Министерство образования и науки Украины

Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова

Институт математики, экономики и механики

Кафедра методов математической физики

Ю.С. Процеров

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ

Учебно-методическое пособие

Одесса – 2015

Печатается по решению Научно-методического совета ОНУ имени И.И. Мечникова (протокол № 7 от 23 октября 2015 года).

Составитель: Ю.С. Процеров, канд. физ. – мат. наук, доцент кафедры методов математической физики

Рецензенты: Н.Д. Вайсфельд, докт. физ-мат. наук, профессор, заведующая кафедрой Методов математической физики

В.Г. Попов, докт. физ-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой Высшей математики Одесской национальной морской академии

А.В. Усов, докт. физ-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой Высшей математики и моделирования систем Одесского национального политехнического университета

Данное методическое пособие ставит своей целью оказать помощь студентам направления 6.040301 «Прикладная математика» в изучении курса «Теория вероятности». В нем подробно и систематично изложены основные темы программы курса: случайные события и их вероятности, случайные величины и функции распределения, числовые характеристики случайных величин, последовательность независимых испытаний и предельные теоремы теории вероятности. Изложение материала сопровождается многочисленными примерами. Также приводится большое число заданий, предназначенных для самостоятельной работы студентов.

Оглавление

Введение.

Теория вероятностей – это раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений.

Теория вероятностей, подобно другим математическим наукам, развивалась из потребностей практики. Начало систематического исследования задач, относящихся к случайным явлениям, и появление соответствующего математического аппарата относится к XVII веку. В начале XVII века Г. Галилей пытался подвернуть научному исследованию ошибки физических измерений, рассматривая их как случайные и оценивая их вероятности. К тому же времени относятся первые попытки создания общей теории страхования, основанной на анализе закономерностей в таких массовых случайных явлениях, как заболеваемость, смертность, статистика несчастных случаев и т. д. Необходимость создания математического аппарата, специально приспособленного для анализа случайных явлений, вытекала из потребностей обработки и обобщения обширного статистического материала во многих областях науки, таких как статистика народонаселения, теория ошибок наблюдений, теория стрельб и других. Однако эти задачи были слишком сложными и основы теории вероятностей формировались на более простых задачах, связанных с азартными играми: какой шанс выигрыша в той или иной ситуации, как разделить приз между игроками при досрочном окончании игры и т. п. Недаром само слово азарт (фр. «le hasard») означает случай. Схемы азартных игр давали возможность разработать простые и прозрачные модели случайных явлений, позволяющие в наиболее отчетливой форме наблюдать и изучать управляющие ими специфические законы, а возможность неограниченно повторять один и тот же опыт обеспечивала экспериментальную проверку этих законов. Вплоть до настоящего времени примеры из области азартных игр (бросание монет, игрального кубика и т.д.) используется при иллюстрации законов теории вероятностей.

Возникновение теории вероятности в современном смысле слова относится к середине XVII века и связано с исследованиями Б. Паскаля, П. Ферма, Х. Гюйгенса. Непосредственное практическое применение вероятностные методы нашли, прежде всего, в задачах страхования. Уже в конце XVII века страхование стало производиться на научной математической основе.

Далее разработкой соответствующего математического аппарата и методов решения вероятностных задач были заняты такие ученые математики, как Я. Бернулли, А. Муавр, П. Лаплас, К. Гаусс, С. Пуассон (XVIII и первая половина XIX веков). Дальнейшее бурное развитие теории вероятности было связано в первую очередь с запросами естествознания – физики, химии, биологии, техники и других наук. При этом теория вероятностей была поставлена на прочную логическую и математическую основу и тем самым заняло видное место в ряду математических дисциплин. Большая заслуга в этом принадлежит Петербургской математической школе теории вероятностей – В.Я. Буняковскому, П.Л. Чебышеву, А.А. Маркову, А.М. Ляпунову. В XX веке большой вклад в развитие теории вероятности внесли С.Н. Бернштейн, А.Я. Хинчин, Б.В. Гнеденко и А.Н. Колмогоров, который дал наиболее совершенное аксиоматическое построение теории вероятностей, связав ее с одним из важнейших разделов современной математики – метрической теорией функций.

Современное развитие теории вероятностей характерно резким расширением круга ее практических применений. Теоретико-вероятностные методы лежат в основе таких дисциплин, как теория случайных процессов, теория массового обслуживания, теория информации и многих других.

Совершенно очевидно, что в природе нет ни одного физического явления, в котором не присутствовали бы в той или иной мере элементы случайности. Тем не менее в ряде практических задач этими случайными явлениями можно пренебречь, рассматривая вместо реального явления его упрощенную модель, предполагая, что при определенных условиях явление протекает вполне определенным образом. Например, закон о зависимости давления газа от его температуры есть на самом деле результат вероятностного характера о числе соударений частиц о стенки сосуда и их скоростях. Просто в области обычных температур и давлений случайные отклонения, которые тут имеют место, с большой вероятностью очень малы и не регистрируются измерительными приборами. Иначе обстоит дело при изучении более редких потоков частиц, например, космического излучения, хотя качественной разницы между двумя этими явлениями нет. Существуют явления, в основе которых лежит случайность. Например, время жизни радиоактивной частицы случайно по существу и эта случайность увеличением наших познаний устранена быть не может.

Почти во всех областях человеческой деятельности существуют ситуации, когда мы не можем дать однозначного ответа на поставленный вопрос, поскольку процессы, с которыми они связаны, по самому их существу лишены полной определенности. Например, мы не можем заранее сказать сколько дорожных происшествий произойдет завтра в городе или сколько вызовов поступит на станцию скорой помощи, так как эти события зависят от огромного числа причин, которые невозможно заранее предусмотреть. В этих случаях принято говорить, что интересующее нас событие является случайным.

Теория вероятностей как раз и занимается изучением случайных событий, но при этом рассматриваются не любые события, которые в житейской практике мы называем случайными, а только те из них, которые обладают определенными свойствами.

Прежде всего, теория вероятностей ограничивается изучением лишь тех событий, которые в принципе могут быть осуществлены неограниченное число раз, при том в неизменных условиях. Например, монета может быть подброшена в одних и тех же условиях столько раз, сколько мы захотим.

Далее, изучаются лишь такие случайные события, в отношении которых имеет смысл не только убеждение об их случайности, но и возможна объективная оценка случаев их появления. Поэтому теория вероятностей не занимается изучением уникальных событий, которые не допускают повторения, хотя они и носят неопределенный характер. Так, высказывание «В конце этого года наступит конец света» носит уникальный характер и ответ на него мы получим в начале следующего года.

Кроме того теория вероятностей занимается лишь теми событиями, которые обладают так называемой статистической зависимостью. Что это такое? Предположим, что проводится последовательность испытаний, в каждом из которых может произойти, а может и не произойти некоторое событие **A**. Эти испытания проводятся в одинаковых условиях и результаты одних не оказывают влияние на результаты других. Пусть в n испытаниях событие **А** наступило m раз. Тогда частота $\frac{m}{n}$ события **А** при больших n для статистически устойчивых событий близка к некоторой постоянной, которая мало меняется от одной серии испытаний к другой. Так, в XVIII веке Ж. Бюффон провел 4040 подбрасывания монеты и получил частоту выпадения герба 0,508. Позже К. Пирсон провел 24000 подбрасываний монеты и получил частоту выпадений герба 0,5005. Таким образом, частота выпадения герба есть величина, близкая к 0,5.

Глава 1. Случайные события.

1.1. Дискретное пространство элементарных событий. Операции над событиями.

Исходными понятиями теории вероятностей являются понятия стохастического (вероятностного) эксперимента, случайного события и вероятности случайного события.

Стохастическими (или вероятностными) называют эксперименты, результаты которых нельзя предугадать заранее. Например, бросание монеты или игрального кубика и т.п. Каждому рассматриваемому эксперименту ставится в соответствие некоторое множество Ω возможных результатов этого эксперимента. Элементы этого множества $\omega_1, \omega_2, \ldots$ называют элементарными событиями, а само множество Ω - пространством элементарных событий. Пространство элементарных событий может быть как конечным, так и бесконечным.

Пример 1. 1 раз бросаем монету $\Omega = \{Г, \mathrm{Р}\}$.

2 раза бросаем монету $\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\}$.

Бросаем монету, пока не появится герб $\Omega = \{Г, РГ, РРГ, \ldots, РР\ldots РГ, \ldots\}$.

Бросаем игральный кубик $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Бросаем два игральных кубика $\Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots, (6,6)\}$.

Говоря об эксперименте в теории вероятностей, мы не интересуемся его технической стороной, а только тем, какие события в этом эксперименте могут наблюдаться, и что в результате проведенного эксперимента действительно наблюдалось.

Пусть **А** произвольное наблюдаемое в данном эксперименте событие. В множестве элементарных событий Ω ему отвечает некоторое подмножество элементарных событий, которое также будем обозначать через **А**: $A = \{\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \ldots\}$. Если результат эксперимента описывается точкой $\omega_k \in \Omega$ и $\omega_k \in A,$ то говорят, что в данном эксперименте произошло событие **А**, если же $\omega_k \notin A,$ то событие **А** не произошло. При этом точки ω_{j_i} из множества **А** называют элементарными событиями, благоприятствующими событию **А**.

Пример 2. Один раз бросили игральный кубик $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Событие **А** – число выпавших очков кратно трем: $A = \{3, 6\}$. Событие **В** – число выпавших очков четно: $B = \{2, 4, 6\}$.

Таким образом, события интерпретируются как подмножества некоторого множества Ω. Это позволяет нам ввести отношения порядка и операции над событиями исходя из соответствующих понятий в теории множеств.

1) Множество Ω, рассматриваемое как событие, характеризуется тем, что в результате эксперимента оно необходимо происходит, так как содержит все возможные результаты эксперимента. Поэтому множество Ω называют достоверным событием.
2) Пустое множество $\varnothing$ не содержит ни одной точки из Ω. Если его отождествлять с событием, то это событие в эксперименте не происходит. Поэтому пустое множество $\varnothing$ называют невозможным событием.
3) Пусть $A \subset B$. Если **А** и **В** события, то $A \subset B$ означает, что если событие **А** происходит, то и событие **В** также происходит. В этом случае говорят, что из события **А** следует событие **В**.
4) Суммой (или объединением) двух событий **А** и **В** называют событие $A \bigcup B$, происходящее тогда и только тогда, когда происходит или событие **А**, или событие **В**.
   При этом для любого события **А** $A \bigcup \varnothing = A$ и $A \bigcup \Omega = \Omega$.

Для событий **А** и **В** из примера 2 $A \bigcup B = \{2, 3, 4, 6\}$.

5) Пересечением (или совмещением) двух событий **А** и **В** называют событие $A \bigcap B$, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит и событие **А**, и событие **В**.

Для событий **А** и **В** из примера 2 $A \bigcap B = \{6\}$.

Определение. Два события **А** и **В** называются несовместными, если $A \bigcap B = \varnothing$.

6) Разностью двух событий **А** и **В** называют событие $A \setminus B$, происходящее тогда и только тогда, когда происходит событие **А**, но не происходит событие **В**.

Для событий **А** и **В** из примера 2 $A \setminus B = \{3\}$.

7) Событие $\overline{A} = \Omega \setminus A$ называют противоположным событию **А**. Оно происходит тогда и только тогда, когда событие **А** не происходит.
   При этом для любого события **А** $A \bigcup \overline{A} = \Omega$ и $A \bigcap \overline{A} = \varnothing$.

Для события **А** из примера 2 $\overline{A} = \{1, 2, 4, 5\}$.

1.2. Вероятность события. Свойства вероятности.

Рассмотрим некоторый стохастический эксперимент и событие **A**, наблюдаемое в этом эксперименте. Повторим эксперимент n раз и пусть m число экспериментов, в которых произошло событие **A**.

Отношение $\nu_n(A) = \dfrac{m}{n}$ называют частотой события **A** в проведенной серии из n экспериментов. Частота $\nu_n(A)$ обладает следующими очевидными свойствами:

1) $0 \le \nu_n(A) \le 1.$
2) $\nu_n(\Omega) = 1.$
3) Если **A** и **B** два наблюдаемых несовместных события, то
   $\nu_n(A \cup B) = \nu_n(A) + \nu_n(B).$
   Действительно, так как $m(A \cup B) = m(A) + m(B),$ то
   $\nu_n(A \cup B) = \dfrac{m(A) + m(B)}{n} = \nu_n(A) + \nu_n(B).$

Частота события может быть вычислена лишь после того, как проведена серия экспериментов, и, вообще говоря, частота изменится, если мы проведем другую серию из n экспериментов или изменим n. Однако для статистически устойчивых событий, а именно такие мы и рассматриваем, частота $\nu_n(A)$ мало отличается от некоторого фиксированного значения $p,$ причем отклонения наблюдаются тем реже, чем больше n. Это значение p и принимается за эмпирическое (или статистическое) определение вероятности события **A**.

Введенное эмпирическое определение вероятности события во-первых не позволяет находить вероятности без проведения многочисленных экспериментов, а во-вторых, и это главное, не позволяет построить строгую математическую модель теории вероятностей.

Для построения такой модели, как и во многих других разделах математики, воспользуемся аксиоматическим методом. Для этого следует определить понятие вероятности аксиоматически и тогда произвольную систему величин, удовлетворяющих этим аксиомам, мы можем называть вероятностью события.

Рассмотрим стохастический эксперимент с конечным или счетным числом исходов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}.$ Предположим, то каждому элементарному событию ω_k ставится в соответствие некоторое число p_k, называемое вероятностью элементарного события ω_k, и такое, что справедливы аксиомы

I. $p_k \ge 0.$

II. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$

Пусть теперь **A** произвольное случайное событие, наблюдаемое в эксперименте, то есть **A** произвольное подмножество пространства Ω.

Определение. Вероятностью $P(A)$ события **A** называют сумму вероятностей элементарных событий, составляющих событие **A**: $P(A)=\sum\limits_{\omega_k\in A} p_k.$

Введенная таким образом вероятность обладает следующими **свойствами**:

1) $0\le P(A)\le 1,$ так как $0\le P(A)=\sum\limits_{\omega_k\in A} p_k \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k =1.$

2) $P(\Omega)=1,$ так как $P(\Omega)=\sum\limits_{\omega_k\in \Omega} p_k =\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k =1.$

3) Если **A** и **B** несовместные события: $A\cap B=\varnothing,$ то $P(A\cup B)=P(A)+P(B).$

Действительно, $P(A\cup B)=\sum\limits_{\omega_k\in A\cup B} p_k =\sum\limits_{\omega_k\in A} p_k +\sum\limits_{\omega_k\in B} p_k =P(A)+P(B).$

4) $P(\overline{A})=1-P(A).$

Так как $A\cap\overline{A}=\varnothing$ и $A\cup\overline{A}=\Omega,$ то $P(A)+P(\overline{A})=P(\Omega)=1$ и $P(\overline{A})=1-P(A).$

5) $P(\varnothing)=0,$ так как $\varnothing=\overline{\Omega}$ и $P(\varnothing)=1-P(\Omega)=1-1=0.$

6) Если $B\subset A,$ то $P(A\setminus B)=P(A)-P(B).$

Так как $B\cap(A\setminus B)=\varnothing$ и $B\cup(A\setminus B)=A,$ то $P(A)=P(B)+P(A\setminus B),$ откуда $P(A\setminus B)=P(A)-P(B).$

7) Для произвольных событий **A** и **B** $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$

Действительно,
$$P(A\cup B)=\sum_{\omega_k\in A\cup B} p_k =\sum_{\omega_k\in A} p_k +\sum_{\omega_k\in B} p_k -\sum_{\omega_k\in A\cap B} p_k =P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$

Будем говорить, что для данного эксперимента построена вероятностная модель $\langle\Omega,P\rangle,$ если:

- указано пространство элементарных событий $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...\};$

- каждому ω_k из Ω приписана вероятность p_k, причем $p_k\ge 0$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k =1.$

Рассмотрим теперь примеры построения различных вероятностных моделей.

1. Пусть рассматривается эксперимент с конечным числом n одинаково возможных исходов $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_n\}.$ В этом случае естественно каждому элементарному событию ω_k приписать одинаковую вероятность $p_k=\dfrac{1}{n}.$ Если **A** некоторое

событие, которому благоприятствует m элементарных событий, то

$$P(A)=\sum_{\omega_k\in A}p_k=m\cdot\frac{1}{n}=\frac{m}{n}.$$

Такое определение вероятности принято называть классическим определением вероятности.

Например, пусть бросают два игральных кубика. В этом случае пространство элементарных событий $\Omega=\{(1,1),(1,2),...,(6,6)\}$ состоит из 36 равновероятных исходов, то есть $p_k=\frac{1}{36}$. Пусть **A** событие, состоящее в том, что сумма выпавших очков равна 5. Тогда $A=\{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}$, то есть $m=4$ и $P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

2. Пусть монета бросается до тех пор, пока впервые не выпадет герб. Тогда $\Omega=\{Г,РГ,РРГ,...,РР...РГ,...\}$, то есть $\omega_k=\underset{k-1}{РР...}РГ$. Припишем ω_k вероятность $p_k=\frac{1}{2^k}$. При этом $\sum_{k=1}^{\infty}p_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1/2}{1-1/2}=1$ и тем самым выполнены аксиомы и построена вероятностная модель.

Пусть **A** событие, что будет произведено не более трех бросков монеты до первого появления герба. Тогда $P(A)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$.

Задания.

1. Брошено два игральных кубика. Найти вероятности следующих событий: А – сумма выпавших очков равна семи; В – сумма выпавших очков равна восьми, а разность четырем.
2. Брошено три монеты. Найти вероятности следующих событий: А – первая монета выпала гербом вверх; В – выпало ровно два герба; С – выпало не более двух гербов.
3. Общество из n человек садится за круглый стол в случайном порядке. Какова вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом?
4. В последовательности чисел $1,2,...,n$ отмечено число k. Найти вероятность того, что среди двух чисел, выбранных из этой последовательности наугад, одно будет меньше k, а другое больше k.
5. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наугад извлеченный кубик имеет окрашенных граней: А – одну; В – две; С – три.
6. Монета бросается до тех пор, пока не появится подряд 2 герба или 2 решки, после чего броски прекращаются. Построить для этого опыта пространство элементарных событий и найти вероятность события **А** – для достижения результата понадобилось не более трех бросков.
7. Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у которого раньше выпадет герб. Найти вероятности выигрыша для каждого из игроков.

1.3. Необходимые сведения из комбинаторики.

Комбинаторика – это раздел математики, изучающий расположение объектов в соответствии с заданными требованиями и методы подсчета числа всех возможных способов, которыми эти расположения могут быть сделаны.

Комбинаторика широко применяется при решении вероятностных задач, а потому рассмотрим здесь основные ее понятия.

Правило суммы. Если некоторый выбор А можно осуществить n различными способами, а некоторый другой выбор В можно осуществить m различными способами, то выбор А или В можно осуществить $n+m$ способами.

Правило произведения (Основной принцип комбинаторики). Если некоторый выбор А можно осуществить n различными способами, а для каждого из этих способов некоторый другой выбор В можно осуществить m различными способами, то выбор А и В можно осуществить $n \cdot m$ способами.

Например, в соревновании участвует 15 команд. Сколькими способами могут быть распределены 1 и 2 места?

Первое место может занять одна из 15 команд. После того, как 1 место определилось, 2 место может занять одна из 14 оставшихся команд. Таким образом согласно правилу умножения общее число способов $15 \cdot 14 = 210$.

Правило умножения легко обобщается не на два, а на большее число выборов.

Пример. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0,1,2,3,4,5, если

a) цифры не повторяются: так как ноль не может быть первым, то $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ способов;
b) цифры могут повторяться: $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080$ способов;
c) числа должны быть нечетными и цифры не повторяются: так как ноль не может быть первым, а на последнем месте должна стоять одна из трех нечетных цифр, то $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 144$ способа;
d) числа должны быть нечетными, но цифры могут повторяться: $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 540$ способов.

Упорядоченные множества. Перестановки.

Множество из n элементов называется упорядоченным, если каждому элементу этого множества ставится в соответствие некоторое число (номер элемента) от 1 до n так, что различным элементам отвечают различные номера.

Очевидно, что любое множество, содержащее более одного элемента, можно упорядочить не единственным образом. Различные упорядоченные множества, отличающиеся лишь порядком элементов, называются перестановками данного множества. Число перестановок для множества из n элементов равно $P_n = n!$.

Действительно, на первое место можно поставить любой из n элементов, на второе – любой из оставшихся $n-1$ элемента и т.д. По основному принципу комбинаторики $P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

Пример. Пусть $\Omega = \{1, 2, ..., 10\}$. Сколькими способами можно упорядочить это множество так, чтобы четные числа имели четный номер, а нечетные – нечетный?

Пять четных чисел можно расставить на 5 местах с четными номерами $P_5 = 5! = 120$ способами. Оставшиеся пять нечетных чисел можно расставить на оставшихся 5 местах также $P_5 = 5! = 120$ способами. Таким образом получим $P_5 \cdot P_5 = (5!)^2 = 120^2 = 14400$ способов.

Сочетания из n по k.

Пусть Ω множество из n элементов. Произвольное k элементное подмножество множества Ω называют сочетанием из n элементов по k элементов. Порядок элементов в этих подмножествах не существенен. Число таких k элементных подмножеств множества из n элементов обозначают

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k}.$$

Примеры.

1. Сколькими способами можно выбрать 3 студентов из 8 студентов?

$$C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56.$$

2. Сколькими способами из колоды карт (36 карт) можно выбрать четыре карты так, чтобы две из них были тузами?

$$C_4^2 \cdot C_{32}^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{32 \cdot 31}{1 \cdot 2} = 2976.$$

Размещения из n по k.

Пусть Ω множество из n элементов. Упорядоченные k элементные подмножества множества Ω называют размещениями из n элементов по k элементов. Различные размещения из n элементов по k элементов отличаются либо элементами, либо их порядком.

Множество из n элементов имеет C_n^k подмножеств из k элементов. Каждое такое подмножество можно упорядочить $k!$ способами. Таким образом получим $A_n^k = k! \cdot C_n^k = n(n-1)...(n-k+1)$ размещений из n элементов по k элементов.

Примеры.

1. Студенту надо сдать три экзамена за 7 дней. Сколькими способами можно составить расписание экзаменов?

Поскольку порядок экзаменов важен, то $A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ способов.

2. После окончания учебы 20 выпускников обменялись между собой фотографиями. Сколько было фотографий?

$$A_{20}^2 = 20 \cdot 19 = 380.$$

Задания.

1. Сколько разных трехзначных чисел можно образовать в десятичной системе счисления, если в каждом числе ни одна цифра не повторяется?

2. Сколько пятизначных чисел можно образовать из семи цифр 1,2,4,6,7,8,9, если цифры не повторяются? Сколько среди них будет четных? Нечетных?
3. Имеется 4 учебника по математике, 3 по физике и 2 по химии. Сколькими способами их можно расставить на книжной полке так, чтобы учебники по одному предмету стояли рядом?
4. Каким числом способов можно разделить колоду из 36 карт пополам так, чтобы в каждой половине было по два туза?
5. Сколькими способами можно расселить 9 студентов в двухместной, трехместной и четырехместной комнатах?
6. На одной из двух параллельных прямых взято n точек, а на второй прямой – m точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?
7. Сколькими различными способами можно разделить множество из 12 элементов на одно подмножество из 4 элементов, два подмножества из 3 элементов и одно подмножество из 2 элементов?
8. Сколько диагоналей имеет выпуклый n-угольник?
9. Сколькими способами можно изготовить трехцветный флаг с горизонтальными полосами, имея материал 7 разных цветов?
10. Сколько разных правильных дробей можно составить из чисел 3,5,7,11,13,17,19,23?
11. Автомобильный номер состоит из 4 цифр и 3 букв латинского алфавита (28 букв). Какое наибольшее число таких номеров можно образовать?
12. В городе N тысяча жителей. Доказать, что по крайней мере двое из них имеют одинаковые инициалы.

1.4. Урновые схемы.

При решении многих задач теории вероятностей используются так называемые урновые схемы.

Пусть имеется некоторое множество объектов $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, которое будем называть генеральной совокупностью (например, шары в урне). Из этой генеральной совокупности мы выбираем k объектов $\{a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_k}\}$, называемых выборкой объема k $(k < n)$.

Рассматривается два вида выборок.

Выборка без возвращения.

Сначала из генеральной совокупности выбираем объект a_{j_1}, затем из оставшихся $n-1$ объектов выбираем объект a_{j_2} и так далее. Число таких выборок объема k равно $A_n^k = n(n-1)...(n-k+1)$.

Например, пусть в урне находится 10 шаров с номерами 1,2,…,10. Из урны наугад без возвращения достают 5 шаров. Какова вероятность, что среди них будут шары с номерами 1 и 2?

Общее число выборок равно A_{10}^5. Среди них благоприятствующих условию задачи будет A_8^3 выборок (есть шары с номерами 1 и 2 и три любых шара с другими номерами). Таким образом $p = \frac{A_8^3}{A_{10}^5} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{1}{90}$.

Выборка с возвращением.

Из генеральной совокупности выбираем объект a_{j_1}, запоминаем его и возвращаем обратно в генеральную совокупность, затем извлекаем второй объект a_{j_2}, запоминаем его и возвращаем обратно, и так далее. Таким образом, объекты в выборке могут повторяться и каждый раз мы выбираем из n объектов. Число таких выборок объема k равно $\underbrace{n \cdot n \cdot ... \cdot n}_{k\ раз} = n^k$.

Например, найдем вероятность того, что в выборке с возвращением все объекты разные. Выборок с неповторяющимися объектами будет столько же, сколько выборок без возвращения, то есть A_n^k. Таким образом искомая вероятность равна $p = \frac{A_n^k}{n^k}$.

Рассмотрим еще один вид задач, решаемый по урновой схеме.

Пусть в урне находится n шаров: m белых и $n-m$ черных. Из урны без возвращения наугад извлекают k шаров. Какова вероятность, что среди них будет t белых шаров?

Всего выпорок из n шаров по k шаров будет C_n^k. Из m белых шаров можно выбрать t белых шаров C_m^t способами, а из $n-m$ черных шаров выбрать $k-t$ черных шаров можно C_{n-m}^{k-t} способами. Таким образом, число благоприятствующих исходов равно $C_m^t \cdot C_{n-m}^{k-t}$, а искомая вероятность равна $p = \frac{C_m^t \cdot C_{n-m}^{k-t}}{C_n^k}$.

Пример. Пусть в коробке лежит 8 деталей, из которых 3 бракованных. Из коробки наугад достают 4 детали. Какова вероятность того, что среди извлеченных деталей будет:

А – одна бракованная?; В – две бракованных?; С – три бракованных?; D – хотя бы одна бракованная?

$$P(A) = \frac{C_3^1 \cdot C_5^3}{C_8^4} = \frac{3}{7};\ P(B) = \frac{C_3^2 \cdot C_5^2}{C_8^4} = \frac{3}{7};\ P(C) = \frac{C_3^3 \cdot C_5^1}{C_8^4} = \frac{1}{14};$$

$$P(D) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{1}{14} = \frac{13}{14}.$$

Вероятность события D можно найти и по-другому, если учесть, что событие $\overline{D}$ - среди извлеченных деталей нет бракованных и $P(\overline{D}) = \frac{C_5^4}{C_8^4} = \frac{1}{14}$. Тогда

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14}.$$

Задания.

1. В коробке находится 10 одинаковых деталей, помеченных номерами от 1 до 10. Наугад извлечены 6 деталей. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей окажутся: А – деталь с №1; В – детали с №1 и с №10.
2. В ящике находится 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наугад извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали: А – все окрашены; В – все не окрашены.
3. В группе 12 студентов, из которых 8 отличников. По списку наугад отобраны 9 студентов. Какова вероятность того, что среди отобранных студентов 5 отличников?
4. В коробке находится 5 одинаковых изделий, причем 3 из них окрашены. Наугад извлечены два изделия. Какова вероятность того, что среди извлеченных изделий: А – ни одного окрашенного?; В – одно окрашенное?; С – хотя бы одно окрашенное?
5. На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трехтомник Н.В. Гоголя. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания слева направо, но не обязательно рядом.
6. Из полной колоды карт (52 карты) вынимают наугад сразу три карты. Найти вероятность того, что ими будут: тройка, семерка, туз.
7. 9 пассажиров наугад рассаживаются в 3 вагонах. Найти вероятность того, что:
   А – в каждый вагон сядет по 3 пассажира;
   В – в один вагон сядет 4 пассажира, в другой 3, а в третий 2 пассажира.
8. Бросается n игральных кубиков. Найти вероятность того, что выпадет n_1 единиц, n_2 двоек,…, n_6 шестерок $\left(n_1+n_2+...+n_6=n\right)$.

1.5. Произвольное пространство элементарных событий. Построение вероятностных моделей для экспериментов с несчетным числом исходов.

Мы построили вероятностную модель стохастических экспериментов, у которых пространство элементарных событий конечно или счетное. Однако существуют задачи, для которых пространство элементарных событий несчетно и рассмотренный нами подход не применим.

Например, рассмотрим эксперимент, состоящий в бросании наугад точки на отрезок $[0;1)$. Предполагается, что все мыслимые положения точки на этом отрезке одинаково возможны. Пространство элементарных событий для такого эксперимента это отрезок $\Omega=[0;1)$, а значит число этих событий несчетно. Для такой задачи уже нельзя построить вероятностную модель эксперимента, приписав вероятности лишь отдельным элементарным событиям, как это было сделано для случая конечного или счетного числа элементарных событий. Действительно, если по аналогии с дискретным случаем для каждого элементарного события ω задать вероятность $p(\omega)$, то поскольку все события ω одинаково возможны, мы должны принять $p(\omega)=0,$ иначе бы сумма $\sum\limits_{\omega\in\Omega} p(\omega)$

равнялась бы бесконечности, а не единице. Но взяв $p(\omega)=0$ получим, что $\sum\limits_{\omega\in\Omega} p(\omega)=0,$ а это тоже не годится.

Выход из создавшейся ситуации можно найти в том, чтобы приписывать вероятности лишь некоторым множествам элементарных событий, при этом задание вероятностей должно удовлетворять определенным требованиям. Например, естественно считать, что вероятности попадания в интервалы $\left[0;\frac{1}{2}\right)$ и $\left[\frac{1}{2};1\right)$ должны быть одинаковыми и , следовательно, каждая из них равна $\frac{1}{2}.$ Далее, вероятность попадания в интервал $\left[0;\frac{1}{2}\right)$ должна быть больше, чем вероятность попадания в интервал $\left[0;\frac{1}{3}\right)$ и так далее.

При этом класс тех множеств, которым приписываются вероятности, должен быть замкнут относительно операций объединения, пересечения, перехода к дополнению, то есть, если множествам **A** и **B** приписаны вероятности, то и множествам $A\bigcup B,\ A\bigcap B,\ \overline{A}$ также должны быть приписаны вероятности.

Для построения такой вероятностной модели нам понадобятся следующие сведения из теории множеств. Рассмотрим некоторое фиксированное множество Ω и подмножество **A** этого множества.

Определение. Система подмножеств F множества Ω называется алгеброй множеств, если:

1) $\Omega\in F;$
2) из того, что $A\in F$ следует, что $\overline{A}\in F;$
3) из того, что $A\in F$ и $B\in F$ следует, что $A\bigcup B\in F.$

Замечание. $\varnothing\in F,$ так как $\varnothing=\overline{\Omega}$ и $A\bigcap B\in F,$ так как $A\bigcap B=\overline{\overline{A}\bigcup\overline{B}}.$

Примеры.

1. Если **A** некоторое подмножество множества Ω, то система множеств $F=\left\{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\right\}$ образует алгебру множеств.
2. Если $\Omega=[0;1)$ и F система подмножеств из $\Omega,$ каждое из которых представляет собой конечную сумму непересекающихся интервалов вида $[a;b),$ то F алгебра множеств.

Определение. Система подмножеств F множества Ω называется σ - алгеброй множеств, если:

1) $\Omega\in F;$
2) из того, что $A\in F$ следует, что $\overline{A}\in F;$
3) из того, что $A_1, A_2, ..., A_n, ...\in F$ следует, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\in F.$

Таким образом, алгебра есть класс множеств, замкнутый относительно конечного числа операций дополнения, объединения и пересечения, а σ - алгебра есть класс множеств, замкнутый относительно счетного числа этих операций.

Примером σ - алгебры множеств является множество всех подмножеств множества Ω.

Пусть K некоторый класс множеств из Ω. Мы его можем дополнить до σ - алгебры различными способами и таким образом получить целый набор $\{F_\alpha\}$ σ - алгебр. Если теперь рассмотреть пересечение всех этих σ - алгебр $\bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha$, то получим наименьшую σ - алгебру, содержащую класс K.

В качестве примера рассмотрим множество $\Omega = (-\infty; +\infty)$ и класс K всех интервалов вида $[a; b)$. Наименьшая σ - алгебра, содержащая класс K, называется σ - алгеброй борелевских множеств на $(-\infty; +\infty)$. Борелевские множества – это множества, которые получаются при объединении, пересечении и дополнении любого счетного числа множеств из класса K. Борелевскими множествами являются в частности все множество Ω и пустое множество $\varnothing$. Кроме того одноточечное множество $\{a\}$ является борелевским, так как $\{a\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left[a; a + \dfrac{1}{n}\right)$. Отсюда борелевскими множествами являются интервал $(a; b) = [a; b) \setminus \{a\}$ и сегмент $[a; b] = [a; b) \cup \{b\}$. Далее, так как любое открытое множество в $\Omega = (-\infty; +\infty)$ есть сумма конечного или счетного числа интервалов, то открытое множество является борелевским. Любое замкнутое множество также является борелевским, как дополнение до открытого множества.

Используя введенные понятия, определим аксиоматически вероятностную модель для экспериментов с любым числом исходов.

Пусть Ω пространство элементарных событий (конечное, счетное или несчетное). Зададим на Ω σ - алгебру множеств F. Множества из F и только их будем считать случайными событиями (если множество не входит в F, то его событием не считаем).

Каждому случайному событию $A \in F$ поставим в соответствие число $P(A)$, называемое вероятностью события **A** или вероятностной мерой на F, удовлетворяющее следующим аксиомам вероятности:

1) $P(A) \geq 0$ для любого события $A \in F$;
2) $P(\Omega) = 1$;
3) Если $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ последовательность случайных событий из F такая, что

$$A_i \cap A_j = \varnothing \text{ при } i \neq j, \text{ то } P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Тройку $\langle \Omega, F, P \rangle$ называют вероятностным пространством. Будем говорить, что построена вероятностная модель эксперимента, если построено вероятностное пространство $\langle \Omega, F, P \rangle$, то есть указано пространство элементарных событий Ω, σ - алгебра F случайных событий и определена вероятностная мера P на F.

Примеры.

1. Рассмотрим стохастический эксперимент с конечным числом одинаково возможных элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$. В качестве F возьмем σ - алгебру всех подмножеств из Ω. Положим $P(A) = \frac{m}{n}$, где m число элементарных событий, входящих в **A**. Очевидно, что аксиомы вероятности выполняются и таким образом построена вероятностная модель $\langle \Omega, F, P \rangle$ рассматриваемого эксперимента.
2. Вернемся к задаче о бросании наугад точки на отрезок $[0;1)$. Здесь $\Omega = [0;1)$, а в качестве F возьмем σ - алгебру борелевских множеств отрезка $[0;1)$. Примем, что вероятность попадания точки на отрезок $[a,b) \subset [0;1)$ равна $b-a$. Объединению любого числа непересекающихся отрезков $\bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i, b_i) \subset [0;1)$ припишем вероятность $\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i)$. Очевидно, что аксиомы вероятности будут выполняться и тем самым построена вероятностная модель данного эксперимента.

1.6. Свойства вероятности для произвольного пространства элементарных событий.

Используя введенные аксиомы вероятности, установим ряд важных **свойств** вероятности.

1. Вероятность события $\overline{A}$, противоположного событию A равна $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Так как $A \bigcup \overline{A} = \Omega$ и $A \bigcap \overline{A} = \varnothing$, то по третьей аксиоме вероятности $P(A) + P(\overline{A}) = P(\Omega)$. Учитывая, что по второй аксиоме вероятности $P(\Omega) = 1$, получим $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

2. Вероятность невозможного события равна нулю: $P(\varnothing) = 0$.

Так как $\varnothing = \overline{\Omega}$, то по первому свойству вероятности $P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$.

3. Пусть A и B случайные события такие, что $B \subset A$. Тогда $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$.

Так как $A = B \bigcup (A \setminus B)$ и $B \bigcap (A \setminus B) = \varnothing$, то по третьей аксиоме $P(A) = P(B) + P(A \setminus B)$, откуда $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$.

4. Если $B \subset A$, то $P(B) \le P(A)$.

Действительно, $P(A \setminus B) = P(A) - P(B) \ge 0$ по первой аксиоме, откуда $P(B) \le P(A)$.

5. Для каждого случайного события A $P(A) \le 1.$

Так как любое случайное событие $A \subset \Omega,$ то $P(A) \le P(\Omega) = 1,$ то есть $P(A) \le 1.$

6. Если A и B два случайных события, то $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B).$

Так как $A \bigcup B = A \bigcup (B \setminus A \bigcap B)$ и $A \bigcap (B \setminus A \bigcap B) = \varnothing,$ то по третьей аксиоме и свойству три $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B \setminus A \bigcap B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B).$

Полученную формулу еще называют теоремой сложения вероятностей. В частности, если **A** и **B** несовместные события: $A \bigcap B = \varnothing,$ то $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B).$

Следствие. Так как $P(A \bigcap B) \ge 0,$ то $P(A \bigcup B) \le P(A) + P(B).$

7. Свойство непрерывности вероятности.

Если $\{A_n\}$ монотонно неубывающая последовательность событий $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ и $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i,$ то $\lim\limits_{n \to \infty} P(A_n) = P(A).$

Если же $\{A_n\}$ монотонно невозрастающая последовательность событий $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ и $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i,$ то $\lim\limits_{n \to \infty} P(A_n) = P(A).$

Доказательство. Пусть $\{A_n\}$ монотонно неубывающая последовательность событий. Положим $A_0 = \varnothing$ и введем события $B_i = A_i \setminus A_{i-1}.$ События B_i попарно не пересекаются и $A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i.$ При этом $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i.$ Рассмотрим

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = \lim_{n \to \infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = P(A).$$

Пусть теперь $\{A_n\}$ монотонно невозрастающая последовательность событий. Введем события $B_1 = A_1 \setminus A_2,$ $B_2 = A_2 \setminus A_3$ и так далее. События B_i попарно не пересекаются и $A_1 = A \bigcup \left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i\right).$ Тогда $P(A_1) = P(A) + \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(B_i).$ Так как ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(B_i)$ сходится, то его остаток $\sum\limits_{i=n}^{\infty} P(B_i)$ стремится к нулю при $n \to \infty.$ С другой стороны $A_n = A \bigcup \left(\bigcup\limits_{i=n}^{\infty} B_i\right),$ откуда $P(A_n) = P(A) + \sum\limits_{i=n}^{\infty} P(B_i).$ Таким образом $\lim\limits_{n \to \infty} P(A_n) = P(A) + \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=n}^{\infty} P(B_i) = P(A).$

Замечание. При доказательстве первых шести свойств вероятности мы использовали третью аксиому лишь для случая конечного числа случайных событий. Поэтому эти свойства справедливы и тогда, когда в качестве F берется алгебра множеств. Для справедливости последнего седьмого свойства уже важно, что F есть σ - алгебра множеств.

1.7. Геометрическая вероятность.

При рассмотрении задачи о бросании наугад точки на отрезок $\Omega = [0;1)$ мы получили, что вероятность попадания точки на отрезок $A = [a;b)$ равна длине этого отрезка. Если при этом учесть, что длина отрезка Ω равна единице, то получим, что вероятность $P(A)$ есть отношение длины отрезка A к длине отрезка $\Omega.$ Этот результат мы можем обобщить следующим образом.

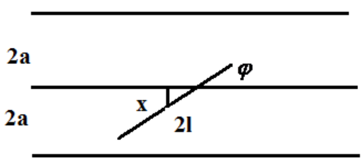
Предположим, что рассматривается эксперимент, пространство элементарных событий которого представляет собой область Ω в n - мерном евклидовом пространстве R^n. Предположим далее, что область Ω имеет меру Лебега $m(\Omega)$ (длина при $n = 1,$ площадь при $n = 2,$ объем при $n = 3$). Рассмотрим σ - алгебру F всех измеримых подмножеств из $\Omega.$ Если все точки из Ω одинаково равновозможные, то положим для каждого события $A \in F$

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

Тогда $\langle \Omega, F, P \rangle$ есть вероятностная модель рассматриваемого стохастического эксперимента. Такую вероятностную модель принято называть геометрической вероятностью. Она часто используется при решении различного типа задач.

Примеры.

1. Задача Бюффона. Рассмотрим плоскость, разграфленную параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a.$ На плоскость наугад бросается игла (отрезок) длины $2l$ $(l < a).$ Требуется найти вероятность того, что игла пересечет какую-либо из параллельных прямых.

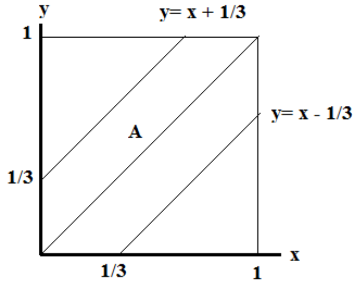


Обозначим через x расстояние от середины иглы до ближайшей параллельной прямой, а через φ угол между иглой и этой прямой. Положение иглы полностью определяется значениями $x \in [0;a]$ и $\varphi \in [0,\pi].$ Таким образом пространство элементарных событий это прямоугольник $\Omega = \{(x,\varphi): 0 \le x \le a, 0 \le \varphi \le \pi\}.$ Игла пересечет ближайшую к ней параллельную прямую, если будет выполнено условие $x \le l \sin\varphi.$ Таким образом интересующее нас событие $A = \{(x,\varphi): x \le l\sin\varphi; (x,\varphi) \in \Omega\}.$

Вычислим $m(\Omega) = \pi a$ и $m(A) = \int\limits_0^{\pi} l \sin\varphi d\varphi = -l\cos\varphi |_0^{\pi} = 2l.$ Тогда искомая вероятность

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{2l}{\pi a}.$$

2. Задача о встрече. Два человека M и N договорились встретиться в определенном месте в интервале времени один час. При этом каждый пришедший ожидает другого в течение 20 минут и если того нет, то уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится.

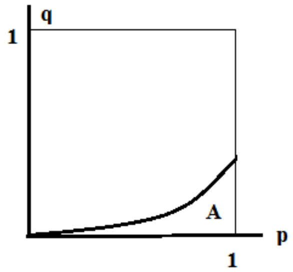


Обозначим через x время прихода M, а через y время прихода N. Тогда пространство элементарных событий $\Omega=\{(x,y):0\le x\le 1;0\le y\le 1\}$. Встреча состоится, если $|x-y|\le 1/3$, то есть событие $A=\{(x,y):|x-y|\le 1/3;(x,y)\in\Omega\}$. Неравенство $|x-y|\le 1/3$

равносильно системе $\begin{cases} y\ge x-1/3 \\ y\le x+1/3 \end{cases}$. Теперь несложно найти $m(\Omega)=1$ и

$m(A)=1-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{9}$. Таким образом вероятность встречи $P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{5}{9}$.

3. Коэффициенты уравнения $x^2+px+q=0$ выбираются наугад из промежутка $[0;1]$. Какова вероятность того, что это уравнение имеет вещественные корни?



Пространство элементарных событий $\Omega=\{(p,q):0\le p\le 1;0\le q\le 1\}$. Корни уравнения будут вещественными, если $D=p^2-4q\ge 0$, то есть $q\le\frac{p^2}{4}$. Таким образом $A=\left\{(p,q):q\le\frac{p^2}{4};(p,q)\in\Omega\right\}$. Найдем $m(\Omega)=1$ и $m(A)=\int\limits_0^1\frac{p^2}{4}dp=\frac{p^3}{12}\Big|_0^1=\frac{1}{12}$. Таким образом искомая вероятность

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{1}{12}.$$

Задания.

1. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, находящимися друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наугад брошена монета радиуса $r<a$. Найти вероятность того, что монета не пересеет ни одной из прямых.
2. На плоскость с нанесенной сеткой квадратов со стороной a наугад брошена монета радиуса $r<a/2$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из сторон квадрата.
3. Внутрь круга радиуса R наугад брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг: а) квадрата; б) правильного треугольника.
4. На отрезке OA длины L числовой оси Ox наугад поставлены две точки: $B(x)$ и $C(y)$, причем $y\ge x$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC меньше

длины отрезка OB. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

5. На отрезке ОА длины L числовой оси Ox наугад поставлены две точки: $B(x)$ и $C(y)$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC меньше расстояния от точки О до ближайшей к ней точке. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.
6. На отрезке ОА длины L числовой оси Ox наугад поставлены две точки: $B(x)$ и $C(y)$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC окажется меньше, чем $L/2$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.
7. На отрезке ОА длины L числовой оси Ox наугад поставлены две точки: $B(x)$ и $C(y)$. Найти вероятность того, что из трех получившихся отрезков можно построить треугольник.
8. Наугад взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение xy будет не больше единицы, а частное y/x будет не больше двух.
9. Наугад взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что сумма $x+y$ не превышает единицы, а произведение xy не меньше 0,09.
10. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу с 9 часов утра до 7 часов вечера. Время прихода обоих пароходов независимо и равновероятно в течение указанного периода. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода один час, а второго – два часа.
11. В интервале времени $[0;T]$ в случайный момент u появляется сигнал длительностью Δ. Приемник включается в случайный момент времени $v \in [0;T]$ на время t. Предполагая, что точка $(u;v)$ равномерно распределена в квадрате $[0;T]\times[0;T]$, найти вероятность обнаружения сигнала.
12. Пассажир может воспользоваться трамваями двух маршрутов, следующих с интервалами T_1 и T_2. Момент прихода пассажира на остановку определяет на отрезках $[0;T_1]$ и $[0;T_2]$ числа u и v, равные времени, оставшемся до прихода трамвая соответствующего маршрута. Предполагая, что точка $(u;v)$ равномерно распределена на $\Omega=\{(u;v):0\le u\le T_1; 0\le v\le T_2\}$, найти вероятность того, что пассажир, придя на остановку, будет ждать трамвая не дольше t $(0<t<\min\{T_1,T_2\})$.

13. По радиоканалу в течение промежутка времени $(0;1)$ передаются два сигнала длительностью $\tau < 1/2$, каждый из них с одинаковой возможностью начинается в любой момент интервала $(0;1-\tau)$. Если сигналы перекроют друг друга хотя бы частично, то они оба искажаются и приняты быть не могут. Найти вероятность того, что сигналы будут приняты без искажений.

1.8. Условные вероятности.

Во многих задачах приходится находить вероятность одного случайного события **А**, если известно, что уже произошло другое случайное событие **В**.

Например, пусть дважды брошен игральный кубик. Пусть событие **А** – при первом броске выпала 1, а событие **В** сумма очков при двух бросках меньше 4.

Пространство элементарных событий состоит из 36 исходов $\Omega = \{(i, j): i = \overline{1,6},\ j = \overline{1,6}\}$.

События **А** и **В** это следующие подмножества из Ω:

$A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\}$, $B = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$.

Найдем условную вероятность $P(A/B)$ события **А**, если известно, что уже произошло событие **В**. Так как событие **В** произошло, то множество **В** играет роль пространства элементарных событий, а множество $A \cap B = \{(1,1),(1,2)\}$ играет роль благоприятствующего для искомой условной вероятности. Поэтому

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{3}.$$

Определение. Пусть $\langle \Omega, F, P \rangle$ вероятностное пространство, $B \in F$ и $P(B) > 0.$ Условной вероятностью события **А** при условии, что произошло событие **В**, называют вероятность $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}.$

Аналогично, если $P(A) > 0,$ то можно рассматривать условную вероятность события **В** при условии, что произошло событие **А:** $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}.$

Из этих двух формул вытекает формула $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A)$, которую еще называют теоремой умножения вероятностей.

Пример. В лотерее из 100 билетов 5 выигрышных. Наугад выбрано 3 билета. Какова вероятность, что все они выигрышные?

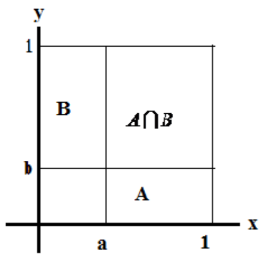
Обозначим через A_k событие, что k - тый выбранный билет выигрышный. Тогда

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cap A_2) = \frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} \cdot \frac{3}{98} = \frac{1}{16170} \approx 0,00006.$$

1.9. Независимые случайные события и их свойства.

Определение. Пусть $\langle \Omega, F, P \rangle$ вероятностное пространство. Случайные события **A** и **B** из F называются независимыми, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Пример. Пусть в квадрат $\Omega = \{(x, y) : 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\}$ наугад бросается точка. Пусть **A** событие, состоящее в том, что абсцисса брошенной точки не меньше a: $A = \{(x, y) : a \le x \le 1; 0 \le y \le 1\}$, а событие **B** состоит в том, что ордината брошенной точки не меньше b: $B = \{(x, y) : 0 \le x \le 1; b \le y \le 1\}$. Выясним будут ли эти события независимыми.



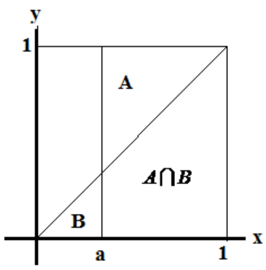
Нахождение требуемых для этого вероятностей сводится к задаче на геометрическую вероятность. Имеем:

$m(\Omega) = 1, m(A) = 1 - a, m(B) = 1 - b$ и $m(A \cap B) = (1-a)(1-b)$.

Тогда $P(A) = \dfrac{m(A)}{m(\Omega)} = 1 - a, P(B) = \dfrac{m(B)}{m(\Omega)} = 1 - b$ и

$P(A \cap B) = \dfrac{m(A \cap B)}{m(\Omega)} = (1-a)(1-b)$. Таким образом, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, а значит события **A** и **B** независимы.

Изменим теперь формулировку задачи. Пусть событие **A** тоже (абсцисса брошенной точки не меньше a), а событие **B** состоит в том, что ордината брошенной точки не больше абсциссы: $B = \{(x, y) : 0 \le x \le 1; 0 \le y \le x\}$.



В этом случае $P(A) = 1 - a, P(B) = \dfrac{1}{2}$, а

$P(A \cap B) = \dfrac{1+a}{2} \cdot (1-a) = \dfrac{1}{2}(1 - a^2)$.

Таким образом, здесь уже

$P(A \cap B) = \dfrac{1}{2}(1 - a^2) \ne P(A) \cdot P(B) = \dfrac{1}{2}(1 - a)$

и в такой постановке задачи события **A** и **B** уже зависимы. Это, очевидно, связано с тем, что оба события **A** и **B** содержат ограничения на абсциссу точки.

Свойства независимых событий.

1) Пусть $P(B) > 0$. Случайные события **A** и **B** независимы тогда и только тогда, когда $P(A / B) = P(A)$.

Действительно, если **A** и **B** независимы, то $P(A / B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$.

Обратно, если $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)$, то $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ и события **A** и **B** независимы.

2) Если события **A** и **B** независимы, то также независимы и события **A** и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и **B**, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Докажем, например, независимость событий **A** и $\overline{B}$. Так как $A\cap\overline{B}=A\setminus(A\cap B)$ и $A\cap B\subset A$, то по третьему свойству вероятности

$$P\left(A\cap\overline{B}\right)=P\left(A\setminus(A\cap B)\right)=P(A)-P(A\cap B)=P(A)-P(A)\cdot P(B)=$$

$=P(A)\cdot\left(1-P(B)\right)=P(A)\cdot P\left(\overline{B}\right)$, то есть события **A** и $\overline{B}$ независимы.

3) Пусть события **A** и B_1 независимы и независимы также события **A** и B_2, причем события B_1 и B_2 несовместны: $B_1\cap B_2=\varnothing$. Тогда события **A** и $B_1\cup B_2$ независимы.

Действительно, $P\left(A\cap(B_1\cup B_2)\right)=P\left((A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\right)=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)=$
$=P(A)\cdot P(B_1)+P(A)\cdot P(B_2)=P(A)\cdot\left(P(B_1)+P(B_2)\right)=P(A)\cdot P(B_1\cup B_2)$, то есть события **A** и $B_1\cup B_2$ независимы.

Определение. Говорят, что события $A_1,A_2,...,A_n$ независимы в совокупности, если для любого $k, 1\le k\le n$ и для любого набора индексов $i_1,i_2,...,i_k, 1\le i_1<i_2<...<i_k\le n$ выполняется равенство $P\left(\bigcap\limits_{j=1}^{k}A_{i_j}\right)=P\left(A_{i_1}\right)\cdot P\left(A_{i_2}\right)\cdot...\cdot P\left(A_{i_k}\right)$.

Из того, что события $A_1,A_2,...,A_n$ независимы в совокупности, вытекает их попарная независимость $P\left(A_i\cap A_j\right)=P\left(A_i\right)\cdot P\left(A_j\right), i\ne j$. Обратное, вообще говоря, неверно – из попарной независимости событий их независимость в совокупности не следует. Это показывает следующий пример.

Пример Бернштейна. Рассмотрим тетраэдр (правильную треугольную пирамиду, у которой все грани равны). Пусть одна его грань окрашена в белый цвет, вторая – в синий, третья – в красный, а на четвертую грань нанесены все три цвета. Рассмотрим события: при бросании тетраэдра на плоскость выпала грань, на которой есть белый цвет (**В**), синий (**С**) и красный (**К**).

Так как каждый из трех цветов нанесен на две грани, то $P(B)=P(C)=P(K)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

Вероятность пересечения любой пары цветов равна $\dfrac{1}{4}$, так как любая пара цветов присутствует лишь на одной грани. Поэтому $P(B\cap C)=\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=P(B)\cdot P(C)$,

$P(B\cap K)=P(B)\cdot P(K)$ и $P(C\cap K)=P(C)\cdot P(K)$. Таким образом все три события попарно независимы.

Однако эти три события не являются независимыми в совокупности, так как $P(B\cap K\cap C)=\frac{1}{4}\neq P(B)\cdot P(K)\cdot P(C)=\frac{1}{8}$.

Пусть события $A_1, A_2,..., A_n$ независимы в совокупности и имеют вероятности $p_1, p_2,..., p_n$. Рассмотрим событие **A** – появление хотя бы одного из событий $A_1, A_2,..., A_n$. и найдем его вероятность. Для этого рациональней рассмотреть событие $\overline{A}=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap...\cap\overline{A_n}$ - не произошло ни одно из событий $A_1, A_2,..., A_n$ и найти

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot...\cdot P(\overline{A_n})=1-(1-p_1)(1-p_2)...(1-p_n)=1-q_1q_2...q_n,$$

где $q_k=1-p_k$.

Пример. Для предупреждения аварии имеется три независимо работающих устройства с вероятностями того, что они сработают $p_1=0,9$; $p_2=0,95$ и $p_3=0,85$. Какова вероятность, что при аварии сработает хотя бы одно из устройств?

$$P(A)=1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)=1-0,1\cdot 0,05\cdot 0,15=1-0,00075=0,99925.$$

Рассмотрим еще несколько примеров на вычисление вероятностей событий с использованием теорем сложения и умножения вероятностей, свойств независимых событий и условных вероятностей.

Примеры.

1. Вероятности появления каждого из двух независимых событий A_1 и A_2 соответственно равны p_1 и p_2. Найти вероятность появления только одного из этих событий.

Интересующее нас событие $A=A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2$. Учитывая независимость этих событий и теоремы сложения и умножения вероятностей, получим

$$P(A)=P\left(A_1\overline{A_2}\right)+P\left(\overline{A_1}A_2\right)=P(A_1)P\left(\overline{A_2}\right)+P\left(\overline{A_1}\right)P(A_2)=p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1).$$

2. Брошено три игральных кубика. Найти вероятности следующих событий: а) на каждой из выпавших граней появится пять очков; б) на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков.

а) $P=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6^3}=\frac{1}{216}$; б) $P=6\cdot\frac{1}{6^3}=\frac{1}{36}$.

3. Два станка производят одинаковые детали. Вероятность того, что деталь первосортная для первого станка равна 0,7, а для второго – 0,8. На первом станке изготовили две детали, а на втором три. Какова вероятность, что все они первосортные?

$$P=0,7^2\cdot 0,8^3=0,49\cdot 0,512=0,25088.$$

4. Вероятность попадания в мишень стрелком при одном выстреле равна 0,8. Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью, меньшей 0,4, можно было ожидать, что не будет ни одного промаха?

Вероятность того, что при n выстрелах не будет ни одного промаха равна $P=(0,8)^n<0,4,$ откуда находим $n>\dfrac{\ln 0,4}{\ln 0,8}\approx 4{,}11.$ Таким образом $n\geq 5.$

5. В круг радиуса R вписан правильный треугольник. Внутрь круга наугад брошено четыре точки. Найти вероятности следующих событий: а) все четыре точки попадут внутрь треугольника; б) одна точка попадет внутрь треугольника и по одной точке попадет в каждый из трех сегментов. Предполагается, что вероятность попадания точки в фигуру пропорциональна площади фигуры и не зависит от ее расположения.

Найдем сначала площади: круга $m(\Omega)=\pi R^2,$ треугольника $m(A)=\dfrac{3}{4}R^2\sqrt{3}$ и одного из сегментов $m(B)=\dfrac{1}{3}\big(m(\Omega)-m(A)\big)=\dfrac{R^2}{12}\big(4\pi-3\sqrt{3}\big).$ Тогда искомые вероятности:

а) $P=\left(\dfrac{m(A)}{m(\Omega)}\right)^4=\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right)^4$; б) $P=4!\cdot\dfrac{m(A)}{m(\Omega)}\cdot\left(\dfrac{m(B)}{m(\Omega)}\right)^3=\dfrac{18\sqrt{3}}{\pi}\cdot\left(\dfrac{4\pi-3\sqrt{3}}{12\pi}\right)^3.$

6. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает три предложенных ему экзаменатором вопроса.

По теореме умножения имеем $P=\dfrac{20}{25}\cdot\dfrac{19}{24}\cdot\dfrac{18}{23}=\dfrac{57}{115}.$

7. В урне $n+m$ шаров: n белых и m черных. Производится подряд без возвращения k извлечений по два шара $\big(k<\min\{n,m\}\big).$ Найти вероятность того, что каждый раз извлекаются шары разных цветов.

Учитывая независимость событий и теорему умножения, имеем

$$P=\frac{C_n^1\cdot C_m^1}{C_{n+m}^2}\cdot\frac{C_{n-1}^1\cdot C_{m-1}^1}{C_{n+m-2}^2}\cdot\frac{C_{n-2}^1\cdot C_{m-2}^1}{C_{n+m-4}^2}\cdot\ldots\cdot\frac{C_{n-k+1}^1\cdot C_{m-k+1}^1}{C_{n+m-2k+2}^2}.$$

8. Вероятности того, что деталь окажется бракованной в результате механической, а затем термической обработки, равны соответственно p_1 и $p_2.$ Вероятности того, что брак является неустранимым для каждого из видов обработки, равны соответственно p_3 и $p_4.$ Найти вероятность того, что хотя бы одна из трех деталей будет иметь неустранимый брак после прохождения механической, а затем термической обработки.

Вероятность того, что брак не устраним после механической обработки равна p_1p_3, а после термической - $p_2p_4.$ Тогда вероятности того, что брак устраним, соответственно равны $1-p_1p_3$ и $1-p_2p_4$. Для трех деталей брак будет устраним после двух видов обработки с вероятностью $(1-p_1p_3)^3(1-p_2p_4)^3$. Откуда искомая вероятность равна $P=1-(1-p_1p_3)^3(1-p_2p_4)^3$.

Задания.

1. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе по мишени попадает: а) только один стрелок; б) оба стрелка.
2. На стеллаже в библиотеке в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем пять из них в переплете. Библиотекарь берет наугад три учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете.
3. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,9. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два стандартны.
4. Брошено три игральных кубика. Найти вероятности следующих событий: а) на двух выпавших гранях появится 6 очков, а на третьей грани – другое число очков; б) на двух выпавших гранях появится одинаковое число очков, а на третьей грани – другое число очков; в) на всех выпавших гранях появится разное число очков.
5. Отрезок разделен на три равные части. На этот отрезок наудачу брошены три точки. Найти вероятность того, что на каждую из трех частей отрезка попадет по одной точке.
6. В ящике 10 деталей, среди которых шесть окрашенных. Наугад извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали будут окрашенными.
7. В урне находится пять шаров с номерами от 1 до 5. Наугад по одному извлекают три шара без возвращения. Найти вероятности следующих событий: а) последовательно появятся шары с номерами 1, 3, 5; б) извлеченные шары будут иметь номера 1, 3, 5 независимо от того, в какой последовательности они появились.
8. В мешочке содержится 10 одинаковых кубиков с номерами от 1 до 10. Наугад извлекают по одному четыре кубика. Найти вероятность того, что последовательно появятся кубики с номерами 1, 2. 3. 4, если кубики извлекаются: а) без возвращения; б) с возвращением.
9. Сколько нужно взять целых чисел из таблицы случайных чисел, чтобы с вероятностью не менее 0,9 быть уверенным, что среди них есть хотя бы одно четное?
10. В лотерее n билетов, из которых m выигрышных. Какова вероятность выиграть, купив k билетов?
11. Два игральных кубика бросают до выпадения 6 очков хотя бы на одном из них. Найти вероятность того, что впервые 6 очков появится при k - ом бросании.
12. В двух урнах находятся шары. В первой – 5 белых, 11 черных и 8 красных, во второй – 10 белых, 8 черных и 6 красных. Из обеих урн наугад извлекают по одному шару. Какова вероятность, что оба шара одного цвета?
13. Определить вероятность того, что наугад выбранное натуральное число не делится: а) ни на два, ни на три; б) на два или на три.

14. Появление события **А** равновозможное в любой момент промежутка времени T. Вероятность того, что событие **А** произойдет за тот промежуток времени, равна p. Известно, что за время $t < T$ данное событие не произошло. Найти вероятность P того, что событие **А** произойдет в оставшийся промежуток времени.
15. При одном цикле осмотра радиолокационной станции, следящей за космическим объектом, объект будет обнаружен с вероятностью p. Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо друг от друга. Проведено n циклов осмотра. Какова вероятность, что объект будет обнаружен?
16. Имеется m радиолокационных станций, каждая из которых за один цикл обнаруживает объект с вероятностью p (независимо от других циклов и других станций). За время T каждая станция успевает совершить n циклов. Найти вероятности событий: А – за время T объект будет обнаружен хотя бы одной станцией; В – за время T объект будет обнаружен каждой станцией.
17. Система контроля качества изделий состоит из двух независимых проверок. В результате k-ой проверки $(k = 1, 2)$ изделие, удовлетворяющее стандарту, отбраковывается с вероятностью β_k, а бракованное изделие принимается с вероятностью α_k. Изделие принимается, если оно прошло обе проверки. Найти вероятности следующих событий: а) бракованное изделие будет принято; б) изделие, удовлетворяющее стандарту, будет отбраковано.

1.10. Повторяющиеся независимые испытания. Формула Бернулли.

Предположим, что проводится серия из n независимых повторяющихся испытаний. В каждом испытании некоторое событие **А** может произойти с вероятностью p или не произойти с вероятностью $q = 1 - p$. Найдем вероятность того, что в этой серии из n испытаний событие **А** наступит ровно k раз, при этом безразлично в какой последовательности.

Всего существует C_n^k наборов, состоящих из k событий A и $n-k$ событий $\overline{A}$.

Вероятность каждого такого набора равна $p^k (1-p)^{n-k} = p^k q^{n-k}$. Таким образом, вероятность наступления события **А** ровно k раз в серии из n независимых испытаний равна

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Полученная формула носит название формулы Бернулли. С ее помощью легко вычисляются вероятности таких событий, как:

- событие **А** наступило менее k раз: $\sum_{i=0}^{k-1} C_n^i p^i q^{n-i}$;

- событие **А** наступило не менее k раз: $\sum_{i=k}^{n} C_n^i p^i q^{n-i}$.

Примеры.

1. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть две партии из четырех или три партии из шести (ничьи во внимание не принимаются)?

Так как шахматисты равносильны, то $p = q = \dfrac{1}{2}$. Так как во всех партиях вероятность выигрыша постоянна и безразлично, в какой последовательности будут выиграны партии, то применима формула Бернулли. Вычислим

$$P_4(2) = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{8},\ P_6(3) = C_6^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8} = \frac{5}{16}.$$

Так как $P_4(2) > P_6(3)$, то вероятнее выиграть две партии из четырех, чем три из шести.

2. Отрезок АВ разделен точкой С в отношении 2:1. На этот отрезок наугад брошено четыре точки. Найти вероятность того, что две из них окажутся левее точки С, а две правее. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

Вероятность попадания точки на АС равна $p = \dfrac{2}{3}$, а на СВ равна $q = \dfrac{1}{3}$. По формуле Бернулли $P_4(2) = C_4^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{27}$.

3. Задача Банаха. Для прикуривания гражданин пользовался двумя коробками спичек, доставая наугад ту или иную коробку спичек. Через некоторое время он обнаружил, что одна из коробок пуста. Какова вероятность, что во второй коробке при этом останется k спичек, если в начале в каждой коробке было по n спичек?

Вероятность достать ту или иную коробку одинаковы, то есть $p = q = \dfrac{1}{2}$. Нас интересует случай, когда из одной коробки использовали все n спичек, а из второй только $n-k$ спичек, то есть всего $2n-k$ спичек. Тогда по формуле Бернулли

$$P = C_{2n-k}^n \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{C_{2n-k}^n}{2^{2n-k}}.$$

4. Телефонная станция обслуживает N абонентов, которые пользуются телефоном одинаково часто и в течение часа производят k разговоров со средней продолжительностью t часа каждый. Найти вероятность одновременного разговора ровно m абонентов.

Вероятность того, что в данный момент времени разговаривает по телефону какой либо абонент равна $p = \dfrac{kt}{N}$. Тогда по формуле Бернулли искомая вероятность

$$P_N(m) = C_N^m \left(\frac{kt}{N}\right)^m \left(1 - \frac{kt}{N}\right)^{N-m}.$$

Задания.

1. Монету бросают пять раз. Найти вероятность того, что герб выпадет: а) менее двух раз; б) не менее двух раз.
2. На отрезок АВ длины a наугад брошено пять точек. Найти вероятность того, что две точки будут находиться от точки А на расстоянии, меньшем x, а три – на расстоянии, большем x. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.
3. Отрезок разделен на четыре равные части. На отрезок наугад брошено восемь точек. Найти вероятность того, что на каждую из четырех частей отрезка попадет по две точки. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.
4. Производится четыре независимых опыта, в каждом из которых событие **А** может произойти с вероятностью 0,3. Событие **В** наступает с вероятностью 1, если событие **А** произошло не менее трех раз; не может произойти, если событие **А** произошло не более одного раза, и наступает с вероятностью 0,5, если событие **А** имело место два раза. Найти вероятность появления события **В**.
5. Из ящика, в котором находится 20 белых и 2 черных шара, n раз извлекают шары по одному и каждый раз возвращают обратно. Определить наименьшее число извлечений n, при котором вероятность достать хотя бы один раз черный шар будет больше половины.
6. Испытание заключается в бросании трех игральных кубиков. Найти вероятность того, что в пяти независимых испытаниях ровно два раза выпадет по три единицы.
7. При раздаче колоды в 36 карт четырем игрокам один из них три раза подряд не получал тузов. Есть ли у него основание жаловаться на «невезение»?
8. Телефонная станция обслуживает N абонентов, каждому из которых может быть предоставлена для разговора любая из l линий связи $(l < N)$, если она свободна. Все абоненты пользуются телефоном одинаково часто и в течение часа производят k разговоров со средней продолжительностью t часа каждый. Один из абонентов захотел позвонить. Какова вероятность, что все линии окажутся занятыми?

1.11. Формула полной вероятности.

Определение. Пусть имеется n случайных событий $H_1, H_2, ..., H_n$ из σ - алгебры F. Говорят, что эти события образуют полную группу гипотез, если:

1. $\bigcup\limits_{k=1}^{n} H_k = \Omega$
2. $H_k \cap H_j = \varnothing$ при $k \neq j$.

Теорема. Если $H_1, H_2, ..., H_n$ полная группа гипотез и $P(H_k) > 0$, то для любого случайного события $A \in F$ справедлива формула полной вероятности

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(H_k)\cdot P(A/H_k).$$

Действительно, так как $A=A\bigcap\Omega=A\bigcap\left(\bigcup_{k=1}^{n}H_k\right)=\bigcup_{k=1}^{n}(A\bigcap H_k)$ и события $A\bigcap H_k$ попарно несовместны, то $P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(A\bigcap H_k)=\sum_{k=1}^{n}P(H_k)\cdot P(A/H_k)$.

Примеры.

1. В I урне находится 3 белых и 2 черных шара, а во II урне – 2 белых и 1 черный шар. Из I урны наугад достают два шара и перекладывают во II урну. Найти вероятность извлечь белый шар из пополненной II урны.

Рассмотрим следующие гипотезы – из I урны во II урну переложили: H_1: 2 белых шара; H_2: 1 белый и 1 черный шар; H_3: 2 черных шара. Найдем вероятности этих гипотез

$$P(H_1)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10};\ P(H_2)=\frac{C_3^1\cdot C_2^1}{C_5^2}=\frac{3}{5};\ P(H_3)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}.$$

Пусть **А** событие – из II пополненной урны достали белый шар. Найдем его вероятность при каждой из гипотез.

При гипотезе H_1 во II урне 4 белых и 1 черный шар, поэтому $P(A/H_1)=\frac{4}{5}$.

При гипотезе H_2 во II урне 3 белых и 2 черных шара, поэтому $P(A/H_2)=\frac{3}{5}$.

При гипотезе H_3 во II урне 2 белых и 3 черных шара, поэтому $P(A/H_3)=\frac{2}{5}$.

По формуле полной вероятности

$$P(A)=\sum_{k=1}^{3}P(H_k)P(A/H_k)=\frac{3}{10}\cdot\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{5}=\frac{16}{25}=0,64.$$

2. В урну, содержащую n шаров, опущен белый шар, после чего наугад извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможные все возможные предположения о первоначальном числе белых шаров в урне.

Рассмотрим гипотезы H_k - в урне первоначально было k белых шаров $(0\le k\le n)$ и событие **А** – извлечен белый шар. Найдем вероятности: $P(H_k)=\frac{1}{n+1}$, так как гипотезы H_k равновозможные; условные вероятности события **А** при каждой из гипотез

$$P(A/H_0)=\frac{1}{n+1},\ P(A/H_1)=\frac{2}{n+1},\ldots,P(A/H_n)=\frac{n+1}{n+1}.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A)=\sum_{k=0}^{n}P(H_k)P(A/H_k)=\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+1}+\ldots+\frac{n+1}{n+1}\right)=\frac{1+2+\ldots+(n+1)}{(n+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{(n+1)^2}\cdot\frac{1+n+1}{2}\cdot(n+1)=\frac{n+2}{2(n+1)}.$$

3. В I урне находится n_1 белых и m_1 черных шаров; во II - n_2 белых и m_2 черных шаров. Из каждой урны наугад извлекают по одному шару, а затем из этих двух шаров наугад выбирается один. Какова вероятность, что это белый шар?

Рассмотрим гипотезы H_k - шар извлечен из k -той урны $(k=1,2)$. Так как эти гипотезы равновероятные, то $P(H_1)=P(H_2)=\frac{1}{2}$. Событие **A** – из двух извлеченных шаров выбран белый. Соответствующие условные вероятности равны $P(A/H_1)=\frac{n_1}{n_1+m_1}$ и

$$P(A/H_2)=\frac{n_2}{n_2+m_2}.\text{ Тогда } P(A)=\frac{1}{2}\left(\frac{n_1}{n_1+m_1}+\frac{n_2}{n_2+m_2}\right).$$

Задания.

1. В ящике содержится 12 деталей, изготовленных на заводе №1, 20 деталей – на заводе №2 и 18 деталей – на заводе №3. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе №1, отличного качества, равна 0,9; для деталей, изготовленных на заводах №2 и №3, эти вероятности соответственно равны 0,7 и 0,8. Найти вероятность того, что извлеченная наугад деталь окажется отличного качества.
2. В I урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во II урне – 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наугад извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наугад взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.
3. В коробке лежит 20 теннисных мячей, из них 12 новых и 8 игранных. Из коробки наугад достают два мяча для игры и после игры возвращают в коробку. После этого из коробки наугад достают два мяча для следующей игры. Найти вероятность того, что оба эти мяча будут новыми.
4. В I урне находится 1 белый и 9 черных шаров, а во II урне – 1 черный и 5 белых шаров. Из каждой урны по схеме случайного выбора без возвращения удалили по одному шару, а оставшиеся шары переложили в III урну. Найти вероятность того, что шар, вынутый наугад из III урны, окажется белым.
5. Из урны, содержащих 2 белых и 3 черных шара, наугад достают два шара и добавляют в урну один белый шар. Найти вероятность того, что после этого наугад извлеченный из урны шар окажется черным.

1.12. Формула Байеса.

Пусть дана полная группа гипотез $H_1, H_2, ..., H_n$ и некоторое событие **A**. Пусть далее из каких-либо соображений известны вероятности этих гипотез $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$ (их принято называть априорными вероятностями), а также условные вероятности $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$. Предположим, что произведен некоторый эксперимент, в результате которого наступило событие **A**. Это дает нам возможность сделать переоценку вероятностей гипотез, то есть найти так называемые апостериорные вероятности

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}.$$

Полученная формула носит название формулы Байеса.

Примеры.

1. Три стрелка одновременно выстрелили по мишени, в результате чего было два попадания. Первый стрелок попадает в мишень с вероятностью $p_1 = 0,6$, второй – с вероятностью $p_2 = 0,8$ и третий – с вероятностью $p_3 = 0,9$. Найти вероятность того, что в мишень не попал второй стрелок.

Пусть A_k - событие, что в мишень попал k-тый стрелок $(k = 1,2,3)$. Так как было два попадания в мишень, то достаточно рассмотреть только следующие гипотезы:

$H_1 = \overline{A_1} A_2 A_3$ с вероятностью $P(H_1) = 0,4 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,288$

$H_2 = A_1 \overline{A_2} A_3$ с вероятностью $P(H_2) = 0,6 \cdot 0,2 \cdot 0,9 = 0,108$

$H_3 = A_1 A_2 \overline{A_3}$ с вероятностью $P(H_3) = 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,1 = 0,048$

Пусть событие **B** – в мишень было два попадания. Для перечисленных гипотез это достоверное событие, поэтому $P(B/H_k) = 1, k = 1,2,3.$ Отметим сразу, что рассматривать любые другие гипотезы (все три попали, один попал, два промахнулись и так далее) здесь не имеет смысла, так как при них событие **B** невозможно, а значит соответствующие условные вероятности равны нулю.

По формуле полной вероятности $P(B) = 1 \cdot 0,288 + 1 \cdot 0,108 + 1 \cdot 0,048 = 0,444.$

По формуле Байеса находим требуемую условную вероятность

$$P(H_2 / B) = \frac{P(H_2)P(B/H_2)}{P(B)} = \frac{0,108 \cdot 1}{0,444} \approx 0,243.$$

В данном случае апостериорная вероятность вдвое больше, чем соответствующая априорная вероятность $P(H_2)$.

2. Имеется три партии деталей по 20 деталей в каждой. Число стандартных изделий в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 20, 15 и 10. Из наугад выбранной партии наугад извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Деталь возвращают в ту же партию и вторично из той же партии наугад извлекают деталь, которая также оказывается стандартной. Найти вероятность того, что детали были извлечены из третьей партии.

Рассмотрим три гипотезы: H_1 - детали извлекались из первой партии, H_2 - из второй партии и H_3 из третьей партии. Так как детали извлекались из наугад выбранной партии, то $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}.$

Обозначим через **А** событие – в каждом из двух испытаний (с возвращением) была извлечена стандартная деталь и подсчитаем условные вероятности

$$P(A/H_1)=1;\ P(A/H_2)=\frac{15}{20}\cdot\frac{15}{20}=\frac{9}{16};\ P(A/H_3)=\frac{10}{20}\cdot\frac{10}{20}=\frac{1}{4}.$$

По формуле полной вероятности $P(A)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{9}{16}+\frac{1}{4}\right)=\frac{29}{48}.$

По формуле Байеса окончательно находим $P(H_3/A)=\dfrac{1/3\cdot 1/4}{29/48}=\frac{4}{29}.$

3. Батарея из трех орудий произвела залп, при этом два снаряда попали в цель. Найти вероятность того, что первое орудие попало в цель, если вероятности попадания в цель первым, вторым и третьим орудиями соответственно равны $p_1=0,4;\ p_2=0,3;\ p_3=0,5.$

Обозначим через **А** событие – два орудия попали в цель и рассмотрим две гипотезы: H_1 - первое орудие попало в цель и H_2 - первое орудие не попало в цель. Рассматривать любые другие гипотезы не имеет смысла, так как при них событие **А** невозможно, а значит соответствующие условные вероятности равны нулю.

По условию $P(H_1)=0,4,$ следовательно $P(H_2)=1-0,4=0,6.$

Найдем условную вероятность $P(A/H_1),$ то есть вероятность того, что в цель попало два снаряда, причем один из них послан первым орудием и, следовательно, второй – либо вторым орудием (при этим третье промахнулось), либо третьим (при этом второе промахнулось). Эти два события несовместные, поэтому

$$P(A/H_1)=p_2(1-p_3)+p_3(1-p_2)=0,3\cdot 0,5+0,5\cdot 0,7=0,5.$$

Найдем условную вероятность $P(A/H_2),$ то есть вероятность того, что в цель попало два снаряда, причем первое орудие промахнулось. Но тогда второе и третье орудия попали в цель и так как эти события независимы, то $P(A/H_2)=p_2p_3=0,3\cdot 0,5=0,15.$

По формуле Байеса $P\left(H_1 / A\right)=\dfrac{0,4\cdot 0,5}{0,4\cdot 0,5+0,6\cdot 0,15}=\dfrac{20}{29}.$

4. Имеется две партии одинаковых изделий. Известно, что в одной в одной партии все изделия доброкачественные, а во второй 25% изделий недоброкачественные. Деталь, взятая из наугад выбранной партии, оказалось доброкачественной. Найти вероятность того, что вторая деталь, взятая из этой же партии, окажется недоброкачественной, если первая деталь после проверки возвращена в партию.

Рассмотрим гипотезы: H_1 - деталь взята из партии с только доброкачественными изделиями; H_2 - деталь взята из партии, содержащей недоброкачественные изделия. По условию $P\left(H_1\right)=P\left(H_2\right)=\dfrac{1}{2}.$

Событие **A** – первая взятая деталь доброкачественная, событие **B** – вторая взятая деталь недоброкачественная. Найдем вероятности $P\left(A / H_1\right)=1; P\left(A / H_2\right)=\dfrac{3}{4}.$ Тогда

$$P\left(A\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{4}\right)=\frac{7}{8}.$$

После испытания вероятности гипотез изменятся и станут равными

$$P\left(H_1 / A\right)=\frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{\frac{7}{8}}=\frac{4}{7}, P\left(H_2 / A\right)=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{7}{8}}=\frac{3}{7}.$$

Учитывая теперь, что $P\left(B / H_1\right)=0; P\left(B / H_2\right)=\dfrac{1}{4}$ и беря $P\left(H_1\right)=\dfrac{4}{7}, P\left(H_2\right)=\dfrac{3}{7},$

находим по формуле полной вероятности $P\left(B\right)=\dfrac{4}{7}\cdot 0+\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{28}.$

Задания.

1. Два автоматических станка производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого станка вдвое больше производительности второго. Первый станок производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй – 84%. Наугад взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Какова вероятность того, что эта деталь произведена на втором станке?
2. Число грузовых машин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе, как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Что вероятнее: что это грузовая машина или легковая?
3. В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием А, 30% - с заболеванием В и 20% - с заболевание С. Вероятность полного излечения для болезни А равна 0,7; для болезней В и С эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием В.

4. Изделие проверяется на стандартность одним из двух контролеров. Вероятность того, что изделие попадет к первому контролеру, равна 0,55, а ко второму – 0,45. Вероятность того, что стандартное изделие будет признано стандартным первым контролером, равна 0,9, а вторым – 0,95. Стандартное изделие при проверке было признано стандартным. Найти вероятность того, что это изделие проверял второй контролер.
5. Три стрелка произвели залп, причем две пули поразили мишень. Найти вероятность того, что третий стрелок поразил мишень, если вероятности попадания в мишень первым, вторым и третьим стрелками соответственно равны 0,2; 0,4 и 0,3.
6. Два из трех независимо работающих элементов некоторого устройства отказали. Найти вероятность того, что отказали первый и второй элементы, если вероятности отказа первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,2; 0,1 и 0,3.
7. В урне находится один шар, о котором известно, что он либо белый, либо черный. В урну положили белый шар, тщательно перемешали шары и достали наугад из урны один шар, который оказался белым. Какова вероятность того, что после этого из урны вынут белый шар?
8. Известно, что 96% выпускаемой продукции удовлетворяет стандарту. Существующая схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,98 и нестандартную – с вероятностью 0,05. Найти вероятность того, что изделие, прошедшее контроль, удовлетворяет стандарту.
9. Передаваемое сообщение состоит из сигналов «точка» и «тире». Статистически установлено, что искажается в среднем $2/5$ сообщений точка и $1/3$ сообщений «тире». Известно, что среди передаваемых сигналов «точка» и «тире» встречаются в отношении 5:3. Определить вероятность, что передаваемый сигнал принят правильно, если: **A** – принят сигнал «точка»; **B** – принят сигнал «тире».
10. Из двух близнецов первый мальчик. Какова вероятность, что другой тоже мальчик, если среди близнецов вероятность рождения 2-х мальчиков равна $a,$ двух девочек - $b,$ а для разнополых близнецов вероятность родится первым для обоих полов одинакова?
11. На курсе учится n студентов, из которых n_1 студентов учится первый год на этом курсе, n_2 - второй год на этом курсе, а n_3 - третий год на этом курсе. Среди двух наугад выбранных студентов оказалось, что первый из них учится на этом курсе дольше второго. Какова вероятность, что этот студент учится третий год на этом курсе?
12. В первой урне находится 2 белых и три черных шара, во второй – 4 белых и 3 черных шара, а в третьей – 6 белых и два черных шара. Предполагая, что извлечение шара из любой из трех урн равновероятно, найти вероятность того, что извлечение было произведено из первой урны, если: **A -** вынутый шар оказался белым; **B -** вынутый шар оказался черным.
13. Известно, что 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин – дальтоники. Наугад выбранное лицо дальтоник. Какова вероятность, что это мужчина? (Считать, что мужчин и женщин одинаковое количество).

14. В первой урне находится 2 белых, 3 красных и 10 черных шаров, во второй урне находится 8 белых, 5 красных и 2 черных шара. После извлечения шара сначала из одной, а потом из другой урны вынутыми оказались сначала черный, а потом белый шар. Найти вероятность того, что извлечение производилось сначала из первой, а потом из второй урны, считая, что обе последовательности извлечений равновероятные.
15. В урне находится три шара, которые могут быть белыми или черными. Все предположения о первоначальном составе урны равновероятны. Произведено четыре опыта, состоящих в вынимании каждый раз по одному шару, с последующим возвращением его в урну. Появились шары: черный, белый, белый, белый. Найти после опытные вероятности различных составов урны.
16. Имеется пять урн. В 1-й, 2-й и 3-й урнах находится по 2 белых и 3 черных шара; в 4-й и 5-й урнах – по 1 белому и 1 черному шару. Случайно выбирается урна и из нее извлекается шар. Какова условная вероятность того, что выбрана 4-ая или 5-ая урна, если извлеченный шар оказался белым?

Глава 2. Случайные величины и функции распределения.

2.1. Определения и примеры.

Одним из основных понятий теории вероятности является понятие случайной величины. Случайная величина – это величина, принимающая те или иные значения в зависимости от случая. Примерами случайных величин являются: число очков, выпадающих при одном бросании игрального кубика; число попаданий в цель при n выстрелах; время безотказной работы прибора и так далее.

Случайная величина ξ есть число, которое ставится в соответствие каждому возможному исходу эксперимента. Поскольку исходы эксперимента описываются элементарными событиями, случайную величину можно рассматривать как числовую функцию $\xi = \xi(\omega)$ на пространстве элементарных событий Ω.

Примеры.

1. Пусть дважды бросают монету. Пространство элементарных событий имеет вид $\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\}$. Пусть ξ число появлений герба. Тогда случайная величина $\xi = \xi(\omega)$ задается таблицей

ω	РР	РГ	ГР	ГГ
$\xi(\omega)$	0	1	1	2

2. Пусть теперь бросают игральный кубик. В этом случае пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6\}$, где ω_k означает, что выпало k очков. Пусть случайная величина ξ - число выпавших очков. Тогда $\xi(\omega_k) = k$.

При изучении случайных величин нас будет интересовать не только какие значения принимает та или иная случайная величина, но и вероятности, с которыми она принимает эти значения. Но тогда множества, на которых определена случайная величина, должны принадлежать σ-алгебре F случайных событий. Для этого достаточно, чтобы для каждого вещественного x множество $\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in F$. Отсюда будет следовать, что для любого борелевского множества B на числовой оси $\{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in F$.

Теперь мы можем дать строгое определение случайной величины.

Определение. Пусть $\langle \Omega, F, P \rangle$ вероятностное пространство. Всякая вещественная функция $\xi = \xi(\omega)$ на Ω такая, что для каждого вещественного x $\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in F$ называется случайной величиной.

Основной характеристикой случайной величины является функция распределения случайной величины.

Определение. Функция $F_\xi(x) = P\{\omega : \xi(\omega) < x\}$ называется функцией распределения случайной величины $\xi = \xi(\omega)$.

Примеры.

1. Вернемся к примеру о бросании дважды монеты, где $\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\}$ и $\xi = \xi(\omega)$ число появлений герба.

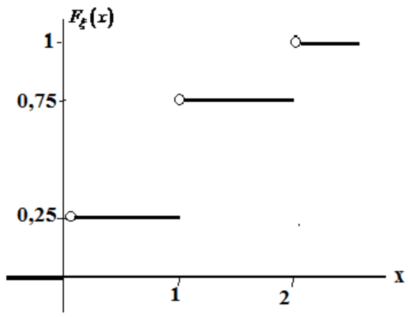
σ-алгебра пространства Ω есть множество всех его подмножеств. Для любого вещественного x множества

$$\{\omega : \xi(\omega) < x\} = \begin{cases} \varnothing, x \le 0 \\ \{РР\}, 0 < x \le 1 \\ \{РР, РГ, ГР\}, 1 < x \le 2 \\ \Omega, x > 2 \end{cases}$$

принадлежат σ-алгебре F, а значит введенная $\xi(\omega)$ есть случайная величина.

Ее функция распределения

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \frac{1}{4}, 0 < x \le 1 \\ \frac{3}{4}, 1 < x \le 2 \\ 1, x > 2 \end{cases}$$



имеет следующий график

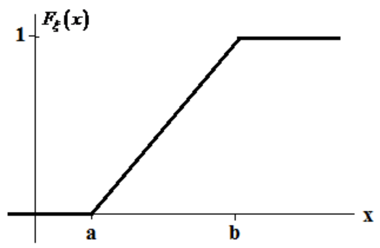
2. Пусть на отрезок $[a;b]$ числовой оси наугад бросается точка, при этом считается, что все положения точки на отрезке одинаково возможны. В рассматриваемом

стохастическом эксперименте $\Omega = [a;b]$, а F есть σ-алгебра борелевских множеств на $[a;b]$ и $P([\alpha,\beta]) = \dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$, если $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$.

Определим случайную величину следующим образом $\xi(\omega) = \omega$, если $\omega \in [a;b]$, то есть ξ координата полученной точки. Тогда для любого вещественного x

$$\{\omega : \xi(\omega) < x\} = \begin{cases} \varnothing, x \le a \\ [a;x), a < x \le b \\ \Omega, x > b \end{cases}$$

Таким образом для всех x $\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in F$, то есть $\xi(\omega)$ есть случайная величина. Ее функция распределения $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, a < x \le b \\ 1, x > b \end{cases}$ имеет следующий график



Такое распределение принято называть равномерным распределением на промежутке $[a;b]$.

2.2. Свойства функции распределения.

Функция распределения случайной величины обладает следующими свойствами.

1. $0 \le F_\xi(x) \le 1$.

Действительно, функция распределения есть вероятность некоторого множества событий, а значит ее значения лежат на $[0;1]$.

2. Если $a < b$, то $P\{\omega : a \le \xi(\omega) < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a)$.

Действительно, если $A = \{\omega : \xi(\omega) < a\}$ и $B = \{\omega : \xi(\omega) < b\}$, то $A \subset B$ и $\{\omega : a \le \xi(\omega) < b\} = B \setminus A$. Тогда по третьему свойству вероятности

$$P\{\omega : a \le \xi(\omega) < b\} = P(B \setminus A) = P(B) - P(A) = P\{\omega : \xi(\omega) < b\} - P\{\omega : \xi(\omega) < a\} =$$

$$= F_\xi(b) - F_\xi(a).$$

3. Функция распределения $F_\xi(x)$ есть неубывающая функция.

Действительно, если $x_1 < x_2$, то $F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1) = P\{\omega : x_1 \le \xi(x) < x_2\} \ge 0$, откуда $F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$, то есть функция распределения не убывает.

4. Функция распределения $F_\xi(x)$ непрерывна слева.

Пусть $\{x_n\}$ произвольная возрастающая последовательность, стремящаяся к точке x слева: $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots < x$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x.$ Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} F_\xi(x_n) = F_\xi(x).$

Рассмотрим последовательность множеств $A_n = \{\omega : \xi(\omega) < x_n\}$ и множество $A = \{\omega : \xi(\omega) < x\}.$ Так как $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A,$ то по свойству непрерывности вероятности $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P(A).$ Так как $P(A_n) = F_\xi(x_n)$ и $P(A) = F_\xi(x),$ то мы доказали, что $\lim\limits_{n\to\infty} F_\xi(x_n) = F_\xi(x).$

5. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1.$

Пусть $\{x_n\}$ произвольная убывающая последовательность, стремящаяся к минус бесконечности: $x_1 > x_2 > \ldots > x_n > \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty.$ Рассмотрим множества $A_n = \{\omega : \xi(\omega) < x_n\}.$ Они обладают свойствами $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing.$ По свойству непрерывности вероятности $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P(\varnothing) = 0.$ Так как $P(A_n) = F_\xi(x_n),$ то мы получили, что $\lim\limits_{n\to\infty} F_\xi(x_n) = 0,$ то есть $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$.

Пусть теперь $\{x_n\}$ произвольная возрастающая последовательность, стремящаяся к плюс бесконечности: $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty.$ Рассмотрим множества $A_n = \{\omega : \xi(\omega) < x_n\},$ которые обладают свойствами $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega.$ По свойству непрерывности вероятности $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P(\Omega) = 1.$ Так как $P(A_n) = F_\xi(x_n),$ то мы получили, что $\lim\limits_{n\to\infty} F_\xi(x_n) = 1,$ то есть $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1.$

Таким образом, каждая функция распределения является неубывающей на $(-\infty; +\infty),$ непрерывной слева и удовлетворяет условиям $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1.$ Верно и обратное: каждая функция, удовлетворяющая перечисленным условиям, может рассматриваться как функция распределения некоторой случайной величины.

Если обратится к примерам из предыдущего параграфа, то построенные там функции распределения как раз и иллюстрируют перечисленные свойства.

2.3. Дискретные случайные величины. Примеры.

Определение. Случайная величина $\xi = \xi(\omega)$, заданная на вероятностном пространстве $\langle \Omega, F.P \rangle$, называется дискретной случайной величиной, если она принимает конечное или счетное число значений.

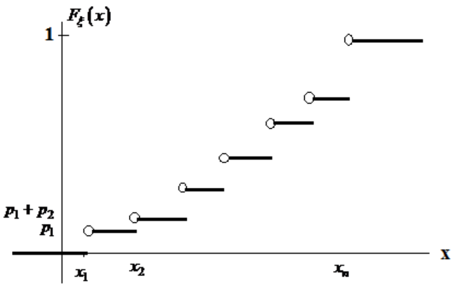
Если $\xi = \xi(\omega)$ дискретная случайная величина, принимающая значения $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, то для каждого x_n определена вероятность $p_n = P\{\omega : \xi(\omega) = x_n\}$. Набор этих вероятностей называют законом распределения дискретной случайной величины и обычно задают в виде таблицы

$\xi(\omega)$	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

При этом $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1.$

Считая, что $x_1 < x_2 < ... < x_n$ и их конечное число, запишем функцию распределения дискретной случайной величины

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \; x \le x_1 \\ p_1, \; x_1 < x \le x_2 \\ p_1 + p_2, \; x_2 < x \le x_3 \\ .... \\ p_1 + ... + p_n = 1, \; x > x_n \end{cases}$$



Графиком этой функции распределения является кусочно-постоянная кривая со скачками p_n в точках $x = x_n$. Если же число значений x_n счетное, то количество «ступенек» на графике то же счетное и они возрастая приближаются к единице.

Рассмотрим наиболее употребительные законы распределения дискретных случайных величин.

1) Биномиальное распределение.

Предположим, что проводится серия из n независимых испытаний. В каждом испытании некоторое событие **A** (попадание в цель при выстреле, появление герба при бросании монеты и так далее) может произойти с вероятностью p или не произойти с вероятностью $q = 1 - p$. Пусть случайная величина ξ есть число появлений события **A** в данной серии из n независимых испытаний. По формуле Бернулли

$$P\{\omega : \xi(\omega) = k\} = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \; k = 0,1,...,n.$$

При этом $\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1,$ так как $p+q=1.$

Таким образом, закон распределения этой случайной величины имеет вид

ξ	0	1	2	$\dots$	n
p	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	$\cdots$	p^n

Про такую случайную величину говорят, что она имеет биномиальный закон распределения. Название связано с тем, что вероятности $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ есть слагаемые в разложении бинома Ньютона.

2) Геометрическое распределение.

Предположим, что проводятся независимые испытания, в каждом из которых некоторое событие **A** может произойти с вероятностью p или не произойти с вероятностью $q = 1 - p.$ Пусть испытания проводятся до первого появления события **A** и случайная величина ξ есть номер испытания, при котором впервые произошло событие **A**. В этом случае пространство элементарных событий $\Omega = \left\{A, \overline{A}A, \overline{A}\overline{A}A, \dots\right\}$ и вероятности

$$P\left\{\omega : \xi(\omega) = n\right\} = P\Big(\underbrace{\overline{A} \dots \overline{A}}_{n-1} A\Big) = q^{n-1} p,\ n = 1, 2, \dots$$

При этом $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} p = p \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = p \cdot \frac{1}{1-q} = p \cdot \frac{1}{p} = 1.$

Для этой случайной величины закон распределения имеет вид

ξ	1	2	3	$\dots$
p	p	qp	$q^2 p$	$\cdots$

Про такую случайную величину говорят, что она имеет геометрический закон распределения. Название связано с тем, что вероятности $q^{n-1} p$ есть члены геометрической прогрессии со знаменателем $q.$

3) Гипергеометрическое распределение.

Предположим, что в урне находится n шаров. Среди них m белых и $n-m$ черных. Наугад из урны извлекают k шаров без возвращения. Пусть случайная величина ξ есть число белых шаров среди k извлеченных. Как мы знаем

$$P\left\{\omega : \xi(\omega) = t\right\} = \frac{C_m^t \cdot C_{n-m}^{k-t}}{C_n^k},\ 0 \le t \le \min\left\{m, k\right\}.$$

Про такую случайную величину говорят, что она имеет гипергеометрическое распределение.

4) Распределение Пуассона.

Пусть на вероятностном пространстве $\langle \Omega, F, P \rangle$ задана случайная величина ξ, принимающая значения $0, 1, 2, \dots$ с вероятностями

$$P\{\xi = n\} = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda},$$ где параметр $\lambda > 0$.

В этом случае говорят, что случайная величина ξ распределена по закону Пуассона.

Примеры.

1. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения отказавших элементов в одном опыте.

Отказы элементов независимы один от другого, вероятности отказа каждого элемента равны между собой, поэтому дискретная случайная величина ξ - число отказавших элементов в одном опыте имеет биномиальное распределение. По формуле Бернулли находим

$$P_3(0) = q^3 = 0,9^3 = 0,729; P_3(1) = C_3^1 pq^2 = 3\cdot 0,1\cdot 0,9^2 = 0,243;$$

$$P_3(2) = C_3^2 p^2 q = 3\cdot 0,1^2\cdot 0,9 = 0,027; P_3(3) = p^3 = 0,1^3 = 0,001.$$

Таким образом, закон распределения имеет вид

ξ	0	1	2	3
p	0,729	0,243	0,027	0,001

2. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наугад отобраны две детали. Найти закон распределения дискретной случайной величины ξ - числа стандартных изделий среди отобранных.

В данном случае случайная величина ξ имеет гипергеометрический закон распределения и может принимать значения 0, 1 и 2 с вероятностями

$$P(\xi = 0) = \frac{C_8^0\cdot C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1\cdot 2}{10\cdot 9} = \frac{1}{45}, P(\xi = 1) = \frac{C_8^1\cdot C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{8\cdot 2}{45} = \frac{16}{45}, P(\xi = 2) = \frac{C_8^2\cdot C_2^0}{C_{10}^2} = \frac{8\cdot 7}{10\cdot 9} = \frac{28}{45}.$$

Закон распределения имеет вид

ξ	0	1	2
p	$1/45$	$16/45$	$28/45$

3. Из двух орудий поочередно ведется стрельба по цели до первого попадания одним из орудий. Вероятности попадания в цель первым и вторым орудиями равны p_1 и p_2 соответственно. Начинает стрельбу первое орудие. Составить законы распределения дискретных случайных величин ξ и η - числа израсходованных снарядов первым и вторым орудиями соответственно.

Пусть события A_k и B_k - попадание в цель соответственно первым и вторым орудием при k -ом выстреле. Найдем сначала закон распределения случайной величины ξ. Первое орудие израсходует один снаряд, если оно попадет в цель при первом выстреле, или оно промахнется, а второе орудие при первом выстреле попадет в цель

$$P(\xi=1)=P\left(A_1+\overline{A}_1B_1\right)=P(A_1)+P\left(\overline{A}_1\right)P(B_1)=p_1+q_1p_2.$$

Первое орудие израсходует два снаряда, если оба орудия при первом выстреле промахнутся, а при втором выстреле первое орудие попадет в цель, или, если оно промахнется, а второе орудие при втором выстреле попадет в цель

$$P(\xi=2)=P\left(\overline{A}_1\overline{B}_1A_2+\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{A}_2B_2\right)=q_1q_2p_1+q_1^2q_2p_2=q_1q_2\left(p_1+q_1p_2\right).$$

Продолжая эти рассуждения, получим $P(\xi=k)=q_1^{k-1}q_2^{k-1}\left(p_1+q_1p_2\right)$.

Аналогично находим закон распределения случайной величины η.

$$P(\eta=0)=P(A_1)=p_1,\ P(\eta=1)=P\left(\overline{A}_1B_1+\overline{A}_1\overline{B}_1A_2\right)=q_1\left(p_2+q_2p_1\right),$$

$$P(\eta=2)=P\left(\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{A}_2B_2+\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{A}_2\overline{B}_2A_3\right)=q_1^2q_2\left(p_2+q_2p_1\right).$$

В общем случае $P(\eta=k)=q_1^kq_2^{k-1}\left(p_2+q_2p_1\right)$.

Задания.

1. В партии 10% нестандартных деталей. Наугад отобраны четыре детали. Найти биномиальный закон распределения дискретной случайной величины ξ - числа нестандартных изделий среди отобранных.
2. В партии из шести деталей имеется четыре стандартных. Наугад отобраны три детали. Найти закон распределения дискретной случайной величины ξ - числа стандартных изделий среди отобранных. Записать функцию распределения этой случайной величины и построить ее график.
3. На пути движения автомашины четыре светофора. Каждый из них с вероятностью $p=0,5$ либо разрешает, либо запрещает движение. Найти закон распределения дискретной случайной величины ξ - числа светофоров, пройденных автомашиной без остановки.
4. На экзамене преподаватель задает студенту вопросы до тех пор, пока студент не сможет ответить на очередной вопрос. Вероятность того, что студент ответит на заданный преподавателем вопрос, равна $p=0,9.$ Составить закон распределения дискретной случайной величины ξ - числа вопросов, которые задаст преподаватель студенту.
5. Два баскетболиста поочередно забрасывают мяч в корзину до тех пор, пока один из них не попадет. Вероятности попадания в корзину для первого и второго баскетболистов равны соответственно p_1 и p_2. Составить закон распределения дискретной случайной величины ξ - числа бросков, сделанных обоими баскетболистами.

2.4. Абсолютно непрерывные случайные величины. Примеры.

Определение. Пусть случайная величина ξ задана на вероятностном пространстве $\langle \Omega, F, P \rangle$ и имеет функцию распределения $F_\xi(x)$. Говорят, что случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение, если существует такая интегрируемая функция $p_\xi(x)$, что

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)\,dt.$$

Функцию $p_\xi(x)$ называют плотностью функции распределения случайной величины ξ. По свойству интеграла с переменным верхним пределом функция распределения $F_\xi(x)$ будет непрерывной функцией. Если же плотность $p_\xi(x)$ непрерывна, то функция распределения $F_\xi(x)$ будет дифференцируемой и $F'_\xi(x) = p_\xi(x)$.

Далее, так как функция распределения не убывает, то ее производная $F'_\xi(x) = p_\xi(x) \geq 0,$ то есть плотность есть неотрицательная функция.

Кроме того, так как $\lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1,$ то существует несобственный интеграл

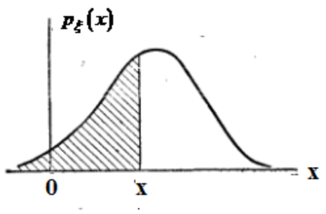
$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)\,dx = 1.$$

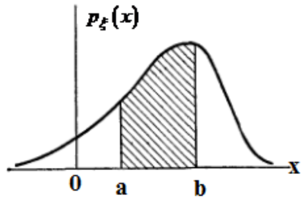
Таким образом, плотность распределения случайной величины есть неотрицательная функция, удовлетворяющая условию $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)\,dx = 1.$ Обратно, каждая неотрицательная функция $p_\xi(x)$, обладающая свойством $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)\,dx = 1$, является плотностью распределения некоторой случайной величины.

Из второго свойства функции распределения следует, что

$$P\{\omega : a \leq \xi(\omega) < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int_{-\hbar}^{b} p_\xi(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} p_\xi(x)\,dx = \int_{a}^{b} p_\xi(x)\,dx.$$

Это свойство имеет простую геометрическую интерпретацию. Н а следующих рисунках заштрихованы области, площадь которых равна соответственно вероятностям $P\{\omega : \xi(\omega) < x\}$ и $P\{\omega : a \leq \xi(\omega) < b\}$





Рассмотрим наиболее употребительные законы распределения абсолютно непрерывных случайных величин.

1) **Нормальное распределение или распределение Гаусса.**

Исключительно важную роль в теории вероятности и в ее приложениях играет нормальное распределение, которое еще называют распределением Гаусса.

Нормальным распределением $N\left(a,\sigma^2\right)$ с параметрами a и σ^2 называют распределение с плотностью

$$p_\xi\left(x\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(x-a\right)^2}{2\sigma^2}}.$$

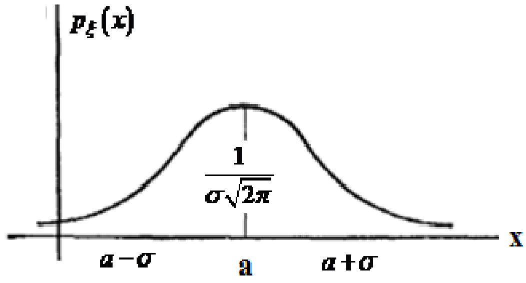
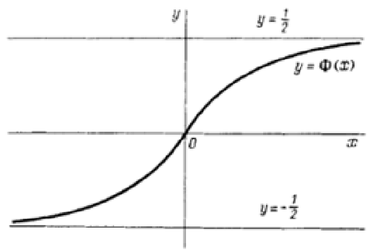


График плотности нормального распределения имеет следующий вид. Точки $\left(a\pm\sigma;\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ являются для него точками перегиба.

Покажем, что $p_\xi\left(x\right)$ действительно является плотностью, для чего вычислим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p_\xi\left(x\right)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\left(x-a\right)^2}{2\sigma^2}}dx=\begin{bmatrix} z=\dfrac{x-a}{\sigma} \\ dx=\sigma dz\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}=1,$$

если учесть значение известного из курса математического анализа интеграла Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{2\pi}.$



Введем функцию Лапласа $\Phi\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$ Она нечетна $\Phi\left(-x\right)=-\Phi\left(x\right)$ и ее график имеет вид

Имеются подробные таблицы функции Лапласа $\Phi\left(x\right),$ при этом $\Phi\left(x\right)\approx 0,5$ при $x\geq 5.$

Запишем при помощи функции Лапласа функцию распределения нормального распределения

$$F_\xi\left(x\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{\left(t-a\right)^2}{2\sigma^2}}dt=\begin{bmatrix} z=\dfrac{t-a}{\sigma} \\ dt=\sigma dz\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{x-a}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

где учтено, что из интеграла Пуассона следует, что $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{2}.$

График функции распределения $F_\xi\left(x\right)$ получается из графики функции Лапласа $\Phi\left(x\right)$ сдвигом последнего на 0,5 вверх по оси ординат и на a единиц по оси абсцисс.

Имеются также подробные таблицы функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, которые используются для нахождения значений плотности нормального распределения $p_\xi(x)=\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$.

Отметим еще, что для нормального распределения

$$P\{\omega:\alpha\le\xi(\omega)<\beta\}=F_\xi(\beta)-F_\xi(\alpha)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

2) Равномерное распределение на промежутке $[a;b]$.

Вернемся к задаче о бросании наугад точки на промежуток $[a;b]$ Для нее мы ранее построили функцию распределения

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0,\ x\le a\\ \frac{x-a}{b-a},\ a<x\le b\\ 1,\ x>b\end{cases}$$

Плотность этой функции

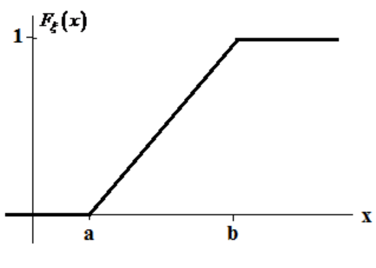
имеет вид $$p_\xi(x)=F'_\xi(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a},\ x\in[a;b]\\ 0,\ x\notin[a;b]\end{cases}$$

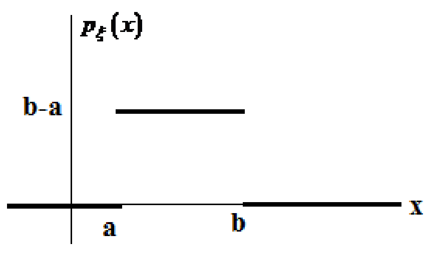
Действительно, несложно проверить, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p_\xi(x)dx=\int\limits_a^b\frac{dx}{b-a}=\frac{x}{b-a}\Big|_a^b=\frac{b-a}{b-a}=1$ и

$$F_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}p_\xi(t)dt=\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{x}0\cdot dt=0,\ x\le a\\ \int\limits_a^x\frac{dt}{b-a}=\frac{x-a}{b-a},\ a<x\le b\\ \int\limits_a^b\frac{dt}{b-a}=1,\ x>b\end{cases}$$

Графики функции распределения и ее плотности для равномерного распределения имеют

вид





3) Показательное распределение.

Показательным распределением с параметром $\lambda > 0$ называют распределение с плотностью

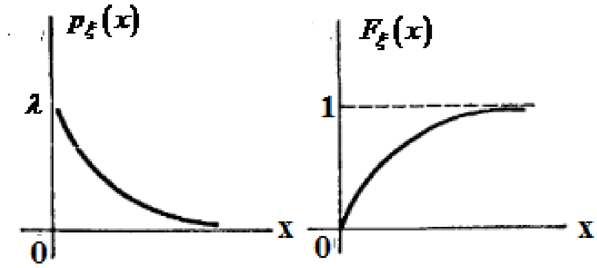
$$p_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}.$$

Найдем функцию распределения. При $x \le 0$ $F_\xi(x) = 0,$ а при $x > 0$ имеем

$$F_\xi(x) = \lambda \int_0^x e^{-\lambda t} dt = \lambda \cdot \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right) \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Таким образом $F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}.$

Графики плотности и функции распределения для показательного распределения имеют вид



Показательное распределение часто используется в задачах, в которых случайная величина ξ есть продолжительность безотказной работы некоторого прибора. Тогда, если t время, то $P\{\xi \ge t\} = e^{-\lambda t}$ есть вероятность безотказной работы в течение этого времени.

4) Гамма – распределение.

Гамма – распределением с параметрами $\alpha > 0$ $\beta > 0$ называется распределение с плотностью

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases},$$

где $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ есть гамма – функция.

Найдем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x) dx = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \begin{bmatrix} z = \beta x, x = \dfrac{z}{\beta} \\ dx = \dfrac{dz}{\beta} \end{bmatrix} = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{z}{\beta} \right)^{\alpha-1} e^{-z} \frac{dz}{\beta} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty z^{\alpha-1} e^{-z} dz = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \Gamma(\alpha) = 1.$$

Функция распределения для гамма – распределения имеет вид

$$F_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt, \; x > 0 \\ 0, \; x \le 0 \end{cases}.$$

При $\alpha = 1$ и $\beta = \lambda$ гамма – распределение переходит в показательное распределение с параметром λ.

Примеры.

1. Дана функция распределения случайной величины $F_\xi(x) = a + barctgx, \; -\infty < x < +\infty.$

   Найти постоянные a и b, а также плотность функции распределения.

Воспользуемся тем, что $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1.$ В результате приходим к системе

$\begin{cases} a - b\dfrac{\pi}{2} = 0 \\ a + b\dfrac{\pi}{2} = 1 \end{cases}$, откуда $a = \dfrac{1}{2}, b = \dfrac{1}{\pi}.$ Дифференцируя функцию распределения, найдем ее

плотность $p_\xi(x) = \dfrac{1}{\pi\left(1 + x^2\right)}.$

2. Случайная величина ξ задана функцией распределения

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \; x \le 0 \\ x^2, \; 0 < x \le 1. \\ 1, \; x > 1 \end{cases}$$

   Найти вероятность того, что в четырех независимых испытаниях величина ξ ровно три раза примет значение, лежащее в интервале (0,25;0,75).

Найдем $P\{0,25 \le \xi \le 0,75\} = F_\xi(0,75) - F_\xi(0,25) = 0,5625 - 0,0625 = 0,5.$ Искомая вероятность $p = C_4^3 \cdot 0.5^3 \cdot 0.5 = 3 \cdot 0.0625 = 0.1875.$

3. Случайная величина ξ задана плотностью функции распределения

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}\sin 3x, \; x \in \left(0; \dfrac{\pi}{3}\right) \\ 0, \; x \notin \left(0; \dfrac{\pi}{3}\right) \end{cases}.$$

   Найти вероятность того, что ξ примет значение, принадлежащее интервалу $\left(\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{4}\right).$

Вычислим $P\left\{\frac{\pi}{6}<\xi<\frac{\pi}{4}\right\}=\frac{3}{2}\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\sin 3xdx=-\frac{1}{2}\cos 3x\,|_{\pi/6}^{\pi/4}=-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}.$

4. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,1. Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02.

Ошибку округления отсчета можно рассматривать как случайную величину ξ, которая распределена равномерно между двумя соседними целыми делениями. Плотность этого распределения равна $p_\xi(x)=\begin{cases}\frac{1}{0,1-0}=10,\ x\in(0;0,1)\\ 0,\ x\notin(0;0,1)\end{cases}$. Ясно, что ошибка отсчета превысит 0,02, если она будет заключена в интервале $(0,02;0,08)$. Тогда

$$P(0,02<\xi<0,08)=\int\limits_{0,02}^{0,08}10dx=0,6.$$

5. Случайная величина ξ распределена нормально с параметрами $a=10, \sigma=2.$ Найти вероятность того, что в результате испытания ξ примет значение, заключенное в интервале $(12;14)$.

Воспользуемся формулой $P\{\omega:\alpha\le\xi(\omega)<\beta\}=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$ где $\Phi(x)$ функция Лапласа. Тогда используя таблицу 2 значений функции Лапласа, находим

$$P\{12<x<14\}=\Phi\left(\frac{14-10}{2}\right)-\Phi\left(\frac{12-10}{2}\right)=\Phi(2)-\Phi(1)=0,4772-0,3413=0,1359.$$

Задания.

1. Случайная величина ξ задана функцией распределения

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0,\ x\le-2\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{2},\ -2<x\le 2.\\ 1,\ x>2\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина ξ примет значение, заключенное в интервале (-1;1).

2. Дана функция распределения случайной величины ξ

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0\\ \text{sinx},\ 0<x\le\frac{\pi}{2}.\\ 1,\ x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

Найти плотность $p_\xi(x)$.

3. Случайная величина ξ задана плотностью функции распределения

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cos^2 x,\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\\ 0,\ x\notin\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}.$$

Найти вероятность того, что в трех независимых испытаниях величина ξ ровно два раза примет значение, лежащее в интервале $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

4. Задана плотность распределения случайной величины ξ

$$p_\xi(x)=\begin{cases}0,\ x\le 1\\ x-\dfrac{1}{2},1<x\le 2.\\ 0,\ x>2\end{cases}$$

Найти функцию распределения $F_\xi(x)$.

5. Плотность распределения случайной величины ξ задана равенством

$$p_\xi(x)=\frac{C}{e^x+e^{-x}}.$$

Найти постоянную C и функцию распределения случайной величины ξ.

6. Плотность распределения случайной величины ξ равна

$$p_\xi(x)=\begin{cases}Cx^2e^{-x},\ x>0\\ 0,\ x\le 0\end{cases}.$$

Найти: коэффициент C, функцию распределения, вероятность попадания случайной величины ξ в интервал (0;1).

7. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию с интервалом движения 10 минут. Найти вероятность того, что пассажир, пришедший на остановку, будет ожидать очередной автобус менее трех минут.
8. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со средним квадратичным отклонением $\sigma=20$ мм и математическим ожиданием $a=0$. Найти вероятность того, что из трех независимых измерений ошибка хотя бы одного не превзойдет по абсолютной величине 4 мм.
9. Случайная величина ξ распределена по показательному закону с параметром $\lambda=0,2$. Найти вероятность того, что в результате испытания ξ попадет в интервал $(0;2)$.

2.5. Три типа функций распределения. Теорема Лебега.

Мы подробно рассмотрели два типа случайных величин – дискретные и абсолютно непрерывные. Встречаются также случайные величины, которые на одних промежутках ведут себя как дискретные, а на других – как абсолютно непрерывные. Но есть еще один тип случайных величин, не являющихся ни в одном промежутке ни дискретными, ни абсолютно непрерывными. Для их описания введем следующее понятие.

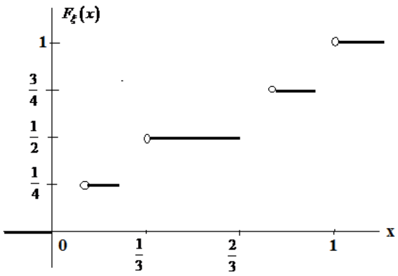
Определение. Точка x называется точкой роста функции распределения $F_\xi(x)$, если для каждого $\varepsilon>0$ выполняется неравенство $F_\xi(x+\varepsilon)-F_\xi(x-\varepsilon)>0.$

Например, дискретные распределения имеют конечное или счетное число точек роста x_k, где функция распределения терпит скачки. Рассмотренное ранее равномерное на $[a;b]$ распределение имеет в качестве точек роста весь промежуток $[a;b]$.

Определение. Распределение случайной величины называется сингулярным, если функция распределения $F_\xi(x)$ непрерывна, но множество ее точек роста имеет лебегову меру ноль.

Примером сингулярной случайной величины является величина, имеющая в качестве функции распределения кривую Кантора. Построим эту кривую.

Положим $F_\xi(x)=0$ при $x\le 0$ и $F_\xi(x)=1$ при $x>1$. Оставшийся промежуток $(0;1]$ разделим на три равные части. Положим $F_\xi(x)=\frac{1}{2}$ на средней части $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]$, а каждую из оставшихся частей $\left(0;\frac{1}{3}\right]$ и $\left(\frac{2}{3};1\right]$ опять разделим на три равные части. Положим в



получившихся средних частях $F_\xi(x)=\frac{1}{4}$ на $\left(\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right]$ и $F_\xi(x)=\frac{3}{4}$ на $\left(\frac{7}{9};\frac{8}{9}\right]$ и так далее.

Таким образом, $F_\xi(x)$ определена на счетном множестве смежных интервалов с общей длиной

$$\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{9}+4\cdot\frac{1}{27}+\ldots=\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\ldots\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-2/3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1/3}=1.$$

Тогда множество оставшихся точек, где $F_\xi(x)$ растет, имеет лебегову меру ноль. Доопределим на этом множестве функцию $F_\xi(x)$ по непрерывности.

Построенная таким образом функция распределения $F_\xi(x)$ будет непрерывной, а значит не может являться функцией распределения дискретной случайной величины. В то же время она не является функцией распределения абсолютно непрерывной случайной величины, так как не имеет плотности. Действительно, ее производная $F'_\xi(x)=0$ почти всюду, а значит, функция распределения не будет интегралом от своей производной.

Таким образом мы построили функцию распределения сингулярной случайной величины. В общем случае имеет место следующая теорема.

Теорема Лебега. Каждая функция распределения $F_\xi(x)$ единственным образом может быть представлена в виде суммы трех неубывающих функций

$F_\xi(x) = F_\partial(x) + F_{ан}(x) + F_c(x)$, где

$F_\partial(x)$ дискретная компонента, представимая в виде

$$F_\partial(x) = \sum_{x_i < x} p(x_i),\ p(x_i) \ge 0,\ \sum_i p(x_i) \le 1;$$

$F_{ан}(x)$ абсолютно непрерывная компонента, имеющая вид

$$F_{ан}(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt,\ p(t) \ge 0,\ \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\,dt \le 1;$$

$F_c(x)$ сингулярная компонента, представляющая собой непрерывную функцию, множество точек которой имеет лебегову меру нуль.

2.6. Многомерные случайные величины (случайные векторы).

Пусть на одном вероятностном пространстве $\langle \Omega, F, P \rangle$ заданы n случайных величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$. Вектор $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ называют случайным вектором или n-мерной случайной величиной.

Функцию

$$F_{\xi_1\xi_2...\xi_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = P\{\omega : \xi_1(\omega) < x_1, \xi_2(\omega) < x_2, ..., \xi_n(\omega) < x_n\}$$

называют совместной функцией распределения случайного вектора $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$.

Ее свойства аналогичны свойствам функции распределения одномерной случайной величины:

1. $0 \le F_{\xi_1\xi_2...\xi_n}(x_1, x_2, ..., x_n) \le 1.$
2. По любому из своих аргументов x_k функция распределения не убывает.
3. По любому из своих аргументов x_k функция распределения непрерывна слева.
4. Для любого x_k $\lim\limits_{x_k \to -\infty} F_{\xi_1\xi_2...\xi_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ и

   $\lim\limits_{x_k \to +\infty} F_{\xi_1\xi_2...\xi_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = F_{\xi_1...\xi_{k-1}\xi_{k+1}...\xi_n}(x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_n)$.

   При этом $\lim\limits_{\substack{x_1 \to +\infty \\ .... \\ x_n \to +\infty}} F_{\xi_1\xi_2...\xi_n}(x_1, x_n, ..., x_n) = 1.$

Так же как и в одномерном случае. отнесем распределение случайного вектора к дискретном типу, если случайный вектор $\overline{\xi}$ принимает конечное или счетное число значений $\overline{x}^{(1)}, \overline{x}^{(2)}, \ldots$. Закон распределения такого вектора задается при помощи набора чисел $P\left\{\overline{\xi} = \overline{x}^{(k)}\right\} = \overline{p}^{(k)} = \left(p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, \ldots, p_n^{(k)}\right)$, при этом $\sum_k \sum_{i=1}^{n} p_i^{(k)} = 1$.

Например, двумерную дискретную случайную величину $\overline{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ удобней задать в виде таблицы

$\xi_2 \setminus \xi_1$	1	3	5
2	0,14	0,2	0,25
4	0,16	0,1	0,15

Распределение случайного вектора $\overline{\xi}$ называется абсолютно непрерывным, если существует такая функция $p_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, что

$$F_{\xi_1\ldots\xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\xi_1\ldots\xi_n}(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n.$$

При этом функцию $p_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называют совместной плотностью распределения случайного вектора.

Если плотность распределения непрерывна, то

$$\frac{\partial^n F_{\xi_1\ldots\xi_n}(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} = p_{\xi_1\ldots\xi_n}(x_1, \ldots, x_n).$$

Если D некоторая область в n-мерном пространстве, то вероятность попадания точки в нее может быть вычислена по формуле

$$P\left\{\overline{\xi} \in D\right\} = \int \ldots \int_D p_{\xi_1\ldots\xi_2}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Наряду с совместной функцией распределения $F_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ случайного вектора $\overline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ рассмотрим функции распределения $F_{\xi_k}(x_k)$ каждой его компоненты ξ_k.

Определение. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ называются независимыми, если их совместная функция распределения равна произведению функций распределения этих случайных величин

$$F_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) F_{\xi_2}(x_2) \ldots F_{\xi_n}(x_n).$$

Отсюда для дискретных случайных величин получаем

$$P\{\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \ldots, \xi_n = x_n\} = P\{\xi_1 = x_1\} \cdot P\{\xi_2 = x_2\} \cdot \ldots \cdot P\{\xi_n = x_n\},$$

а для абсолютно непрерывных случайных величин имеем

$$p_{\xi_1...\xi_n}(x_1,...,x_n)=\frac{\partial^n F_{\xi_1...\xi_n}(x_1,...,x_n)}{\partial x_1...\partial x_n}=\frac{dF_{\xi_1}(x_1)}{dx_1}\cdot...\cdot\frac{dF_{\xi_n}(x_n)}{dx_n}=p_{\xi_1}(x_1)...p_{\xi_n}(x_n),$$

то есть совместная плотность распределения равна произведению плотностей распределения всех компонент случайного вектора.

Рассмотрим еще вопрос о нахождении законов распределения компонент многомерной случайной величины. Для сокращения записей ограничимся случаем двумерных случайных величин.

Если $\overline{\xi}=(\xi_1,\xi_2)$ дискретная случайная величина, закон распределения которой задан таблично, то для нахождения законов распределения составляющих ξ_1 и ξ_2 согласно формуле полной вероятности достаточно просуммировать вероятности по столбцам и по строкам. Например, пусть

$\xi_2 \setminus \xi_1$	3	5	7
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Тогда закон распределения составляющей ξ_1 имеет вид

ξ_1	3	5	7
p	0,27	0,43	0,30

А закон распределения составляющей ξ_2 имеет вид

ξ_2	4	5
p	0,55	0,45

Можно также находить условные распределения одной из составляющих двумерной случайной величины при фиксированном значении второй

$P\{\xi_1=x_1/\xi_2=y_k\},P\{\xi_1=x_2/\xi_2=y_k\},...,P\{\xi_1=x_n/\xi_2=y_k\}$ и

$P\{\xi_2=y_1/\xi_1=x_j\},P\{\xi_2=y_2/\xi_1=x_j\},...,P\{\xi_2=y_m/\xi_1=x_j\}$.

Условные вероятности составляющих находятся по известной формуле нахождения условной вероятности события

$$P\{\xi_1=x_j/\xi_2=y_k\}=\frac{P\{\xi_1=x_j;\xi_2=y_k\}}{P\{\xi_2=y_k\}} \text{ и } P\{\xi_2=y_k/\xi_1=x_j\}=\frac{P\{\xi_1=x_j;\xi_2=y_k\}}{P\{\xi_1=x_j\}}.$$

Так, для рассмотренного выше примера

$$P\{\xi_1=3/\xi_2=4\}=\frac{0,17}{0,55}=\frac{17}{55},P\{\xi_1=5/\xi_2=4\}=\frac{13}{55},P\{\xi_1=7/\xi_2=4\}=\frac{25}{55}$$

и условный закон распределения ξ_1 имеет вид

ξ_1	3	5	7
$P\{\xi_1/\xi_2=4\}$	$17/55$	$13/55$	$25/55$

Аналогично находится условный закон распределения ξ_2

ξ_2	4	5
$P\{\xi_2/\xi_1=5\}$	$13/43$	$30/43$

Пусть теперь $\bar{\xi}=(\xi_1,\xi_2)$ абсолютно непрерывная случайная величина с функцией распределения $F_{\xi_1\xi_2}(x_1,x_2)=P\{\xi_1<x_1,\xi_2<x_2\}$. Для нахождения функции распределения $F_{\xi_1}(x_1)=P\{\xi_1<x_1\}$ компоненты ξ_1 достаточно учесть, что выполнение неравенства $\xi_1<x_1$ равносильно совместному выполнению этого неравенства и достоверного неравенства $\xi_2<\infty$. Поэтому $F_{\xi_1}(x_1)=P\{\xi_1<x_1\}=P\{\xi_1<x_1,\xi_2<\infty\}$, то есть $F_{\xi_1}(x_1)=F_{\xi_1\xi_2}(x_1,\infty)$. Запишем эту формулу в виде

$$F_{\xi_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{x_1}dt\int_{-\infty}^{\infty}p(t,y)dy=\int_{-\infty}^{x_1}\left[\int_{-\infty}^{\infty}p(t,y)dy\right]dt,$$

откуда получаем выражение для плотности компоненты ξ_1

$$p_{\xi_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x_1,y)dy.$$

Аналогично получаем, что $p_{\xi_2}(x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}p(\text{y},x_2)dy.$

Полученные формулы можно также трактовать, как формулы полной вероятности в интегральной форме.

Определим теперь условную плотность распределения составляющей ξ_1 двумерной случайной величины $\bar{\xi}=(\xi_1,\xi_2)$ при фиксированном значении составляющей $\xi_2=y$, как отношение совместной плотности распределения к плотности распределения составляющей ξ_2

$$p_{\xi_1}(x_1/\xi_2=y)=\frac{p_{\xi_1\xi_2}(x_1,y)}{p_{\xi_2}(y)},\text{ где } p_{\xi_2}(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x_1,y)dx_1.$$

Аналогично определяется условная плотность распределения составляющей ξ_2

$$p_{\xi_2}(x_2 / \xi_1 = y) = \frac{p_{\xi_1\xi_2}(\mathrm{y}, \mathrm{x}_2)}{p_{\xi_1}(y)}, \text{ где } p_{\xi_1}(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(y, x_2)\, dx_2.$$

2.7. Функции от случайных величин.

Рассмотрим сначала следующую задачу. Пусть на вероятностном пространстве $\langle \Omega, F, P \rangle$ задана случайная величина ξ и пусть η другая случайная величина, связанная с ξ функциональной зависимостью $\eta = f(\xi)$. Требуется определить закон распределения случайной величины η, зная закон распределения случайной величины ξ.

Если ξ дискретная случайная величина, закон распределения которой задается в виде таблицы ее значений с соответствующими вероятностями, то из него легко получается закон распределения случайной величины $\eta = f(\xi)$.

Пример. Пусть случайная величина ξ имеет следующий закон распределения

ξ	-1	0	1	2
p	0,3	0,4	0,2	0,1

а $\eta = \xi^2 - 1$.

Тогда η принимает значения 0, -1, 0 и 3 с вероятностями 0,3; 0,4; 0,2 и 0,1 соответственно. Таким образом, ее закон распределения имеет вид

η	-1	0	3
p	0,4	0,5	0,1

Пусть теперь ξ абсолютно непрерывная случайная величина, а $\eta = f(\xi)$ монотонно возрастающая и имеющая производную функция. Тогда эта функция имеет обратную функцию $\xi = f^{-1}(\eta)$, так же монотонно возрастающую и имеющую производную $\left(f^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{f'(x)}$. Найдем функцию распределения случайной величины η, если известна функция распределения случайной величины ξ

$$F_\eta(x) = P\{\eta < x\} = P\{f(\xi) < x\} = P\left\{\xi < f^{-1}(x)\right\} = F_\xi\left(f^{-1}(x)\right).$$

Дифференцируя, найдем теперь плотность функции распределения

$$p_\eta(x) = \frac{d}{dx} F_\eta(x) = \frac{d}{dx} F_\xi\left(f^{-1}(x)\right) = p_\xi\left(f^{-1}(x)\right) \cdot \frac{1}{f'(x)}.$$

Если же функция $\eta = f(\xi)$ монотонно убывает, то ее функция распределения находится следующим образом

$$F_\eta(x) = P\{\eta < x\} = P\{f(\xi) < x\} = P\left\{\xi > f^{-1}(x)\right\} = 1 - P\left\{\xi < f^{-1}(x)\right\} = 1 - F_\xi\left(f^{-1}(x)\right).$$

Ее плотность равна

$$p_\eta(x) = \frac{d}{dx} F_\eta(x) = \frac{d}{dx}\left[1 - F_\xi\left(f^{-1}(x)\right)\right] = -p_\xi\left(f^{-1}(x)\right) \cdot \frac{1}{f'(x)}.$$

Примеры.

1. Найти функцию распределения и ее плотность случайной величины $\eta = \xi^2$.

Рассмотрим

$$F_\eta(x) = P\{\eta < x\} = P\left\{\xi^2 < x\right\} = \begin{cases} P\left\{-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}\right\}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases} = \begin{cases} F_\xi\left(\sqrt{x}\right) - F_\xi\left(-\sqrt{x}\right), x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$$

$$p_\eta(x) = \frac{d}{dx} F_\eta(x) = \begin{cases} p_\xi\left(\sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + p_\xi\left(-\sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}\left[p_\xi\left(\sqrt{x}\right) + p_\xi\left(-\sqrt{x}\right)\right], x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$$

2. Случайная величина ξ равномерно распределена на промежутке $(0;1)$. Найти закон распределения случайной величины $\eta = \ln\frac{1}{\xi}$.

Если $\xi \in (0;1)$, то $\eta = \ln\frac{1}{\xi} > 0$. Тогда $P\{\eta < x\} = 0$ при $x \le 0$. Пусть $x > 0$, тогда

$$P\{\eta < x\} = P\left\{\ln\frac{1}{\xi} < x\right\} = P\left\{\frac{1}{\xi} < e^x\right\} = P\left\{\xi > e^{-x}\right\} = 1 - P\left\{\xi < e^{-x}\right\} = 1 - F_\xi\left(e^{-x}\right).$$

Так как случайная величина ξ распределена равномерно на $[0;1]$, то $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ x, 0 < x \le 1 \\ 1, x > 1 \end{cases}$

и $1 - F_\xi\left(e^{-x}\right) = 1 - e^{-x}$. Таким образом $F_\eta(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$ и случайная величина η имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 1$.

Задания.

1. Задана плотность случайной величины ξ. Найти плотность распределения случайной величины η, если: а) $\eta = e^{-\xi}$; б) $\eta = \ln\xi$; в) $\eta = \sqrt{\xi}$.
2. Задана плотность случайной величины ξ. Найти плотность распределения случайной величины η, если: а) $\eta = e^{-\xi^2}$; б) $\eta = arctg\xi$; в) $\eta = \frac{1}{1+\xi^2}$.

3. Случайная величина ξ равномерно распределена на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \sin\xi$.
4. Случайная величина ξ распределена нормально с параметрами $a = 0, \sigma = 1$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi^2$.

Рассмотрим теперь следующую задачу. Пусть на вероятностном пространстве $\langle \Omega, F, P \rangle$ заданы случайные величины ξ и η. Найдем функцию распределения суммы этих случайных величин $\varsigma = \xi + \eta$.

Пусть ξ и η дискретные случайные величины, принимающие значения $x_1, x_2, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots$ и $p_1', p_2', \ldots$ соответственно. Случайная величина $\varsigma = \xi + \eta$ будет принимать значения $x_k + y_j$ с вероятностями $p_{kj} = P\left\{\xi = x_k / \eta = y_j\right\}$. Таким образом, мы получим закон распределения случайной величины ς. В частности, если случайные величины ξ и η независимы, то $p_{kj} = p_k \cdot p_j'$.

Пример. Пусть дискретные независимые случайные величины ξ и η заданы распределениями

ξ	1	3
p	0,3	0,7

η	2	4
p	0,6	0,4

Найти распределение случайной величины $\varsigma = \xi + \eta$.

Возможные знакомые ς есть суммы каждого возможного значения ξ со всеми возможными значениями η:

$$\varsigma_1 = 1 + 2 = 3; \varsigma_2 = 1 + 4 = 5; \varsigma_3 = 3 + 2 = 5; \varsigma_4 = 3 + 4 = 7.$$

Вероятности этих возможных значений в силу независимости случайных величин вычисляются с использованием теорем умножения и сложения вероятностей

$$P\{\varsigma = 3\} = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18; P\{\varsigma = 5\} = 0,3 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,6 = 0,54; P\{\varsigma = 7\} = 0,7 \cdot 0,4 = 0,28.$$

Закон распределения случайной величины ς имеет вид

ς	3	5	7
p	0,18	0,54	0,28

Пусть теперь ξ и η абсолютно непрерывные случайные величины с плотностями $p_\xi(x)$ и $p_\eta(x)$ соответственно. Пусть $p(x_1, x_2)$ совместная плотность распределения вектора (ξ,η). Найдем функцию распределения суммы $\varsigma=\xi+\eta$. Искомая функция равна вероятности попадания точки (ξ,η) в полуплоскость $x_1+x_2<x$

$$F_\varsigma(x)=\iint\limits_{x_1+x_2<x} p(x_1,x_2)dx_1dx_2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx_1\int\limits_{-\infty}^{x-x_1}p(x_1,x_2)dx_2=\begin{bmatrix} x_2=z-x_1 \\ dx_2=dz \end{bmatrix}=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx_1\int\limits_{-\infty}^{x}p(x_1,z-x_1)dz==\int\limits_{-\infty}^{x}dz\int\limits_{-\infty}^{\infty}p(x_1,z-x_1)dx_1=[z\leftrightarrow x_1]==\int\limits_{-\infty}^{x}dx_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}p(\mathrm{z},x_1-z)dz.$$

Отсюда плотность распределения суммы

$$p_\varsigma(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}p(z,x-z)dz.$$

Если случайные величины ξ и η независимы, то $p(x_1,x_2)=p_\xi(x_1)\,p_\eta(x_2)$ и

$$p_\varsigma(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_\xi(x-z)\,p_\eta(z)dz=\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_\xi(z)\,p_\eta(x-z)dz.$$

Пример. Пусть случайные величины ξ и η независимы и распределены нормально с параметрами $a=0,\sigma=1.$ Покажем, что их сумма $\varsigma=\xi+\eta$ также имеет нормальный закон распределения.

По условию $p_\xi(x)=p_\eta(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. Согласно полученной формуле

$$p_\varsigma(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}\cdot e^{-\frac{(x-z)^2}{2}}dz=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-(z^2-xz)}dz=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{x^4}{4}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(z-\frac{x}{2}\right)^2}dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{4}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(z\sqrt{2}-\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}dz=\begin{bmatrix} t=z\sqrt{2}-\dfrac{x}{\sqrt{2}} \\ dt=\sqrt{2}dz \end{bmatrix}=\frac{1}{2\pi\sqrt{2}}e^{-\frac{x^2}{4}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{2\pi\sqrt{2}}e^{-\frac{x^2}{4}}\sqrt{2\pi}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}}.$$

Таким образом, случайная величина ς распределена нормально с параметрами $a=0,\sigma=\sqrt{2}.$

Задания.

5. Независимые случайные величины ξ и η распределены по показательному закону с параметрами $\lambda_1=1$ и $\lambda_2=\frac{1}{2}$ соответственно. Найти плотность распределения случайной величины $\varsigma=\xi+\eta$.

6. Независимые случайные величины ξ и η распределены равномерно на промежутке $[0;1]$. Найти функцию распределения и ее плотность случайной величины $\varsigma = \xi + \eta$.

Глава 3. Числовые характеристики случайных величин.

Наиболее полную характеристику случайной величины дает ее функция распределения, так как она одновременно указывает на то, какие значения может принимать случайная величина и с какими вероятностями. Однако в ряде случаев о случайной величине требуется знать гораздо меньше – достаточно получить о ней лишь некоторое суммарное представление. Для теории вероятности и ее приложений большую роль играют так называемые числовые характеристики случайных величин, такие как математическое ожидание, дисперсия и другие.

Однако, прежде чем перейти к их изучению, отметим следующее. Как мы видели, основные типы распределений, с которыми нам предстоит работать, относятся к двум типам – дискретные и абсолютно непрерывные. Функции распределений для них представляют собой либо кусочно-постоянную ступенчатую кривую, либо непрерывную кривую. В связи с этим нам потребуется математический аппарат, который смог бы работать с обоими типами распределений. Таким аппаратом является понятие интеграла Стилтьеса, который в определенной степени является обобщением известного нам интеграла Римана.

3.1. Интеграл Стилтьеса.

Введем сначала класс функций с ограниченным изменением, которые играют большую роль при определении интеграла Стилтьеса.

Пусть функция $f(x)$ определена на конечном промежутке $[a;b]$, $a<b.$ Разобьем этот промежуток произвольным образом на части точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ и образуем сумму $v = \sum_{k=0}^{n-1} \left| f(x_{k+1}) - f(x_k) \right|.$

Если при всевозможных разбиениях промежутка $[a;b]$ множество сумм $\{v\}$ будет ограничено сверху, то говорят, что функция $f(x)$ имеет на промежутке $[a;b]$ ограниченное изменение (или ограниченную вариацию). При этом точную верхнюю грань этих сумм называют полным изменением (или полной вариацией) функции $f(x)$ на промежутке $[a;b]$ и обозначают $\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x) = \sup\{v\}$.

Можно рассматривать вопрос об ограниченности изменения функции $f(x)$ в бесконечном промежутке, например, на $[a;+\infty)$. Говорят, что функция $f(x)$ имеет ограниченное изменение в промежутке $[a;+\infty),$ если она является функцией с ограниченным изменением на любой его конечной части $[a;A]$ и полные изменения $\overset{A}{\underset{a}{V}} f(x)$ ограничены в совокупности $\overset{+\infty}{\underset{a}{V}} f(x) = \sup\limits_{A>a}\left\{\overset{A}{\underset{a}{V}} f(x)\right\}.$

Отметим сразу, в определении функций с ограниченным изменением никакой роли не играет вопрос о непрерывности этой функции.

Примеры функций с ограниченным изменением.

1) Любая ограниченная и монотонная функция является функцией с ограниченным изменением.

Действительно, так как в сумме $v = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\left|f(x_{k+1}) - f(x_k)\right|.$ все разности $f(x_{k+1}) - f(x_k)$ одного знака, то

$$v = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_{k+1}) - f(x_k)\right]\right| = \left|f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \ldots + f(x_n) - f(x_{n-1})\right| =$$

$$= \left|f(x_n) - f(x_0)\right| = \left|f(b) - f(a)\right|,$$

а значит $\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x) = \left|f(b) - f(a)\right|.$

2) Если функция $f(x)$ имеет на $[a;b]$ ограниченную производную $\left|f'(x)\right| \le M,$ то она будет функцией с ограниченным изменением.

Действительно, по формуле конечных приращений

$$\left|f(x_{k+1}) - f(x_k)\right| \le \left|f'(\xi)\right| \cdot (x_{k+1} - x_k) \le M(x_{k+1} - x_k),\ \xi \in (x_k; x_{k+1}).$$

Тогда $v = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\left|f(x_{k+1}) - f(x_k)\right| \le M\sum\limits_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) = M(b-a),$ а значит

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x) \le M(b-a).$$

3) Если функция $f(x)$ абсолютно непрерывна на $[a;b],$ то есть представима в виде интеграла с переменным верхним пределом $f(x) = C + \int\limits_a^x \varphi(t)\,dt,$ где $C - const,$ а функция $\varphi(t)$ абсолютно интегрируема на $[a;b]$ (то есть существует и конечен $\int\limits_a^b \left|\varphi(t)\right| dt$), то функция $f(x)$ будет функцией с ограниченным изменением на $[a;b].$

Действительно, $v = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\left|f(x_{k+1}) - f(x_k)\right| = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\left|C + \int\limits_a^{x_{k+1}} \varphi(t)\,dt - C - \int\limits_a^{x_k} \varphi(t)\,dt\right| =$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}\varphi(t)\,dt\right|\le\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}|\varphi(t)|\,dt=\int_a^b|\varphi(t)|\,dt,\ \text{то есть}\ \mathop{V}_a^b f(x)\le\int_a^b|\varphi(t)|\,dt.$$

Перейдем теперь непосредственно к определению интеграла Стилтьеса.

Пусть на промежутке $[a;b]$ заданы две ограниченные функции $f(x)$ и $g(x)$. Разобьем промежуток $[a;b]$ точками $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ на частичные промежутки $[x_k;x_{k+1}]$ и положим $\Delta=\max\limits_{0\le k\le n-1}(x_{k+1}-x_k)$. На каждом частичном промежутке $[x_k;x_{k+1}]$ возьмем произвольную точку ξ_k и составим интегральную сумму Стилтьеса

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\left[g(x_{k+1})-g(x_k)\right].$$

Если существует конечный предел интегральных сумм σ при $\Delta\to 0$, не зависящий от способа разбиения промежутка $[a;b]$ на частичные промежутки и от выбора точек ξ_k на них, то функция $f(x)$ называется интегрируемой по Стилтьесу по функции $g(x)$, а сам этот предел называют интегралом Стилтьеса от функции $f(x)$ по функции $g(x)$ и обозначают $\int\limits_a^b f(x)\,dg(x)$.

Из определения видно, что интеграл Римана является частным случаем интеграла Стилтьеса при $g(x)=x$, поскольку интегральные суммы Римана имели вид

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\Delta x_k,\ \Delta x_k=x_{k+1}-x_k.$$

Из определения интеграла Стилтьеса непосредственно вытекают его свойства, аналогичные свойствам интеграла Римана

1) $\int\limits_a^b dg(x)=g(b)-g(a)$.

2) $\int\limits_a^b\left[f_1(x)\pm f_2(x)\right]dg(x)=\int\limits_a^b f_1(x)\,dg(x)\pm\int\limits_a^b f_2(x)\,dg(x)$.

3) $\int\limits_a^b f(x)\,d\left[g_1(x)\pm g_2(x)\right]=\int\limits_a^b f(x)\,dg_1(x)\pm\int\limits_a^b f(x)\,dg_2(x)$.

4) $\int\limits_a^b kf(x)\,d\left[mg(x)\right]=km\int\limits_a^b f(x)\,dg(x),\ k,m-const.$

5) $\int\limits_a^b f(x)\,dg(x)=\int\limits_a^c f(x)\,dg(x)+\int\limits_c^b f(x)\,dg(x),\ a<c<b.$

Мы ввели определение собственного интеграла Стилтьеса, когда промежуток $[a;b]$ конечен. В случае бесконечного промежутка интегрирования несобственный интеграл Стилтьеса определяется следующим образом

$$\int_a^{\infty} f(x)dg(x) = \lim_{A\to\infty}\int_a^{A} f(x)dg(x).$$

Рассмотрим теперь вопрос, для каких классов функций $f(x)$ и $g(x)$ существует интеграл Стилтьеса и как он вычисляется. При этом ограничимся только случаями, которые представляют для нас интерес с точки приложения в теории вероятности.

1) Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману, а функция $g(x)$ абсолютно непрерывна на промежутке $[a;b]$, то есть $g(x) = C + \int_a^x \varphi(t)dt,$ то интеграл Стилтьеса существует и имеет место формула

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx.$$

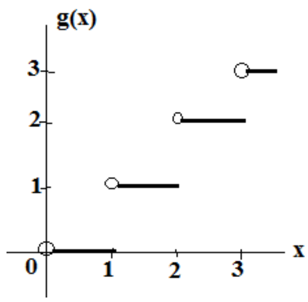
2) Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, а функция $g(x)$ имеет на этом промежутке абсолютно-интегрируемую производную $g'(x)$ всюду, за исключением конечного числа точек $a \le c_1 < c_2 < ... < c_m \le b,$ где функция $g(x)$ терпит разрывы I-го рода, то интеграл Стилтьеса существует и имеет место формула

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx + \sum_{k=1}^{m} f(c_k)\left[g(c_k+0) - g(c_k-0)\right].$$

В частности, если функция $g(x)$ кусочно-постоянна на $[a;b]$ и непрерывна слева в точках разрыва $c_k : g(c_k - 0) = g(c_k),$ то учитывая, что $g'(x) = 0,$ получим

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \sum_{k=1}^{m} f(c_k)\left[g(c_k+0) - g(c_k)\right].$$

Приведенная выше формула позволяет записывать числовые ряды в виде интеграла Стилтьеса. Например, пусть дан числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Определим функцию $f(x)$ так, что



$f(k) = a_k$, а в качестве $g(x)$ возьмем кусочно-постоянную функцию, имеющую

единичные скачки в точках $x = 1, 2, \ldots$, например, $g(x) = [x]$ - целая часть числа x при $x > 0.$ Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)\left[g(k+0)-g(k)\right] = \int_0^{\infty} f(x)\,dg(x).$$

При этом в полученной формуле ряд сходится одновременно с интегралом и наоборот.

3.2. Математическое ожидание случайной величины.

Пусть на вероятностном пространстве $\langle \Omega, F, P \rangle$ задана случайная величина ξ с функцией распределения $F_{\xi}(x)$.

Определение. Математическим ожиданием случайной величины ξ называется число

$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_{\xi}(x),$ если этот интеграл Стилтьеса сходится абсолютно.

Если ξ дискретная случайная величина, заданная законом распределения

ξ	x_1	x_2	$\cdots$
p	p_1	p_2	$\cdots$

то ее функция распределения $F_{\xi}(x)$ представляет собой кусочно-постоянную функцию со скачками $F_{\xi}(x_k+0)-F_{\xi}(x_k)=p_k$ в точках x_k. Тогда по формуле для вычисления интеграла Стилтьеса получаем

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\xi}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\left[F_{\xi}(x_k+0)-F_{\xi}(x_k)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k,$$

если этот ряд сходится абсолютно.

Очевидно, что если дискретная случайная величина принимает только конечное число значений, то ее математическое ожидание всегда существует.

Если же ξ абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью $p_{\xi}(x)$, то $F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{x} p_{\xi}(t)dt$ и по соответствующей формуле для вычисления интеграла Стилтьеса получим $M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi}(x)dx,$ если этот интеграл сходится абсолютно.

Для прояснения смысла математического ожидания рассмотрим следующий пример.

Пусть в некоторой лотерее имеется n билетов. Из них n_1 билетов с выигрышем - a_1, n_2 - с выигрышем $a_2, \ldots, n_k$ - с выигрышем a_k. Рассмотрим случайную величину ξ - величину выигрыша на один билет. Это дискретная случайная величина, принимающая значения $a_1, a_2, \ldots, a_k$ с вероятностями $p_1 = \frac{n_1}{n}, p_2 = \frac{n_2}{n}, \ldots, p_k = \frac{n_k}{n}.$

Математическое ожидание рассматриваемой случайной величины есть $M\xi = \sum_{i=1}^{k} a_i p_i = a.$

Общая сумма выигрышей составляет $a_1 n_1 + a_2 n_2 + ... + a_k n_k$ и на один билет приходится «в среднем» величина выигрыша

$$a = \frac{a_1 n_1 + a_2 n_2 + ... + a_k n_k}{n} = a_1 \frac{n_1}{n} + a_2 \frac{n_2}{n} + ... + a_k \frac{n_k}{n} = a_1 p_1 + a_2 p_2 + ... + a_k p_k = \sum_{i=1}^{k} a_i p_i.$$

Таким образом, математическое ожидание $M\xi$ есть средняя величина выигрыша a на один билет.

Из приведенного примера видно, что математическое ожидание $M\xi$ есть некоторая характеристика «среднего» значения случайной величины ξ.

Теорема. Пусть ξ случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $\langle \Omega, F, P \rangle$ и пусть $F_\xi(x)$ ее функция распределения. Если $f(x)$ непрерывная функция, то

$$Mf(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF_\xi(x).$$

Доказательство. Рассмотрим случайную величину $\eta = f(\xi)$ и найдем ее функцию распределения. Если $f(x)$ монотонно возрастающая функция, то мы ранее получили, что $F_\eta(x) = F_\xi\left(f^{-1}(x)\right)$, но тогда

$$Mf(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_\eta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_\xi\left(f^{-1}(x)\right) = \begin{bmatrix} z = f^{-1}(x) \\ x = f(z) \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dF_\xi(z).$$

Если же функция $f(x)$ монотонно убывает, то $F_\eta(x) = 1 - F_\xi\left(f^{-1}(x)\right)$ и

$$Mf(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_\eta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x d\left[1 - F_\xi\left(f^{-1}(x)\right)\right] = -\int_{-\infty}^{\infty} x dF_\eta(x) = -\int_{+\infty}^{-\infty} f(z) dF_\xi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dF_\xi(z).$$

В общем случае промежуток $(-\infty; +\infty)$ разбивается на части, где $f(x)$ монотонна и для каждой такой части проводятся аналогичные рассуждения.

Доказанная теорема позволяет находить математическое ожидание $Mf(\xi)$ не находя закон распределения случайной величины $\eta = f(\xi)$.

Примеры вычисления математического ожидания случайной величины.

1. Пусть ξ дискретная случайная величина, распределенная по закону Пуассона:

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \lambda > 0, k = 0, 1, 2, ...$$

Найдем $M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda.$

Здесь учтено разложение по формуле Маклорена $e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}.$

Таким образом, параметр λ в распределении Пуассона есть математическое ожидание данной случайной величины.

2. Пусть теперь ξ абсолютно непрерывная случайная величина, имеющая нормальный закон распределения, то есть ее плотность равна

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Найдем $M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi}(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \begin{bmatrix} t = \dfrac{x-a}{\sigma} \\ x = \sigma t + a, dx = \sigma dt \end{bmatrix} =$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t + a) e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

В полученном выражении первый интеграл равен нулю, как интеграл от нечетной функции в симметричных пределах, а второй интеграл есть интеграл Пуассона и он равен $\sqrt{2\pi}$. Таким образом $M\xi = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = a.$

Таким образом, параметр a в нормальном распределении равен математическому ожиданию данной случайной величины.

3.3. Свойства математического ожидания.

1) Если $\xi = C - const,$ то $MC = C.$

Действительно, $P\{\omega : \xi(\omega) = C\} = 1$ и для дискретной случайной величины $\xi = C$: $M\xi = C \cdot 1 = C.$

2) Если случайная величина ξ имеет математическое ожидание $M\xi,$ то и случайная величина $C\xi,$ где $C - const,$ также имеет математическое ожидание и $M(C\xi) = C \cdot M\xi,$ то есть постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.

Действительно, $M(C\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} C x dF_{\xi}(x) = C \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\xi}(x) = C \cdot M\xi.$

3) Если случайные величины ξ и η, заданные на вероятностном пространстве $\langle \Omega, F, P \rangle$, имеют математические ожидания $M\xi$ и $M\eta$, то и случайная величина $\varsigma = \xi + \eta$ имеет математическое ожидание и $M\varsigma = M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$, то есть математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий.

Доказательство. Проведем доказательство в два этапа – сначала для дискретных случайных величин, а потом для абсолютно непрерывных случайных величин.

Пусть ξ и η дискретные случайные величины, принимающие значения $x_1, x_2, \dots$ и $y_1, y_2, \dots$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots$ и $p_1', p_2', \dots$ соответственно. Случайная величина $\varsigma = \xi + \eta$ будет принимать значения $x_k + y_j$ с вероятностями $p_{kj} = P\{\xi = x_k / \eta = y_j\}$. Ее математическое ожидание $M\varsigma = \sum\limits_{k,j=1}^{\infty} (x_k + y_j) p_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \sum\limits_{j=1}^{\infty} p_{kj} + \sum\limits_{j=1}^{\infty} y_j \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_{kj}$.

По формуле полной вероятности $\sum\limits_{j=1}^{\infty} p_{kj} = p_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_{kj} = p_j'$ и

$$M\varsigma = M(\xi + \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k + \sum_{j=1}^{\infty} y_j p_j' = M\xi + M\eta.$$

Пусть теперь ξ и η абсолютно непрерывные случайные величины с плотностями $p_\xi(x)$ и $p_\eta(x)$ соответственно, а $p(x_1, x_2)$ их совместная плотность распределения. В пункте 2.7 была найдена плотность распределения их суммы $\varsigma = \xi + \eta$

$$p_\varsigma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(z, x - z)\, dz.$$

Найдем математическое ожидание

$$M\varsigma = \int_{-\infty}^{\infty} x p_\varsigma(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x dx \int_{-\infty}^{\infty} p(z, x - z)\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x p(z, x - z)\, dz dx = \begin{bmatrix} x = z + y, y = x - z \\ dx = dy \end{bmatrix} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (z + y) p(z, y)\, dz dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z p(z, y)\, dz dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y p(z, y)\, dz dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} z dz \int_{-\infty}^{\infty} p(z, y)\, dy + \int_{-\infty}^{\infty} y dy \int_{-\infty}^{\infty} p(z, y)\, dz.$$

В пункте 2.6 мы получили, что плотности компонент двумерной случайной величины определяются формулами

$$p_\xi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(z, y)\, dy \quad \text{и} \quad p_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(z, y)\, dz.$$

Тогда $M\varsigma = M(\xi+\eta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} zp_{\xi}(z)dz + \int\limits_{-\infty}^{\infty} yp_{\eta}(y)dy = M\xi + M\eta.$

4) Если случайные величины ξ и η, заданные на вероятностном пространстве $\langle\Omega, F, P\rangle$, независимы и имеют математические ожидания $M\xi$ и $M\eta$, то и случайная величина $\varsigma = \xi\cdot\eta$ имеет математическое ожидание и $M\varsigma = M(\xi\cdot\eta) = M\xi\cdot M\eta$, то есть математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда ξ и η независимые дискретные случайные величины, принимающие значения $x_1, x_2, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots$ и $p_1', p_2', \ldots$ соответственно. Случайная величина $\varsigma = \xi\cdot\eta$ будет принимать значения $x_k y_j$ с вероятностями $p_k p_j'$ и ее математическое ожидание

$$M\varsigma = \sum_{k,j=1}^{\infty} x_k y_j p_k p_j' = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \cdot \sum_{j=1}^{\infty} y_j p_j' = M\xi\cdot M\eta.$$

Пусть теперь ξ и η независимые абсолютно непрерывные случайные величины с плотностями $p_{\xi}(x)$ и $p_{\eta}(x)$ соответственно. Пусть $p(x,y)$ плотность двумерной случайной величины $\varsigma = \xi\cdot\eta$. Так как ее компоненты независимы, то $p(x,y) = p_{\xi}(x)p_{\eta}(y)$ и ее математическое ожидание

$$M\varsigma = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xyp(x,y)dxdy = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xyp_{\xi}(x)p_{\eta}(y)dxdy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xp_{\xi}(x)dx\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty} yp_{\eta}(y)dy =$$

$$= M\xi\cdot M\eta.$$

Таким образом мы доказали, что для независимых случайных величин $M(\xi\cdot\eta) = M\xi\cdot M\eta.$

3.4. Дисперсия случайной величины.

Пусть случайная величина ξ задана на вероятностном пространстве $\langle\Omega, F, P\rangle$ и имеет математическое ожидание $M\xi$.

Определение. Дисперсией случайной величины ξ называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины ξ от своего математического ожидания $M\xi$: $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$, если это математическое ожидание существует.

Исходя из доказанной в пункте 3.2 теоремы $D\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(x - M\xi)^2 dF_{\xi}(x)$, откуда для дискретных случайных величин получаем формулу

$$D\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \left(x_k - M\xi \right)^2 p_k,$$

а для абсолютно непрерывных случайных величин имеем формулу

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - M\xi \right)^2 p_{\xi}\left(x \right) dx.$$

Величину $\sigma = \sqrt{D\xi}$ называют среднеквадратичным отклонением случайной величины ξ от ее математического ожидания $M\xi.$

Дисперсия случайной величины позволяет судить о величине рассеяния ее значений относительно «среднего» значения – математического ожидания.

Получим еще одну формулу, удобную для вычисления дисперсии

$$D\xi = M\left(\xi - M\xi \right)^2 = M\left(\xi^2 - 2\xi \cdot M\xi + \left(M\xi \right)^2 \right) = M\xi^2 - 2M\xi \cdot M\xi + \left(M\xi \right)^2 = M\xi^2 - \left(M\xi \right)^2.$$

При получении формулы учтено, что $M\xi$ есть число (постоянная величина).

Таким образом, дисперсия равна математическому ожиданию от квадрата случайной величины минус квадрат ее математического ожидания.

Примеры вычисления дисперсии случайной величины.

1. Пусть ξ дискретная случайная величина, распределенная по закону Пуассона:

$$P\left\{ \xi = k \right\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \lambda > 0, k = 0,1,2,...$$

Мы уже ранее вычислили ее математическое ожидание $M\xi = \lambda.$ Найдем теперь

$$M\xi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\left(k-1 \right)!} \lambda^k = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1+1}{\left(k-1 \right)!} \lambda^k = e^{-\lambda} \left[\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\left(k-2 \right)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\left(k-1 \right)!} \right] =$$

$$= e^{-\lambda} \left[\lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{\left(k-2 \right)!} + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{\left(k-1 \right)!} \right] = e^{-\lambda} \left(\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda} \right) = \lambda^2 + \lambda.$$

Тогда $D\xi = M\xi^2 - \left(M\xi \right)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$

Таким образом, для распределения Пуассона и математическое ожидание и дисперсия равны параметру λ.

2. Пусть теперь ξ абсолютно непрерывная случайная величина, распределенная по нормальному закону с плотностью $p_{\xi}\left(x \right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(x-a \right)^2}{2\sigma^2}}$.

Мы уже ранее получили, что $M\xi = a.$ Найдем теперь

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - M\xi \right)^2 p_{\xi}\left(x \right) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(x-a \right)^2 e^{-\frac{\left(x-a \right)^2}{2\sigma^2}} dx = \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{x-a}{\sigma} \\ x - a = \sigma t, dx = \sigma dt \end{array} \right] =$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^2t^2e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dt=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\begin{bmatrix}u=t,\, du=dt\\ dv=te^{-\frac{t^2}{2}}dt,\, v=-e^{-\frac{t^2}{2}}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-te^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}=\sigma^2.$$

Таким образом, для нормального закона распределения $D\xi=\sigma^2$ и параметр σ есть среднеквадратичное отклонение случайной величины.

3.5. Свойства дисперсии.

1) Если $\xi=C-const,$ то $DC=0.$

Действительно, так как $MC=C,$ то $DC=M\left(C-MC\right)^2=M\left(C-C\right)^2=0.$

2) Если случайная величина ξ имеет дисперсию $D\xi,$ то и случайная величина $C\xi,$ где $C-const,$ также имеет дисперсию и $D\left(C\xi\right)=C^2\cdot D\xi.$

Действительно, $D\left(C\xi\right)=M\left(C\xi-M\left(C\xi\right)\right)^2=M\left(C\xi-C\cdot M\xi\right)^2=M\left(C^2\left(\xi-M\xi\right)^2\right)=$

$$=C^2\cdot M\left(\xi-M\xi\right)^2=C^2\cdot D\xi.$$

3) Если случайные величины ξ и η, заданные на вероятностном пространстве $\langle\Omega,F,P\rangle,$ независимы и имеют дисперсии $D\xi$ и $D\eta,$ то и их сумма $\xi+\eta$ имеет дисперсию, равную сумме дисперсий этих величин $D\left(\xi+\eta\right)=D\xi+D\eta.$

Действительно, $D\left(\xi+\eta\right)=M\left(\xi+\eta\right)^2-\left(M\left(\xi+\eta\right)\right)^2=M\left(\xi^2+2\xi\eta+\eta^2\right)-\left(M\xi+M\eta\right)^2=$

$$=M\xi^2+2M\xi\cdot M\eta+M\eta^2-\left(M\xi\right)^2-2M\xi\cdot M\eta-\left(M\eta\right)^2=M\xi^2-\left(M\xi\right)^2+M\eta^2-\left(M\eta\right)^2=$$

$$=D\xi+D\eta.$$

Примеры.

1. Пусть дискретная случайная величина ξ имеет биномиальное распределение, то есть ξ это число появлений некоторого события **A** в серии из n независимых испытаний $P\{\xi=k\}=C_n^kp^kq^{n-k}$. Найдем ее математическое ожидание и дисперсию.

Представим эту случайную величину в виде суммы n независимых случайных величин $\xi=\xi_1+\xi_2+...+\xi_n,$ где ξ_k результат k-го испытания.

ξ_k	1	0
p_k	p	q

$M\xi_k = 1\cdot p + 0\cdot q = p;\ M\xi_k^2 = 1^2\cdot p + 0\cdot q = p,$ тогда

$D\xi_k = M\xi_k^2 - (M\xi_k)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq.$

По свойствам математического ожидания и дисперсии

$$M\xi = \sum_{k=1}^{n} M\xi_k = np \text{ и } D\xi = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k = npq.$$

2. Пусть дискретная случайная величина ξ имеет геометрическое распределение, то есть ξ номер независимого испытания, в котором впервые произошло событие **A:** $P\{\xi = k\} = q^{k-1}p,\ k = 1, 2, \ldots$ Найдем ее математическое ожидание и дисперсию.

Найдем сначала $M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k\,q^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{\infty} k\,q^{k-1}.$

Для вычисления полученного ряда, рассмотрим степенной ряд (геометрическую прогрессию) $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q},$ сходящийся равномерно при $0 < q < 1.$ По свойству степенных рядов мы его можем дифференцировать почленно внутри промежутка сходимости.

Дифференцируя, получим $\sum_{k=1}^{\infty} k\,q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2},$ откуда $M\xi = p\sum_{k=1}^{\infty} k\,q^{k-1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$

Для нахождения дисперсии найдем сначала

$$M\xi^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2q^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{\infty} k^2q^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty}\big(k(k-1)+k\big)q^{k-1} = p\left(q\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} k\,q^{k-1}\right).$$

Дифференцирую еще раз равенство $\sum_{k=1}^{\infty} k\,q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2},$ получим

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Тогда $M\xi^2 = p\left(q\frac{2}{(1-q)^3} + \frac{1}{(1-q)^2}\right) = p\left(\frac{2q}{p^3} + \frac{1}{p^2}\right) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p}.$

Таким образом $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q+p-1}{p^2} = \frac{2q-q}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$

Окончательно $M\xi = \frac{1}{p}$ и $D\xi = \frac{q}{p^2}.$

3. Пусть случайная величина ξ распределена равномерно на промежутке $[a;b]$. Найдем ее математическое ожидание и дисперсию.

Плотность распределения этой случайной величины равна $p_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, \ x\in(a;b)\\ 0, \ x\notin(a;b)\end{cases}$.

Найдем $M\xi=\int\limits_{-\infty}^{\infty}xp_\xi(x)dx=\int\limits_a^b\dfrac{x}{b-a}dx=\dfrac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b=\dfrac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\dfrac{b+a}{2}$ и

$$M\xi^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2p_\xi(x)dx=\int\limits_a^b\frac{x^2}{b-a}dx=\frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

Тогда $D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2=\dfrac{b^2+ab+a^2}{3}-\dfrac{(b+a)^2}{4}=\dfrac{1}{12}\left(4b^2+4ab+4a^2-3b^2-6ab-3a^2\right)=$

$$=\frac{1}{12}\left(b^2-2ab+a^2\right)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Таким образом, $M\xi=\dfrac{b+a}{2}$ и $D\xi=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

4. Пусть случайная величина ξ имеет показательное распределение с плотностью

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\lambda\cdot e^{-\lambda x}, \ x>0\\ 0, \ x\le 0\end{cases}, \quad \lambda>0.$$

Найдем ее математическое ожидание и дисперсию.

Вычислим $M\xi=\int\limits_{-\infty}^{\infty}xp_\xi(x)dx=\lambda\int\limits_0^{\infty}xe^{-\lambda x}dx=\left[\begin{array}{l}u=x, du=dx\\ dv=e^{-\lambda x}dx, v=-\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\end{array}\right]=$

$$=\lambda\left(-\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty+\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda x}dx\right)=\int\limits_0^\infty e^{-\lambda x}dx=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty=\frac{1}{\lambda}.$$

$$M\xi^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2p_\xi(x)dx=\lambda\int\limits_0^\infty x^2e^{-\lambda x}dx=\left[\begin{array}{l}u=x^2, du=2xdx\\ dv=e^{-\lambda x}dx, v=-\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\end{array}\right]=$$

$$=\lambda\left(-\frac{x^2}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty+\frac{2}{\lambda}\int\limits_0^\infty xe^{-\lambda x}dx\right)=2\int\limits_0^\infty xe^{-\lambda x}dx=\left[\begin{array}{l}u=x, du=dx\\ dv=e^{-\lambda x}dx, v=-\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\end{array}\right]=$$

$$=2\left(-\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty+\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda x}dx\right)=\frac{2}{\lambda}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda x}dx=-\frac{2}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty=\frac{2}{\lambda^2}.$$

Тогда дисперсия $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}$.

Таким образом, $M\xi = \frac{1}{\lambda}$ и $D\xi = \frac{1}{\lambda^2}$.

5. Пусть случайная величина ξ имеет гамма распределение с плотностью

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \; x > 0 \\ 0, \; x \le 0 \end{cases}, \; \alpha > 0, \; \beta > 0.$$

Найдем ее математическое ожидание и дисперсию.

Вычислим $M\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x) dx = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty x^\alpha e^{-\beta x} dx = \begin{bmatrix} z = \beta x, \; x = \frac{z}{\beta} \\ dx = \frac{dz}{\beta} \end{bmatrix} = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty \frac{z^\alpha}{\beta^\alpha} e^{-z} \frac{dz}{\beta} =$

$$= \frac{1}{\beta \Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty z^\alpha e^{-z} dz = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta \Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha \Gamma(\alpha)}{\beta \Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

$$M\xi^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 p_\xi(x) dx = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty x^{\alpha+1} e^{-\beta x} dx = \begin{bmatrix} z = \beta x, \; x = \frac{z}{\beta} \\ dx = \frac{dz}{\beta} \end{bmatrix} = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty \frac{z^{\alpha+1}}{\beta^{\alpha+1}} e^{-z} \frac{dz}{\beta} =$$

$$= \frac{1}{\beta^2 \Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty z^{\alpha+1} e^{-z} dz = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\beta^2 \Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)}{\beta^2 \Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}.$$

Тогда дисперсия $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2}$.

Таким образом, для гамма распределения $M\xi = \frac{\alpha}{\beta}$ и $D\xi = \frac{\alpha}{\beta^2}$.

6. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины ξ - числа таких бросаний пяти игральных кубиков, в каждом из которых на двух кубиках выпадет по одному очку, если общее число бросаний равно двадцати.

Случайная величина ξ имеет биномиальное распределение, поэтому $M\xi = 20p$, где p вероятность выпадения двух единиц при бросании пяти кубиков. Ее находим по формуле Бернулли $p = P_5(2) = C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 5^3}{1 \cdot 2 \cdot 6^5} = \frac{625}{3888}$. Искомое математическое ожидание равно $M\xi = 20 \cdot \frac{625}{3888} \approx 3$.

7. Случайная величина ξ задана плотностью распределения $p_\xi(x) = \begin{cases} ax, \; x \in (0;2) \\ 0, \; x \notin (0;2) \end{cases}$.

Найти коэффициент a, математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi$, а также вероятность того, что абсолютная величина отклонения случайной величины ξ от ее математического ожидания $M\xi$ будет не более 0,5.

Коэффициент a найдем из условия, что $\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)dx = 1.$ Имеем

$$a\int_0^2 xdx = a\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2a = 1, \text{ откуда } a = \frac{1}{2}.$$

Найдем теперь $M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp_\xi(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{6}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_\xi(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^3 dx = \frac{x^4}{8}\Big|_0^2 = 2, \text{ откуда } D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}.$$

Далее $P(|\xi - M\xi| < 0,5) = P\left(-\frac{1}{2} < \xi - \frac{4}{3} < \frac{1}{2}\right) = P\left(\frac{5}{6} < \xi < \frac{11}{6}\right) = \frac{1}{2}\int_{5/6}^{11/6} xdx =$

$$= \frac{x^2}{4}\Big|_{5/6}^{11/6} = \frac{1}{4}\left(\frac{121}{36} - \frac{25}{36}\right) = \frac{96}{4\cdot 36} = \frac{2}{3}.$$

Задания.

1. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины ξ, заданной законом распределения

ξ	-2	1	2
p	0,4	0,5	0,1

2. Случайная величина ξ принимает значения $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$ с вероятностями p_1, p_2, p_3 соответственно. Найти эти вероятности, если $M\xi = 0,1$, а $M\xi^2 = 0,9$.
3. В партии из 8 деталей содержится три нестандартных. Наугад отобраны две детали. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины ξ числа нестандартных деталей среди двух отобранных.
4. Бросают n игральных кубиков. Найти математическое ожидание и дисперсию суммы числа очков, которые выпадут на всех кубиках.
5. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,9. В каждой партии содержится пять изделий. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины ξ - числа партий, в каждой из которых окажется ровно четыре стандартных изделия, если проверке подлежит 50 партий изделий.
6. Монету бросают до первого появления герба. Найти среднее число бросаний.

7. Случайная величина ξ есть число появлений события **A** в серии из n независимых испытаний. Вероятность появления события **A** в k-ом испытании равна p_k. Найти $M\xi$ и $D\xi$.
8. Из урны, содержащей m белых и n черных шаров, извлекают по одному шару без возвращения до первого появления белого шара. Найти математическое ожидание случайной величины ξ - числа вынутых черных шаров.
9. Из урны, содержащей n белых и m черных шаров, извлекают по одному шару и каждый раз возвращают обратно, пока не появится белый шар. Найти математическое ожидание случайной величины ξ - числа вынутых черных шаров.
10. Случайная величина ξ задана плотностью распределения $p_\xi(x)=\begin{cases}2x,\ x\in(0;1)\\ 0,\ x\notin(0;1)\end{cases}$.

    Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
11. Случайная величина ξ задана плотностью распределения

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1;1)\\ 0,\ x\notin(-1;1)\end{cases}.$$

Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

3.6. Начальные и центральные моменты.

Пусть на вероятностном пространстве $\langle\Omega,F,P\rangle$ задана случайная величина ξ.
Начальным моментом m-го порядка случайной величины ξ называется число

$$\nu_m=M\left(\xi^m\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^m dF_\xi(x),\ m=1,2,...$$

Центральным моментом m-го порядка случайной величины ξ называется число

$$\mu_m=M\left(\xi-M\xi\right)^m=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(x-M\xi\right)^m dF_\xi(x),\ m=1,2,...$$

В частности, $\nu_1=M\xi$ есть математическое ожидание, а $\mu_2=M\left(\xi-M\xi\right)^2=D\xi$ есть дисперсия случайной величины ξ.
Абсолютными начальным и центральным моментами m-го порядка случайной величины ξ называют соответственно величины

$$\nu_m^*=M\left|\xi\right|^m \text{ и } \mu_m^*=M\left|\xi-M\xi\right|^m.$$

Несложно получить выражения, связывающие центральные и начальные моменты различных порядков

$\mu_1=M\left(\xi-M\xi\right)=M\xi-M\xi=0.$

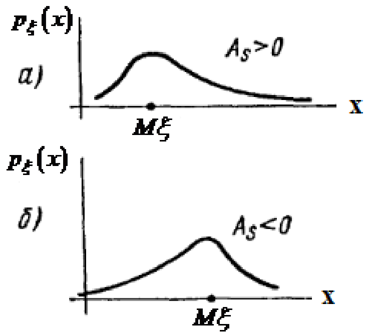
$\mu_2=M\xi^2-\left(M\xi\right)^2=\nu_2-\nu_1^2.$

$\mu_3 = M\left(\xi - M\xi\right)^3 = M\left(\xi^3 - 3\xi^2 M\xi + 3\xi\left(M\xi\right)^2 - \left(M\xi\right)^3\right) = M\xi^3 - 3M\xi^2 \cdot M\xi +$

$+3\left(M\xi\right)^3 - \left(M\xi\right)^3 = \nu_3 - 3\nu_1 \cdot \nu_2^2 + 2\nu_1^3$ и так далее.

Наиболее часто используются моменты $\nu_1 = M\xi$ и $\mu_2 = D\xi$.

Центральный момент третьего порядка μ_3 служит для характеристики асимметрии распределения. Дело в том, что если распределение симметрично относительно математического ожидания, то $\mu_3 = 0$. Действительно, для дискретных распределений $\mu_3 = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(x_k - M\xi\right)^3 p_k$ и в этой сумме каждому положительному слагаемому отвечает равное ему по абсолютной величине отрицательное слагаемое, так что вся сумма равна нулю. В случае абсолютно непрерывного распределения

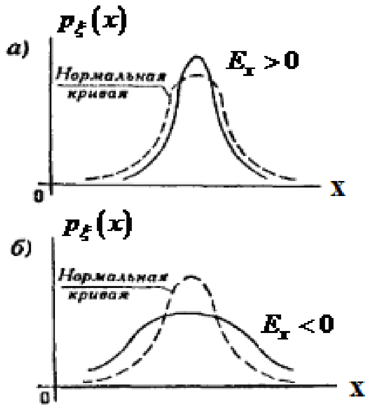


$\mu_3 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(x - M\xi\right)^3 p_\xi\left(x\right)dx = 0,$ как интеграл от нечетной функции в симметричных пределах. Поэтому в качестве характеристики асимметрии выбирают третий центральный момент. Он имеет размерность куба случайной величины, а потому для получения безразмерной характеристики его делят на куб среднеквадратичного отклонения $\sigma = \sqrt{D\xi}$ и получают так называемый коэффициент асимметрии

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Асимметрия положительна, если «длинная часть» кривой расположена справа от математического ожидания (рис. а), асимметрия отрицательна, если «длинная часть» кривой расположена слева от математического ожидания (рис. б).

Четвертый центральный момент служит для характеристики так называемой «крутости» распределения, то есть большего или меньшего подъема кривой по сравнению с кривой нормального распределения. Это свойство описывается при помощи так называемого эксцесса. Эксцессом случайной величины ξ называют величину $E_x = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$ Для нормального распределения величина $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$, а потому для него эксцесс равен нулю. Поэтому, если эксцесс некоторого распределения отличен от нуля, то кривая этого распределения отличается от нормальной кривой: если эксцесс положителен, то кривая имеет более высокую и «острую» вершину, чем нормальная кривая; если же эксцесс отрицателен, то кривая имеет более низкую и «плоскую» вершину, чем нормальная кривая.



3.7. Нормированные случайные величины. Коэффициент корреляции.

Пусть ξ случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $\langle \Omega, F, P \rangle$ и имеющая математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi.$

Определение. Случайная величина ξ называется нормированной, если у нее $M\xi = 0,$ а $D\xi = 1.$

Любую случайную величину ξ с дисперсией $D\xi \neq 0$ можно свести к нормированной при помощи линейного преобразования $\xi_н = \dfrac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}.$

Действительно, найдем $M\xi_н = M\left(\dfrac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{D\xi}}\left(M\xi - M\xi\right) = 0$ и

$$D\xi_н = D\left(\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}\right) = \frac{1}{D\xi}\left(D\xi + D\left(M\xi\right)\right) = \frac{1}{D\xi}\cdot D\xi = 1.$$

Например, нормированная нормально распределенная случайная величина имеет параметры $a = 0$ и $\sigma = 1,$ а значит, ее плотность имеет вид

$$p_\xi\left(x\right) = \varphi\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

а функция распределения есть

$$F_\xi\left(x\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(x\right), \text{ где } \Phi\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Пусть на вероятностном пространстве $\langle \Omega, F, P \rangle$ заданы две случайные величины ξ и $\eta.$

Определение. Коэффициентом корреляции случайных величин ξ и η называют число

$$\rho\left(\xi,\eta\right) = M\left(\xi_н\cdot\eta_н\right) = M\left(\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}\cdot\frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}}\right).$$

Свойства коэффициента корреляции.

1) Если случайные величины ξ и η независимы, то коэффициент корреляции $\rho\left(\xi,\eta\right) = 0.$

Действительно, так как случайные величины ξ и η независимы, то и после нормировки случайные величины $\xi_н$ и $\eta_н$ будут независимыми. Тогда

$$\rho\left(\xi,\eta\right) = M\left(\xi_н\cdot\eta_н\right) = M\xi_н\cdot M\eta_н = 0\cdot 0 = 0.$$

2) Коэффициент корреляции по абсолютной величине не превосходит единицы $\left|\rho\left(\xi,\eta\right)\right| \le 1.$

Действительно, рассмотрим

$$0 \le D\left(\xi_н \pm \eta_н\right) = M\left(\xi_н \pm \eta_н\right)^2 - \left(M\left(\xi_н \pm \eta_н\right)\right)^2 = M\left(\xi_н^2 \pm 2\xi_н\cdot\eta_н + \eta_н^2\right) - \left(M\xi_н \pm M\eta_н\right)^2 =$$

$= M\xi_н^2 \pm 2M\left(\xi_н \cdot \eta_н\right) + M\eta_н^2 = D\xi_н \pm 2\rho\left(\xi,\eta\right) + D\eta_н = 2 \pm 2\rho\left(\xi,\eta\right),$ где учтено, что $M\xi_н = 0, D\xi_н = M\xi_н^2 = 1, M\eta_н = 0, D\eta_н = M\eta_н^2 = 1.$

Таким образом, $1 \pm \rho\left(\xi,\eta\right) \geq 0,$ откуда следует, что $\left|\rho\left(\xi,\eta\right)\right| \leq 1.$

3) Если ξ и η зависят линейно $\eta = a\xi + b, a \neq 0,$ то коэффициент корреляции максимален по модулю $\left|\rho\left(\xi,\eta\right)\right| = 1.$

Действительно, найдем $M\eta = aM\xi + b$ и $D\eta = a^2 D\xi.$ Тогда

$$\eta_н = \frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}} = \frac{a\xi + b - aM\xi - b}{\sqrt{a^2 D\xi}} = \frac{a\left(\xi - M\xi\right)}{|a|\sqrt{D\xi}} = \frac{a}{|a|}\xi_н \quad \text{и}$$

$$\rho\left(\xi,\eta\right) = M\left(\xi_н \cdot \eta_н\right) = M\left(\frac{a}{|a|}\xi_н^2\right) = \frac{a}{|a|}M\xi_н^2 = \frac{a}{|a|}D\xi_н = \frac{a}{|a|},$$

но тогда $\left|\rho\left(\xi,\eta\right)\right| = \dfrac{|a|}{|a|} = 1.$

Определение. Случайные величины ξ и η называются коррелированными, если их коэффициент корреляции $\rho\left(\xi,\eta\right) \neq 0.$

Коэффициент корреляции есть некоторая числовая характеристика степени зависимости между случайными величинами ξ и η. Как мы уже знаем, если ξ и η независимы, то коэффициент корреляции равен нулю, а значит эти случайные величины не коррелированны. Обратное, вообще говоря, не верно – из некоррелированности случайных величин их независимость не следует, так как условие независимости случайных величин более жесткое, чем условие некоррелированности. Однако для нормально распределенных случайных величин из их некоррелированности следует их независимость. С другой стороны из коррелированности двух случайных величин ξ и η следует их зависимость, так как, предположив, что они независимы мы получили бы, что $\rho\left(\xi,\eta\right) = 0,$ а это противоречит коррелированности случайных величин ξ и η.

Вообще говоря, коэффициент корреляции характеризует степень линейной зависимости между случайными величинами – он как раз наибольший при линейной зависимости.

3.8. Линейная регрессия. Прямые линии среднеквадратичной регрессии.

Пусть две случайные величины ξ и η коррелированны, то есть $\rho\left(\xi,\eta\right) \neq 0.$ Это позволяет нам предположить, что между ними имеется определенная зависимость. Вид этой зависимости во многих случаях нам не известен, однако можно попытаться найти приближенное значение этой зависимости $\eta \approx g\left(\xi\right).$ Функцию $g\left(\xi\right)$ называют функцией регрессии η на ξ.

Рассмотрим подробнее случай линейной регрессии $\eta \approx g\left(\xi\right) = \alpha\xi + \beta,$

где α и β неизвестные коэффициенты. Для их определения воспользуемся методом наименьших квадратов. Будем искать их из условия минимума математического ожидания $M\left(\eta-g\left(\xi\right)\right)^2=M\left(\eta-\left(\alpha\xi+\beta\right)\right)^2$. Найденную из этого условия функцию $g\left(\xi\right)$ называют среднеквадратичной регрессией η на ξ.

Рассмотрим функцию

$$F\left(\alpha,\beta\right)=M\left(\eta-\alpha\xi-\beta\right)^2=M\left(\eta-M\eta-\alpha\left(\xi-M\xi\right)+M\eta-\alpha M\xi-\beta\right)^2=$$

$$=M\Big(\left(\eta-M\eta\right)^2+\alpha^2\left(\xi-M\xi\right)^2+\left(M\eta-\alpha M\xi-\beta\right)^2-2\alpha\left(\eta-M\eta\right)\left(\xi-M\xi\right)-$$

$$-2\alpha\left(\xi-M\xi\right)\left(M\eta-\alpha M\xi-\beta\right)+2\alpha\left(\eta-M\eta\right)\left(M\eta-\alpha M\xi-\beta\right)\ \Big)=$$

$$=M\left(\eta-M\eta\right)^2+\alpha^2M\left(\xi-M\xi\right)^2+\left(M\eta-\alpha M\xi-\beta\right)^2-2\alpha M\left(\left(\eta-M\eta\right)\left(\xi-M\xi\right)\right)-$$

$$-2\alpha M\left(\xi-M\xi\right)\left(M\eta-\alpha M\xi-\beta\right)+2\alpha M\left(\eta-M\eta\right)\left(M\eta-\alpha M\xi-\beta\right).$$

Учтем, что $M\left(\xi-M\xi\right)=M\xi-M\xi=0, M\left(\eta-M\eta\right)=M\eta-M\eta=0, \mathrm{M}\left(\xi-M\xi\right)^2=D\xi,$

$$M\left(\eta-M\eta\right)^2=D\eta, M\left(\left(\eta-M\eta\right)\left(\xi-M\xi\right)\right)=M\left(\frac{\eta-M\eta}{\sqrt{D\eta}}\frac{\xi-M\xi}{\sqrt{D\xi}}\right)\sqrt{D\eta}\sqrt{D\xi}=$$

$$=\rho\left(\xi,\eta\right)\sqrt{D\eta}\sqrt{D\xi}.$$

Тогда $F\left(\alpha,\beta\right)=D\eta+\alpha^2D\xi+\left(M\eta-\alpha M\xi-\beta\right)^2-2\alpha\rho\left(\xi,\eta\right)\sqrt{D\eta}\sqrt{D\xi}.$

Для нахождения минимума вычислим частные производные

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial\alpha}=2\alpha D\xi+2\left(M\eta-\alpha M\xi-\beta\right)\left(-M\xi\right)-2\rho\left(\xi,\eta\right)\sqrt{D\eta}\sqrt{D\xi}=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial\beta}=2\left(M\eta-\alpha M\xi-\beta\right)\left(-1\right)=0\end{cases},$$

откуда $\begin{cases}M\eta-\alpha M\xi-\beta=0\\ 2\alpha D\xi-2\rho\left(\xi,\eta\right)\sqrt{D\eta}\sqrt{D\xi}=0\end{cases}$ и $\begin{cases}\alpha=\rho\left(\xi,\eta\right)\dfrac{\sqrt{D\eta}}{\sqrt{D\xi}}\\ \beta=M\eta-\rho\left(\xi,\eta\right)\dfrac{\sqrt{D\eta}}{\sqrt{D\xi}}M\xi\end{cases}.$

Достаточные условия можно не проверять, так как функция $F\left(\alpha,\beta\right)$ не отрицательна, квадратичная и может иметь только минимум. Таким образом

$$\eta=\rho\left(\xi,\eta\right)\frac{\sqrt{D\eta}}{\sqrt{D\xi}}\cdot\xi+M\eta-\rho\left(\xi,\eta\right)\frac{\sqrt{D\eta}}{\sqrt{D\xi}}\cdot M\xi=\rho\left(\xi,\eta\right)\frac{\sqrt{D\eta}}{\sqrt{D\xi}}\left(\xi-M\xi\right)+M\eta.$$

Коэффициент $\alpha = \rho(\xi,\eta)\frac{\sqrt{D\eta}}{\sqrt{D\xi}}$ называют коэффициентом регрессии η на ξ, а саму полученную прямую $\eta = \rho(\xi,\eta)\frac{\sqrt{D\eta}}{\sqrt{D\xi}}(\xi - M\xi) + M\eta$ прямой линией среднеквадратичной регрессии η на ξ.

Подставим найденные значения коэффициентов α и β в выражение для $F(\alpha,\beta)$

$$F(\alpha,\beta) = D\eta + \rho^2(\xi,\eta)\frac{D\eta}{D\xi}D\xi + \left(M\eta - \rho(\xi,\eta)\frac{\sqrt{D\eta}}{\sqrt{D\xi}}M\xi - M\eta + \rho(\xi,\eta)\frac{\sqrt{D\eta}}{\sqrt{D\xi}}M\xi\right)^2 - \text{и и}$$

$$-2\rho(\xi,\eta)\frac{\sqrt{D\eta}}{\sqrt{D\xi}}\rho(\xi,\eta)\sqrt{D\eta}\sqrt{D\xi} = D\eta + \rho^2(\xi,\eta)D\eta - 2\rho^2(\xi,\eta)D\eta = D\eta\left(1-\rho^2(\xi,\eta)\right).$$

Полученную величину называют остаточной дисперсией случайной величины η относительно случайной величины ξ. Она характеризует величину ошибки, которую мы допускаем при замене η линейной функцией $g(\xi) = \alpha\xi + \beta.$

Если η и ξ действительно связаны линейной зависимостью, то $\rho^2(\xi,\eta) = 1$ и остаточная дисперсия равна нулю.

Совершенно аналогично находится прямая линия среднеквадратичной регрессии ξ на η

$$\xi = \rho(\xi,\eta)\frac{\sqrt{D\xi}}{\sqrt{D\eta}}(\eta - M\eta) + M\xi.$$

Аналогичным образом строятся регрессии более высоких порядков – квадратичная $\eta = \alpha\xi^2 + \beta\xi + \gamma$ и так далее, а также для случая не двух, а большего числа случайных величин, например, $\varsigma = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma.$

Глава 4. Последовательность независимых испытаний.

4.1. Неравенства Чебышева.

Пусть случайная величина $\xi,$ определенная на вероятностном пространстве $\langle \Omega, F, P\rangle,$ принимает только неотрицательные значения $\xi \geq 0$ и имеет математическое ожидание $M\xi.$ Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедливо I неравенство Чебышева

$$P\{\xi \geq \varepsilon\} \leq \frac{M\xi}{\varepsilon}.$$

Для доказательства рассмотрим $M\xi = \int\limits_0^\infty x dF_\xi(x) \geq \int\limits_\varepsilon^\infty x dF_\xi(x) \geq \varepsilon \cdot \int\limits_\varepsilon^\infty dF_\xi(x) = \varepsilon \cdot P\{\xi \geq \varepsilon\},$

откуда $P\{\xi \geq \varepsilon\} \leq \frac{M\xi}{\varepsilon}.$

Это неравенство можно также записать в виде $P\{\xi < \varepsilon\} = 1 - P\{\xi \ge \varepsilon\} \ge 1 - \frac{M\xi}{\varepsilon}.$

Пусть теперь случайная величина ξ имеет не только математическое ожидание $M\xi,$ но и дисперсию $D\xi.$ тогда имеет место II неравенство Чебышева

$$P\{|\xi - M\xi| \ge \varepsilon\} \le \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Действительно, $P\{|\xi - M\xi| \ge \varepsilon\} = P\{(\xi - M\xi)^2 \ge \varepsilon^2\} \le \frac{M(\xi - M\xi)^2}{\varepsilon^2} = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$

Полученное неравенство можно также записать в виде

$$P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} = 1 - P\{|\xi - M\xi| \ge \varepsilon\} \ge 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Неравенства Чебышева используются как при теоретических рассуждениях, так и при оценке вероятностей конкретных событий.

Примеры.

1. Средний расход воды в населенном пункте составляет 50 000 л в день. Оценить вероятность того, что в этом населенном пункте в данный день расход воды не превысит 150 000 л.

Случайная величина ξ есть расход воды в день, по условию $M\xi = 50000.$ Тогда

$$P\{\xi < 150000\} \ge 1 - \frac{50000}{150000} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

2. Правило трех сигма. Оценить вероятность того, что случайная величина ξ отклонится от своего математического ожидания $M\xi$ меньше, чем три среднеквадратичных отклонения $\sigma = \sqrt{D\xi}.$

$$P\{|\xi - M\xi| < 3\sigma\} \ge 1 - \frac{D\xi}{(3\sigma)^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{9\sigma^2} = \frac{8}{9},$$

то есть с 90% вероятностью значения ξ лежат в промежутке $(M\xi - 3\sigma; M\xi + 3\sigma).$

3. Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время Т равна 0,05. При помощи неравенства Чебышева оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом (математическим ожиданием) отказов за время Т окажется: а) меньше двух; б) не меньше двух.

Пусть дискретная случайная величина ξ есть число отказавших элементов за время Т. Она имеет биномиальное распределение и
$M\xi = np = 10 \cdot 0,05 = 0,5;\ D\xi = npq = 10 \cdot 0,05 \cdot 0,95 = 0,475.$

Тогда а) $P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} = \{|\xi - 0,5| < 2\} \ge 1 - \frac{0,475}{4} = 0,88.$

б) $P\{|\xi-0,5|\geq 2\}\leq 1-P\{|\xi-0,5|<2\}=1-0,88=0,12.$

4. Используя неравенство Чебышева, найти вероятность того, что частота появления герба при 100 бросаниях монеты отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более, чем на 0,1.

Пусть $\xi=k$ число появлений герба в данной серии из 100 независимых испытаний. Тогда

$M\xi=np=100\cdot 0,5=50;\ D\xi=npq=100\cdot 0,5\cdot 0,5=25$ и

$$P\left\{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=P\{|k-np|<\varepsilon n\}=P\{|\xi-M\xi|<\varepsilon n\}\geq 1-\frac{D\xi}{(\varepsilon n)^2}=1-\frac{25}{(0,1\cdot 100)^2}=0,75.$$

Задания.

1. Число солнечных дней в году для данной местности является случайной величиной с математическим ожиданием, равным 75 дням. Оценить вероятность того, что в течение года в данной местности будет не более 200 солнечных дней.
2. В осветительную сеть параллельно включено 20 ламп. Вероятность того, что за время Т лампа будет включена, равна 0,8. Пользуясь неравенством Чебышева оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом включенных ламп и средним числом (математическим ожиданием) включенных ламп за время Т окажется: а) меньше трех; б) не меньше трех.
3. Вероятность появления события **А** в каждом испытании равна 0,5. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что число ξ появлений события **А** заключено в пределах от 40 до 60, если будет произведено 100 независимых испытаний.
4. Вероятность появления события **А** в каждом испытании из серии n независимых испытаний равна $p=1/3$. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что частота этого события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более, чем на 0,01, если будет произведено $n=9000$ испытаний.
5. В условиях задачи 4 найти наименьшее число испытаний n так, чтобы с вероятностью не меньшей 0,99, частота события **А** отклонилась по абсолютной величине от его вероятности, не более чем на 0,01, используя неравенство Чебышева.
6. В условиях задачи 4 при помощи неравенства Чебышева найти границу ε абсолютной величины отклонения частоты события **А** от его вероятности, которую можно ожидать с вероятностью, не меньшей 0,99, произведя $n=12100$ испытаний.

4.2. Закон больших чисел.

Математические законы теории вероятности получены абстрагированиям реальных статистических закономерностей, свойственных массовым случайным явлениям. Наличие этих закономерностей связано именно с массовостью явлений, то есть с большим числом выполненных однородных опытов или с большим числом складывающихся случайных воздействий, порождающих в своей совокупности случайную величину, подчиненную вполне определенному закону. Свойство устойчивости массовых случайных явлений известно человечеству еще с глубокой древности. В какой бы области оно не проявлялось, суть его сводится к следующему: конкретные особенности каждого отдельного случайного явления почти не сказываются на среднем результате массы таких явлений. Случайные отклонения от среднего, неизбежные в каждом отдельном явлении, в массе взаимно погашаются, нивелируются, выравниваются. Именно эта устойчивость средних и представляет собой физическое содержание «закона больших чисел», понимаемого в широком смысле слова: при очень большом числе случайных явлений средний их результат практически перестает быть случайным и может быть предсказан с большой степенью определенности.

В узком смысле слова под «законом больших чисел» в теории вероятности понимается ряд математических теорем, в каждой из которых при тех или иных условиях устанавливается факт приближения средних характеристик большого числа опытов к некоторым определенным постоянным.

Закон больших чисел играет большую роль в практических приложениях вероятности. Свойство случайных величин при определенных условиях вести себя практически как не случайные позволяет уверенно оперировать с этими величинами, предсказывать результаты массовых случайных явлений почти с полной определенностью.

Определение. Пусть на вероятностном пространстве $\langle \Omega, F, P \rangle$ заданы последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ и случайная величина ξ. Будем говорить, что последовательность $\{\xi_n\}$ сходится по вероятности к случайной величине ξ, если для любого $\varepsilon > 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} = 0$ или, что то-же самое $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\xi_n - \xi| \le \varepsilon\} = 1$.

Сходимость по вероятности будем обозначать так $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$.

Начнем с самого простого варианта закона больших чисел. Пусть проводится серия независимых испытаний, в каждом из которых некоторое событие **A** может произойти с вероятностью p или не произойти с вероятностью $q = 1 - p$. Рассмотрим случайную величину ξ - сколько раз произошло событие **A** в серии из n испытаний. Как мы знаем, она имеет биномиальное распределение с $M\xi = np$ и $D\xi = npq$.

Теорема Бернулли. Для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| \ge \varepsilon\right\} = 0,$$

то есть частота $\frac{k}{n}$ появления события **A** сходится по вероятности к вероятности p появления этого события в одном испытании $\frac{k}{n} \xrightarrow{P} p$.

Доказательство. Воспользуемся II неравенством Чебышева

$$P\left\{\left|\frac{k}{n}-p\right|\ge\varepsilon\right\}=P\left\{|k-np|\ge\varepsilon n\right\}=P\left\{|\xi-M\xi|\ge\varepsilon n\right\}\le\frac{D\xi}{(\varepsilon n)^2}=\frac{npq}{\varepsilon^2 n^2}=\frac{pq}{n\varepsilon^2}\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Теорема Бернулли подтверждает, что введенное нами определение вероятности соответствует интуитивному пониманию вероятности как предела частоты появления события.

Запишем утверждение теоремы Бернулли немного в другой форме, более традиционной для формулировки закона больших чисел. Для этого представим случайную величину ξ в виде суммы n случайных величин $\xi=\xi_1+\xi_2+...+\xi_n$, где ξ_k есть результат k-го испытания:

ξ_k	1	0
p_k	p	q

Тогда, если $\xi=k$, то $\frac{k}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ есть среднее арифметическое значение суммы n случайных величин. Далее $p=\frac{1}{n}\cdot np=\frac{1}{n}M\xi=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i$ есть среднее арифметическое значение суммы математических ожиданий этих случайных величин. Таким образом, вместо $\frac{k}{n}\xrightarrow{P}p$ мы можем записать $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\xrightarrow{P}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i.$

Обобщением теоремы Бернулли, где все ξ_i были распределены одинаково (по биномиальному закону) является следующая теорема

Теорема Чебышева. Если $\{\xi_n\}$ последовательность независимых случайных величин, имеющих математические ожидания $M\xi_n$ и дисперсии $D\xi_n$, ограниченные в совокупности: $D\xi_n\le C$ для любого n, то для любого $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i\right|\ge\varepsilon\right\}=0, \text{ то есть } \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\xrightarrow{P}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i \text{ при } n\to\infty.$$

Доказательство. Рассмотрим случайную величину $\xi=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$. Она имеет математическое ожидание $M\xi=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i$ и дисперсию $D\xi=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D\xi_i\le\frac{1}{n^2}\cdot nC=\frac{C}{n}$. Согласно II неравенству Чебышева

$$P\left\{|\xi-M\xi|\ge\varepsilon\right\}\le\frac{D\xi}{\varepsilon^2}\le\frac{C}{n\varepsilon^2}\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Если случайные величины ξ_n независимы, одинаково распределены $M\xi_n=a$, то можно отказаться от требования ограниченности в совокупности дисперсий и доказать следующую теорему.

Теорема Хинчина. Для любого $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - a\right| \geq \varepsilon\right\} = 0, \text{ то есть } \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \xrightarrow{P} a.$$

Доказательство этой теоремы требует получения достаточно громоздких дополнительных утверждений, и мы его проводить не будем.

Теорема Хинчина дает обоснование правилу «среднего арифметического», постоянно используемого в теории измерений. Предположим, что проводятся измерения некоторой физической величины a. Пусть $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ результаты n измерений. В качестве приближенного значения a берут среднее арифметическое из результатов измерений $a \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$. Если измерения лишены систематической ошибки, то есть $M\xi_1 = M\xi_2 = ... = M\xi_n = a,$ то согласно закону больших чисел при достаточно большом n мы получим значение, близкое к искомой величине a с вероятностью, сколь угодно близкой к единице. При этом, очевидно, нельзя получить результат лучше, чем нам дает точность измерительного прибора.

4.3. Локальная теорема Муавра – Лапласа.

При рассмотрении закона больших чисел было отмечено, что его смысл в том, что при определенных условиях случайные величины сходятся по вероятности к определенным постоянным. При этом ни в одной из формулировок закона больших чисел не фигурируют конкретные законы распределения случайных величин. Однако существует ряд теорем, называемых предельными теоремами, речь в которых идет о предельном законе распределения сумм случайных величин. Оказывается, что при определенных условиях, которые по существу сводятся к требованию, чтобы влияние на сумму отдельных слагаемых было равномерно малым, предельным законом распределения является нормальный закон распределения.

Мы начнем с более простого, но достаточно распространенного случая последовательности независимых испытаний.

Пусть проводится серия независимых испытаний, в каждом из которых некоторое событие **A** может произойти с вероятностью p или не произойти с вероятностью $q = 1 - p$. Пусть случайная величина ξ - есть число наступивших событий **A** в серии из n испытаний. Она имеет биномиальное распределение $P\{\xi = k\} = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Эту формулу Бернулли удобно использовать при небольших значениях n и k. Поэтому поставим задачу получить формулы для вычисления таких вероятностей при большом числе испытаний.

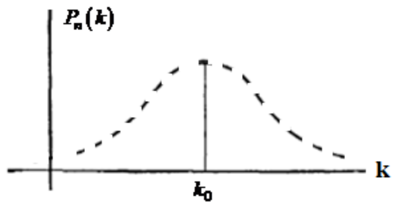
Для этого рассмотрим сначала, как ведут себя вероятности $P_n(k)$ в зависимости от k при фиксированном n:

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)}=\frac{C_n^{k+1}p^{k+1}q^{n-k-1}}{C_n^k p^k q^{n-k}}=\frac{n!\cdot k!\cdot(n-k)!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!\cdot n!}\cdot\frac{p}{q}=\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{p}{q}.$$

Вероятности $P_n(k)$ возрастают, если $P_n(k+1)>P_n(k)$, то есть $\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)}=\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{p}{q}>1$,

откуда $np-kp>kq+q, k(p+q)<np-q$ и $k<np-q$.

Соответственно вероятности $P_n(k)$ убывают при $k>np-q$.



Таким образом, вероятности $P_n(k)$ с увеличением k сначала возрастают и достигают максимума при некотором k_0, а затем начинают убывать. Если изобразить эту зависимость графически, то она будет похожа на график плотности нормального закона распределения.

Число k_0 называют наивероятнейшим числом испытаний. Оно определяется из двойного неравенства $np-q\le k_0<np+p$.

Пример.

Два стрелка одновременно стреляют по мишени. Вероятность промаха для первого стрелка равна 0,1, а для второго – 0,2. Найти наивероятнейшее число залпов, при которых они оба попадут в мишень, если стрелки произведут 20 залпов.

Вероятность, что оба попадут в мишень при одном залпе $p=0,9\cdot 0.8=0,72$, тогда $q=0,28$ и $20\cdot 0,72-0,28\le k_0<20\cdot 0,72+0,72$, откуда $14,12\le k_0<15,72$ и $k_0=15$.

Задания.

1. Отдел технического контроля проверяет партию из 10 изделий. Вероятность того, что изделие браковано, равна 0,2. Найти наивероятнейшее число бракованных изделий и вероятность этого наивероятнейшего числа бракованных изделий.
2. Сколько надо произвести независимых испытаний с вероятностью появления события в каждом испытании, равной 0,4, чтобы наивероятнейшее число появлений события в этих испытаниях было равно 25?
3. Чему равна вероятность p наступления события в каждом из 49 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 30?
4. Батарея произвела шесть выстрелов по объекту. Вероятность попадания в объект при одном выстреле равна 0,3. Найти: а) наивероятнейшее число попаданий; б) вероятность наивероятнейшего числа попаданий; в) вероятность того, что объект будет разрушен, если для этого достаточно хотя бы двух попаданий.

Полученное поведение вероятностей $P_n(k)$ наводит на мысль, что при достаточно больших n биномиальное распределение можно приблизить нормальным. Так мы приходим к предельным теоремам Муавра – Лапласа.

Локальная теорема Муавра – Лапласа. Если вероятность наступления некоторого события **А** в n независимых испытаниях постоянна и равна $p\left(0<p<1\right),$ то вероятность $P_n\left(k\right)$ того, что в этих n испытаниях событие **А** наступит ровно k раз, удовлетворяет при $n\to\infty$ соотношению

$$\sqrt{npq}\cdot P_n\left(k\right)\to\varphi\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

равномерно для всех $k,$ для которых $x=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$ ограничены в совокупности.

Доказательство. Рассмотрим $\sqrt{npq}P_n\left(k\right)=\sqrt{npq}C_n^k p^k q^{n-k}=\sqrt{npq}\dfrac{n!}{k!\cdot\left(n-k\right)!}p^k q^{n-k}$ и воспользуемся формулой Стирлинга для приближенного вычисления факториала $n!\approx\sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{-n}.$ Тогда

$$\sqrt{npq}P_n\left(k\right)=\sqrt{npq}\frac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{-n}\cdot p^k q^{n-k}}{\sqrt{2\pi k}\cdot k^k\cdot e^{-k}\sqrt{2\pi\left(n-k\right)}\cdot\left(n-k\right)^{n-k}e^{-\left(n-k\right)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{n^2pq}{2\pi k\left(n-k\right)}}\left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}\left(\frac{np}{k}\right)^k.$$

Преобразуем сначала выражение под знаком корня, учитывая, что по теореме Бернулли для достаточно больших n мы можем принять $\dfrac{k}{n}\approx p$ и $1-\dfrac{k}{n}\approx 1-p=q$

$$\frac{n^2pq}{2\pi k\left(n-k\right)}=\frac{pq}{2\pi\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}\approx\frac{pq}{2\pi p\left(1-p\right)}=\frac{1}{2\pi}.$$

Тогда $\sqrt{npq}P_n\left(k\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\dfrac{np}{k}\right)^k\left(\dfrac{nq}{n-k}\right)^{n-k}.$

Так как $x=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$, то $k=np+x\sqrt{npq}$ и $n-k=n-np-x\sqrt{npq}=nq-x\sqrt{npq}.$ Рассмотрим

$$H_n=\left(\frac{np}{k}\right)^k\left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}=\left(\frac{np}{np+x\sqrt{npq}}\right)^{np+x\sqrt{npq}}\left(\frac{nq}{nq-x\sqrt{npq}}\right)^{nq-x\sqrt{npq}}=$$

$$=\left(1+x\frac{\sqrt{npq}}{np}\right)^{-np-x\sqrt{npq}}\left(1-x\frac{\sqrt{npq}}{nq}\right)^{-nq+x\sqrt{npq}}=\left(1+x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)^{-np-x\sqrt{npq}}\left(1-x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)^{-nq+x\sqrt{npq}}.$$

Прологарифмируем полученное выражение

$$\ln H_n=\left(-np-x\sqrt{npq}\right)\ln\left(1+x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)+\left(-nq+x\sqrt{npq}\right)\ln\left(1-x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right).$$

Так как при условиях теоремы величины $\sqrt{\frac{q}{np}}$ и $\sqrt{\frac{p}{nq}}$ малы, то воспользуемся разложением в степенной ряд $\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\ldots$. Тогда

$$\ln H_n=\left(-np-x\sqrt{npq}\right)\left(x\sqrt{\frac{q}{np}}-\frac{1}{2}x^2\frac{q}{np}+\ldots\right)+\left(-nq+x\sqrt{npq}\right)\left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}}-\frac{1}{2}x^2\frac{p}{nq}+\ldots\right)=$$

$$=-x\sqrt{\frac{q}{np}}\cdot np+\frac{1}{2}x^2\frac{q}{np}\cdot np-x^2\sqrt{npq}\sqrt{\frac{q}{np}}+\ldots+x\sqrt{\frac{p}{nq}}\cdot nq+\frac{1}{2}x^2\frac{p}{nq}\cdot nq-x^2\sqrt{npq}\sqrt{\frac{p}{nq}}-\ldots=$$

$$=-x\sqrt{npq}+\frac{1}{2}x^2q-x^2q+x\sqrt{npq}+\frac{1}{2}x^2p-x^2p+\ldots=-\frac{1}{2}x^2\left(p+q\right)+\ldots=-\frac{1}{2}x^2+\ldots .$$

Отсюда при $n\to\infty$ получаем, что $H_n\to e^{-\frac{1}{2}x^2}$ и $\sqrt{npq}\cdot P_n(k)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\varphi(x).$

Доказанная теорема дает приближенную формулу для вычисления вероятности

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),\ \text{где}\ x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

Для биномиально распределенной случайной величины $\xi=k$ случайная величина $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{\xi-M\xi}{\sqrt{D\xi}}$ есть соответствующая нормированная случайная величина. Таким образом, биномиальное распределение апроксимируется нормальным относительно нормированной случайной величины.

Примеры.

1. Найти вероятность того, что событие **А** наступит ровно 70 раз в 243 независимых испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,25.

По условию, $n=243, k=70,\ p=0,25, q=0,75.$ Найдем $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{70-243\cdot 0,25}{\sqrt{243\cdot 0,25\cdot 0,75}}=1,37.$

По таблице 1 находим $\varphi(1,37)=0,1561$. Тогда

$$P_{243}(70)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{243\cdot 0,25\cdot 0,75}}0,1561=0,0231.$$

2. На факультете учится 730 студентов. Вероятность рождения студента в любой день года равна $1/365$. Найти наиболее вероятное число студентов, родившихся 1 января, и вероятность того, что найдутся три студента, родившихся 1 января.

По условию $n=730,\ p=1/365,\ q=364/365,$ следовательно $np=2$ и

$2-364/365\le k_0<2+1/365,$ то есть $k_0=2.$

Найдем $x = \dfrac{k-np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{3-2}{\sqrt{730 \cdot 1/365 \cdot 364/365}} = 0,71.$ По таблице 1 находим $\varphi(0,71) = 0,31.$

Тогда $P_{730}(3) = \dfrac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) = 0,71 \cdot 0,31 = 0,22.$

Задания.

5. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.
6. В камере хранения ручного багажа 80% всей клади составляют чемоданы, которые вперемешку с другими вещами хранятся на стеллажах. Через окно выдачи были получены все вещи с одного из стеллажей в количестве 50 мест. Найти вероятность того, что среди выданных вещей было 38 чемоданов.

4.4. Интегральная теорема Муавра – Лапласа.

Локальная теорема Муавра – Лапласа используется при вычислении вероятностей $P_n(k)$. Если же надо вычислить вероятность $P_n(k_1 \le k \le k_2)$, то используется интегральная теорема Муавра – Лапласа.

Интегральная теорема Муавра – Лапласа. Если вероятность наступления некоторого события **А** в n независимых испытаниях постоянна и равна $p\ (0 < p < 1)$, то вероятность того, что в этих n испытаниях событие **А** наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, удовлетворяет при $n \to \infty$ соотношению

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(b) - \Phi(a),$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,\ a = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}},\ b = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}},$$

равномерно относительно a и b $(-\infty \le a < b \le +\infty)$.

Доказательство. Рассмотрим

$P_n(k_1 \le k \le k_2) = P_n\left(\dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \le \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}} \le \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} \right) = P\{a \le x \le b\}$, где $x = \dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}.$

С другой стороны $P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum\limits_{i=k_1}^{k_2} P_n(i) \approx \sum\limits_{i=k_1}^{k_2} \dfrac{\varphi(x_i)}{\sqrt{npq}}$ по локальной теореме Муавра – Лапласа, где $x_i = \dfrac{i-np}{\sqrt{npq}}.$ Учитывая, что $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \dfrac{i+1-np}{\sqrt{npq}} - \dfrac{i-np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{1}{\sqrt{npq}}$, то $P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \sum\limits_{i=k_1}^{k_2} \varphi(x_i) \Delta x_i$ есть интегральная сумма для функции $\varphi(x)$ на промежутке

$[a;b]$. Так как функция $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ интегрируема, то предел ее интегральных сумм существует и равен интегралу

$$\int_a^b \varphi(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^a e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\Phi(b)-\Phi(a).$$

Таким образом, мы доказали, что $P_n\left(k_1\le k\le k_2\right)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\Phi(b)-\Phi(a)$,

то есть распределение случайной величины $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{\xi-M\xi}{\sqrt{D\xi}}$ стремится к нормированному нормальному распределению $(a=0,\sigma=1)$.

Рассмотрим одно приложение полученной теоремы, часто встречающееся в задачах. Пусть проводится серия из n независимых испытаний, в каждом из которых некоторое событие **A** может произойти с вероятностью p или не произойти с вероятностью $q=1-p$. Пусть в данной серии испытаний событие **A** произошло k раз. Найдем вероятность того, что относительная частота $\frac{k}{n}$ появление события **A** отклонится от вероятности p наступления этого события по абсолютной величине не более, чем на $\varepsilon>0$ (по теореме Бернулли $\frac{k}{n}\xrightarrow{P}p$).

$$P\left\{\left|\frac{k}{n}-p\right|\le\varepsilon\right\}=P\left\{-\varepsilon\le\frac{k}{n}-p\le\varepsilon\right\}=P\left\{-\varepsilon n\le k-np\le\varepsilon n\right\}=P\left\{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\le\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\le\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\}=$$

$$=\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)-\Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Примеры.

1. Вероятность появления события **A** в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна 0,8. Найти вероятность того, что событие **A** появится не менее 75 раз.

По условию $n=100,\ p=0{,}8,\ q=0{,}2.$ Найдем

$$a=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{75-80}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=-\frac{5}{4}=-1{,}25;\quad b=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{100-80}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=\frac{20}{4}=5.$$

Используя таблицу 2 для $\Phi(x)$, найдем

$$P(75\le k\le 100)=\Phi(5)-\Phi(-1{,}25)=0{,}5+0{,}3944=0{,}8944.$$

2. Вероятность появления события **A** в каждом из независимых испытаний постоянна и равна 0,7. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью 0,95 можно было ожидать, что событие появится не менее 100 раз?

По условию $p=0,7; q=0,3$ и $P_n\left(100\le k\le n\right)=\Phi\left(\dfrac{n-0,7n}{\sqrt{n\cdot 0,7\cdot 0,3}}\right)-\Phi\left(\dfrac{100-0,7n}{\sqrt{n\cdot 0,7\cdot 0,3}}\right)=0,95.$

То есть $\Phi\left(0,655\sqrt{n}\right)-\Phi\left(\dfrac{100-0,7n}{0,458\sqrt{n}}\right)=0,95.$

Так как число испытаний $n>100,$ то $0,655\sqrt{n}>6,55$ и поскольку $\Phi(x)\simeq 0,5$ при $x\ge 5,$ то можно положить $\Phi\left(0,655\sqrt{n}\right)=0,5.$ Тогда $\Phi\left(\dfrac{100-0,7n}{0,458\sqrt{n}}\right)=-0,45.$ По таблице 2 находим $\Phi\left(1,65\right)=0,45$. Учитывая, что функция Лапласа нечетная, получим $\dfrac{100-0,7n}{0,458\sqrt{n}}=-1,65,$ откуда получаем квадратное уравнение относительно $\sqrt{n}$

$$0,7n-0,756\sqrt{n}-100=0.$$

Решив это уравнение, получим $\sqrt{n}\simeq 12,5.$ Следовательно искомое число испытаний $n=157.$

3. Произведено $n=500$ бросаний игрального кубика. Найти вероятность того, что относительная частота выпадения шести очков отклонится от вероятности этого события по абсолютной величине не более чем на 0,01.

По условию $n=500,$ $p={}^1\!/_6,$ $q={}^5\!/_6,$ откуда $\sqrt{\dfrac{n}{pq}}=\sqrt{\dfrac{500}{{}^1\!/_6\cdot{}^5\!/_6}}=60.$

Воспользуемся формулой $P\left(\left|\dfrac{k}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}}\right).$ Имеем

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-\frac{1}{6}\right|\le 0,01\right)=2\Phi\left(0,01\cdot 60\right)=2\Phi\left(0,6\right)=2\cdot 0,2257=0,4514.$$

4. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,5. Найти число испытаний n, при котором с вероятностью 0,7698 можно ожидать, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02.

По условию $p=q=0,5,$ $\varepsilon=0,02$ и $P\left\{\left|\dfrac{k}{n}-0,5\right|\le 0,02\right\}=0,7698.$ Тогда

$2\Phi\left(0,02\sqrt{\dfrac{n}{0,5\cdot 0,5}}\right)=0,7698$ или $\Phi\left(0,04\sqrt{n}\right)=0,3849.$ По таблице 2 найдем, что $\Phi\left(1,2\right)=0,3849.$ Следовательно, $0,04\sqrt{n}=1,2;$ $\sqrt{n}=30$ и $n=900.$

5. Вероятность появления события в каждом из 400 независимых испытаний равна 0,8. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,99 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности не превысила ε.

По условию $n = 400,\ p = 0,8,\ q = 0,2$. Следовательно $2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\dfrac{400}{0,8\cdot 0,2}}\right) = 0,99$ или

$\Phi(50\varepsilon) = 0,495.$ По таблице 2 находим $\Phi(2,57) = 0,495$, откуда $50\varepsilon = 2,57$ и $\varepsilon = 0,05.$

6. Отдел технического контроля проверяет стандартность 900 изделий. Вероятность того, что изделие стандартно, равно 0,9. Найти с вероятностью 0,95 границы, в которых будет заключено число k стандартных изделий среди проверенных.

По условию $n = 900,\ p = 0,9,\ q = 0,1.$ Следовательно $2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\dfrac{900}{0,9\cdot 0,1}}\right) = 0,95$ или

$\Phi(100\varepsilon) = 0,475$. По таблице 2 находим $\Phi(1,96) = 0,475$. Тогда $100\varepsilon = 1,96$ и $\varepsilon \simeq 0,02.$

Таким образом с вероятностью 0,95 выполняется неравенство $\left|\dfrac{k}{900} - 0,9\right| \le 0,02$, откуда

находим $0,88 \le \dfrac{k}{900} \le 0,92$ и $792 \le k \le 828.$

Задания.

1. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится не менее 1470 и не более 1500 раз.
2. Вероятность появления события в каждом из 60 независимых испытаний равна 0,6. Какова вероятность, что это событие появится в большинстве испытаний?
3. Линия связи, имеющая 120 каналов связи, связывает пункт А с пунктом В, где имеется 1000 абонентов, каждый из которых пользуется телефоном в среднем 6 минут в час. Найти вероятность безотказного обслуживания абонентов.
4. Вероятность появления положительного результата в каждом из n опытов равна 0,9. Сколько нужно произвести опытов, чтобы с вероятностью 0,98 можно было ожидать, что не менее 150 опытов дадут положительный результат?
5. Вероятность появления события в каждом из 625 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02.
6. Сколько раз нужно бросить игральный кубик, чтобы вероятность неравенства $\left|\dfrac{k}{n} - \dfrac{1}{6}\right| \le 0,01$ была не меньше чем вероятность противоположного неравенства, где k число появлений одного очка при n бросаниях игрального кубика?
7. В урне содержатся белые и черные шары в отношении 4:1. После извлечения шара регистрируется его цвет и шар возвращается в урну. Чему равно наименьшее число извлечений n, при котором с вероятностью 0,95 можно ожидать, что абсолютная

величина отклонения относительной частоты появления белого шара от его вероятности будет не более чем 0,01?

8. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,77 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности не превысила ε.
9. Игральный кубик бросают 80 раз. Найти с вероятностью 0,99 границы, в которых будет заключено число k выпадений шестерки.
10. В страховом обществе застраховано 10 000 лиц одного возраста и одной социальной группы. Вероятность наступления страхового случая в течение года для каждого лица равна 0,008. Каждый застрахованный вносит в начале года 10 гривен страховки и, в случае наступления страхового случая, получает от общества 1000 гривен. Найти вероятность того, что в течение года: а) страховое общество потерпит убыток; б) общество получит прибыль не меньшую 30 000 гривен.

4.5. Теорема Пуассона.

Теоремы Муавра – Лапласа дают хороший результат, если с ростом n дисперсия npq также растет. Однако, если p очень мало или очень близко к единице (то есть q очень мало), теоремы Муавра – Лапласа не дают хороших результатов. Оказывается, что в таких случаях биномиальное распределение хорошо приближается распределением Пуассона.

Теорема Пуассона. Если $n\to\infty$ и $p\to 0$ так, что $np\to\lambda$, то для любого фиксированного

$$k:\ P_n(k)\to\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Доказательство. Рассмотрим

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{k!}p^k q^{n-k}=$$

$$=\frac{(np)^k}{k!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)(1-p)^{n-k}.$$

При $n\to\infty: np\to\lambda; 1-\frac{i}{n}\to 1, i=1,2,\ldots,k-1.$ Далее

$$(1-p)^{n-k}=\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}=\left(\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right)^{-\frac{\lambda}{n}(n-k)}=\left(\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right)^{-\lambda\left(1-\frac{k}{n}\right)}\to e^{-\lambda}.$$

Таким образом, $P_n(k)\to\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$

Теорему Пуассона еще называют законом редких событий, так как она используется при малых p.

Примеры.

1. Завод отправил заказчику 1000 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятности того, что при перевозке будет повреждено: а) одно изделие; б) не более двух изделий; в) хотя бы одно изделие.

Число $n = 1000$ велико, вероятность $p = 0,002$ мала и $\lambda = np = 1000 \cdot 0,002 = 2$, так что применима теорема Пуассона.

а) $P_{1000}(1) = \frac{2}{1!} e^{-\lambda} = 2 \cdot 0,13534 = 0,27068.$

б) $P_{1000}(k \le 2) = P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2) = \dfrac{1}{0!} e^{-2} + \dfrac{2}{1!} e^{-2} + \dfrac{4}{2!} e^{-2} = 5 \cdot e^{-2} = 0,6767.$

в) $P_{1000}(k \ge 1) = 1 - P_{1000}(0) = 1 - \dfrac{1}{0!} e^{-2} = 1 - 0,13534 = 0,86466.$

2. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету $p = 0,01.$ Сколько нужно купить билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному из них с вероятностью, не меньшей, чем 0,95?

Вероятность выигрыша мала, а число билетов, которое нужно купить, очевидно, велико, поэтому воспользуемся теоремой Пуассона $1 - P_n(0) = 1 - e^{-\lambda} \ge 0,95$, откуда $e^{-\lambda} \le 0,05$ и $\lambda \ge 3.$ Таким образом, $\lambda = np = n \cdot 0,01 \ge 3,$ откуда $n \ge 300.$

Задания.

1. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятности того, что магазин получит разбитых бутылок: а) ровно две; б) менее двух; в) более двух.
2. При приемочном контроле из партии в 1000 штук изделий производится безвозвратная выборка 50 штук. Найти вероятность того, что в выборке не окажется дефектных изделий, если во всей партии содержится 4 дефектных изделия.
3. Если в среднем левши составляют 1%, каковы шансы на то, что среди 200 человек окажется ровно трое левшей?
4. В некоторой местности в среднем на каждые 100 выращенных арбузов приходится один весом не менее 10 кг. Найти вероятность того, что в партии арбузов из этой местности, содержащей 400 штук, будет: а) ровно три арбуза весом не менее 10 кг каждый; б) не менее двух таких арбузов.

4.6. Характеристические функции.

Пусть на вероятностном пространстве $\langle \Omega, F, P \rangle$ заданы вещественные случайные величины $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$. Тогда мы можем рассмотреть комплекснозначную случайную величину $\xi(\omega) = \xi_1(\omega) + i\xi_2(\omega).$ Если случайные величины $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ имеют математические ожидания $M\xi_1$ и $M\xi_2$, то примем, что $M\xi = M\xi_1 + iM\xi_2.$

Определение. Характеристической функцией вещественной случайной величины ξ называется комплексно значная функция

$$\varphi_\xi(t) = Me^{i\xi t} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF_\xi(x)$$

от действительного аргумента t.

Характеристическая функция существует для любой случайной величины ξ, так как

$$|\varphi_\xi(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF_\xi(x)\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{ixt}\right| dF_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dF_\xi(x) = 1,$$

поскольку $\left|e^{ixt}\right| = |\cos xt + i \sin xt| = \sqrt{\cos^2 xt + \sin^2 xt} = 1.$

Если случайная величина ξ абсолютно непрерывна с плотностью $p_\xi(x)$, то характеристическая функция $\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x) e^{ixt} dx$ есть не что иное, как преобразование Фурье плотности функции распределения.

Свойства характеристических функций.

1) Для любой случайной величины ξ

$\varphi_\xi(0) = 1$ и $|\varphi_\xi(t)| \le 1$ при всех t.

Действительно, $\varphi_\xi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dF_\xi(x) = 1$ и

$$|\varphi_\xi(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF_\xi(x)\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{ixt}\right| dF_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dF_\xi(x) = 1.$$

2) Если $\eta = a\xi + b,\ a \ne 0,$ то $\varphi_\eta(t) = e^{ibt} \cdot \varphi_\xi(at).$

Действительно, $\varphi_\eta(t) = Me^{i\eta t} = Me^{i(a\xi+b)t} = M\left(e^{ia\xi t} \cdot e^{ibt}\right) = e^{ibt} \cdot Me^{ia\xi t} = e^{ibt} \cdot \varphi_\xi(at).$

3) Если $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ независимые случайные величины и $\eta = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n,$ то

$$\varphi_\eta(t) = \varphi_{\xi_1}(t) \cdot \varphi_{\xi_2}(t) \cdot ... \cdot \varphi_{\xi_n}(t).$$

То есть характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых.

Действительно,

$$\varphi_\eta(t) = Me^{i\eta t} = Me^{i(\xi_1+\xi_2+...+\xi_n)t} = M\left(e^{i\xi_1 t} \cdot e^{i\xi_2 t} \cdot ... \cdot e^{i\xi_n t}\right) = Me^{i\xi_1 t} \cdot Me^{i\xi_1 t} \cdot ... \cdot Me^{i\xi_1 t} =$$

$$= \varphi_{\xi_1}(t) \cdot \varphi_{\xi_1}(t) \cdot ... \cdot \varphi_{\xi_1}(t).$$

4) Характеристическая функция является равномерно непрерывной функцией на всей числовой оси, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\left|\varphi_\xi(t+h) - \varphi_\xi(t)\right| < \varepsilon \text{ при } |h| < \delta \text{ и любого } t.$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\left|\varphi_\xi(t+h)-\varphi_\xi(t)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(t+h)} dF_\xi(x) - \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF_\xi(x)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\left(e^{ixh}-1\right) dF_\xi(x)\right| \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{ixt}\right| \cdot \left|e^{ixh}-1\right| dF_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{ixh}-1\right| dF_\xi(x) = \int_{-\infty}^{-A} \left|e^{ixh}-1\right| dF_\xi(x) + \int_{-A}^{A} \left|e^{ixh}-1\right| dF_\xi(x) +$$

$$+\int_{A}^{\infty} \left|e^{ixh}-1\right| dF_\xi(x).$$

В первом и последнем интегралах оценим $\left|e^{ixh}-1\right| \le \left|e^{ixh}\right| + 1 = 2$. Во втором интеграле при $|h| < \delta$ оценим

$$\left|e^{ixh}-1\right| = \left|\cos xh - 1 + i\sin xh\right| = \sqrt{\left(\cos xh - 1\right)^2 + \sin^2 xh} = \sqrt{\cos^2 xh - 2\cos xh + 1 + \sin^2 xh} =$$

$$= \sqrt{2\left(1-\cos xh\right)} = \sqrt{4\sin^2\frac{xh}{2}} = 2\left|\sin\frac{xh}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ в силу непрерывности синуса.}$$

Таким образом $\left|\varphi_\xi(t+h)-\varphi_\xi(t)\right| < 2\int_{-\infty}^{-A} dF_\xi(x) + \frac{\varepsilon}{2} + 2\int_{A}^{\infty} dF_\xi(x).$

Из сходимости несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} dF_\xi(x) = 1$ следует, что по $\varepsilon > 0$ найдется

$A > 0$ такое, что $\int_{-\infty}^{-A} dF_\xi(x) < \frac{\varepsilon}{8}$ и $\int_{A}^{\infty} dF_\xi(x) < \frac{\varepsilon}{8}$. Тогда $\left|\varphi_\xi(t+h)-\varphi_\xi(t)\right| < 2\cdot\frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{2} + 2\cdot\frac{\varepsilon}{8} = \varepsilon.$

5) Если случайная величина ξ имеет абсолютные моменты $M|\xi|^k$ до m-го порядка включительно $\left(k = \overline{1,m}\right)$, то характеристическая функция $\varphi_\xi(t)$ имеет непрерывные производные до m-го порядка включительно и

$$\varphi_\xi^{(k)}(0) = i^k M\xi^k,\ k = \overline{1,m}.$$

Доказательство. Рассмотрим $\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF_\xi(x)$ - это несобственный интеграл, зависящий от параметра t. Его можно дифференцировать по параметру, если сходится равномерно интеграл от производной, а это условие выполняется

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} ixe^{ixt} dF_\xi(x)\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |i|\cdot|x|\cdot\left|e^{ixt}\right| dF_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, dF_\xi(x) = M|\xi|.$$

Таким образом, существует производная $\varphi'_\xi(t) = i\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{ixt}dF_\xi(x)$. Она будет непрерывной в силу равномерной сходимости интеграла и непрерывности подынтегральной функции.

Кроме того $\varphi'_\xi(0) = i\int\limits_{-\infty}^{\infty} xdF_\xi(x) = iM\xi.$

Повторяя эти рассуждения, получим, что при $k = \overline{1,m}$ существуют и непрерывны производные $\varphi_\xi^{(k)}(t) = i^k\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k e^{ixt}dF_\xi(x)$ и $\varphi_\xi^{(k)}(0) = i^k\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k dF_\xi(x) = i^k M\xi^k = i^k\nu_k.$

Из существования производных вытекает возможность разложить характеристическую функцию по формуле Маклорена

$$\varphi_\xi(t) = \varphi_\xi(0) + \frac{\varphi'_\xi(0)}{1!}t + \frac{\varphi''_\xi(0)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{\varphi_\xi^{(m)}(0)}{m!}t^m + o\left(t^m\right) =$$

$$= 1 + \frac{i\nu_1}{1!}t + \frac{i^2\nu_2}{2!}t^2 + \ldots + \frac{i^m\nu_m}{m!}t^m + o\left(t^m\right) = 1 + \sum_{k=1}^{m}\frac{(it)^k}{k!}\nu_k + o\left(t^m\right).$$

Найдем характеристические функции для некоторых распределений.

1) Пусть случайная величина ξ распределена по закону Пуассона

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda > 0, k = 0,1,2,\ldots$$

Тогда $\varphi_\xi(t) = Me^{i\xi t} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda e^{it}\right)^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}.$

2) Пусть случайная величина ξ распределена по нормальному закону с плотностью

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Найдем $\varphi_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}p_\xi(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \left[\begin{matrix} z = \dfrac{x-a}{\sigma} \\ x = \sigma z + a, dx = \sigma dz \end{matrix}\right] =$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it(\sigma z + a)}\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\sigma dz = \frac{e^{iat}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\sigma z}\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \frac{e^{iat}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\cos t\sigma z + i\sin t\sigma z\right)e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

Так как $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin t\sigma z\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}dz = 0,$ как интеграл от нечетной функции в симметричных пределах, то $\varphi_\xi(t) = \frac{e^{iat}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos t\sigma z\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$

Рассмотрим несобственный интеграл $I(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos t\sigma z\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$ Он сходится равномерно по параметру t, так как $\left|I(t)\right|\le\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\cos t\sigma z\right|\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}dz\le\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{2\pi}.$ Далее интеграл от производной подынтегральной функции также сходится равномерно

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(-\sigma z\cdot\sin t\sigma z\right)\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}dz\right|\le\sigma\int\limits_{-\infty}^{\infty}|z|\cdot\left|\sin t\sigma z\right|\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}dz\le\sigma\int\limits_{-\infty}^{\infty}|z|\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$=2\sigma\int\limits_{0}^{\infty}z\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}dz=-2\sigma\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_0^{\infty}=2\sigma.$$

Но тогда несобственный интеграл можно дифференцировать по параметру t

$$I'(t)=-\sigma\int\limits_{-\infty}^{\infty}z\cdot\sin t\sigma z\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\begin{bmatrix}u=\sin t\sigma z & du=t\sigma\cos t\sigma zdz\\ dv=z\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}dz & v=-e^{-\frac{z^2}{2}}\end{bmatrix}=$$

$$=-\sigma\left(-\sin t\sigma z\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}+t\sigma\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos t\sigma z\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}dz\right)=-t\sigma^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos t\sigma z\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}dz=-t\sigma^2 I(t).$$

Таким образом, для нахождения $I(t)$ получено обыкновенное дифференциальное уравнение $I'(t)=-t\sigma^2 I(t).$ Решим его $\dfrac{I'(t)}{I(t)}=-t\sigma^2,\ \ln I(t)=-\dfrac{t^2\sigma^2}{2}+\ln C,\ I(t)=C\cdot e^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}}.$

При $t=0$ получим $C=I(0)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{2\pi}.$ Таким образом $I(t)=\sqrt{2\pi}\cdot e^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$ и характеристическая функция равна $\varphi_\xi(t)=\dfrac{e^{iat}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}\cdot e^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}}=e^{iat-\frac{\sigma^2t^2}{2}}.$

В случае, если случайная величина ξ нормирована: $a=0,\sigma=1$, то характеристическая функция принимает вид $\varphi_\xi(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}.$

3) Пусть случайная величина ξ имеет гамма распределение с плотностью

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x},\ x>0\\ 0,\ x\le 0\end{cases},\ \alpha>0,\ \beta>0.$$

Найдем ее характеристическую функцию

$$\varphi_\xi(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}p_\xi(x)dx=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{\infty}e^{ixt}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-x(\beta-it)}dx=$$

$$=\begin{bmatrix} z=(\beta-it)x \\ x=\dfrac{z}{\beta-it},\, dx=\dfrac{dz}{\beta-it}\end{bmatrix}=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{\infty}\frac{z^{\alpha-1}}{(\beta-it)^{\alpha-1}}e^{-z}\frac{dz}{\beta-it}=\frac{\beta^\alpha}{(\beta-it)^\alpha\,\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{\infty}z^{\alpha-1}e^{-z}dz=$$

$$=\frac{\beta^\alpha}{(\beta-it)^\alpha\,\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha)=\frac{\beta^\alpha}{(\beta-it)^\alpha}=\left(1-\frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha}.$$

Так как показательное распределение с плотностью $p_\xi(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$, где $\lambda>0$ является частным случаем гамма распределения при $\alpha=1, \beta=\lambda,$ то характеристическая функция для показательного распределения имеет вид $\varphi_\xi(t)=\left(1-\dfrac{it}{\lambda}\right)^{-1}=\dfrac{\lambda}{\lambda-it}.$

Аппарат характеристических функций используется при исследовании свойств сумм независимых случайных величин. В качестве примера рассмотрим свойство устойчивости распределения – сохранять тип распределения при суммировании случайных величин.

Пример.

Пусть случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют гамма распределение с параметрами $(\alpha_1;\beta)$ и $(\alpha_2;\beta)$ соответственно. Покажем, что их сумма $\eta=\xi_1+\xi_2$ также имеет гамма распределение.

Действительно, если $\varphi_{\xi_1}(t)=\left(1-\dfrac{it}{\beta}\right)^{-\alpha_1}$ и $\varphi_{\xi_2}(t)=\left(1-\dfrac{it}{\beta}\right)^{-\alpha_2}$ их характеристические функции, то по свойству 3 $\varphi_\eta(t)=\varphi_{\xi_1}(t)\varphi_{\xi_2}(t)=\left(1-\dfrac{it}{\beta}\right)^{-(\alpha_1+\alpha_2)}$, то есть случайная величина $\eta=\xi_1+\xi_2$ имеет гамма распределение с параметрами $(\alpha_1+\alpha_2;\beta)$.

Задания.

1. Показать, что если независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 распределены по закону Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно, то и их сумма $\eta=\xi_1+\xi_2$ также распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$.
2. Показать, что если независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 распределены по нормальному закону с параметрами $(a_1;\sigma_1)$ и $(a_2;\sigma_2)$ соответственно, то и их сумма $\eta=\xi_1+\xi_2$ также имеет нормальный закон распределения с параметрами $a=a_1+a_2$ и $\sigma=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$.

4.7. Распределения Пирсона и Стьюдента.

Введем несколько новых законов распределения, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Пусть $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ независимые случайные величины, распределенные по нормальному закону с параметрами $a = 0, \sigma = 1$, то есть нормированные. Рассмотрим случайную величину

$$\chi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 .$$

Про нее говорят, что она имеет распределение Пирсона или χ^2 с n степенями свободы. Число степеней свободы n является единственным параметром этого распределения.

Найдем плотность случайной величины χ^2. Для этого рассмотрим сначала одно слагаемое, то есть случайную величину $\eta = \xi^2$, где случайная величина ξ распределена нормально с параметрами $a = 0, \sigma = 1$ и имеет плотность $p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

В примере 1 пункта 2.7 мы уже нашли плотность этой случайной величины

$$p_\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} \left[p_\xi\left(\sqrt{x}\right) + p_\xi\left(-\sqrt{x}\right) \right], x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$$, если теперь учесть, что

$$p_\xi\left(\pm\sqrt{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\pm\sqrt{x}\right)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}},$$ то

$$p_\eta(x) = \begin{cases} 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}.$$

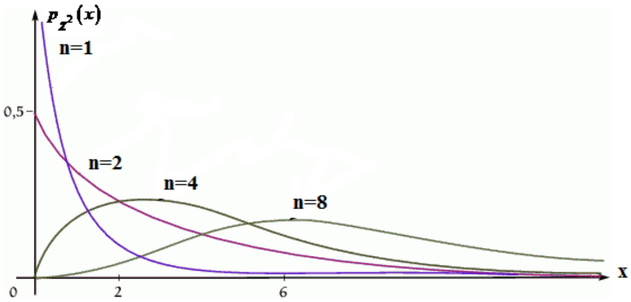
А это есть плотность гамма распределения

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}, \alpha > 0, \beta > 0$$ с параметрами $\alpha = \frac{1}{2}$ и $\beta = \frac{1}{2}$, если при этом учесть, что $\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Таким образом, каждое слагаемое ξ_i^2 в выражении для χ^2 имеет гамма распределение с параметрами $\alpha = \frac{1}{2}$ и $\beta = \frac{1}{2}$. В последнем примере предыдущего пункта 4.6 мы показали, что сумма n таких слагаемых также имеет гамма распределение с параметрами $\alpha = \frac{1}{2} \cdot n$ и $\beta = \frac{1}{2}$, но тогда плотность распределения χ^2 имеет вид

$$p_{\chi^2}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(n/2\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}.$$

С увеличением числа степеней свободы n распределение χ^2 приближается к нормальному распределению.



Найдем теперь математическое ожидание и дисперсию этого распределения

$$M\chi^2 = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{n/2}{1/2} = n, D\chi^2 = \frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{n/2}{1/4} = 2n.$$

С распределением χ^2 тесно связано распределение $\chi = \sqrt{\chi^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}$, плотность которого несложно получить $p_\chi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n/2-1}\Gamma\left(n/2\right)} x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}.$

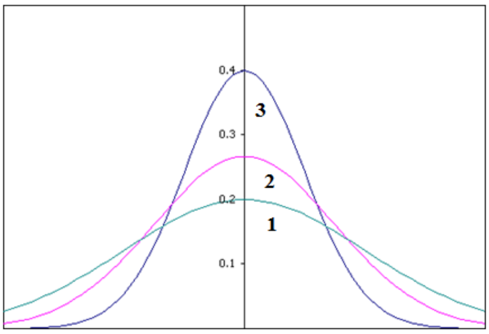
Пусть η и $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ независимые случайные величины, распределенные по нормальному закону с параметрами $a = 0, \sigma = 1$, то есть нормированные. Рассмотрим случайную величину

$$t = \frac{\eta}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}}.$$

Про нее говорят, что она имеет распределение Стьюдента с n степенями свободы. Плотность распределения Стьюдента имеет вид

$$p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

С возрастанием n распределение Стьюдента стремится к нормальному распределению с параметрами $a = 0, \sigma = 1$.



На рисунке кривые 1 и 2 есть плотность распределения Стьюдента при $n = 5$ и $n = 10$ соответственно, а кривая 3 есть плотность нормального распределения.

Если в распределениях χ^2 или Стьюдента случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ связаны некоторыми m зависимостями, то число степеней свободы в этих распределениях будет уже $n - m$.

4.8. Формула обращения и теорема единственности.

Мы показали, что каждой случайной величине ξ отвечает характеристическая функция

$$\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF_\xi(x),$$

то есть по функции распределения $F_\xi(x)$ случайной величины всегда можно найти ее характеристическую функцию $\varphi_\xi(t)$. Вполне закономерно рассмотреть обратную задачу: можно ли по характеристической функции $\varphi_\xi(t)$ восстановить функцию распределения $F_\xi(x)$, то есть определить случайную величину ξ.

Если случайная величина ξ абсолютно непрерывна и имеет плотность $p_\xi(x)$, то ее характеристическая функция $\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x) e^{ixt} dx$ есть не что иное, как преобразование Фурье плотности $p_\xi(t)$. Тогда по формуле обращения преобразования Фурье

$$p_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\xi(t) e^{-ixt} dt,$$

то есть по характеристической функции находится плотность, а значит определяется функция распределения $F_\xi(x)$ случайной величины ξ.

В общем случае формула обращения дается следующей теоремой.

Теорема. Если $F_\xi(x)$ и $\varphi_\xi(t)$ функция распределения и характеристическая функция случайной величины ξ, то для любых точек непрерывности x и y функции распределения

$$F_\xi(x)-F_\xi(y)=\frac{1}{2\pi}\lim_{\sigma\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ity}-e^{-itx}}{it}\varphi_\xi(t)e^{-\sigma^2t^2}dt.$$

В частности, если функция $\dfrac{\varphi_\xi(t)}{t}$ интегрируема на бесконечности, то становится законным предельный переход под знаком интеграла и формула обращения принимает вид

$$F_\xi(x)-F_\xi(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ity}-e^{-itx}}{it}\varphi_\xi(t)dt.$$

Эту теорему примем к сведению без доказательства.

Теорема единственности. Функция распределения $F_\xi(x)$ случайной величины ξ однозначно определяется своей характеристической функцией $\varphi_\xi(t)$.

Доказательство. Согласно формуле обращения разность $F_\xi(x)-F_\xi(y)$ однозначно определяется по характеристической функции $\varphi_\xi(t)$ в точках непрерывности x и y.

Устремим в этой формуле $y\to-\infty$ по точкам непрерывности. Учитывая, что $\lim\limits_{y\to-\infty}F_\xi(y)=0,$ получим, что в каждой точке непрерывности функция распределения

$$F_\xi(x)=\frac{1}{2\pi}\lim_{y\to-\infty}\lim_{\sigma\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ity}-e^{-itx}}{it}\varphi_\xi(t)e^{-\sigma^2t^2}dt.$$

Если x_0 точка разрыва функции $F_\xi(x)$, а функция распределения, как мы знаем непрерывна слева, то положим $F_\xi(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0-0}F_\xi(x),$ где предел берется по точкам непрерывности x.

Таким образом, функция распределения $F_\xi(x)$ однозначно определяется по характеристической функции $\varphi_\xi(t)$.

Тем самым мы установили, что между множеством функций распределения $\{F_\xi(x)\}$ и множеством характеристических функций $\{\varphi_\xi(t)\}$ существует взаимно однозначное соответствие.

4.9. Производящие функции.

Пусть ξ дискретная случайная величина, принимающая целочисленные значения $P\{\xi = k\} = p_k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Ее характеристическая функция

$$\varphi_\xi(t) = Me^{i\xi t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{ikt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k(\cos kt + i\sin kt)$$

представляет собой ряд Фурье, записанный в комплексной форме, для функции $\varphi_\xi(t)$. По формуле для коэффициентов ряда Фурье

$$p_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_\xi(t)e^{-ikt}dt,$$

то есть по характеристической функции закон распределения случайной величины ξ определяется однозначно.

Кроме того, характеристическая функция $\varphi_\xi(t)$ является периодической с периодом $2\pi,$ а значит достаточно знать ее значения только на промежутке $[-\pi;\pi]$. Далее характеристическая функция фактически зависит от аргумента e^{it}, но тогда мы можем ввести комплексный аргумент $z = e^{it}$, изменяющийся на единичной окружности $|z| = 1$. В этом случае характеристическая функция $\varphi_\xi(t)$ принимает вид

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \cdot \left(e^{it}\right)^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k z^k.$$

Функцию $\psi_\xi(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} p_k z^k$ называют производящей функцией случайной величины ξ.

Так как производящие функции получаются из характеристических функций при помощи замены аргумента, то для них остаются в силе все те свойства, которые были получены для характеристических функций. В частности производящая функция суммы независимых случайных величин равна произведению производящих функций слагаемых: если $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, то $\psi_\eta(z) = \psi_{\xi_1}(z)\psi_{\xi_2}(z)\dots\psi_{\xi_n}(z)$.

Найдем производящие функции для некоторых распределений.

1. Если случайная величина ξ распределена по закону Пуассона $P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, то ее характеристическая функция имеет вид $\varphi_\xi(t) = e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}$. Тогда ее производящая функция есть $\psi_\xi(z) = e^{\lambda(z-1)}$.

2. Пусть случайная величина ξ имеет геометрическое распределение $P\{\xi=k\}=q^{k-1}p,\ k=1,2,\ldots$. Производящая функция этой случайной величины имеет вид $\psi_{\xi}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}q^{k-1}p\cdot z^{k}=pz\sum_{k=1}^{\infty}(qz)^{k-1}=\frac{pz}{1-qz}$.

3. Пусть случайная величина ξ имеет биномиальное распределение, то есть ξ это сколько раз произошло событие **A** в серии из n независимых испытаний. Представим ее в виде суммы $\xi=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$, где ξ_k это результат k-го испытания

ξ_k	1	0
p_k	p	q

Для нее $\varphi_{\xi_k}(t)=pe^{it}+qe^{0}=pe^{it}+q$ и $\psi_{\xi_k}(z)=pz+q$. Тогда

$$\psi_{\xi}(z)=\psi_{\xi_1}(z)\psi_{\xi_2}(z)\ldots\psi_{\xi_n}(z)=(pz+q)^{n}.$$

Если воспользоваться формулой бинома Ньютона, то $\psi_{\xi}(z)=(pz+q)^{n}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k p^k q^{n-k}z^k$, то есть коэффициент при z^n это вероятность $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ того, что в данной серии испытаний событие **A** произойдет ровно k раз.

4. Пусть проводится серия из n независимых испытаний и пусть при k-ом испытании событие **A** может произойти с вероятностью p_k или не произойти с вероятностью $q_k=1-p_k$. Случайная величина $\xi=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$ это сколько раз произошло событие **A** в данной серии испытаний . Так как $\psi_{\xi_k}=p_k z+q_k$, то

$$\psi_{\xi}(z)=(p_1z+q_1)(p_2z+q_2)\ldots(p_nz+q_n)=\sum_{k=0}^{n}P\{\xi=k\}z^k.$$

Полученная формула используется при решении задач следующего типа.

Пример. Две батареи по три орудия в каждой производят залп по цели. Цель будет поражена, если каждая из батарей даст не менее двух попаданий. Вероятности попадания в цель орудиями первой батареи равны 0,4; 0,5 и 0,6, а второй – 0,5; 0,6 и 0,7. Найти вероятность поражения цели при одном залпе этих двух батарей.

Для первой батареи производящая функция есть

$\psi_1(z)=(0,4z+0,6)(0,5z+0,5)(0,6z+0,4)=0,12z^3+0,38z^2+0,38z+0,12.$

Для второй батареи производящая функция равна

$\psi_2(z)=(0,5z+0,5)(0,6z+0,4)(0,7z+0,3)=0,21z^3+0,44z^2+0,38z+0,06.$

Искомая вероятность того, что каждая из батарей даст не менее двух попаданий

$p=(0,12+0,38)(0,21+0,44)=0,5\cdot 0,65=0,365.$

Задание.

Четыре элемента некоторого устройства работают независимо. Вероятность отказа первого элемента за время T равна 0,2, второго – 0,25. третьего – 0,3 и четвертого – 0,4. Найти вероятность того, что за время T откажут: а) 4 элемента; б) 3 элемента; в) 2 элемента; г) 1 элемент; д) ни один элемент.

4.10. Сходимость случайных величин и функций распределения.

Пусть на вероятностном пространстве $\langle \Omega, F, P \rangle$ заданы последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ и случайная величина ξ.

Мы уже ранее ввели понятие сходимости по вероятности последовательности случайных величин $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, если $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\} = 0$ или $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\xi_n - \xi| < \varepsilon\} = 1$.

Кроме сходимости по вероятности рассматривают еще один вид сходимости случайных величин.

Определение. Говорят, что последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ сходится к случайной величине ξ с вероятностью 1 или почти наверное, если $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)$ для всех элементарных событий $\omega \in \Omega$ за исключение, быть может, множества $N \subset \Omega$ нулевой вероятности

$$P\{N\} = P\left\{\omega : \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) \neq \xi(\omega)\right\} = 0, \text{ откуда } P\left\{\omega : \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\right\} = 1.$$

Сходимость почти наверное будем обозначать так $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi$.

Из приведенных определений видно, что из сходимости почти наверное следует сходимость по вероятности. Обратное, вообще говоря, неверно.

Докажем теперь одну теорему, которая понадобится нам в дальнейшем.

Теорема. Пусть $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ и $f(x)$ произвольная ограниченная и непрерывная функция. Тогда $Mf(\xi_n) \to Mf(\xi)$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Рассмотрим

$$|Mf(\xi_n) - Mf(\xi)| = |M(f(\xi_n) - f(\xi))| \leq M|f(\xi_n) - f(\xi)| =$$

$$= M(|f(\xi_n) - f(\xi)|; |\xi_n - \xi| < \delta) + M(|f(\xi_n) - f(\xi)|; |\xi_n - \xi| \geq \delta).$$

Так как $f(x)$ непрерывна, то по $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|f(\xi_n) - f(\xi)| < \varepsilon$ при $|\xi_n - \xi| < \delta$. Так как $f(x)$ ограничена, то найдется $C > 0$ такое, что $|f(x)| \leq C$, но тогда $|f(\xi_n) - f(\xi)| \leq 2C$.

Таким образом, $\left|Mf(\xi_n)-Mf(\xi)\right| \le M\left(\varepsilon; |\xi_n-\xi|<\delta\right)+M\left(2C; |\xi_n-\xi|\ge\delta\right)=$

$=\varepsilon\int\limits_{\Omega_1} dF_\xi(x)+2C\int\limits_{\Omega_2} dF_\xi(x),$ где $\Omega_1=\left\{\omega: |\xi_n-\xi|<\delta\right\}$, а $\Omega_2=\left\{\omega: |\xi_n-\xi|\ge\delta\right\}=\Omega\setminus\Omega_1$.

Оценим $\int\limits_{\Omega_1} dF_\xi(x)\le\int\limits_{\Omega} dF_\xi(x)=1;\ \int\limits_{\Omega_2} dF_\xi(x)=P\left\{|\xi_n-\xi|\ge\delta\right\}.$

Тогда $\left|Mf(\xi_n)-Mf(\xi)\right|\le\varepsilon+2C\cdot P\left\{|\xi_n-\xi|\ge\delta\right\}$. Так как при $n\to\infty$ $P\left\{|\xi_n-\xi|\ge\delta\right\}\to 0,$ то и $\left|Mf(\xi_n)-Mf(\xi)\right|\to 0$ при $n\to\infty.$

Следствие. Если $\xi_n\xrightarrow{P}\xi$ при $n\to\infty$, то для любого t $\varphi_{\xi_n}(t)\to\varphi_\xi(t)$ при $n\to\infty$.

Действительно, $\varphi_\xi(t)=Me^{i\xi t}$, а функция $f(\xi)=e^{i\xi t}=\cos\xi t+i\sin\xi t$ непрерывна и ограничена, но тогда по теореме $\varphi_{\xi_n}(t)=Me^{i\xi_n t}\to Me^{i\xi t}=\varphi_\xi(t)$.

Итак, у нас имеется два способа охарактеризовать близость случайных величин, заданных на одном вероятностном пространстве, - сходимость по вероятности и сходимость почти наверное. Но как быть, если случайные величины заданы на разных вероятностных пространствах. В этом случае характеризуют близость функций распределения этих величин. При удачном определении такой близости мы сможем во многих задачах приближать нужные нам, но труднодоступные с точки зрения вычислений распределения при помощи более простые распределений, как это было сделано при помощи теорем Муавра – Лапласа и Пуассона, в которых биномиальное распределение приближалось нормальным распределением или распределением Пуассона. Для этого следует ввести понятие сходимости последовательности функций распределения $F_{\xi_n}(x)$ случайных величин ξ_n к функции распределения $F_\xi(x)$ случайной величины ξ.

Определение. Будем говорить, что последовательность распределений $\left\{F_{\xi_n}(x)\right\}$ слабо сходится к распределению $F_\xi(x)$, если для любой непрерывной и ограниченной функции $f(x)$

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dF_{\xi_n}(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dF_\xi(x).$$

Слабую сходимость будем обозначать так $F_{\xi_n}(x)\xrightarrow{сл.}F_\xi(x)$.

Теорема. Если последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ сходится по вероятности к случайной величине ξ, то и последовательность их функций распределений $\left\{F_{\xi_n}(x)\right\}$ слабо сходится к функции распределения $F_\xi(x)$ случайной величины ξ.

Доказательство. Действительно, так как $Mf(\xi_n) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dF_{\xi_n}(x)$ и

$Mf(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dF_{\xi}(x)$, то, если $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, то по предыдущей теореме $Mf(\xi_n) \to Mf(\xi)$

при $n \to \infty$, то есть $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dF_{\xi_n}(x) \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dF_{\xi}(x)$, откуда $F_{\xi_n}(x) \xrightarrow{сл.} F_{\xi}(x)$.

Можно также показать, что из слабой сходимости распределений $F_{\xi_n}(x)$ к $F_{\xi}(x)$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) = F_{\xi}(x)$ в каждой точке x, являющейся точкой непрерывности распределения $F_{\xi}(x)$.

Пусть $\{\xi_n\}$ последовательность случайных величин с функциями распределения $F_{\xi_n}(x)$ и характеристическими функциями $\varphi_{\xi_n}(t)$. Пусть случайная величина ξ имеет функцию распределения $F_{\xi}(x)$ и характеристическую функцию $\varphi_{\xi}(t)$.

Если $F_{\xi_n}(x) \xrightarrow{сл.} F_{\xi}(x)$, то есть для любой непрерывной и ограниченной функции $f(x)$ $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dF_{\xi_n}(x) \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dF_{\xi}(x)$ при $n \to \infty$, то взяв $f(x) = e^{ixt}$, получим $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}dF_{\xi_n}(x) \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}dF_{\xi}(x)$, то есть $Me^{i\xi_n t} \to Me^{i\xi t}$, откуда $\varphi_{\xi_n}(t) \to \varphi_{\xi}(t)$ при $n \to \infty$ и любого t.

Можно доказать и обратное утверждение: если при любом t $\varphi_{\xi_n}(t) \to \varphi_{\xi}(t)$ при $n \to \infty$, то $F_{\xi_n}(x) \xrightarrow{сл.} F_{\xi}(x)$.

Таким образом, мы установили, что между множеством функций $\{F_{\xi}(x)\}$ и множеством их характеристических функций $\{\varphi_{\xi}(t)\}$ имеется взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение. Этот факт широко используется при доказательстве предельных теорем, когда одно распределение приближается другим, более простым с точки зрения исследования и вычисления.

4.11. Центральная предельная теорема.

Нормальное распределение или распределение Гаусса играет большую роль как в теории вероятности, так и в различных ее приложениях. Дело в том, что при широких условиях сумма большого числа независимых малых случайных величин имеет распределение, близкое к нормальному распределению. Этот результат проявляется во многих прикладных задачах – теории измерений, когда на точность измерения влияет много мелких факторов; продолжительности исправной работы приборов, когда на выход его из строя влияют различные случайные воздействия; рассеяние артиллерийских снарядов при стрельбе по цели и так далее. Все это привело к созданию раздела вероятности, в котором исследуются условия, которые необходимо наложить на отдельные случайные слагаемые, чтобы их сумма имела распределение, стремящееся к нормальному распределению. Эти условия в теории вероятности принято называть предельными теоремами.

Мы уже знакомы с одной из таких предельных теорем – теоремой Муавра – Лапласа, утверждающей следующее.

Пусть проводится серия из n независимых испытаний, в каждом из которых некоторое событие **A** может наступить с постоянной вероятностью p или не наступить с вероятностью $q = 1 - p$. Случайная величина $\xi = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$ есть число наступлений события **A** в этой серии испытаний, ξ_k - результат k-го испытания (0 или 1). Она имеет математическое ожидание $M\xi = np$ и дисперсию $D\xi = npq$. Нормированная случайная величина (нормированная сумма) $\xi_н = \dfrac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} = \dfrac{\xi - np}{\sqrt{npq}}$ при $n \to \infty$ имеет распределение, стремящееся к нормальному распределению с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$

$$P\{\xi_н < x\} = P\left\{\frac{\xi - np}{\sqrt{npq}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Обобщением этого результата является следующая теорема.

Центральная предельная теорема. Пусть на вероятностном пространстве $\langle \Omega, F, P \rangle$ задана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$, которые имеют математическое ожидание $M\xi_k = a_k$, дисперсию $D\xi_k = \sigma_k^2$ и, кроме того, каждая из них имеет моменты до третьего порядка включительно. Пусть $B_n^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + ... + \sigma_n^2$ и выполняется условие Ляпунова

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^3} \sum_{k=1}^{n} M\left|\xi_k - a_k\right|^3 = 0.$$

Тогда нормированная сумма $S_n^* = \dfrac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}}$, где

$S_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$, $MS_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $DS_n = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 = B_n^2$, при $n \to \infty$ стремится к нормальному распределению с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$

$$P\left\{S_n^* < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Доказательство. Представим случайную величину S_n^* в виде суммы

$$S_n^* = \frac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k - \sum\limits_{k=1}^{n}a_k}{B_n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k - a_k}{B_n} = \sum_{k=1}^{n}\eta_{nk}\text{, где } \eta_{nk} = \frac{\xi_k - a_k}{B_n}.$$

Случайные величины η_{nk} имеют математическое ожидание $M\eta_{nk} = 0$, дисперсию $D\eta_{nk} = \frac{D\xi_k}{B_n^2}$ и момент третьего порядка $M\eta_{nk}^3 = M\left(\frac{\xi_k - a_k}{B_n}\right)^3$, при этом

$\left|M\eta_{nk}^3\right| \le M\left|\eta_{nk}^3\right| = M\left|\frac{\xi_k - a_k}{B_n}\right| = \frac{1}{B_n^3}M\left|\xi_k - a_k\right|^3 \to 0$ при $n \to \infty$ в силу условия Ляпунова.

Обозначим через $\varphi_{nk}(t)$ характеристическую функцию случайной величины η_{nk}. Так как η_{nk} имеет моменты до третьего порядка включительно, то $\varphi_{nk}(t)$ имеет непрерывные производные до третьего порядка включительно, и мы ее можем разложить по формуле Маклорена

$$\varphi_{nk}(t) = \varphi_{nk}(0) + \varphi'_{nk}(0)\cdot t + \varphi''_{nk}(0)\cdot\frac{t^2}{2} + R_{nk}(t).$$

Учитывая, что $\varphi_{nk}(0) = 1, \varphi'_{nk}(0) = i\cdot M\eta_{nk} = 0, \varphi''_{nk}(0) = i^2\cdot M\eta_{nk}^2 = -D\eta_{nk}$, получим

$$\varphi_{nk}(t) = 1 - D\eta_{nk}\cdot\frac{t^2}{2} + R_{nk}(t).$$

Рассмотрим остаточный член $R_{nk}(t) = \varphi'''_{nk}(t_0)\cdot\frac{t^3}{3!} = \frac{t^3}{6}\cdot i^3\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^3e^{ixt_0}dF_{\eta_{nk}}(x).$ Имеем

$$\left|R_{nk}(t)\right| \le \frac{|t|^3}{6}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x|^3\cdot\left|e^{ixt_0}\right|dF_{\eta_{nk}}(x) = \frac{|t|^3}{6}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x|^3\,dF_{\eta_{nk}}(x) = \frac{|t|^3}{6}M\left|\eta_{nk}\right|^3 = \frac{|t|^3}{6}\frac{1}{B_n^3}M\left|\xi_k - a_k\right|^3 \to 0$$

при $n \to \infty$ в силу условия Ляпунова при любом фиксированном t.

Рассмотрим теперь

$$D\eta_{nk} = M\eta_{nk}^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2dF_{\eta_{nk}}(x) = \int\limits_{|x|\le\varepsilon}x^2dF_{\eta_{nk}}(x) + \int\limits_{|x|>\varepsilon}x^2dF_{\eta_{nk}}(x) \le$$

$$\le \varepsilon^2\int\limits_{|x|\le\varepsilon}dF_{\eta_{nk}}(x) + \int\limits_{|x|>\varepsilon}\frac{|x|^3}{|x|}dF_{\eta_{nk}}(x).$$

Так как $\int\limits_{|x|\le\varepsilon}dF_{\eta_{nk}}(x) \le 1$, а $\frac{1}{|x|} < \frac{1}{\varepsilon}$ при $|x| > \varepsilon$, то

$\int\limits_{|x|>\varepsilon}\frac{|x|^3}{|x|}dF_{\eta_{nk}}(x) < \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{|x|>\varepsilon}|x|^3\,dF_{\eta_{nk}}(x) \le \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x|^3\,dF_{\eta_{nk}}(x) = \frac{1}{\varepsilon}M\left|\eta_{nk}\right|^3 = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{B_n^3}M\left|\xi_k - a_k\right|^3$ и

$$D\eta_{nk} < \varepsilon^2 + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{B_n^3} M \left|\xi_k - a_k\right|^3.$$

По условию Ляпунова $\frac{1}{B_n^3} M \left|\xi_k - a_k\right|^3 \to 0$ при $n \to \infty$, тогда по $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0 такой, что при $n \geq n_0$ $\frac{1}{B_n^3} M \left|\xi_k - a_k\right| < \varepsilon^2$.

Таким образом, $D\eta_{nk} < \varepsilon^2 + \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon \to 0$ при $n \to \infty$.

Теперь характеристическую функцию $\varphi_{nk}(t)$ мы можем записать в виде

$\varphi_{nk}(t) = 1 - D\eta_{nk} \cdot \frac{t^2}{2} + R_{nk}(t) = 1 + z_{nk}$, где $z_{nk} = -D\eta_{nk} \cdot \frac{t^2}{2} + R_{nk}(t) \to 0$ при $n \to \infty$ и фиксированном t.

Рассмотрим $\ln \varphi_{nk}(t) = \ln(1 + z_{nk}) = z_{nk} - \frac{z_{nk}^2}{2} + \frac{z_{nk}^3}{3} - \ldots$. Этот ряд сходится, так как $|z_{nk}| < 1$ начиная с некоторого номера n в силу того, что $z_{nk} \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\left|\ln \varphi_{nk}(t) - z_{nk}\right| = \left| -\frac{z_{nk}^2}{2} + \frac{z_{nk}^3}{3} - \ldots \right| \leq \frac{|z_{nk}|^2}{2} + \frac{|z_{nk}|^3}{3} + \ldots < \frac{|z_{nk}|^2}{2} + \frac{|z_{nk}|^3}{2} + \ldots =$$

$= \frac{|z_{nk}|^2}{2(1 - |z_{nk}|)} < |z_{nk}|^2$, так как начиная с некоторого номера $|z_{nk}| < \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2(1 - |z_{nk}|)} < 1$.

Пусть $\varphi_{S_n^*}(t)$ характеристическая функция нормированной суммы $S_n^* = \sum_{k=1}^{n} \eta_{nk}$.

Так как случайные величины η_{nk} независимы, то $\varphi_{S_n^*}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{nk}(t)$ и

$$\ln \varphi_{S_n^*}(t) = \sum_{k=1}^{n} \ln \varphi_{nk}(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(\ln \varphi_{nk}(t) - z_{nk}\right) + \sum_{k=1}^{n} z_{nk} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\ln \varphi_{nk}(t) - z_{nk}\right) - \frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^{n} D\eta_{nk} + \sum_{k=1}^{n} R_{nk}(t).$$

Учитывая, что $\sum_{k=1}^{n} D\eta_{nk} = \sum_{k=1}^{n} \frac{D\xi_k}{B_n^2} = \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} D\xi_k = \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 = \frac{1}{B_n^2} \cdot B_n^2 = 1$, получим

$$\left|\ln \varphi_{S_n^*} + \frac{t^2}{2}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left|\ln \varphi_{nk}(t) - z_{nk}\right| + \sum_{k=1}^{n} \left|R_{nk}(t)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_{nk}|^2 + \frac{|t|^3}{6} \cdot \frac{1}{B_n^3} \sum_{k=1}^{n} M \left|\xi_k - a_k\right|^3 \to 0$$

при $n \to \infty$. Таким образом мы показали, что в любой точке t

$\ln\varphi_{S_n^*}(t) \to -\dfrac{t^2}{2}$ при $n\to\infty$, то есть $\varphi_{S_n^*}(t) \to e^{-\frac{t^2}{2}}$ при $n\to\infty$.

Из сходимости последовательности характеристических функций $\varphi_{S_n^*}(t)$ к характеристической функции $\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ нормального распределения параметрами $a=0,\ \sigma=1$ следует сходимость последовательности функций распределения $F_{S_n^*}(x)$ к функции распределения нормального распределения

$$F_{S_n^*}(x) = P\left\{S_n^* < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \quad \text{при } n\to\infty.$$

Доказанная нами центральная предельная теорема находит чрезвычайно много применений в самых разных областях. Это происходит благодаря ее универсальности, ее устойчивости относительно незначительных отклонений от условий теоремы и ее сравнительно высокой точности даже при умеренных значениях n.

Универсальность теоремы заключается в том, что она применима к случайным величинам ξ_k с любыми распределениями, лишь бы существовали дисперсии $\sigma_k = D\xi_k$ и они были достаточно малы.

Устойчивость теоремы заключается в том, что появление некоторой «умеренной» зависимости между случайными величинами ξ_k не меняет нормальности предельного распределения.

Однако, как и в случае теоремы Муавра – Лапласа, центральную предельную теорему нельзя применять при оценке вероятностей редких событий, то есть при очень малых p.

Таблица 1 значений функции $\varphi\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица 2 значений функции $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0040	0080	0120	0159	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0909	0948	0987	1026	1103	1064	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2356	2389	2421	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2703	2734	2764	2793	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3437	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3728	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3906	3925	3943	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4648	4656	4664	4671	4678	4686	4692	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4864	4868	4871	4874	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4924	4927	4929	4930	4932	4934	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2,6	4953	4955	4956	4957	4958	4960	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2,9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986

3,0	0,4986	3,1	4990	3,2	49931	3,3	49952	3,4	49966
3,5	4998	3,6	4998	3,7	49989	3,8	49993	3,9	49995
4,0	499968								
4,5	499997								
5,0	49999997								

Ответы.

Глава 1.

1.2: 1) $p(A)=1/6;\ p(B)=1/18$. 2) $p(A)=1/2;\ p(B)=3/8;\ p(C)=7/8$. 3) $p=\dfrac{2}{n-1}$.

5) $p(A)=0,384;\ p(B)=0,096;\ p(C)=0,08$. 6) $\omega_1=(\Gamma,\Gamma), \omega_2=(P,P), \omega_3=(P,\Gamma,\Gamma)$, $\omega_4=(\Gamma,\mathrm{P},\mathrm{P}), \omega_5=(\Gamma,P,\Gamma,\Gamma), \omega_6=(P,\Gamma,\mathrm{P},\mathrm{P}),\ldots;\ p(A)=1/4+1/4+1/8+1/8=3/4$.

7) $p_1=2/3;\ p_2=1/3$.

1.3: 1) $9\cdot 9\cdot 8=648$. 2) Всего $A_7^5=2420$; четных $4\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3=1440$; нечетных $3\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3=1080$. 3) $4!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 2!=576$. 4) $C_4^2\cdot C_{32}^{16}$. 5) $C_9^2\cdot C_7^3\cdot C_4^4=1260$.

6) $nC_m^2+mC_m^2=\dfrac{mn}{2}(m+n-2)$. 7) $C_{12}^4\cdot C_8^3\cdot C_5^3\cdot C_2^2=\dfrac{12!}{4!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 2!}$. 8) $C_n^2-n=\dfrac{n}{2}(n-3)$.

9) $A_7^3=210$. 10) $\dfrac{1}{2}A_8^2=28$. 11) $10^4\cdot 28^3$. 12) $30^2=900<1000$.

1.4: 1) $p(A)=C_9^5/C_{10}^6=3/5;\ p(B)=C_8^4/C_{10}^6=1/3$. 2) $p(A)=C_{10}^1/C_{15}^3;\ p(B)=C_5^3/C_{15}^3$.

3) $\dfrac{C_8^5\cdot C_4^4}{C_{12}^9}$. 4) $p(A)=\dfrac{C_2^2}{C_5^2}=0,1;\ p(B)=\dfrac{C_3^1\cdot C_2^1}{C_5^2}=0,6;\ p(C)=1-p(A)=0,9$. 5) $p=\dfrac{1}{3!}=\dfrac{1}{6}$.

6) $p=\dfrac{4\cdot 4\cdot 4}{C_{52}^3}=\dfrac{64}{5525}\approx 0,003$. 7) $p(A)=\dfrac{C_9^3\cdot C_6^3\cdot C_3^3}{3^9}=\dfrac{9!}{(3!)^3\cdot 3^9}$;

$p(B)=\dfrac{C_9^4\cdot C_5^3\cdot C_2^2}{3^9}=\dfrac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 3^9}$. 8) $p=\dfrac{C_n^{n_1}\cdot C_{n-n_1}^{n_2}\cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3}\cdot\ldots\cdot C_{n-n_1-\ldots-n_5}^{n_6}}{6^n}=\dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_6!\cdot 6^n}$.

1.7: 1) $p=\dfrac{a-r}{a}=1-\dfrac{r}{a}$. 2) $p=\dfrac{(a-2r)^2}{a^2}=\left(1-\dfrac{2r}{a}\right)^2$. 3) *а)* $p=\dfrac{2}{\pi}$; *б)* $p=\dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}$. 4) $p=1/2$.

5) $p=1/2$. 6) $p=0,75$. 7) $p=1/4$. 8) $p=\dfrac{1}{8}(1+3\ln 2)\approx 0,38$. 9) $p=0,09\ln 9\approx 0,2$.

10) $p=\dfrac{43}{128}\approx 0,336$. 11) $p=1-\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{\Delta}{T}\right)^2-\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{t}{T}\right)^2$. 12) $p=1-\left(1-\dfrac{t}{T_1}\right)\left(1-\dfrac{t}{T_2}\right)$.

13) $p=\dfrac{(1-2\tau)^2}{(1-\tau)^2}$.

1.9: 1) а) $p=0,38$; б) $p=0,56$. 2) $p=1-\dfrac{C_{10}^3}{C_{15}^3}=\dfrac{67}{91}$. 3) $p=3\cdot 0,9^2\cdot 0,1=0,243$.

4) а) $p=C_3^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{72}$; б) $p=\frac{5}{12}$; в) $p=\frac{5}{9}$. 5) $p=3!\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{2}{9}$. 6) $p=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{1}{14}$.

7) а) $p=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{60}$; б) $p=3!\cdot\frac{1}{60}=\frac{1}{10}$. 8) а) $p=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{5040}$; б) $p=\left(\frac{1}{10}\right)^4=0,0001$.

9) $n\geq 4$. 10) $p=1-\frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$. 11) $p=\left(\frac{25}{36}\right)^{k-1}\cdot\frac{11}{36}$. 12) $p=\frac{93}{288}$. 13) а) $p=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$;

б) $p=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$. 14) $P=\frac{p\left(1-\frac{t}{T}\right)}{1-p\frac{t}{T}}=\frac{p(T-t)}{T-pt}$. 15) $P=1-(1-p)^n$.

16) $P(A)=1-(1-p)^{nm}$; $P(B)=\left[1-(1-p)^n\right]^m$. 17) а) $p=\alpha_1\alpha_2$; б) $p=1-(1-\beta_1)(1-\beta_2)$.

1.10: 1) а) $p=\frac{3}{16}$; б) $p=\frac{13}{16}$. 2) $P_5(2)=C_5^2\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^3$. 3) $p=C_8^2\cdot C_6^2\cdot C_4^2\cdot C_2^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^8$.

4) $p=P_4(3)+P_4(4)+0,5P_4(2)=0,216$. 5) $n>\frac{\ln 2}{\ln 11-\ln 10}$, $n=8$. 6)
$P_5(2)=C_5^2\cdot\left(\frac{1}{6^3}\right)^2\left(1-\frac{1}{6^3}\right)^3=0,0002$. 7) Есть основание, так как вероятность мала:
$P_3(0)=\left(\frac{C_{32}^9}{C_{36}^9}\right)^3=0,026$. 8) $P_{N-1}(l)=C_{N-1}^l\cdot\left(\frac{kt}{N}\right)^l\left(1-\frac{kt}{N}\right)^{n-l-1}$.

1.11: 1) $P(A)=0,784$. 2) $P(A)=0,5$. 3) $P(A)\approx 0,28$. 4) $P(A)=\frac{38}{105}$. 5) $P(A)=\frac{9}{20}$.

1.12: 1) $P(H_2/A)=\frac{7}{17}$. 2) Вероятнее легковая: $p=\frac{4}{7}$, чем грузовая: $p=\frac{3}{7}$. 3) $p=\frac{24}{77}$.

4) $P(H_2/A)=\frac{19}{41}$. 5) $p=\frac{66}{91}$. 6) $p=\frac{7}{82}$. 7) $p=\frac{2}{3}$. 8) $p=0,998$. 9) $P(A)=\frac{3}{4}$, $P(B)=\frac{1}{2}$.

10) $p=\frac{2a}{1+a-b}$. 11) $p=\frac{n_3(n_1+n_2)}{n_1n_2+n_3(n_1+n_2)}$. 12) $P(H_1/A)=\frac{56}{241}$, $P(H_1/B)=\frac{84}{179}$.

13) $p=\frac{20}{21}$. 14) $p=\frac{20}{21}$. 15) $P(ббб)=0$, $P(ббч)=\frac{4}{5}$, $P(бчч)=\frac{1}{5}$, $P(ччч)=0$. 16) $p=\frac{5}{11}$.

Глава 2.

2.3: 1)

ξ	0	1	2	3	4
p	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

2)

ξ	0	1	2	3
p	0	$1/5$	$3/5$	$1/5$

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0,\ x\le 1\\ 1/5,\ 1<x\le 2\\ 4/5,\ 2<x\le 3\\ 1,\ x>3\end{cases}$$

3)

ξ	0	1	2	3	4
p	$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/16$	$1/16$

4) $P\{\xi=k\}=(0,9)^{k-1}\cdot 0{,}1$. 5)

ξ	1	2	3	4	5
p	p_1	q_1p_2	$q_1q_2p_1$	$q_1^2q_2p_2$	$q_1^2q_2^2p_1$

2.4: 1) $p=1/3$. 2) $p_\xi(x)=\begin{cases}\cos x,\ x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right]\\ 0,\ x\notin\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right]\end{cases}$. 3) $p=3\cdot\left(\dfrac{\pi+2}{4\pi}\right)^2\cdot\dfrac{3\pi-2}{4\pi}$.

4) $F_\xi(x)=\begin{cases}0,\ x\le 1\\ \dfrac{1}{2}\left(x^2-x\right),1<x\le 2\\ 1,\ x>2\end{cases}$. 5) $C=\dfrac{2}{\pi},\ F_\xi(x)=\dfrac{2}{\pi}arctg\,e^x$.

6) $C=\dfrac{1}{2},\ F_\xi(x)=1-\dfrac{1}{2}\left(x^2+2x+2\right)e^{-x},\ \mathrm{P}\{0<\xi<1\}=1-\dfrac{5}{2e}$. 7) $P\{7<\xi<10\}=0{,}3$.

8) $p\approx 0{,}41$. 9) $P\{0<\xi<2\}=1-e^{-0{,}4}=0{,}33$.

2.7: 1) а) $p_\eta(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}p_\xi\left(\ln\dfrac{1}{x}\right),\ x>0\\ 0,\ x\le 0\end{cases}$. б) $p_\eta(x)=e^xp_\xi\left(e^x\right)$. в) $p_\eta(x)=\begin{cases}2xp_\xi\left(x^2\right),\ x>0\\ 0,\ x\le 0\end{cases}$.

2) а) $p_\eta(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln\dfrac{1}{x}}}\left[p_\xi\left(\sqrt{\ln\dfrac{1}{x}}\right)+p_\xi\left(-\sqrt{\ln\dfrac{1}{x}}\right)\right],\ x\in(0;1)\\ 0,\ x\notin(0;1)\end{cases}$.

б) $p_\eta(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\cos^2 x}p_\xi(tgx),\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\\ 0,\ x\notin\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$.

в) $p_\eta(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x^2\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}}\left[p_\xi\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}\right)+p_\xi\left(-\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}\right)\right], x\in(0;1)\\ 0,\ x\notin(0;1)\end{cases}$.

3) $p_\eta(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1;1)\\ 0,\ x\notin(-1;1)\end{cases}$. 4) $p_\eta(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac{x}{2}},\ x>0\\ 0,\ x\le 0\end{cases}$.

5) $p_\varsigma(x)=\begin{cases}e^{-x}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right),\ x>0\\ 0,\ x\le 0\end{cases}$. 6) $F_\varsigma(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0\\ \dfrac{1}{2}x^2,\ 0<x\le 1\\ 1-\dfrac{1}{2}(2-x)^2,\ 1<x\le 2\\ 1,\ x>2\end{cases}$; $p_\varsigma(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0\\ x,\ 0<x\le 1\\ 2-x, 1<x\le 2\\ 0,\ x>2\end{cases}$.

Глава 3.

3.5: 1) $M\xi=-0,1;\ D\xi=2,49.$ 2) $p_1=0,4;\ p_2=0,1;\ p_3=0,5.$ 3) $M\xi=\dfrac{31}{28};\ D\xi=\dfrac{75}{784}.$

4) $M\xi=\dfrac{7}{2}n;\ D\xi=\dfrac{35}{12}n.$ 5) $M\xi=50\cdot C_5^4\cdot(0,9)^4\cdot 0,1\approx 16.$ 6) $M\xi=2.$

7) $M\xi=\sum\limits_{k=1}^{n}p_k;\ D\xi=\sum\limits_{k=1}^{n}p_kq_k.$

8) $M\xi=1\cdot\dfrac{n}{m+n}\cdot\dfrac{m}{m+n-1}+2\cdot\dfrac{n}{m+n}\cdot\dfrac{n-1}{m+n-1}\cdot\dfrac{m}{m+n-2}+...+n\cdot\dfrac{n}{m+n}\cdot\dfrac{n-1}{m+n-1}\cdot...\cdot\dfrac{1}{m+1}\cdot 1.$

9) $M\xi=1\cdot\dfrac{n}{m+n}\cdot\dfrac{m}{m+n}+2\cdot\left(\dfrac{n}{m+n}\right)^2\cdot\dfrac{m}{m+n}+...+k\cdot\left(\dfrac{n}{m+n}\right)^k\cdot\dfrac{m}{m+n}+...=\dfrac{n}{m}.$

10) $M\xi=\dfrac{2}{3};\ D\xi=\dfrac{1}{18}.$ 11) $M\xi=0;\ D\xi=\dfrac{1}{2}.$

Глава 4.

4.1: 1) $p\ge 5/8$. 2) а) $P\{|\xi-16|<3\}\ge 0,64.$ б) $P\{|\xi-16|\ge 3\}\le 0,36.$ 3) $p\ge 0.75.$

4) $P\left\{\left|\dfrac{k}{n}-\dfrac{1}{3}\right|\le 0,01\right\}\ge 0,75.$ 5) $n=222223.$ 6) $\varepsilon=0,043.$

4.3: 1) $k_0=2;\ P_{10}(2)=C_{10}^2\cdot(0,2)^2\cdot(0,8)^8$. 2) $62\le n\le 64.$ 3) $0,6<p\le 0,62.$

4) а) $k_0=2.$ б) $P_6(2)=0,324.$ в) $P_6(k\ge 2)=0,58.$ 5) $P_{100}(75)=0,04565.$ 6) $P_{50}(38)=0,136.$

4.4: 1) $P_{2100}(1470\le k\le 1500)=0,4236.$ 2) $P_{60}(k>30)=0,907.$ 3) $P_{1000}(k\le 120)=0,9825.$

4) $n = 177$. 5) $P\left\{\left|\frac{k}{n} - 0,8\right| \leq 0,02\right\} = 0,7888$. 6) $n \geq 632$. 7) $n = 6147$. 8) $\varepsilon = 0,01$.

9) $5 \leq k \leq 22$. 10) а) $P_{10000}(k > 100) = 0,0125$. б) $P_{10000}(k < 70) = 0,1314$.

4.5: 1) а) $P_{1000}(2) = 0,224$. б) $P_{1000}(k < 2) = 0,1992$. в) $P_{1000}(k > 2) = 0,5768$.

2) $P_{50}(0) = 0,819$. 3) $P_{200}(3) = 0,180$. 4) а) $P_{400}(3) = 0,195$. б) $P_{400}(k \geq 2) = 0,969$.

4.9: а) $P_4(4) = 0,006$. б) $P_4(3) = 0,065$. в) $P_4(2) = 0,254$. г) $P_4(1) = 0,423$. д) $P_4(0) = 0,252$.

Литература.

1. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М., Наука, 1988. – 448 с.
2. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. К., Вища школа, 1978. – 408 с.
3. Боровков А.А. Теория вероятностей. М., Наука, 1986. – 432 с.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теогии вероятностей и математической статистике. М., Высшая школа, 1979. – 400 с.
5. Дороговцев А.Я., Сильвестров Д.С., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей. Сборник задач. К., Вища школа, 1980. – 432 с.