = \lim_{n\to\infty} cA_n = c \lim_{n\to\infty} A_n = cA ,$$

де A – сума ряду (1.1.2).

Властивість 4. *Якщо ряди*

$$(A): \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{і} \quad (B): \sum_{n=1}^{\infty} b_n ,$$

збігаються, та їх суми відповідно дорівнюють A *і* B, *то ряди* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ *теж збігаються, та їх суми дорівнюють* $A \pm B$.

Доведення. Нехай A_n і B_n – частинні суми відповідно рядів (A) і (B). Позначимо C_n – частинну суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$. Тоді $C_n = A_n + B_n$, отже

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty}\left(A_n + B_n\right) = \lim_{n\to\infty} A_n + \lim_{n\to\infty} B_n = A + B.$$

Аналогічно розглядається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$.

Властивість 5. *Якщо ряд (1.1.2) збігається, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \tag{1.2.3}$$

який отримано групуванням членів ряду (1.1.2) без зміни порядку їх положення, також збігається і має ту ж суму, що й ряд (1.1.2).

Доведення. Нехай $b_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_1}$, $b_2 = a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \ldots + a_{k_2}$, $b_j = a_{k_{j-1}+1} + a_{k_{j-1}+2} + \ldots + a_{k_j}$, де $j \in \mathbb{N}$, $\{k_j\}$ – зростаюча послідовність натуральних чисел. Позначимо $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $B_m = \sum_{j=1}^{m} b_j$. Тоді $B_m = A_{k_m}$. Оскільки $\{B_m\}$ – підпослідовність збіжної послідовності $\{A_n\}$, то існує $\lim_{m\to\infty} B_m = A$, де A – сума ряду (1.1.2).

Властивість 6. *Якщо ряд (1.1.2) збігається, то* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доведення. Оскільки ряд (1.1.2) збігається, то існує $\lim_{n\to\infty} A_n = A$. Запишемо загальний член ряду (1.1.2) у вигляді:

$$a_n = A_n - A_{n-1}.$$

Тоді $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} A_n - \lim_{n\to\infty} A_{n-1} = A - A = 0$, що й треба було довести.

Таким чином, загальний член будь-якого збіжного ряду прямує до нуля при прямуванні його номера до нескінченності.

Наслідок. *Якщо* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *– розбіжний.*

Цей наслідок дає достатню умову розбіжності ряду.

Приклади.

1. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}.$$

Розглянемо:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1\neq 0,$$

отже, ряд розбіжний.

2. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\alpha,\ \alpha\neq m\pi\ \ (m\in\mathbb{Z}).$$

Покажемо, що величина $\sin n\alpha$ не прямує до нуля при $n\to\infty$. Дійсно, припустимо, що $\sin n\alpha\to 0$ при $n\to\infty$. Тоді $\sin(n+1)\alpha\to 0$ при $n\to\infty$, тобто $\sin n\alpha\cdot\cos\alpha+\cos n\alpha\cdot\sin\alpha\to 0$ при $n\to\infty$, звідки випливає, що $\cos n\alpha\to 0$ при $n\to\infty$, оскільки $\sin\alpha\neq 0$. А це неможливо, оскільки $\sin^2 n\alpha+\cos^2 n\alpha=1$. Таким чином, даний ряд є розбіжним.

Зауваження. Обернене твердження до властивості 6 несправедливе, тобто з того, що загальний член ряду прямує до нуля при $n\to\infty$, не випливає збіжність ряду. У якості прикладу розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

Очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$. Покажемо, що, тем не менш, цей ряд розбіжний. Розглянемо його частинну суму:

$$A_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}}_{n\ \text{разів}}=\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n},$$

Звідки $\lim\limits_{n\to\infty}A_n\geq\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty$, отже ряд розбіжний.

Теорема (критерій Коші збіжності ряду). *Для збіжності ряду (1.1.2) необхідно і достатньо, щоб* $\forall\varepsilon>0\ \exists\ N_\varepsilon:\forall n\geq N_\varepsilon,\ \forall p\in\mathbb{N}$ *було виконано:*

$$\left|\sum_{k=1}^{p}a_{n+k}\right|<\varepsilon. \qquad (1.2.4)$$

Доведення. Оскільки $\sum\limits_{k=1}^{p}a_{n+k}=A_{n+p}-A_n$, де A_n – частинна сума ряду (1.1.2), то умова (1.2.4) означає, що послідовність $\{A_n\}$ є фундаментальною. А тоді внаслідок критерію Коші для послідовностей ця послідовність є збіжною, а це й означає, що збіжним є ряд (1.1.2).

1.3. Ознаки збіжності знакододатних рядів. Ознаки порівняння

Означення. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *знакододатним*, якщо $\forall n$ виконано $a_n \geq 0$.

З точки зору збіжності знакододатними можна вважати також ряди, які містять скінченну кількість від'ємних членів, оскільки, якщо їх відкинути, то збіжність ряду не порушиться. Звичайно, що при цьому зміниться сума ряду.

Якщо ряд є знакододатним, то для його частинних сум виконано: $A_{n+1} = A_n + a_{n+1} \geq A_n$. Тобто послідовність $\{A_n\}$ є неспадною. А звідси на підставі теореми про існування границі монотонної та обмеженої послідовності випливає наступне твердження.

Теорема 1. *Знакододатний ряд буде збіжним тоді і тільки тоді, коли послідовність $\{A_n\}$ обмежена зверху.*

Всі ознаки збіжності знакододатних рядів фактично ґрунтуються на цій теоремі. Але її безпосереднє використання для дослідження рядів на збіжність далеко на завжди просте. Тому на практиці як правило використовуються інші ознаки збіжності рядів.

Теорема 2 (ознака порівняння). *Нехай задано два знакододатних ряда*

(A): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, і (B): $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Якщо $\forall n$ виконано

$$a_n \leq b_n,$$

то із збіжності ряду (B) випливає збіжність ряду (A).

Доведення. Позначимо через A_n, B_n відповідно частинні суми рядів (A) і (B), тобто

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad B_n = b_1 + b_2 + \ldots b_n.$$

Внаслідок умови теореми виконано: $A_n \leq B_n$. Оскільки ряд (B) збіжний, то існує $\lim_{n\to\infty} B_n = B$, а із знакододатності рядів (A), (B) випливає, що $B_n \leq B$, тобто частинні суми обох рядів обмежені зверху. На підставі попередньої теореми звідси випливає збіжність ряду (A).

Наслідок. *Якщо ряд (A) розбіжний, то розбіжний і ряд (B).*

Дійсно, якби ряд (B) збігався, то збігався б і ряд (A), що суперечить умові.

Ряд (B) називається *мажорантою* для ряда (A), а ряд (A) *мінорантою* для ряда (B). Тому попереднє твердження формулюють іноді так:

Із збіжності мажоранти випливає збіжність міноранти, а із розбіжності міноранти випливає розбіжність мажоранти.

Зауваження. Доведена теорема справедлива і тоді, коли нерівність $a_n \le b_n$ виконується не для всіх n, а лише, починаючи з деякого номера N.

Ця теорема носить назву *ознаки порівняння*. На практиці її використовують частіше в іншій формі.

Теорема 3 (ознака порівняння у граничній формі). *Якщо існує границя*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = K,$$

і $0 < K < +\infty$, *то ряди* (A) *і* (B) *збігаються, або розбігаються одночасно.*

Доведення. Нехай, наприклад, ряд (B) збіжній. Тоді, згідно з означенням границі послідовності (див. «Вступ до аналізу») маємо: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon : \forall n > N$ виконано

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - K\right| < \varepsilon,$$

або

$$-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - K < \varepsilon \ , \qquad (1.3.1)$$

$K - \varepsilon < \dfrac{a_n}{b_n} < K + \varepsilon$, звідки $a_n < (K+\varepsilon)b_n$.

Внаслідок властивості 3 збіжних рядів ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(K+\varepsilon)b_n$ збіжний, а тоді на підставі теореми 2 збіжний і ряд (A) .

Якщо збігається ряд (A), то збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{K-\varepsilon}$, а оскільки з (1.3.1) випливає, що $b_n < \dfrac{a_n}{K-\varepsilon}$, то за теоремою 2 збігається ряд (B).

Розбіжність водночас рядів (A), (B) доведіть самостійно.

Розглянемо приклади використання ознак порівняння.

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}.$$

Очевидно, що для $n \ge 1 : \dfrac{1}{n2^n} \le \dfrac{1}{2^n}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ збіжний, як геометрична прогресія із знаменником $1/2$, отже, і наш ряд теж збіжний.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt[4]{n}}.$$

Порівняємо цей ряд з розбіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, використовуючи ознаку порівняння у граничній формі.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt[4]{n}}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt[4]{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}}=1,$$

отже, даний ряд теж розбіжний.

Теорема 4. *Якщо існує такий номер N, що $\forall n>N$ виконано*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}, \tag{1.3.2}$$

то із збіжності ряду (B) випливає збіжність ряду (A), а з розбіжності ряду (A) – розбіжність ряду (B).

Доведення. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що нерівність (1.3.2) виконується для всіх значень $n=1,2,3,...$. Тоді маємо:

$$\frac{a_2}{a_1}\le\frac{b_2}{b_1},\ \frac{a_3}{a_2}\le\frac{b_3}{b_2},\ \dots,\frac{a_n}{a_{n-1}}\le\frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Перемноживши ці нерівності почленно, отримаємо:

$$\frac{a_n}{a_1}\le\frac{b_n}{b_1},$$

або

$$a_n\le\frac{a_1}{b_1}b_n,\ n=1,2,3,...$$

Якщо ряд (B) збігається, то збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1}{b_1}b_n$, а тоді за теоремою 2 збігається ряд (A).

Якщо ряд (A) розбігається, то за доведеним буде розбігатися і ряд (B).

1.4. Ознаки збіжності знакододатних рядів

Ознака Даламбера та радикальна ознака Коші

Теорема (ознака Даламбера[1]). *Нехай для ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, *існує границя*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

Тоді

1) якщо $l < 1$, *то ряд збіжний,*
2) якщо $l > 1$, *або* $l = \infty$, *то ряд розбіжний,*
3) якщо $l = 1$, *то ряд може як збігатися, так і розбігатися (так званий сумнівний випадок).*

Доведення. Розглянемо спочатку випадок $l < 1$. З умови теореми та з означення границі послідовності випливає, що

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n > N$ виконано

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < \varepsilon.$$

Або

$$l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon. \qquad (1.4.1)$$

Оберемо ε настільки малим, щоб $l + \varepsilon < q < 1$. Тоді, починаючи з $n = N+1$, буде виконано нерівність:

$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$, або $a_{n+1} < q a_n$, тобто фактично серія нерівностей:

$$a_{N+2} < q a_{N+1},$$
$$a_{N+3} < q a_{N+2} < q^2 a_{N+1},$$
$$a_{N+4} < q a_{N+3} < q^3 a_{N+1},$$
$$\ldots,$$
$$a_{N+k} < q a_{N+k-1} < q^{k-1} a_{N+1}$$
$$\ldots$$

Таким чином, для ряду

$$a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_{N+k} + \ldots \qquad (1.4.2)$$

мажорантою буде ряд

[1] Даламбер Жан Лерон (1717–1783) – видатний французький математик, механік і філософ

$$a_{N+1} + qa_{N+1} + q^2 a_{N+1} + ... + q^{k-1} a_{N+1} + ... ,$$

який є збіжним, як геометрична прогресія із знаменником $q \in (0,1)$. Отже збіжний і ряд (1.4.2), який отримано з нашого ряду відкиданням N перших членів. З цього випливає, що наш ряд теж збіжний.

Нехай тепер $l > 1$. Оберемо в нерівності (1.4.1) ε настільки малим, щоб $l - \varepsilon > q > 1$. Тоді, починаючи з $n = N+1$, буде виконана нерівність:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > q, \text{ або } a_{n+1} > qa_n .$$

Оскільки $q > 1$, то послідовність $\{a_n\}$ зростаюча, і оскільки $a_n > 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, тобто не виконано необхідну умову збіжності ряду, і таким чином, ряд розбіжний.

Розбіжним він буде і тоді, коли $l = \infty$ (доведіть самостійно).

Теорему доведено.

Приклади. Дослідити на збіжність ряди.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, \ a \in \mathbb{R}$.

Застосуємо ознаку Даламбера. Маємо:

$$a_n = \frac{a^n}{n!}, \ a_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} . \frac{n!}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0 < 1 ,$$

Отже, ряд збіжний.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 6 \cdots (4n-2)}{4 \cdot 7 \cdots (3n+1)} = \frac{2}{4} + \frac{2 \cdot 6}{4 \cdot 7} + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10}{4 \cdot 7 \cdot 10} + ...$

Також застосуємо ознаку Даламбера. Маємо:

$$a_n = \frac{2 \cdot 6 \cdots (4n-2)}{4 \cdot 7 \cdots (3n+1)}, \quad a_{n+1} = \frac{2 \cdot 6 \cdots (4n-2)(4n+2)}{4 \cdot 7 \cdots (3n+1)(3n+4)} ,$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 6 \cdots (4n-2)(4n+2)}{4 \cdot 7 \cdots (3n+1)(3n+4)} \cdot \frac{4 \cdot 7 \cdots (3n+1)}{2 \cdot 6 \cdots (4n-2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n+2}{3n+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 + \frac{2}{n}}{3 + \frac{4}{n}} = \frac{4}{3} > 1 ,$$

отже, ряд розбіжний.

Як видно з розглянутих прикладів, ознаку Даламбера зручно використовувати тоді, коли загальний член ряду містить певні добутки, зокрема, факторіали.

Теорема (радикальна ознака Коші[2]). *Нехай для ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ *існує границя*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$$

Тоді

1) якщо $l < 1$*, то ряд збіжний,*
2) якщо $l > 1$*, або* $l = \infty$*, то ряд розбіжний,*
3) якщо $l = 1$*, то ряд може як збігатися, так і розбігатися.*

Доведення. Розглянемо спочатку випадок $l < 1$. Тоді $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N$

виконано

$$\left|\sqrt[n]{a_n} - l\right| < \varepsilon,$$

тобто

$$l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon.$$

Оберемо ε настільки малим, щоб $l + \varepsilon < q < 1$. Тоді, починаючи з $n = N + 1$, буде виконано

$$\sqrt[n]{a_n} < q,$$

або

$$a_n < q^n.$$

Таким чином, для ряду

$$a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_{N+k} + \ldots$$

мажорантою буде ряд

$$q^{N+1} + q^{N+2} + \ldots + q^{N+k} + \ldots,$$

який є збіжним, як геометрична прогресія із знаменником $q \in (0,1)$.Звідси випливає, що збіжний і наш ряд.

Нехай тепер $l > 1$. Тоді, починаючи з $n = N + 1$, буде виконано:

$$\sqrt[n]{a_n} > l - \varepsilon.$$

Оберемо ε так, щоб $l - \varepsilon > 1$. Тоді $\sqrt[n]{a_n} > 1$, або $a_n > 1$, і таким чином, загальний член ряду не прямує до нуля, отже, ряд розбіжний.

Теорему доведено.

Приклади. Дослідити на збіжність ряди:

[2] Коші Огюстен Луї (1789–1857) – видатний французький математик

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{3n+1}\right)^{n}$

Застосуємо радикальну ознаку Коші. Матимемо:

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}<1,$$

отже ряд збіжний.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n}$

Також застосуємо радикальну ознаку Коші. Маємо:

$$a_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n,\quad \sqrt[n]{a_n}=\frac{n+1}{n},\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1,$$

і ознака Коші не дає відповіді на питання про збіжність ряду. Спробуємо підійти до цього питання з іншого боку. Розглянемо границю загального члена ряду:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq 0.$$

Таким чином, не виконано необхідну умову збіжності числового ряду, отже ряд розбіжний.

Радикальну ознаку Коші, як правило, зручно використовувати в тих випадках, коли загальний член ряду містить номер члена ряду у показнику степеня.

1.5. Ознаки збіжності знакододатних рядів

Інтегральна ознака Коші–Маклорена

Теорема (інтегральна ознака Коші–Маклорена[3]). *Нехай для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *виконано наступні умови:*

1) $a_n>0$; $a_1>a_2>a_3>\ldots>a_n>a_{n+1}>\ldots$;

2) існує така функція $y=f(x)$, *яка задовольняє умови:*

а) ця функція визначена, неперервна, додатна і спадна на півінтервалі $[1,+\infty)$,

б) $f(k)=a_k,\ k=1,2,3,\ldots$

[3] Маклорен Колін (1698–1746) – шотландський математик

Тоді, якщо збігається невласний інтеграл

$$\int_{1}^{+\infty} f\left(x\right)dx, \tag{1.5.1}$$

то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, і навпаки, а якщо інтеграл* (1.5.1) *розбігається, то розбігається і ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, і навпаки.*

Тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається або розбігається водночас з невласним інтегралом 1-го роду (1.5.1).

Доведення. Зобразимо члени ряду геометрично, відкладаючи по вісі абсцис номери $1,2,3,..., n, n+1,...$, а по вісі ординат відповідні значення членів ряду (рис.1).

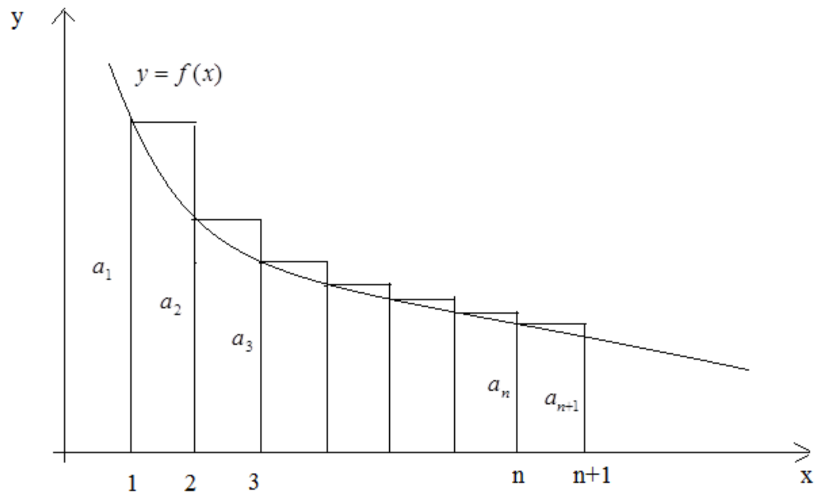

Рис. 1

Легко помітити, що сума площ побудованих на рис. 1 прямокутників дорівнює $a_1 + a_2 + ... + a_n = A_n$, а площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, віссю Ox і вертикальними прямими $x = 1$, $x = n+1$, менша за цю суму, тобто:

$$\int_{1}^{n+1} f(x)\,dx < A_n .$$

Побудуємо тепер прямокутники іншим чином (рис. 2):

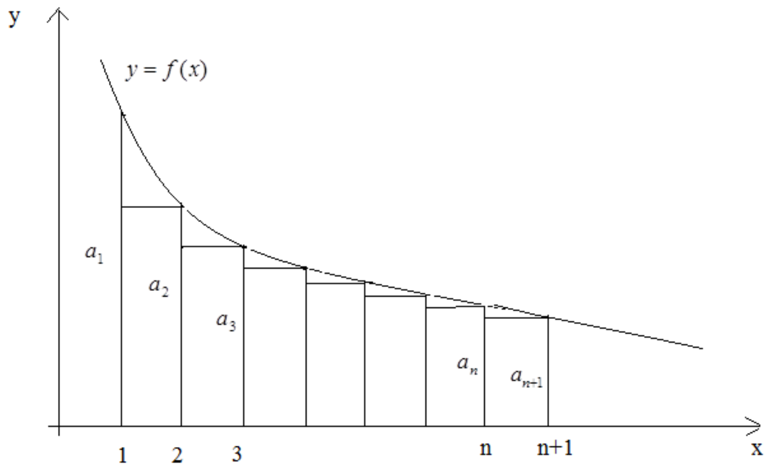

Рис. 2

Сума площ цих прямокутників дорівнює $a_2 + a_3 + ... + a_{n+1} = A_{n+1} - a_1$, і цього разу та ж сама площа криволінійної трапеції більша за цю суму, тобто:

$$A_{n+1} - a_1 < \int_1^{n+1} f(x)\,dx .$$

Таким чином, отримуємо подвійну нерівність:

$$A_{n+1} - a_1 < \int_1^{n+1} f(x)\,dx < A_n . \tag{1.5.2}$$

Розглянемо тепер наступні випадки:

1) інтеграл (1.5.1) збіжний. Тоді існує

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx ,$$

причому $\int_1^{n+1} f(x)\,dx < \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$, і тоді з лівої частини нерівності (1.5.2) випливає, що послідовність $\{A_n\}$ обмежена зверху, отже знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний;

2) інтеграл (1.5.1) розбіжний. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,dx = +\infty ,$$

і з правої частини нерівності (1.5.2) буде випливати, що й $\lim_{n\to\infty} A_n = +\infty$, тобто наш ряд розбіжний.

Самостійно доведіть, що з розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ випливає розбіжність інтегралу (1.5.1), а із збіжності цього ряду – збіжність інтегралу (1.5.1).

Ця ознака дуже важлива і цікава, оскільки встановлює аналогію між рядами та інтегралами. Вперше її було знайдено в геометричній формі К. Маклореном, потім була позабута і знову відкрита О. Коші. Розглянемо приклади використання цієї теореми.

Приклад 1.

Дослідити, за яких значень p збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}. \tag{1.5.3}$$

Побудуємо функцію $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ шляхом формальної заміни у загальному члені ряду n на x і розглянемо невласний інтеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}.$$

У розділі «Інтегральне числення функцій однієї змінної» показано, що цей інтеграл збігається при $p > 1$ і розбігається при $p \le 1$. Отже, саме при таких значеннях p відповідно збігається і розбігається наш ряд. До речі, розбіжність його при $p = 1/2$ ми довели безпосередньо у п. 1.2. Цікавий випадок виникає, коли $p = 1$, тобто маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

Такий ряд носить назву гармонічного ряду. Назву пов'язано з поняттям середнього гармонічного чисел a, b, яке визначається як число c, що пов'язане з a, b співвідношенням:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Легко переконатися, що кожен член гармонічного ряду, починаючи з другого, є середнім гармонічним двох його сусідніх членів.

Сума ряду (1.5.3) при $p > 1$ уявляє собою славнозвісну дзета–функцію Рімана, яка відіграє помітну роль у теорії чисел.

Приклад 2

Дослідить, за яких значень параметрів α і β збігається, а за яких розбігається ряд:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta}n}.$$

У розділі «Інтегральне числення функцій однієї змінної» було встановлено, що невласний інтеграл

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}\ln^{\beta}x}$$

збігається при $\alpha>1$ (β будь-яке), при $\alpha=1$, $\beta>1$, і розбігається при всіх інших α,β. Отже, саме при цих значеннях α і β відповідно збігається і розбігається і наш ряд.

1.6. Ознаки збіжності знакододатних рядів. Ознака Раабе

В тих випадках, коли розглянуті ознаки збіжності не дають відповіді про збіжність або розбіжність ряду, доводиться використовувати більш складні ознаки, до яких, зокрема, відноситься ознака Раабе[4].

Теорема (ознака Раабе). *Якщо існує*

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda,$$

то знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *збігається при* $\lambda>1$ *і розбігається при* $\lambda<1$.

Доведення. Нехай $\lambda>1$. Оберемо число p таке, що $1<p<\lambda$. Тоді знайдеться такий номер n_1, що $\forall n>n_1$ буде виконано:

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>p,$$

або

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>1+\frac{p}{n}.$$

Оберемо число s таке, що $1<s<p$. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}-1}{\frac{1}{n}}=s$$

(див. «Вступ до аналізу»), то знайдеться такий номер n_2, що $\forall n>n_2$ буде виконано:

[4] Раабе Жозеф Людвіг (1801–1859) – швейцарський математик

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s-1}{\frac{1}{n}}<p,$$

або

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^s<1+\frac{p}{n}.$$

Нехай $n_3=\max(n_1,n_2)$. Тоді $\forall n>n_3$ буде виконано:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>1+\frac{p}{n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^s=\left(\frac{n+1}{n}\right)^s.$$

Або

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\left(\frac{n}{n+1}\right)^s=\frac{\frac{1}{(n+1)^s}}{\frac{1}{n^s}}.$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ збіжний, то за теоремою 4 (п. 2) збігається і ряд (A).

Нехай тепер $\lambda<1$. Тоді знайдеться такий номер n_0, що $\forall n>n_0$ буде виконано:

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)<1,$$

або

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}<1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n},$$

звідки отримуємо:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>\frac{n}{n+1}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}.$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбігається (гармонічний ряд), то за теоремою 4 (п. 1.2) розбігається і ряд (A).

Теорему доведено.

Приклад. Дослідити за яких значень параметрів p і q збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right)^p\cdot\frac{1}{n^q}.$$

Застосуємо ознаку Раабе. Розглянемо відношення:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\left(\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right)^p\cdot\dfrac{1}{n^q}}{\left(\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)(2n+2)}\right)^p\cdot\dfrac{1}{(n+1)^q}}=\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p\left(\frac{n+1}{n}\right)^q=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p\left(1+\frac{1}{n}\right)^q=\left(1+\frac{p}{2n+1}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{q}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=1+\frac{p}{2n+1}+\frac{q}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)=1+\frac{p}{2n}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)+\frac{q}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)=1+\left(\frac{p}{2}+q\right)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Звідси дістаємо:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\left(\frac{p}{2}+q\right)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{p}{2}+q,$$

і згідно з ознакою Раабе ряд збігається, коли $\frac{p}{2}+q>1$ і розбігається, коли $\frac{p}{2}+q<1$.

Зауважимо, що в той же час ознака Даламбера не дає відповіді на питання про збіжність цього ряду, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1\ \ \forall\, p,q$.

1.7. Знакозмінні ряди. Ознаки Абеля та Діріхле збіжності рядів

Тепер ми будемо розглядати ряди, які мають як нескінченну кількість додатних членів, так і нескінченну кількість від’ємних. Такі ряди називаються ***знакозмінними***. Безпосередньо до таких рядів не можна застосовувати ознаки збіжності знакододатних числових рядів. Але, як ми побачимо нижче, ознака Даламбера та радикальна ознака Коші за певним їх коректуванням можуть бути застосовані і для знакозмінних рядів. У цьому пункті ми розглянемо інші поширені ознаки збіжності таких рядів, які належать Н. Абелю і П. Діріхле. Спочатку виведемо одну корисну формулу. Розглянемо суму вигляду:

$$S_m=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\beta_k .$$

Позначимо:

$$B_1=\beta_1,\ B_2=\beta_1+\beta_2,\ B_3=\beta_1+\beta_2+\beta_3,\ldots,\ B_m=\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_m .$$

Тоді

$$\beta_1 = B_1,\ \beta_2 = B_2 - B_1,\ \beta_3 = B_3 - B_2, \ldots, \beta_m = B_m - B_{m-1},$$

і суму S_m можна переписати у вигляді:

$$S_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \beta_k = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 (B_2 - B_1) + \alpha_3 (B_3 - B_2) + \ldots + \alpha_m (B_m - B_{m-1}).$$

Розкриємо дужки і згрупуємо інакше доданки:

$$S_m = (\alpha_1 - \alpha_2) B_1 + (\alpha_2 - \alpha_3) B_2 + \ldots + (\alpha_{m-1} - \alpha_m) B_{m-1} + \alpha_m B_m = \sum_{k=1}^{m-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) B_k + \alpha_m B_m.$$

Або:

$$S_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \beta_k = \alpha_m B_m - \sum_{k=1}^{m-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) B_k. \qquad (1.7.1)$$

Формула (1.7.1) називається *перетворенням Абеля*[5]. Вона є певним аналогом для скінченних сум формули інтегрування за частинами для інтегралів. Диференціал тут замінюється різницею, а інтеграл – сумою.

Лема. *Нехай множники* α_k *у сумі* S_m *не зростають або не спадають, а всі суми* B_k *обмежені за абсолютною величиною числом* L*:*

$$|B_k| \le L \ (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Тоді

$$|S_m| = \left| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \beta_k \right| \le L \cdot \left(|\alpha_1| + 2|\alpha_m| \right).$$

Доведення. Внаслідок умови леми всі різниці $\alpha_{k+1} - \alpha_k$ у формулі (1.7.1) одного знаку. Припустимо для визначеності, що множники α_k не зростають, тобто $\alpha_{k+1} - \alpha_k \le 0$. Тоді

$$|S_m| \le |\alpha_m| \cdot |B_m| + \sum_{k=1}^{m-1} |\alpha_{k+1} - \alpha_k| \cdot |B_k| \le |\alpha_m| \cdot L + L \sum_{k=1}^{m-1} |\alpha_{k+1} - \alpha_k| =$$

$$= |\alpha_m| \cdot L - L \sum_{k=1}^{m-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) = |\alpha_m| \cdot L - L(\alpha_2 - \alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_2 + \ldots + \alpha_{m-1} - \alpha_{m-2} + \alpha_m - \alpha_{m-1}) =$$

$$= |\alpha_m| \cdot L - L(\alpha_m - \alpha_1) = |\alpha_m| \cdot L + L(\alpha_1 - \alpha_m) = L\left(|\alpha_1 - \alpha_m| + |\alpha_m| \right) \le L\left(|\alpha_1| + 2|\alpha_m| \right).$$

Лему доведено.

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n, \qquad (1.7.2)$$

де $\{a_n\}, \{b_n\}$ – дві послідовності дійсних чисел.

Ознака Абеля. *Якщо ряд*

[5] Абель Нільс Генрік (1802–1829) – норвезький математик

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (B)$$

збіжний, а послідовність $\{a_n\}$ *монотонна і обмежена, тобто* $\exists\, K > 0$ *таке, що* $|a_n| \le K \quad (n = 1,2,3,...)$, *то ряд (1.7.2) збіжний.*

Доведення. Скористаємось критерієм Коші збіжності ряду (п. 1.2). Розглянемо суму

$$\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} b_{n+k}\,.$$

Оскільки ряд (B) збіжний, то за критерієм Коші $\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\, N : \forall\, n > N$ нерівність

$$\left|\sum_{k=1}^{p} b_{n+k}\right| < \frac{\varepsilon}{3K}$$

виконується $\forall\; p \in \mathbb{N}$. Тоді на підставі леми, де у якості числа L взято $\varepsilon/(3K)$, можемо записати:

$$\left|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} b_{n+k}\right| < \frac{\varepsilon}{3K}\Big(|\,a_{n+1}\,| + 2\,|\,a_{n+p}\,|\Big) \le 3K \cdot \frac{\varepsilon}{3K} = \varepsilon\,,$$

і за критерієм Коші ряд (1.7.2) збігається. Ознаку Абеля доведено.

Ознака Діріхле[6]. *Якщо частинні суми ряду* (B) *обмежені у сукупності, тобто* $\exists M > 0$ *таке, що* $\forall n \in \mathbb{N}$ *виконано* $|\,B_n\,| \le M$, *де* $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, *а послідовність* $\{a_n\}$ *монотонно прямує до нуля, то ряд (1.7.2) збігається.*

Доведення. Очевидно, що $\left|\sum_{k=1}^{p} b_{n+k}\right| = \left|B_{n+p} - B_n\right| \le 2M$. Далі, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то $\forall \varepsilon > 0\; \exists N : \forall n > N$ виконано $|\,a_n\,| < \dfrac{\varepsilon}{6M}$. Скористаємось доведеною лемою, поклавши в неї $L = 2M$. Отримаємо:

$$\left|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} b_{n+k}\right| \le 2M\Big(|\,a_{n+1}\,| + 2\,|\,a_{n+p}\,|\Big) \le 2M \cdot \frac{3\varepsilon}{6M} = \varepsilon\,,$$

і таким чином за критерієм Коші збіжність ряду (1.7.2) доведено.

Приклад. Дослідити за яких значень p збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\dfrac{n\pi}{4}}{n^p}\,.$$

[6] Діріхле Петер Густав Лежен (1805–1859) – німецький математик

Очевидно, що якщо $p \le 0$, то ряд розбігається, оскільки його загальний член не прямує до нуля при $n \to \infty$. Нехай $p > 0$. Розглянемо

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{4}\right| \le 1 + \sqrt{2},$$

отже частинні суми ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{4}$ обмежені у сукупності, а послідовність $\left\{\frac{1}{n^p}\right\}$ монотонно прямує до нуля при $n \to \infty$. Отже за ознакою Діріхле при $p > 0$ наш ряд збігається.

1.8. Абсолютно та умовно збіжні ряди

Нехай ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (A)$$

є знакозмінним. Розглянемо поряд з ним ряд, складений з модулів членів ряду (A):

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad (|A|).$$

Теорема. *Якщо збігається ряд $(|A|)$, то збігається і ряд (A).*

Доведення. Оскільки ряд $(|A|)$ збіжний, то за критерієм Коші (п.1.2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N_\varepsilon : \forall n \ge N_\varepsilon, \ \forall p \in \mathbb{N}$ виконано: $\left|\sum_{k=1}^{p} |a_{n+k}|\right| = \sum_{k=1}^{p} |a_{n+k}| < \varepsilon$. Тоді для ряду (A) маємо: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N_\varepsilon : \forall n \ge N_\varepsilon, \ \forall p \in \mathbb{N}$ виконано: $\left|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k}\right| < \sum_{k=1}^{p} |a_{n+k}| < \varepsilon$, і за критерієм Коші ряд (A) збігається. Теорему доведено.

Зауваження. Обернене твердження несправедливе, тобто із збіжності ряду (A) не випливає збіжність ряду $(|A|)$. Якщо ряд $(|A|)$ збігається, то ряд (A) називається *абсолютно збіжним*. Якщо ряд $(|A|)$ розбігається, а ряд (A) збігається, то ряд (A) називається *умовно збіжним.*

Зосередимось на основних властивостях абсолютно та умовно збіжних числових рядів. Почнемо з абсолютно збіжних рядів.

Властивість 1. *Якщо ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно збіжний, а послідовність* $\{b_n\}$ *обмежена, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *абсолютно збіжний.*

Доведення. Обмеженість послідовності $\{b_n\}$ означає, що $\exists M > 0$ таке, що $\forall n$ виконано $|b_n| \le M$. Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ збіжний, то за критерієм Коші $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}$ виконано: $\sum_{k=1}^{p} |a_{n+k}| < \frac{\varepsilon}{M}$. Тоді $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon$: $\forall n > N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}$ виконано:

$$\sum_{k=1}^{p} |a_{n+k} b_{n+k}| = \sum_{k=1}^{p} |a_{n+k}| \cdot |b_{n+k}| \le M \sum_{k=1}^{p} |a_{n+k}| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

отже також за критерієм Коші ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ збіжний, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ збіжний абсолютно.

Властивість 2. *Якщо ряди* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *і* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *абсолютно збіжні, то для будь-яких* λ *і* μ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ *також абсолютно збіжний.*

Доведення. Природно вважати, що хоча б одне з чисел λ *і* μ відмінно від нуля, тобто $|\lambda| + |\mu| > 0$. Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається абсолютно, то за критерієм Коші $\forall \varepsilon > 0\ \exists N'_\varepsilon : \forall n > N'_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}$ виконано: $\sum_{k=1}^{p} |a_{n+k}| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|}$. Аналогічно для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ маємо: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N''_\varepsilon : \forall n > N''_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}$ виконано $\sum_{k=1}^{p} |b_{n+k}| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|}$. Позначимо $N_\varepsilon = \max(N'_\varepsilon, N''_\varepsilon)$. Тоді, якщо $n > N_\varepsilon$, то $\sum_{k=1}^{p} |\lambda a_{n+k} + \mu b_{n+k}| \le |\lambda| \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n+k}| + |\mu| \sum_{k=1}^{\infty} |b_{n+k}| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|} + |\mu| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|} = \varepsilon$, отже за критерієм Коші ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ абсолютно збіжний. Теорему доведено.

Властивість 3. *Якщо ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (A)$$

абсолютно збіжний, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n' \quad (A'),$$

який отримано переставленням членів ряду (A)*, також абсолютно збіжний, та його сума співпадає з сумою ряду* (A).

Доведення. Припустимо спочатку, що ряд (A) знакододатний. Позначимо як A суму ряду (A), а як A' – суму ряду (A'). Розглянемо довільну частинну суму ряду (A') :

$$A_p' = \sum_{k=1}^{p} a_k'.$$

Оскільки ряд (A') отримано переставленням членів ряду (A), то знайдуться такі номери $n_1, n_2, ..., n_k$ членів ряду (A), що $a_1' = a_{n_1}$, $a_2' = a_{n_2}, \ldots, a_k' = a_{n_k}$. Нехай $\overline{n} = \max(n_1, ..., n_k)$. Тоді очевидно $A_p' \le A_{\overline{n}}$ (сума $A_{\overline{n}}$ містить всі доданки, що входять в суму A_p', і ще, можливо, інші додатні доданки), отже й $A_p' \le A$. З цього випливає, що ряд (A') збіжний, причому $A' \le A$. З іншого боку ряд (A) отримується переставленням членів ряду (A'), отже $A \le A'$. Таким чином $A' = A$.

Нехай тепер (A) – довільний абсолютно збіжний ряд. Оскільки збіжний знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ за доведеним залишається збіжним при будь-якому переставленні його членів, то ряд (A') буде абсолютно збіжним. Покажемо, що сума ряду (A') і тут співпаде з сумою ряду (A). Подамо суму ряду (A) у вигляді $A = P - Q$, де P і Q суми рядів, складених відповідно з додатних та модулів від'ємних членів ряду (A). Переставлення членів в ряді (A) викличе переставлення членів і в цих рядах, що за доведеним не відбивається на їх сумах (ці ряди знакододатні). Отже й сума ряду (A) залишиться тією ж самою.

Теорему доведено.

Властивість 4. *Якщо ряди*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (A) \quad \text{і} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (B)$$

абсолютно збіжні, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} b_{m_k},$$

складений з будь-яких можливих попарних добутків членів рядів (A) *і* (B)*, також абсолютно збіжний, причому сума цього ряду дорівнює добутку сум рядів* (A) *і* (B).

Цю властивість ми наводимо без доведення.

Перейдемо тепер до властивостей умовно збіжних рядів.

Властивість 1. *Якщо ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (A)$$

збігається умовно, то ряди (P) *і* (Q)*, що складаються відповідно з додатних членів та модулів від'ємних членів ряду* (A) *, розбіжні.*

Доведення. Позначимо:

$$p_k = \frac{a_k + |a_k|}{2},\ q_k = \frac{|a_k| - a_k}{2}.$$

Очевидно тоді, що ряд (P) не що інше, як ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, а ряд (Q) не що інше, як ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$. Припустимо, що ряд (P) збігається. Тоді оскільки $|a_k| = 2p_k - a_k$, і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ збіжний, то збіжним є й ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, що суперечить умові. Отже ряд (P) розбіжний. Аналогічно доводимо, що розбіжним є й ряд (Q).

Зауважимо, що разом з розбіжністю рядів (P) *і* (Q), тем не менш, виконуються рівності $\lim_{k\to\infty} p_k = \lim_{k\to\infty} q_k = 0$.

Наступна важлива теорема показує, що властивість 3 абсолютно збіжних рядів не зберігається для умовно збіжних рядів.

Теорема Рімана[7]. *Якщо ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (A)$$

збігається умовно, то для будь-якого наперед заданого числа L *можна так переставити члени цього ряду, що його сума дорівнюватиме саме числу* L*. Більш того, можна так переставити члени цього ряду, що його сума буде дорівнювати* $+\infty$ *або* $-\infty$*, тобто отриманий внаслідок такого переставлення ряд буде розбіжним.*

[7] Ріман Георг Фрідріх Бернгард (1826–1866) – видатний німецький математик

Доведення. З розбіжності рядів (P) і (Q) (див. попередню теорему) випливає, що всі їх залишки також будуть розбіжними, тому у кожному з цих рядів, починаючи з будь-якого місця, можна набрати стільки членів, щоб їх сума була більшою, ніж будь-яке наперед задане число. Користуючись цим фактом ми здійснимо переставлення членів ряду (A) за наступною схемою. Спочатку візьмемо стільки додатних членів ряду (A) (у тому порядку,у якому вони розташовані), щоб їх сума була більшою, ніж число L, тобто:

$$p_1 + p_2 + ... + p_{k_1} > L .$$

Потім випишемо від'ємні члени (теж у тому порядку, у якому їх розташовано в даному ряді) , взявши їх стільки, щоб загальна сума була меншою, ніж L:

$$p_1 + p_2 + ... + p_{k_1} - q_1 - q_2 - ... - q_{m_1} < L .$$

Потім з тих, що залишилося, додатних членів ряду візьмемо стільки, щоб загальна сума знову була більшою за L:

$$p_1 + p_2 + ... + p_{k_1} - q_1 - q_2 - ... - q_{m_1} + p_{k_1+1} + ... + p_{k_2} > L .$$

Потім знову візьмемо стільки від'ємних членів (з тих, що залишилося), щоб загальна сума була меншою за L:

$$p_1 + p_2 + ... + p_{k_1} - q_1 - q_2 - ... - q_{m_1} + p_{k_1+1} + ... + p_{k_2} - q_{m_1+1} - ... - q_{m_2} < L .$$

Цей процес продовжується до нескінченності. При цьому кожен член ряду (A), зі своїм знаком зустрінеться на певному місці.

Якщо кожного разу, коли ми виписуємо члени ряду (P), або ряду (Q), набирати їх не більше, ніж це потрібно для того, щоб загальна сума була більша або відповідно менша за L, то відхилення від числа L в той чи інший бік буде не більшим за абсолютною величиною, ніж останній виписаний член. Оскільки $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = \lim\limits_{k\to\infty} q_k = 0$, то ряд

$$(p_1 + ... + p_{k_1}) - (q_1 + ... + q_{m_1}) + (p_{k_1+1} + ... + p_{k_2}) - (q_{m_1+1} + ... + q_{m_2}) + ...$$

матиме своєю сумою саме число L. Внаслідок властивості 5 збіжних рядів (п. 2) це залишається справедливим і після розкриття дужок.

Покажемо тепер, що члени ряду (A) можна переставити так, щоб сума отриманого ряду дорівнювала $+\infty$. Візьмемо послідовність додатних чисел $\{L_k\}$ таку, що $\lim\limits_{k\to\infty} L_k = +\infty$. Візьмемо стільки додатних членів ряду (A) , щоб їх сума була більшою, ніж L_1. Після цього візьмемо перший від'ємний член цього ряду. З тих додатних членів, що залишилося, візьмемо стільки, щоб загальна сума була більше, ніж L_2, після чого припишемо другий від'ємний член ряду. Знову з тих додатних членів, що залишилося, візьмемо стільки, щоб загальна сума була більше, ніж L_3, після чого припишемо третій від'ємний член ряду.

Продовжуючи цей процес необмежено, дістанемо ряд, що має своєю сумою $+\infty$. Аналогічно можна отримати ряд з сумою $-\infty$.

Теорему доведено.

Ця теорема підкреслює той факт, що умовна збіжність ряду здійснюється за рахунок взаємного погашення додатних та від'ємних його членів, тому суттєво залежить від порядку, в якому вони розташовані. А абсолютна збіжність ґрунтується на швидкості спадання модулів членів ряду, і від порядку, в якому вони розташовані, не залежить.

У п. 1.7 ми зауважили, що для дослідження на збіжність знакозмінних рядів з певним коректуванням можна застосовувати ознаку Даламбера та радикальну ознаку Коші. Доведемо відповідні теореми.

Ознака Даламбера для знакозмінних рядів. *Нехай існує границя*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l.$$

Тоді якщо $l<1$, то ряд (A) збігається. Якщо $l>1$, або $l=\infty$, то цей ряд розбігається. При $l=1$ ряд може як збігатися, так і розбігатися.

Доведення. Нехай $l<1$. Тоді знакододатний ряд $(|A|)$ за ознакою Даламбера збігається, отже ряд (A) збігається абсолютно. Нехай $l>1$ або $l=\infty$. Тоді загальний член ряду $(|A|)$ не прямує до нуля, отже не прямує до нуля і загальний член ряду (A), і, таким чином, він розбіжний. Теорему доведено.

Аналогічним чином доводиться і радикальна ознака Коші (пропонується сформулювати і довести самостійно).

1.9. Ряди, знаки членів яких чергуються. Ознака Лейбніца

Розглянемо знакозмінний ряд наступного вигляду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1}u_n + \ldots\ , \tag{1.9.1}$$

де $u_n > 0\ (n=1,2,3,\ldots)$. Знаки членів цього ряду строго чергуються, тобто знаки будь-яких сусідніх членів такого ряду протилежні. За кожним додатним членом йде від'ємний і навпаки.

Теорема (ознака Лейбніца[8]). *Якщо для ряду (1.9.1) виконано умови:*

1) $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > u_{n+1} > \ldots$,

[8] Лейбніц Готфрід Вільгельм (1646–1716) – видатний німецький математик, фізик і філософ, один з творців диференціального та інтегрального числення

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

то ряд (1.9.1) збігається, його сума додатна і не перевищує u_1.

Доведення. Розглянемо спочатку частинну суму ряду (1.9.1) з парним номером:

$$U_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2n-1} - u_{2n}).$$

З першої умови теореми випливає, що вираз в кожній з дужок додатний, отже

$$U_{2n} > 0.$$

Крім того, U_{2n} зростає з ростом n. Згрупуємо тепер доданки в U_{2n} інакше:

$$U_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - \ldots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}.$$

Внаслідок першої умови теореми кожна з цих дужок теж додатна, отже

$$U_{2n} < u_1.$$

Таким чином, послідовність $\{U_{2n}\}$ зростаюча і обмежена зверху, отже існує

$$\lim_{n\to\infty} U_{2n} = U, \ \ 0 < U < u_1.$$

Тепер розглянемо частинну суму з непарним номером U_{2n+1}. Очевидно

$$U_{2n+1} = U_{2n} + u_{2n+1}.$$

Внаслідок другої умови теореми маємо:

$$\lim_{n\to\infty} U_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} U_{2n} + \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} U_{2n} = U .$$

Таким чином, як для парних, так і для непарних n маємо

$$\lim_{n\to\infty} U_n = U ,$$

отже ряд (1.9.1) збігається.

Теорему доведено.

Наслідок. *Якщо ряд (1.9.1) задовольняє умови ознаки Лейбніца, то його залишок не перевищує за абсолютною величиною модуля першого відкинутого члена.*

Зауваження. Ознаку Лейбніца можна було б також отримати як наслідок ознаки Діріхле. Дійсно, суми $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}$ обмежені у сукупності ($| B_n | \le 1$), а послідовність $\{u_n\}$ за умовою теореми монотонно прямує до нуля, отже за ознакою Діріхле ряд (1.9.1) збігається. Але наведене вище доведення встановлює не тільки збіжність ряду, а й дає оцінку його залишкового члену, що дуже важливо в застосуваннях рядів.

Приклади

1. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\ldots \quad .$$

Перевіримо виконання умов ознаки Лейбніца.

1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots>\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}>\ldots$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$,

тобто обидві умови виконано, отже, ряд збіжний. Складемо ряд з модулей членів даного ряду:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

А це гармонічний ряд, який є розбіжним (п. 1.5). Таким чином, наш ряд збігається умовно.

2. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots \quad .$$

Оскільки $1>\frac{1}{2!}>\frac{1}{3!}>\ldots$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)!}=0$,

то умови ознаки Лейбніца виконано, і ряд збіжний. Складемо ряд з абсолютних величин членів нашого ряду:

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{(n+1)!}+\ldots$$

За ознакою Даламбера легко довести, що цей ряд збіжний (зробіть самостійно). Отже наш ряд збігається абсолютно.

3. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n} \quad .$$

Маємо:

$$\cos\frac{\pi n^2}{n+1}=(-1)^n\cos\left(\pi\frac{n^2}{n+1}-\pi n\right)=(-1)^n\cos\left(\frac{\pi}{n+1}-\pi\right)=(-1)^{n+1}\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

Розглянемо ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}$. Оскільки $\frac{1}{\ln^2(n+1)}<\frac{1}{\ln^2 n}$, і $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln^2 n}=0$, то за ознакою Лейбніца цей ряд збігається. Послідовність $\left\{\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right\}$ монотонно зростає і обмежена. Отже, за ознакою Абеля наш ряд збігається.

Глава 2. Функціональні ряди. Загальна теорія

2.1. Рівномірна збіжність функціональних послідовностей

Нехай кожному натуральному числу n і кожному значенню x з деякої множини X поставлено у відповідність функцію $y = f_n(x)$. Тоді кажуть, що на множині X задано *функціональну послідовність* $\{f_n(x)\}$. Нехай $x_0 \in X$. Якщо числова послідовність $\{f_n(x_0)\}$ збігається, то кажуть, що функціональна послідовність $\{f_n(x)\}$ збігається в точці x_0. Якщо функціональна послідовність $\{f_n(x)\}$ збігається в кожній точці множини X, то кажуть, що ця послідовність збігається на множині X. У цьому випадку на множині X визначено функцію $y = f(x)$, значення якої $\forall x \in X$ дорівнює границі послідовності $\{f_n(x)\}$. Ця функція називається *граничною функцією* функціональної послідовності $\{f_n(x)\}$ на множині X і пишуть:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ x \in X. \qquad (2.1.1)$$

За означенням границі це означає, що

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N = N_\varepsilon(x):\ n > N \Rightarrow |\, f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \qquad (2.1.2)$$

Приклади.

1. $f_n(x) = \dfrac{n+1}{n+x^2},\ \ X = \mathbb{R}$.

Знайдемо:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{x^2}{n}} = 1 \quad \forall x \in X\ .$$

2. $f_n(x) = n\sin\dfrac{1}{nx},\ X = (0,+\infty)$.

Знайдемо:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{nx} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{nx}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{x}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{nx}}{\frac{1}{nx}} = \frac{1}{x}\cdot 1 = \frac{1}{x} \quad \forall x \in X\ .$$

3. $f_n(x) = x^n,\ X = [0,1]$.

Знайдемо $f(x)$. Якщо $0 \le x < 1$, то очевидно $f(x) = 0$, а якщо $x = 1$, то $f(x) = 1$.

4. $f_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2x^2},\ X = [0,1]$.

Знайдемо

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2x}{e^{n^2x^2}}=0 \quad \forall x\in X .$$

Звернемо увагу, що в означенні границі (2.1.2) функціональної послідовності $\{f_n(x)\}$ номер N залежить не тільки від ε, але й від x. Тобто для послідовності $\{f_n(x)\}$ при одному й тому ж значенні ε і при різних значеннях x номери N можуть бути різними. При $x=x_1$ отримаємо номер N_1, а при $x=x_2\neq x_1$ – номер N_2, адже ми маємо справу з двома різними числовими послідовностями $\{f_n(x_1)\}$ і $\{f_n(x_2)\}$. Виникає питання, чи можна для даної функціональної послідовності $\{f_n(x)\}$ і для даного ε знайти такий номер N, який був би придатним для будь якого $x\in X$? Покажемо на прикладах, що в одних випадках такий номер N знайти можна, а в інших ні.

Приклад 1. Нехай $f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$, $X=[0,1]$. Очевидно, що $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0 \;\; \forall x\in X$. Оскільки

$$0\le f_n(x)=\frac{1}{2n}\cdot\frac{2nx}{1+n^2x^2}\le\frac{1}{2n},$$

то для виконання нерівності $f_n(x)<\varepsilon$ достатньо $\forall x\in X$ взяти $N=\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]+1$, тобто такий номер N придатний $\forall x\in X$.

Приклад 2. Нехай $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $X=[0,1]$. Очевидно, що й тут $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0 \;\; \forall x\in X$. Для будь якого фіксованого $x>0$ достатньо взяти $N=\left[\dfrac{1}{x\varepsilon}\right]+1$, щоб було $f_n(x)<\dfrac{1}{nx}<\varepsilon$ при $n>N$. Але з іншого боку для функції $f_n(x)$ у проміжку $[0,1]$ завжди знайдеться точка, а саме точка $x_n=\dfrac{1}{n}$, у якій значення функції $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2}$. Таким чином, за рахунок збільшення n зробити $f_n(x)<\dfrac{1}{2}$ для всіх $x\in[0,1]$ одразу неможливо. Тобто для $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$ не існує номера N, який був би придатним одразу для всіх $x\in[0,1]$.

Означення. Функціональна послідовність $\{f_n(x)\}$ називається *рівномірно збіжною* на множині X до функції $f(x)$, якщо $\forall\varepsilon>0\;\exists N=N_\varepsilon:\;\forall n>N_\varepsilon$, $\forall x\in X$ виконано $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

Підкреслимо, що у цьому означенні номер N залежить лише від ε, але не залежить від x.

Таким чином, у прикладі 1 ми маємо справу з рівномірним прямуванням послідовності $\{f_n(x)\}$ до нуля на $[0,1]$, а у прикладі 2 – ні.

Приклад. Довести, що послідовність $\{f_n(x)\}$, де $f_n(x)=\dfrac{\operatorname{arctg}\left(n^2x\right)}{\sqrt[3]{n+x}}$, рівномірно збігається на множині $X=[0,+\infty)$, і знайти $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Оскільки $0\le \operatorname{arctg}\left(n^2x\right)<\dfrac{\pi}{2}$, $\sqrt[3]{n+x}\ge\sqrt[3]{n}$ при $x\in[0,+\infty)$, то $0\le f_n(x)<\dfrac{\pi}{2\sqrt[3]{n}}$, звідки $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$, причому, оскільки $\dfrac{\pi}{2\sqrt[3]{n}}<\varepsilon$, якщо тільки $n>\left(\dfrac{\pi}{2\varepsilon}\right)^3$, то у якості N можна взяти $\left[\left(\dfrac{\pi}{2\varepsilon}\right)^3\right]+1$. Бачимо, що N не залежить від x, отже дана послідовність збігається до нуля рівномірно на $[0,+\infty)$.

2.2. Критерії рівномірної збіжності функціональних послідовностей

Теорема 1 (критерій Коші рівномірної збіжності функціональної послідовності). *Для того, щоб функціональна послідовність $\{f_n(x)\}$ рівномірно збігалася на множині X, необхідно і достатньо, щоб було виконано умову Коші:*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon:\forall n>N_\varepsilon,\ \forall p\in\mathbb{N},\ \forall x\in X \Rightarrow |f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon.$$

Доведення. Необхідність. Нехай функціональна послідовність $\{f_n(x)\}$ рівномірно збігається на множині X до функції $f(x)$. Це означає, що $\forall\varepsilon>0$ $\exists N_\varepsilon$: $\forall k>N_\varepsilon$, $\forall x\in X$ виконано $|f_k(x)-f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Зокрема цю нерівність буде виконано, якщо $k=n>N_\varepsilon$ і якщо $k=n+p$, $p\in\mathbb{N}$, тобто $|f_n(x)-f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, $|f_{n+p}(x)-f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Звідси отримуємо:

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|\le|f_{n+p}(x)-f(x)|+|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Достатність. Нехай $x_0\in X$. Тоді виконано: $\forall\varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon:\ \forall n>N_\varepsilon$, $\forall p\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow|f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)|<\varepsilon$, і внаслідок критерію Коші для числових послідовностей існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$. Така границя існує $\forall x_0 \in X$, отже на множині X визначено функцію (позначимо її $f(x)$), яка є граничною функцією для послідовності $\{f_n(x)\}$ на множині X.

Запишемо умову Коші у вигляді:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in X \Rightarrow | f_{n+p}(x) - f_n(x) | < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Перейдемо тут до границі при $p \to \infty$ (для кожного фіксованого $n > N_\varepsilon$ і фіксованого $x \in X$). Враховуючи, що існує $\lim\limits_{p\to\infty} f_{n+p}(x) = f(x)$, дістанемо:

$$| f(x) - f_n(x) | \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall n > N_\varepsilon, \; \forall x \in X,$$

що й означає, що функціональна послідовність $\{f_n(x)\}$ рівномірно збігається до функції $f(x)$ на множині X.

Теорему доведено.

Теорема 2. *Для того, щоб функціональна послідовність $\{f_n(x)\}$ рівномірно збігалась на множині X до функції $f(x)$, необхідно і достатньо виконання рівності:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in X} | f_n(x) - f(x) | = 0. \tag{2.2.1}$$

Доведення. Позначимо $\sigma_n = \sup\limits_{x\in X} | f_n(x) - f(x) |$. Тоді рівність (2.2.1) означає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow \sigma_n < \varepsilon. \tag{2.2.2}$$

<u>Необхідність</u>. Нехай функціональна послідовність $\{f_n(x)\}$ рівномірно збігається на множині X до функції $f(x)$. Тоді $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon^* \; \forall n > N_\varepsilon^*, \forall x \in X$ виконано $| f_n(x) - f(x) | < \frac{\varepsilon}{2}$, звідки випливає, що $\sigma_n \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ для $n > N_\varepsilon^*$. Тому для виконання (2.2.2), а отже й (2.2.1), достатньо взяти $N_\varepsilon = N_\varepsilon^*$, і необхідність доведено.

<u>Достатність</u>. Нехай виконано рівність (2.2.1). Оскільки $| f_n(x) - f(x) | \le \sigma_n$ для $x \in X$, то $| f_n(x) - f(x) | < \varepsilon \;\; \forall x \in X$, $n > N_\varepsilon$, а це й означає, що функціональна послідовність $\{f_n(x)\}$ рівномірно збігається на множині X до функції $f(x)$. Теорему доведено.

Приклади. Довести, що функціональна послідовність $\{f_n(x)\}$ рівномірно збігається на множині X, і знайти граничну функцію $f(x)$.

1. $f_n(x) = x^n$, $X = [0, 1/2]$.

Очевидно, що $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0 \ \ \forall x\in X$. Знайдемо:

$$\sigma_n=\sup_{x\in X}|f_n(x)|=\sup_{x\in[0,1/2]} x^n=\frac{1}{2^n},\quad \lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0,$$

отже згідно з теоремою 2 дана послідовність збігається рівномірно до нуля на $[0,1/2]$.

2. $f_n(x)=x^n,\ X=[0,1]$.

Маємо:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases}0, & якщо\ \ 0\le x<1,\\ 1, & якщо\ \ x=1.\end{cases}$$

Звідси:

$$|f_n(x)-f(x)|=\begin{cases}x^n, & якщо\ \ 0\le x<1,\\ 0, & якщо\ \ x=1.\end{cases}$$

Отже

$$\sigma_n=\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=1,$$

і згідно з теоремою 2 дана послідовність збігається нерівномірно.

3. $f_n(x)=x^n-x^{n+1},\ X=[0,1]$.

Знайдемо:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left(x^n-x^{n+1}\right)=0\quad \forall x\in[0,1];$$

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in[0,1]}\left|x^n-x^{n+1}\right|=\sup_{x\in[0,1]}\left|x^n(1-x)\right|=\sup_{x\in[0,1]}x^n(1-x)=$$

$$=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\frac{1}{n+1}.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,$$

таким чином, дана функціональна послідовність збігається рівномірно.

2.3. Функціональні ряди, область збіжності, рівномірна збіжність

Розглянемо функціональну послідовність $\{f_n(x)\}$. Складемо формальний вираз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots \quad . \qquad (2.3.1)$$

Такий вираз називається *функціональним рядом*, а $f_n(x)$ – *загальним членом* цього ряду.

Тобто функціональний ряд – це такий ряд, кожен член якого залежить не тільки від свого номера, а й від деякої змінної x.

Складемо вирази:

$$F_1(x) = f_1(x),\ F_2(x) = f_1(x) + f_2(x), \ldots, F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x), \ldots$$

Ці вирази називаються *частинними сумами* ряду (2.3.1), і вони у свою чергу утворюють функціональну послідовність $\{F_n(x)\}$.

Означення. Якщо функціональна послідовність $\{F_n(x)\}$ збігається на множині X до функції $F(x)$, то функціональний ряд називається *збіжним на множині* X, а функція $F(x)$ – *сумою* цього ряду. Множина X називається *областю збіжності* функціонального ряду (2.3.1).

Приклади

1. Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$. Як ми знаємо, він збігається при $|x| < 1$ і розбігається при $|x| \geq 1$ (п. 1.1). Отже, областю збіжності цього ряду є інтервал $(-1,1)$, і сума ряду $F(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

2. Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$. У п. 1.5 ми довели, що цей ряд збігається при $x > 1$ і розбігається при $x \leq 1$. Отже, областю збіжності цього ряду є інтервал $(1,+\infty)$.

Якщо у кожній точці $x \in X$ збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$, то ряд (2.3.1) називається *абсолютно збіжним на множині* X.

Означення. Ряд (2.3.1) називається *рівномірно збіжним на множині* X, якщо функціональна послідовність $\{F_n(x)\}$ його частинних сум рівномірно збігається на множині X до функції $F(x)$. Тобто $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N = N_\varepsilon :\ \forall n > N_\varepsilon$, $\forall x \in X$ виконано $|F_n(x) - F(x)| < \varepsilon$.

Вираз $|F_n(x) - F(x)|$ є модулем залишку ряду

$$R_n(x) = F(x) - F_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x).$$

Таким чином, функціональний ряд (2.3.1) називається рівномірно збіжним на множині X, якщо $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N = N_\varepsilon :\ \forall n > N_\varepsilon,\ \forall x \in X$ виконано $|R_n(x)| < \varepsilon$. Тобто $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0\ \forall x \in X$.

Внаслідок теореми 2 (п. 2.1) для рівномірної збіжності ряду (2.3.1) на множині X необхідно і достатньо, щоб $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in X} |R_n(x)| = 0$.

Приклад. Покажемо, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ збігається рівномірно на будь-якому інтервалі $(-q,q)$, де $0 < q < 1$. Дійсно , оскільки $F_n(x) = \dfrac{1-x^n}{1-x}$ (сума перших n членів геометричної прогресії), $F(x) = \dfrac{1}{1-x}$ $\forall x \in (-q,q)$, отже ряд збігається на $(-q,q)$. Далі $\forall x \in (-q,q)$ виконано:

$$|R_n(x)| = |F_n(x) - F(x)| = \left|\frac{x^n}{1-x}\right| \le \frac{|x|^n}{1-|x|},$$

звідки $\sup\limits_{x\in(-q,q)} |R_n(x)| \le \dfrac{q^n}{1-q}$, отже $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in(-q,q)} |R_n(x)| = 0$, і тому ряд рівномірно збіжний.

Розглянемо тепер той самий ряд, але на інтервалі $(-1,1)$. Тут він також збігається, і його сума $F(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Але цього разу збіжність нерівномірна. Дійсно, візьмемо $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$. Очевидно, що $x_n \in (-1,1)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Розглянемо

$$R_n(x_n) = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)} = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n,\quad \lim_{n\to\infty} R_n(x_n) = +\infty,$$

отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in(-1,1)} |R_n(x)| = +\infty$, і, таким чином, ряд збігається нерівномірно.

Теорема (критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду). *Для того, щоб функціональний ряд (2.3.1) рівномірно збігався на множині* X, *необхідно і достатньо, щоб* $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in X$ *виконано*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Доведення безпосередньо випливає з критерію Коші рівномірної збіжності функціональної послідовності, якщо врахувати, що для частинних сум ряду (2.3.1) маємо:

$$F_{n+p}(x) - F_n(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x).$$

Теорема (ознака Вейєрштрасса[9] рівномірної збіжності функціонального ряду). *Нехай для функціонального ряду (2.3.1) існує такий збіжний знакододатний числовий ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *, що* $\forall n \in \mathbb{N}$ *і* $\forall x \in X$ *виконано нерівність:*

$$|f_n(x)| \le a_n. \tag{2.3.2}$$

Тоді ряд (2.3.1) збігається абсолютно та рівномірно на множині X *.*

Доведення. Згідно з (2.3.2) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in X$ виконано:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k. \tag{2.3.3}$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний, то для нього виконано критерій Коші для числових рядів, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \ \forall n > N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon,$$

а з цієї нерівності і (2.3.3) випливає, що для ряду (2.3.1) на множині X виконано критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду, отже, ряд (2.3.1) рівномірно збігається на X. З правої частини подвійної нерівності (2.3.3) випливає абсолютна збіжність ряду (2.3.1). Теорему доведено.

Наслідок. *Якщо збігається ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, де* $a_n = \sup_{x \in X} |f_n(x)|$*, то ряд (2.3.1) збігається абсолютно та рівномірно на множині* X *.*

Приклади. Довести, що заданий функціональний ряд збігається абсолютно та рівномірно на множині X .

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}, \quad X = (-\infty, +\infty).$

Маємо:

[9] Вейєрштрасс Карл Теодор Вільгельм (1815–1897) – видатний німецький математик, зробив значний внесок у розвиток математичного аналізу

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| = \frac{|\sin nx|}{n^2} \le \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in X ,$$

і, оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збіжний (п. 1.5) , то початковий ряд за ознакою Вейєрштрасса збігається абсолютно та рівномірно на X .

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$, $X = (-\infty, +\infty)$.

Знайдемо:

$\sup\limits_{x\in X}\left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right| = \sup\limits_{x\in X}\frac{n\,|\,x\,|}{1+n^5\,|\,x\,|^2} = \frac{1}{2n^{3/2}}$ (досягається при $x_n = 1\big/ n^{5/2}$), ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{3/2}}$ збіжний, отже на підставі наслідку з ознаки Вейєрштрасса, початковий ряд збігається абсолютно та рівномірно на X .

Ознака Абеля. *Нехай ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ *збігається рівномірно на множині* X *, а функції* $a_n(x)$ $(n = 1, 2, 3...)$ *при кожному* $x \in X$ *утворюють монотонну послідовність і обмежені у сукупності, тобто* $\exists\, K > 0$ *таке, що* $\forall n \in \mathbb{N}$*,* $\forall x \in X$ *виконано:* $|\,a_n(x)\,| \le K$ *. Тоді ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \tag{2.3.4}$$

збігається рівномірно на множині X *.*

Ознака Діріхле. *Нехай частинні суми* $B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x)$ *обмежені у сукупності, тобто* $\exists\, M > 0$ *таке, що* $\forall n \in \mathbb{N}$*,* $\forall x \in X$ *виконано:* $|\,B_n(x)\,| \le M$ *, а функціональна послідовність* $\{a_n(x)\}$ *монотонно прямує до нуля рівномірно на множині* X *. Тоді ряд (2.3.4) збігається рівномірно на множині* X *.*

Доведення цих ознак проводиться за тими ж схемами, що й доведення ознак Абеля і Діріхле збіжності числових рядів (п. 1.7), тому тут ми їх не наводимо.

2.4. Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів

Теорема 1 (про неперервність суми функціонального ряду). *Нехай всі члени ряду (2.3.1) неперервні на відрізку* $[a,b]$*, і цей ряд на відрізку* $[a,b]$ *збіга-*

ється рівномірно. Тоді сума $F(x)$ ряду (2.3.1) також неперервна на відрізку $[a,b]$.

Доведення. Нехай x_0 довільна точка інтервалу (a,b). За умовою послідовність $\{F_n(x)\}$ рівномірно на $[a,b]$ збігається до функції $F(x)$, тобто $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon, \forall x \in [a,b]$ виконано: $|F_n(x) - F(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Зафіксуємо номер $n_0 > N_\varepsilon$, тоді $|F(x) - F_{n_0}(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, зокрема, при $x = x_0$: $|F(x_0) - F_{n_0}(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Функція $F_{n_0}(x)$ неперервна в точці x_0 як сума скінченного числа неперервних функцій. За означенням неперервності це означає, що $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon)$: $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ виконано: $|F_{n_0}(x) - F_{n_0}(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

З цих нерівностей випливає:

$$|F(x) - F(x_0)| = \left|(F(x) - F_{n_0}(x)) + (F_{n_0}(x) - F_{n_0}(x_0)) + (F_{n_0}(x_0) - F(x_0))\right| \le$$

$$\le |F(x) - F_{n_0}(x)| + |F_{n_0}(x) - F_{n_0}(x_0)| + |F_{n_0}(x_0) - F(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \forall x \in (a,b).$$

Таким чином, функція $F(x)$ неперервна на інтервалі (a,b). Аналогічно доводиться, що в точці $x = a$ функція $F(x)$ неперервна справа, а в точці $x = b$ – неперервна зліва. Отже, функція $F(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$.

Теорема 2 (про почленне інтегрування функціонального ряду). *Якщо всі члени ряду (2.3.1) неперервні на відрізку* $[a,b]$*, і ряд (2.3.1) рівномірно збігається на цьому відрізку, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)dt \tag{2.4.1}$$

також рівномірно збігається на відрізку $[a,b]$*, причому, якщо* $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$*, то*

$$\int_a^x F(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)dt \quad \forall x \in [a,b], \tag{2.4.2}$$

тобто ряд (2.3.1) можна почленно інтегрувати на відрізку $[a,b]$.

Доведення. Оскільки ряд (2.3.1) збігається рівномірно на відрізку $[a,b]$, і його сумою є функція $F(x)$, то послідовність $\{F_n(x)\}$ його частинних сум на відрізку $[a,b]$ збігається рівномірно до функції $F(x)$, тобто

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\ N_\varepsilon:\forall n>N_\varepsilon,\ \forall t\in[a,b]\Rightarrow|F(t)-F_n(t)|<\frac{\varepsilon}{b-a}. \qquad (2.4.3)$$

Позначимо:

$$\sigma(x)=\int_a^x F(t)\,dt,\ \ \sigma_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\int_a^x f_k(t)\,dt.$$

Оскільки функції $f_n(x)$ $(n\in\mathbb{N})$ неперервні на відрізку $[a,b]$, то вони інтегровні на цьому відрізку. Внаслідок рівномірної збіжності ряду (2.3.1) функція $F(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, отже, вона також на ньому інтегровна. Оскільки $\sigma_n(x)=\int_a^x\sum_{k=1}^{n}f_k(t)\,dt=\int_a^x F_n(t)\,dt$, то $\sigma(x)-\sigma_n(x)=\int_a^x(F(t)-F_n(t))\,dt$. Звідси внаслідок (2.4.3) дістанемо:

$$|\sigma(x)-\sigma_n(x)|\le\int_a^x|F(t)-F_n(t)|\,dt<\frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^x dt=\varepsilon\frac{x-a}{b-a}\le\varepsilon,$$

причому цю нерівність виконано $\forall n>N_\varepsilon$ $\forall x\in[a,b]$. Це й означає, що ряд (2.4.1) збігається рівномірно на відрізку $[a,b]$, і виконано рівність (2.4.2). Теорему доведено.

Теорема 3 (про почленне диференціювання функціонального ряду). *Якщо функції $f_n(x)$ $(n\in\mathbb{N})$ мають на відрізку $[a,b]$ неперервні похідні $f_n'(x)$, ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x) \qquad (2.4.4)$$

рівномірно збігається на відрізку $[a,b]$, а ряд (2.3.1) збігається хоча б в одній точці $x_0\in[a,b]$, тобто збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x_0), \qquad (2.4.5)$$

то ряд (2.3.1) збігається рівномірно на відрізку $[a,b]$, і його можна почленно диференціювати, тобто

$$F'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x),$$

де $F(x)$ – сума ряду (2.3.1).

Доведення. Позначимо $\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)$. За попередньою теоремою ряд (2.4.4) можна почленно інтегрувати, тобто

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt \,, \tag{2.4.6}$$

де $x_0, x \in [a,b]$, причому ряд (2.4.6) збігається рівномірно на відрізку $[a,b]$. Оскільки $\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt = f_n(x) - f_n(x_0)$, то

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \,, \tag{2.4.7}$$

де $g_n(x) = f_n(x) - f_n(x_0)$. Ряд (2.4.7) збігається рівномірно на відрізку $[a,b]$, і збігається числовий ряд (2.4.5). Тому ряд (2.3.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$$

рівномірно збігається на $[a,b]$.

З (2.4.7) випливає, що

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(t)dt = F(x) - F(x_0). \tag{2.4.8}$$

Функція $\varphi(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ як сума рівномірно збіжного ряду з неперервних функцій. Тому функція $\int_{x_0}^{x} \varphi(t)dt$ має на $[a,b]$ похідну, яка дорівнює $\varphi(x)$. Отже, $F(x) - F(x_0)$ також має похідну $F'(x)$, і виконано рівність $F'(x) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$. Теорему доведено.

Глава 3. Степеневі ряди

3.1. Степеневі ряди, радіус та інтервал збіжності

Серед функціональних рядів особливо виділяються так звані ***степеневі ряди***, тобто ряди виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \qquad (3.1.1)$$

Числа $a_0, a_1, a_2, \ldots$ дійсні, вони називаються *коефіцієнтами* степеневого ряду.

Для степеневого ряду область його збіжності набуває специфічного вигляду. Для його з'ясування доведемо наступну теорему.

Теорема Абеля. *Якщо степеневий ряд (3.1.1) збіжний при* $x = x_0 \neq 0$*, то він є абсолютно збіжним* $\forall\, x: |x| < |x_0|$.

Доведення. Зауважимо одразу, що ряд (3.1.1) збіжний при $x = 0$. Нехай він збіжний при $x = x_0 \neq 0$, тобто збіжний числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$. На підставі необхідної умови збіжності числового ряду звідси випливає, що $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$. Тоді послідовність $\{a_n x_0^n\}$ обмежена, тобто $\exists M : \forall n$ виконано $|a_n x_0^n| \le M$. Оскільки за умовою $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, то

$$|a_n x^n| = \left|a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n}\right| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x^n}{x_0^n}\right| \le Mq^n \text{ , де } q = \left|\frac{x}{x_0}\right|.$$

Таким чином, модуль кожного члена ряду (3.1.1) не перевищує відповідного члена збіжної геометричної прогресії. Тоді за ознакою порівняння (п. 1.3, теорема 2) ряд (3.1.1) при $|x| < |x_0|$ абсолютно збіжний.

Теорему доведено.

Наслідок. *Якщо ряд* (3.1.1) *розбігається при* $x = x_1$*, то він розбіжний* $\forall x: |x| > |x_1|$.

Дійсно, припустимо, що ряд (3.1.1) збігається для деякого $x = x_2 : |x_2| > |x_1|$. Тоді за теоремою Абеля він збігається для $x = x_1$, що суперечить умові.

Теорема Абеля визначає характер області збіжності степеневого ряду. Якщо при $x = x_0$ ряд збігається, то він абсолютно збігається $\forall x \in \left(-|x_0|, |x_0|\right)$ (рис. 3а).

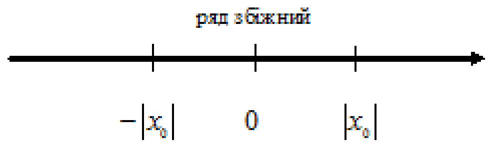

Рис. 3а

Якщо при $x = x_1$ ряд розбігається, то він розбігається і на інтервалах $(-\infty, -|x_1|)$, $(|x_1|, +\infty)$ (рис. 3б).

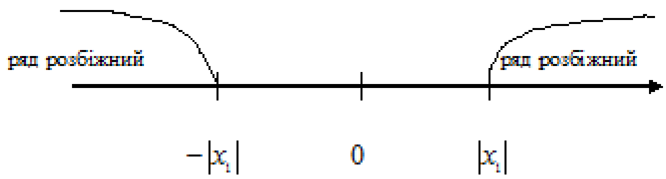

Рис. 3б

Отже для області збіжності степеневого ряду можливі три випадки:
1) ряд (3.1.1) збіжний лише в точці $x = 0$;
2) ряд (3.1.1) збіжний при $x \in (-\infty, +\infty)$;
3) існує таке скінченне число $R \in (0, +\infty)$, що при $|x| < R$ ряд (19 абсолютно збіжний, а при $|x| > R$ – розбіжний (рис. 3в). У точках $x = \pm R$ ряд може бути як збіжним, так і розбіжним, і питання про збіжність ряду у цих точках вирішується окремо.

Число R називається ***радіусом збіжності*** степеневого ряду, а інтервал $(-R, R)$ – ***інтервалом збіжності***.

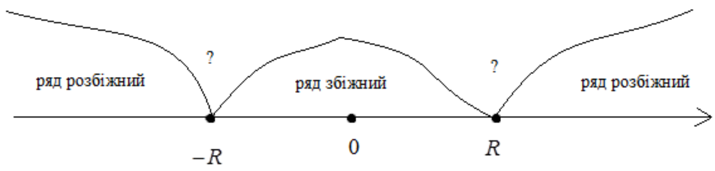

Рис. 3в

Виведемо формули для знаходження радіусу збіжності R. Складемо ряд із модулів членів ряда (3.1.1):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n x^n \right|.$$

Тепер це знакододатний ряд, до дослідження збіжності якого можна застосувати, наприклад, ознаку Даламбера. Припустимо, що існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x| = L|x| \neq 0, \quad x\neq 0$$

(тут $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$).

Тоді ряд (3.1.1) є абсолютно збіжним при $L|x|<1$, або $|x|<\dfrac{1}{L}$ і розбіжним при $L|x|>1$, тому що у цьому випадку загальний член ряду не прямує до нуля. Отже, інтервал $\left(-\dfrac{1}{L}, \dfrac{1}{L}\right)$ є інтервалом збіжності ряду (3.1.1), а число

$$R=\frac{1}{L}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad (3.1.2)$$

його радіусом збіжності.

Аналогічно, використовуючи радикальну ознаку Коші, матимемо:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \qquad (3.1.3)$$

Зауваження. Досить часто доводиться мати справу зі степеневими рядами узагальненого вигляду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-x_0\right)^n. \qquad (3.1.4)$$

Для таких рядів радіус збіжності визначається також за формулами (3.1.2), (3.1.3), а інтервал збіжності має вигляд $(x_0-R,\ x_0+R)$ (рис. 4).

Рис. 4

Приклади

1. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Застосуємо для знаходження радіусу збіжності формулу (3.1.2). Матимемо:

$$a_n = \frac{1}{n+1}\ , \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+2}\ ;$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+2}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = 1\ ,$$

тобто ряд збігається, якщо $x \in (-1,1)$.

Дослідимо збіжність ряду у межах інтервалу збіжності, тобто у точках $x = \pm 1$.

а) $x = -1$. Тоді маємо числовий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$, який збігається за ознакою Лейбніца (п. 1.9);

б) $x = 1$. Тоді маємо гармонічний ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$, який розбіжний (п. 1.5). Отже, область збіжності нашого ряду є півінтервал $[-1,1)$.

2. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}(x+1)^n. \qquad (3.1.5)$$

Зробимо заміну змінної $z = x+1$. Тоді отримаємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n\ . \qquad (3.1.6)$$

Для знаходження радіусу збіжності цього ряду використаємо формулу (3.1.3). Маємо:

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{1}{e}\ ,$$

тобто ряд (3.1.6) збігається при $z \in \left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$.

Дослідимо точки $z = \pm\frac{1}{e}$. Розглянемо спочатку точку $z = -\frac{1}{e}$. Отримуємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{(-1)^n}{e^n}.$$

Покажемо, що загальний член цього ряду не прямує до нуля. Розглянемо

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n} = \exp\left[\ln\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}\right] =$$

$$= \exp\left(n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n\right) = \exp\left[-n + n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right] \to \exp\left(-\frac{1}{2}\right)$$ при

$n \to \infty$ (тут використано формулу Тейлора).

Таким чином, у точці $z = -\frac{1}{e}$ ряд (3.1.6) розбіжний. За тою ж самою причиною він розбіжний і при $z = \frac{1}{e}$. Отже, область збіжності ряду (3.1.6) є інтервал $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$, а тоді область збіжності ряду (3.1.5) є інтервал $x \in \left(-1-\frac{1}{e}, -1+\frac{1}{e}\right)$.

3.2. Властивості степеневих рядів

Теорема 1. *Якщо число $R > 0$ є радіусом збіжності степеневого ряду (3.1.1), то цей ряд збігається абсолютно і рівномірно на будь-якому відрізку $[-q, q]$, де $0 < q < R$.*

Доведення. Оскільки $0 < q < R$, то при $x = q$ ряд (3.1.1) збігається абсолютно, тобто збігається знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot q^n$. Якщо $|x| \le q$, то члени ряду (3.1.1) за абсолютною величиною не перевищують відповідних членів цього ряду, отже, за ознакою Вейєрштрасса для цих значень x ряд (3.1.1) збігається абсолютно та рівномірно. Теорему доведено.

Зауваження. Хоча число q може бути як завгодно близьким до числа R, але з цієї теореми не випливає рівномірна збіжність ряду (3.1.1) на всьому інтервалі $(-R, R)$. У п. 2.3 розглянуто відповідний приклад: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$, радіус збіжності якого $R = 1$, але на інтервалі $(-1,1)$ цей ряд збігається нерівномірно.

Теорема 2. *Сума степеневого ряду (3.1.1) є неперервною функцією на будь якому відрізку* $[-q, q]$, *де* $0 < q < R$.

Це твердження безпосередньо випливає з теореми 1 (п. 2.4) і попередньої теореми.

Теорема 3. *Степеневий ряд (3.1.1) можна почленно інтегрувати на будь якому відрізку* $[\alpha, \beta]$, *такому, що* $-R < \alpha < \beta < R$, *де* R *– радіус збіжності ряду (3.1.1). При цьому, якщо* $S(x)$ *– сума ряду (3.1.1), то*

$$\int_\alpha^\beta S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_\alpha^\beta x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{n+1}.$$

Доведення безпосередньо випливає з теореми 2 про почленне інтегрування функціонального ряду (п. 2.4) та теореми 1 цього пункту.

Теорема 4. *Якщо число* $R > 0$ *є радіусом збіжності степеневого ряду (3.1.1), то це число є також радіусом збіжності ряду, утвореного почленним диференціюванням ряду (3.1.1), при цьому, якщо* $S(x)$ *– сума ряду (3.1.1), то*

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Доведення безпосередньо випливає з теореми 3 про почленне диференціювання функціонального ряду та теореми 1 цього пункту.

Таким чином, ряд (3.1.1) на будь-якому відрізку $[\alpha, \beta] \subset (-R, R)$ можна інтегрувати та диференціювати будь-яке число разів. При цьому радіусом збіжності отриманих рядів кожного разу буде залишатися число R.

Зауваження. Хоча радіус збіжності рядів, утворених почленним інтегруванням або диференціюванням ряду (3.1.1), залишається тим самим, що й радіус збіжності самого ряду (3.1.1), ситуація зі збіжністю цих рядів у точках $\pm R$ може не співпадати з ситуацією зі збіжністю в цих точках ряду (3.1.1). Тому дослідження цих ситуацій є окремим питанням.

Приклад. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Як було показано у п. 3.1, областю збіжності цього ряду є півінтервал $[-1, 1)$. Розглянемо ряд, отриманий інтегруванням даного ряду на відрізку $[0, x]$, де $|x| < 1$:

$$\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

Легко переконатися, що радіус збіжності цього ряду також $R=1$. Але на відміну від ряду, що інтегрувався, цей ряд збігається у точках $x=-1$, $x=1$ (доведіть самостійно).

3.3. Ряди Тейлора і Маклорена

Перейдемо тепер до розгляду дуже важливого питання. Досі ми розглядали властивості суми заданого степеневого ряду. Поставимо тепер інше питання: за даною сумою побудувати відповідній їй степеневий ряд.

Отже, нехай $f(x)$ – сума степеневого ряду

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \tag{3.3.1}$$

в інтервалі (x_0-R, x_0+R). Знайдемо коефіцієнти цього ряду. З цією метою будемо послідовно диференціювати цей ряд.

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\ldots+na_n(x-x_0)^{n-1}+\ldots\ ;$$
$$f''(x)=2a_2+2\cdot3a_3(x-x_0)+3\cdot4a_4(x-x_0)^2+\ldots+(n-1)na_n(x-x_0)^{n-2}+\ldots\ ;$$
$$f'''(x)=2\cdot3a_3+2\cdot3\cdot4a_4(x-x_0)+\ldots+(n-2)(n-1)na_n(x-x_0)^{n-3}+\ldots\ ;$$
$$f^{(IV)}(x)=2\cdot3\cdot4a_4+\ldots+(n-3)(n-2)(n-1)na_n(x-x_0)^{n-4}+\ldots\ ;$$
$$\ldots$$
$$f^{(n)}(x)=2\cdot3\cdot4\cdots(n-2)(n-1)na_n+2\cdot3\cdot4\cdots n(n+1)a_{n+1}(x-x_0)+\ldots\ ;$$
$$\ldots$$

Покладемо в цих всіх рівностях $x=x_0$. Дістанемо:

$$f(x_0)=a_0,\ f'(x_0)=a_1,\ f''(x_0)=2a_2=2!a_2,\ f'''(x_0)=2\cdot3a_3=3!a_3,$$
$$f^{(IV)}(x_0)=2\cdot3\cdot4a_4=4!a_4,\ \ldots\ ,\ f^{(n)}(x_0)=2\cdot3\cdot4\cdots(n-2)(n-1)na_n=n!a_n,\ \ldots$$

Звідси отримуємо формули для коефіцієнтів ряду (3.3.1):

$$a_0=f'(x_0),\ a_1=f'(x_0),\ a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\ a_3=\frac{f'''(x_0)}{3!},\ldots,\ a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ldots\ .$$

Підставляючи ці співвідношення у рівність (3.3.1), дістанемо:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\ .$$

Означення. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (3.3.2)$$

називається *рядом Тейлора*[10] *функції* $f(x)$.

Отже, ми довели наступну теорему.

Теорема. *Якщо функція* $f(x)$ *в інтервалі* $(x_0-R,\ x_0+R)$ *розкладається у степеневий ряд, то цей ряд єдиний і є рядом Тейлора для даної функції.*

Якщо у ряді (3.3.2), зокрема, $x_0=0$, то відповідний ряд називається *рядом Маклорена* для функції $f(x)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \qquad (3.3.3)$$

У подальшому нашою метою буде з'ясування умов збіжності ряду (3.3.2) до функції $f(x)$. Дивно, насправді. Ми одразу припустили, що $f(x)$ є сумою побудованого нами степеневого ряду, як же він може збігатися до іншої функції? Але це можливо. Розглянемо наступний приклад:

$$f(x)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right), & \text{якщо } x\neq 0,\\ 0, & \text{якщо } x=0.\end{cases} \qquad (3.3.4)$$

У випадку, коли $x\neq 0$, маємо:

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right),\ f''(x)=\left(-\frac{6}{x^4}+\frac{4}{x^6}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

і взагалі

$$f^{(n)}(x)=P_{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

де $P_{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$ – поліном деякого степеня відносно $\frac{1}{x}$ (тут n – номер поліному, а не його степінь), тобто $f^{(n)}(x)$ є лінійною комбінацією доданків вигляду $\frac{1}{x^m}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$, де $m\in\mathbb{N}$. Знайдемо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^m}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\begin{bmatrix} t=\dfrac{1}{x^2},\ t\to+\infty \\ x=t^{-\frac{1}{2}}\end{bmatrix}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{\frac{m}{2}}}{e^t}=0$$

(за правилом Лопіталя). Таким чином $\lim\limits_{x\to\pm 0}f^{(n)}(x)=0$. Отже, сама функція $f(x)$ неперервна у точці $x=0$ разом зі своїми похідними будь-якого порядку, причому, як можна показати, $f^{(n)}(0)=0\ \ \forall n=0,1,2,\ldots$.

---

[10] Тейлор Брук (1685–1731) – англійський математик

Таким чином, всі члени ряду Тейлора для функції (3.3.4) дорівнюють нулю, отже його сума також дорівнює нулю, і тоді ряд не збігається до тієї функції, для якої його побудовано.

Виникає питання, які умови треба ввести, щоб степеневий ряд для функції $f(x)$ на інтервалі $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ збігався саме до цієї функції? Для розв'язання цієї задачі введемо залишок ряда Тейлора після m-го члена:

$$R_m(x)=\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Запишемо також формулу Тейлора для функції $f(x)$:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{m}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+r_m(x). \tag{3.3.5}$$

Зауважимо, що тут $r_m(x)$ – залишковий член формули Тейлора, а не залишковий член ряду Тейлора $R_m(x)$. Стверджувати, що ці величини співпадають, можна лише тоді, коли встановлено, що ряд Тейлора збігається саме до функції $f(x)$.

Позначимо:

$$s_m(x)=\sum_{n=0}^{m}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

і перепишемо формулу (3.3.5) у вигляді:

$$f(x)=s_m(x)+r_m(x).$$

Очевидно, що $s_m(x)$ співпадає з m-ю частинною сумою ряду Тейлора (3.3.2). Звідси випливає, що для того, щоб функція $f(x)$ співпадала на інтервалі $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ з сумою свого ряду Тейлора, тобто для того, щоб $\lim\limits_{m\to\infty} s_m(x)=f(x)$ $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$, необхідно і достатньо, щоб $\lim\limits_{m\to\infty} r_m(x)=0$ $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Якщо це має місце, то $r_m(x)=R_m(x)$, тобто залишковий член формули Тейлора є також сумою залишку ряду Тейлора після m-го члена.

Теорема. *Нехай функція $f(x)$ в інтервалі $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ має похідні будь-якого порядку, та існує таке число $M>0$, що $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ і для всіх $n=0,1,2,...$ виконано:*

$$|f^{(n)}(x)|\le M. \tag{3.3.6}$$

Тоді на інтервалі $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ *ряд Тейлора для функції* $f(x)$ *збігається саме до функції* $f(x)$.

Доведення. Скористаємось тим, що $\forall a \in \mathbb{R}$ виконано

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0, \tag{3.3.7}$$

(див. «Вступ до аналізу»). Це також випливає з того, що вираз $\frac{a^n}{n!}$ є загальним членом збіжного числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ (п. 1.4, приклад 1). Покажемо, що в умовах теореми виконано:

$$\lim_{m\to\infty} r_m(x)=0 \quad \forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta). \tag{3.3.8}$$

Запишемо залишковий член формули Тейлора в формі Лагранжа (див. «Диференціальне числення функцій однієї змінної»):

$$r_m(x)=\frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1},$$

де ξ міститься між точками x_0 та x. З нерівності (3.3.6) випливає:

$$|r_m(x)|=\left|\frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}\right|\le M\frac{|x-x_0|^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Оскільки $|x-x_0|<\delta$, то

$$|r_m(x)|<M\frac{\delta^{m+1}}{(m+1)!}. \tag{3.3.9}$$

Звідси на підставі (3.3.7) отримуємо справедливість (3.3.8). А це означає, що ряд Тейлора для функції $f(x)$ збігається на інтервалі $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ саме до цієї функції. Теорему доведено.

3.4. Розкладання елементарних функцій в степеневі ряди
Основні формули

Перейдемо тепер до питань практичного розкладання функцій в степеневі ряди. Як ми встановили, такі степеневі ряди обов'язково є рядами Тейлора для відповідних функцій. На практиці частіше всього користуються рядами Маклорена (3.3.3). З викладеного у попередньому пункті випливає, що для розкладання функції в ряд Маклорена потрібно:

а) знайти $f'(x), f''(x), f'''(x),..., f^{(n)}(x),...$;

б) обчислити значення функції $f(x)$ та всіх її похідних у точці $x=0$, тобто знайти $f^{(n)}(0)$, $n=0,1,2,...$;

в) записати ряд Маклорена (3.3.3) для даної функції і знайти область його збіжності;

г) визначити інтервал $(-\delta,\delta)$, у якому залишковий член формули Маклорена $R_n(x)$ прямує до нуля при $n\to\infty$;

Якщо такий інтервал існує (він може відрізнятися від інтервалу збіжності ряду (3.3.3)), то в цьому інтервалі функція $f(x)$ і сума ряду Маклорена співпадають.

Розглянемо тепер розкладання в ряд Маклорена деяких конкретних функцій.

1. $y=f(x)=e^x$.

У даному випадку маємо: $f^{(n)}(x)=e^x \ \forall n=0,1,2,...$, отже $f^{(n)}(0)=e^0=1$, і згідно з (3.3.3):

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+... \qquad (3.4.1)$$

Знайдемо область збіжності цього ряду. За формулою (3.1.2) радіус збіжності:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1/n!}{1/(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty \ ,$$

Отже, ряд (3.4.1) збігається $\forall x\in(-\infty,+\infty)$. Нехай тепер $|x|<\delta<+\infty$. Тоді: $|f^{(n)}(x)|<e^{\delta} \ \ \forall n=0,1,2,...$,

тобто умову теореми п. 3.3 виконано з константою $M=e^{\delta}$. Таким чином функцію $y=e^x$ можна розкласти в степеневий ряд (3.4.1) на будь-якому інтервалі $(-\delta,+\delta)\subset(-\infty,+\infty)$, а отже, і на всьому інтервалі $(-\infty,+\infty)$.

2 . $y=f(x)=\sin x$.

Маємо:

$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\quad f''(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right),\ldots,$$

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Отже $\quad f^{(n)}(0)=\sin\frac{m\pi}{2}=\begin{cases}0, & \textit{якщо } n=2m,\\ (-1)^m, & \textit{якщо } n=2m+1.\end{cases}$

Таким чином:

$$\sin x=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots \tag{3.4.2}$$

Аналогічно попередньому легко довести, що ряд (3.4.2) збігається $\forall x\in(-\infty,+\infty)$. Крім того,

$$\left|f^{(n)}(x)\right|=\left|\sin\left(x+\frac{m\pi}{2}\right)\right|\le 1<2,\ \forall x\in(-\infty,+\infty),\ n=0,1,2,\ldots$$

Тобто умову теореми п. 3.3 виконано з константою $M=2$. Таким чином функцію $y=\sin x$ можна розкласти в степеневий ряд (3.4.2) на $(-\infty,+\infty)$.

3. $y=f(x)=\cos x$.

Диференцюючи почленно ряд (3.4.2), отримаємо:

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots \tag{3.4.3}$$

Цей ряд збігається до функції $y=\cos x\quad \forall x\in(-\infty,+\infty)$.

4. $y=f(x)=(1+x)^{\alpha}$.

Якщо число α натуральне (тобто $\alpha=m\in\mathbb{N}$) то рядом Маклорена для цієї функції є відома формула бінома Ньютона:

$$(1+x)^m=\sum_{k=0}^{m}C_m^k x^k.$$

У цьому випадку ряд перетворюється на скінченну суму, тобто на многочлен. Розглянемо випадок, коли $\alpha\notin\mathbb{N}$. Маємо:

$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1},$$

$$f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$

$$f'''(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3},$$

$$\ldots$$

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},\ \ldots$$

Отже

$$f(0)=1,\quad f'(0)=\alpha,\quad f''(0)=\alpha(\alpha-1),\quad f'''(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2),\ldots,$$

$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1),\ldots$

Таким чином, маємо:

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}. \qquad (3.4.4)$$

Ряд (3.4.4) називають *біноміальним* (за аналогією з формулою бінома Ньютона). Знайдемо його радіус збіжності:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(n+1)!}{n!\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right|=1,$$ тобто

ряд збіжний в інтервалі $(-1;1)$. Можна довести, що у цьому інтервалі $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

Зокрема, при $\alpha=-1$ з формули (3.4.4) маємо:

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-x^3+\cdots, \qquad (3.4.5)$$

тобто отримали відому формулу суми нескінченно спадної геометричної прогресії зі знаменником $q=-x$ $(|x|<1)$.

5. Проінтегруємо ряд (3.4.5) у межах від 0 до x, де $|x|<1$:

$$\int_0^x\frac{dt}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^n dt, \quad \text{тобто}$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \qquad (3.4.6)$$

Нескладно перевірити, що цей ряд збігається до функції $y=\ln(1+x)$ на півінтервалі $(-1;1]$.

6. Покладемо у формулі (3.4.5) $x=z^2$. Отримаємо:

$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}=1-z^2+z^4-z^6+\cdots, \qquad |z|<1. \qquad (3.4.7)$$

Проінтегрувавши цей ряд від 0 до x, отримаємо:

$$\operatorname{arctg}x=\int_0^x\frac{dz}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x z^{2n}dz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=$$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots \qquad (3.4.8)$$

Легко перевірити, що цей ряд збігається до функції $y=\operatorname{arctg}x$ при $x\in[-1,1]$.

Формули (3.4.1) – (3.4.8) дуже важливі, їх треба знати напам'ять.

3.5. Приклади на розкладання функцій в степеневі ряди

Як відмічалося у попередньому пункті, для розвинення функції в ряд Маклорена треба послідовно знайти похідні цієї функції та обчислити їх значення у точці $x=0$. Але у багатьох випадках цей метод пов'язано зі значними незручностями, оскільки вирази для похідних, особливо вищих порядків, часто бувають досить громіздкі. І загальний член ряду знайти складно, а отже, й знайти область збіжності ряду. Разом з цим використання розвинень (3.4.1) – (3.4.8) в низці випадків дозволяє уникнути цієї процедури диференціювання. Розглянемо наступні приклади. Нехай треба задану функцію розкласти в ряд Маклорена і знайти область збіжності цього ряду.

1. $y=3^{x^2}$.

Якщо послідовно знаходити похідні цієї функції, то вийде:

$$y'=2x\cdot 3^{x^2}\ln 3,\quad y''=2\cdot 3^{x^2}\ln 3+4x^2\cdot 3^{x^2}\ln^2 3,\quad y'''=12x\cdot 3^{x^2}\ln^2 3+8x^3\cdot 3^{x^2}\ln^3 3,$$

$$y^{(IV)}=12\cdot 3^{x^2}\ln^2 3+48x^2\cdot 3^{x^2}\ln^3 3+16x^4 3^{x^2}\ln^4 3,$$

. . .

Як бачимо, ці вирази швидко ускладнюються з ростом порядку похідної. Тому зробимо інакше. Подамо дану функцію у вигляді:

$$y=3^{x^2}=\left(e^{\ln 3}\right)^{x^2}=e^{x^2\ln 3}.$$

Запишемо розвинення (3.4.1) для функції e^z:

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\ ,\quad -\infty<z<+\infty.$$

Покладемо в цій формулі $z=x^2\ln 3$. Матимемо:

$$e^{x^2\ln 3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2\ln 3)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n 3\cdot x^{2n}}{n!}\ .$$

Це й є шукане розвинення. Легко знайти і область його збіжності. Оскільки $-\infty<z<+\infty$, то $0\le x^2\ln 3<+\infty$, отже $-\infty<x<+\infty$.

2. $y=\cos^2 x$.

Подамо дану функцію у вигляді:

$$y=\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x.$$

Скористаємось розвиненням (3.4.3):

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < z < +\infty .$$

Покладемо тут $z = 2x$. У наслідку дістанемо:

$$y = \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < +\infty .$$

3. $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}$.

Скористаємось розвиненням (3.4.4) при $\alpha = -1/2$:

$$(1+z)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} z^n, \quad -1 < z < 1 .$$

Покладемо тут $z = -2x$. У наслідку дістанемо:

$$y = x(1-2x)^{-1/2} = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} (-2x)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} (-1)^n 2^n x^{n+1}, \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

4. $y = \dfrac{x}{1+x-2x^2}$.

Розкладемо даний дріб на елементарні дроби:

$$y = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+2x}\right).$$

Згідно з розвиненням (3.4.5) маємо:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \; -1 < x < 1,$$

$$\frac{1}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^x x^n, \; -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

Звідси дістаємо:

$$y = \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^x x^n\right) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} (1-(-1)^n 2^n) x^n, \; -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

5. $y = \ln\left(1 + x + x^2 + x^3\right)$.

Перетворимо дану функцію наступним чином:

$$y=\ln\left(1+x+x^2+x^3\right)=\ln\left((1+x)\left(1+x^2\right)\right)=\ln(1+x)+\ln\left(1+x^2\right),\ x>-1.$$

Скористаємось розвиненням (3.4.6):

$$\ln\left(1+x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{x^{n+1}}{n+1},\ -1<x\le 1,$$

$$\ln\left(1+x^2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(x^2\right)^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{n+1},\ -1\le x\le 1.$$

Тому

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left((-1)^n+2\sin\frac{n\pi}{2}\right)x^{n+1},\ -1<x\le 1.$$

3.6. Застосування степеневих рядів

Викладений вище матеріал може створити враження, що теорія рядів дуже абстрактна, та її не може бути використано для розв’язання практичних задач. Але це цілком не так. Історично ряди виникли як засіб розв’язання саме задач практики. Нема сумніву, що відкриття нескінченних рядів належить до найзначніших досягнень математичного аналізу і всіх його застосувань, без якого неможливий був би подальший розвиток математики. Тут ми розглянемо лише деякі застосування степеневих рядів.

1. Наближене обчислення значень функції.

Нехай треба обчислити значення функції $y=f(x)$ при $x=x_0$. Припустимо, що функцію $y=f(x)$ можна розкласти в степеневий ряд в інтервалі $(-R,R)$, та $x_0\in(-R,R)$. Тоді точне значення $f(x_0)$ дорівнює сумі цього ряду $S(x_0)$. Але, як правило, знайти точну суму ряду досить складна задача, і тому замість цього знаходять частинну суму цього ряду і користуються наближеною рівністю:

$$f(x_0)=S(x_0)\approx S_n(x_0).$$

Похибка цієї рівності оцінюється величиною залишкового члена $R_n(x_0)$ степеневого ряда. Якщо, зокрема, ряд для $f(x_0)$ знакозмінний, то на підставі наслідку з теореми 9 величина $\left|R_n(x_0)\right|$ не перевищує модуля першого відкинутого члена.

Приклад 1. Обчислити число π з точністю 0,01.

Скористаємося розвиненням (3.4.8) при $x=1$:

$$\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$$

З цієї рівності отримуємо:

$$\pi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{2n+1}\ .$$

Очевидно , що цей ряд знакозмінний і збіжний за ознакою Лейбніца (перевірте самостійно), а тоді його залишок не перевищує за модулем модуля першого відкинутого члена. Знайдемо таке n, для якого:

$$\left|\frac{4(-1)^n}{2n+1}\right|<0{,}01,$$

тобто $2n+1>400$, або $n\geq 200$. Таким чином:

$$\pi\approx 4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\ldots-\frac{4}{399}\approx 3{,}14.$$

Приклад 2. Обчислити число e з точністю 0,001.

Скористаємось розвиненням (3.4.1), у якому покладемо $x=1$:

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\ldots$$

З оцінки (3.3.9) легко встановлюємо оцінку для залишкового члену:

$$|R_n|\leq\frac{e}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}\ .$$

Виберемо n з нерівності

$$\frac{3}{(n+1)!}<0{,}001,\ \text{тобто}\ (n+1)!>3000,\ \text{або}\ n\geq 6\,.$$

Отже, для досягнення потрібної точності треба взяти:

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}\approx 2{,}7181.$$

2. Наближене обчислення інтегралів.

Нехай треба обчислити

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Припустимо, що в інтервалі $(-R,R)$ функція $f(x)$ розкладається у степеневий ряд

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

і проміжок інтегрування $[a,b]$ цілком належить інтервалу $(-R,R)$. Тоді на підставі теореми про почленне інтегрування степеневого ряду матимемо:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_a^b x^n\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}\ .$$

У якості наближеного значення інтегралу приймаємо частинну суму отриманого числового ряду.

Приклад. З точністю $\varepsilon=0{,}001$ обчислити інтеграл

$$\int_0^{0,5} e^{-x^2}\,dx.$$

Первісна від функції e^{-x^2} не виражається в елементарних функціях, тому застосувати формулу Ньютона – Лейбніца неможливо.

Скориставшись рядом (3.4.1), маємо:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \ldots$$

Тоді

$$\int_0^{0,5} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{0,5}\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} - \ldots\right)dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} - \ldots\right)\Bigg|_0^{0,5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3\cdot 3} + \frac{1}{2^5\cdot 10} - \frac{1}{2^7\cdot 42} + \frac{1}{2^9\cdot 216} - \ldots$$

Це числовий ряд, знаки членів якого чергуються, і який збігається за ознакою Лейбніца. Його залишок не перевищує за модулем модуля першого відкинутого члена Знайдемо перший член цього ряду, який за модулем не перевищує 0,001:

$$\frac{1}{2} = 0,5 > 0,001;\quad \frac{1}{2^3\cdot 3} \approx 0,042 > 0,001;\quad \frac{1}{2^5\cdot 10} \approx 0,003 > 0,001;$$

$$\frac{1}{2^7\cdot 42} \approx 0,0002 < 0,001.$$

Отже, з точністю $0,001$ маємо:

$$\int_0^{0,5} e^{-x^2}\,dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{320} \approx 0,461.$$

3. <u>Наближене інтегрування диференціальних рівнянь</u>.

Нехай треба розв'язати задачу Коші:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (3.6.1)$$

Припустимо, що розв'язок цієї задачі можна розкласти в ряд Тейлора:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

Ми розв'яжемо задачу, якщо знайдемо значення функції $y(x)$ та її похідних у точці $x = x_0$. Значення самої функції $y(x)$ маємо з початкової умови : $y(x_0) = y_0$. Далі:

$$y'(x_0)= f(x_0, y(x_0)),$$

$$y''(x_0)=\left(y'(x)\right)'\Big|_{x=x_0} =\frac{d}{dx}\left(f(x, y(x))\right)\Big|_{x=x_0} =\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)\Big|_{x=x_0} =$$

$$=\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\, f(x_0, y_0),$$

$\ldots$

Аналогічно розв'язується задача Коші для рівнянь вищих порядків.

Іноді роблять інакше. Шукають розв'язок $y(x)$ у вигляді степеневого ряду загального виду:

$$y(x)= a_0 + a_1(x- x_0)+ a_2(x- x_0)^2 +\ldots,$$

підставляють його у рівняння (3.6.1), а потім у лівій і правій частинах зрівнюють коефіцієнти при однакових степенях $(x- x_0)$, внаслідок чого знаходяться $a_0, a_1, a_2,\ldots$

Приклад 1. Знайти три перших, відмінних від нуля, члени розкладу в ряд розв'язку задачі Коші:

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^3 \\ y(1)=-1. \end{cases}$$

Шукаємо розв'язок у вигляді:

$$y(x)= y(1)+ y'(1)(x-1)+\frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 +\frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 +\ldots$$

Маємо:

$$y(1)=-1,\ \ y'(1)=1^2 +(-1)^3 = 0,$$

$$y''(x)= 2x+ 3y^2 y',\ \ y''(1)= 2\cdot 1+3\cdot(-1)^2\cdot 0^2 = 2,$$

$$y'''(x)= 2 + 6y(y')^2 + 3y^2 y'',\ \ y'''(1)= 8,$$

отже

$$y(x)\approx -1+\frac{2}{2!}(x-1)^2 +\frac{8}{3!}(x-1)^3 =-1+(x-1)^2 +\frac{4}{3}(x-1)^3.$$

Приклад 2. Знайти три перших члена ряду за малим параметром μ 2π-періодичного розв'язку диференціального рівняння

$$\frac{d^2 x}{dt^2}+ 2x=\sin t+\mu x^2. \qquad (3.6.2)$$

Шукаємо розв'язок у вигляді:

$$x(t,\mu)= x_0(t)+\mu x_1(t)+\mu^2 x_2(t)+\mu^3 x_3(t)+\ldots, \qquad (3.6.3)$$

де $x_0(t),\ x_1(t),\ldots$ – поки що невідомі 2π-періодичні функції змінної t.

Підставляючи ряд (3.6.3) до рівняння (3.6.2), і, зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях μ, послідовно дістанемо низку диференціальних рівнянь відносно $x_0(t),\ x_1(t),\ldots$:

$$\frac{d^2x_0}{dt^2}+2x_0=\sin t\,,$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}+2x_1=x_0^2(t)\,,$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2}+2x_2=2x_0(t)\,x_1(t)\,,$$

. . .

Як відомо з теорії лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, перше з цих рівнянь має єдиний 2π-періодичний розв'язок:

$$x_0(t)=\sin t\ .$$

Підставляючи його у праву частину другого рівняння, дістанемо:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}+2x_1=\sin^2 t=\frac{1-\cos 2t}{2}\,.$$

Єдиний 2π-періодичний розв'язок цього рівняння

$$x_1(t)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos 2t.$$

Підставляючи $x_0(t),\ x_1(t)$ у праву частину третього рівняння, дістанемо:

$$\frac{d^2x_2}{dt^2}+2x_2=2\sin t\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos 2t\right)=\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{2}\sin t\cos 2t=$$

$$=\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{4}(\sin 3t-\sin t)=\frac{1}{4}\sin t+\frac{1}{4}\sin 3t.$$

Єдиний 2π-періодичний розв'язок цього рівняння:

$$x_2(t)=\frac{1}{4}\sin t-\frac{1}{28}\sin 3t.$$

Таким чином, шуканий наближений розв'язок рівняння (3.6.2) має вигляд:

$$x(t,\mu)\approx\sin t+\mu\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos 2t\right)+\mu^2\left(\frac{1}{4}\sin t-\frac{1}{28}\sin 3t\right)\ .$$

Контрольні питання

1. Що розуміється під числовим рядом?
2. Які ряди називаються збіжними, які розбіжними, наведіть приклади. Що таке сума числового ряду?
3. У чому полягає необхідна умова збіжності числового ряду? Чи є вона достатньою? Наведіть відповідний приклад.
4. Які ряди називаються знакозмінними, які – знакододатними?
5. У чому полягає ознака порівняння збіжності знакододатних числових рядів? Які існують форми цієї ознаки?
6. У чому полягає ознака Даламбера збіжності знакододатних числових рядів? Чи існують ситуації, коли ця ознака не дає відповіді на питання про збіжність ряду?
7. У чому полягає радикальна ознака Коші збіжності знакододатних числових рядів? Чи існують ситуації, коли ця ознака не дає відповіді на питання про збіжність ряду?
8. У чому полягає інтегральна ознака Коші збіжності знакододатних числових рядів?
9. Що таке абсолютна і що таке умовна збіжність знакозмінних числових рядів? Які існують відмінності у властивостях абсолютно та умовно збіжних числових рядів?
10. Як можна ознаку Даламбера та радикальну ознаку Коші застосовувати для дослідження на збіжність знакозмінних рядів?
11. У чому полягає ознака Лейбніца збіжності числових рядів, знаки членів яких чергуються? Як оцінюється залишок таких рядів за умови їх збіжності?
12. Що таке функціональна послідовність? Яка функціональна послідовність називається рівномірно збіжною на заданій множині?
13. Які існують критерії рівномірної збіжності на заданій множині функціональної послідовності?
14. Що таке функціональний ряд, що таке область його збіжності? Наведіть приклади.
15. Які функціональні ряди називаються рівномірно збіжними на заданій множині? Які існують критерії рівномірної збіжності?
16. У чому полягає ознака Вейєрштрасса рівномірної збіжності на заданій множині функціонального ряду?
17. Які основні властивості рівномірно збіжних функціональних рядів?
18. Що таке степеневий ряд? Що таке радіус та інтервал збіжності степеневого ряду?

19. Що є областю рівномірної збіжності степеневого ряду? Чи можна стверджувати, що степеневий ряд збігається рівномірно на всьому інтервалі його збіжності?
20. Який ряд називається рядом Тейлора для даної функції? Який ряд називається рядом Маклорена?
21. Чи можна стверджувати, що ряд Тейлора для даної функції завжди збігається на інтервалі своєї збіжності до цієї самої функції?
22. Які достатні умови розкладання функції в ряд Тейлора (Маклорена)?
23. Наведіть приклади застосувань степеневих рядів.

Вправи для самостійного розв'язування

1. Довести, що даний числовий ряд збіжний і знайти його суму.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+12n-5}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2+8n+3}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-14n-48}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{36n^2+12n-35}$.

2. За допомогою ознаки порівняння або, використовуючи необхідну умову збіжності, дослідити на збіжність знакододатний числовий ряд.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{4n^2+5n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\left(n\sqrt{n}\right)}{n\sqrt{n}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{1}{n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln(n+1)-\ln n\right)$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{2n}\right)$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos^2\left(\frac{1}{n^3}\right)$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\exp\left(-\frac{2}{n^3}\right)\right)$; 12) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{2n}}-1\right)$.

3. За допомогою ознаки Даламбера дослідити на збіжність знакододатний числовий ряд.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdots(3n-1)}{1\cdot5\cdots(4n-3)}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+1)}{(n+3)!}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{1\cdot3\cdots(2n-1)}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{2\cdot4\cdots(2n)}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n^2}}{(n!)^2}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n!)^2}{(2n)!}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n!}{n^n}$.

4. За допомогою радикальної ознаки Коші дослідити на збіжність знакододатний числовий ряд.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+2)}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}4^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n^2}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2}\sin\frac{1}{n}\right)^n$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)^n$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\log_3(n+1)-\log_3 n\right)^n$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

5. За допомогою інтегральної ознаки Коші-Маклорена дослідити на збіжність знакододатний числовий ряд.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log_4 n}{n}$; 2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}^2 n}{1+n^2}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\left(\operatorname{arctg}\frac{n}{2}\right)}{4+n^2}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{\ln^2 n}}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot 3^{\frac{1}{n}}$.

6. За допомогою ознаки Раабе дослідити на збіжність знакододатний числовий ряд.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{\left(2+\sqrt{1}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)\cdots\left(2+\sqrt{n}\right)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^q}$.

7. За допомогою ознаки Лейбніца дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд, знаки членів якого чергуються.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n}{3^n+4^n}$; 2) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{n+1}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\arcsin\frac{1}{n}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n!}{(2n)!}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{2^n}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n!}{n^n}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\operatorname{arctg} n}{n}$; 12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2+1}}$.

8. Дослідити функціональну послідовність на рівномірну збіжність у вказаній множині.

1) $f_n(x)=x^n-x^{2n},\ 0\le x\le 1$; 2) $f_n(x)=\frac{1}{x+n},\ 0<x<+\infty$;

3) $f_n(x)=\frac{nx}{1+n+x},\ 0\le x\le 1$; 4) $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$, $-\infty<x<+\infty$;

5) $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$; а) $0\le x\le 1-\varepsilon$; б) $1-\varepsilon\le x\le 1+\varepsilon$; в) $1+\varepsilon\le x<+\infty$, де $0<\varepsilon<1$

.

9. Користуючись критеріями рівномірної збіжності, дослідити на рівномірну збіжність у вказаних проміжках функціональний ряд.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2},\ -1\le x\le 1$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ 0<x<+\infty$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n,\ 0\le x\le 1$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right),\ -1\le x\le 1$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)},\ 0<x<+\infty$.

10. Користуючись ознакою Вейєрштрасса, довести рівномірну збіжність у вказаному проміжку функціонального ряду.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2},\ -\infty<x<+\infty$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n},\ -2<x<+\infty$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2},\ 0\le x\le+\infty$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}\left(x^n+x^{-n}\right),\ \frac{1}{2}\le|x|\le 2$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n^2x}{\sqrt[3]{n^4+x^4}},\ -\infty<x<+\infty$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}},\ -\infty<x<+\infty$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n\sqrt{1+nx}},\ 0<x<+\infty$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+2n-1)(x+2n+1)},\ 0<x<+\infty$.

11. Знайти область збіжності функціонального ряду.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3x^2-3}{x+1}}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+x^n}{1-x^n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{x}{7^n}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x+3}}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n!}x^n$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{n\cdot 3^n}$; 8) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n(4x^2-1)^n}$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{n}}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n(x-1)^n$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$; 12) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2+3\right)(1-\ln x)^n$;

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(2\sin x)^n$; 14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n^2\left(1-|2x-3|\right)^{n-1}}$; 15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)n}$; 16) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(2^x-2^{-x}\right)^n$.

12. Розкласти функцію в ряд Маклорена і вказати область його збіжності.

1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $f(x)=\cos^3 x$; 3) $f(x)=xe^{-5x}$; 4) $f(x)=\dfrac{x}{5+6x}$;

5) $f(x)=\dfrac{3+4x}{6-5x-x^2}$; 6) $f(x)=\dfrac{x}{(1-x)\left(1-x^2\right)}$; 7) $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}$;

8) $y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$; 9) $f(x)=\dfrac{2x}{(1+4x)^3}$; 10) $f(x)=\operatorname{arctg}\left(4x^3\right)$; 11) $f(x)=\sin^2\left(\dfrac{x}{3}\right)$.

13. Розкласти функцію в ряд Тейлора і вказати область його збіжності.

1) $f(x)=\ln x$ за степенями $(x-1)$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+7}$ за степенями $(x+2)$;

3) $f(x)=e^{2x}$ за степенями $(x+1)$; 4) $f(x)=\cos^2 x$ за степенями $\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

5) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ за степенями $(x-4)$; 6) $f(x)=\dfrac{1}{4+3x}$ за степенями $(x+2)$;

7) $f(x)=\ln(5x+3)$ за степенями $(x-3)$; 8) $f(x)=\sin 3x$ за степенями $(x+\pi)$.

14. За допомогою розкладання підінтегральної функції в ряд Маклорена наближено з точністю до 0,001 обчислити інтеграл.

1) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{\sin x}{x}dx$; 2) $\displaystyle\int_0^2\frac{dx}{\sqrt[3]{64-x^3}}$; 3) $\displaystyle\int_1^3\frac{e^x-1}{x}dx$; 4) $\displaystyle\int_0^{1,3}\cos\left(x^2\right)dx$; 5) $\displaystyle\int_{0,2}^{0,4}\frac{\ln(1+2x)}{x}dx$.

6) $\displaystyle\int_{0,1}^{0,5}\frac{\operatorname{arctg} x^2}{x}dx$; 7) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$; 8) $\displaystyle\int_1^2 x^2e^{-3x^2}dx$; 9) $\displaystyle\int_{0,1}^{0,4}\frac{dx}{1+x^4}$; 10) $\displaystyle\int_0^5\frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}$.

12. Знайти три перших, відмінних від нуля, члени розкладання в ряд Тейлора розв’язку задачі Коші.

1) $y' = x + y^2,\ y(1) = 2$; 2) $y' = x - \cos y,\ y(0) = \pi$; 3) $y' = y + xe^y,\ y(0) = 0$;

4) $y' = x^2 + \dfrac{x}{y},\ y(1) = -2$; 5) $y' = x - \operatorname{tg} y,\ y(0) = \dfrac{\pi}{4}$; 6) $y' = 2x + \sqrt{y},\ y(1) = 0$.

Список рекомендованої літератури

Базова

1. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. М.: Наука, 1988. – 816 с.
2. *Н. С. Пискунов*. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.2. М.: Наука, 1978. – 576 с.
3. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Астрель, 2004. – 558 с.

Допоміжна

1. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.II. М.: Наука, 1970. – 800 с.
2. *Ильин В. А. Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Т. 1. М.: Наука, 1982. – 616 с. Т. 2. М.:Наука, 1980. – 448 с.
3. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. Т. 2. М.: ВШ, 1988. – 576 с. с.

Зміст

Навчальне видання

Щоголєв Сергій Авенірович

ТЕОРІЯ РЯДІВ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

За редакцією автора

Підп. до друку 08.07.2015. Формат 60x84/16.
Умов.-друк. арк. 4,42. Тираж 40 пр.
Зам. № 1184.

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет
імені І. І. Мечникова
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.

Україна, 65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12
Тел.: (048) 723 28 39. E-mail: druk@onu.edu.ua