МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова
Институт инновационного и последипломного обучения

Ефимова Г.А., Рудык О.Г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для самостоятельной работы по дисциплине

«МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ»

(раздел «Логистические задачи экономики»)

для студентов направлений подготовки 6.040301 «Прикладная математика» и 6.030502 «Экономическая кибернетика».

Одесса
ОНУ
2015

УДК 519.853
ББК 22.18

Методические указания для самостоятельной работы по дисциплине
«МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ»
(раздел «Логистические задачи экономики») для студентов направлений подготовки 6.040301 «Прикладная математика» и 6.030502 «Экономическая кибернетика».

Составители: **Ефимова Г.А.**, кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры оптимального управления и экономической кибернетики ИМЭМ;
Рудык О.Г., кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры экономической кибернетики и информационных технологий ИИПО.

Рецензенты: **Любота В.Н.,** кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры экономической кибернетики и информационных технологий ИИПО,
Кичмаренко О.Д., кандидат физико-математических наук,
зав.кафедрой оптимального управления и экономической кибернетики ИМЭМ.

Рекомендовано к печати Ученым советом ИИПО ОНУ им. И.И. Мечникова
Протокол № 7 от 17 марта 2015г.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания разработаны в соответствии с программой дисциплины «МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ» для студентов направления подготовки 6.040301 «Прикладная математика» и дисциплины «ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ» для студентов направления подготовки 6.030502 «Экономическая кибернетика».

Цель данных указаний - способствовать повышению эффективности и качества самостоятельной работы студентов при изучении методов решений различных транспортных задач. Традиционно в курсах «МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ» и «ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ» рассматриваются только транспортные задачи простейшего типа, однако с точки зрения реальных экономических процессов оправдано рассмотрение и более сложных постановок. Поэтому в указаниях приведены основные формулировки и описания методов решения таких задач. Указания не перегружены математическими доказательствами, приводимые решения наглядны.

Для закрепления полученных знаний студентов в указаниях приведены задания для самостоятельной работы, охватывающие основные темы.

Для осуществления контроля полученных знаний в указаниях приведено индивидуальное задание исследовательского характера. Это задание может быть выдано и студентам заочного отделения. Номер варианта задания совпадает с номером по списку в журнале академической группы. Список литературы приведен в конце указаний.

§1. Простейшая транспортная задача (ТЗ).

В m пунктах $A_1, A_2, \ldots, A_m$ сосредоточен некоторый однородный товар (продукт) в количествах $a_1, a_2, \ldots, a_m$ соответственно (предложение поставщиков). В этом продукте испытывают потребность n потребителей B_1, $B_2, \ldots, B_n$ в количествах $b_1, b_2, \ldots, b_n$ (спрос потребителей); $b_j > 0$, $a_i > 0$, $j = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, m}$.

Будем сначала предполагать, что совокупный спрос равен совокупному предложению, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad \textbf{(1)}$$

Соотношение (1) называется ***условием баланса***.

Пусть также известны расходы c_{ij} на перевозку единицы продукта из пункта i в пункт j: $c_{ij} > 0$, $j = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, m}$.

Требуется составить план перевозок продукта, при котором запасы каждого поставщика будут вывезены, спрос каждого потребителя удовлетворен и **общие транспортные расходы минимальны**.

Построим математическую модель задачи.

Сделаем ряд предположений:

1) товар является однородным, т.е. потребителю безразличен источник товара;
2) товар является делимым, т.е. возможна перевозка партиями любого размера;
3) все поставщики связаны коммуникациями со всеми потребителями;
4) затраты на перевозку товара прямо пропорциональны объемам перевозки.

Обозначим через x_{ij} объем перевозки от i-го поставщика к j-му потребителю. Переменные x_{ij} определяют матрицу перевозок

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Затраты, связанные с перевозкой на маршруте $A_i \rightarrow B_j$, составят величину $c_{ij} \cdot x_{ij}$, а общая стоимость перевозок **Z** от всех поставщиков ко всем потребителям определяется равенством

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}. \qquad \textbf{(2)}$$

В соответствии с постановкой задачи

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \; i=\overline{1,m}, \qquad \textbf{(3)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \; j=\overline{1,n}. \qquad \textbf{(4)}$$

Из экономического смысла переменных следует очевидное неравенство

$$x_{ij} \ge 0, \quad j=\overline{1,n}, \; i=\overline{1,m}. \qquad \textbf{(5)}$$

Таким образом, транспортная задача заключается в нахождении значений переменных x_{ij}, удовлетворяющих условиям (3)-(5) и минимизирующих целевую функцию **Z**. Это, вообще говоря, каноническая задача линейного программирования. В ней число неизвестных равно m·n, а число ограничений - равенств (3)-(4) равно m+n.

Ограничения (3) называются *строчными* (левая часть i-го ограничения представляет собой сумму элементов i-й строки матрицы X), а ограничения (4) называются *столбцовыми* (т.к. j-е ограничение использует сумму элементов j-го столбца матрицы X).

Замечание. Условие баланса (1) есть условие совместности системы ограничений (3)-(4).

Определение 1. Матрица X, элементы которой удовлетворяют соотношениям (3)-(5), называется *планом перевозки*.

Определение 2. Транспортная задача, для которой выполняется условие баланса (1), называется *закрытой*. Если это условие нарушено, то говорят, что задача *открытая*.

Возможны два случая для открытой задачи.

1) $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$. В этом случае после удовлетворения спроса всех потребителей у некоторых поставщиков останется невывезенный продукт. Математическая модель будет иметь вид:

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \; i=\overline{1,m}, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_{ji}, \; j=\overline{1,n}. \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i=\overline{1,m}, \; j=\overline{1,n}.$$

2) $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ (поставки для некоторых потребителей будут меньше их потребностей).

ТЗ примет вид:

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & i=\overline{1,m}, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j, & j=\overline{1,n}. \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0,\ \ i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}.$$

В первом случае открытая модель сводится к закрытой ТЗ введением фиктивного потребителя $B_ф$ с величиной спроса $b_ф = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i - \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$ и $c_{iф}$ =0, $i=\overline{1,m}$. Во втором случае - фиктивного поставщика $A_ф$ с объемом предложения $a_ф = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j - \sum\limits_{i=1}^{m} a_i$, $c_{фj}$ =0, $j=\overline{1,n}$. В результате получим закрытую ТЗ, причем значения фиктивных перевозок будут равны объему товара, остающегося у поставщиков для случая 1 или объему неудовлетворенного спроса у поставщиков для случая 2.

В данном параграфе будем рассматривать закрытую ТЗ.

Матрица основных ограничений имеет специфический вид:

$$\left(\underbrace{\begin{array}{cccc} \overbrace{11...1}^{n} & \overbrace{00...0}^{n} & .... & \overbrace{00...0}^{n} \\ 00...0 & 11...1 & .... & 00...0 \\ .... & .... & .... & .... \\ 00...0 & 00...0 & .... & 11...1 \\ 10...0 & 10...0 & .... & 10...0 \\ 01...0 & 01...0 & .... & 01...0 \\ .... & .... & .... & .... \\ 00...1 & 00...1 & .... & 00...1 \end{array}}_{m \cdot n} \right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c} 1\\1\\1\\1 \end{array}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c} 1\\1\\1\\1 \end{array}}\right\} n \end{array} \qquad \textbf{(6)}$$

В (6) первые m строк соответствуют строчным ограничениям (3), следующие n строк – столбцовым ограничениям (4).

Свойства закрытой ТЗ.

1. Ранг матрицы (6) равен m+n-1.
2. В ТЗ всегда существуют планы, содержащие не более m+n-1 положительных элементов.
3. ТЗ всегда имеет оптимальный план.
4. Если в ТЗ все числа a_i и b_j целые, то она имеет оптимальный целочисленный план.

Определение 3. План X, в котором m+n-1 положительных элементов, называется ***невырожденным***. Если количество положительных компонент меньше m+n-1, то такой план X называется ***вырожденным***. Клетки, которым соответствуют x_{ij} >0, называются ***занятыми***.

§2.Методы построения начального плана перевозок для ТЗ

Будем использовать транспортную таблицу (ТТ), в которой каждая клетка (i,j) будет соответствовать маршруту $A_i \to B_j$. В левом верхнем углу каждой клетки (i,j) будет располагаться тариф c_{ij}, в центре – величина перевозки x_{ij}.

2.1. Метод северо-западного угла

Данный метод является самым «грубым» методом, так как не учитывает тарифы c_{ij}. На каждом шаге заполняем клетку, находящуюся в северо-западном углу ТТ среди невычеркнутых и незанятых клеток. При этом x_{ij} полагается равным $\min(a_i, b_j)$, после чего происходит корректировка значений a_i и b_j

Пример 1. Пусть $a_1 = 7, a_2 = 9, a_3 = 13$,

$$b_1 = 10,\ b_2 = 7,\ b_3 = 4,\ b_4 = 8 .$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Проверим условие баланса: $\sum_i a_i = 7 + 9 + 13 = 29$,

$$\sum_j b_j = 10 + 7 + 4 + 8 = 29 .$$

Условие (1) выполняется.

Построим план X по методу северо-западного угла. ТТ начинаем заполнять с верхней левой клетки (1,1):

$$x_{11}=\min(7,10)=7=a_1 .$$

Т.к. первый поставщик A_1 весь товар перевезет к первому потребителю B_1, то остальные клетки первой строки можно **исключить** из рассмотрения. Кроме того, B_1 уже изменит величину своего спроса: b_1=10-7=3. Следующая левая свободная верхняя клетка ТТ есть (2,1):

$$x_{21}=\min(9,3)= 3=b_1 ,$$

тем самым спрос B_1 уже полностью удовлетворен (первый столбец **исключаем** из рассмотрения). У поставщика A_2 останется товара a_2=9-3=6. Далее заполняем клетки (2,2), (3,2), (3,3), (3,4).

Решение задачи можно представить в виде следующей ТТ.

Таблица 1.

j / i	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4 7	3	2	6	7
A_2	2 3	4 6	5	1	9
A_3	3	6 1	7 4	5 8	13
b_j	10	7	4	8	29 / 29

Начальный план перевозок $X^1 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, стоимость перевозок

z^1=4·7+2·3+4·6+6·1+7·4+5·8=132 (ден. ед.)

2.2. Метод минимального элемента

В нем заполняется клетка (i,j), в которой тариф наименьший из всех незанятых и неисключенных клеток.

Найдем план перевозок X^2 для примера 1 методом минимального элемента.

Здесь $c_{24} = \min\limits_{i,j} c_{ij} = 1$. Поэтому заполнение ТТ начинаем с клетки (2,4): x_{24} =min(9,8)=8, после чего спрос B_4 будет удовлетворен полностью (столбец 4 исключим из рассмотрения), a_2=9-8=1, т.е. у A_2 останется товара 1 ед. Затем заполняем клетки ТТ в следующей последовательности: (1,3), (2,1), (3,1), (3,2).

Таблица 2.

j / I	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	3 3	2 4	6	7
A_2	2 1	4	5	1 8	9
A_3	3 9	6 4	7	5	13
b_j	10	7	4	8	29 / 29

$$X^2=\begin{pmatrix}0&3&4&0\\1&0&0&8\\9&4&0&0\end{pmatrix},\ z^2=3\cdot3+2\cdot4+2\cdot1+1\cdot8+3\cdot9+6\cdot4=78 \text{ (ден. ед.)}$$

2.3. Метод Фогеля.

Хотя этот метод является эвристическим, но часто дает близкий к оптимальному план перевозок.

Алгоритм этого метода состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Для каждой строки и каждого столбца вычисляем ***штрафы,*** вычитая наименьший элемент строки (столбца) из следующего за ним по величине элемента той же строки (столбца).

Шаг 2. Выбираем наибольший из штрафов и отмечаем соответствующую ему строку или столбец. В отмеченной строке или столбце выбираем клетку с самым низким тарифом и вычисляем соответствующую ей величину перевозки. Корректируем объемы спроса и предложения, соответствующие этой клетке, и исключаем из рассмотрения строку или столбец, для которого ограничение выполнено.

Замечание. Если ограничения по строке или столбцу выполняются одновременно, то исключаем либо строку, либо столбец, а оставшемуся столбцу (строке) приписываем нулевой спрос (нулевое предложение). Строка (столбец) с нулевым предложением (спросом) не используется в дальнейших вычислениях.

Шаг 3. Вычисляем новые значения штрафов для невычеркнутых строк и столбцов и возвращаемся к шагу 2.

Замечание. Если остается невычеркнутой только одна строка (столбец) с положительным объемом предложения (спроса), то заполняем ее, используя метод минимального элемента.

Построим начальный план перевозки в примере 1 методом Фогеля.

Таблица 3 .

j I	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	Штрафы строк		
A_1	4	3 3	2 4	6	7	3-2=1	3-2=1	4-3=1
A_2	2	4 1	5	1 8	9	2-1=1	4-2=2	4-2=2
A_3	3 10	6 3	7	5	13	5-3=2	6-3=3	6-3=3
b_j	10	7	4	8	29 29			
Штрафы столбцов	3-2=1	4-3=1	5-2=3	5-1=4				
	3-2=1	4-3=1	5-2=3					

Последним невычеркнутым является второй столбец, его заполняем по методу минимального элемента.

В итоге получаем

$$X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 10 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ z^3=3\cdot3+2\cdot4+4\cdot1+1\cdot8+3\cdot10+6\cdot4=77 \text{ (ден. ед.).}$$

Как видно из результатов $z^3 < z^2 < z^1$.

В данном примере m=3, n=4, m+n-1=6. И в X^1, и в X^2, и в X^3 по 6 положительных элементов, поэтому планы X^1, X^2, и X^3 - невырожденные. Для X^3 клетки (1,2), (1,3), (2,2), (2,4), (3,1), (3,2) – занятые.

Пример 2. $a_1 = 7, a_2 = 9,\ a_3 = 13,$

$b_1 = 7\ ,\ b_2 = 10,\ b_3 = 4,\ b_4 = 8\ .$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Методом минимального элемента построим начальный план перевозки.

Таблица 4.

i \ j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 7	3	2	6	7
A_2	2	4 1	5	1 8	9
A_3	3	6 9	7 4	5	13
b_j	7	10	4	8	29 \ 29

$$X = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 9 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$ Здесь m=3, n=4, а количество положительных x_{ij} равно 5, следовательно, план X – вырожденный.

§3. Улучшение плана перевозок

Построим двойственную задачу к задаче (2)-(5). Для этого строчным ограничениям (3) поставим в соответствие двойственные переменные - потенциалы поставщиков u_i, $i = \overline{1,m}$, а столбцовым ограничениям (4) –

двойственные переменные v_j , $j=\overline{1,n}$ - потенциалы потребителей.
Двойственная задача примет вид:

$$\max w=\sum_{i=1}^{m} a_i u_i+\sum_{j=1}^{n} b_j u_j$$

$$u_i+v_j \leq c_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$$

Следует заметить, что так как исходная задача (2)-(5) с ограничениями - равенствами, то в двойственной задаче переменные u_i и v_j не ограничены по знаку.

Введем обозначение $\Delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}$.

Признак оптимальности плана ТЗ: если план Х оптимален, то ему соответствует система из (m+n) чисел u_i и v_j , удовлетворяющим условиям:

$$u_i+v_j=c_{ij},\ \text{для } x_{ij}>0,$$

$$u_i+v_j \leq c_{ij},\ \text{для } x_{ij}=0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}. \tag{7}$$

Или:

$$\Delta_{ij}=0,\ \text{при } x_{ij}>0$$

$$\Delta_{ij} \leq 0,\ \text{при } x_{ij}=0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}. \tag{7'}$$

Заметим, что система из (m+n) чисел u_i и v_j , удовлетворяющих (7), неединственная и можно одно из чисел задать произвольным образом, например, равным нулю.

Определение 4. *Циклом* в ТТ называется такая конечная последовательность клеток $(i_1, j_1),...,(i_t, j_t)$, что

1) все входящие в нее клетки различны;
2) две смежные клетки последовательности лежат или в одной строке, или в одном столбце с чередованием. При этом клетки (i_1, j_1) и (i_t, j_t) также считаются смежными.

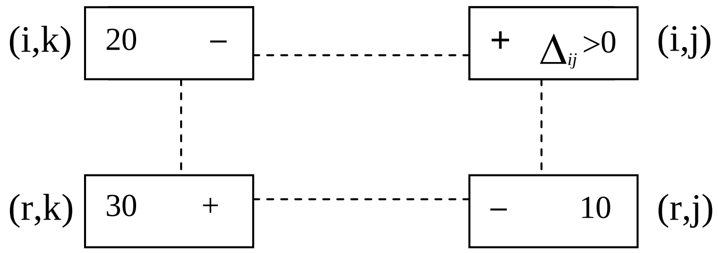
Таким образом, у любой пары смежных клеток цикла должны быть одинаковыми или первые, или вторые индексы с чередованием. Например, (i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), (i_2, j_3),…, (i_t, j_1) образуют цикл.

Метод потенциалов

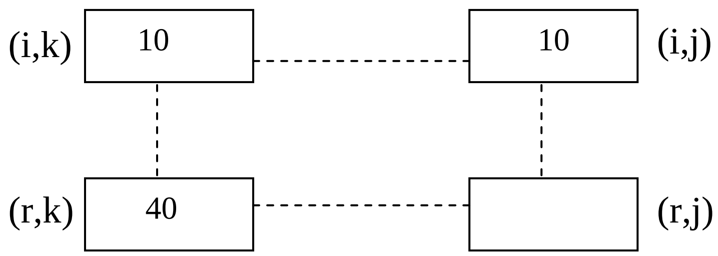
Если невырожденный план Х неоптимален, т.е. условие (7′) не выполняется, то для построения нового плана $\tilde{X}$ такого, что $z\left(\tilde{X}\right)<z\left(X\right)$, применим *метод потенциалов*. Его идея состоит в том, что при наличии хотя бы одной оценки Δ_{ij}>0 строится цикл, начиная из клетки (i,j), включая в него

только занятые клетки, и производится перемещение товара так, чтобы баланс цикла сохранялся. Для этого клетку с $\Delta_{ij}>0$ помечаем знаком ⊕, а затем, двигаясь по занятым клеткам, вошедшим в цикл, чередуем знаки Θ, ⊕, Θ и т.д.

Например, цикл имеет вид:



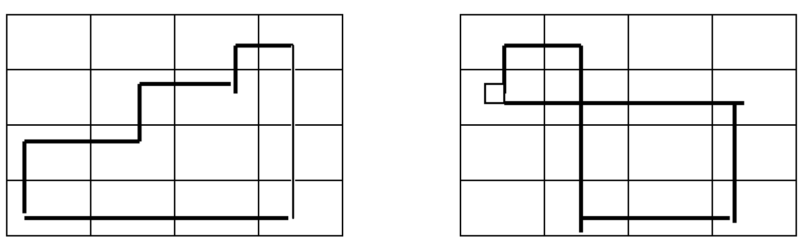
Здесь незанятая клетка (i,j) соответствует $\Delta_{ij}>0$; клетки (i,k), (r,k), (r,j) для невырожденного плана имеют положительные объемы перевозки. Клетка (i,j) помечается знаком ⊕, смежная с ней (r,j) – знаком Θ, смежная ей (r,k) – знаком ⊕, смежная (i,k) – знаком Θ. В клетках, вошедших в цикл, и помеченных знаком Θ, находим наименьшую перевозку, т.е. min(20,10)=10. Количество товара, равное 10 единицам, прибавляем к поставкам со знаком ⊕ и вычитаем из поставок со знаком Θ. В результате получим:



Т.о. клетка (i,j) становится занятой, а клетка (r,j), в которой стояла минимальная перевозка, – свободной.

Замечание 1. В цикл могут быть включены не все занятые клетки, а только часть из них.

Замечание 2. Цикл может иметь произвольную конфигурацию. Например,



Замечание 3. Если проверяемый на оптимальность план X вырожденный, то прежде чем вычислять значения u_i и v_j и проверять условие (7), необходимо количество занятых клеток довести до m+n-1. Для этого в плане

X требуется клетку с x_{ij} =0 сделать занятой (создать «явный нуль»). Выбор такой клетки должен быть подчинен только одному правилу: чтобы из <u>занятых</u> клеток <u>нельзя</u> было выделить цикл.

Так, в примере 2 клетку (2,3) нельзя делать занятой «явным нулем», т.к. тогда из клеток (2,2), (2,3), (3,3), (3,2) можно выделить цикл, а, например, клетку (1,2) можно сделать занятой «явным нулем».

Продолжим решение примера 1, проверив оптимальность плана X^2. Система соотношений (7) для X^2 будет иметь вид:

$$\begin{cases} u_1+v_2=3 \\ u_1+v_3=2 \\ u_2+v_1=2 \\ u_2+v_4=1 \\ u_3+v_1=3 \\ u_3+v_2=6 \end{cases}$$

Здесь 7 неизвестных, 6 уравнений. Найдем частное решение системы. Положим, например, u_1=0. Тогда получим, что v_2=3, v_3=2, u_3=3, v_1=0, u_2 =2, v_4=-1. Таким образом $u=(u_1,u_2,u_3)=(0;2;3)$,

$v=(v_1,v_2,v_3,v_4)=(0;3;2;-1)$.

Проверим условие оптимальности (7′):

Δ_{11}=0+0-4<0 Δ_{22}=3+2-4=1>0 **!** Δ_{33}=2+3-7<0

Δ_{14}=-1+0-6<0 Δ_{23}=2+2-5<0 Δ_{34}=-1+3-5<0

Так как Δ_{22}>0, то план X^2 не оптимальный. Применим метод потенциалов для его улучшения. Для этого построим цикл, начиная с клетки (2,2) и двигаясь далее по занятым клеткам: (2,2), (3,2), (3,1), (2,1)

$\oplus$ $\ominus$ $\oplus$ $\ominus$

Таблица 5.

i \ j	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	^{4}	^{3} 3	^{2} 4	^{6}
A_2	^{2} 1 −	^{4} +	^{5}	^{1} 8
A_3	^{3} 9 +	^{6} − 4	^{7}	^{5}

x_{22} =min(1,4)=1, x_{31}=9+1=10, x_{32}=4-1=3.

Клетка (2,1) становится свободной, x_{12} , x_{13} , x_{24} остаются теми же, т.к. не вошли в цикл. Получаем следующую ТТ с новыми потенциалами:

Таблица 6.

i \ j	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	4	3 3	2 4	6	0
A_2	2	4 1	5	1 8	1
A_3	3 10	6 3	7	5	3
v_j	0	3	2	0	

Проверим условие оптимальности:

Δ_{11} =0+0-4<0 Δ_{22} =0+1-2<0 Δ_{33} =2+3-7<0

Δ_{14} =0+0-6<0 Δ_{23} =2+1-5<0 Δ_{34} =0+3-5<0

Следовательно, полученный план – оптимальный. Заметим, что он совпадает с X^3, полученным по методу Фогеля.

Решим пример 2, сделав клетку (1,2) занятой «явным нулем».

Таблица 7.

i \ j	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	1 7	3 – 0	2 +	6	0
A_2	2	4 1	5	1 8	1
A_3	3	6 + 9	7 – 4	5	3
v_j	1	3	4	0	

Δ_{13}=4+0-2=2>0, Δ_{31}=1+3-3=1>0.

Построим цикл, начиная с (1,3). x_{13} =min(0,4)=0.

В следующей ТТ положительные перевозки не изменятся. Поменяется местоположение «явного нуля»: из (1,2) он перейдет в (1,3).

Таблица 8.

j / i	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	^{1} 7 −	^{3}	^{2} + 0	^{6}	0
A_2	^{2} +	^{4} − 1	^{5}	^{1} 8	3
A_3	^{3}	^{6} 9 +	^{7} − 4	^{5}	5
v_j	1	1	2	-2	

Δ_{21}=1+3-2=2>0, Δ_{31}=1+5-3=3>0.

Начнем цикл из (2,1): (2,1), (2,2), (3,2), (3,3), (1,3), (1,1).

x_{21}=min(7,1,4)=1.

Следующая ТТ с новыми потенциалами примет вид:

Таблица 9.

j / i	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	^{1} 6	^{3}	^{2} 1	^{6}	0
A_2	^{2} 1	^{4}	^{5}	^{1} 8	1
A_3	^{3}	^{6} 10	^{7} 3	^{5}	5
v_j	1	1	2	0	

Сделав еще 3 итерации, получим:

Таблица 10.

j / i	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	1	3 ; 3	2 ; 4	6	0
A_2	2	4 ; 1	5	1 ; 8	1
A_3	3 ; 7	6 ; 6	7	5	3
v_j	0	3	2	0	

Все $\Delta_{ij} \le 0$, следовательно, план $X = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 7 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ оптимальный.

§4. Неединственность оптимального плана ТЗ

Сформулируем ***признак неединственности*** оптимального плана ТЗ: если в оптимальной ТТ существует <u>нулевое</u> значение Δ_{ij} хотя бы в одной <u>незанятой</u> клетке и по этому маршруту можно осуществить ненулевую поставку, то данная ТЗ имеет неединственный оптимальный план перевозок.

Пример 3. $a_1 = 180$, $a_2 = 200$, $a_3 = 160$, $b_1 = 130$ $b_2 = 170$, $b_3 = 200$,

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 14 & 6 & 8 \\ 12 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Поверим условие баланса: $\sum_i a_i = 540$, $\sum_j b_j = 500$. Т. к. $\sum_i a_i > \sum_j b_j$, то добавляем фиктивного потребителя $B_ф$ с объемом спроса $b_ф = 540 - 500 = 40$, причем $c_{iф} = 0$, $i = \overline{1,3}$. ТТ примет вид:

Таблица 11.

j / i	B_1	B_2	B_3	$B_ф$	u_i
A_1	9 ; 130	8	7 ; 50	0	0
A_2	14	6 ; 170	8 ; 30	0	1
A_3	12	9	10 ; 120	0 ; 40	3

v_j	9	5	7	-3	

План $\overline{X} = \begin{pmatrix} 130 & 0 & 50 \\ 0 & 170 & 30 \\ 0 & 0 & 120 \end{pmatrix}$ оптимальный, $z(\overline{X}) = 3980$ (ден. ед.). Значение $x_{3ф} = 40$ означает, что у поставщика A_3 останутся невывезенными 40 ед. товара. Данный план неединственный , т.к. Δ_{31}=0. Построим цикл, начиная с клетки (3,1): x_{31}=min(120,130)=120. Получим ТТ:

Таблица 12.

j / i	B_1	B_2	B_3	$B_ф$	u_i
A_1	9 10	8	7 170	0	0
A_2	14	6 170	8 30	0	1
A_3	12 120	9	10	0 40	3
v_j	9	5	7	-3	

План $\overline{\overline{X}} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 170 \\ 0 & 170 & 30 \\ 120 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ - оптимальный , $z\left(\overline{\overline{X}}\right)$=3980 (ден. ед.).

Замечание. Планы $\overline{X}$ и $\overline{\overline{X}}$ являются крайними точками (вершинами) множества планов данной задачи. Как следует из теории линейного программирования, в этом случае задача имеет бесконечное множество оптимальных планов, для которых значение целевой функции z =3980 ден.ед.

Например, если по маршруту $A_3 \rightarrow B_3$ отправить 100 ед. товара (меньше, чем максимально возможно 120 ед.), то план $\tilde{X}$ примет вид:

$\tilde{X} = \begin{pmatrix} 110 & 0 & 70 \\ 0 & 170 & 30 \\ 20 & 0 & 100 \end{pmatrix}$, $x_{3ф}$=40, $z\left(\tilde{X}\right)$=3980 ден. ед.

§5. Запрещенные перевозки (блокирование)

В §1 были сделаны предположения о возможности совершения перевозки по любому маршруту $A_i \to B_j$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Однако в реальности некоторые коммуникации могут отсутствовать или в силу некоторых причин могут быть запрещены перевозки от определенного поставщика к определенному потребителю, например, от A_i к B_k. Это означает, что в оптимальном плане x_{ik} должно быть нулевым независимо от тарифа c_{ik}. Поэтому изменяем значение c_{ik}, полагая его равным достаточно большому положительному значению M>>0, тем самым искусственно увеличиваем тариф на маршруте $A_i \to B_k$. Если в задаче дополнительное условие принципиально осуществимо, то в оптимальном плане такая клетка (i,k) будет освобождена (в силу минимизации функции Z).

Например, в примере 1 запретим перевозку товара от третьего поставщика к первому потребителю: c_{31}=M.

Начнем решение такой задачи с плана X^3, который теперь является недопустимым, т.к. не учитывает блокирование клетки (3,1):

Таблица 13.

I \ j	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	^{4} +	^{3} – 3	^{2} 4	^{6}	0
A_2	^{2}	^{4} 1	^{5}	^{1} 8	1
A_3	^{M} – 10	^{6} + 3	^{7}	^{5}	3
v_j	M-3	3	2	0	

Δ_{11}=M-3-4=M-7>0 !, Δ_{21}=M-3-1-2=M-6>0 !

Сделав 6 итераций, из которых на первых четырех постепенно уменьшается объем перевозок $A_3 \to B_1$, получим оптимальный план $\overline{X}$:

Таблица 14.

j / I	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	4 1	3 2	2 4	6	0
A_2	2 9	4	5	1	-2
A_3	M	6 5	7	5 8	3
v_j	4	3	2	2	

$\Delta_{ij} \le 0$, $\overline{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $z(\overline{X}) = 106$ (ден. ед.).Очевидно, что $z(\overline{X}) > z(X^3)$.

§6. Обязательные поставки

Довольно часто в реальных задачах необходимо учитывать, что некоторыми поставщиками и потребителями заключены договора на поставку определенного количества товара, которые необходимо выполнять независимо от транспортных затрат.

Пусть в примере 1 заключен договор между A_2 и B_1 на поставку 4 ед. товара, т.е. в оптимальном плане должно выполняться неравенство $x_{21} \ge 4$. Поэтому прежде, чем составлять ТТ, скорректируем a_2 и b_1, учитывая только остатки предложения a_2 и спроса $b_1: a_2' = a_2 - 4 = 5$; $b_1' = b_1 - 4 = 6$. Тогда ТТ примет вид:

Таблица 15.

j / I	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	3	2	6	7
A_2	2	4	5	1	5
A_3	3	6	7	5	13
b_j	6	7	4	8	25 / 25

Сделав несколько итераций, получим оптимальный план для представленной ТТ: $X^0 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 6 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Однако в окончательной матрице перевозок необходимо учесть и перевозку на маршруте $A_2 \to B_1$.

$X^0 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 5 \\ 6 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $z\left(X^0\right)$=87 (ден.ед.). Очевидно, что $z\left(X^0\right) > z\left(X^3\right)$.

Замечание. Если бы между A_2 и B_1 был заключен договор на поставку 9 ед. товара, то, положив $x_{21} = 9$, в ТТ можно было бы исключить строку, соответствующую A_2, по причине того, что весь свой товар поставщик A_2 должен перевезти потребителю B_1. При этом b'_1=10-9=1 ед.

§7. Транспортная задача с ограничениями на пропускную способность

Пусть в закрытой ТЗ для некоторого маршрута $A_l \to B_k$ заданы ограничения на пропускную способность: $0 \le x_{ik} \le d_{ik}$. При решении такой задачи меняется условие существования решения и правило построения начальной ТТ.

Разрешимость задачи. В простейшей ТЗ условие баланса – это необходимое и достаточное условие разрешимости задачи. Для данной задачи оно является только необходимым условием. Например, если

$$\sum_j d_{lj} < a_l$$

при некотором l, то задача решения не имеет. Поэтому достаточным условием разрешимости ТЗ здесь служит существование хотя бы одного допустимого решения.

Построение транспортной таблицы. Если на маршруте $A_l \to B_k$ пропускная способность есть d_{lk}, причем

$$d_{lk} < b_k < a_l,$$

то вместо столбца для B_k в ТТ делаем 2 столбца B'_k и B''_k с $b'_k = d_{lk}$, $b''_k = b_k - d_{lk}$, причем значения c'_{ik} и c''_{ik}, совпадают с c_{ik}, но c''_{lk} полагаем равным M>>0, тем самым блокируем маршрут $A_l \to B''_k$. Дальнейшие вычисления остаются теми же, что и в §2, §3.

Если для d_{lk} имеем неравенство

$$d_{lk} < a_l < b_k,$$

то вместо строки, соответствующей A_l, в ТТ формируем две строки A'_l, A''_l с $a'_l = d_{lk}$, $a''_l = a_l - d_{lk}$, $c''_{lk} =$ M>>0, $c'_{lj} = c''_{lj} = c_{lj}$, $j = \overline{1,n}$, $j \neq k$.

Например, пусть в примере 1 пропускная способность на маршруте $A_3 \to B_1$ ограничена величиной 7 ед. товара. Тогда транспортная таблица примет вид:

Таблица 16.

j I	B'_1	B''_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	4	3	2	6	7
A_2	2	2	4	5	1	9
A_3	3	*M*	6	7	5	13
b_j	7	3	7	4	8	

Сделав несколько итераций, получим следующую таблицу

Таблица 17.

j I	B_1		B_2	B_3	B_4	u_i
	B'_1	B''_1				
A_1	4	4	3 3	2 4	6	0
A_2	2	2 3	4	5	1 6	-1
A_3	3 7	*M*	6 4	7	5 2	3
v_j	0	3	3	2	2	

Оптимальный план

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 6 \\ 7 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; z\left(X^*\right) = 108 \text{ (ден.ед.)}$$

Сравнивая со значениями целевой функции $z\left(X^3\right)$ транспортной задачи без ограничений, видим, что произошло подорожание перевозок на 31 ден.ед.

§8. Доставка груза в кратчайший срок

Пусть вместо матрицы тарифов С дана матрица Т, элементами которой t_{ij} является время, затрачиваемое на перевозку единицы груза по маршруту $A_i \to B_j$.

Сохраним предположения §1. Пусть также выполняется условие баланса. Требуется найти план перевозки однородного груза в кратчайший срок.

Если определить план перевозок из условия минимизации функции Z как суммарного времени пробега по всем маршрутам

$$Z = \sum_i \sum_j t_{ij} x_{ij},$$

то по этому плану, как правило, груз не будет доставлен в кратчайший срок. Поэтому опишем итерационный метод решения такой задачи на конкретном примере.

Пример 4. Пусть $a_1 = 30$, $a_2 = 35$, $a_3 = 40$, $b_1 = 20$ $b_2 = 34$, $b_3 = 16$, $b_4 = 10$,

$$b_5 = 25\ .\ \sum_i a_i = \sum_j b_j = 105.$$

Решение. Построим любым методом §2 начальный план перевозок. Например, по методу «северо-западного угла»:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 25 \end{pmatrix}.$$

В матрице Т=$\|t_{ij}\|$ подчеркнем все элементы, соответствующие занятым клеткам в X_1:

$$T^1 = \begin{pmatrix} \underline{2} & \underline{6} & 3 & 4 & 8 \\ 1 & \underline{5} & \underline{6} & 9 & 7 \\ 3 & 4 & \underline{1} & \underline{6} & \underline{10} \end{pmatrix}.$$

Найдем среди подчеркнутых элементов t_{ij} наибольший: $t^1 = t_{35} = 10$.

Все клетки матрицы Т, которым соответствуют элементы $t_{ij} \geq t^1$, блокируем, т.е. заменяем на достаточно большое число M>>0: t_{35}=M. Получаем матрицу $\overline{T}^1 = \|t_{ij}^{\ 1}\|$:

$$\overline{T}^{\,1}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & M \end{pmatrix}.$$

Для этой матрицы ищем оптимальный план, минимизирующий функцию $z=\sum_i\sum_j t_{ij}^{1}\, x_{ij}$.

$$X_2=\begin{pmatrix} 10 & 10 & 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 24 & 16 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Повторяем предыдущую схему:

$$T^{2}=\begin{pmatrix} \underline{2} & \underline{6} & 3 & \underline{4} & 8 \\ \underline{1} & 5 & 6 & 9 & \underline{7} \\ 3 & \underline{4} & \underline{1} & 6 & M \end{pmatrix},\ t^{2}=7,$$

$$\overline{T}^{\,2}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 4 & M \\ 1 & 5 & 6 & M & M \\ 3 & 4 & 1 & 6 & M \end{pmatrix},\ \overline{T}^{\,2}=\left\| t_{ij}^{2} \right\|.$$

Для этой матрицы находим оптимальный план

$$X_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 10 & 20 \\ 20 & 10 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 24 & 16 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $x_{15}=20,\ \ x_{25}=5$, но $t^{2}_{15}=M,\ t^{2}_{25}=M$. Если бы в X_3 все блокированные клетки освободились, то вычисления следовало бы продолжить. Однако здесь блокированные клетки (1,5) и (2,5) заняты, поэтому найденное на предыдущем этапе X_2 является искомым оптимальным по времени решением. Ему соответствует $t_{\min}=t^{2}=7$ ед. времени.

§9.Двухэтапная транспортная задача.

Нередко перевозка товара от поставщиков потребителям производится через промежуточные пункты, которые назовём **складами.**

Рассмотрим ТЗ в следующей постановке: пусть в пунктах $A_1, A_2, ..., A_m$ имеется однородный товар. Его надо перевезти на склады $D_1, D_2, ..., D_p$, а затем доставить потребителям, расположенным в пунктах $B_1, B_2, ..., B_n$. Пусть, как и ранее, известны a_i и b_j - объёмы предложения поставщика A_i и спроса потребителя B_j, а также d_k - ёмкости складов, $k = \overline{1, p}$; $c_{ik}, \tilde{c}_{kj}$ - тарифы за перевозку единицы товара от A_i на склад D_k и со склада D_k к B_j, а также выполняются все предположения §1. Требуется составить оптимальный план перевозки товара, минимизирующий общие транспортные затраты.

Возможны несколько случаев. Рассмотрим некоторые из них.

1 случай. $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{k=1}^{p} d_k = \sum_{j=1}^{n} b_j$, т.е. общая ёмкость складов равна совокупному предложению и совокупному спросу. Тогда в любом плане перевозок каждый склад будет заполнен полностью. Следовательно, план перевозок товара со складов потребителям не зависит от плана перевозок товара от поставщиков на склады. Поэтому транспортную задачу можно разбить на две ТЗ, которые решаются независимо друг от друга. В результате будем иметь оптимальный план X^1 перевозок от поставщиков на склады с транспортными затратами Z_1^* и оптимальный план X^2 перевозок со складов потребителям с транспортными издержками Z_2^*. Таким образом, общие транспортные издержки $Z^* = Z_1^* + Z_2^*$.

2 случай. $\sum_k d_k > \sum_i a_i$ и $\sum_k d_k > \sum_j b_j$.

Эти неравенства означают, что ёмкости складов не будут использованы полностью, поэтому план перевозок товара со складов потребителям будет зависеть от того, как были заполнены склады во время 1-го этапа – развозки товара от поставщиков на склады. Поэтому решение задачи должно производиться в рамках единой модели, причём каждый склад будет выступать и в качестве потребителя на 1-м этапе $(A_i \to D_k)$, и в качестве поставщика на 2-м этапе ($D_k \to B_j$).

А. Построим математическую модель, например, для случая, когда $\sum_k d_k > \sum_j b_j > \sum_i a_i$, т. е.

а) товары от поставщиков вывозятся полностью;
б) потребности потребителей, по возможности, удовлетворены;
в) все товары проходят через склады;
г) суммарные транспортные расходы являются минимальными.

Введём в рассмотрение две матрицы

$X_{(m\times p)} = \begin{pmatrix} x_{11}\ldots x_{1p} \\ x_{m1}\ldots x_{mp} \end{pmatrix} = \left\| x_{ik} \right\|_{k=\overline{1,p}}^{i=\overline{1,m}}$ и $\tilde{X}_{(p\times n)} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{11}\ldots \tilde{x}_{1n} \\ \tilde{x}_{p1}\ldots \tilde{x}_{pn} \end{pmatrix} = \left\| \tilde{x}_{kj} \right\|_{j=\overline{1,n}}^{k=\overline{1,p}}$ - планируемые поставки от A_i на D_k и от D_k в B_j, $i=\overline{1,m}, k=\overline{1,p}, j=\overline{1,n}$.

Суммарные затраты:

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} c_{ik}\cdot x_{ik} + \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{kj}\cdot \tilde{x}_{kj} \to \min .$$

Ограничения по поставкам: $\sum_{k=1}^{p} x_{ik} = a_i, i=\overline{1,m}$, т. е. планируемый объём перевозок от каждого поставщика равен его предложению.

Ограничения по потребителям: $\sum_{k=1}^{p} \tilde{x}_{kj} \le b_j,\ j=\overline{1,n}$, т. е. планируемые поставки каждому потребителю не превышают его спроса.

Кроме того, в качестве потребителя на первом этапе склад может принять товара не более своей ёмкости:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} \le d_k, k=\overline{1,p} ,$$

и в качестве поставщика на втором этапе со склада должно быть вывезено всё, что туда было завезено, т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_{kj} = \sum_{i=1}^{m} x_{ik}, k=\overline{1,p} .$$

Кроме того, $x_{ik} \ge 0, \tilde{x}_{kj} \ge 0, \quad i=\overline{1,m},\ k=\overline{1,p},\ j=\overline{1,n}$.

В данном случае имеем несбалансированную задачу, поэтому следует ввести фиктивного поставщика и разрешить прямые поставки от фиктивного поставщика потребителям с нулевыми тарифами.

В. Пусть $\sum_k d_k > \sum_i a_i > \sum_j b_j$, т. е. совокупный спрос меньше совокупного предложения, который, в свою очередь, меньше совокупной ёмкости складов.

В этом случае:

а) потребности B_j, $j=\overline{1,n}$, будут удовлетворены полностью;

б) у поставщиков может остаться невостребованным некоторый объем товара;

в) все товары проходят через склады;

г) суммарные транспортные расходы должны быть минимальны.

Суммарные затраты:

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} c_{ik} \cdot x_{ik} + \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{kj} \cdot \tilde{x}_{kj}$$

Ограничения по поставщикам: $\sum_{k=1}^{p} x_{ik} \le a_i, i = \overline{1, m}$.

Ограничения по потребителям: $\sum_{k=1}^{p} \tilde{x}_{kj} = b_j, j = \overline{1, n}$.

Ограничения по складам как потребителям: $\sum_{i=1}^{m} x_{ik} \le d_k, k = \overline{1, p}$.

Ограничения по складам как поставщикам: $\sum_{i=1}^{m} x_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_{kj}$.

Кроме того, $x_{ik} \ge 0, \tilde{x}_{kj} \ge 0, i = \overline{1, m}, k = \overline{1, p}, j = \overline{1, n}$.

В силу несбалансированности задачи необходимо ввести фиктивного потребителя, разрешить прямые поставки от поставщиков к нему с нулевыми тарифами.

В любом из рассмотренных выше случаев для разрешимости задачи необходимо выполнение условия:

$$\sum_{k} d_k \ge \max\{\sum_{i=1}^{m} a_i; \sum_{j=1}^{n} b_j\},$$

(8)

которое означает, что совокупная ёмкость складов позволяет осуществить требуемый объём перевозок.

Рассмотрим метод решения двухэтапной ТЗ в рамках единой модели, который называется <u>«метод фиктивной диагонали»</u> и использует то, что склады выступают и в качестве потребителей, и в качестве поставщиков. Поэтому в такой задаче (m+p) поставщиков и (p+n) потребителей. Транспортная таблица будет разбита на 4 блока

	D_k	B_j
A_i	1	2
D_k	3	4

В блоке 1 помещаются элементы матрицы $C = \left\| c_{ik} \right\|_{k=\overline{1,p}}^{i=\overline{1,m}}$; клетки блока 2 блокируются значениями M>>0, т.к. прямые поставки от A_i к B_j запрещены (если это условие отсутствует, то в клетки, соответствующие разрешенным прямым поставкам, заносятся реальные тарифы); в блоке 4 помещаются элементы матрицы $\tilde{C} = \left\| \tilde{c}_{kj} \right\|_{j=\overline{1,n}}^{k=\overline{1,p}}$. В блоке 3, имеющим размерность $p \times p$, на главной диагонали помещаются нулевые значения тарифов, все остальные клетки этого блока полагаются равными M>>0 , т. к. перевозки между складами блокируются.

Таким образом , транспортная таблица примет вид:

	D_k	B_j
A_i	C	M
D_k	$\begin{matrix} 0 & & M \\ & \ddots & \\ M & & 0 \end{matrix}$	$\tilde{C}$

Схема построения начального плана перевозок по блокам может быть следующей: $\boxed{1} \to \boxed{3} \to \boxed{4} \to \boxed{2}$

В блоке 3 на главной диагонали проставляются значения, соответствующие объёмам недоиспользования складов после выполнения первого этапа – перевозки груза от поставщиков на склады. При этом необходимо скорректировать объёмы предложения складов как поставщиков.

Улучшение плана можно осуществить, например, методом потенциалов.

<u>Пример 5.</u> Даны три поставщика A_1, A_2, A_3, предложение которых $a_1 = 120, a_2 = 150, a_3 = 170$ ед., и три потребителя B_1, B_2, B_3 со спросами $в_1 = 110, в_2 = 140, в_3 = 150$ ед. Три склада, через которые осуществляется перевозка, имеют ёмкости $d_1 = 200, d_2 = 250, d_3 = 150$ ед.

Известны тарифы перевозок, задаваемые матрицами:

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 8 \\ 8 & 9 & 3 \\ 6 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} 14 & 17 & 12 \\ 16 & 11 & 13 \\ 10 & 18 & 15 \end{pmatrix}$$

Найдём совокупные предложение, ёмкости и спрос:

$$\sum a_i = 440 \text{ ед.}, \sum d_k = 600 \text{ ед.}, \sum b_j = 400 \text{ ед.}$$

Условие разрешимости (8) выполняется.

Т. к. $\sum_i a_i > \sum_j b_j$, то задача открытая (предложение больше спроса), поэтому необходимо ввести фиктивного потребителя $B_ф$ со спросом $в_ф = 440 - 400 = 40$ ед.

Транспортная таблица примет вид:

Таблица 19

k, j \ a_i, d_k	D_1	D_2	D_3	B_1	B_2	B_3	$B_Ф$	a_i, d_k
A_1	7	4 120	8	м	м	м	0	120
A_2	8	9	3 150	м	м	м	0	150
A_3	6 40	5 130	6	м	м	м	0	170
D_1	0 160	м	м	14	17	12 40	0	200
D_2	м	0	м	16	11 140	13 110	0	250
D_3	м	м	0	10 110	18	15	0 40	150
d_k, b_j	200	250	150	110	140	150	40	

Используя метод минимального элемента, заполняем клетки ТТ в следующем порядке:

блок 1: $(A_2, D_3), (A_1, D_2), (A_3, D_2), (A_3, D_1)$

блок 3: (D_1, D_1). Ёмкость склада D_1 состоит из200 ед. Реально в D_1 завезено только 40 ед., поэтому 160 ед. недоиспользовано в D_1. Остальные склады использованы полностью.

блок 4: $(D_3, B_1), (D_2, B_2), (D_1, B_3), (D_3, B_4)$.

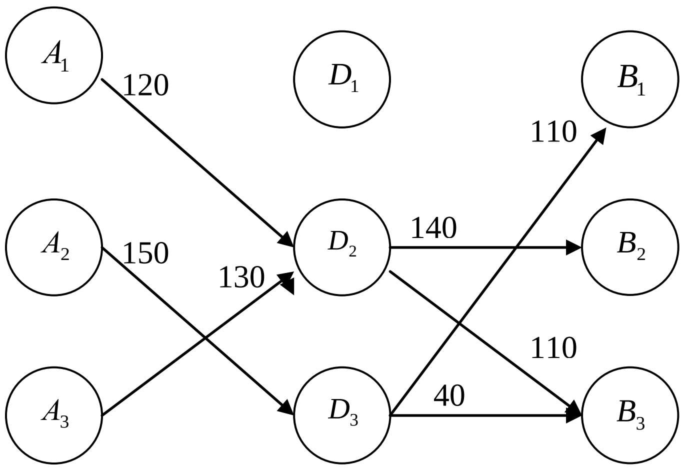
Следует заметить, что в блоке 4 в методе минимального элемента всё-таки в первую очередь учитываем тарифы для реальных маршрутов $D_k \to B_j$, $k = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,3}$. В клетке $(D_3, B_ф)$ помещается остаток товара на складе D_3.

Оптимальная транспортная таблица имеет вид:

Таблица 20

	D_1	D_2	D_3	B_1	B_2	B_3	$B_Ф$	u_i
A_1	7	4 120	8	м	м	м	0	0
A_2	8	9	3 150	м	м	м	0	1
A_3	6 0	5 130	6	м	м	м	0 40	1
D_1	0 200	м	м	14	17	12 0	0	-5
D_2	м	0	м	16	11 140	13 110	0	-4
D_3	м	м	0 0	10 110	18	15 40	0	-2
v_j	5	4	2	12	15	17	-1	

Поэтому оптимальный план перевозок от A_i к D_k и от D_k к B_j можно представить схематично таким образом:



т.е. от первого поставщика весь товар 120 ед. вывозится на второй склад; от второго поставщика весь товар 150 ед. перевозится на третий склад; от третьего поставщика 130 ед. перевозятся на второй склад и 40 единиц у него остаются невостребованными ($X_{A_3,B_Ф} = 40$). Ёмкости второго и третьего складов задействованы полностью, а первый склад вообще не используется.

Со второго склада 140 ед. направляются второму потребителю и 110 ед. – третьему; из третьего склада 110 ед. направляются первому потребителю и 40 ед. – третьему. Спрос всех потребителей полностью удовлетворяется.

Минимальные транспортные расходы:

$$Z_{\min} = 4 \cdot 120 + 3 \cdot 150 + 5 \cdot 130 + 11 \cdot 140 + 13 \cdot 110 + 10 \cdot 110 + 15 \cdot 40 = 6250 \text{ ден. ед.}$$

Замечание. Полученный оптимальный план вырожденный, т. к. число клеток с положительными перевозками равно 9<(3+3+3+4)-1, поэтому в ТТ три клетки заняты «явными нулями»: (A_3, D_1), (D_1, B_3) и (D_3, D_3).

С. Пусть прямые поставки от некоторых поставщиков некоторым потребителям разрешены. Тогда в блоке 2 соответствующие клетки имеют реальные тарифы, и схема заполнения транспортной таблицы несколько меняется:

$\boxed{1}\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$

Например, пусть в примере 5 разрешены прямые поставки $A_1 \to B_2$ с тарифом 20 ден. ед. и $A_2 \to B_3$ с тарифом 12 ден. ед.

Транспортная таблица примет вид:

Таблица 21

k, j	D_1	D_2	D_3	B_1	B_2	B_3	$B_Ф$	u_i
A_1	7	4 120	8	м	20	м	0	0
A_2	8	9	3 – 150	м	м	12 +	0	1
A_3	6 40	5 130	6	м	м	м	0	1
D_1	0 160	м	м	14	17	12 40	0	-5
D_2	м	0	м	16	11 140	13 110	0	-4
D_3	м	м	0 + 0	10 110	18	15 – 0	0 40	-2
v_j	5	4	2	12	15	17	2	

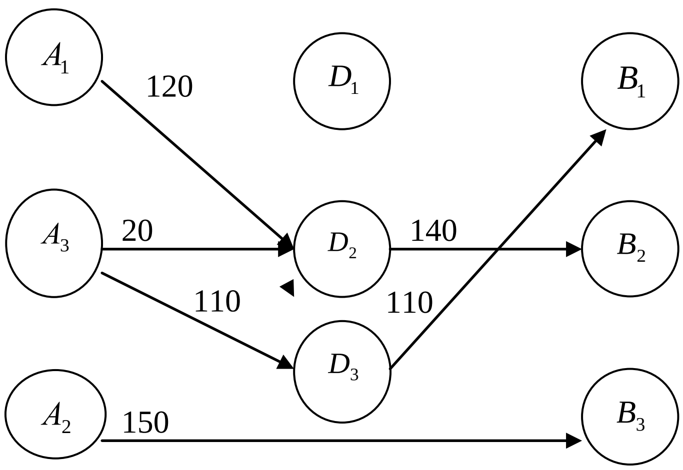
Т.к. $\Delta_{A_2B_3} > 0$, то полученный план оптимальным не является.

Сделав несколько итераций, получим оптимальную ТТ:

Таблица 22

	D_1	D_2	D_3	B_1	B_2	B_3	$B_Ф$
A_1	7	4 120	8	м	20	м	0
A_2	8	9	3 0	м	м	12 150	0
A_3	6	5 20	6 110	м	м	м	0 40
D_1	0 200	м	м	14	17	12 0	0
D_2	м	0 110	м	16	11 140	13	0
D_3	м	м	0 40	10 110	18	15	0

Поэтому схема оптимальных перевозок будет иметь вид:



У поставщика A_3 остаётся 40 ед. не вывезенного товара; склады заполняются не полностью (склад D_1 вообще не нужен, склад D_2 будет заполнен только 140 единицами и на 110 ед. недоиспользован; недоиспользование склада D_3 составит 40 единиц)

$$Z_{\min} = 4 \cdot 120 + 5 \cdot 20 + 6 \cdot 110 + 10 \cdot 110 + 11 \cdot 140 + 12 \cdot 150 = 5680 \text{ ден. ед.}$$

<u>Пример 6.</u> $a_1 = 100,\ a_2 = 150,\ b_1 = 110,\ b_2 = 40,\ b_3 = 150,\ \mathrm{d}_1 = 200,\ d_2 = 250.$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} 14 & 17 & 12 \\ 16 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

<u>Решение.</u> Т.к. $\sum_i a_i < \sum_j b_j < \sum_k d_k$ и условие разрешимости (8) выполняется, то вводим фиктивного поставщика $A_ф$ с объёмом предложения

$$a_ф = 300 - 250 = 50 \text{ ед.}$$

Транспортная таблица примет вид:

Таблица 23

	D_1	D_2	B_1	B_2	B_3	
A_1	7	4 100	м	м	м	100
A_2	8 150	9	м	м	м	150
$A_ф$	0 50	0	0	0	0	50
D_1	0	м	14 50	17	12 150	200
D_2	м	0 150	16 60	11 40	13	250
	200	250	110	40	150	750

Схема заполнения блоков:

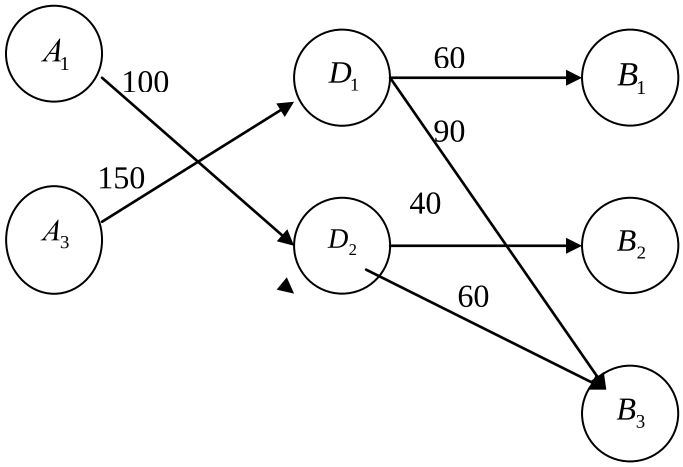
| 1 | 2 | → 3 → 4

Оптимальная транспортная таблица будет следующей:

Таблица 24

	D_1	D_2	B_1	B_2	B_3
A_1	7	4 100	м	м	м
A_2	8 150	9	м	м	м
$A_ф$	0	0	0 50	0	0
D_1	0 50	м	14 60	17	12 90
D_2	м	0 150	16	11 40	13 60

Схема перевозок:



тем самым весь товар у поставщиков вывезен полностью, склад D_1 не задействован на 50 ед., склад D_2 не задействован на 150 ед., потребитель B_1 недополучит товара 50 ед. Транспортные издержки составят $Z_{\min} = 4140$ ден. ед.

§10. Варианты самостоятельных и контрольных работ.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА №1.

Решить транспортную задачу.

$$1)\ \begin{array}{rcl} & & a_i \\ C= & \begin{pmatrix}1&2&2&3\\4&1&2&1\\1&3&2&1\end{pmatrix} & \begin{matrix}30\\10\\20\end{matrix} \\ b_j & \begin{matrix}10&10&20&20\end{matrix} & \end{array}$$

$$2)\ \begin{array}{rcl} & & a_i \\ C= & \begin{pmatrix}2&1&3&4\\1&3&6&2\\3&1&1&2\end{pmatrix} & \begin{matrix}10\\30\\20\end{matrix} \\ b_j & \begin{matrix}20&20&10&10\end{matrix} & \end{array}$$

$$3)\ \begin{array}{rcl} & & a_i \\ C= & \begin{pmatrix}2&1&3&1\\2&3&1&4\\3&2&2&5\end{pmatrix} & \begin{matrix}30\\10\\20\end{matrix} \\ b_j & \begin{matrix}20&15&15&10\end{matrix} & \end{array}$$

$$4)\ \begin{array}{rcl} & & a_i \\ C= & \begin{pmatrix}5&6&5&4\\3&7&2&5\\1&2&3&4\end{pmatrix} & \begin{matrix}20\\40\\40\end{matrix} \\ b_j & \begin{matrix}25&30&15&30\end{matrix} & \end{array}$$

$$5)\ \begin{array}{rcl} & & a_i \\ C= & \begin{pmatrix}4&5&3&7\\2&3&5&4\\5&6&1&5\end{pmatrix} & \begin{matrix}100\\110\\100\end{matrix} \\ b_j & \begin{matrix}60&60&90&100\end{matrix} & \end{array}$$

$$6)\ \begin{array}{rcl} & & a_i \\ C= & \begin{pmatrix}1&3&3&4\\5&2&1&5\\6&4&4&2\end{pmatrix} & \begin{matrix}40\\20\\20\end{matrix} \\ b_j & \begin{matrix}20&30&15&15\end{matrix} & \end{array}$$

$$7)\quad C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}2&4&5&1\\2&3&9&4\\3&4&2&5\end{pmatrix} & \begin{matrix}60\\70\\20\end{matrix} \\ b_j\quad 40\quad 30\quad 30\quad 50 & \end{array}$$

$$8)\quad C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}1&2&6&4\\3&1&3&2\\5&7&5&1\end{pmatrix} & \begin{matrix}40\\30\\20\end{matrix} \\ b_j\quad 30\quad 25\quad 15\quad 20 & \end{array}$$

$$9)\quad C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}2&4&3&2\\3&1&2&3\\5&4&1&5\end{pmatrix} & \begin{matrix}60\\65\\70\end{matrix} \\ b_j\quad 40\quad 60\quad 70\quad 25 & \end{array}$$

$$10)\quad C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}10&5&7&4\\7&4&9&10\\6&14&8&7\end{pmatrix} & \begin{matrix}40\\25\\35\end{matrix} \\ b_j\quad 15\quad 40\quad 30\quad 15 & \end{array}$$

$$11)\quad C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}3&2&4&1\\2&3&1&5\\3&2&4&4\end{pmatrix} & \begin{matrix}50\\40\\20\end{matrix} \\ b_j\quad 30\quad 25\quad 35\quad 20 & \end{array}$$

$$12)\quad C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}1&3&3&8\\8&6&2&6\\7&7&3&8\end{pmatrix} & \begin{matrix}20\\20\\40\end{matrix} \\ b_j\quad 25\quad 30\quad 10\quad 15 & \end{array}$$

$$13)\quad C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}1&9&7&2\\3&1&5&5\\6&8&3&4\end{pmatrix} & \begin{matrix}30\\40\\70\end{matrix} \\ b_j\quad 35\quad 20\quad 25\quad 60 & \end{array}$$

$$4)\quad C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}1&3&3&8\\8&6&2&6\\4&7&7&3\end{pmatrix} & \begin{matrix}60\\20\\30\end{matrix} \\ b_j\quad 25\quad 30\quad 40\quad 15 & \end{array}$$

$$15)\quad C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}2&4&1&3\\5&6&5&4\\3&7&9&5\end{pmatrix} & \begin{matrix}30\\70\\40\end{matrix} \\ b_j\quad 35\quad 20\quad 55\quad 30 & \end{array}$$

$$16)\quad C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}6&3&4&8\\5&6&9&7\\4&1&6&10\end{pmatrix} & \begin{matrix}30\\20\\35\end{matrix} \\ b_j\quad 35\quad 15\quad 10\quad 25 & \end{array}$$

$$17)\quad C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}5&2&7&5\\6&4&8&2\\7&1&5&7\end{pmatrix} & \begin{matrix}50\\30\\40\end{matrix} \\ b_j\quad 40\quad 30\quad 35\quad 15 & \end{array}$$

$$18)\quad C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}3&1&7&5\\6&4&9&1\\2&1&6&7\end{pmatrix} & \begin{matrix}50\\30\\40\end{matrix} \\ b_j\quad 40\quad 30\quad 35\quad 15 & \end{array}$$

$$19)\quad C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}1&6&4&7\\3&6&5&4\\4&1&2&11\end{pmatrix} & \begin{matrix}35\\30\\35\end{matrix} \\ b_j\quad 25\quad 15\quad 15\quad 45 & \end{array}$$

$$20)\quad C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}3&1&8&2\\4&6&8&2\\7&1&2&5\end{pmatrix} & \begin{matrix}50\\35\\40\end{matrix} \\ b_j\quad 45\quad 30\quad 35\quad 15 & \end{array}$$

$$21)\quad C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}5&1&4&3\\8&4&2&1\\4&6&3&2\end{pmatrix} & \begin{matrix}55\\35\\40\end{matrix} \\ b_j\quad 50\quad 30\quad 35\quad 15 & \end{array}$$

$$22)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}1&3&2&5\\2&5&9&4\\3&8&6&1\end{pmatrix} & \begin{matrix}40\\25\\55\end{matrix} \\ \begin{matrix}b_j & 45 & 25 & 20 & 30\end{matrix} & \end{array}$$

$$23)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}2&2&4&3\\5&3&8&6\\4&1&5&7\end{pmatrix} & \begin{matrix}25\\55\\60\end{matrix} \\ \begin{matrix}b_j & 40 & 50 & 35 & 15\end{matrix} & \end{array}$$

$$24)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}1&1&5&4\\3&2&7&5\\4&1&8&7\end{pmatrix} & \begin{matrix}40\\25\\35\end{matrix} \\ \begin{matrix}b_j & 20 & 30 & 35 & 15\end{matrix} & \end{array}$$

$$25)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}2&3&5&7\\1&6&8&4\\8&1&6&9\end{pmatrix} & \begin{matrix}60\\25\\35\end{matrix} \\ \begin{matrix}b_j & 45 & 15 & 30 & 30\end{matrix} & \end{array}$$

$$6)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}4&2&3&5\\1&3&9&2\\5&1&6&7\end{pmatrix} & \begin{matrix}40\\50\\30\end{matrix} \\ \begin{matrix}b_j & 10 & 30 & 35 & 45\end{matrix} & \end{array}$$

$$27)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}6&1&4&3\\9&2&5&1\\3&1&2&7\end{pmatrix} & \begin{matrix}20\\60\\30\end{matrix} \\ \begin{matrix}b_j & 25 & 40 & 35 & 10\end{matrix} & \end{array}$$

$$28)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}8&5&4&1\\3&6&2&6\\4&1&7&9\end{pmatrix} & \begin{matrix}60\\20\\45\end{matrix} \\ \begin{matrix}b_j & 35 & 35 & 30 & 25\end{matrix} & \end{array}$$

$$29)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}7&4&2&1\\5&3&1&9\\6&1&8&7\end{pmatrix} & \begin{matrix}50\\60\\45\end{matrix} \\ \begin{matrix}b_j & 55 & 25 & 35 & 40\end{matrix} & \end{array}$$

$$30)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}2&1&3&7\\9&2&8&5\\3&1&2&7\end{pmatrix} & \begin{matrix}55\\35\\45\end{matrix} \\ \begin{matrix}b_j & 40 & 40 & 35 & 20\end{matrix} & \end{array}$$

$$31)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}6&5&4&3\\2&1&9&7\\8&4&6&11\end{pmatrix} & \begin{matrix}45\\25\\65\end{matrix} \\ \begin{matrix}b_j & 55 & 35 & 10 & 35\end{matrix} & \end{array}$$

$$32)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}5&4&7&3\\2&1&6&7\\1&4&3&8\end{pmatrix} & \begin{matrix}35\\55\\45\end{matrix} \\ \begin{matrix}b_j & 30 & 50 & 30 & 25\end{matrix} & \end{array}$$

$$33)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}2&1&4&3\\5&4&8&1\\2&9&6&7\end{pmatrix} & \begin{matrix}50\\30\\50\end{matrix} \\ \begin{matrix}b_j & 40 & 35 & 35 & 20\end{matrix} & \end{array}$$

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 2.
Решить транспортную задачу:
(несбалансированная модель)

$$1)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}1&2&2&3\\4&5&7&1\\1&3&2&1\end{pmatrix} & \begin{matrix}30\\30\\20\end{matrix} \\ b_j\quad 10\quad 10\quad 20\quad 20 & \end{array}$$

$$2)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}2&1&3&4\\1&3&5&2\\3&1&2&2\end{pmatrix} & \begin{matrix}10\\40\\20\end{matrix} \\ b_j\quad 20\quad 20\quad 10\quad 10 & \end{array}$$

$$3)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}2&1&3&1\\2&3&1&4\\3&2&6&5\end{pmatrix} & \begin{matrix}30\\40\\20\end{matrix} \\ b_j\quad 20\quad 15\quad 15\quad 10 & \end{array}$$

$$4)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}5&6&5&4\\3&1&2&5\\1&2&3&4\end{pmatrix} & \begin{matrix}20\\30\\40\end{matrix} \\ b_j\quad 25\quad 30\quad 15\quad 30 & \end{array}$$

$$5)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}4&5&3&7\\2&3&5&4\\5&2&1&5\end{pmatrix} & \begin{matrix}100\\110\\130\end{matrix} \\ b_j\quad 60\quad 60\quad 90\quad 100 & \end{array}$$

$$6)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}1&4&3&4\\5&2&1&5\\6&2&4&2\end{pmatrix} & \begin{matrix}40\\30\\20\end{matrix} \\ b_j\quad 20\quad 30\quad 15\quad 15 & \end{array}$$

$$8)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}2&4&5&1\\1&3&9&4\\3&4&2&5\end{pmatrix} & \begin{matrix}40\\50\\20\end{matrix} \\ b_j\quad 10\quad 20\quad 25\quad 35 & \end{array}$$

$$8)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}1&2&2&4\\3&1&3&6\\5&4&5&1\end{pmatrix} & \begin{matrix}40\\40\\30\end{matrix} \\ b_j\quad 30\quad 10\quad 20\quad 30 & \end{array}$$

$$9)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}2&1&3&2\\3&2&6&5\\1&3&2&6\end{pmatrix} & \begin{matrix}20\\40\\50\end{matrix} \\ b_j\quad 20\quad 25\quad 20\quad 25 & \end{array}$$

$$10)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}7&5&2&4\\1&4&3&10\\6&9&8&7\end{pmatrix} & \begin{matrix}20\\40\\30\end{matrix} \\ b_j\quad 20\quad 20\quad 20\quad 15 & \end{array}$$

$$11)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}3&2&6&1\\2&3&1&5\\3&2&5&4\end{pmatrix} & \begin{matrix}40\\40\\30\end{matrix} \\ b_j\quad 30\quad 30\quad 40\quad 20 & \end{array}$$

$$12)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}1&5&4&7\\8&5&3&6\\7&6&5&4\end{pmatrix} & \begin{matrix}50\\40\\40\end{matrix} \\ b_j\quad 30\quad 30\quad 40\quad 20 & \end{array}$$

$$13)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}5&5&2&3\\3&4&7&6\\4&9&8&5\end{pmatrix} & \begin{matrix}15\\40\\35\end{matrix} \\ b_j\quad 25\quad 10\quad 30\quad 15 & \end{array}$$

$$14)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}3&4&2&1\\2&7&6&5\\3&5&2&4\end{pmatrix} & \begin{matrix}20\\50\\25\end{matrix} \\ b_j\quad 20\quad 25\quad 10\quad 20 & \end{array}$$

$$15)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}1&5&4&2\\4&7&3&2\\3&6&5&4\end{pmatrix} & \begin{matrix}20\\50\\30\end{matrix} \\ b_j\quad 30\quad 20\quad 10\quad 20 & \end{array}$$

$$16)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}1&2&4&2\\3&4&6&5\\7&2&1&4\end{pmatrix} & \begin{matrix}30\\20\\20\end{matrix} \\ b_j\quad 20\quad 25\quad 25\quad 20 & \end{array}$$

$$17)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\8&4&2&1\\4&2&7&5\end{pmatrix} & \begin{matrix}50\\20\\30\end{matrix} \\ b_j\quad 15\quad 35\quad 30\quad 10 & \end{array}$$

$$18)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}2&5&1&3\\4&2&3&4\\3&1&6&5\end{pmatrix} & \begin{matrix}30\\25\\25\end{matrix} \\ b_j\quad 35\quad 20\quad 35\quad 10 & \end{array}$$

$$19)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}6&3&2&5\\5&4&2&1\\4&1&3&2\end{pmatrix} & \begin{matrix}20\\30\\50\end{matrix} \\ b_j\quad 35\quad 35\quad 30\quad 20 & \end{array}$$

$$20)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}5&2&1&5\\6&4&3&2\\4&1&2&6\end{pmatrix} & \begin{matrix}40\\30\\40\end{matrix} \\ b_j\quad 20\ 55\ 25\ 20 & \end{array}$$

$$21)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}1&4&3&2\\3&1&2&5\\6&5&6&4\end{pmatrix} & \begin{matrix}20\\40\\30\end{matrix} \\ b_j\quad 10\ 35\ 25\ 10 & \end{array}$$

$$22)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}2&4&3&4\\1&6&2&8\\3&1&7&5\end{pmatrix} & \begin{matrix}40\\15\\35\end{matrix} \\ b_j\quad 25\quad 20\quad 25\quad 30 & \end{array}$$

$$23)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}2&1&1&3\\5&2&4&4\\5&2&3&5\end{pmatrix} & \begin{matrix}30\\30\\60\end{matrix} \\ b_j\quad 25\quad 30\quad 30\quad 15 & \end{array}$$

$$24)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}1&3&4&5\\5&1&4&2\\7&1&2&4\end{pmatrix} & \begin{matrix}30\\60\\35\end{matrix} \\ b_j\quad 20\quad 35\quad 25\quad 25 & \end{array}$$

$$25)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}3&2&7&5\\4&5&6&1\\7&1&6&7\end{pmatrix} & \begin{matrix}40\\10\\50\end{matrix} \\ b_j\quad 30\quad 30\quad 40\quad 20 & \end{array}$$

$$26)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}9&6&7&2\\1&5&9&2\\4&7&8&6\end{pmatrix} & \begin{matrix}35\\25\\40\end{matrix} \\ b_j\quad 20\quad 15\quad 20\quad 35 & \end{array}$$

$$27)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}1&2&3&1\\5&9&4&2\\6&4&8&4\end{pmatrix} & \begin{matrix}30\\65\\35\end{matrix} \\ b_j\quad 25\quad 15\quad 45\quad 35 & \end{array}$$

$$28)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}3&1&2&3\\4&2&9&6\\2&8&7&4\end{pmatrix} & \begin{matrix}20\\40\\30\end{matrix} \\ b_j\quad 25\quad 10\quad 30\quad 15 & \end{array}$$

$$29)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}1&2&5&2\\6&8&1&2\\7&3&2&3\end{pmatrix} & \begin{matrix}20\\20\\25\end{matrix} \\ b_j\quad 20\quad 25\quad 10\quad 20 & \end{array}$$

$$30)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}2&5&1&4\\1&3&7&1\\2&7&6&5\end{pmatrix} & \begin{matrix}20\\50\\30\end{matrix} \\ b_j\quad 35\quad 15\quad 10\quad 20 & \end{array}$$

$$31)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}1&2&4&6\\9&5&1&4\\8&3&2&5\end{pmatrix} & \begin{matrix}30\\40\\50\end{matrix} \\ b_j\quad 20\quad 25\quad 25\quad 20 & \end{array}$$

$$32)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}6&3&2&5\\7&4&1&6\\4&2&8&3\end{pmatrix} & \begin{matrix}40\\40\\30\end{matrix} \\ b_j\quad 15\quad 35\quad 30\quad 10 & \end{array}$$

$$33)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}1&3&2&4\\6&4&1&5\\2&3&7&8\end{pmatrix} & \begin{matrix}35\\20\\35\end{matrix} \\ b_j\quad 35\quad 20\quad 35\quad 10 & \end{array}$$

$$34)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}5&1&3&7\\7&4&2&8\\3&5&2&4\end{pmatrix} & \begin{matrix}30\\20\\50\end{matrix} \\ b_j\ \ 35\ \ 35\ \ 30\ \ 20 & \end{array}$$

$$35)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}4&3&2&1\\1&2&5&3\\5&8&5&4\end{pmatrix} & \begin{matrix}40\\20\\50\end{matrix} \\ b_j\ \ 20\ \ 55\ \ 25\ \ 20 & \end{array}$$

$$36)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}8&3&4&6\\3&2&7&8\\4&3&2&1\end{pmatrix} & \begin{matrix}20\\45\\35\end{matrix} \\ b_j\ \ 10\ \ 35\ \ 25\ \ 10 & \end{array}$$

$$37)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}1&2&4&5\\2&5&3&2\\4&2&6&3\end{pmatrix} & \begin{matrix}35\\30\\55\end{matrix} \\ b_j\ \ 35\ \ 20\ \ 25\ \ 20 & \end{array}$$

$$38)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}1&3&2&1\\7&3&2&1\\6&3&2&8\end{pmatrix} & \begin{matrix}30\\40\\40\end{matrix} \\ b_j\ \ 25\ \ 30\ \ 30\ \ 15 & \end{array}$$

$$39)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&3\\5&6&3&2\end{pmatrix} & \begin{matrix}15\\40\\35\end{matrix} \\ b_j\ \ 20\ \ 25\ \ 35\ \ 25 & \end{array}$$

$$40)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}3&1&2&3\\4&2&9&6\\2&8&7&4\end{pmatrix} & \begin{matrix}20\\40\\30\end{matrix} \\ b_j\ \ 25\ \ 10\ \ 30\ \ 35 & \end{array}$$

$$41)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}1&2&5&2\\6&8&1&2\\7&3&2&3\end{pmatrix} & \begin{matrix}20\\20\\25\end{matrix} \\ b_j\ \ 20\ \ 15\ \ 30\ \ 20 & \end{array}$$

$$42)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}2&5&1&4\\1&3&7&1\\2&7&6&5\end{pmatrix} & \begin{matrix}30\\50\\30\end{matrix} \\ b_j\ \ 35\ \ 15\ \ 30\ \ 20 & \end{array}$$

$$43)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}1&2&4&6\\9&5&1&4\\8&3&2&5\end{pmatrix} & \begin{matrix}30\\40\\60\end{matrix} \\ b_j\ \ 20\ \ 25\ \ 25\ \ 50 & \end{array}$$

$$44)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}6&3&2&5\\7&4&1&6\\4&2&8&3\end{pmatrix} & \begin{matrix}40\\40\\40\end{matrix} \\ b_j\ \ 35\ \ 35\ \ 30\ \ 10 & \end{array}$$

$$45)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}1&3&2&4\\6&4&1&5\\2&3&7&8\end{pmatrix} & \begin{matrix}35\\20\\35\end{matrix} \\ b_j\ \ 25\ \ 20\ \ 35\ \ 20 & \end{array}$$

$$46)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}5&1&3&7\\7&4&2&8\\3&5&2&4\end{pmatrix} & \begin{matrix}30\\30\\50\end{matrix} \\ b_j\ \ 15\ \ 35\ \ 30\ \ 20 & \end{array}$$

$$47)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}4&3&2&1\\1&2&5&3\\5&8&5&4\end{pmatrix} & \begin{matrix}40\\20\\50\end{matrix} \\ b_j\ \ 20\ \ 55\ \ 25\ \ 20 & \end{array}$$

$$48)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}8&3&4&6\\3&2&7&8\\4&3&2&1\end{pmatrix} & \begin{matrix}20\\45\\35\end{matrix} \\ b_j\ \ 30\ \ 35\ \ 25\ \ 30 & \end{array}$$

$$49)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}1&2&4&5\\2&5&3&2\\4&2&6&3\end{pmatrix} & \begin{matrix}35\\30\\35\end{matrix} \\ b_j\ \ 35\ \ 20\ \ 25\ \ 40 & \end{array}$$

$$50)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}1&3&2&1\\7&3&2&1\\6&3&2&8\end{pmatrix} & \begin{matrix}30\\30\\40\end{matrix} \\ b_j\ \ 25\ \ 30\ \ 30\ \ 35 & \end{array}$$

$$51)\ C=\begin{array}{cc} & a_i \\ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&3\\5&6&3&2\end{pmatrix} & \begin{matrix}30\\40\\35\end{matrix} \\ b_j\ \ 20\ \ 25\ \ 35\ \ 45 & \end{array}$$

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА №3.
Двухэтапная транспортная задача.

У трёх поставщиков A_1, A_2, A_3, сосредоточен некоторый однородный товар в количествах a_1, a_2, a_3. Потребители B_1, B_2, B_3 испытывают необходимость в данном виде товара в количествах b_1, b_2, b_3. Товар от поставщиков должен быть перевезён к потребителям, причём "прямые" поставки запрещены. Весь товар должен предварительно поступить на склады D_1, D_2, D_3, емкости которых составляют d_1, d_2, d_3. Тарифы на перевозку товара от поставщиков на склады и со складов потребителя задаются матрицами C_1 и C_2 соответственно. Составить математическую модель и решить полученную двухэтапную транспортную задачу.

Вариант№1

$$a_1 = 128, a_2 = 250, a_3 = 353. \quad b_1 = 117, b_2 = 240, b_3 = 285. \quad d_1 = 280, d_2 = 350, d_3 = 250.$$
$$C_1 = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 8 \\ 7 & 4 & 3 \\ 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 14 & 17 & 12 \\ 16 & 11 & 13 \\ 10 & 18 & 15 \end{pmatrix}.$$

Вариант№2

$$a_1 = 356, a_2 = 258, a_3 = 150. \quad b_1 = 387, b_2 = 259, b_3 = 187. \quad d_1 = 421, d_2 = 364, d_3 = 272.$$
$$C_1 = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 9 & 9 & 7 \\ 8 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 19 & 17 & 10 \\ 15 & 14 & 13 \\ 12 & 16 & 18 \end{pmatrix}.$$

Вариант№3

$$a_1 = 283, a_2 = 164, a_3 = 182. \quad b_1 = 247, b_2 = 197, b_3 = 298. \quad d_1 = 356, d_2 = 218, d_3 = 310.$$
$$C_1 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 15 & 13 & 12 \\ 18 & 11 & 13 \\ 10 & 18 & 15 \end{pmatrix}.$$

Вариант№4

$$a_1 = 227, a_2 = 345, a_3 = 189. \quad b_1 = 193, b_2 = 257, b_3 = 284. \quad d_1 = 264, d_2 = 248, d_3 = 350.$$
$$C_1 = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 8 & 9 & 3 \\ 5 & 5 & 8 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 12 & 21 & 10 \\ 13 & 15 & 11 \\ 19 & 26 & 12 \end{pmatrix}.$$

Вариант№5

$$a_1 = 205, a_2 = 147, a_3 = 238. \quad b_1 = 248, b_2 = 219, b_3 = 176. \quad d_1 = 247, d_2 = 249, d_3 = 309.$$
$$C_1 = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 7 \\ 4 & 3 & 9 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 18 & 14 & 15 \\ 19 & 13 & 12 \\ 17 & 19 & 18 \end{pmatrix}.$$

Вариант№6

$$a_1 = 411, a_2 = 257, a_3 = 169. \quad b_1 = 402, b_2 = 238, b_3 = 136. \quad d_1 = 278, d_2 = 354, d_3 = 354.$$
$$C_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 8 & 9 & 5 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 15 & 19 & 14 \\ 13 & 11 & 12 \\ 17 & 15 & 17 \end{pmatrix}.$$

Вариант№7

$$a_1 = 247, a_2 = 382, a_3 = 249. \quad b_1 = 542, b_2 = 179, b_3 = 203. \quad d_1 = 438, d_2 = 321, d_3 = 387.$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 8 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 28 & 27 & 12 \\ 25 & 23 & 18 \\ 24 & 24 & 26 \end{pmatrix}.$$

Вариант№8

$$a_1 = 246, a_2 = 305, a_3 = 279. \quad b_1 = 254, b_2 = 261, b_3 = 197. \quad d_1 = 359, d_2 = 296, d_3 = 348.$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 \\ 3 & 2 & 9 \\ 9 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 13 \\ 10 & 14 & 11 \\ 11 & 13 & 10 \end{pmatrix}.$$

Вариант№9

$$a_1 = 254, a_2 = 411, a_3 = 357. \quad b_1 = 352, b_2 = 289, b_3 = 356. \quad d_1 = 468, d_2 = 543, d_3 = 208.$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 14 & 12 & 13 \\ 12 & 16 & 15 \\ 15 & 13 & 12 \end{pmatrix}.$$

Вариант№10

$$a_1 = 231, a_2 = 257, a_3 = 296. \quad b_1 = 208, b_2 = 364, b_3 = 349. \quad d_1 = 342, d_2 = 461, d_3 = 387.$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 5 & 6 & 4 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 24 & 26 & 22 \\ 27 & 21 & 23 \\ 20 & 18 & 19 \end{pmatrix}.$$

Вариант№11

$$a_1 = 154, a_2 = 311, a_3 = 257. \quad b_1 = 252, b_2 = 189, b_3 = 256. \quad d_1 = 368, d_2 = 343, d_3 = 308.$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 7 \\ 4 & 5 & 3 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 13 & 17 & 14 \\ 12 & 16 & 15 \\ 19 & 13 & 22 \end{pmatrix}.$$

Вариант№12

$$a_1 = 331, a_2 = 237, a_3 = 396. \quad b_1 = 308, b_2 = 464, b_3 = 249. \quad d_1 = 442, d_2 = 461, d_3 = 287.$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 6 \\ 8 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 25 & 29 & 21 \\ 27 & 21 & 24 \\ 22 & 18 & 19 \end{pmatrix}.$$

Вариант№13

$$a_1 = 156, a_2 = 145, a_3 = 257. \quad b_1 = 152, b_2 = 189, b_3 = 356. \quad d_1 = 368, d_2 = 543, d_3 = 308.$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \\ 8 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 16 & 13 & 18 \\ 15 & 14 & 13 \\ 12 & 17 & 16 \end{pmatrix}.$$

Вариант№14

$$a_1 = 213, a_2 = 157, a_3 = 196. \quad b_1 = 218, b_2 = 264, b_3 = 249. \quad d_1 = 369, d_2 = 261, d_3 = 388.$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 8 & 6 & 3 \\ 5 & 9 & 2 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 24 & 26 & 22 \\ 27 & 21 & 23 \\ 20 & 18 & 19 \end{pmatrix}.$$

Вариант№15

$$a_1 = 354, a_2 = 211, a_3 = 257. \quad C_1 = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 15 & 13 & 17 \\ 19 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 17 \end{pmatrix}.$$
$$b_1 = 252, b_2 = 389, b_3 = 256.$$
$$d_1 = 568, d_2 = 443, d_3 = 198.$$

Вариант№16

$$a_1 = 131, a_2 = 357, a_3 = 196. \quad C_1 = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 9 \\ 5 & 2 & 5 \\ 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 14 & 26 & 12 \\ 17 & 21 & 13 \\ 10 & 18 & 19 \end{pmatrix}.$$
$$b_1 = 108, b_2 = 446, b_3 = 361.$$
$$d_1 = 442, d_2 = 361, d_3 = 228.$$

Вариант№17

$$a_1 = 524, a_2 = 461, a_3 = 557. \quad C_1 = \begin{pmatrix} 15 & 13 & 18 \\ 12 & 16 & 14 \\ 11 & 14 & 16 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$
$$b_1 = 532, b_2 = 689, b_3 = 456.$$
$$d_1 = 668, d_2 = 743, d_3 = 408.$$

Вариант№18

$$a_1 = 321, a_2 = 457, a_3 = 396. \quad C_1 = \begin{pmatrix} 16 & 15 & 12 \\ 15 & 16 & 14 \\ 17 & 15 & 17 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 7 & 1 & 3 \\ 10 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$
$$b_1 = 308, b_2 = 464, b_3 = 449.$$
$$d_1 = 542, d_2 = 661, d_3 = 587.$$

Вариант№19

$$a_1 = 452, a_2 = 114, a_3 = 735. \quad C_1 = \begin{pmatrix} 17 & 13 & 19 \\ 13 & 15 & 14 \\ 12 & 14 & 16 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$
$$b_1 = 253, b_2 = 398, b_3 = 653.$$
$$d_1 = 768, d_2 = 343, d_3 = 408.$$

Вариант№20

$$a_1 = 331, a_2 = 757, a_3 = 596. \quad C_1 = \begin{pmatrix} 14 & 12 & 15 \\ 15 & 16 & 17 \\ 19 & 18 & 16 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 16 & 13 & 18 \\ 15 & 14 & 13 \\ 12 & 17 & 16 \end{pmatrix}.$$
$$b_1 = 608, b_2 = 764, b_3 = 249.$$
$$d_1 = 832, d_2 = 661, d_3 = 787.$$

Вариант№21

$$a_1 = 328, a_2 = 256, a_3 = 153. \quad C_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 3 \\ 8 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 15 & 12 & 10 \\ 16 & 17 & 13 \\ 11 & 18 & 19 \end{pmatrix}.$$
$$b_1 = 127, b_2 = 245, b_3 = 275.$$
$$d_1 = 380, d_2 = 355, d_3 = 234.$$

Вариант№22

$$a_1 = 376, a_2 = 158, a_3 = 250. \quad C_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 20 & 11 & 12 \\ 14 & 12 & 15 \\ 17 & 12 & 18 \end{pmatrix}.$$
$$b_1 = 187, b_2 = 359, b_3 = 287.$$
$$d_1 = 621, d_2 = 364, d_3 = 272.$$

Вариант№23

$$a_1 = 287, a_2 = 264, a_3 = 172. \quad b_1 = 347, b_2 = 157, b_3 = 278. \quad d_1 = 456, d_2 = 258, d_3 = 270. \quad C_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 9 & 8 & 1 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 20 \\ 19 & 14 & 12 \\ 10 & 17 & 15 \end{pmatrix}.$$

Вариант№24

$$a_1 = 327, a_2 = 245, a_3 = 145. \quad b_1 = 293, b_2 = 232, b_3 = 240. \quad d_1 = 364, d_2 = 257, d_3 = 371. \quad C_1 = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 9 \\ 8 & 7 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 18 & 11 & 15 \\ 12 & 15 & 20 \\ 17 & 25 & 12 \end{pmatrix}.$$

Вариант№25

$$a_1 = 225, a_2 = 157, a_3 = 187. \quad b_1 = 348, b_2 = 245, b_3 = 132. \quad d_1 = 255, d_2 = 314, d_3 = 287. \quad C_1 = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 8 \\ 5 & 2 & 9 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 23 & 17 & 18 \\ 17 & 14 & 16 \\ 11 & 15 & 18 \end{pmatrix}.$$

Вариант№26

$$a_1 = 311, a_2 = 212, a_3 = 171. \quad b_1 = 355, b_2 = 238, b_3 = 211. \quad d_1 = 378, d_2 = 341, d_3 = 382. \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 8 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 11 & 17 & 15 \\ 14 & 12 & 17 \\ 15 & 15 & 19 \end{pmatrix}.$$

Вариант№27

$$a_1 = 255, a_2 = 341, a_3 = 287. \quad b_1 = 577, b_2 = 122, b_3 = 219. \quad d_1 = 475, d_2 = 342, d_3 = 329. \quad C_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 7 \\ 6 & 9 & 4 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 22 & 25 & 17 \\ 23 & 24 & 19 \\ 20 & 24 & 27 \end{pmatrix}.$$

Вариант№28

$$a_1 = 255, a_2 = 321, a_3 = 247. \quad b_1 = 259, b_2 = 211, b_3 = 185. \quad d_1 = 366, d_2 = 254, d_3 = 378. \quad C_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 8 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 17 & 11 & 19 \\ 12 & 15 & 18 \\ 13 & 17 & 10 \end{pmatrix}.$$

Вариант№29

$$a_1 = 233, a_2 = 478, a_3 = 311. \quad b_1 = 333, b_2 = 211, b_3 = 371. \quad d_1 = 455, d_2 = 597, d_3 = 214. \quad C_1 = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 12 & 14 & 17 \\ 15 & 11 & 18 \\ 16 & 13 & 12 \end{pmatrix}.$$

Вариант№30

$$a_1 = 299, a_2 = 217, a_3 = 248. \quad b_1 = 271, b_2 = 326, b_3 = 372. \quad d_1 = 337, d_2 = 489, d_3 = 373. \quad C_1 = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 7 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 22 & 27 & 29 \\ 25 & 28 & 20 \\ 21 & 18 & 19 \end{pmatrix}.$$

Вариант№31

$a_1 = 174, a_2 = 336, a_3 = 217.$
$b_1 = 241, b_2 = 172, b_3 = 214.$
$d_1 = 377, d_2 = 349, d_3 = 308.$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \\ 8 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 11 & 14 & 15 \\ 12 & 16 & 17 \\ 19 & 13 & 21 \end{pmatrix}.$$

Вариант№32

$a_1 = 311, a_2 = 256, a_3 = 388.$
$b_1 = 347, b_2 = 419, b_3 = 256.$
$d_1 = 471, d_2 = 418, d_3 = 299.$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 9 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 11 & 22 & 25 \\ 26 & 23 & 20 \\ 19 & 18 & 24 \end{pmatrix}.$$

Вариант№33

$a_1 = 137, a_2 = 239, a_3 = 249.$
$b_1 = 171, b_2 = 159, b_3 = 256.$
$d_1 = 345, d_2 = 521, d_3 = 170.$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 9 & 3 & 8 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 17 & 12 & 18 \\ 15 & 14 & 13 \\ 12 & 18 & 16 \end{pmatrix}.$$

Вариант№34

$a_1 = 229, a_2 = 138, a_3 = 179.$
$b_1 = 247, b_2 = 229, b_3 = 211.$
$d_1 = 355, d_2 = 271, d_3 = 314.$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 9 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 21 & 24 & 22 \\ 25 & 21 & 23 \\ 20 & 19 & 18 \end{pmatrix}.$$

Вариант№35

$a_1 = 334, a_2 = 261, a_3 = 219.$
$b_1 = 254, b_2 = 349, b_3 = 273.$
$d_1 = 544, d_2 = 433, d_3 = 179.$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 8 & 1 & 5 \\ 7 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 12 & 19 & 11 \\ 18 & 11 & 12 \\ 15 & 16 & 17 \end{pmatrix}.$$

Вариант№36

$a_1 = 154, a_2 = 373, a_3 = 154.$
$b_1 = 123, b_2 = 429, b_3 = 361.$
$d_1 = 418, d_2 = 397, d_3 = 212.$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 9 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 17 & 20 & 17 \\ 25 & 23 & 13 \\ 10 & 15 & 19 \end{pmatrix}.$$

Вариант№37

$a_1 = 547, a_2 = 427, a_3 = 519.$
$b_1 = 537, b_2 = 692, b_3 = 437.$
$d_1 = 654, d_2 = 729, d_3 = 419.$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 19 & 15 & 12 \\ 11 & 16 & 17 \\ 11 & 14 & 18 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 9 \\ 9 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант№38

$a_1 = 345, a_2 = 478, a_3 = 318.$
$b_1 = 332, b_2 = 437, b_3 = 429.$
$d_1 = 517, d_2 = 671, d_3 = 568.$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 13 & 11 & 19 \\ 15 & 18 & 14 \\ 17 & 12 & 17 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Вариант№39

$a_1 = 437, a_2 = 127, a_3 = 718.$
$b_1 = 241, b_2 = 373, b_3 = 613.$
$d_1 = 768, d_2 = 343, d_3 = 408.$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 20 & 17 & 19 \\ 13 & 19 & 14 \\ 11 & 14 & 17 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 7 \\ 5 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Вариант№40

$$a_1 = 321, a_2 = 156, a_3 = 348. \quad C_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 14 & 32 & 17 \\ 22 & 27 & 18 \\ 32 & 15 & 19 \end{pmatrix}.$$
$$b_1 = 327, b_2 = 469, b_3 = 156.$$
$$d_1 = 571, d_2 = 498, d_3 = 199.$$

Вариант№41

$$a_1 = 237, a_2 = 219, a_3 = 245. \quad C_1 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 9 & 5 & 1 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 14 \\ 17 & 19 & 23 \\ 15 & 19 & 14 \end{pmatrix}.$$
$$b_1 = 271, b_2 = 169, b_3 = 254.$$
$$d_1 = 445, d_2 = 561, d_3 = 180.$$

Вариант№42

$$a_1 = 329, a_2 = 238, a_3 = 173. \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 23 & 25 & 27 \\ 21 & 25 & 29 \\ 21 & 17 & 14 \end{pmatrix}.$$
$$b_1 = 347, b_2 = 129, b_3 = 281.$$
$$d_1 = 455, d_2 = 291, d_3 = 384.$$

Вариант№43

$$a_1 = 234, a_2 = 291, a_3 = 279. \quad C_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 15 & 11 & 14 \\ 16 & 17 & 15 \\ 14 & 13 & 18 \end{pmatrix}.$$
$$b_1 = 264, b_2 = 389, b_3 = 243.$$
$$d_1 = 644, d_2 = 473, d_3 = 279.$$

Вариант№44

$$a_1 = 254, a_2 = 473, a_3 = 254. \quad C_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 19 & 17 & 14 \\ 23 & 21 & 17 \\ 12 & 18 & 20 \end{pmatrix}.$$
$$b_1 = 223, b_2 = 329, b_3 = 391.$$
$$d_1 = 518, d_2 = 497, d_3 = 292.$$

Вариант№45

$$a_1 = 537, a_2 = 437, a_3 = 419. \quad C_1 = \begin{pmatrix} 11 & 14 & 11 \\ 15 & 18 & 21 \\ 14 & 17 & 19 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 8 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$
$$b_1 = 597, b_2 = 492, b_3 = 497.$$
$$d_1 = 614, d_2 = 529, d_3 = 469.$$

Вариант№46

$$a_1 = 245, a_2 = 378, a_3 = 218. \quad C_1 = \begin{pmatrix} 17 & 12 & 14 \\ 11 & 23 & 24 \\ 19 & 17 & 13 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 1 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$
$$b_1 = 432, b_2 = 237, b_3 = 229.$$
$$d_1 = 417, d_2 = 571, d_3 = 468.$$

Вариант№47

$$a_1 = 467, a_2 = 177, a_3 = 758. \quad C_1 = \begin{pmatrix} 21 & 18 & 13 \\ 15 & 14 & 15 \\ 15 & 19 & 11 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \\ 7 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$
$$b_1 = 341, b_2 = 393, b_3 = 513.$$
$$d_1 = 568, d_2 = 443, d_3 = 498.$$

§11.Индивидуальное домашнее задание

Задача№1

Найти оптимальное решение транспортной задачи (минимум суммарных затрат на перевозку), если заданы затраты на перевозку единицы груза от поставщиков *A1, A2, A3* к потребителям *B1, B2, B3, B4,* запасы поставщиков и спрос потребителей заданы таблицей 1.

Таблица 1

Вариант	Запасы поставщиков			Спрос потребителей				Затраты на перевозку единицы груза											
								от *A1* к				от *A2* к				от *A3* к			
	A1	*A2*	*A3*	*B1*	*B2*	*B3*	*B4*	*B1*	*B2*	*B3*	*B4*	*B1*	*B2*	*B3*	*B4*	*B1*	*B2*	*B33*	*B4*
1	30	45	55	25	35	25	20	2	3	5	4	3	2	6	7	4	8	7	2
2	45	40	75	20	35	40	25	4	1	3	5	6	3	5	7	4	9	6	3
3	25	25	35	20	40	55	20	3	2	3	6	4	2	4	5	8	7	5	4
4	45	25	50	45	20	60	10	1	7	6	2	1	8	3	4	3	5	1	9
5	45	70	40	30	30	25	35	3	6	1	6	3	5	3	2	5	4	6	9
6	20	35	45	75	20	30	10	2	1	4	4	7	1	2	5	8	3	9	2
7	50	65	30	25	35	25	60	1	3	2	7	6	5	8	2	7	4	3	2
8	30	70	35	40	45	55	25	2	7	5	1	3	5	4	3	5	2	1	5
9	35	45	70	20	25	30	20	2	3	1	6	5	3	1	6	7	8	2	5
10	40	25	45	25	60	30	10	2	1	5	4	8	2	3	5	2	4	1	2
11	35	55	25	30	60	10	25	3	2	1	4	5	3	1	6	2	3	6	2
12	50	85	20	75	15	25	70	1	9	6	7	3	5	4	2	3	5	4	9
13	10	25	45	65	40	10	20	7	6	5	6	2	4	3	1	5	3	6	8
14	30	10	25	45	15	60	10	6	9	4	3	1	5	6	8	5	7	6	4
15	25	40	65	10	35	40	15	4	2	3	5	4	3	5	7	4	3	6	2
16	65	15	20	35	40	75	10	5	8	6	9	1	2	4	7	3	6	8	5
17	20	85	45	15	35	65	55	4	6	9	4	5	7	6	8	4	9	3	2
18	50	40	25	10	75	45	40	2	5	3	6	8	5	9	6	4	5	2	1
19	35	40	15	20	35	30	10	7	5	3	1	5	9	8	6	1	4	5	7
20	25	50	70	85	30	40	85	2	5	8	4	6	5	7	5	3	1	5	9
21	55	45	25	65	15	25	40	8	2	4	6	5	3	1	5	7	5	9	5
22	25	30	10	75	10	50	20	2	4	2	3	6	8	8	4	4	2	2	6
23	85	65	50	80	25	10	45	9	5	6	4	7	5	1	5	2	3	4	6
24	20	30	45	15	25	50	35	1	3	7	2	4	1	3	5	2	3	6	2
25	40	50	35	20	30	45	25	5	2	1	4	3	7	2	2	5	1	2	6
26	25	45	60	40	55	20	20	2	3	4	5	1	3	2	4	3	2	1	7
27	30	25	45	50	65	70	25	3	4	1	2	5	2	7	1	3	4	5	8
28	35	45	25	15	20	40	25	4	2	1	3	6	1	2	5	4	3	7	1
29	55	25	30	10	15	40	35	7	4	3	2	1	6	5	1	3	4	8	2
30	20	45	50	25	30	35	20	1	3	2	4	2	5	6	1	7	4	2	9

Задача №2

Усложненные постановки транспортной задачи.

Используя таблицу1 задачи №1, выполнить :

2.1. Ввести запрет на перемещение груза от поставщика к потребителю.

2.2. Осуществить обязательные поставки от поставщика к потребителю в указанных объёмах.

2.3. Ввести ограничение на пропускную способность между поставщиком и потребителем.

Варианты ограничений приведены в таблице2.

Таблица2

Вариант	2.1		2.2			2.3		
	Запрещенные перевозки		Обязательные перевозки			Ограничения на пропускную способность		
	от кого	к кому	от кого	к кому	количество единиц	от кого	к кому	величина ограничений
1	A1	B2	A1	B4	10	A1	B1	7
2	A2	B3	A2	B3	30	A3	B4	9
3	A3	B4	A2	B1	15	A1	B2	12
4	A1	B1	A3	B2	15	A1	B1	14
5	A1	B3	A1	B1	25	A2	B4	18
6	A2	B1	A3	B3	10	A1	B2	6
7	A2	B2	A1	B2	15	A2	B2	21
8	A3	B1	A2	B2	25	A2	B1	27
9	A3	B2	A1	B1	10	A1	B2	17
10	A3	B3	A2	B2	20	A2	B2	11
11	A1	B4	A3	B2	15	A1	B1	19
12	A2	B4	A3	B2	10	A1	B1	32
13	A1	B2	A2	B4	10	A2	B4	13
14	A1	B3	A3	B3	10	A2	B1	6
15	A1	B1	A2	B2	10	A2	B4	11
16	A1	B4	A1	B4	10	A2	B1	12
17	A2	B1	A3	B2	15	A3	B4	40
18	A2	B2	A3	B2	20	A3	B4	13
19	A2	B3	A2	B2	15	A1	B4	8
20	A2	B4	A1	B1	25	A3	B2	13
21	A3	B4	A3	B3	15	A2	B3	17
22	A3	B3	A2	B3	10	A3	B2	5
23	A3	B2	A1	B2	10	A2	B3	7
24	A3	B1	A1	B1	10	A1	B1	9
25	A2	B3	A1	B2	20	A3	B2	21
26	A2	B4	A3	B4	10	A2	B1	26
27	A1	B2	A1	B4	20	A1	B3	14
28	A1	B3	A2	B4	15	A1	B3	17
29	A3	B1	A3	B2	10	A2	B1	7
30	A3	B4	A2	B1	20	A2	B3	16

Литература

1. Бакаев А.А. Вопросы исследования транспортных систем. 1976г.
2. Воевудский Е.Н., Кузьменко Г.И. Системные методы в прогностике.-Киев,1993.-33с.
3. Воевудский Е.Н. , Коневцева Н.А., Махуренко Г.С. Экономико-математические методы и модели в управлении морским транспортом.-М.: Транспорт, 1988. – 380 с.
4. Кузнецов А.В., Холод И.И. Математическое программирование. – Минск: Вышейш.шк., 1984.-221с.
5. Михалевич В.С. Методы решения сложных задач математического программирования. 1985г.- 92 с.
6. Сакович В.А. Исследование операций. -М.: Мир,-1985.-256с.
7. Таха Х. Введение в исследование операций. – М.: Мир,-1985г.
8. Триус Е.Б. Задачи математического программирования транспортного типа. 1967г. –208 с.
9. Трубин В.А. Математическое исследование некоторых задач транспортировки и выбора. 1969г.