МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І. І. МЕЧНИКОВА
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ЕКОНОМІКИ ТА МЕХАНІКИ

Г. В. Устимчик, Л. В. Матвіюк, Г. М. Вартанян

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Методичні вказівки
для студентів напряму 6.040201 - «математика»

ОДЕСА
ОНУ
2015

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.17я73
У801

Рекомендовано до друку Вченою радою ІМЕМ.
Протокол № 1 від 14.10.2014 р.

Рецензенти:

А. В. Усов, завідувач кафедри вищої математики та моделювання систем Одеського національного політехнічного університету, доктор технічних наук, професор, лауреат Державної премії України в галузі науки та техніки;

С. А. Щоголев, доктор фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри вищої математики ОНУ імені І. І. Мечникова.

Устимчик Г. В., Матвіюк Л. В., Вартанян Г. М.

У801 Теорія ймовірностей та математична статистика : Методичні вказівки для студентів напряму 6.040201 − «математика» / Г. В. Устимчик, Л. В. Матвіюк, Г. М. Вартанян. – Одеса : «Одеський національний університет імені І. І. Мечникова», 2015. – 136 с.

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.17я73

Зміст

§ 1. Елементи комбінаторики

Основними правилами комбінаторики

Задачі складання з елементів скінченних множин комбінацій (або груп) за певними правилами відбору елементів у ці комбінації відносяться до основних задач розділу математики, який називається комбінаторним аналізом або комбінаторикою.

Основними правилами комбінаторики є правило множення та правило суми.

Правило множення. Нехай треба послідовно виконати k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, після чого другу дію — n_2 способами, третю — n_3 способами й т. д., то всі k дій може бути виконано $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Правило суми. Нехай треба послідовно виконати k дій, які взаємно виключають одна одну. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, після чого другу дію — n_2 способами, третю — n_3 способами й т. д., то всі k дій може бути виконано $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ способами.

Приклад 1.1. В класі вивчають 10 предметів. Скількома способами можна скласти розклад занять на навчальний день, складений з 6-ти різних уроків?

Розв’язування. Для того, щоб скласти розклад уроків, потрібно послідовно виконати 6 дій, що відповідають порядковим номерам уроків. Першим можна поставити будь-який з 10-ти предметів, тобто першу дію можна виконати 10-тю способами, тоді другу — 9-тю способами, третю — 8, четверту — 7, п’яту — 6, шосту — 5 способами. Застосувавши правило множення отримаємо, що розклад з шести різних уроків можна скласти $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$ способами.

Приклад 1.2. Маємо 20 виробів першого сорту та 30 виробів другого сорту. Потрібно послідовно вибрати два вироби одного сорту. Скількома способами можна це зробити?

Розв’язування. Вибір двох виробів одного сорту складається з двох дій — вибрати два вироби першого сорту або два виробу другого сорту. Першу дію за правилом множення можна виконати $20 \cdot 19 = 380$ способами, другу — $30 \cdot 29 = 870$ способами. Застосувавши правило суми, отримуємо відповідь: $380 + 870 = 1250$ способами можна послідовно вибрати два вироби одного сорту.

Приклад 1.3. У камері схову встановлено кодовий замок з чотирьох цифр. Кожна з цифр може дорівнювати $1,2,3,4,5$. Скільки різних варіантів коду можна скласти, якщо відомо :

а) цифри в коді можуть повторюватися?

б) цифри в коді не повинні повторюватися?

в) код повинен починатися з цифри «3»?

г) код повинен бути парним числом?

д) код повинен бути парним числом, цифри якого не повторюються?

Розв'язування. а) Якщо цифри у коді можуть повторюватися, то на кожній позиції у коді може стояти будь-яка з 5 цифр, тобто загальна кількість варіантів складання коду $5\cdot5\cdot5\cdot5=625$.

б) На першому місці може стояти будь-яка з 5 цифр, на другому — 4 (оскільки одна цифра вже вибрана на перше місце), на третьому —3, на четвертому — 2 цифри. Загальна кількість варіантів складання коду підраховується за основним правилом множення комбінаторики: $5\cdot4\cdot3\cdot2=120$.

в) На першому місці повинна стояти цифра «3», на інших місцях можуть стояти будь-які з 5 цифр. Загальна кількість варіантів складання коду $5\cdot5\cdot5=125$.

г) Код буде парним числом, якщо на останньому місці буде стояти парна цифра. У нашому випадку це можуть бути тільки 2, або 4. На інших місцях можуть стояти будь-які цифри з 5 цифр. Тоді маємо, що загальна кількість варіантів складання коду $5\cdot5\cdot5\cdot2=250$.

д) Код у цьому випадку теж повинен бути парним числом. Тому останню цифру також можна записати двома способами. У коді цифри не можуть повторюватися, тому на передостанньому місці може стояти лише чотири цифри, на другому — 3, на першому — 2 цифри. Загальна кількість варіантів складання коду $2\cdot4\cdot3\cdot2=48$.

Перестановки, розміщення, комбінації

Нехай множина M містить n елементів $(n\geq2)$, $1\leq k\leq n$.

Означення 1.1. Будь-яка підмножина множини M з k елементів називається комбінацією з n елементів по k. Число комбінацій позначають C_n^k та обчислюють за формулою:

$$C_n^k=\frac{A_n^k}{P_k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Домовимось, що $0!=1$, тоді $C_n^0=1$.Справедливі властивості:

$$C_n^k=C_n^{n-k},\ C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}.$$

Множина з n елементів називається впорядкованою, якщо кожному елементу цієї множини поставлено у відповідність певне число (номер цього елемента) від 1 до n так, що різним елементам відповідають різні числа (номери елементів).

Дві впорядковані множини рівні, якщо вони складаються з однакових елементів та однаково впорядковані. Наприклад, множини (a,b) і (b,a) – різні впорядковані множини, елементами яких є елементи невпорядкованої множини $\{a,b\}$.

Означення 1.2. Розміщеннями з n елементів по k називають впорядковані підмножини множини M, які складаються з k елементів.

Розміщення можуть відрізнятись одне від одного або самими елементами, або їх порядком.

Кількість розміщень з n елементів по k позначають A_n^k, $k \le n$ та обчислюють за формулою:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1).$$

Для кількості розміщень справедлива наступна рекурентна формула:

$$A_n^{k+1} = A_n^k \cdot (n-k) \quad , k \le n-1.$$

Справедливе відношення $A_n^k = k!C_n^k$. Воно випливає з того, що число усіх підмножин множини M, які мають k елементів, дорівнює C_n^k та кожна така підмножина може бути впорядкована $k!$ способами.

Означення 1.3. Перестановкою з n елементів множини M називається будь-яка впорядкована множина, яка утворена з n елементів множини M.

Перестановки складаються з одних й тих самих елементів, а відрізняються лише порядком елементів. Число перестановок множині з n елементів позначається P_n та обчислюється за формулою:

$$P_n = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!.$$

Приклад 1.4. Дано множину $M = \{n_1, n_2, n_3\}$. Наведіть усі можливі перестановки, розміщення та комбінації.

Розв'язування. Перестановками з трьох елементів цієї множини є упорядковані набори (n_1,n_2,n_3), (n_1,n_3,n_2), (n_2,n_1,n_3), (n_2,n_3,n_1), (n_3,n_2,n_1), (n_3,n_1,n_2). Розміщеннями з трьох елементів цієї множини по два є упорядковані набори (n_1,n_2), (n_1,n_3), (n_2,n_3), (n_2,n_1), (n_3,n_1), (n_3,n_2). Комбінаціями з трьох елементів цієї множини по два є множини $\{n_1,n_2\}$, $\{n_1,n_3\}$, $\{n_2,n_3\}$. Дві комбінації відрізняються одна від іншої хоча б одним елементом, а розміщення або самими елементами, або порядком їх розташування. Розміщеннями з трьох елементів цієї множини по одному будуть (n_1), (n_2), (n_3). Комбінаціями із трьох елементів цієї множини по одному будуть $\{n_1\}$, $\{n_2\}$, $\{n_3\}$.

Приклад 1.5. Скількома способами можна поставити 9 різних книг на полиці, щоб певні 4 книги стояли поряд?

Розв'язування. Потрібно виконати дві дії: сформувати блок з чотирьох певних книг, а потім розкласти цей блок та 5 книг, які залишалися на полиці. Першу дію можна виконати $P_4 = 4! = 24$ способами, другу дію можна виконати

$P_6 = 6! = 720$ способами. За правилом множення отримаємо, що кількість усіх можливих способів $24 \cdot 720 = 17280$.

Приклад 1.6. Скількома способами можна вибрати з 10 чорних та 4 білих куль 7 куль так, щоб серед них були 3 білі кулі?

Розв'язування. Для того, щоб отримати потрібний набір куль, потрібно виконати дві дії: вибрати 4 чорних та 3 білих кулі. Першу дію можна виконати $C_{10}^4 = 210$ способами, другу — $C_4^3 = 4$ способами. Тоді за правилом множення потрібний набір з 7 куль можна отримати $210 \cdot 4 = 840$ способами.

Приклад 1.7. Групу з 12 чоловік потрібно розбити на дві підгрупи, у одній з яких повинно бути не більше 5 чоловік, а у другій не більше 9 чоловік. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язування. Можливі три варіанти розбиття групи з 12 чоловік на дві підгрупи таким чином, щоб задовольнити умову: 5 чоловік й 7 чоловік, 4 й 8, 3 та 9. Перший варіант можна здійснити $C_{12}^5 = C_{12}^7 = 792$ способами, другий $C_{12}^4 = C_{12}^8 = 495$ способами, третій — $C_{12}^3 = 220$ способами. Застосувавши правило суми, отримаємо, що кількість усіх можливих варіантів $792 + 495 + 220 = 1507$.

Приклад 1.8. Десять команд приймають участь у розіграші першості з футболу за три призові місця. Дві команди, що займуть останні два місця серед десяти команд, не будуть вже приймати участь у наступній такій же першості. Скільки різних варіантів першості може бути , якщо враховувати лише перші три й останні дві команди серед десяти команд?

Розв'язування. З постановки задачі випливає, що потрібно виконати дві дії: заповнити три перші призові місця та два останні місця. Першу дію можна виконати $A_{10}^3 = 720$ способами, другу — $C_7^2 = 21$ способами. Застосувавши правило множення, отримаємо, що кількість усіх способів дорівнює $720 \cdot 21 = 15120$.

Перестановки, розміщення з повторами

Означення 1.4. Розглянемо перестановки з повторами. Нехай з елементів $n_1, n_2, \ldots, n_s$ утворюються скінченні впорядковані набори, що містять n членів, у котрих n_1 повторюється k_1 разів, n_2 — k_2 разів, …, n_s — k_s разів, $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$. Такі набори називаються перестановками з повторами. Фактично перестановка з повторами утворюється перестановкою різних елементів в наборі

$$\left(\underbrace{a_1, \ldots, a_1}_{k_1}, \underbrace{a_2, \ldots, a_2}_{k_2}, \underbrace{a_s .., a_s}_{k_s} \right).$$

Кількість різних перестановок з повторами обчислюється за формулою

$$P_n\left(k_1,k_2,...,k_s\right)=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdot...\cdot k_s!}.$$

Приклад 1.9. Скільки різних слів можна скласти, переставляючи букви у слові «мама»? Написати усі ці слова.

Розв'язування. Враховуючи те, що букви м та а у слові «мама» повторюються двічі, то кількість різних слів можна скласти $P_4\left(2,2\right)=\frac{4!}{2!2!}=6$ способами. Ці слова такі: мама, амма, амам, ммаа, маам, аамм.

Приклад 1.10. Знайти n — кількість шестибуквених «слів» які можна скласти з a, b й c, якщо відомо, що a зустрічається не більше трьох раз, b — не більше двох раз, c — не більше двох раз?

Розв'язування. Можна виділити наступні варіанти шестибуквених наборів — «слів», складених відповідно з букв a, b та c: $\left(3,2,1\right)$, $\left(3,1,2\right)$, $\left(2,2,2\right)$. У наборі $\left(3,2,1\right)$, наприклад, буква a зустрічається три рази, буква b— два рази, буква c один раз. Такі набори можна скласти $\frac{6!}{3!2!1!}$способами. Набори виду $\left(3,1,2\right)$ — $\frac{6!}{3!1!2!}$ способами. Набори виду $\left(2,2,2\right)$ — $\frac{6!}{2!2!2!}$ способами. Тоді загальна кількість шестибуквених «слів» $n=\frac{6!}{3!2!1!}+\frac{6!}{3!1!2!}+\frac{6!}{2!2!2!}=210$.

Означення 1.5. Нехай дано множину M, яка містить n типів елементів. З'єднання з повторами з елементів n типів по k, які відрізняються складом елементів і/або порядком їх розташування, називаються розміщеннями з повторами з n елементів по k. Кількість усіх таких розміщень з повторами позначається $A_n^k(ï)$ обчислюється за формулою

$$A_n^k(ï)=n^k.$$

Приклад 1.11. Скільки існує різних варіантів розмістити 6 пасажирів по 4 вагонам?

Розв'язування. Кожний пасажир може розміститися у будь-якому з чотирьох вагонів, тому маємо: $A_4^6(ï)=4^6=4096$.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Скільки цілих чисел, менших за мільйон, можна записати за допомогою цифр $0;2;3;4$?
2. Скільки цілих чисел, менших за мільйон, можна записати за допомогою цифр $2;5;7;9$?
3. Автомобільний номер складається з трьох букв та чотирьох цифр. Знайти кількість усіх можливих номерів, якщо використовуються 28 літер українського алфавіту.
4. У ліфт 12-ти поверхового будинку увійшло на першому поверсі 10 чоловік. Скількома способами вони можуть вийти з ліфту?

5. На вершину гори ведуть 11 шляхів. Скількома способами мандрівник може піднятися на гору та спуститися з неї? Дати відповідь на те ж запитання, якщо підйом та спуск здійснювати різними шляхами.

6. З міста A до міста B можна вибрати один із 5 залізничних або один із 7 автобусних рейсів. Скільки є варіантів здійснити подорожі: а) $A \to B$; б) $A \to B \to A$; в) $B \to A \to B$, якщо зворотній шлях провести у поїзді?

7. Скількома способами 9 чоловік можуть розміститися у черзі до каси?

8. Скільки є п'ятизначних чисел, котрі діляться на 5 без остачі?

9. Скільки є тризначних чисел, у котрих усі три цифри парні?

10. Скількома способами з 40 чоловік можна вибрати делегацію, що складається з п'яти чоловік?

11. Скільки є чотиризначних чисел, у котрих кожна наступна цифра більше ніж попередня?

12. Скільки є чотиризначних чисел, у котрих кожна наступна цифра менше ніж попередня?

13. Чотири юнаки та три дівчини вирішили після закінчення школи стати на роботу у своєму місті. У місті є три заводи, котрі беруть на роботу чоловіків, 4 — де потрібні жінки, та 2 — де приймають на роботу й чоловіків, й жінок. Скількома способами ці сім випускників можуть розподілитися на роботу?

14. У розіграші чемпіонату країни з футболу беруть участь 17 команд. Скількома способами можуть бути розподілені золота, срібна та бронзова медалі?

15. В турнірі грають n шахістів. Кожний учасник турніру грає зі всіма іншими учасниками по одні партії. Скільки партій буде зіграно в цьому турнірі?

16. У партії з 12 виробів 4 бракованих. Скількома способами можна вибрати 5 виробів, щоб серед них було 2 бракованих?

17. Скількома способами можна розсадити 4 осіб на 25 стільцях?

18. Скільки існує семизначних телефонних номерів, які відрізняються лише тим, що три останні цифри непарні та різні?

19. У танцювальному залі знаходяться 8 дівчат та 6 хлопців. Скільки можна скласти варіантів танцювальних пар дівчат з хлопцями?

20. Скількома способами можна розбити $m+n+s$ предметів на 3 групи так, щоб у одній групі було m предметів, у другій — n предметів, в третій — s предметів? $m, n, s \in \mathrm{N}$.

21. У почтовому відділенні продаються листівки 8 видів. Скільки існує варіантів покупки у ньому п'яти різних листівок?

22. Шестеро студентів здають екзамен. Скільки існує різних варіантів отримати позитивну екзаменаційну оцінку по п'ятибальній системі?

23. У кондитерській є п'ять різних сортів пирогів. Скількома способами можна вибрати набір з 4 пирогів.

24. Скількома способами можна наклеїти 3 види марок на 6 конвертів без марок?

25. Скільки тризначних чисел, які діляться на 3, можна записати цифрами $0,1,2,3,4,5$, якщо кожне число не повинно мати однакових цифр?

26. Якщо повернути аркуш паперу на 180°, то цифри $0,1,8$ можна вважати такими, що не змінюються, 6 і 9 переходять одна в одну, а інші цифри втрачають зміст. Скільки існує семицифрових чисел, величина яких не змінюється при повороті аркуша паперу на 180°?

27. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1,2,...,n\}$ так, щоб числа $1,2,3$ стояли поруч у порядку зростання?

28. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1,2,...,2n\}$ так, щоб кожне парне число мало парний номер?

29. На зборах має виступити 4 особи: A, B, C, D. Скількома способами їх можна записати в список ораторів, якщо B не може виступити раніше, ніж A?

30. На першому курсі вивчають 10 предметів. У понеділок 4 пари, причому всі пари різні. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок?

31. На одній із бічних сторін трикутника взято n точок, на другій — m точок. Кожну вершину при основі трикутника сполучено прямими з точками, взятими на протилежній бічній стороні. На скільки частин поділиться трикутник проведеними прямими?

32. Комісія складається з голови, двох його заступників і ще 4 осіб. Скількома способами члени комісії можуть розподілити між собою обов'язки?

33. Скільки є способів розподілити 15 різних предметів між трьома особами так, щоб кожна особа отримала 5 предметів?

34. На книжковій полиці розміщено 10 томів. Скількома способами можна розставити їх так, щоб при цьому перший та другий томи не стояли поруч?

35. З 12 чоловік кожен день протягом 6 днів вибирають 2 чергових. Визначити кількість різних списків чергових, якщо кожна особа чергує лише один раз.

36. Скільки різних слів можна утворити перестановкою букв у слові: а) «математика»? б) «комбінаторика»?

37. З урни, яка містить 10 чорних та 6 білих куль, вибирають 2 чорні та 3 білі кулі. Скількома способами це можна зробити?

38. Скількома способами можна розсадити 4 учнів на 25 місцях?

39. Студентові треба за 8 днів скласти 4 іспити. Скількома способами це можна зробити?

40. Скільки існує перестановок з n елементів, серед яких між двома даними елементами стоїть r елементів?

41. Шість ящиків різних матеріалів доставляють на вісім поверхів будівництва. Скількома способами можна розподілити матеріали по поверхах? У скількох з них на восьмий поверх буде доставлено не менше двох матеріалів?

42. Ліфт, у якому перебуває 9 пасажирів, зупиняється на десяти поверхах. Пасажири виходять групами по два, три, чотири чоловіки. Скількома способами це можна зробити?

§ 2. Простір елементарних подій

Операції над множинами

У теорії ймовірностей розглядаються стохастичні експерименти, які можна повторити будь-яку кількість разів, але результати яких не можна напевне передбачити. З кожним стохастичним експериментом пов'язують простір елементарних подій Ω— сукупність різних можливих наслідків експерименту. Будь-яка підмножина A простору елементарних наслідків Ω називається випадковою подією. При цьому Ω — така подія, яка відбувається при будь-якому наслідку стохастичного експерименту. Будемо вважати, що сукупність усіх підмножин Ω які ми будемо вважати подіями, утворюють σ—алгебру.

Нехай $\Omega=\{\omega\}$ — простір елементарних подій ω, тобто сукупність усіх різних можливих подій пов'язаних з даним стохастичним експериментом. Події — це деякі підмножини множини усіх елементарних подій Ω, тому над подіями можна ввести такі самі операції, як і над множинами у теорії множин. Будемо говорити, що подія A сприяє появі події B $(A\subset B)$, якщо з появою події A відбувається і подія B. Якщо подія A сприяє появі події B, а подія B сприяє появі події A, то події A та B називаються еквівалентними, або рівносильними $(A=B)$.

Сумою двох подій A та B називається така подія C, яка відбувається тоді, коли відбуваються принаймні одна з двох подій A або B. У цьому разі пишуть $C=A\bigcup B$, або $C=A+B$.

Добутком двох подій A та B називається така подія C, яка відбувається тоді, коли відбуваються одночасно обидві події A та B разом. У цьому разі пишуть $C=A\bigcap B,\ C=A\cdot B$. Різницею подій A та B називається така подія C, яка відбувається тоді, коли відбувається подія A але не відбувається подія B. У цьому разі пишуть $C=A\setminus B$, або $C=A-B$.

Подією, протилежною до події A, називається подія $\overline{A}$, яка відбувається тоді, коли не відбувається подія A, та не відбувається тоді, коли відбувається подія A . Позначають $\overline{A}=\Omega\setminus A$.

Сукупність усіх елементів простору елементарних подій Ω називається вірогідною подією. Подія $\varnothing=\overline{\Omega}$ називається неможливою.

Приклад 2.1. Навмання вибирається ціле число з відрізку $[-6,6]$. Розглянемо такі події:

$A=$ «вибране число на більше ніж 4»;

$B=$ «модуль цього числа не перевищує 2»;

$C=$ «це число не менше ніж 3».

Що означають події: $A+B,\ A+C,\ A\cdot B, A\cdot C,\ A-B,\ B-A,\ C-A$?

Розв’язання. Маємо

$$\Omega=\{-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

$$A=\{-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$$
$$B=\{-2,-1,0,1,2\},\ C=\{3,4,5,6\}.$$

Легко зрозуміти, що

$A+B=A,\ A+C=\Omega,$

$A\cdot B=B,\ A\cdot C=\{3,4\}$

$A-B=\{-6,-5,-4,-3,\ 3,\ 4\}$, $B-A=\varnothing$, $C-A=\{5,6\}$.

Приклад 2.2. Довести , що для будь-яких подій A та B співвідношення $A\subset B$ та $A+B=B$ рівносильні.

Розв'язання. а) Нехай $A\subset B$. Тоді $\omega\in A+B\Rightarrow\omega\in A$ (отже $\omega\in B$) або $\omega\notin A$ та $\omega\in B$. Звідси випливає, що

$$\omega\in(A\cdot B)+(\overline{A}\cdot B)=(A+\overline{A})\cdot B=\Omega\cdot B=B.$$

Навпаки, якщо $\omega\in B$, то $\omega\in A+B$.

б) Нехай $A+B=B$. Тоді $\omega\in A\Rightarrow\omega\in A+B\Leftrightarrow\omega\in B,$ тобто $A\subset B$.

Приклад 2.3. Експеримент полягає в тому, що монету підкидають тричі. Побудувати простір елементарних подій. Описати підмножини, що відповідають таким подіям :

$A=$ «герб випав рівно один раз»;

$B=$ «число не випало ані разу»;

$C=$ «гербів випало більше, ніж чисел»;

$D=$ «герб випав принаймні 2 рази підряд».

Розв'язання. При кожному киданні монета може впасти догори гербом (г) або числом (ч). Тому при трьох киданнях простір Ω складається з таких елементарних подій; ггг, ггч, гчг, чгг, гчч, чгч, ччг, ччч. Тоді

$$A=\{\text{ччг, чгч, гчч}\};$$
$$B=\{\text{ггг}\};$$
$$C=\{\text{ггг, ггч, гчг, чгг}\};$$
$$D=\{\text{ггг, ггч, чгг}\}.$$

Задачі для самостійного розв'язування

43. Гральну кість підкидають 2 рази. Описати простір елементарних подій. Описати події:

$A=$«сума очок, що випали, дорівнює 6 »,

$B=$«не менше, ніж один раз, з'явиться 3».

44. Підкидають гральну кість, а потім підкидають монету. Описати простір елементарних подій.

45. Кидають монету і фіксують, чи випав герб; кидання триває доти, доки герб не випаде двічі. Описати простір елементарних подій.

46. Монету підкидають до того часу, поки не з'явиться герб. Описати простір елементарних подій. Описати події:

$A =$«герб випадає раніше четвертого разу»,

$B =$«герб випадає не пізніше четвертого разу»,

$C =$«герб випадає при непарному числі підкидуваний».

47. Нехай експеримент полягає в тому, що вимірюють дві величини ξ, η, котрі приймають будь-які значення відрізку $\left[0,1\right]$. Описати простір елементарних подій. Описати події:

$A =$«різниця між значеннями ξ і η не більш за 0,5»,

$B =$«довжина вектору $\left(\xi, \eta\right)$ не менша, ніж 0,25».

48. Експеримент полягає у тому, що гральну кість підкидають доти, поки не з'явиться 6 очок. Описати простір елементарних подій. Скільки елементарних подій містить в собі подія $A =$«експеримент закінчиться до п'ятого кидка»?

49. З ящика, що містить 10 деталей, з яких 3 браковані, навмання послідовно та без повернення витягають по одній деталі до появи бракованої, після чого експеримент припиняють. Нехай $\omega_i =$«бракована деталь з'явиться при $i-$му випробуванні». Розглянемо подію $A =$«доведеться проводити третє за рахунком витягання».

а) Сконструювати елементарні події за допомогою алгебраїчних операцій над ω_i, $i = 1,2,...$

б) Записати подію A за допомогою елементарних подій а також спростити запис, провівши алгебраїчні перетворення.

50. Два баскетболісти по черзі кидають м'яч у корзину до першого влучення. Виграє той, хто першим закине м'яч. Першим кидає перший баскетболіст. Нехай A_k = «перший баскетболіст влучає в результаті свого $k-$го кидка», B_k = «другий баскетболіст влучає в результаті свого $k-$го кидка». Описати простір елементарних подій. Записати такі події:

$A =$«виграє перший баскетболіст »,

$B =$«виграє другий баскетболіст».

51. Нехай A, B, C - події. Довести співвідношення:

а) $A \cdot B = B \setminus \left(B \setminus A\right) = A \setminus \left(A \setminus B\right)$;

б) $\left(A \setminus B\right) \cdot C = \left(A \cdot C\right) \setminus \left(B \cdot C\right)$;

в) $\left(A \cdot B\right) \setminus C = \left(A \cdot C\right) \setminus \left(B \cdot C\right)$;

г) $\left(A + B\right) \setminus B = A \setminus \left(A \cdot B\right) = A \cdot \overline{B}$;

д) $A + B = \left(A \setminus \left(A \cdot B\right)\right) + B$;

є) $\left(A + B\right) \setminus \left(A \cdot B\right) = \left(A \cdot \overline{B}\right) + \left(\overline{A} \cdot B\right)$;

ж) $A \setminus \left(B \cdot C\right) = \left(A \setminus B\right) + \left(A \setminus C\right)$;

з) $A \setminus \left(B + C\right) = \left(A \setminus B\right) \setminus C$.

52. Спростити вирази:

а) $\left(B + C\right) \cdot \left(B + \overline{C}\right) \cdot \left(\overline{B} + C\right) \cdot \left(\overline{B} + \overline{C}\right)$;

б) $((A\cdot B)+A)\cdot((B\cdot C)+B)+(A\cdot C)+A$;

в) $(A+B)\cdot(B+C)$.

53. Суму двох подій $A+B$ можна виразити як суму двох несумісних подій $A+B=(A\setminus(A\cdot B))+B$. Зобразити аналогічним способом суму трьох подій.

54. Довести, що подія $((A+B)\cdot(A+\overline{B}))+((\overline{A}+B)\cdot(\overline{A}+\overline{B}))$ є вірогідною.

55. Чи є рівносильними події A та B, якщо

а) $\overline{A}=\overline{B}$;

б) $A+C=B+C$, C - деяка подія;

в) $A\cdot C=B\cdot C$, C - деяка подія;

г) $A\cdot(A+B)=B\cdot(A+B)$;

д) $A\cdot(A\setminus B)=B\cdot(B\setminus A)$.

56. Нехай A, B, C - довільні події. Знайти вирази для подій, полягаючих у тому, що

а) здійснилась тільки подія A;

б) здійснилися тільки A і B;

в) здійснилися усі три події;

г) здійснилася не менше ніж одна подія;

д) здійснилися не менше ніж дві події;

с) здійснилася одна й тільки одна подія;

ж) здійснилися дві й тільки дві події;

з) ніяка подія не здійснилася;

і) здійснилися не більше ніж дві події.

57. Розглянемо такі події:

а) $A=$«поява герба при двох підкиданнях монети »,

б) $B=$«три влучення при трьох пострілах»,

в) $C=$«не менше ніж одне влучення при трьох пострілах»,

г) Вказати події, протилежні до подій A, B, C.

58. З множини подружніх пар береться наздогад одна пара. Вводимо такі події:

$A=$«чоловіку більше 30 років »,

$B=$«чоловік старший за жінку»,

$C=$«жінці більше за 30 років».

З'ясувати зміст подій $A\cdot B\cdot C$, $A\setminus(A\cdot B)$, $A\cdot\overline{B}\cdot C$. Перевірити, $A\cdot\overline{C}\subset B$.

59. Нехай A та B - підмножини площини $\Omega=\mathrm{R}^2$, що визначаються так: $A=\{(x,y): x+y\le 1\}$, $B=\{(x,y): y\le 2x+2\}$. Зобразити події: $A\cdot B$, $A+B, \overline{A}, A\setminus B$.

60. Двоє грають у шахи. Розглянемо події: $A=$«виграв перший гравець», $B=$«виграв другий гравець». Що означають події: а) $\overline{A}\cdot\overline{\overline{A}}$; б) $\overline{B}\setminus A$; в) $\overline{A}\setminus B$?

61. З урни, яка містить чорні та білі кулі, добуто n куль. Введемо подію $A_i: A_i=$«$i-$та куля біла», $i=1,...,n$. Виразити через A_i такі події: а) усі кулі

білі; б) хоч би одна куля біла; в) рівно одна куля біла; г) не більше ніж k куль білі $(1 \le k \le n)$; д) хоч би k куль білі; є) рівно k куль білі; ж) всі n куль одного кольору.

62. Мішень складається з десяти кругів, що обмежені концентричними колами з радіусами $R_1 < R_2 < ... < R_{10}$.Нехай A_k= «влучення в круг з радіусом R_k», $k = \overline{1,10}$. Що означають події $B = A_1 + A_3 + A_6$; $C = A_2 \cdot A_4 \cdot A_6 \cdot A_8$; $D = (A_1 + A_2) \cdot A_6$; $G = \bigcup_{k=1}^{5} A_k$; $F = \bigcap_{k=1}^{10} A_k$?

63. Судно має кермо, 4 котли та 2 турбіни. Подія A полягає в тому, що кермо працює (не вийшло з ладу); подія $B_k, k = \overline{1,4}$, — працює k-й котел; подія C_j, $j = 1,2$ - працює j-та турбіна. Подія D полягає в тому, що судном можна керувати, а це можливо, коли працює кермо, принаймні один котел та одна турбіна. Виразити подію D через події A, B_k, C_j.

§ 3. Класичне означення ймовірності

Простір елементарних подій Ω називається дискретним, якщо множина Ω скінченна або зліченна. Нехай простір елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}$ дискретний. Припустимо, що кожній елементарній події ω_k можна поставити у відповідність невід'ємне число p_k (ймовірність ω_k), причому $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$. Якщо A — випадкова подія ($A \subset \Omega$), то число

$$P(A) = \sum_{\omega_k \in A} p_k \text{, де } P(A)$$

називається ймовірністю події A.

Мають місце властивості:

а) $P(A) \ge 0$;

б) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, якщо події A і B несумісні;

в) $P(\Omega) = 1$.

Нехай простір Ω складається з n елементарних рівноможливих подій $\left(p_k = \frac{1}{n}, k = 1, \ldots n\right)$, а до складу A входять m з цих подій. Тоді ймовірністю події можна обчислити за формуло

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Ця формула і є класичним означення ймовірності.

Алгоритм розв'язування задач на обчислення ймовірностей подій наступний: з'ясувати, в чому полягає стохастичне випробування, результат випробування (елементарна подія), встановити простір елементарних подій Ω; перевірити виконання трьох умов класичного означення: скінченність Ω, рівноможливість та несумісність елементарних подій; знайти n - кількість всіх можливих результатів випробування; з'ясувати m- кількість результатів випробування, що сприяють появі досліджуваної A; для розрахунку ймовірності події A застосувати формулу

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

При невеликих n всі результати можна перерахувати безпосередньо і серед них неважко вказати ті, що сприяють появі події A. Проте в більшості задачах це не вдається зробити і доводиться застосовувати правила і формули комбінаторики.

Приклад 3.1. В магазин поступило 30 кольорових телевізорів, серед яких у 5 приховані дефекти. Знайти ймовірність того, що взятий наугад для перевірки телевізор не має прихованих дефектів.

Розв'язування. Експеримент полягає у випадковому виборі одного телевізора з 30, а елементарною подією (спостережуваним результатом експерименту) є вибраний телевізор. Тоді кількість всіх елементарних подій рівна 30, тобто $n=30$. Подія A- наугад взятий для перевірки телевізор не має прихованих дефектів, рівна 25, тобто $m=25$. Тоді $P(A)=\frac{5}{6}$.

Приклад 3.2. Підкидають дві гральні кісті. Знайти ймовірності наступних подій:

A = «числа очок на обох костях співпадають»;
B = «число очок на першій кості більше, ніж на другій»;
C = «сума очок парна»;
D= «сума очок більше двох»;
E = «сума очок не менше п'яти»;
F = «хоча б на одній кості появиться цифра 5»;
G= «добуток чисел очок, що випали, дорівнює 6».

Розв'язування. Експеримент полягає в одинарному підкиданні двох гральних костей одночасно. Елементарна подія – пара чисел, що випали на верхніх гранях обох костей. Число n всіх елементарних подій дорівнює $6\cdot 6=36$. Нехай m_A - кількість елементарних подій, що сприяють появі події A. Тоді $m_A=6$ і $P(A)=\frac{1}{6}$. Нехай m_B - кількість елементарних подій, що сприяють появі події B. Якщо на першій кості випаде число два, то сприятливий результат на другій кості один; якщо на першій кості випаде число три, то сприятливих результатів два, і т.д. Тоді, застосовуючи правило суми, отримаємо, що $m_B=1+2+3+4+5=15$ і $P(B)=\frac{5}{12}$. Пропонуємо ймовірності наступних подій обчислити самостійно. Наведемо лише відповіді:

$$P(C)=\frac{1}{2},\ P(D)=\frac{35}{36},\ P(E)=\frac{1}{6},\ P(F)=\frac{11}{36},\ P(G)=\frac{1}{9}.$$

Приклад 3.3. З партії, що містить 10 деталей, серед яких 3 бракованих, наугад витягують 3 деталі для контролю. Знайти ймовірності наступних подій:

A = «в отриманій вибірці один виріб бракований»;

B = «в отриманій вибірці немає жодного бракованого виробу»;

C = «в отриманій вибірці хоча б один виріб бракований»;

Розв'язування. Елементарною подією є будь-який набір з 3 деталей із 10. Тоді кількість всіх елементарних подій $C_{10}^3=120$. Нехай m_A - кількість елементарних подій, що сприяють появі події A. В цьому випадку в кожному наборі повинно бути один бракований виріб и два не бракованих вироби. Браковані вироби можна вибрати трьома способами, два не бракованих з 7 можна вибрати $C_7^2=21$ способом. За правилом множення $m_A=3\cdot 21=63$, тоді $P(A)=\frac{63}{120}=\frac{21}{40}$. Нехай m_B - кількість елементарних виробів, що сприяють появі події B. В цьому випадку в кожному наборі всі вироби повинні бути не бракованими. Три не бракованих вироби з семи можна вибрати $C_7^3=35$ способами, тобто $m_B=35$. Тоді $P(B)=\frac{35}{120}=\frac{7}{24}$. Нехай m_C - кількість елементарних подій, що сприяють появі події C. В цьому випадку в кожному наборі повинні бути або один, або два, або три вироби браковані. В першому випадку кількість наборів рівна $m_A=63$, в другому - $m_B=21$, так як два бракованих вироби можна вибрати $C_3^2=3$ способами, а одне не браковане – 7 способами. В третьому випадку $m_C=m_A+m_B+1=63+21+1=85$, оскільки три бракованих вироби можна вибрати одним способом. Отже, $P(C)=\frac{85}{120}=\frac{17}{24}$.

Приклад 3.4. Серед кандидатів у студентську раду факультету 3 першокурсника, 5 другокурсників і 7 третьокурсників. Наугад вибирають 5 чоловік на конференцію. Знайти ймовірність наступних подій:

A = «будуть вибрані одні третьокурсники»;

B = «всі першокурсники попадуть на конференцію»;

C = «не буде вибрано ні одного другокурсника».

Розв'язування. Елементарною подією є будь-який набір 5 студентів з 15. Тоді кількість всіх елементарних подій рівна $C_{15}^5=3003$. Нехай m_A - кількість елементарних подій, що сприяють появі події A. В цьому випадку $m_A=C_7^5=21$, тоді $P(A)=\frac{21}{3003}=\frac{1}{143}$. Нехай m_B - кількість елементарних виробів, що сприяють появі події B. В цьому випадку у кожному наборі з 5 студентів повинні бути всі три першокурсника і будь-які два студента другого або третього курсу. Кількість таких наборів рівна $1 \cdot C_{12}^2 = 66$, тоді $m_B = 66$ і $P(B) = \frac{66}{3003} = \frac{2}{91}$. Нехай m_C - кількість елементарних подій, що сприяють появі події C. В цьому випадку в кожному наборі повинні бути відсутніми другокурсники. Студентів першого і другого курсів 10 чоловік, отже, $m_C = C_{10}^5 = 252$, тоді $P(C) = \frac{252}{3003} = \frac{12}{143}$.

Приклад 3.5. Із колоді в 52 карти витягують наугад 4 карти. Знайти ймовірності наступних подій:

A = «в отриманій вибірці всі карти бубнової масті»;

B = «в отриманій вибірці опиниться хоча б один туз»;

C = «в отриманій вибірці всі карти однієї масті».

Розв'язування. Елементарною подією є будь-який набір 4 карт із 52. Тоді число всіх елементарних подій $C_{52}^4 = 270725$. Нехай m_A - кількість елементарних подій, що сприяють появі події A. В цьому випадку $m_A = C_{13}^4 = 715$, тоді $P(A) = \frac{715}{270725} = 0{,}00264$. Нехай m_B - кількість елементарних подій, що сприяють появі події B. В цьому випадку в кожному наборі повинні бути або один, або два, або три, або чотири тузи. У першому випадку кількість елементарних подій за правилом множення дорівнює $4 \cdot C_{48}^3 = 69184$, в другому випадку $C_4^2 \cdot C_{48}^2 = 6768$, в третьому випадку $C_4^3 \cdot C_{48}^1 = 192$, в четвертому - 1. Отже, $m_B = 69184 + 6768 + 192 + 1 = 76145$ і $P(B) = \frac{76145}{270725} = 0{,}2813$. Нехай m_C - кількість елементарних подій, що сприяють появі події C. В цьому випадку в кожному наборі повинні бути карти тільки однієї із чотирьох мастей, тоді $m_C = 4 \cdot C_{13}^4 = 2860$. Отже, $P(C) = \frac{2860}{270725} = 0{,}01056$.

Приклад 3.6. Готуючись до доповіді, студент виписав із книги цитату, але, забувши номер сторінки, на якій вона знаходиться, написав номер наугад. Яка ймовірність того, що студент записав потрібний номер, якщо він пам'ятає, що номер виражається двозначним числом з різними цифрами?

Розв'язування. Введемо позначення події: A - студент записав потрібний номер. Знайдемо ймовірність. Кількість всіх можливих результатів випробування n знайдемо, скориставшись формулами комбінаторики. Всього є 10 цифр, кожний номер містить 2 цифри і порядок цифр суттєвий при утворені двозначних чисел, отже, потрібно знайти кількість розміщень із 10 по 2: $A_{10}^2 = 90$. Із загальної кількості розміщень потрібно виключити ті 9 розміщень, котрі починаються з цифри 0, а саме: 01, 02, …, 09. Таким чином, $n = A_{10}^2 - 9 = 90 - 9 = 81$.

Кількість результатів випробування, що сприяють появі події A, дорівнює $m = 1$, оскільки цитата знаходиться на одній певній сторінці. Отже, $P(A) = \dfrac{1}{81}$.

Приклад 3.7. Знайти ймовірність того, що в 8-значному числі рівно 4 цифри співпадають, а інші різні.

Розв'язування. Елементарною подією є 8-значне число. Кількість всіх можливих способів скласти 8-значне число із 10 цифр $n = 10^8$. Досліджувана подія A- «у 8-значному числі рівно 4 цифри співпадають», тобто в числі 5 різних цифр, одна із яких повторюється – кількість способів її вибору – будь-яка із 10 цифр, і ця цифра займає будь-які 4 місця в числі – кількість способів C_8^4. 4 місця, що залишилися, займають різні цифри із 9 невикористаних, і оскільки число залежить від порядку розміщення цифр, то кількість способів вибору чотирьох цифр A_9^4. Тоді кількість елементарних подій, що сприяють появі події A рівна $m = 10 \cdot C_8^4 \cdot A_8^4$. Шукана ймовірність дорівнює

$$P(A) = \frac{10 \cdot C_8^4 \cdot A_8^4}{10^8} = 0{,}021168.$$

Приклад 3.8. n студентів, в тому числі A та B, розташовуються в ряд у випадковому порядку. Знайти ймовірність того, що між A та B будуть стояти рівно r студентів.

Розв'язування. Загальна кількість випадків дорівнює кількості перестановок із n елементів, тобто $n!$. Кількість сприятливих випадків знаходиться наступним чином. Якщо A та B займають фіксовані місця, які знаходяться на відстані r одне від одного, то інші $n-2$ можуть займати місця, що залишилися $(n-2)!$ різними способами (кількість перестановок із $n-2$). Розглянемо, як можна розмістити A та B на відстані r, якщо A знаходиться, наприклад, зліва від B. Це можна зробити наступним чином:

A займає 1-е місце. B займає $(r+2)$-е місце;

A займає 2-е місце. B займає $(r+3)$-е місце;

…………………………………………………;

A займає $(n-r-1)$-е місце. B займає n-е місце;

Крім того, можна переставити місцями A та B. Таким чином, всього $2(n-r-1)$ можна розмістити A та B. Кожному способу розміщення A та B відповідає $(n-2)!$ способів розміщення інших $n-2$ студентів. Отже, всього є $2(n-r-1)\cdot(n-2)!$ сприятливих випадків. Шукана ймовірність дорівнює:

$$\frac{2(n-r-1)(n-2)!}{n!}=\frac{2(n-r-1)}{n(n-1)}.$$

Приклад 3.9. Знайти ймовірність того, що серед трьох вибраних навмання цифр зустрінуться 2, 1, 0 повторів.

Розв'язування. Три вибрані навмання цифри утворюють одну із наступних трійок: 000, 001, 002, …, 999. Таких трійок всього $10^3=1000$ (розміщення з повторами із 10 елементів по 3). Серед цих трійок є рівно 10 вигляду XXX (з двома повторами). Тому ймовірність двох повторів дорівнює:

$$P_2=\frac{10}{10^3}=0{,}01.$$

Кількість трійок вигляду XXY, XYX, YXX дорівнює $10\cdot 9\cdot 3$ (10 – кількість способів вибрати X, 9 – кількість способів вибрати Y, 3 – кількість різних трійок з одними і тими ж цифрами X та Y), тому ймовірність одного повтору дорівнює

$$P_1=\frac{10\cdot 9\cdot 3}{10^3}=0{,}27.$$

Кількість трійок вигляду XYZ дорівнює $10\cdot 9\cdot 8$, тому ймовірність не мати жодного повтору рівна

$$P_1=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{10^3}=0{,}72.$$

Приклад 3.10. У кладочці знаходиться n пар черевиків. Із них навмання вибирають $2r$ черевиків $(2r<n)$. Яка ймовірність того, що серед вибраних черевиків відсутні парні?

Розв'язування. Із $2n$ черевиків можна вибрати $2r$ черевиків C_{2n}^{2r} способами. Кількість сприятливих випадків рівна $C_n^{2r}\cdot 2^{2r}$. Підраховується вона наступним чином: C_n^{2r} способами із n пар черевиків можна вибрати $2r$ пар. Із кожної пари двома способами можна вибрати один черевик (лівий або правий). Отже, із $2r$ пар черевиків можна вибрати $2r$ непарних 2^{2r} способами. Шукана ймовірність рівна

$$P=\frac{C_n^{2r}\cdot 2^{2r}}{C_{2n}^{2r}}.$$

Задачі для розв'язування

64. Гральний кубик підкидають один раз. Описати простір елементарних подій. а) Описати подію *A* — випаде число, що ділиться на 3. Знайти ймовірність події *A*, вважаючи, що всі елементарні події рівноможливі;

б) нехай підкидають гральний кубик, у якому масу розподілено так, що ймовірність випадання певної грані пропорційна її номеру. Описати простір елементарних подій, вказати ймовірність кожної елементарної події. Обчислити ймовірність події A.

65. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 спочатку вибирають одну; потім з чотирьох цифр, які залишились, вибирають другу. Описати простір елементарних подій. Вважаючи, що всі елементарні події однаково можливі, обчислити ймовірність таких подій: а) перший раз вибрано непарну цифру; б) другий раз вибрано непарну цифру; в) і перший, і другий раз вибрано непарну цифру.

66. У групі r студентів. Яка ймовірність того, що принаймні у двох із них збігаються дні народження?

67. Гральний кубик підкидають шість разів. Обчислити ймовірність того, що випадуть усі шість граней.

68. У ліфті 7 пасажирів. Ліфт зупиняється на 10-ти поверхах. Яка ймовірність того, що жодного разу два пасажири не вийдуть на одному поверсі?

Визначити, що більш імовірно: при підкиданні чотирьох гральних кубиків випадання принаймні однієї одиниці чи при 24 підкиданнях двох кубиків випадання принаймні один раз двох одиниць. (Відповідь відома як «парадокс де Мере». Придворний кавалер і азартний гравець Шевальє де Мере, сучасник Блеза Паскаля, вважав ці ймовірності рівними і звинувачував математиків у своїх програшах).

69. У групі r студентів. Обчислити ймовірність того, що принаймні двоє з них народилися в одному місяці.

70. Обчислити ймовірність того, що дні народження 12 осіб припадатимуть на різні місяці року.

71. Обчислити ймовірність того, що для даних тридцяти осіб з 12 місяців року на 6 місяців припадає по два дні народження і на інші 6 — по 3 дні народження.

72. В урні є 10 куль: 3 білі та 7 чорних. З урни навмання виймається одна куля. Яка ймовірність того, що ця куля: а) біла? б) чорна?

73. В урні є 10 куль: 3 білі та 7 чорних. Яка ймовірність того, що витягнуті навмання 2 кулі будуть: а) чорні? б) білі?

74. A та B і ще 8 осіб стоять у черзі. Яка ймовірність того, що A та B віддалені один від одного 3 особами?

75. З урни, в якій лежать n білих та m чорних куль, взяли навмання k куль. Яка ймовірність того, що серед вийнятих куль буде r білих куль $(r \le n)$?

76. Серед n виробів m бракованих. Навмання беруть k виробів. Яка ймовірність того, що серед них r бракованих виробів $(r \le n)$? Яка ймовірність того, що серед них не більше ніж r бракованих виробів?

77. У лотереї є n білетів, серед яких m виграшних. Обчислити ймовірність виграшу для того, хто має r білетів.

78. На іспиті може бути запропоновано n запитань. Студент знає відповіді на k запитань. Екзаменатор задає студентові r запитань, а для того щоб склас-

ти екзамен, треба відповісти не менше, ніж на j запитань $\left(j < r\right)$. Яка ймовірність того, що студент складе іспит?

79. Учасник «Національної лотереї» з 39 чисел повинен назвати 6. Повний виграш одержує той, хто правильно назве всі шість. Виграші також одержують і ті, хто вгадає не менше трьох чисел. Обчислити ймовірність повного виграшу. Обчислити ймовірність того, що учасник відгадає 5, 4 і 3 числа. Яка ймовірність одержати виграш у лотереї?

80. Для зменшення загальної кількості ігор $2n$ команд розбивають на дві підгрупи по n команд кожна. Яка ймовірність того, що дві найбільш сильні команди виявляться: а) в різних підгрупах? б) в одній підгрупі? Яка ймовірність того, що чотири найбільш сильні команди потраплять по дві в різні підгрупи?

81. Кидають 12 гральних кубиків. Яка ймовірність того, що кожне з чисел 1, 2, ..., 6 випаде двічі?

82. До ліфта семиповерхового будинку на першому поверсі зайшли 3 особи. Кожна з них з однаковою ймовірністю виходить на будь-якому поверсі, починаючи з другого. Знайти ймовірність таких подій: A=«всі пасажири вийдуть на 4 поверсі», B=«всі пасажири вийдуть одночасно (на одному поверсі)», C=«всі пасажири вийдуть на різних поверхах».

83. У три вагони заходять дев'ять пасажирів. Яка ймовірність того, що: а) в перший вагон зайдуть три пасажири? б) в кожен вагон зайдуть по три пасажири? в) в один з вагонів зайдуть чотири, в другий – три і в третій – два пасажири?

84. У шафі стоять 10 пар різноманітного взуття. З них навмання обирається 4 чоботи. Знайти ймовірність того, що серед вибраних чобіт немає парних.

85. 500 фірм отримали кредити в банку. Банк класифікує кожен кредит за двома характеристиками: сума кредиту і термін кредиту (в місяцях). Відповідну класифікацію наведено в таблиці.

86.

Термін кредиту (місяці)	Сума кредиту			
	< 2000$	2000—4999$	5000—7999$	> 8000$
12	30	2	0	0
24	4	20	5	0
36	1	20	86	5
42	0	31	99	37
48	0	0	110	50

Для перевірки навмання вибирається одна фірма.

а) Яка ймовірність того, що сума кредиту цієї фірми не менша 5000$?

б) Яка ймовірність того, що термін кредиту фірми більший двох років?

в) Яка ймовірність того, що фірма взяла кредит на суму, не меншу 2000$ на 42 місяці?

87. Вкладники банку за сумами вкладів та віком мають такий процентний розподіл:

Вік	Суми вкладу		
	< 1000$	1000—5000 $	> 5000$
< 30 років	5%	15%	8%
30—50 років	8%	25%	20%
> 50 років	7%	10%	2%

Нехай A та B такі події:
A= «у навмання вибраного клієнта вклад більший 5000$»;
B = «вік навмання вибраного клієнта більший 30 років».
Визначити: $P(A)$, $P(B)$, $P(A\bigcup B)$, $P(A\bigcap B)$.

88. У супермаркеті, аналізуючи 10000 покупок за типом товарів і типом розрахунків (готівка чи кредитна картка), виявлено такий процентний розподіл:

Тип розрахунків	Тип товару			
	Жіночий одяг	Чоловічий одяг	Спортивні товари	Господарчі товари
Каса	6%	9%	3%	7%
Кредитна картка	41%	9%	22%	3%

Нехай A, B, C, D такі події:
A=«навмання вибраний рахунок сплачений кредитною карткою»;
B=«навмання вибраний рахунок за жіночий одяг»;
C =«навмання вибраний рахунок за чоловічий одяг»;
D=«навмання вибраний рахунок за спортивні товари»;
Обчислити $P(A)$, $P(A\bigcup B)$, $P(A\bigcap B)$, $P(A\cap D)$, $P(A\cup C)$.

89. Під час набирання телефонного номеру абонент забув дві останні цифри і набрав їх навмання, пам'ятаючи при цьому, що вони не парні та різні. Знайти ймовірність того, що номер набрано вірно.
Є r куль, котрі навмання розкидані по n ящиках. В одному і тому ж ящику можуть знаходитись декілька куль та навіть усі кулі. Обчислити ймовірність того, що в перший ящик рівно r_1, в другий - r_2 куль, …, в $n-$й - r_n куль, $r_1+r_2+...+r_n=r$.

90. Числа 1, 2 ,…, 9 записано навмання. Знайти ймовірність наступних подій:
A= «числа записані у зростаючому порядку»;
B= «числа 1 і 2 стоять поруч та у зростаючому порядку»;
C = «числа 3, 6, 9 будуть іти одне за другим і у зростаючому порядку»;
D= «на парних місцях записані парні числа»;
F = «сума кожних двох чисел, що стоять на однаковій відстані від кінців, дорівнює 10».

91. У кладочці знаходиться n пар черевиків. З них навмання беруть $2r$ $n > r$ черевиків. Знайти ймовірність того, що серед вибраних черевиків: а) є рівно одна комплектна пара; б) є рівно дві комплектні пари.

92. Серед 17 студентів групи, із яких 8 дівчат, розігрується 7 лотерейних квитків. Знайти ймовірність того, що серед володарів квитків будуть дівчата.

93. Із урни, в якій знаходяться 3 білих та 2 чорних кулі, переклали 2 кулі в другу урну, що містить 4 білих та 4 чорних кулі. Знайти ймовірність того,що в другій урні опиниться білих і чорних куль порівну.

94. В урні 4 червоних, 6 зелених і 5 синіх куль. Одночасно виймають 2 кулі. Знайти ймовірність того, що обидві кулі одного (будь-якого) кольору.

95. Студент знає відповіді на 20 питань із 25. Залік вражається зарахованим, якщо він відповість правильно не менше ніж на 3 питання із 4 в білеті. Яка ймовірність того, що студент отримає залік, якщо, подивившись на перше питання білета, він виявив, що його знає.

96. 10 футбольних команд, серед яких два призери й один аутсайдер за результатами попереднього чемпіонату, шляхом жеребкування розбиваються на дві підгрупи по 5 команд. Знайти ймовірності наступних подій:
A=«команди-призери попадуть у різні групи»;
B=«обидва призери й аутсайдер попадуть у різні групи»;
C=«обидва призери й аутсайдер попадуть в одну групу».

97. Серед 20 лотерейних квитків 15 виграшних. Знайти ймовірності наступних подій:
A=«серед 10 проданих білетів 6 виграшних»;
B=«серед 12 проданих білетів всі виграшні»;
C=«серед 8 проданих білетів хоча б один не виграшний».

98. 10 варіантів контрольної роботи роздаються випадковим чином 8 студентам, які сидять в ряд, по одному варіанту кожному. Знайти ймовірність подій:
A=«варіанти 1 і 2 залишаться невикористаними»;
B=«варіанти 1 і 2 дістануться студентам, що сидять поряд.

99. Десять різних книг розставлені на полиці навмання. Знайти ймовірність того, що цьому три певні книги будуть поставлені разом.

100.Група із 8 чоловік займає місця за круглим столом у випадковому порядку. Знайти ймовірність того, що певні дві особи опиняться поруч.
У студентській групі 25 чоловік. Серед них 20 – старші 19 років і 8 старші 22 років. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний із групи студент старший 19 років, але не старший 22 років.

101.Група із 8 чоловік займає місця з однієї сторони прямокутного столу. Знайти ймовірність того, що певні дві особи опиняться поруч при умові:
а) кількість місць 8 (подія A);
б) кількість місць 12 (подія B).

§ 4. Геометрична ймовірність

Нехай Ω — деяка вимірна за Лебегом множина, яка міститься в $\boldsymbol{R}^n$. Нехай стохастичний експеримент полягає в киданні матеріальної точки у цю множину (тобто в результаті експерименту матеріальна частка обов'язково попаде у цю множину). Передбачається, що положення частки рівномірно розподілено у множині Ω.

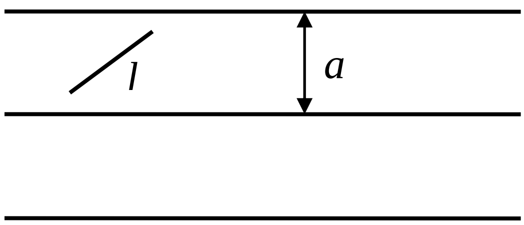
Нехай Ω^* — σ —алгебра підмножин Ω вимірних за Лебегом. Передбачається також, що для будь-якої множини $A \in \Omega^*$ ймовірність попадання матеріальної частки в A прямо пропорційна мірі Лебега цієї множини. Для будь-якої $A \in \Omega^*$ покладемо ймовірність

$$P(A) = \frac{mesA}{mes\Omega}.$$

Тут $mes\Omega, mesA$ — міра Лебега множин Ω і A відповідно.

Приклад 4.1. Точку навмання кидають на відрізок $[0;1]$. Ймовірність попадання точки в точку $\{0,5\}$ рівна нулю, оскільки міра множини, яка містить одну точку («довжина точки») – нуль. Разом з тим попадання в точку $\{0,5\}$ не є неможливою подією – це одна із елементарних подій.

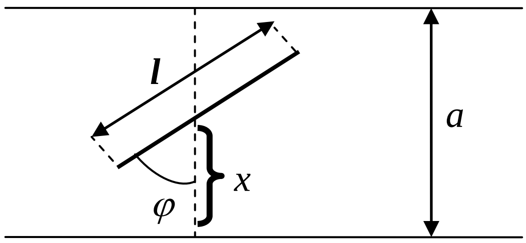
Приклад 4.2. (Задача Бюффона). На площину, розкреслену паралельними прямими, що знаходяться на відстані a один від одного, випадково кинута голка довжини $l < a$ (мал. 4.1).



мал.4.1

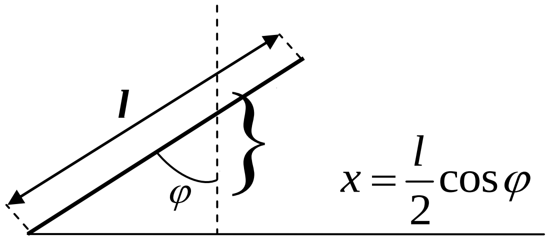
Знайти ймовірність того, що голка перетне яку-небудь з паралельних прямих.

Розв'язування. Проведемо через центр голки перпендикуляр до паралельних прямих і позначимо: через x — відстань від центру голки до найближчої паралельної прямої, а через φ — кут (гострий) між голкою і цим перпендикуляром (мал.4.2). Зрозуміло, що x і φ повністю визначають положення голки між двома сусідніми паралельними прямими.



мал. 4.2

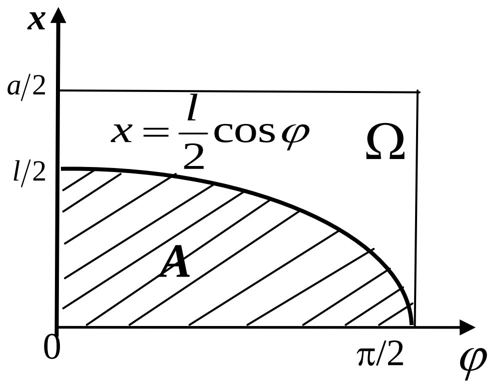
Причому, $x \in \left[0, \frac{a}{2}\right], \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Голка перетне одну з паралельних прямих, якщо $0 \le x \le \frac{l}{2}\cos\varphi$ (мал. 4.3).



мал. 4.3

Покладемо $\Omega = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{a}{2}\right]$. Нехай подія A полягає в тому, що голка перетне одну із паралельних прямих. Тоді (мал.4.4)

$$A = \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| x \in \left[0, \frac{a}{2}\right], \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 0 \le x \le \frac{l}{2}\cos\varphi \right\}.$$



мал. 4.4.

За формулою геометричної ймовірності

$$P(A) = \frac{mesA}{mes\Omega} = \frac{4}{a\pi} \int_0^{\pi/2} l/2 \cos\varphi d\varphi = \frac{2l}{\pi a}.$$

За допомогою цієї формули можна наближено обчислювати число π, враховуючи, що при n кидках голки ймовірність $P(A)$ наближено дорівнює частоті появи події A. Тоді $\pi = \frac{2ln}{ma}$, де n — загальна кількість кидків, m — кількість кидків, при яких голка перетнула одну з паралельних прямих. Цей метод знаходження числа π називається методом Монте-Карло.

Приклад 4.3. (Задача про зустріч) Двоє домовилися про зустріч у певному місці між 12 і 13 годинами. Причому, кожен, хто прийшов першим чекає другого 20 хвилин, після чого йде. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться, якщо кожен з них приходить на зустріч у випадковий момент часу, не погоджений з моментом приходу іншого.

Розв'язування. Нехай x — момент приходу $1^{ої}$ особи, y — момент приходу $2^{ої}$ особи. Зрозуміло, що $x, y \in [0;60]$, x, y — вимірюємо у хвилинах. Елементарна подія у даному експерименті, який полягає у фіксованому часі, це вектор $(x, y) \in [0,60] \times [0,60]$. Тоді простір елементарних подій

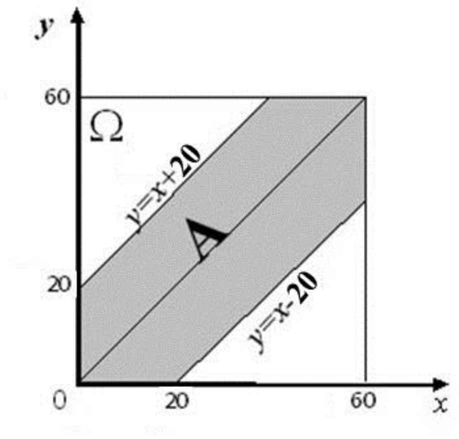
$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| 0 \le x \le 60,\, 0 \le y \le 60 \right\}.$$

Подія A полягає у тому, що «зустріч відбулася». Зрозуміло, що

$$A = \left\{ (x, y) \in \Omega \middle| |x - y| \le 20 \right\}.$$

За формулою геометричної ймовірності:

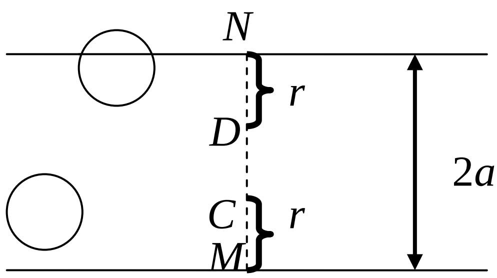
$$P(A) = \frac{mesA}{mes\Omega} = \frac{60^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}(60-20)^2}{60^2} = 1 - \left(1 - \frac{20}{60}\right)^2 = \frac{5}{9}.$$



мал. 4.5

Приклад 4.5. На площині накреслені паралельні прямі, що знаходяться одна від одної на відстані $2a$. На площину навмання кидають монету з радіусом r, $r < a$. Знайти ймовірність того, що монета не перетне ніякої прямої.

Розв'язування. Розглянемо пару довільних сусідніх прямих. Положення монети визначається положенням її центра на відрізку MN довжини $2a$.



мал.4.6

Тому простір елементарних подій – це відрізок MN. Очевидно монета не перетне жодну з цих прямих, якщо відстань від її центра до кожної з цих прямих більша за r. Таким чином, сприятливі для нашої події точки відрізка CD. За формулою геометричної ймовірності

$$P(A)=\frac{|CD|}{|MN|}=\frac{2a-2r}{2a}=1-\frac{r}{a}.$$

Задачі для самостійного розв'язування

102. На площині проведені паралельні прямі, відстані між ними по черзі дорівнюють 1,5 см та 8 см. На площину кидають навмання круг з радіусом 2,5 см. Знайти ймовірність того, що цей круг не перетне жодну із ліній.

103. На паркетну підлогу навмання кидають монету діаметром d. Паркет має форму квадратів зі стороною a, $a>d$. Знайти ймовірність того, що монета не перетне жодну із сторін квадратів паркету.

104. Кусок дроту довжиною 20 см було зігнуто у навмання вибраній точці. Після цього, перегнувши дріт ще в двох місцях (не зломивши його), зробили прямокутну раму. Знайти ймовірність того, що площа одержаної рами не перевищує 21 см^2.

105. У квадраті зі стороною 1 беруть навмання точку A. Знайти ймовірність таких подій:
B=«відстань від точки A до фіксованої сторони квадрата не більша ніж x»;
C=«відстань від A до найближчої сторони квадрата не більша ніж x»;
D=«відстань від A до центра квадрата не більша ніж x».

106. В квадрат з вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ навмання кидають точку M. Нехай (p,q) - її координати. Знайти ймовірність того, що корені рівняння $x^2+px+q=0$ дійсні.

107. Чому дорівнює ймовірність влучити, не прицілившись, нескінченно малою кулею у квадратну решітку, якщо товщина прутів дорівнює a, а відстань між їх середніми лініями дорівнює l?

108. У сфері з радіусом R навмання розкидано N точок. Знайти ймовірність того, що відстань від центра до найближчої точки буде не менша ніж a.

109. На колі з радіусом R зафіксовано точку A. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана точка на колі знаходиться відвід точки A на відстані, що менша від R.

110. В коло вписано трикутник. Знайти ймовірність того, що він є: а) гострокутним; б) тупокутним, в) прямокутним.

111. На відрізку $[-1;2]$ навмання взято два числа. Знайти ймовірність того, що їх сума більша одиниці, а добуток менше одиниці.

112. На відрізку AB з довжиною l навмання беруть дві точки. Знайти ймовірність того, що з трьох відрізків, на котрі ділять AB вибрані три точки, можна утворити трикутник.

113. На колі з радіусом R навмання вибрані 2 точки, і вони з'єднані хордою. Знайти ймовірність того, що довжина хорди більша $R\sqrt{3}$.

114. На колі з радіусом R навмання вибрана точка, і через неї проведено діаметр. На діаметрі навмання вибирається точка – середина хорда, що перпендикулярна до діаметра. Знайти ймовірність того, що довжина одержаної хорди більша за $R\sqrt{3}$.

115. Випадкова точка X має рівномірний розподіл у квадраті $A=\{(x,y):|x|\le a,|y|\le a\}$. Знайти ймовірність того, що квадрат з центром X та сторонами з довжиною b, що паралельні осям координат, цілком знаходиться у квадраті a.

116. Дано два концентричних кола з радіусами $r_1,\ r_2\ (r_1<r_2)$. На більшому колі навмання ставляться дві точки A та B. Знайти ймовірність того, що відрізок AB не перетне мале коло.

117. На площину з нанесеною на неї квадратною сіткою багаторазово кидається монета з діаметром d, внаслідок чого встановлено. Що у 40% випадків монета не перетне жодної сторони квадрата. Оцінити розмір сітки.

118. Два теплоходи повинні підійти до одного й того ж причалу. Час прибуття обох теплоходів незалежний і рівноможливий впродовж даної доби. Знайти ймовірність того, що одному із теплоходів прийдеться чекати звільнення причалу, якщо час стоянки першого теплоходу – одна година, а другого – дві години.

119. Навмання взято два додатних числа, кожне з яких не перевищує 1. Знайти ймовірність того, що сума їх не перевищує 1, а добуток не перевищує 2/9.

120. На відрізку $[-1,2]$ навмання взяті 2 числа. Яка ймовірність того, що їх сума більша 1, а добуток менший 1?

121. Навмання взято два додатні числа x та y, кожне з яких не перевищує 2. Знайти ймовірність того, що добуток xy буде більше 1, а y/x — не більше 2.

122. На відрізок OA довжини l числової вісі Ox навмання поставлена точка $B(x)$. Знайти ймовірність того, що менший із відрізків OB і BA має довжину більшу ніж $l/3$. Припускається, що ймовірність попадання точки на відрізок пропорційна довжині відрізка і не залежить від його розташування на числовій вісі.

§ 5. Умовні ймовірності

Умовні ймовірності. Теорема про ймовірність добутку подій

Подія A називається незалежною від події B, якщо ймовірність події A не залежить від того, відбулася подія B або ні. Якщо ймовірність події A змінюється в залежності від того, відбулася подія B чи ні, то A залежить від B.

Приклад 5.1. В урні 5 білих і 4 чорних кулі. Експеримент полягає у тому, що кулю випадковим чином виймають з урни і фіксують її колір. Подія A — «з урни вийняли кулю білого кольору». За класичним означенням ймовірності $P(A)=\frac{5}{9}$. Припустимо, що після першого випробування кулю повернули в урну. Подія B — «другий раз з урни вийняли кулю білого кольору». За класичним означенням ймовірності $P(B)=\frac{5}{9}$. Зрозуміло, що так ми маємо «схему повернутих куль», то результат другого випробування не залежить від того вийняли ми в перший раз білу кулю або чорну кулю. Отже, ймовірність події B за умови, що відбулася подія A дорівнює ймовірності події B за умови, що подія A не відбулася і дорівнює ймовірності події B. Таким чином, A і B — незалежні.

Той же експеримент, але кулю не повертають в урну — «схема неповернутих куль». Тоді $P(B)$ — ймовірність появи білої кулі у другому випробуванні залежить від результату першого випробування, тобто відбудеться A або $\overline{A}$. Ймовірність події B за умови, що відбулася A дорівнює $4/8$, ймовірність події B за умови, що подія A не відбулася дорівнює $5/8$. Таким чином, A і B — залежні події.

Той же експеримент, але кулю не повертають в урну. Під час другого випробування вийняли білу кулю, тобто подія B — відбулася. Знайти ймовірність того, що при першому випробуванні також вийняли білу кулю. Ймовірність події A за умови, що відбулася подія B дорівнює $4/8$, тобто A також залежить від B.

Означення 5.1. Нехай (Ω,Ω^*,P) — деякий ймовірнісний простір і $A,B\in\Omega^*$, $P(B)>0$. Умовною ймовірністю $P(A/B)\equiv P_B(A)$ події A за умови, що подія B відбулася (або просто: за умови B), називається відношення

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Із цього означення випливає

Теорема 5.1. **(теорема добутку ймовірностей)** Нехай $\left(\Omega,\Omega^{*},P\right)$ — деякий ймовірнісний простір і $A,B\in\Omega^{*}$, $P(B)>0$. Тоді

$$P(AB)=P(B)\cdot P(A/B)$$

Зрозуміло, що якщо $P(A)>0$ також, то $P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)$. За допомогою методу математичної індукції легко доводиться більш загальна теорема

Теорема 5.2. **(теорема добутку ймовірностей для n подій)** Нехай $\left(\Omega,\Omega^{*},P\right)$ — ймовірнісний простір, події $A_1,\ldots,A_n$ такі, що $P\left(A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-1}\right)>0$. Тоді

$$P\left(A_1\cdot\ldots\cdot A_n\right)=P\left(A_1\right)\cdot P\left(A_2/A_1\right)\cdot P\left(A_3/A_1A_2\right)\times\ldots\times$$
$$\times P\left(A_{n-1}/A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-2}\right)\cdot P\left(A_n/A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-1}\right)$$

Означення 5.2. Нехай трійка $\left(\Omega,\Omega^{*},P\right)$ — ймовірнісний простір, події $A,B\in\Omega^{*}$, і $P(A)>0$. Будемо говорити, що подія B не залежить від події A, якщо $P(B/A)=P(B)$.

Якщо до того ж $P(B)>0$, то маємо

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B/A)}{P(B)}=P(A).$$

Таким чином, якщо $P(A)>0,P(B)>0$ і подія B не залежить від події A, то подія A також не залежить від події B. Для того, щоб уникнути умови на ймовірності подій A і B, сформулюємо означення незалежності події інакше.

Означення 5.3. Події A і B називаються незалежними, якщо

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

В протилежному випадку, A і B залежні події.

Зауваження 5.1. Якщо одна із подій A або B неможлива, то події A і B незалежні.

Теорема 5.3. Якщо події A і B незалежні, то $\left(\bar{A},B\right),\left(A,\bar{B}\right),\left(\bar{A},\bar{B}\right)$ також пари незалежних подій.

Означення 5.4. Події $A_1,\ldots,A_n$ називаються незалежними у сукупності, якщо для будь-яких k з них $(2\le k\le n)$ виконується відношення

$$P\left(A_{i_1}\cdot A_{i_2}\cdots A_{i_k}\right)=P\left(A_{i_1}\right)\cdot P\left(A_{i_2}\right)\cdots P\left(A_{i_k}\right).$$

Якщо це відношення виконується при $k=2$, то події називаються попарно незалежними.

Зауваження 5.2. Якщо події $A_1,...,A_n$ попарно незалежні, то звідси, взагалі кажучи, не випливає, що вони незалежні у сукупності.

Приклад 5.2. На площину кидають тетраедр, три грані якого пофарбовано, відповідно, в червоний, зеленій і синій кольори, а на четверту нанесено всі три кольори.

Нехай подія A полягає у тому, що при підкиданні тетраедра він упав на грань с червоним кольором, B— з зеленим кольором, C — з синім кольором. За класичним означенням ймовірності $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, так як всього граней 4, а з відповідним кольором — дві. $P(A/B)=1/2$, так як якщо відбулась B, то випала одна з двох граней, на якій є зелений колір, але тільки на одній з них є червоний колір. Аналогічно:

$$P(B/A)=P(A/C)=P(C/A)=P(B/C)=P(C/B)=\frac{1}{2}.$$

Отже A,B,C — попарно незалежні, оскільки

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(A)P(B);$$
$$P(AC)=P(A)P(C/A)=P(A)P(C);$$
$$P(BC)=P(B)P(C/B)=P(B)P(C).$$

Але, $P(A/BC)=1$, так як якщо випала грань, на якій є синій і зелений колір, то на ній є і червоний колір. Аналогічно, $P(B/AC)=P(C/AB)=1$. Тоді

$$P(ABC)=P(A)\cdot P(B/A)\cdot P(C/AB)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}\neq P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{8}.$$

Теорема 5.4. (Критерій незалежності у сукупності) Для того, щоб події $A_1,...,A_n$ були незалежними у сукупності необхідно і достатньо, щоб для будь-якої події $A_k\left(k=\overline{1,n}\right)$ і для будь-яких m подій $A_{i_1},...,A_{i_m}$ виконувалось відношення

$$P\left(A_k/A_{i_1},...,A_{i_m}\right)=P(A_k).$$

Теорема 5.5. (теорема добутку ймовірностей для n незалежних у сукупності подій) Нехай $\left(\Omega,\Omega^*,P\right)$ — ймовірнісний простір, події $A_1,...,A_n$ — незалежні у сукупності такі, що $P(A_1\cdot...\cdot A_{n-1})>0$, то

$$P(A_1\cdot A_2\cdot...\cdot A_{n-1}\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot...\cdot P(A_{n-1})\cdot P(A_n).$$

Теорема про ймовірність суми подій

Події називаються несумісними, якщо поява однієї із них виключає появу інших в одному і тому ж експерименті. Наприклад, несумісні події: день і ніч, людина читає і людина спить, число ірраціональне і парне; сумісні події: іде дощ і йде сніг, людина їсть і людина читає, число ціле і парне.

Теорема 5.6. (теорема суми ймовірностей). Нехай $\left(\Omega,\Omega^*,P\right)$ — деякий ймовірнісний простір і $A,B\in\Omega^*$ — довільні випадкові події. Тоді

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B).$$

Справді, запишемо $A+B=\left(A-(A\cdot B)\right)+\left(B-(A\cdot B)\right)+(A\cdot B)$. За властивостям 3 і 4 означення класичної ймовірності

$$P(A+B)=P\left(A-(A\cdot B)\right)+P\left(B-(A\cdot B)\right)+P(A\cdot B)=$$
$$=P(A)-P(A\cdot B)+P(B)-P(A\cdot B)+P(A\cdot B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B).$$

Теорема 5.7. (теорема суми ймовірностей для n подій) Нехай $\left(\Omega,\Omega^*,P\right)$ — ймовірнісний простір, $A_1,\dots,A_n\in\Omega^*$ — довільні події. Тоді

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}A_i-\sum_{1\le i<j\le n}P\left(A_i\cdot A_j\right)+$$
$$+\sum_{1\le i<j<k\le n}P\left(A_i\cdot A_j\cdot A_k\right)-\dots+(-1)^{n-1}P\left(\prod_{i=1}^{n}A_i\right).$$

Зауваження 5.3. У випадку трьох сумісних подій A,B,C ця формула приймає вигляд

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cdot C)-P(A\cdot \mathbf{B})+P(A\cdot B\cdot C)$$

Теорема 5.8. (теорема суми ймовірностей для n попарно несумісних подій). Нехай $\left(\Omega,\Omega^*,P\right)$ — ймовірнісний простір, події $A_1,\dots,A_n\in\Omega^*$, $n\ge 2$ — попарно несумісні, то

$$P\left(A_1+A_2+\dots+A_{n-1}+A_n\right)=P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_{n-1})+P(A_n)$$

Зокрема, якщо $\overline{A}$ - протилежна для A подія, то $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Приклад 5.3. В ящику 5 деталей, серед яких 3 стандартні і 2 браковані. По черзі з нього виймають по одній дві деталі (з поверненням і без). Знайти ймовірність витягування в другий раз стандартної деталі.

Розв'язування. Нехай A і B — витягування стандартної деталі відповідно у 1-й та 2-й раз. Очевидно, що $P(A)=\dfrac{3}{5}$. Якщо витягнута деталь знову повертається в ящик, то ймовірність витягнути стандартну деталь у 2-й раз $P(B)=\dfrac{3}{5}$. Якщо витягнута деталь в ящик не повертається, то ймовірність витягнути стандартну деталь в другий раз $P(B)$ залежить від того, яка деталь була витягнута в перший раз – стандартна (подія A) або бракована (подія $\overline{A}$). В першому випадку $P(B/A)=\dfrac{2}{4}$, в другому $P(B/\overline{A})=\dfrac{3}{4}$, так як із залишившихся чотирьох деталей стандартних буде відповідно 2 або 3.

Приклад 5.4. Встановити, залежні або ні події A і B за умовою прикладу 5.2.

Розв'язання. У випадку повернення витягнутої деталі

$$P(B/A)=P(B/\overline{A})=P(B)=\frac{3}{5},$$

тобто події A і B незалежні. Якщо витягнута із ящика деталь не повертається, то $P(B/A)\neq P(B/\overline{A})$, $\left(\dfrac{2}{4}\neq\dfrac{3}{4}\right)$, тобто $P(B/A)\neq P(B)$ і події A і B залежні.

Приклад 5.5. Робота електричного пристрою припиняється внаслідок виходу зі строю одного із п'яти уніфікованих блоків. Проводиться послідовна заміна кожного новим до тих пір, поки пристрій не почне працювати. Яка ймовірність того, що доведеться замінити: а) 2 блоки; б) 4 блоки.

Розв'язання. а) позначимо події: A_i — $i-$й справний $(i=1,2,3,4,5)$; B — заміна двох блоків. Очевидно, що доведеться замінити 2 блоки, якщо 1-й блок справний (4 шанси із 5), а 2-й несправний (1 шанс із залишившихся 4), тобто $B=A_1\overline{A}_2$. Далі, за теоремою добутку

$$P(B)=P(A_1\overline{A}_2)=P(A_1)P(\overline{A}_2/A_1)=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{5}.$$

б) Нехай подія C — заміна 4 блоків. Очевидно, що $C=A_1A_2A_3\overline{A}_4$ і за теоремою добутку

$$P(C)=P(A_1A_2A_3\overline{A}_4)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)P(\overline{A}_4/A_1A_2A_3)=$$
$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{5}.$$

Приклад 5.6. Ймовірність попадання вціль для першого стрілка рівна $0{,}8$, для другого — $0{,}7$, для третього — $0{,}9$. Кожний із стрілків робить по одному постріл. Яка ймовірність того, що в мішені 3 пробоїни?

Розв'язання. а) Позначимо події: A_i — попадання в ціль $i-$го стрілка $(i=1,2,3)$; B — в мішені три пробоїни. Очевидно, що $B=A_1A_2A_3$, причому події A_1, A_2, A_3 - незалежні. За теоремою добутку для незалежних подій

$$P(B)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}9=0{,}504.$$

Приклад 5.7. На 10 лотерейних білетів приходиться 5 виграшних. Яка ймовірність виграшу хоча б по одному білету, якщо придбано: а) 2 білета; б) 4 білета.

Розв'язання. Нехай A_i — виграш по $i-$ому білету $\left(i=1,2,3,4\right)$. За теоремою суми для сумісних подій ймовірність виграшу хоча б по одному із білетів

$$P\left(A_1+A_2\right)=P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)-P\left(A_1A_2\right)=$$
$$=P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)-P\left(A_1\right)P\left(A_2/A_1\right)=\frac{5}{100}+\frac{5}{100}+\frac{5}{100}\cdot\frac{4}{99}=0,098.$$

б) Ймовірність виграшу хоча б по одному із чотирьох білетів рівна

$$P\left(A_1+A_2+A_3+A_4\right)=1-P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\right)=$$
$$1-\frac{95}{100}\cdot\frac{94}{99}\cdot\frac{93}{98}\cdot\frac{92}{97}=0,188.$$

Приклад 5.8. Ймовірність того, що студент здасть перший екзамен, рівна $0,9$; другий — $0,9$; третій — $0,8$. Знайти ймовірність того, що студентом будуть здані:

а) тільки другий екзамен;
б) тільки один екзамен;
в) три екзамени;
г) принаймні два екзамени;
д) хоч б один екзамен.

Розв'язання. а) Позначимо події: A_i — студент здасть $i-$й екзамен $\left(i=1,2,3\right)$; B — студент здасть тільки другий екзамен із трьох. Очевидно, що $B=\overline{A}_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_2$, тобто спільне здійснення трьох подій, які полягають в тому, що студент здасть другий екзамен і не здасть перший та третій. Враховуючи, що події A_1, A_2, A_3 незалежні, отримаємо

$$P\left(B\right)=P\left(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\right)=P\left(\overline{A}_1\right)P\left(A_2\right)P\left(\overline{A}_3\right)=0,1\cdot0,9\cdot0,2=0,018.$$

б) Нехай подія C — студент здасть один екзамен із трьох. Очевидно, подія C відбудеться, якщо студент здасть тільки 1-й екзамен із трьох, або тільки 2-й, або тільки 3-й, тобто

$$P\left(C\right)=P\left(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\right)=$$
$$=0,9\cdot0,1\cdot0,2+0,1\cdot0,9\cdot0,2+0,1\cdot0,1\cdot0,8=0,044.$$

в) Нехай подія D — студент здасть всі три екзамени, тобто $D=A_1A_2A_3$. Тоді

$$P\left(D\right)=P\left(A_1A_2A_3\right)=P\left(A_1\right)P\left(A_2\right)P\left(A_3\right)=0,9\cdot0,9\cdot0,8=0,648.$$

г) Нехай подія E — студент здасть принаймні два екзамени (інакше кажучи: «хоча б два екзамени» або «не менше двох екзаменів»). Очевидно, що подія E означає дачу будь-яких двох екзаменів із трьох або всіх трьох екзаменів, тобто

$$E=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1A_2A_3 \text{ і}$$
$$P\left(E\right)=0,9\cdot0,9\cdot0,2+0,9\cdot0,1\cdot0,8+0,1\cdot0,9\cdot0,8+0,9\cdot0,9\cdot0,8=0,954.$$

д) Нехай подія F - студент здасть хоча б один екзамен (інакше кажучи: «не менше одного» екзамену). Очевидно, подія F представляє суму подій C (що включає три варіанта) і E (чотири варіанта), тобто $F = A_1 + A_2 + A_3 = C + E$ (сім варіантів). Проте, простіше знайти ймовірність події F, якщо перейти до протилежної події, що включає один варіант - $\overline{F} = \overline{A_1 + A_2 + A_3} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$. Отже,

$$P(F) = P(A_1 + A_2 + A_3) = 1 - P(\overline{F}) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) =$$
$$= 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) = 1 - 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}998.$$

Тобто, здача хоча б одного екзамену із трьох є подіє, майже, достовірною.

Приклад 5.9. Причиною розриву електричного ланцюга являється вихід зі строю елементу K_1 або одночасний вихід зі строю елементів K_2 і K_3. Елементи можуть вийти зі строю незалежно один від одного з ймовірностями, рівними відповідно $0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$. Яка ймовірність розриву електричного ланцюга?

Розв'язання. Позначимо події: A_i — вихід зі строю елементу K_i $(i = 1,2,3)$; B — розрив електричного ланцюга. Очевидно, за умовою подія B відбудеться, якщо відбудеться або подія A_1, або A_2A_3, тобто $B = A_1 + A_2A_3$. За теоремою суми для сумісних та добутку для незалежних подій, отримуємо

$$P(B) = P(A_1 + A_2A_3) = P(A_1) + P(A_2A_3) - P(A_1(A_2A_3)) =$$
$$= P(A_1) + P(A_2)P(A_3) - P(A_1)P(A_2)P(A_3) =$$
$$= 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 - 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}154$$

Приклад 5.10. Продуктивності трьох станків, що обробляють однакові станки, відносяться як $1:3:6$. Із не розсортованої партії оброблених деталей взято навмання дві. Яка ймовірність того, що: а) одна із них оброблена на третьому станку; б) обидві оброблені на одному станку.

Розв'язання. а) Позначимо події: A_i — деталь оброблена на i-ому станку $(i = 1,2,3)$; B — одна із двох взятих деталей оброблена на 3-оу станку. За умовою

$$P(A_1) = \frac{1}{1+3+6} = 0{,}1;\ P(A_2) = \frac{3}{1+3+6} = 0{,}3;\ P(A_3) = \frac{6}{1+3+6} = 0{,}6.$$

Очевидно, що $B = A_1A_3 + A_2A_3 + A_3A_1 + A_3A_2$ (при цьому необхідно врахувати, що або перша деталь оброблена на 3-ому станку, або друга). За теоремами суми та добутку для незалежних подій

$$P(B) = P(A_1)P(A_3) + P(A_2)P(A_3) + P(A_3)P(A_1) + P(A_3)P(A_2) =$$
$$= 0{,}1 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}1 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}48.$$

б) Нехай подія C - дві відібрані деталі оброблені на одному станку. Тоді $C = A_1A_1 + A_2A_2 + A_3A_3$ і $P(C) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}46$.

Приклад 5.11. Екзаменаційний білет для письмового екзамену складається із 10 питань — по 2 питання із 20 по кожній із п'яти тем, представлених в білеті. По кожній темі студент підготовив лише половину всіх питань. Яка ймовірність того, що студент здасть екзамен, якщо для цього необхідно відповісти хоча б на одне питання по кожній із п'яти тем в білеті?

Розв'язання. Позначимо події: A_1, A_2 — студент підготував 1-е, 2-е питання білету по кожній темі; B_i — студент підготував хоча б одне питання білету із двох по i-й темі $(i=1,2,3,4,5)$; C — студент склав іспит. За умовою $C=B_1B_2B_3B_4B_5$. Вважаючи відповіді студента по різним темам незалежними, за теоремою добутку ймовірностей

$$P(C)=P(B_1)P(B_2)P(B_3)P(B_4)P(B_5).$$

Так як ймовірності $P(B_i)$ $(i=1,2,3,4,5)$ рівні, то $P(C)=P(B_i)^5$.

$$P(B_i)=P(A_1+A_2)=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2/\bar{A}_1)=1-\frac{10}{20}\cdot\frac{9}{19}=0,763$$

Отже, $P(C)=0,763^5=0,259.$

Приклад 5.12. При вмиканні запалення двигун почне працювати з ймовірністю $0,6$. Знайти ймовірність того, що: а) двигун почне працювати при третьому вмиканні запалення; б) для запуску двигуна доведеться вмикати запалення не більше трьох разів.

Розв'язання. а) Позначимо події: A — двигун почне працювати при кожному вмиканні запалення; B — те ж саме при третьому вмиканні запалення. Очевидно, що

$$B=\bar{A}\bar{A}A \text{ і } P(B)=P(\bar{A})P(\bar{A})P(A)=0,4\cdot 0,4\cdot 0,6=0,096.$$

б) Нехай подія C — для запуску двигуна доведеться вмикати запалення не більше трьох разів. Очевидно, подія C настане, коли двигун почне працювати при 1-ому вмиканні, або при 2-ому, або при 3-ому вмиканні, тобто $C=\bar{A}+\bar{A}A+\bar{A}\bar{A}A$. Отже

$$P(C)=P(\bar{A})+P(\bar{A})P(A)+P(\bar{A})P(\bar{A})P(A)=$$
$$=0,6+0,4\cdot 0,6+0,4\cdot 0,4\cdot 0,6=0,936.$$

Приклад 5.13. Серед білетів лотереї половина виграшних. Скільки лотерейних білетів потрібно купити, щоб з ймовірністю, не меншою 0,999, бути впевненим у виграші хоча б по одному білету?

Розв'язання. Нехай ймовірність події A_i — виграшу по i-ому білету рівна p, тобто $P(A_i)=p$. Тоді ймовірність виграшу хоча б по одному із n придбаних білетів, тобто ймовірність суми незалежних подій A_1, $A_2,\ldots,$ $A_i,\ldots,A_n$ визначиться за теоремою суми:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1-(1-p)^n.$$

За умовою $1-(1-p)^n \ge 0{,}999$, звідки

$$(1-p)^n \le 1-0{,}999.$$

Логарифмуючи обидві частини нерівності, отримаємо

$$n\lg(1-p) \le \lg(1-0{,}999).$$

Враховуючи, що $\lg(1-0{,}999)$- величина від'ємна, отримаємо

$$n \ge \lg(1-0{,}999)/\lg(1-p)$$

За умовою $p=0{,}5$,звідки $n \ge \dfrac{\lg 0{,}001}{\lg 0{,}5} = 9{,}96$, тобто $n \ge 10$ и необхідно купити не менше 10 лотерейних білетів.

Задачу можна розв'язати, не застосовуючи логарифмування, шляхом підбору цілого числа n, при якому виконується нерівність $(1-p)^n \le 1-0{,}999$, тобто у даному випадку $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \le 0{,}001$; так, ще при $n=9$ $\left(\dfrac{1}{2}\right)^9 = \dfrac{1}{512} > 0{,}001$, а уже при $n=10$ $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10} = \dfrac{1}{1024} < 0{,}001$, тобто $n \ge 10$.

Приклад 5.14. Два гравця по черзі кидають гральну кість. Виграє той, у кого першого випаде 6 очок. Яка ймовірність виграшу для гравця, що кидає гральну кість першим? Другим?

Розв'язання. Позначимо події: A_i — випаде 6 очок при i-ому киданні гральної кості $(i=1,2,\ldots)$; B — виграш гри гравцем, що кидає гральну кість першим. Маємо $P(A_i)=1/6$, $P(\overline{A}_i)=5/6$ при будь-якому i.

Подію B можна представити у вигляді суми варіантів:

$$B = A_1 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4A_5 + \ldots$$

Тому

$$P(B) = P(A_1) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4A_5) + \ldots =$$

$$= \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} + \ldots$$

За формулою суми геометричного ряду з першим членом $a=1/6$ та знаменником $q=(5/6)^2<1$

$$P(B) = \frac{a}{1-q} = \frac{1/6}{1-(5/6)^2} = \frac{6}{11} = 0{,}545.$$

Ймовірність $P(\overline{B})$ виграшу гри гравцем, що кидає гральну кість другим, рівна

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11} = 0{,}455,$$

тобто значно менша, чим у гравця, що кидає гральну кість першим.

Приклад 5.15. Ймовірність попадання в мішень при кожному пострілі для першого стрілка рівна $0{,}7$, а для другого - $0{,}8$. Обидва вони, починаючи с першого, по черзі стріляють, але роблять не більше ніж по два постріли, причому кожний стрілок стріляє другий раз при умові, що при першому зробленому ним пострілі він промахнувся. Знайти ймовірність того, що в мішені рівно 2 пробоїни.

Розв'язання. Позначимо події: A_i, B_i - попадання ціль відповідно 1-м і 2-м стрілком при $i-$ому пострілі $(i = 1{,}2)$; C - в мішені рівно 2 пробоїни.

Подія C відбудеться, якщо: у кожного стрілка по одному попаданню з першого разу; у 1-го стрілка — 2 попадання, у 2-го стрілка промах (при одному пострілі); у 1-го — промах і попадання, у 2-го стрілка — попадання (при одному пострілі); у 1-го стрілка 2 промахи, у 2-го стрілка — 2 попадання; у кожного стрілка — промах і попадання після двох пострілів.

Отже,

$$C = A_1B_1 + A_1\overline{B}_1A_2 + \overline{A}_1B_1A_2 + \overline{A}_1B_1A_2 + \overline{A}_1B_1\overline{A}_2B_2 + \overline{A}_1\overline{B}_1A_2B_2.$$

Використовуючи теореми суми для несумісних та добутку для незалежних подій, отримаємо

$$P(C) = P\left(A_1B_1 + A_1\overline{B}_1A_2 + \overline{A}_1B_1A_2 + \overline{A}_1B_1A_2 + \overline{A}_1B_1\overline{A}_2B_2 + \overline{A}_1\overline{B}_1A_2B_2\right) =$$
$$= 0{,}7\cdot 0{,}8 + 0{,}7\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8 + 0{,}3\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7 + 0{,}3\cdot 0{,}8\cdot 0{,}3\cdot 0{,}8 +$$
$$+ 0{,}3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8 = 0{,}9312.$$

Задачі для розв'язування

123. Майстер обслуговує 5 станків. 20% робочого часу він проводить біля першого станка, 10% — біля другого, 25% — біля четвертого, 30% — біля п'ятого станка. Знайти ймовірність того, що у навмання вибраний момент часу майстер знаходиться:

а) біля другого або четвертого станка;

б) біля першого, або другого, або третього станка;

в) не біля п'ятого станка.

124. В урні 4 білих, 6 чорних і 5 червоних куль. Із неї виймають наугад одна за одною дві кулі. Знайти ймовірність того, що обидві кулі одного кольору

125. Партія зі 100 деталей піддається вибірковому контролю. Умовою непридатності всієї партії є наявність хоча б однієї дефектної деталі серед чотирьох перевірених. Яка ймовірність того, що ця партія не буде прийнята, якщо вона містить 3% дефектних деталей?

126. На садовій ділянці посаджені три дерева: вишня, слива і яблуня. Ймовірність того, що приживеться вишня, рівна 0,7; для сливи і для яблуні ймовірності приживання відповідно рівні 0,8 та 0,9. Яка ймовірність того, що а) при-

живуться рівно два дерева; б) приживуться не менше двох дерев; в) приживеться хоча одне дерево.

127. Ймовірність встановлення в деякій місцевості стійкого снігового покриву з жовтня рівна 0,2. Яка ймовірність того, що найближчі два роки в цій місцевості стійкий сніжний покрив з жовтня: а) не встановиться ні разу; б) встановиться принаймні один раз?

128. Абонент забув останню цифру телефонного номеру і набирає її наугад. Яка ймовірність того, що йому доведеться набирати номер не більше, ніж три рази?

129. Скільки потрібно вибрати чисел із таблиці випадкових чисел, щоб з ймовірністю, не меншою 0,9, бути впевненим в тому, що серед них хоча б одне число парне?

130. Ймовірність виявлення літака при одному огляді локатора рівна 0,2. Знайти ймовірність того, що локатор виявить літак рівно при п'ятому огляді.

131. По каналу зв'язку передають три повідомлення. Ймовірність спотворення кожного із них незалежно від інших складає 0,2. Знайти ймовірності наступних подій:

а) всі повідомлення передані без спотворення;
б) всі повідомлення спотворенні;
в) хоча б одне повідомлення спотворено;
г) рівно одне повідомлення передано без спотворення;
д) рівно два повідомлення передано без спотворення.

132. Дослід полягає в послідовному підкиданні монети два рази. Розглянемо події:

$A =$«перший раз випав герб»;
$B =$«другий раз випав герб»;
$C =$«герб випав хоча б один раз»;
$D =$«цифра випала хоча б один раз»;

Визначити, залежні чи незалежні пари подій: A і B, A і D, B і C, C і D.

133. В урні a білих та b чорних куль. Наугад виймають дві кулі. Знайти ймовірності: а) вийняли кулі різного кольору; б) другу кулю вийняли білу.

134. На 10 картках написані букви: А, А, А, А, А, Р, Р, Р, Д, Д. Навмання беруться 5 карток і прикладаються одна до другої зліва направо. Яка ймовірність того, що випадково буде складено слово РАДАР?

135. Проводиться стрільба в мішень до першого попадання. Ймовірність ураження цілі при одному пострілі рівна 0,2. Знайти ймовірність того, що буде зроблено 6 пострілів.

136. Ведеться пристрілка знаряддя по цілі. Ймовірність попадання в ціль при першому пострілі рівні 0,7, при наступних пострілах ці ймовірність кожного разу збільшується на 0,005. Яка ймовірність того, що ціль буде вражена лише третім пострілом?

137. Кинуто три гральні кості. Знайти ймовірність того, що: а) на всіх костях випало по 5 очок; б) на всіх костях випало одне і теж число очок.

138. В коло, в яке вписано квадрат, кидають дві точки. Знайти ймовірність того, що вони обидві опиняться всередині квадрата.

139. Два стрілка, для яких ймовірність попадання в ціль рівна відповідно 0,7 і 0,8, роблять по пострілу. Знайти ймовірність того, що: а) ціль вражена двома кулями; б) ціль вражена однією кулею; в) ціль вражена хоча б однією кулею.

140. Три студенти роблять деякий розрахунок. Ймовірність помилитися для першого студента рівна 0,1; для другого — 0,15; для третього — 0,2. Знайти ймовірність того, що: а) всі студенти виконали розрахунок вірно; б) тільки два студенти виконали розрахунок вірно; в) хоча б один студент зробив помилку в розрахунках.

141. По рації передають три повідомлення. Ймовірність помилки при розшифровці кожного повідомлення складає 0,3. Знайти ймовірність того, що: а) всі повідомлення розшифровано вірно; б) одне повідомлення розшифровано вірно; в) з помилкою розшифровано не менше двох повідомлень.

142. Комісія робить відбір виробів першого сорту. Ймовірність того, що навмання взятий виріб виявиться першого сорту, рівна 0,8. Знайти ймовірність того, що із трьох взятих виробів: а) тільки один вищого сорту; б) два вищого сорту; в) хоча б один вищого сорту.

143. Відрізок довжини a розділений у відношенні 2:1. Всередину відрізка кидають дві точки. Яка ймовірність того, що на кожну частину відрізку попаде по точці?

144. Скільки потрібно взяти гральних костей, щоб з ймовірністю не меншою 0,7, можна було очікувати випадіння 6очок хоча б на одній кості?

145. Ймовірність попадання стрілком в мішень рівна p. Скільки потрібно зробити пострілів, щоб з ймовірністю, не меншою p_1, було зафіксовано хоча б одне попадання?

146. Літак терпить аварію, якщо відмовили обидва двигуни, або вийшла з ладу система управління, або вийшла з ладу система навігації. Знайти ймовірність аварії літака, якщо ймовірність виходу з ладу кожного двигуна 0,005, системи управління — 0,001, системи навігації — 0,0002.

147. Студент знає 40 із 60 питань програми. Екзаменаційний білет містить 3 питання, відібранні випадковим чином. Яка ймовірність того, що студент знає не менше двох питань білету?

§ 6. Формула повної ймовірності. Формули Байєса

Означення 6.1. Нехай $\left(\Omega,\Omega^*,P\right)$ — ймовірнісний простір, події $H_1,...,H_n \in \Omega^*$. Система подій $H_1,...,H_n$ називається скінченним розбиттям Ω, якщо

1) $H_1+...+H_n=\Omega$;

2) $\forall i, j=\overline{1,n}, i\neq j: H_i\cdot H_j=\varnothing$;

3) $\forall i=\overline{1,n}: P\left(H_i\right)>0$.

Теорема 6.1. (Формула повної ймовірності) Нехай $\left(\Omega,\Omega^*,P\right)$ — ймовірнісний простір, $H_1,...,H_n$ — розбиття Ω. Тоді для будь-якої події A має місце формула повної ймовірності

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i).$$

Доведення. Оскільки $H_1,...,H_n$ — розбиття Ω, то

$$A=A\cdot\Omega=A\cdot\left(H_1+...+H_n\right)=AH_1+...+AH_n.$$

Причому події $AH_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ попарно несумісні. Тоді за теоремою про ймовірність суми несумісних подій

$$P(A)=P\left(\sum_{j=1}^{n}AH_j\right)=\sum_{j=1}^{n}P\left(AH_j\right).$$

Далі, застосовуючи теорему про ймовірність добутку подій, остаточно отримаємо

$$P(A)=\sum_{j=1}^{n}P\left(H_j\right)\cdot P\left(A/H_j\right).$$

Теорема доведена.

Події $H_1,...,H_n$ ще називають гіпотезами, а ймовірності $P(H_1),...,P(H_n)$ апріорними (без дослідними) ймовірностями гіпотез. Формула повної ймовірності відіграє дуже важливу роль у всій подальшій теорії.

Приклад 6.1. Магазин отримує товар від трьох постачальників: 55% товару надходить від першого постачальника, 20% — від другого та 25% — від третього. Продукція, яка надходить від першого постачальника містить 5% браку. Продукція, яка надходить від другого постачальника — 6% браку, від третього — 8% браку. Знайти ймовірність того, що куплений товар виявиться бракованим.

Розв'язування. Нехай гіпотеза H_i полягає в тому, що «випадково куплений товар надійшов від i-го постачальника», $i=\overline{1,3}$. За умовою $P(H_1)=0,55$; $P(H_2)=0,2$; $P(H_3)=0,25$. Позначимо через A — подію, яка полягає у тому, що «куплено бракований товар». За умовою $P(A/H_1)=0,05$; $P(A/H_2)=0,06$; $P(A/H_3)=0,08$.

Тоді за формулою повної ймовірності маємо

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)\cdot P(A/H_i)=0,55\cdot 0,05+0,2\cdot 0,06+0,25\cdot 0,08=$$

$$=0,0275+0,012+0,02=0,0595.$$

На практиці часто після проведення дослідження потрібно переоцінити ймовірності гіпотез $H_1,...,H_n$.

Теорема 6.2. Нехай (Ω,Ω^*,P) — ймовірнісний простір, події $H_1,...,H_n$ утворюють розбиття Ω. Подія A така, що $P(A)>0$. Тоді маємо

$$\forall i=\overline{1,n}: P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}.$$

Доведення. За теоремою добутку для будь-якого $i=\overline{1,n}$ маємо

$$P(A\cdot H_i)=P(A)P(H_i/A)=P(H_i)P(A/H_i).$$

Звідки і випливає формула Байєса.

Зауваження 6.1. Ймовірності гіпотез $P(H_i/A)$ називають апостеріорними (після дослідними) ймовірностями гіпотез H_i.

Приклад 6.1. (Продовження) Магазин отримує товар від трьох постачальників: 55% товару надходить від першого постачальника, 20% — від другого та 25% — від третього. Продукція, яка надходить від першого постачальника містить 5% браку. Продукція, яка надходить від другого постачальника — 6% браку, від третього — 8% браку. Куплений у магазині товар виявився бракованим. Знайти ймовірність того, що цей бракований товар надійшов від другого постачальника.

Розв'язування. За формулою Байєса маємо

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{0,2\cdot 0,06}{0,0595}=\frac{0,012}{0,0595}=\frac{120}{595}=\frac{24}{119}.$$

Приклад 6.2. Отримано партію, яка містить 8 виробів одного типу. Після перевірки половини партії 3 вироби виявились справними, а один бракованим. Знайти ймовірність того, що при перевірці трьох наступних виробів один з них виявиться справним, а два — бракованими. Спочатку будь-яка кількість бракованих виробів у даній партії передбачається рівноможливою.

Розв'язування. Нехай гіпотеза H_i полягає у тому, що у партії з 8 виробів «i виробів справні» $(i=0,1,..,8)$. За умовою $P(H_0)=...=P(H_8)$. Оскільки $\sum_{i=0}^{8}P(H_i)=1$, то $\forall i=0,1,..,8: P(H_i)=\frac{1}{9}$.

Позначимо через A подію, яка полягає у тому, що «серед випадково відібраних 4 виробів будуть 3 справні, а один бракований». Використовуючи класичне означення ймовірності, знаходимо:

$$P(A/H_0)=P(A/H_1)=P(A/H_2)=P(A/H_8)=0;$$

$$P(A/H_3)=\frac{C_3^3\cdot C_5^1}{C_8^4}=\frac{1\cdot 5}{70}=\frac{5}{70}; P(A/H_4)=\frac{C_4^3\cdot C_4^1}{C_8^4}=\frac{16}{70};$$

$$P\left(A/H_3\right)=\frac{C_3^3\cdot C_5^1}{C_8^4}=\frac{1\cdot 5}{70}=\frac{5}{70};\ P\left(A/H_4\right)=\frac{C_4^3\cdot C_4^1}{C_8^4}=\frac{16}{70};$$

$$P\left(A/H_5\right)=\frac{C_5^3\cdot C_3^1}{C_8^4}=\frac{30}{70};\ P\left(A/H_6\right)=\frac{C_6^3\cdot C_2^1}{C_8^4}=\frac{40}{70};$$

$$P\left(A/H_7\right)=\frac{C_7^3\cdot C_1^1}{C_8^4}=\frac{35}{70}.$$

Тоді за формулою повної ймовірності маємо

$$P(A)=\sum_{i=3}^{7}P\left(H_i\right)P\left(A/H_i\right)=\frac{1}{9}\left(\frac{5}{70}+\frac{16}{70}+\frac{30}{70}+\frac{40}{70}+\frac{35}{70}\right)=\frac{126}{630}=\frac{1}{5}.$$

За умовою подія A здійснилася. Позначимо через B — подію, яка полягає у тому, що серед 3-х випадково відібраних виробів серед 4-х виробів, які залишились, виявиться один справний, а два бракованих. Потрібно знайти $P(B/A)$. За формулою повної ймовірності

$$P(B/A)=\sum_{i=0}^{8}P\left(H_i/A\right)\cdot P\left(B/H_iA\right).$$

Так як

$$P\left(H_0/A\right)=P\left(H_1/A\right)=P\left(H_2/A\right)=P\left(H_8/A\right)=0 \text{ і}$$

$$P\left(B/H_3A\right)=P\left(B/H_6A\right)=P\left(B/H_7A\right)=0,$$

то отримуємо

$$P(B/A)=P\left(H_4/A\right)\cdot P\left(B/H_4A\right)+P\left(H_5/A\right)\cdot P\left(B/H_5A\right).$$

За формулою Байєса:

$$P\left(H_4/A\right)=\frac{P\left(H_4\right)P\left(A/H_4\right)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{9}\cdot\frac{16}{70}}{1/5}=\frac{8}{63};$$

$$P\left(H_5/A\right)=\frac{P\left(H_5\right)P\left(A/H_5\right)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{9}\cdot\frac{30}{70}}{1/5}=\frac{5}{21}.$$

За класичним означенням ймовірності:

$$\left(B/H_4A\right)=\frac{C_1^1\cdot C_3^2}{C_4^3}=\frac{3}{4};P\left(B/H_5A\right)=\frac{C_2^1\cdot C_2^2}{C_4^3}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Тоді:

$$P(B/A)=\frac{8}{63}\cdot\frac{3}{4}+\frac{5}{21}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{14}\ .$$

Зауваження 6.2. Формули Байєса використовують для переоцінки ймовірностей кожної з гіпотез після проведення експерименту, в результаті якого відбулася подія A. Умовні ймовірності $P(H_i/A), i=\overline{1,n}$, називають апостеріорними ймовірностями гіпотез.

В умові прикладу 6.2 йдеться про те, що кількість бракованих виробів у партії з восьми виробів припускається рівноможливою. Це природно припустити, якщо нічого не знати про наявність бракованих виробів. Після того як провели дослід та подія A відбулася стало зрозуміло, що гіпотези H_0, H_1, H_2, H_8 — це неможливі події. Після того, як подія A відбулася можна висунути нові гіпотези про наявність справних деталей серед решти чотирьох:

$H_0^* = H_3$ (усі залишені 4 деталі браковані);

$H_1^* = H_4$ (серед 4-х деталей, які залишилися одна деталь справна, а три браковані);

$H_2^* = H_5$ (серед 4-х деталей, які залишилися дві справні, і дві браковані деталі);

$H_3^* = H_6$ (серед 4-х деталей, які залишилися три деталі справні, одна — бракована);

$H_4^* = H_7$ (серед 4-х деталей, які залишилися всі чотири деталі справні). Ймовірності нових гіпотез можна вважати рівними апостеріорним ймовірностям гіпотез H_i:

$$P(H_0^*) = P(H_3/A) = \frac{5}{126}, P(H_1^*) = P(H_4/A) = \frac{8}{63},$$

$$P(H_2^*) = P(H_5/A) = \frac{5}{21}, P(H_3^*) = P(H_6/A) = \frac{20}{63},$$

$$P(H_4^*) = P(H_7/A) = \frac{5}{18},$$

які обчислюються за формулами Байєса. Далі, розв'язувати задачу вже ґрунтуючись на гіпотезах $H_0^*, H_1^*, ..., H_4^*$.

Приклад 6.3. В кожному з двох ящиків знаходиться по 3 чорних, 5 білих й 8 червоних куль. З першого ящика навмання вийнято кулю та перекладено у другий ящик. Знайти ймовірність того, що, куля, вийнята з другого ящика, буде не чорною.

Розв'язування. Позначимо події: A — «куля, вийнята з другого ящика (після перекладання), буде не чорною».

Сформулюємо гіпотези:

H_1 — «перекладено з першого у другий ящик чорну кулю»,

H_2 — «перекладено з першого у другий ящик білу кулю»,

H_3 — «перекладено з першого у другий ящик червону кулю».
За класичним означення ймовірностей:

$$P(H_1)=\frac{3}{3+5+8}=\frac{3}{16};\ P(H_2)=\frac{5}{3+5+8}=\frac{5}{16};\ P(H_3)=\frac{8}{3+5+8}=\frac{8}{16};$$

$$P(A/H_1)=\frac{5+8}{4+5+8}=\frac{13}{17};\ P(A/H_2)=\frac{6+8}{3+6+8}=\frac{14}{17};$$

$$P(A/H_3)=\frac{5+9}{3+5+9}=\frac{14}{17}.$$

За формулою повної ймовірності:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(A/H_i)=\frac{13}{17}\cdot\frac{3}{16}+\frac{14}{17}\cdot\frac{5}{16}+\frac{14}{17}\cdot\frac{1}{2}=\frac{13}{16}.$$

Приклад 6.4. Два стрілка незалежно один від одного стріляють по одній мішені, роблячи кожний по одному пострілу. Ймовірність влучення в мішень для першого стрілка $0{,}8$; для другого — $0{,}4$. Після стрільби в мішені виявлена пробоїна. Знайти ймовірність того, що в мішень влучив другий стрілок.

Розв'язування. Позначимо події:
A — « в результаті стрільби мішень вражена одним стрільцем».
Сформулюємо гіпотези:
H_0 — «обидва стрілка промахнулись»,
H_1 — «в мішень влучив тільки перший стрілок»,
H_2 — «в мішень влучив тільки другий стрілок»,
H_3 — «обидва стрілка влучили в мішень».
За теоремою про ймовірність добутку незалежних подій знаходимо ймовірності гіпотез:

$$P(H_0)=0{,}2\cdot 0{,}6=0{,}12; \qquad P(H_1)=0{,}8\cdot 0{,}6=0{,}48;$$
$$P(H_2)=0{,}2\cdot 0{,}4=0{,}08; \qquad P(H_3)=0{,}8\cdot 0{,}4=0{,}32.$$

Умовні ймовірності:

$$P(A/H_0)=0; \quad P(A/H_1)=1; \quad P(A/H_2)=1; \quad P(A/H_3)=0.$$

За формулою повної ймовірності:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(A/H_i)=0+1\cdot 0{,}48+1\cdot 0{,}08+0=0{,}5\ —$$

ймовірність того, що мішень вражена одним з стрілків (після стрільби в мішені одна пробоїна).

Шукану ймовірність знайдемо за формулою Байєса (переоцінка ймовірності події H_2):

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{0{,}08\cdot 1}{0{,}56}=\frac{1}{7}\ —$$

ймовірність того, що в мішень попав другий стрілок, якщо в мішені виявлена пробоїна.

Приклад 6.5. Для знищення цілі противника вилетіло два літака різних типів. Літак першого типу може знищити ціль з ймовірністю $0{,}9$ другого типу — з ймовірністю $0{,}8$. Проте протиповітряна оборона противника може збити літак першого типу з ймовірністю $0{,}95$, другого типу — з ймовірністю $0{,}85$. Яка ймовірність знищення цілі?

Розв'язування. Позначимо події: A — «ціль знищена одним з двох літаків».

Сформулюємо гіпотези:

H_0 — «обидва літаки не прорвались до цілі»,

H_1 — «тільки літак першого типу прорвався до цілі»,

H_2 — «тільки літак другого типу прорвався до цілі»,

H_3 — «обидва літаки прорвались до цілі».

За теоремою добутку про ймовірність незалежних подій знаходимо ймовірності гіпотез:

$P(H_0)=0{,}95\cdot 0{,}85=0{,}8075$; $\quad P(H_1)=0{,}05\cdot 0{,}85=0{,}0425$;

$P(H_2)=0{,}95\cdot 0{,}15=0{,}1425$; $\quad P(H_3)=0{,}05\cdot 0{,}15=0{,}0075$.

За умовою умовні ймовірності

$P(A/H_0)=0$; $\quad P(A/H_1)=0{,}9$; $\quad P(A/H_2)=0{,}8$

Знайдемо далі останню умовну ймовірність, використовуючи теорему про ймовірність суми та добутку подій

$$P(A/H_3)=0{,}9\cdot 0{,}2+0{,}1\cdot 0{,}8+0{,}9\cdot 0{,}8=0{,}98.$$

За формулою повної ймовірності

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(H_i)P(A/H_i)=$$

$$=0{,}8075\cdot 0+0{,}0425\cdot 0{,}9+0{,}1425\cdot 0{,}8+0{,}0075\cdot 0{,}98=0{,}1596$$

Приклад 6.6. В групі з 10 студентів, які прийшли на екзамен, 3студенти підготовлені відмінно, 4 — добре, 2 — задовільно і 1 — погано. В екзаменаційних білетах є 20 питань. Відмінно підготовлений студент може відповісти на всі 20 питань, добре підготовлений — на16, задовільно підготовлений — на 10, погано підготовлений — на 5. Викликаний навмання студент відповів на всі три поставлених викладачем питання. Знайти ймовірність того, що цей студент: а) підготований відмінно; б) підготований погано.

Розв'язування. Нехай A — «студент відповів на всі три питання».

Сформулюємо гіпотези:

H_1 — «студент підготовлений відмінно»,

H_2 — «студент підготовлений добре»,

H_3 — «студент підготовлений задовільно»,

H_4 — «студент підготовлений погано».
Знаходимо ймовірності гіпотез

$$P(H_1)=0{,}3; \qquad P(H_2)=0{,}4; \qquad P(H_3)=0{,}2; \qquad P(H_4)=0{,}1.$$

Знаходимо умовні ймовірності події A

$$P(A/H_1)=1; \quad P(A/H_2)=\frac{16}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{14}{18}\approx 0{,}491;$$

$$P(A/H_3)=\frac{10}{20}\cdot\frac{9}{19}\cdot\frac{8}{18}\approx 0{,}105; \quad P(A/H_4)=\frac{5}{20}\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{3}{18}\approx 0{,}009.$$

За формулою Байєса

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)}=$$

$$=\frac{0{,}3\cdot 1}{0{,}3\cdot 1+0{,}4\cdot 0{,}491+0{,}2\cdot 0{,}105+0{,}1\cdot 0{,}009}\approx 0{,}579$$

$$P(H_4/A)=\frac{0{,}1\cdot 0{,}009}{0{,}3\cdot 1+0{,}4\cdot 0{,}491+0{,}2\cdot 0{,}105+0{,}1\cdot 0{,}009}\approx 0{,}002.$$

Приклад 6.7. Завод, який виготовляє деякий прилад, оцінює його надійність у 95%, а лабораторія, яка проводить випробування, — у 80%. За допомогою експерименту, проведеного споживачем, потрібно з'ясувати, яким висновкам надати перевагу.

Розв'язування. Нехай A — «прилад витримав випробування»; H_1 — «правильні дані заводу»; H_2 — «правильні дані лабораторії». Природно припустити, що $P(H_1)=P(H_2)=0{,}5$. За умовою задачі $P(A/H_1)=0{,}95$; $P(A/H_2)=0{,}8$; $P(\overline{A}/H_1)=0{,}05$; $P(\overline{A}/H_2)=0{,}2$.

Обчислимо:

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=0{,}5\cdot 0{,}95+0{,}5\cdot 0{,}8=0{,}875;$$

$$P(\overline{A})=0{,}125; \quad P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=0{,}54;$$

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_12)}{P(A)}=0{,}46; \quad P(H_1/\overline{A})=\frac{P(H_1)P(\overline{A}/H_1)}{P(\overline{A})}=0{,}2;$$

$$P(H_2/\overline{A})=\frac{P(H_2)P(\overline{A}/H_2)}{P(\overline{A})}=0{,}8.$$

Лише одна з обчислених ймовірностей досить велика — $P(H_2/\overline{A})=0{,}8$. Отже, якщо прилад не витримав випробувань, то можна надати перевагу висновкам лабораторії.

Приклад 6.8. Інвестор вклав гроші у цінні папери двох фірм, надіючись з ймовірністю $0{,}9$ отримати прибуток від першої фірми і з ймовірністю $1{,}0$ —

від другої. Перша фірма може збанкрутувати з ймовірністю $0{,}1$, друга — з ймовірністю $0{,}02$. У випадку банкрутства фірми інвестору повертають вкладений капітал. Обчислимо ймовірність отримання прибутку.

Розв'язування. Нехай подія A — «інвестор отримав прибуток», B_1 — «перша фірма збанкрутувала», B_2 — «друга фірма збанкрутувала». За умовою $P(B_1)=0{,}1;$ $P(B_2)=0{,}02.$ Події $H_1=B_1\cdot\overline{B_2}$, $H_2=\overline{B_1}\cdot B_2$, $H_3=B_1\cdot B_2$, $H_4=\overline{B_1}\cdot\overline{B_2}$ утворюють повну групу подій. За формулою повної ймовірності

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)+$$
$$+P(H_4)P(A/H_4)$$

Обчислимо

$$P(H_1)=P(B_1\cdot\overline{B_2})=0{,}1\cdot 0{,}98=0{,}098;$$
$$P(H_2)=P(\overline{B_1}\cdot B_2)=0{,}9\cdot 0{,}02=0{,}018;$$
$$P(H_3)=P(B_1\cdot B_2)=0{,}1\cdot 0{,}02=0{,}002;$$
$$P(H_4)=P(\overline{B_1}\cdot\overline{B_2})=0{,}9\cdot 0{,}98=0{,}882;$$
$$P(A/H_1)=1;\ P(A/H_2)=0{,}9;\ P(A/H_3)=0;\ P(A/H_4)=1.$$

Отже, $P(A)=0{,}098+0{,}9\cdot 0{,}018+0{,}882=0{,}9962.$

Задачі для самостійного розв'язування

148. Є 2 урни: в першій 3 білих та 2 чорних кулі, в другій 4 білих та 4 чорних кулі. З першої урни перекладають в другу, не дивлячись, 2 кулі. Після цього з другої урни беруть одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля буде білою

149. При вміщенні в урну добре перемішаних N куль (m білих та $N-m$ чорних) одна куля невідомого кольору загубилась. З залишившихся в урні $N-1$ куль навмання виймають одну кулю. Знайти ймовірність того, що вийнято білу кулю.

150. В посудину, яка містить N куль, опущено білу кулю. Всі припущення щодо кількості білих куль однаково можливі. Знайти ймовірність того, що буде вийнято білу кулю з цієї посудини.

151. На вхід радіолокаційного приладу подають з ймовірністю p сигнал з шумом, з ймовірністю $1-p$ — тільки шум. Якщо попадає сигнал з шумом, то прилад реєструє наявність сигналу з ймовірністю p_1; якщо попадає тільки шум, то прилад реєструє наявність сигналу з ймовірністю p_2. Відомо, що прилад зареєстрував сигнал. Знайти ймовірність того, що сигнал попав на вхід радіолокаційного приладу.

152. Є 5 урн. В першій, другій, третій урнах знаходиться по 2 білих та 3 чорних кулі; в четвертій та п'ятій урнах — по 1 білій та 1 чорній кулі. Навмання

вибирається урна і з неї виймається куля. Вона виявилася чорною. Знайти ймовірність того, що вибрано четверту або п'яту урну.

153. На фабриці, яка виробляє болти, перша машина виробила 25%, друга — 35%, третя — 40% усіх виробів. В їх продукції брак складає відповідно 5%, 4% та 2%. а) Знайти ймовірність того, що навмання вибраний болт буде дефектний. б) Навмання вибраний болт виявився дефектний. Знайти ймовірність того, що його було виготовлено на першій, другій, третій машині

154. В урні 7 білих і 3 чорних кулі. Без повернення виймають 3 кулі. Відомо, що серед них є чорна куля. Знайти ймовірність того, що інші дві кулі білі.

155. Ймовірність того, що в довідкове бюро за одну годину звернуться k чоловік, дорівнює $\lambda^k e^{-k} \big/ k!,\ \lambda > 0$. Для кожної людини ймовірність одержати відмову дорівнює p. Знайти ймовірність того, що за одну годину s чоловік не одержать відповіді на своє питання.

156. В урні спочатку знаходиться n білих та m чорних куль. Одну кулю загублено, а колір її невідомий. З урни без повернення виймають 2 кулі, і вони обидві білі. Знайти ймовірність того, що загублено білу кулю.

157. Урна містить одну кулю, про котру відомо, що вона біла або чорна з однаковими ймовірностями. В урну кладуть одну білу кулю і потім навмання виймають одну кулю. Вона виявилася білою. Знайти ймовірність того, що в урні залишилась біла куля.

158. Двоє стрілків стріляють у мішень. Один з них влучає в середньому в п'яти випадках, другий — у восьми випадках з десяти. До пострілу вони кидають правильну монету для визначення черговості. Сторонньому спостерігачу відомі умови стрільби, але йому невідомо, хто в даний момент стріляє. Ось він бачить, що стрілок влучив у мішень. Знайти ймовірність того, що стріляв перший стрілок.

159. Одержано партію, яка містить 8 виробів одного типу. Після перевірки половини партії 3 вироби виявилися технічно справними, а один бракованим. Знайти імовірність того, що при перевірці трьох наступних виробів один з них буде справним, а два бракованими, якщо будь-яка кількість бракованих виробів у даній партії є рівноможлива.

160. Повз бензоколонку проїжджають легкові та вантажні машини. Серед них вантажних машин 60%. Ймовірність того, що проїжджаюча машина під'їде на заправку, для вантажних машин дорівнює $0{,}1$, а для легкових — $0{,}2$. До бензоколонки під'їхала на заправку машина. Знайти ймовірність того, що вона вантажна.

161. Всю продукцію перевіряють 2 контролери. Ймовірність того, що виріб попаде на перевірку до першого контролера, дорівнює $0{,}55$, а до другого — $0{,}45$. Ймовірність того, що перший контролер пропустить бракований товар, дорівнює $0{,}01$, а другий — $0{,}02$. Навмання взятий виріб з маркою «стандарт» виявився бракованим. Знайти ймовірність того, що цей виріб перевіряв другий контролер.

162. Перед посівом 80% всього насіння обробили ядохімікатами. Ймовірність ураження шкідниками рослин, пророслих з цього насіння, рівна $0{,}06$. Ймовірність враження шкідниками рослин, пророслих із необробленого насіння, рівна $0{,}3$. Яка ймовірність того, що взята навмання рослина виявиться ураженою шкідниками? Якщо рослина уражена, то яка ймовірність того, що вона вирощена із обробленого насіння?

163. Пасажир може звернутися за придбанням білету в одну з трьох кас. Ймовірності звернення в кожну касу залежать від його місцезнаходження і дорівнюють відповідно $0{,}2; 0{,}3;\ 0{,}5$. Ймовірність того, що до моменту приходу пасажира наявні в касі білеті будуть розпродані, дорівнює для першої каси $0{,}1$; для другої — $0{,}2$; для третьої — $0{,}7$. Пасажир пішов за білетом в одну з кас і придбав білет. Знайти ймовірність того, що це була перша каса.

164. В групі студентів 80% хлопців. У 20% хлопців і 35% дівчат є мобільні телефони. Після занять з групою в аудиторії виявлено забутий кимось телефон. Що ймовірніше, телефон загублено дівчиною чи хлопцем?

165. Екзаменаційний білет з математики містить три питання з трьох різних розділах курсу, які не перетинаються. Екзамен вважається не зданим, якщо студент не дає правильної відповіді, принаймні, на два питання. Студент Середняков підрахував, що з першого розділу курсу він підготував $1/5$ частину питань, з другого $2/5$, із третього — $3/5$. Середняков екзамен не здав. Знайти ймовірність того, що Середняков не відповів на перше і третє питання.

166. Є n урн, в кожній з яких a білих куль і b чорних. З першої урни в другу переклали одну кулю, потім з другої в третю також одну кулю і так далі до n-ї урни, з якої дістали кулю. Знайти ймовірність того, що вона біла.

167. На телефонну станцію поступає випадковий потік викликів. Ймовірність настання k викликів за час t рівна $p_k(t)$ $(k = 0,1,2,\ldots)$. Кількість викликів, які надійшли за проміжок часу t, не залежить від того, скільки викликів надійшло до або після цього проміжку. Знайти ймовірність того, що за проміжок часу $2t$ надійшло l викликів.

§ 7. Схема Бернуллі

Випробування називаються незалежними, якщо ймовірність результату кожного випробування не залежить від того, які результати були у попередніх випробуваннях. Нехай проводиться n незалежних повторних випробувань в однакових умовах, причому в кожному з них може бути тільки два результати — поява події A («успіх») з ймовірністю p та поява події $\overline{A}$ («невдача») з ймовірністю q, $q + p = 1$. Тоді ймовірність появи в цих n випробуваннях події A рівно k раз знаходиться по наступній формулі Бернуллі

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = \overline{0,n}.$$

Набір ймовірностей $P_n(k),\ k=\overline{0,n}$ називають біноміальним розподілом. Значення k, для якого ймовірність $P_n(k),\ k=\overline{0,n}$ є найбільшою, називають найімовірнішим числом появи події A у n випробуваннях.

Нехай k_0 — це найімовірніше число, тобто $\forall k: P_n(k)\le P_n(k_0)$, $k=\overline{0,n}$.

Тоді із системи умов

$$\begin{cases} P_n(k_0)\ge P_n(k_0-1) \\ P_n(k_0)\ge P_n(k_0+1) \end{cases}$$

неважко дістати подвійну нерівність для визначення найімовірнішого числа:

$$(n+1)p-1\le k_o\le (n+1)p$$

Довжина проміжку, якому належить найімовірніше число k_0 дорівнює $(np+p)-(np-q)=p+q=1$, тому k_0 (як ціле число) може приймати або одне значення (якщо кінці проміжку дробові числа), або два значення (якщо кінці проміжку — цілі числа).

Справедлива рівність:

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k)=1.$$

В тому випадку, коли ймовірність появи події змінюється від випробування до випробування, формула Бернуллі виявляється непридатною, в цьому випадку використовують так звану твірну функцію

$$\varphi_n(z)=(p_1z+q_1)(p_2z+q_2)\ldots(p_nz+q_n)$$

де p_1 — ймовірність появи події A при першому випробуванні, p_2 — при другому випробуванні, … , p_n — при $n-$ому випробуванні, $q_1=1-p_1$, $q_2=1-p_2$, … , $q_n=1-p_n$. Тоді ймовірність $P_n(k)$ появи події A рівно k раз дорівнює коефіцієнту при z^k в розкладенні функції $\varphi_n(z)$ по степеням.

Якщо ж під час кожного незалежного повторного випробування можливі не два результати $A,\ \overline{A}$, а декілька взаємно виключаючих один одного результатів $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_s$, які внаслідок випробування можуть з'явитися з ймовірностями $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_s$, відповідно, то ймовірність того, що в n випробуваннях подія A_1 відбудеться k_1 раз, подія A_2 — k_2 раз, … , подія A_s — k_s раз знаходиться по формулі

$$P_n(k_1,k_2,\ldots,k_s)=\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_s^{k_s}$$

Зауважимо, що формула Бернуллі є частковим випадком наведеної формули при $s=2$.

Приклад 7.1. Ймовірність виграшу лотерейного білету $0{,}1$. Сергій купує 5 лотерейних білетів. Знайти ймовірність наступних подій: A—«рівно два білети виграють», B— «більша частина білетів виграє», C — «виграють хоча б два білети».

Розв'язування. За умовою задачі $p = 0{,}1$. За формулою Бернуллі

$$P(A) = P_5(2) = C_5^2 \cdot 0{,}1^2 \cdot (1-0{,}1)^3 = 0{,}0729.$$

Оскільки подія B означає, що виграють 3, 4 або 5 білетів, то

$$P(B) = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = C_5^3 \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^2 + C_5^4 \cdot 0{,}1^4 \cdot 0{,}9^1 +$$

$$= C_5^5 \cdot 0{,}1^5 \cdot 0{,}9^0 = 0{,}0081 + 0{,}00045 + 0{,}00001 = 0{,}00856.$$

Для обчислення $P(C)$ перейдемо до протилежної події $\overline{C}$ –«виграють менше двох білетів». Оскільки подія $\overline{C}$ означає, що виграє або 0, або 1 білет, то

$$P(\overline{C}) = P_5(0) + P_5(1) = C_5^0 \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^5 + C_5^1 \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^4 =$$

$$= 0{,}59049 + 0{,}32805 = 0{,}91845.$$

Тоді $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 0{,}08146.$

Приклад 7.2. Відомо, що з кількості глядачів певної телепрограми 70% дивляться і рекламні блоки. Групи, які складаються з трьох навмання вибраних телеглядачів, опитують відносно змісту рекламного блоку. Обчисліть ймовірність кількості осіб у групі, які дивляться рекламні блоки.

Розв'язування. Ймовірність того, що навмання вибраний глядач даної програми дивиться рекламні блоки, згідно статистичному означенню ймовірностей, дорівнює $p = 0{,}7$. Інтерпретуючи опитування трьох телеглядачів як три випробування Бернуллі і, вважаючи успіхом ситуацію, коли телеглядач дивиться рекламні блоки, знайдемо шукані ймовірності за формулою Бернуллі в якій

$$n = 3,\ \mathrm{p} = 0{,}7:\ P_3(k) = C_3^k 0{,}7^k 0{,}3^{3-k}\ (\mathrm{k} = 0,1,2,3);$$

$$P_3(0) = C_3^0 0{,}7^0 0{,}3^3 = 0{,}027;\ P_3(1) = C_3^1 0{,}7^1 0{,}3^2 = 0{,}189;$$

$$P_3(2) = C_3^2 0{,}7^2 0{,}3^1 = 0{,}441;\ P_3(3) = C_3^3 0{,}7^3 0{,}3^0 = 0{,}343.$$

Приклад 7.3. В умовах попередньої задачі знайти найімовірніше число осіб у групі, які дивляться рекламні блоки.

Розв'язування. Найімовірніше число k_0 осіб у групі, які дивляться рекламні блоки, задовольняє нерівності $(n+1)p - 1 \le k_o \le (n+1)p$, в яких $n = 3$, $\mathrm{p} = 0{,}7$, тобто $4 \cdot 0{,}7 - 1 \le k_o \le 4 \cdot 0{,}7$, або $1{,}8 \le k_o \le 2{,}8$, звідки $k_0 = 2$. Це підтверджується і попередньою задачею.

Приклад 7.4. З 1000 опитаних 700 осіб підтримують певну урядову програму. Знайти мінімальну чисельність групи, в якій з ймовірністю, не меншою $0{,}9$ хоча б один респондент не підтримує цю програму.

Розв'язування. Нехай чисельність групи дорівнює n. Будемо інтерпретувати опитування групи з n осіб як випробування Бернуллі, вважаючи успіхом те, що випадково вибраний респондент підтримує урядову програму. Згідно статистичному означенню ймовірностей, ймовірність успіху дорівнює $p = \frac{700}{1000} = 0,7$. Нехай подія A полягає у тому, що у групі з n осіб хоча б один не підтримує урядову програму, тоді подія $\overline{A}$ означає, що у групі з n осіб всі n підтримують цю програму. За формулою Бернуллі

$$P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - P_n(n) = 1 - C_n^n p^n (1-p)^0 = 1 - p^n = 1 - 0,7^n.$$

За умовою ймовірність $P(A)$ повинна бути не меншою $0,9$, тому $1-(0,7)^n \ge 0,9$ або $(0,7)^n \le 0,1$. Щоб знайти мінімальне значення n, при якому виконується ця нерівність, будемо послідовно підставляти у нього числа $1,2,3$ і т.д., поки нерівність не задовольниться: $(0,7)^1 = 0,7$; $(0,7)^2 = 0,49$; $(0,7)^3 = 0,343$; $(0,7)^4 = 0,240$; $(0,7)^5 = 0,168$; $(0,7)^7 = 0,082$. Нерівність $(0,7)^n \le 0,1$ не виконується при $n = 1,2,...,6$, але виконується при $n = 7$, тому мінімальна чисельність групи, у якій з ймовірністю, не меншою $0,9$ хоча б один респондент не підтримує цю програму, дорівнює 7 особам.

Приклад 7.5. На відрізок MN довжини a навмання кинуто 5 точок. Знайти ймовірність того, що дві точки будуть знаходитись від точки M на відстані, меншій x, а три інші — на відстані, більшій x. Вважаємо, що $x \in (0, a)$

Розв'язування. Введемо в розгляд подію A— «кинута точка знаходиться від точки M на відстані меншій x», тоді $p = P(A) = x/a$. Кинуто 5 точок — значить експеримент повторено 5 раз. Тому ймовірність досліджуваної події згідно з

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot (1-p)^3 = \frac{10x^2(1-x/a)^3}{a^2}.$$

Приклад 7.6. Випробується кожний із 15 елементів деякого пристрою. Ймовірність пройти випробування для кожного елементу становить $0,9$. Знайти найімовірніше число елементів, які пройшли випробування та їх ймовірності.

Розв'язування. Оскільки $n = 15$, $p = 0,9$, то за формулою (7.2) маємо $16 \cdot 0,9 - 1 \le k_0 \le 16 \cdot 0,9$, звідки $k_0 = 14$.

Далі знаходимо $P_{15}(14) = C_{15}^{14} \cdot 0,9^{14} \cdot 0,1 = 0,343$.

Приклад 7.7. Пристрій складається з трьох незалежно працюючих блоків. Ймовірності безвідмовної роботи блоків за час t дорівнюють відповідно $p_1 = 0,7$, $p_2 = 0,8$, $p_3 = 0,9$. Знайти ймовірності того, що за час t будуть працювати безвідмовно: а) всі три елементи; б) два елементи; в) один елемент.

Розв'язування. Ймовірності відмови блоків рівні відповідно $q_1 = 0{,}3$, $q_2 = 0{,}2$, $q_3 = 0{,}1$. Похідна функція (7.3) для нашої задачі має вигляд

$$\phi_3(z) = (p_1 z + q_1)(p_2 z + q_2)(p_3 z + q_3) =$$

$$= (0,7z + 0,3)(p0,8z + 0,2)(0,9z + 0,9) = 0,504z^3 + 0,398z^2 + 0,092z + 0,006.$$

Ймовірність безвідмовної роботи всіх трьох елементів дорівнює коефіцієнту при z^3, отже $P_3(3) = 0{,}504$. б) Ймовірність безвідмовної роботи двох елементів дорівнює коефіцієнту при z^2, отже $P_3(2) = 0{,}398$. в) Ймовірність безвідмовної роботи одного елементу дорівнює коефіцієнту при z, отже $P_3(1) = 0{,}092$.

Приклад 7.8. В цех по ремонту радіоапаратури поступають регістри з трьох заводів у відношенні $2:3:5$. Майстер для ремонту прибору взяв навмання 6 регістрів. Яка ймовірність того, що було взято 1 регістр першого заводу, 2 регістра другого заводу, 3 регістра третього заводу?

Розв'язування. Ймовірності взяти регістри першого, другого, третього заводів дорівнюють відповідно $0{,}2$; $0{,}3$; $0{,}5$. Використаємо формулу $(7{,}4)$, в якій $n = 6$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$, $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}3$, $p_3 = 0{,}5$. Отримуємо

$$p = P_6(1,2,3) = \frac{6!}{1!2!3!} 0{,}2 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}5^3 = 0{,}135.$$

Задачі для розв'язування

168. Монета підкидається 5 раз. Знайти ймовірність того, що герб випаде: а) 1 раз; б) 2 рази; в) 3 рази.

169. Гральна кість підкидається 5 раз. Знайти ймовірність того, що 2 рази появиться число очок, кратне трьом.

170. На ціль скидається 6 бомб, ймовірність попадання кожної в ціль становить $0{,}3$. Знайти ймовірність влучення у ціль: а) 4 бомбами; б) 3 бомбами.

171. Ймовірність влучення бомби в ціль дорівнює $0{,}25$. Скидається 8 бомб. Знайти ймовірність того, що буде: а) не менше 7 влучень; б) не менше 1 влучення.

172. Ймовірність влучення стрілком в мішень при кожному пострілі не залежить від результатів попередніх пострілів і дорівнює $0{,}8$. Стрілок зробив 5 пострілів. Знайти ймовірність наступних подій: а) у мішень влучила одна пулею; б) у мішень влучило дві пулі; в) зареєстровано хоча б одне влучення; г) зареєстровано не менше трьох влучень.

173. В сім'ї 5 дітей. Ймовірність народження хлопчика дорівнює $0{,}51$. Знайти ймовірності подій: $A-$«в сім'ї два хлопчика», $B-$«в сім'ї не більше двох хлопчиків», $C-$«в сім'ї більше двох хлопчиків», $D-$«в сім'ї не менше 2 і не більше 3 хлопчиків».

174. Грають дві рівносильні команди в футбол. В ході матчу забито 4 м’яча. Яка ймовірність того, що рахунок буде рівним?

175. Два рівносильних суперника грають в шахи. Що ймовірніше: а) виграти одну партію з двох або дві з чотирьох? б) виграти не менше двох партій з чотирьох або не менше трьох з п’яти? Нічиї до уваги не приймаються.

176. В коло радіуса R вписано правильний шестикутник. Всередину кола кинуто навмання чотири точки. Знайти ймовірність того, що три з них попадуть всередину трикутника.

177. Відрізок AB точкою C розділено у відношенні $2:1$, відраховуючи від точки A. На цей відрізок навмання кинуто чотири точки. Знайти ймовірність того, що дві з них виявляться лівіше точки C, а дві правіше.

178. Відрізок AB розділено точкою C у відношенні $2:3$, відраховуючи від точки A. На цей відрізок навмання кинуто шість точок. Знайти ймовірність того, що не менше трьох точок виявляться лівіше C.

179. При роздачі чотирьом гравцям колоди з 52 карт, один з них тричі підряд не отримав тузів. Чи є у нього підстави скаржитись на невезіння?

180. Комісія перевіряє партію виробів з 10 деталей. Ймовірність того, що деталь стандартна, дорівнює $0{,}75$. Знайти найімовірніше число деталей, котрі будуть визнані стандартними.

181. Гральна кість підкидається 16 разів. Знайти найімовірніше число випадіння очок, кратних 3.

182. На ціль противника скидається 10 бомб, ймовірність влучення в ціль для кожної дорівнює $0{,}2$. Знайти: а) найімовірніше число влучень та його ймовірність; б) ймовірність того, що число влучень коливається в межах від 2 до 4.

183. Технологічний процес контролюється за 14 параметрами. Ймовірність виходу кожного параметру за межі технічних допусків дорівнює $0{,}2$. Знайти: а) найімовірніше число параметрів, що виходять за межі технічних допусків та його ймовірність; б) ймовірність виходу за межі технічних допусків не менше 4 параметрів.

184. З трьох знарядь зроблений залп. Ймовірність влучення в ціль для першого знаряддя дорівнює $0{,}8$, для другого — $0{,}85$, для третього — $0{,}9$. Знайти ймовірність того, що в ціль влучили: а) всі три знаряддя; б) два знаряддя; в) одне знаряддя; г) ні одного знаряддя.

185. Ведеться пристрілка знаряддя по цілі. Ймовірність попадання в ціль при першому пострілі дорівнює $0{,}6$, при наступних пострілах ця ймовірність збільшується кожного разу на $0{,}1$. Яка ймовірність того, що при 4 пострілах знаряддя попаде в ціль: а) всі 4 рази; б) рівно 3 рази; в) не більше двох разів.

186. На трасі гонок є чотири перешкоди. Перше перешкоду гонщик долає з ймовірністю $0{,}9$, другу — з ймовірністю $0{,}95$, третю — з ймовірністю $0{,}8$, четверту — з ймовірністю $0{,}85$. Знайти ймовірність того, що гонщик успішно подолає: а) всі 4 перешкоди; б) рівно 2 перешкоди; в) не менше двох перешкод з чотирьох.

187. Експериментально встановлено, що при підкиданні сірникового коробка кількість його падінь на меншу, середню і велику грані відносяться, як $1:4:15$. Яка ймовірність того, при 6 підкиданнях коробка він 1 раз упаде на меншу грань, 1 раз — на середню, 4 рази — на велику?

188. Відрізок розділено на три рівні частини. На відрізок навмання кидають три точки. Знайти ймовірність того, що на кожну із трьох частин відрізку попаде по одній точці.

189. Відрізок розділено на чотири рівні частини. На відрізок навмання кидають вісім точок. Знайти ймовірність того, що на кожну із чотирьох частин відрізку попаде рівно по дві точки.

190. В квадрат зі стороною a вписано коло, в яке вписано правильний трикутник. Всередину квадрата кидають 5 точок. Знайти ймовірність того, що три точки попадуть всередину кола, причому дві з них — всередину трикутника, а дві останні взагалі не попадуть в коло.

191. Для новорічних подарунків школою закуплено 8 кг яблучної, 20 кг вишневої, 12 кг сливової і 10 кг апельсинової карамелі. Всі цукерки перемішано, і в кожний подарунковий пакет кладеться по 6 карамельок. Яка ймовірність того, що учень Ваня виявить у своєму пакеті дві вишневих, дві сливових і по одній яблучній і апельсиновій карамельці.

192. Вартість проїзду в автобусі дорівнює 3 грн., місячний проїзний квиток на автобус коштує 120 грн., а штраф за безквитковий проїзд становить 10 грн. Петро 24 рази протягом місяця їздить на автобусі до інституту і повертається додому. Він не купує проїзного квитка, ніколи не платить за проїзд і вважає, що ймовірність бути пійманим і заплатити штраф дорівнює $0{,}05$. Порівняти вартість квитка з найімовірнішою величиною штрафу за 48 поїздок.

193. Серед 12 договорів, які провіряються ревізором, сім оформлені неправильно. Знайти ймовірність того, що серед п’яти договорів, випадково відібраних ревізором для перевірки, виявляться неправильно оформленими: а) рівно три договори; б) не менше трьох договорів.

194. Що ймовірніше: виграти в більярд у рівносильного противника три партії з чотирьох або п’ять партії з восьми?
Що ймовірніше: виграти в більярд у рівносильного противника не менше трьох партій з чотирьох або не менше п’яти партій з восьми?

195. Серед лотерейних білетів половина виграшних. Знайти мінімальні кількість білетів, щоб з ймовірністю, не меншою $0{,}99$, бути впевненим у виграші хоча б по одному білету.

196. У місті працює 1000 комерційних банків, з яких 350 допускають порушення податкового законодавства $0{,}8$. Визначити кількість банків, яку повинна відібрати для перевірки податкова інспекція, об з ймовірністю, не меншою $0{,}99$, серед них виявився порушник податкового законодавства.

§ 8. Формули Пуассона і Муавра – Лапласа

Якщо в схемі незалежних повторних випробувань кількість випробувань n велика, користуватись формулою Бернуллі не рекомендується, оскільки в цьому випадку доведеться робити значні по об'єму обчислення. При великих значеннях n (порядка десятків, сотень) замість формули Бернуллі використовують асимптотичні формули Пуассона і Муавра-Лапласа.

Отже, якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні мала $(p < 0{,}01)$, то зазвичай використовують формулу Пуассона

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},\ k = 0,1,2,...$$

де $\lambda = np$ - параметр Пуассона. При цьому вважається, що $0! = 1$.
Якщо ж ймовірності p і $q = 1 - p$ не дуже малі $(p, q > 0{,}01)$, то використовують локальну формулу Муавра-Лапласа

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right),\ k = 0,1,2,...,$$

де

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Для скорочення об'єму обчислень при використання формули в кожному збірнику задач по теорії ймовірностей є таблиця значень функції $\varphi(x)$ (в нашій методичці це таблиця дод.1). Потрібно нагадати, що $\varphi(x)$ - парна функція, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$, і $\varphi(x) = 0$ при $x > 4$. Тому в більшості таблиць значення функції наводяться лише для значень аргументу $x \in [0,4]$.

Якщо потрібно знайти ймовірність того, що при n випробуваннях подія A з'явиться не менше k_1 раз і не більше k_2 раз, можна використовувати формулу

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k).$$

У випадку $p, q > 0{,}01$, для знаходження ймовірності цієї події зручніше використовувати інтегральну формулу Муавра-Лапласа

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

де

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x \exp\left(-t^2/2\right)dt .$$

Функція $\Phi(x)$ називається функцією Лапласа. В наших методичних вказівках значення функції $\Phi(x)$ наведено в таблиці дод. 2. Функція $\Phi(x)$ непарна, тобто $\Phi(-x)=-\Phi(x)$ і $\Phi(x)\approx 0{,}5$ при $x>5$. Тому в більшості таких таблиць значення функції $\Phi(x)$ наведені тільки для аргументів $x\in[0{,}5]$.

Приклад 8.1. Ймовірність набору абонентом телефонного номеру з помилкою рівна 0,001. Знайти ймовірність того, що серед 500 зроблених набирань не більше 200 телефонних номерів були набрані з помилкою

Розв'язування. Шукана ймовірність рівна $P_n(0)+P_n(1)+P_n(2)$. За умовою $n=500$, $p=0{,}001$. Оскільки p мале, для обчислення ймовірностей скористаємось формулою Пуассона. Знаходимо $\lambda=np=500\cdot 0{,}001=0{,}5$. Отже, шукана ймовірність рівна

$$\frac{0{,}5^0}{0!}e^{-0{,}5}+\frac{0{,}5^1}{1!}e^{-0{,}5}+\frac{0{,}5^2}{2!}e^{-0{,}5}=0{,}9856 .$$

Приклад 8.2. При усталеному технологічному процесі відбувається в середньому 10 обривів нитки на 100 веретенах за годину. Знайти ймовірність того, що протягом години на 80 веретенах відбудеться 7 обривів нитки.

Розв'язування. Знаходимо ймовірність обриву нитки на веретені $p=10/100=0{,}1$; тоді $q=1-p=0{,}9$. Так як $n=80$ порівняно велике, і $p,q>0{,}01$, то для обчислення шуканої ймовірності можна використати формулу Муавра-Лапласа

$$P_{80}(7)=\frac{1}{\sqrt{80\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9}}\cdot\varphi\left(\frac{7-80\cdot 0{,}1}{\sqrt{80\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9}}\right)=\frac{1}{2{,}6833}\cdot\varphi(-0{,}37).$$

Знаходимо в таблиці дод.1 $\varphi(-0{,}37)=\varphi(0{,}37)=0{,}3726$. Отже,

$$P_{80}(7)=\frac{0{,}3726}{2{,}6833}=0{,}139.$$

Приклад 8.3. Передається закодоване повідомлення із 1100 символів. Ймовірність помилки при декодуванні кожного символу становить 0,01. Вважаючи декодування кожного символу незалежним від інших, знайти ймовірність того, що кількість помилок в отриманому повідомленні не перевищить 20. Розв'язування. Застосуємо інтегральну формулу Муавра-Лапласа, в якій візьмемо $p=0{,}01$, $q=1-0{,}01=0{,}99$, $k_1=0$, $k_2=20$. Отримаємо

$$P_{1100}(0\le k\le 20)=\Phi\left(\frac{20-1100\cdot 0{,}01}{\sqrt{1100\cdot 0{,}01\cdot 0{,}99}}\right)-\Phi\left(\frac{0-1100\cdot 0{,}01}{\sqrt{1100\cdot 0{,}01\cdot 0{,}99}}\right)=$$
$$=\Phi(2{,}73)-\Phi(-3{,}33)=\Phi(2{,}73)+\Phi(3{,}33).$$

Ми врахували непарність функції Лапласа. Далі по таблиці дод.2 знаходимо $\Phi(2{,}73)=0{,}4968$, $\Phi(3{,}33)=0{,}4995$. Отже, шукана ймовірність

$$0{,}4968+0{,}4995=0{,}9963.$$

Приклад 8.4. Ймовірність появи події в кожному з незалежних повторних випробувань рівна 0,2. Знайти найменшу кількість випробувань, при якій з ймовірністю 0,99 можна очікувати, що відносна частота появи події відхилиться від її ймовірності по модулю не більше, ніж на 0,04.

Розв'язування. Проведемо наступні перетворення

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=P\left(-\varepsilon\le\frac{k}{n}-p\le\varepsilon\right)=P((p-\varepsilon)n\le k\le(p+\varepsilon)n).$$

Звідси згідно з інтегральною формулою Муавра-Лапласа отримаємо

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=\Phi\left(\frac{(p-\varepsilon)n-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{(p+\varepsilon)n-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Таким чином,

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

В нашому прикладі $p=0{,}2$, $q=0{,}8$, $\varepsilon=0{,}04$, $P(|k/n-p|\le\varepsilon)=0{,}99$.

Тому отримуємо

$$2\Phi\left(0{,}04\sqrt{\frac{n}{0{,}2\cdot0{,}8}}\right)=0{,}99 \text{ або } \Phi\left(0{,}01\sqrt{n}\right)=0{,}495.$$

У таблиці дод.2 знаходимо $\Phi(2{,}573)=0{,}495$. Отже, $0{,}1\sqrt{n}=2{,}573$, тобто $n=662{,}033$. Округляючи результати до найближчого цілого, отримуємо $n=663$.

Задачі для розв'язування.

197. Ймовірність випуску свердла підвищеної крихкості (брак) рівна 0,002. Свердла пакуються в коробки по 100 штук. Знайти ймовірність того, що а) в коробці не буде виявлено бракованих свердел; б) кількість бракованих свердел виявиться більшою 3.

198. Магазин отримав 1000 скляних пляшок мінеральної води. Ймовірність того, що при транспортуванні пляшка буде розбита, рівна 0,003. Знайти ймовірність того, що при транспортуванні будуть розбитті: а) рівно дві пляшки; б) не більше двох пляшок; в) не менше двох пляшок; г) хоча б одна пляшка.

199. Якщо лівші становлять в середньому 1% населення, які шанси на те, що серед 200 чоловік: а) буде рівно четверо лівші; б) виявиться не менше чотирьох лівші.

200. Відомо, що в середньому 5% студентів носять окуляри. Яка ймовірність того, що серед 200 студентів, які сидять в аудиторії, не менше 5 носять окуляри?

201. Система зв’язку складається з 1000 елементів, кожний з яких незалежно від інших виходить з ладу за час T з ймовірністю 0,0005. Знайти ймовірності наступних події: $A-$«за час T відмовить хоча б один елемент», $B-$«за час T відмовлять рівно 3 елементи», $C-$ «за час T відмовлять не більше 3 елементів»

202. Коректура в 500 сторінок містить 1300 опечаток. Знайти найімовірніше число опечаток на одній сторінці тексту та ймовірність цього числа опечаток.

203. На факультеті 500 студентів. Знайти найімовірніше число студентів, які родились 1 вересня, і ймовірність цього числа народжень. Ймовірність народження 1 вересня вважати рівною 0,0027.

204. Ймовірність виготовлення консервної банки з недостатньою герметизацією рівна 0,002. Серед скількох банок, відібраних випадково, можна з ймовірністю 0,9 очікувати відсутність бракованих?

205. На АТС надходять в середньому 12 замовлень за хвилину. Знайти ймовірність того, що за 20с надійдуть: а) рівно 2 замовлення; б) не менше 2 замовлень.

206. Середня кількість замовлень, що надходять на АТС за хвилину, рівна 120. Знайти ймовірності наступних подій: $A-$«за 2с на АТС не надійде жодного замовлення», $B-$«за 2с на АТС надійде менше 2 замовлень», $C-$«за 1с на АТС відбудеться хоча б один виклик», $D-$«за 3с на АТС не надійдуть не менше 6 замовлень».

207. З розігрітого катоду електронної лампи протягом 1 секунди вилітає a електронів. Знайти ймовірність того, що за t секунд: а) вилетить рівно m електронів; б) не менше m електронів.

208. Ймовірність враження мішені при одному пострілі рівна 0,8. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах мішень буде вражено рівно 75 раз.
Школа приймає в перші класи 200 дітей. Знайти ймовірність того, що серед них однакова кількість хлопчиків і дівчат, якщо ймовірність народження хлопчика рівна 0,515.

209. Ймовірність виготовлення взуття першого сорту рівна 0,4. Яка ймовірність того, що серед 600 пар, які надійшли для контролю, кількість пар першосортного взуття коливається в межах від 228 до 252?

210. Ймовірність пошиття костюму першого сорту рівна 0,8. В магазин надійшли 400 костюмів. Знайти ймовірність наступних подій: $A-$«кількість першосортних костюмів рівна 310», $B-$«кількість першосортних костюмів не перевищить 310».

211. Ймовірність виготовлення на заводі першосортного холодильника становить 0,9. В магазин надійшло 100 холодильників. Яка ймовірність, що серед них; а) рівно 92 першосортних; б) кількість першосортних холодильників коливається в межах від 80 до 90.

212. Лабораторним шляхом встановлено схожість зерне в 80%. Чому рівна ймовірність того, що серед відібраних 1000 зерен проростуть: а) не менше 800 зерен; б) від 820 до 840 зерен; в) від 880 до 920 зерен? Знайти ймовірність того,

що серед відібраних 1000 зерен кількість проростлих відрізняється від найімовірнішого їх числа не більше ніж на 30 зерен в ту і другу сторону.

213. В деякій місцевості в середньому на кожні 100 вирощених кавунів припадає один вагою не менше 10 кг. Знайти ймовірність того, що в партії з 400 кавунів із цієї місцевості будуть: а) рівно 3 кавуна вагою не меншою 10 кг кожний; б) не менше трьох таких кавунів.

214. Французький природодослідник Бюффон підкинув монету 4040 раз, причому герб випав 2048 раз. Знайти ймовірність того, що при повторному випробуванні досліду Бюффона відносна частота випадіння герба відхилиться по модулю від ймовірності його появи не більше ніж в досліді Бюффона.

215. Ймовірність появи події в кожному із незалежних повторних випробувань рівна 0,5.Знайти кількість випробувань, при яких з ймовірністю 0,7698 можна очікувати, що відносна частота появи події відхилиться по модулю від його ймовірності не більше ніж на 0,02.

216. В урні містяться чорні та білі кулі у відношенні $4:1$. Після витягу кулі реєструється її колір, і куля повертається в урну. Чому рівне найімовірніше число витягу, при якому з ймовірністю 0,95 можна очікувати, що абсолютна величина відхилення відносної частоти появи білої кулі від її ймовірності буде не більша ніж 0,01?

217. Ймовірність появи події в кожному із 400 незалежних випробувань рівна 0,8. Знайти таке додатне ε, щоб з ймовірністю 0,99 абсолютна величина відхилення частоти появи події від її ймовірності не перевищувала ε.

218. Гральну кість підкидають 80 разів. Знайти границі, в котрих число випадінь шістки буде знаходитись з ймовірністю 0,9973.

219. Скільки разів потрібно підкинути монету, щоб із ймовірністю 0,92 можна було чекати, що частота появи герба відхилиться від його ймовірності 0,5 по модулю менше, ніж 0,01?

§ 9. Дискретна випадкова величина

Закон розподілу дискретної випадкової величини

Випадковою величиною X називається функція, задана на просторі елементарних подій, тобто

$$X = f(\omega),$$

де ω - елементарна подія з простору елементарних подій.

Позначать випадкові величини великими літерами X, Y, Z, а їх можливі значення - $x,\ y,\ z$.

Законом розподілу випадкової величини X називається відношення, яке встановлює зв'язок між значеннями X та ймовірностями цих значень.

Випадкову величину називають дискретною, якщо вона приймає окремі, ізольовані одне від одного значення з визначеними ймовірностями. Кількість значень дискретної випадкової величини може бути скінченою або некінченою, але зліченною.

Для дискретної випадкової величини (ДВВ) закон розподілу може бути заданий у вигляді таблиці, аналітично і графічно.

Простішою формою закону розподілу ДВВ X є таблиця (матриця), в якій перераховані у порядку зростання всі можливі значення x_i випадкової величини та відповідні їм ймовірності $p_i = P(X = x_i)$, тобто

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

або

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

Така таблиця називається рядом розподілу ДВВ.

Якщо кількість значень випадкової величини зліченна, то таблиця містить нескінченну кількість комірок. В такому випадку повинно бути вказане правило, по якому визначаються ймовірності p_i.

Події $X = x_1$, $X = x_2$, … , $X = x_n$ утворюють повну групу, отже, сума ймовірностей цих подій рівна одиниці:

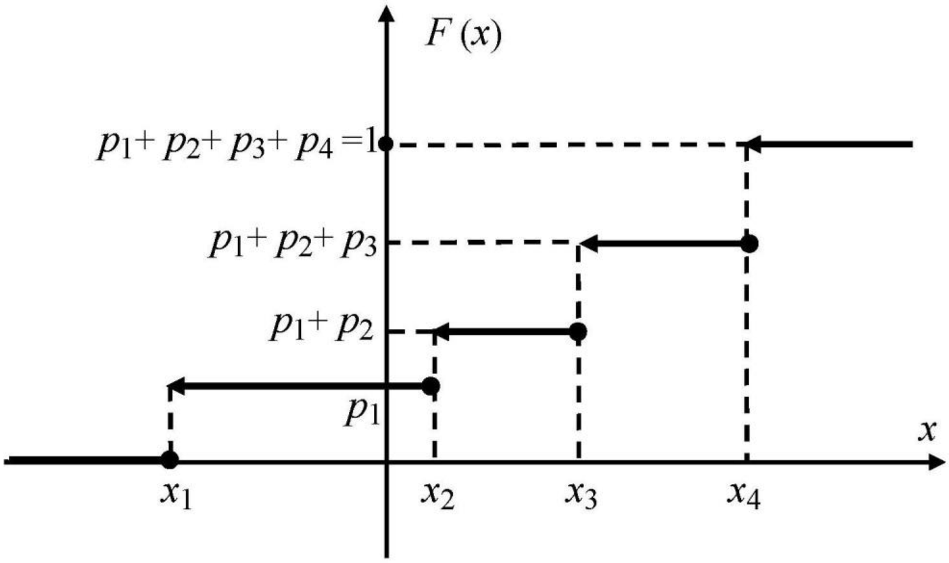
$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Ряд розподілу дискретної випадкової величини можна зобразити графічно у вигляді полігону або многокутника розподілу ймовірностей. Для цього на горизонтальній вісі у вибраному масштабі потрібно відкласти значення випадкової величини, а по вертикалі – ймовірності цих значень, тоді точки з координатами (x_i, p_i) будуть зображати полігон розподілу ймовірностей; з'єднавши ці точки відрізками прямої, отримаємо многокутник розподілу ймовірностей.

Функцією розподілу випадкової величини X називається функція $F(x)$, визначаюча для кожного дійсного числа x ймовірність того, що випадкова величина прийме значення менше x:

$F(x) = P(X < x)$.

Функція розподілу ДВВ X визначається як $F(x) = \sum\limits_{x_i < x} p_i$, де підсумовування ведеться по тих значенням індексу i, для яких значення випадкової величини менше числа x, тобто $x_i < x$. В цьому випадку $F(x)$ є ступінчатою функцією з точками розриву в точках $x = x_i$.



Властивості функції розподілу:

1. $0 \le F(x) \le 1$.
2. $F(x_1) \le F(x_2),\ x_1 < x_2$.
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0,\ \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
4. $P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

Основні закони розподілу дискретної випадкової величини

Біноміальний

Якщо можливими значеннями ДВВ X є $0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n$, а відповідні їм ймовірності обчислюються за формулою Бернуллі:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},\ \ k = \overline{0, n},\ \ q = 1 - p,$$

то кажуть, що випадкова величина X має біноміальний закон розподілу:

x_i	0	1	…	n
p_i	$p_n(0)$	$p_n(1)$	…	$p_n(n)$

Гіпергеометричний

Нехай задані натуральні числа $m,\ n,\ s$, причому $m \le s \le n$. Якщо можливими значеннями ДВВ X є $0,\ 1,\ 2, \ldots,\ m$, а відповідні їм ймовірності обчислюються за формулою

$$p_k = P(X = k) = \frac{C_m^k \cdot C_{n-m}^{s-k}}{C_n^s},\ \ k = \overline{0, m},$$

то кажуть, що випадкова величина X має гіпергеометричний закон розподілу.

Геометричний

Геометричний закон розподілу ДВВ:

x_i	1	2	…	k	…
p_i	p_1	p_2	…	p_k	…

де $p_k = q^{k-1}p, \ \ q = 1 - p \ \ (0 < p < 1)$;

Пуассона

Закон розподілу Пуассона:

x_i	0		1	…	k	…
p_i	p_0		p_1	…	p_k	…

де $p_k = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \ \ \lambda -$ додатна постійна.

Закон розподілу Пуассона є граничним для біноміального при $n \to \infty$, $p \to 0$, $np = \lambda = const$. У зв'язку з цим при великих n і малих p біноміальні ймовірності обчислюються за формулою Пуассона:

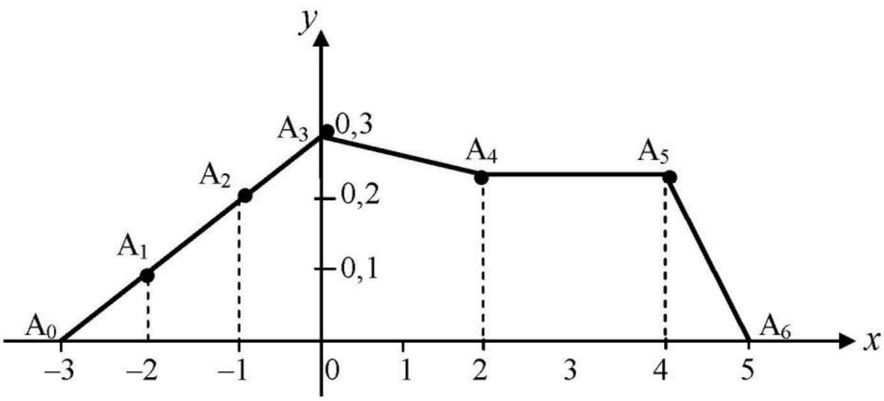
$$p_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \ \ \lambda = np.$$

Приклад 9.1. Нехай X - дискретна випадкова величина, задана рядом розподілу

X	-2	-1	0	2	4
P	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

Побудувати полігон та многокутник розподілу ймовірностей.

Розв'язування. На вісі X відкладаємо значення x_i , рівні -2, -1, 0, 2, 4, а по вертикальній вісі ймовірності цих значень



Точки A_1, A_2 , A_3, A_4 ,A_5 зображають полігон розподілу, а ломана $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ - многокутник розподілу ймовірностей.

Приклад 9.2. В акредитації приймають участь 4 комерційних вузи. Ймовірності пройти акредитацію і отримати сертифікат для цих вузів, відповідно рівні 0,5; 0,4; 0,3; 0,2. Скласти закон розподілу кількості комерційних вузів, які не пройшли акредитацію.

Розв'язування. В якості випадкової величини виступає кількість комерційних вузів, які не пройшли акредитацію. Можливі значення, які може приймати випадкова величина X : 0, 1, 2, 3, 4.

Для складання закону розподілу необхідно розрахувати відповідні ймовірності. Позначимо через подію A_1 - перший вуз пройшов акредитацію, A_2 - другий, A_3 - третій, A_4 - четвертий. Тоді $P(A_1)=0{,}5$; $P(A_2)=0{,}4$; $P(A_3)=0{,}3$; $P(A_4)=0{,}2$. Ймовірності для вузів не пройти акредитацію відповідно рівні

$$P(\overline{A_1})=1-0{,}5=0{,}5;\ P(\overline{A_2})=1-0{,}4=0{,}6;\ P(\overline{A_3})=1-0{,}3=0{,}7;$$

$$P(\overline{A_4})=1-0{,}2=0{,}8.$$

Тоді отримуємо

$$P(X=0)=P(A_1A_2A_3A_4)=0{,}012.$$

$$P(X=1)=P(\overline{A_1}A_2A_3A_4)+P(A_1\overline{A_2}A_3A_4)+$$
$$+P(A_1A_2\overline{A_3}A_4)+P(A_1A_2A_3\overline{A_4})=0{,}106.$$

$$P(X=2)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3A_4)+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}A_4)+P(\overline{A_1}A_2A_3\overline{A_4})+$$
$$+P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4)+P(A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4})+P(A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4})=0{,}320.$$

$$P(X=3)=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4})+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\overline{A_4})+$$
$$+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4)=0{,}394.$$

$$P(X=4)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4})=0{,}168.$$

Запишемо закон розподілу у вигляді таблиці

X	0	1	2	3	4
P	0,012	0,106	0,320	0,394	0,168

Перевірка: 0,012+0,106+0,32+0,394+0,168=1.

Приклад 9.3. Ймовірність того, що в бібліотеці необхідна студенту книга вільна, рівна 0,3. Скласти закон розподілу кількості бібліотек, які послідовно відвідає студент, щоб взяти необхідну книгу, якщо в місті три бібліотеки.

Розв'язування. В якості випадкової величини X виступає кількість бібліотек, котрі відвідає студент, щоб отримати необхідну книгу. Можливі значення, які може прийняти випадкова величина X : 1, 2, 3.

Введемо позначення подій: A_1 - книга вільна в першій бібліотеці, A_2 - в другій, A_3 - в третій. Тоді $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=0{,}3$. Ймовірність протилежної події $P(\overline{A_1})=P(\overline{A_2})=P(\overline{A_3})=1-0{,}3=0{,}7$.

Для складання закону розподілу знайдемо відповідні ймовірності:

$$P(X=1)=P(A_1)=0{,}3,$$

$$P(X=2)=P(\overline{A_1}A_2)=P(\overline{A_1})P(A_2)=0{,}7\cdot 0{,}3=0{,}21,$$

$$P(X=3)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3)+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})=$$
$$=0{,}7\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3+0{,}7\cdot 0{,}7\cdot 0{,}7=0{,}147+0{,}343=0{,}49.$$

Запишемо закон розподілу у вигляді таблиці

X	1	2	3
P	0,3	0,21	0,49

Перевірка: $0{,}3+0{,}21+0{,}49=1$.

Приклад 9.4. Із надійшовших в ремонт 10 годинників 7 потрібують загальної чистки механізму. Годинники не розсортовані по виду ремонту. Майстер, бажаючи знайти годинник, що потребує чистки, переглядає їх по черзі і, знайшовши такі, припиняє подальший огляд. Скласти закон розподілу кількості переглянутих годинників.

Розв'язування. В якості випадкової величини X виступає кількість переглянутих годинників. Можливі значення, які приймає випадкова величина X : 1, 2, 3, 4. Всі значення випадкової величини залежні.

Для складання закону розподілу обчислимо ймовірності того, що випадкова величина прийме значення кожне із своїх можливих значень. Для розрахунку ймовірностей будемо використовувати формулу класичної ймовірності і теорему множення для залежних подій.

Нехай подія A_1 - перший, взятий навмання, годинник, потребує чистки, A_2 - другий, A_3 - третій, A_4 - четвертий. Тоді маємо:

$$P(X=1)=P(A_1)=\frac{7}{10},$$

$$P(X=2)=P(\overline{A_1}A_2)=P(\overline{A_1})P(A_2)=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{7}{30},$$

$$(X=3)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{8}=\frac{7}{120},$$

$$P(X=4)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4)=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})P(A_4)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{7}{7}=\frac{1}{120}.$$

Запишемо закон розподілу у вигляді таблиці

X	1	2	3	4

P	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{7}{120}$	$\frac{1}{120}$

Перевіримо, що $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1: \frac{7}{10} + \frac{7}{30} + \frac{7}{120} + \frac{1}{120} = 1.$

Приклад 9.5. Відомо, що в даному місті 20% міських жителів дістаються на роботу особистим автомобілем. Випадково вибрано 4 людей. Скласти закон розподілу кількості людей, що дістаються на роботу особистим автомобілем. Записати функцію розподілу і побудувати її графік.

Розв'язування. В якості випадкової величини X виступає кількість людей у вибірці, котрі добираються на роботу особистим транспортом. Можливі значення, які може приймати випадкова величина X : 0, 1, 2, 3, 4.

Ймовірність того, що кожний із відібраних людей, які дістаються на роботу особистим авто, постійна і рівна $p = 0{,}2$. Ймовірність протилежної події, тобто того, що кожний із відібраних людей дістається на роботу не особистим авто, рівна $q = 1 - p = 0{,}8$. Всі чотири випробування незалежні. Для складання закону розподілу випадкової величини обчислимо ймовірності того, що випадкова величина прийме кожне із можливих значень за формулою Бернуллі:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

$$P(X = 0) = P_4(0) = C_4^0 \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^{4-0} = 0{,}4096,$$

$$P(X = 1) = P_4(1) = C_4^1 \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^{4-1} = 0{,}4096,$$

$$P(X = 2) = P_4(2) = C_4^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^{4-2} = 0{,}1536,$$

$$P(X = 3) = P_4(3) = C_4^3 \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^{4-3} = 0{,}0256,$$

$$P(X = 4) = P_4(4) = C_4^4 \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^{4-4} = 0{,}0016.$$

Запишемо закон розподілу у вигляді таблиці

X	0	1	2	3	4
P	0,4096	0,4096	0,1536	0,0256	0,0016

Перевірка: $0{,}4096 + 0{,}4096 + 0{,}1536 + 0{,}0256 + 0{,}0016 = 1.$

Знайдемо функцію розподілу випадкової величини X за означенням

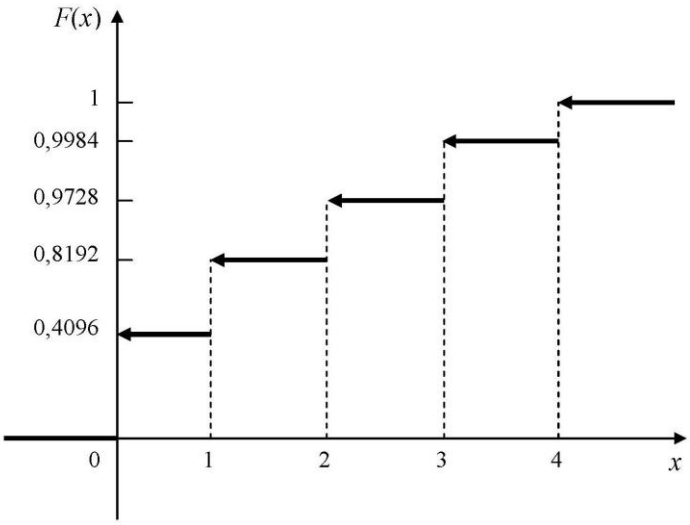
$$F(x) = P(X < x).$$

$$x \le 0, \quad F(x) = 0.$$

$$0 < x \le 1, \quad F(x) = 0{,}4096.$$

$$1 < x \le 2, \quad F(x) = 0{,}4096 + 0{,}4096 = 0{,}8192.$$

$$2 < x \le 3, \quad F(x) = 0{,}4096 + 0{,}4096 + 0{,}1536 = 0{,}9728.$$
$$3 < x \le 4, \quad F(x) = 0{,}4096 + 0{,}4096 + 0{,}1536 + 0{,}0256 = 0{,}9984.$$
$$x > 4 \quad F(x) = 1.$$
Запишемо функцію розподілу
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 0{,}4096, & 0 < x \le 1 \\ 0{,}8192, & 1 < x \le 2 \\ 0{,}9728, & 2 < x \le 3 \\ 0{,}9984, & 3 < x \le 4 \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$
Графік функції розподілу ймовірностей має ступінчатий вигляд. Скачки рівні ймовірностям, з якими випадкова величина приймає можливі значення.



Приклад 9.6. Клієнти банку, не пов'язані один з одним, не повертають кредити в строк з ймовірністю 0,1. Скласти закон розподілу кількості повернених в строк кредитів із 5 виданих.

Розв'язування. В якості випадкової величини X виступає кількість кредитів, повернених клієнтами в строк. Можливі значення, які може прийняти випадкова величина X : 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Ймовірність того, що кожний клієнт поверне кредит в строк, постійна і рівна $p = 0{,}9$. Ймовірність того, що кредит не буде повернений в строк, рівна $q = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$. Всі 5 випробувань незалежні. Випадкова величина підкоряється біноміальному закону розподілу з параметрами $n = 5$; $p = 0{,}9$; $q = 0{,}1$; $X = k$, $k = \overline{0{,}5}$ Для складання закону розподілу обчислимо ймовірності того, що випадкова величина прийме кожне із своїх можливих значень. за формулою Бернуллі

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

$$P(X=0)=P_5(0)=C_5^0\cdot 0{,}9^0\cdot 0{,}1^{5-0}=0{,}00001,$$

$$P(X=1)=P_5(1)=C_5^1\cdot 0{,}9^1\cdot 0{,}1^{5-1}=0{,}00045,$$

$$P(X=2)=P_5(2)=C_5^2\cdot 0{,}9^2\cdot 0{,}1^{5-2}=0{,}10081,$$

$$P(X=3)=P_5(3)=C_5^3\cdot 0{,}9^3\cdot 0{,}1^{5-3}=0{,}0729,$$

$$P(X=4)=P_5(4)=C_5^4\cdot 0{,}9^4\cdot 0{,}1^{5-4}=0{,}32805,$$

$$P(X=5)=P_5(5)=C_5^5\cdot 0{,}9^5\cdot 0{,}1^{5-5}=0{,}59049.$$

Запишемо закон розподілу у вигляді таблиці

X	0	1	2	3	4	5
P	0,00001	0,00045	0,0081	0,0729	0,32805	0,59049

Приклад 9.7. Із 10 телевізорів на виставці виявилось 4 телевізори фірми «Соні». Навмання для огляду вибрано 3 телевізори. Скласти закон розподілу кількості телевізорів фірми «Соні» серед 3 вибраних.

Розв'язування. В якості випадкової величини X виступає кількість телевізорів «Соні». Можливі значення, які може прийняти випадкова величина X : 0, 1, 2,3. Для складання закону розподілу обчислимо ймовірності того, що випадкова величина прийме кожне із можливих значень. Ці ймовірності можна розрахувати за формулою класичної ймовірності:

$$P(X=0)=\frac{C_4^0C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6},\ P(X=1)=\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{2},$$

$$P(X=2)=\frac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}=\frac{3}{10},\ \ P(X=3)=\frac{C_4^3C_6^0}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}.$$

Запишемо закон розподілу

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

Приклад 9.8. Завод от правил на базу 500 якісних деталей. Ймовірність пошкодження кожного виробу у дорозі рівна 0,002. Знайти закон розподілу випадкової величини X, рівні кількості пошкоджених виробів, знайдіть ймовірності наступних подій:

A - пошкоджено менше 3 виробів;

B - пошкоджено більше 2 виробів;

C - пошкоджено хоча б один виріб.

Розв'язування. Можливі значення X : 0, 1, 2, …, 500; оскільки $n = 500$ велике, а $p = 0{,}002$ мале, то, взявши $\lambda = 500 \cdot 0{,}002 = 1$, обчислимо ймовірності

$$p_k = P(X = k)$$

наближено за формулою Пуассона:

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{1}{k!e}, \quad k = \overline{0{,}500}.$$

Закон розподілу випадкової величини X набуде вигляду

x_k	0	1	2	3	…		500
p_k	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{2e}$	$\frac{1}{6e}$	…		$\frac{1}{500!e}$

або

x_k	0	1	2	3	…		500
p_k	0,368	0,368	0,184	0,061	…		0,000

Використовуючи отриману таблицю, знаходимо ймовірності подій A, B і C:

$$P(A) = P(X < 3) = P(\{0{,}1{,}2\}) = 0{,}368 + 0{,}368 + 0{,}184 = 0{,}92;$$

$$P(B) = P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - P(\{0{,}1{,}2\}) = 0{,}08;$$

$$P(C) = P(X \ge 1) = 1 - P(X \le 0) = 1 - P(\{0\}) = 0{,}368 = 0{,}632.$$

Задачі для розв'язування

220. Серед 10 виготовлених приборів 3 неточних. Скласти закон розподілу кількості неточних приборів серед взятих навмання 4 приборів. Скласти функцію розподілу випадкової величини та побудувати її графік.

221. В магазині продаються 5 вітчизняних та 3 імпортних телевізори. Скласти закон розподілу випадкової величини – кількості імпортних із 4 навмання взятих телевізорів. Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

222. В білеті три задачі. Ймовірність правильного рішення першої задачі рівна 0,9, другої – 0,8, третьої – 0,7. Скласти закон розподілу кількості правильно розв'язаних задач в .

223. Абітурієнт для вступу у вуз повинен скласти 3 іспити. Ймовірність скласти перший іспит рівна 0,9, другий – 0,8, третій – 0,7. Наступний екзамен абітурієнт складає лише у випадку успішної здачі попереднього. Скласти закон розподілу кількості приходів на екзамен для особи, яка поступає в університет.

224. У місті 4 комерційних банка. У кожного ризик банкрутства протягом року складає 10%. Скласти закон розподілу кількості банків, які можуть збанкрутувати протягом наступного року.

225. Ймовірність зараження полуниці вірусним захворюванням рівна 0,2. Скласти закон розподілу кількості кущів полуниці, заражених вірусом, із чотирьох посаджених кущів.

226. Дискретна випадкова величина X - кількість хлопчиків в сім'ях з 5 дітьми. Припускаючи ймовірності народження хлопчика й дівчинки рівними, знайти закон розподілу X, побудувати многокутник розподілу. Знайти ймовірності подій: A - в сім'ї не менше 2, але не більше 3 хлопчиків; B - не більше 3 хлопчиків; C - більше одного хлопчика. Знайти функцію розподілу X і, використовуючи її, знайти ймовірності наступних подій: а) $X \geq 2$; б) $2 \leq X \leq 3$; в) $X < 3$. Побудувати графік функції розподілу.

227. З ймовірністю попадання при одному пострілі 0,7, охотник стріляє по дичині до першого попадання, але встигає зробити не більше 4 пострілів. Дискретна випадкова величина X - кількість промахів. Знайти закон розподілу X. Побудувати многокутник розподілу. Знайти ймовірності подій: $X < 2$; $X \leq 3$; $1 < X \leq 3$.

228. 2 стрілка роблять по одному пострілу в одну мішень. Ймовірність попадання для першого стрілка рівна при одному пострілі – 0,5, для другого – 0,4. Дискретна випадкова величина X - кількість попадань в мішень. Знайти закон розподілу X, побудувати многокутник розподілу. Знайти ймовірність події $X \geq 1$. Знайти функцію розподілу та по будувати її графік.

229. В коробці знаходиться 7 олівців, із яких 4 червоних. Із цієї коробки навмання дістають 3 олівця. Знайти закон розподілу випадкової величини X, рівній кількості червоних олівців у вибірці. Побудувати многокутник розподілу. Знайти числові характеристики випадкової величини.

230. Є 5 ключів, із яких тільки один підходить до замка. Знайти закон розподілу випадкової величини X, рівній кількості спроб при відкриванні замка, якщо випробуваний ключ в подальших перевірках не приймає участі.

231. В партії з 10 деталей є 8 стандартних. Із цієї партії навмання взято 2 деталі. Знайти закон розподілу випадкової величини, рівній кількості стандартних деталей у вибірці.

232. Двічі підкинуто гральну кість. Випадкова величина X рівна різниці між кількістю очок при першому і кількістю очок при другому підкиданні. Знайти закон розподілу X і ймовірність події $2 \leq X \leq 4$.

233. Підкидається гральна кість до першої появи шістки. Випадкова величина X рівна кількості підкидань кості. Знайти закон розподілу випадкової величини X і ймовірність події $X \leq 5$.

234. Проводиться 10 незалежних випробувань Бернуллі, причому ймовірність успіху в кожному випробуванні рівна p $(0 < p < 1)$. Випадкова величина X - кількість успіхів в 10 випробуваннях. Скласти закон розподілу X (біноміальний закон).

235. Монета підкидається n раз. Випадкова величина X - кількість випадінь герба. Знайти закон розподілу X; показати, що сума всіх ймовірностей в таблиці розподілу рівна 1.

236. Проводиться n незалежних випробувань Бернуллі, в кожному із яких успіх можливий з ймовірністю p. Знайти закон розподілу випадкової величини X, рівній кількості невдач в n випробуваннях.

237. Знайти закон розподілу випадкової величини X, рівній частоті появи успіху в серії n незалежних випробувань Бернуллі, якщо ймовірність появи успіху в кожному випробуванні рівна p.

2 стрілка стріляють кожний по своїй мішені, роблячи незалежно один від одного по одному пострілу. Ймовірність попадання в мішень для першого стрілка рівна p_1, для другого - p_2. Нехай випадкова величина рівна різниці між кількістю попадань в мішень першим стрілком і кількістю попадань в мішень другим стрілком. Знайти закон розподілу X.

238. 2 стрілка стріляють по одній мішені, роблячи незалежно один від одного по 2 постріли. Ймовірність попадання в мішень для першого стрілка рівна 0,5, для другого – 0,6. Знайти закон розподілу випадкової величини X, рівній загальній кількості попадань і в мішень.

239. Робітник обслуговує 4 незалежно працюючих станка. Ймовірність того, що протягом часу станок не потребує уваги робітника, рівна для першого станка 0,7, для другого – 0,75, для третього 0,8, для четвертого – 0,9. Знайти закон розподілу випадкової величини X, рівній кількості станків, які не потребують уваги робітника.

240. Монету підкидають 6 разів. Знайти закон розподілу випадкової величини X, рівній відношенню кількості появи герба до кількості появи цифри.

На дорозі руху автомобіля 6 світлофорів, кожний із них або дозволяє, або забороняє подальший рух з ймовірністю 0,5. Знайти закон розподілу випадкової величини X, рівній кількості світлофорів, які проїхав автомобіль до першої зупинки.

241. Ймовірність виготовлення нестандартної деталі 0,1. Із партії контролер бере деталь і перевіряє її на стандартність. Якщо деталь виявляється нестандартною, то подальші випробування припиняються, а партія вся затримується. Якщо ж деталь виявиться стандартною, то контролер бере наступну і т.д., але всього він перевіряє не більше 5 деталей. Знайти закон розподілу випадкової величини X, рівній кількості перевірених стандартних деталей.

242. В ящику лежить n виробів, із яких один бракована. Із ящика дістають вироби один за одним до тих пір, поки не дістануть бракований виріб. Знайти закон розподілу випадкової величини X, рівній кількості виробів, які дістали.

243. Ймовірність попадання в мішень стрілком при кожному пострілі рівна p. Маючи в запасі n патронів $(n \geq 1)$, він веде стрільбу до першого попадання в мішень або до використання всіх патронів. Знайти закон розподілу випадкової величини X, рівній кількості використаних патронів.

244. Автоматизована електрична станція обслуговує 1000 телефонних точок. Ймовірність того, що протягом 5 хвилин на АТС надійде виклик із телефонної точки, рівна 0,005. Знайти закон розподілу випадкової величини X, рівній кількості викликів, о надійшли на АТС протягом 5 хвилин. Чому рівна ймовірність того, що протягом 5 хвилин на АТС надійшов хоча б один виклик; більше 4 викликів.

245. Ймовірність виготовлення стандартної деталі рівна 0,98. Для контролю взято 100 деталей. Знайти закон розподілу випадкової величини X, рівній кількості

нестандартних деталей у вибірці. Знайти ймовірності наступних подій: A - у вибірці менше 2 нестандартних деталей; B - більше 2 нестандартних деталей.

246. В умові попередньої задачі знайти ймовірність того, що серед 100 навмання взятих деталей виявиться одна нестандартна . Підрахунок цієї ймовірності провести: а) за формулою Бернуллі з використаннях логарифмічних таблиць; б) за наближеною формулою Пуассона; в) за наближеною формулою Лапласа. Порівняти отримані результати.

247. Ймовірність попаданні в літак при кожному пострілі із гвинтівки рівна 0,001. Проводиться 3000 пострілів. Знайти закон розподілу випадкової величини X, рівній кількості попадань в літак, і ймовірність того, що відбудеться хоча б одне попадання.

248. Задана функція розподілу дискретної випадкової величини X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 2, \\ 0,3, & 2<x\le 3, \\ 0,5, & 3<x\le 4, \\ 1, & x>4. \end{cases}$$

а) Знайти ймовірність події $1\le X\le 3$.

б) Знайти таблицю розподілу випадкової величини X.

249. Задана функція розподілу дискретної випадкової величини X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1, \\ 0,25, & 1<x\le 3, \\ 0,4, & 3<x\le 4, \\ 0,8, & 4<x\le 5, \\ 1, & x>5. \end{cases}$$

а) Знайти ймовірність події: $X=2,\ 2<X\le 4$.

б) Знайти таблицю розподілу даної випадкової величини

250. Дискретна випадкова величина X задана таблицею розподілу:

251.

x_k	-2	-1	0	1	2
p_k	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1

Знайти функцію розподілу $F(x)$ і, використовуючи її, знайти ймовірності події: а) $-2\le X<1$; б) $|X|\le 2$. Побудуйте графік функції розподілу.

252. Дискретна випадкова величина X задана таблицею розподілу:

253.

x_k	0	1	2	3	4
p_k	0,05	0,2	0,3	0,35	0,1

Знайти функцію розподілу $F(x)$ і, використовуючи її, знайти ймовірності події: а) $X<2$; б) $1\le X<4$; в) $1\le X\le 4$; г) $1<X\le 4$; д) $X=2{,}5$.

§ 10. Числові характеристики дискретної випадкової величини

В якості основних числових характеристик випадкових величин розглядаються моменти і квантилі. Початковим моментом v_k порядку k дискретної випадкової величини X називається вираз

$$v_k = \sum_i x_i^k p_i \,,$$

де підсумовування проводиться по всіх значеннях випадкової величини.

Початковий момент першого порядку називають математичним сподіванням випадкової величини, і він характеризує середнє значення. Математичне сподівання ДВВ X з законом розподілу

x_i	x_1	x_2	$\ldots$
p_i	p_1	p_2	$\ldots$

називається число

$$M\left[X\right] = \sum_i x_i p_i$$

при умові абсолютної збіжності ряду.

Властивості математичного сподівання:

1. $M\left[c\right] = c,\ c - const.$
2. $M\left[cX\right] = cM\left[X\right],\ c - const.$
3. $M\left[X_1 + X_2 + \ldots + X_n\right] = M\left[X_1\right] + M\left[X_2\right] + \ldots + M\left[X_n\right].$
4. $M\left[X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n\right] = M\left[X_1\right] \cdot M\left[X_2\right] \cdot \ldots \cdot M\left[X_n\right]$ для незалежних X_1, X_2, … , X_n.

Центральним моментом μ_k порядку k дискретної випадкової величини X називають вираз

$$\mu_k = \sum_i \left(x_i - M\left[X\right]\right)^k p_i$$

Дисперсія (центральний момент другого порядку) випадкової величини характеризує її розкид відносно середнього значення і виражається через початкові моменти 1-го і другого порядків:

$$D\left[X\right] = M\left[\left(X - M\left[X\right]\right)^2\right] = v_2 - \left(M\left[X\right]\right)^2 = M\left[X^2\right] - \left(M\left[X\right]\right)^2$$

Дисперсією називається число

$$D\left[X\right] = \sum_i x_i^2 p_i - \left(M\left[X\right]\right)^2$$

Корінь квадратний із дисперсії називається середнім квадратичним відхиленням випадкової величини:

$$\sigma\left(X\right) = \sqrt{D\left[X\right]}$$

Властивості дисперсії випадкової величини:

1. $D[X] \geq 0.$
2. $D[c] = 0,\ c - const.$
3. $D[cX] = c^2 \cdot D[X],\ c - const.$
3. $D[X_1 \pm X_2 \pm ... \pm X_n] = D[X_1] + D[X_2] + ... + D[X_n]$ для незалежних $X_1,\ X_2,\ \ldots$, X_n.
4. $M[X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n] = M[X_1] \cdot M[X_2] \cdot ... \cdot M[X_n]$ для незалежних $X_1,\ X_2,\ \ldots$, X_n.

Центральний момент третього порядку характеризує степінь несиметричності розподілу випадкової величини відносно її середнього значення. Величина

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

називається коефіцієнтом асиметрії і для дискретної випадкової величини обчислюється за формулою $A = \dfrac{\sum_i \left(x_i - M[X]\right)^3 p_i}{\sigma^3}$.

Квантилем x_p порядку p називається величина, яка визначається рівністю

$$F\left(x_p\right) = p,$$

де $F(x)$ - функція розподілу.

Модой ДВВ X називається її значення, яке вона приймає з найбільшою ймовірністю у порівняні з сусідніми значеннями, позначається $M_0(X)$.

Знаходити важливі числові характеристики ДВВ з цілими невід'ємними значеннями зручно з допомогою твірної функції. Твірною функцією ДВВ X, яка приймає значення $0,\ 1,\ ...,\ k,\ ...$ з ймовірностями $p_0,\ p_1,\ ...,\ p_k = P(X = k),\ ...$ називається наступна функція

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot t^k = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + ...,$$

де $t-$ довільний параметр, $0 < t \leq 1.$ Коефіцієнти степеневого ряду є ймовірностями закону розподілу ДВВ X.

Диференціюючи по t твірну функцію, отримаємо

$$\phi'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k \cdot t^{k-1}.$$

Тоді

$$\phi'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = MX = \nu_1,$$

тобто

$$\nu_1 = M[X] = \phi'(1).$$

Знайшовши другу похудну функції $\phi(t)$ в точці $t=1$, отримаємо

$$\phi''(t)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot(k-1)\cdot p_k\cdot t^{k-2},$$

$$\phi''(1)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\cdot p_k-\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot p_k=\alpha_2-\alpha_1,$$

де ν_1 і ν_2 - початкові моменти відповідно 2-го і 1-го порядків. Тоді

$$D[X]=M\left[X^2\right]-\left(M[X]\right)^2=\nu_2-\nu_1^2=(\nu_2-\nu_1)+\nu_1-\nu_1^2=$$
$$=\phi''(1)+\phi'(1)-\left(\phi'(1)\right)^2,$$

тобто

$$D[X]=\phi''(1)+\phi'(1)-\left(\phi'(1)\right)^2.$$

Приклад 10.1. Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу

x_i	-1	0	1	2
p_i	0,2	0,1	0,3	0,4

Знайти $M[X]$, $D[X]$ і $\sigma[X]$.

Розв’язування. Використовуючи відповідні формули, отримаємо

$$M[X]=-1\cdot 0,2+0\cdot 0,1+1\cdot 0,3+2\cdot 0,4=0,9;$$

$$D[X]=(-1-0,9)^2\cdot 0,2+(0-0,9)^2\cdot 0,1+(1-0,9)^2\cdot 0,3+(2-0,9)^2\cdot 0,4=1,29,$$

або

$$D[X]=(-1)^2\cdot 0,2+0^2\cdot 0,1+1^2\cdot 0,3+2^2\cdot 0,4-(0,9)^2=1,29;$$

$$\sigma[X]=\sqrt{1,29}\approx 1,14$$

Приклад 10.2. Дискретна випадкова величина X приймає тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1>x_2$. Ймовірність того, що X прийме значення x_1, рівна 0,6. Знайти закон розподілу величини X, якщо математичне сподівання $M[X]=1,4$; $D[X]=0,24$.

Розв’язування. Сума ймовірностей всіх можливих значень випадкової величини рівна одиниці, тому ймовірність того, що X прийме значення x_2, рівна $1-0,6-0,4$. Запишемо закон розподілу X

X	x_1	x_2
P	0,6	0,4

Для того, щоб знайти x_1 і x_2 необхідно скласти два рівняння. Із умови задачі випливає, що

$$M[X]=0,6x_1+0,4x_2=1,4,$$

$$D[X]=0,6x_1^2+0,4x_2^1-1,4^2=0,24.$$

Складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 0,6x_1 + 0,4x_2 = 1,4, \\ 0,6x_1^2 + 0,4x_2^2 = 2,2. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, маємо $x_1 = 1,\ x_2 = 2$ і $x_1 = 1,8,\ x_2 = 0,8.$

За умовою $x_2 > x_1$, тому задачу задовольняє лише перше рішення, тобто $x_1 = 1;\ x_2 = 2$. Тоді закон розподілу має вигляд

X	1	2
P	0,6	0,4

Приклад 10.3. Дискретна випадкова величина X розподілена за біноміальним законом, тобто приймає значення $0, 1, 2,..., n$ з ймовірностями $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},\ k = \overline{0,n},\ q = 1 - p$. Знайти числові характеристики $M[X]$, $D[X]$.

Розв'язування. Твірною функцією біноміального розподілу є

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} t^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (pt)^k q^{n-k} = (q + pt)^n.$$

Тоді

$$\phi'(t) = n(q + pt)^{n-1}, \quad \phi''(t) = n(n-1)p^2(q + pt)^{n-1}.$$

Отже, $M[X] = \phi'(1) = np,$ оскільки $p + q = 1,$

$$D[X] = \phi''(1) + \phi'(1) - (\phi'(1))^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = npq.$$

Таким чином

$$M[X] = np, \quad D[X] = npq.$$

Приклад 10.4. Дискретна випадкова величина X розподілена за законом Пуассона з параметром λ. Знайти числові характеристики $M[X],\ D[X]$.

Розв'язування. Дискретна випадкова величина X розподілена за законом Пуассона, якщо її можливі значення $0, 1, 2,..., n, ...$ (злічена множина значень), а відповідні їм ймовірності знаходяться за формулою Пуассона $p_k = P(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ \lambda -$ параметр, $k = 0,\ 1,\ ...$

Твірною функцією біноміального розподілу є

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} t^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{at} = e^{\lambda(t-1)},$$

тобто $\phi(t) = e^{\lambda(t-1)}$. Тоді $\phi'(t) = \lambda \cdot e^{\lambda(t-1)}$, $\phi''(t) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda(t-1)}$. Отже, $M[X] = \phi'(1) = \lambda,\quad D[X] = \phi''(1) + \phi'(1) - (\phi'(1))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$ Таким чином $M[X] = D[X] = \lambda.$

Задачі для розв'язування

1. Випадкові величини $X_1,\ X_2,\ ...,X_n$ незалежні, мають одне і те ж математичне сподівання m і одні і ту же дисперсію σ^2. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення величини $X=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$.

2. Ймовірність появи події A у даному випробуванні дорівнює p. Величина X - кількість появи події A у цьому випробуванні. Знайти $M\left[X\right],\ D\left[X\right]$ і $\sigma\left[X\right]$.

3. Випадкова величина X має біноміальний розподіл $P\left(X=k\right)=C_n^k p^k q^{n-k},\ k=\overline{0,n};\ 0<p<1,\ q=1-p$. Знайти $M\left[X\right]$ і $D\left[X\right]$ двома способами: а) безпосереднім підрахунком; б) використовуючи попередню задачу і властивості математичного сподівання та дисперсії.

4. Проведено n незалежних підкидань монети $\left(n\geq 1\right)$. Випадкова величина X - кількість випадань герба при цих n підкиданнях. Знайти $M\left[X\right]$, $D\left[X\right]$ і $\sigma\left[X\right]$.

5. Ймовірність попадання в мішень при одному пострілі для даного стрілка дорівнює $p=0{,}8$. X - кількість попадань в мішень у 100 незалежних пострілах. Знайти $M\left[X\right],\ D\left[X\right]$ і $\sigma\left[X\right]$.

6. Два стрілка незалежно один від одного зробили по одному пострілу в одну і ту ж мішень. Ймовірність попадання для першого стрілка дорівнює p_1, а для другого - p_2. Знайти $M\left[X\right],\ D\left[X\right]$ і $\sigma\left[X\right]$, якщо X - загальна кількість попадань в мішень.

7. 2 стрілка незалежно один від одного зробили по n пострілів у мішень. Ймовірність попадання при кожному пострілі для першого стрілка дорівнює p_1, а для другого - p_2. Знайти числові характеристики $M\left[X\right],\ D\left[X\right]$ і $\sigma\left[X\right]$ випадкової величини X, рівній загальній кількості попадань в мішень.

8. Проводиться послідовність незалежних випробувань, у кожному із яких подія A настає з ймовірністю p. Випробування проводяться до першої появи події A, а потім припиняються. Нехай X - кількість проведених випробувань. Знайти числові характеристики величини X.

9. Стрілок, маючи n патронів в запасі, починає стрільбу по цілі, ймовірність попадання в яку при кожному пострілі дорівнює p. Стрільба припиняється після першого попадання в ціль або після витрачення всіх патронів. Знайти числові характеристики кількості витрачених патронів.

10. Із урни, яка містить m білих і $m-n$ чорних куль, за схемою вибору без повернень виймається вибірка об'єму k. Нехай X - кількість білих куль у вибірці. Знайти $M\left[X\right]$ і $D\left[X\right]$.

11. Є 5 ключів, із яких тільки один підходить до замка. Знайти числові характеристики випадкової величини, яка дорівнює кількості спроб при відкри-

ванні замка, якщо: а) випробуваний ключ у наступних випробуваннях не приймає участі; б) випробуваний ключ приймає участь у наступних випробуваннях.

В ящику лежить n виробів, із яких один бракований. Із ящика виймаються вироби один за другим до тих пір, доки не буде вийнятий бракований виріб. Знайти середнє значення кількості вийнятих виробів.

12. Ймовірність виготовлення стандартної деталі дорівнює $p = 0,98$. Для контролю навмання взято 100 деталей. Нехай X - кількість нестандартних деталей у вибірці. Знайти числові характеристики випадкової величини X.

13. Дано всі можливі значення дискретної випадкової величини X: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,$ а також відомі $M\left[X\right] = 2,3$, $M\left[X^2\right] = 5,9.$ Знайти закон розподілу величини X.

14. Знайти математичне сподівання і дисперсію дискретної величини X, розподіленої за законом Пуассона з параметром λ.

15. Математичне сподівання кількості відмов радіоапаратури за 10000 год. роботи дорівнює 10. Знайти ймовірність відмови радіоапаратури за 100 год.

16. Протягом години акумулятор отримує в середньому 60 викликів. Яка ймовірність того, що за час 30с., протягом яких телефоністка відлучилась, не буде не одного виклику?

17. За проміжок часу, який розглядається, середня кількість помилкових з'єднань, що припадають на одного телефонного абонента, дорівнює 8. Яка ймовірність того, що для даного абонента кількість помилкових з'єднань буде рівна 4?

18. Яка ймовірність того, що серед 200 виробів виявиться більше трьох бракованих, якщо в середньому браковані вироби становлять 1%?

19. Радіоапаратура складається із 1000 елементів. Ймовірність відмови кожного елемента протягом одного року роботи дорівнює 0,001 і не залежить від стану інших елементів. Знайти середнє значення кількості елементів, які відмовлять протягом року. Яка ймовірність того, що протягом року відмовлять: а) 2 елементи; б) не менше 2 елементів? Знайти середню кількість елементів, які відмовлять протягом 2 років.

20. В лотереї є m_1 виграшів вартістю k_1, m_2 виграшів вартістю k_2 і т.д., m_n виграшів вартістю k_n. Всього білетів N. Яку вартість білету потрібно встановити, щоб математичне сподівання виграшу на один білет дорівнювало половині його вартості?

21. Із урни, яка містить m білих і n чорних куль, виймаються кулі до тих пір, поки не з'явиться біла куля. Знайти математичне сподівання кількості вийнятих куль і його дисперсію, якщо кожна куля після виймання повертається в урну.

22. Із ящика, який містить 2 білі і 4 чорні кулі, виймають 3 кулі і перекладають в другий ящик, в якому було 5 білих куль. Потім із другого ящика 4 кулі перекладають у перший. Знайти математичне сподівання кількості білих куль, які опинились у кожному ящику.

23. Дискретна випадкова величина X приймає тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 > x_2$. Ймовірність того, що X прийме значення x_1, дорівнює 0,1. Знайти закон розподілу величини X, якщо математичне сподівання $M(X)=3{,}9;\ D(X)=0{,}09.$

§ 11. Система дискретних випадкових величини

Закон та функція розподілу системи двох ДВВ.

Упорядкований набір $(X_1,...,X_n)$ випадкових величин X_i, $\left(i=\overline{1,n}\right)$, заданих на одному і тому ж просторі елементарних подій Ω називається n- вимірною випадковою величиною або системою n випадкових величин.

Приклад 11.1. Широта X і довгота Y падіння метеорита на Землю являють собою двовимірний випадковий вектор (X,Y). У цю модель можна ввести також третю координату Z- час від початку спостережень до моменту падіння першого метеорита на Землю. Тоді вийде тривимірний випадковий вектор (X,Y,Z).

Приклад 11.2. Успішність студента, що закінчив курс навчання у вузі, характеризується системою n випадкових величин $(X_1,...,X_n)$ - оцінками, проставленими в його дипломі.

У подальшому викладі обмежимося випадком двох випадкових величин $X_1 = X,\ \ X_2 = Y$. Упорядкована пара (X,Y) двох випадкових величин X і Y називається двовимірною випадковою величиною або системою двох випадкових величин X і Y.

Повною характеристикою системи (X,Y) є її закон розподілу ймовірностей, який вказує область можливих значень системи випадкових величин і ймовірності цих значень. Закон розподілу системи може мати різні форми: формули, таблиці, функції розподілу тощо.

Закон розподілу дискретної випадкової величини (X,Y) можна задати формулою

$$p_{ij} = P\left(X = x_i, Y = y_j\right),\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m},$$

або у формі таблиці з подвійним входом:

Y X	y_1	y_2	$\dots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2m}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\dots$	p_{nm}

Причому, сума всіх ймовірностей p_{ij}, як сума ймовірностей повної групи несумісних подій $\left(X = x_i, Y = y_j\right)$, дорівнює 1:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1.$$

Знаючи закон розподілу системи двох випадкових величин, можна знайти закон розподілу кожної із компонент (протилежне, взагалі кажучи, невірно). Так, $p_{x_1} = P(X = x_1) = p_{11} + p_{12} + ... + p_{1m}$, що випливає із теореми суми несумісних подій $(X = x_1, Y = y_1)$, $(X = x_1, Y = y_2), \ldots,$ $(X = x_1, Y = y_m)$. Аналогічно можна знайти

$$p_{x_i} = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij},$$

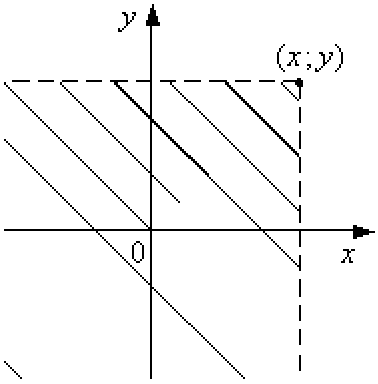
$$p_{y_j} = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}.$$

Функцією розподілу системи двох випадкових величин (X,Y) називається функція $F_{X,Y}(x,y)$, яка для будь-яких дійсних чисел x і y дорівнює ймовірності сумісного виконання двох подій $(X < x)$ і $(Y < y)$

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X < x, Y < y)$$

(подія $P(X < x, Y < y)$ означає добуток подій $(X < x)$ і $(Y < y)$).

Геометрична інтерпретація $F_{X,Y}(x,y)$ - це ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) у нескінчений квадрат з вершиною Объединить несколько файлов Word в один (на мал. 11.1 цей квадрат заштриховано).



мал. 11.1

Функція розподілу системи двох дискретних випадкових величин (X,Y) знаходиться підсумовуванням всіх ймовірностей p_{ij}, для яких $x_i < x$, $y_j < y$, тобто

$$F_{X,Y}(x,y) = \sum_{x_i < x}\sum_{y_j < y} p_{ij}.$$

Властивості функції розподілу системи двох випадкових величин:

1. $0 \le F_{X,Y}(x,y) \le 1$.
2. $F_{X,Y}(x,y)$ по кожному аргументу не убуває і неперервна зліва.
3. $F_{X,Y}(-\infty, y) = F_{X,Y}(x, -\infty) = F_{X,Y}(-\infty, -\infty) = 0$.
4. $F_{X,Y}(+\infty, +\infty) = 1$.

5. а) При $y=+\infty$ двовимірна функція розподілу $F_{X,Y}(x,y)$ стає функцією розподілу компоненти X : $F_{X,Y}(x,+\infty)=F_X(x)$.
б) При $x=+\infty$ двовимірна функція розподілу $F_{X,Y}(x,y)$ стає функцією розподілу компоненти Y: $F_{X,Y}(+\infty,y)=F_Y(y)$.

Приклад 11.3. Закон розподілу двовимірного дискретного випадкового вектору (X,Y) заданий таблицею:

$Y \backslash X$	–1	1
0	0,1	0,06
1	0,3	0,18
2	0,2	0,16

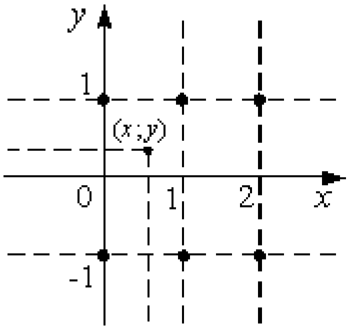
Знайти: одномірні закони розподілу компонент X та Y; ймовірність $P(X \geq Y)$. Скласти функцію розподілу $F_{X,Y}(x,y)$.

Розв'язування. 1) Одномірні закони p_{x_i} і p_{y_j} розподілу компонент X та Y відповідно побудовані в таблиці:

$Y \backslash X$	–1	1	p_{x_i}
0	0,1	0,06	0,16
1	0,3	0,18	0,48
2	0,2	0,16	0,36
p_{y_j}	0,6	0,4	1

2) $P(X \geq Y)=1-P(X<Y)=1-P(X=0,Y=1)=1-0{,}06=0{,}94.$

Згідно з означенням функції розподілу $F_{X,Y}(x,y)=P(X<x,Y<y)$. Нагадаємо, що геометричне значення $F_{X,Y}(x,y)$ - це ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) у нескінченний квадрант з вершиною (x,y). Для вершини цього квадрата, згідно з умовою задачі, є дванадцять областей, утворених трьома вертикальними прямими $x=0$, $x=1$, $x=2$ і двома горизонтальними прямими $y=-1$, $y=1$.



мал. 11.2

На мал. 11.2 показаний випадок, коли вершина (x,y) знаходиться всередині прямокутника $0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1$. При цьому всередині квадранта знаходиться тільки одна точка з координатами $(0,-1)$, в якій є ненульова ймовірність, рівна 0,1.

Функцію розподілу $F_{X,Y}(x,y)$ зручно задавати у вигляді таблиці (її значення для випадку, коли вершина (x,y) квадранта знаходиться всередині прямокутника $0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1$, виділено жирним шрифтом):

y x	$y \le -1$	$-1 < y \le 1$	$y > 1$
$x \le 0$	0	0	0
$0 < x \le 1$	0	0,1	0,16
$1 < x \le 2$	0	0,4	0,64
$x > 2$	0	0,6	1

Приклад 11.4. Відома функція розподілу объединить несколько документов Word в один двовимірного дискретного випадкового вектору (X,Y):

y x	$y \le 1$	$1 < y \le 2$	$2 < y \le 3$	$y > 3$
$x \le 0$	0	0	0	0
$0 < x \le 1$	0	0,5	0,5	0,5
$1 < x \le 2$	0	0,5	0,75	0,75
$2 < x \le 3$	0	0,5	0,75	0,875
$x > 3$	0	0,5	0,75	1

Скласти функції розподілу $F_X(x)$ і $F_Y(y)$ компонент X і объединить несколько документов Word в один, а потім побудувати їх закони розподілу.

Розв'язування. Враховуючи, що $F_{X,Y}(+\infty,Y) = F_Y(y)$, $F_{X,Y}(x,+\infty) = F_X(x)$, отримаємо («проходячи» відповідно за останнім стовбцем і останнім рядком таблиці):

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 0{,}5, & 0<x\le 1,\\ 0{,}75, & 1<x\le 2,\\ 0{,}875, & 2<x\le 3,\\ 1, & x>3;\end{cases}\quad F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 1,\\ 0{,}5, & 1<y\le 2,\\ 0{,}75, & 2<y\le 3,\\ 1, & y>3.\end{cases}$$

Значить, для випадкової величини X функція розподілу має «стрибки» в точках $x=0;\ 1;\ 2;\ 3$, для випадкової величини Y - в точках $y=1;\ 2;\ 3$. Тому закони розподілу компонент виглядають наступним чином:

X	0	1	2	3
p_{x_i}	0,5	0,25	0,125	0,125

Y	1	2	3
p_{y_j}	0,5	0,25	0,25

Залежність і незалежність двох ДВВ.

Вище було показано, як, знаючи закон розподілу системи випадкових величин (X,Y), знайти закони розподілу окремих компонент X і Y. Знаючи закони розподілу окремих випадкових величин X і Y, що входять в систему, знайти закон розподілу всієї системи в загальному випадку не можна. Це можна зробити тільки в одному окремому випадку, коли випадкові величини X і Y, що утворюють систему, незалежні

Приклад 11.5. Закони розподілів ДВВ X і Y задані за допомогою таблиць:

x_i	-1	1
p_i	0,5	0,5

y_j	-1	1
p_j	0,5	0,5

Побудуємо наступні дві таблиці:

Y \ X	-1	1	p_{x_i}
-1	0,5	0	0,5
1	0	0,5	0,5
p_{y_j}	0,5	0,5	1

Y \ X	-1	1	p_{x_i}
-1	0,25	0,25	0,5
1	0,25	0,25	0,5
p_{y_j}	0,5	0,5	1

Розподіли відповідних компонент в одній і іншій таблицях однакові. Однак очевидно, що ці таблиці описують абсолютно різні розподілу двовимірного випадкового вектору (X,Y) (всі значення p_{ij} в одній таблиці відмінні від відповідних значень p_{ij} в іншій таблиці).

Дві випадкові величини X і Y називаються незалежними, якщо незалежні всі пов'язані з ними події.

Наприклад, $(X<x)$ і $(Y<y)$; $(X<x)$ і $(Y=y_i)$ і т.д.

Необхідна і достатня умова незалежності двох ДВВ X, Y, які утворюють систему (X,Y)

$$P\left(X = x_i,\ Y = y_j\right) = P\left(X = x_i\right)\cdot P\left(Y = y_j\right),\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m},$$

або

$$p_{ij} = p_{x_i}\cdot p_{y_j},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$$

або

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y).$$

Умовні закони розподілу системи двох ДВВ

Якщо випадкові величини X, Y, які утворюють систему (X,Y), залежні між собою, то для характеристики їх залежності вводять поняття умовних законів розподілу випадкових величин.

Умовним законом розподілу однієї із випадкових величин, яка входить в систему (X,Y), називається її закон розподілу, знайдений при умові, що друга випадкова величина прийняла певне значення.

Нехай (X,Y) - ДВВ і $p_{ij} = P\left(X = x_i,\ Y = y_j\right),\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$.

Умовна ймовірність того, що випадкова величина Y прийняла значення y_j за умови, $X = x_i$ визначається рівністю

$$P\left(Y = y_j \middle| X = x_i\right) = \frac{P\left(X = x_i,\ Y = y_j\right)}{P\left(X = x_i\right)},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}.$$

(або коротко $p\left(y_j \middle| x_i\right) = \dfrac{p_{ij}}{p_{x_i}}$).

Сукупність ймовірностей $p\left(y_1|x_i\right)$, $p\left(y_2|x_i\right)$, …, $p\left(y_m|x_i\right)$ представляє умовний закон розподілу випадкової величини Y при умові $X = x_i$.

Приклад 11.6. Є урна з 3 білими та 3 чорними кулями. Проводиться послідовне виймання куль (без повернення) до першої появи білої кулі; X - кількість вийнятих куль. Далі виймання куль продовжується до першої появи чорної кулі; Y - кількість куль, вийнятих у другій серії. Потрібно скласти закони розподілу (X,Y), X і Y.

Розв'язування. Можливі значення X: 1, 2, 3, 4; можливі значення Y: 1,2,3.

$$P(X = 1, Y = 1) = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5} = \frac{6}{20},$$

$$P(X = 1, Y = 2) = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{20},$$

$$P(X = 1, Y = 3) = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3} = \frac{1}{20},$$

$$P(X=2,Y=1)=\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{20},$$
$$P(X=2,Y=2)=\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{20},$$
$$P(X=2,Y=3)=\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}=\frac{1}{20},$$
$$P(X=3,Y=1)=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{20},$$
$$P(X=3,Y=2)=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{20},$$
$$P(X=3,Y=3)=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{20},$$
$$P(X=4,Y=1)=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}=\frac{1}{20},$$
$$P(X=4,Y=2)=P(X=4,Y=3)=0.$$

Закон розподілу (X,Y)

Y \ X	1	2	3	p_{x_i}
1	$6/20$	$3/20$	$1/20$	$10/20$
2	$3/20$	$2/20$	$1/20$	$6/20$
3	$1/20$	$1/20$	$1/20$	$3/20$
4	$1/20$	0	0	$1/20$
p_{y_j}	$11/20$	$6/20$	$3/20$	1

Закони розподілу компонент X і Y

X	1	2	3	4
p_{x_i}	$10/20$	$6/20$	$3/20$	$1/20$

Y	1	2	3
p_{y_j}	$11/20$	$6/20$	$3/20$

Приклад 11.7. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин (X,Y) заданий таблицею:

Y \ X	0	1	2	3
–1	0,02	0,06	0,08	0,04
0	0,03	0,12	0,20	0,15
1	0,05	0,02	0,22	0,01

Знайти умовний закон розподілу Y при $X=0$. Чи є величини X і Y залежними?

Розв'язування. Ймовірності значень величини Y при умові $X=0$ обчислюємо за формулою

$$P\left(Y=y_j\big|_{X=0}\right)=\frac{P\left(X=0,\ Y=y_j\right)}{P\left(X=0\right)},\ j=\overline{1,4}.$$

Маємо, $P\left(X=0\right)=0,03+0,12+0,2+1,15=0,5$;

$P\left(Y=0\big|_{X=0}\right)=\dfrac{0,03}{0,5}=0,06;$ $P\left(Y=1_{|X=0}\right)=\dfrac{0,12}{0,5}=0,24;$

$P\left(Y=2\big|_{X=0}\right)=\dfrac{0,20}{0,5}=0,4;$ $P\left(Y=3\big|_{X=0}\right)=\dfrac{0,15}{0,5}=0,3.$

Отже,

$Y\big\|_{X=0}$	0	1	2	3
$p\left(y_j\big\|_{X=0}\right)$	0,06	0,24	0,4	0,3

Безумовний закон розподілу Y має вигляд

Y	0	1	2	3
p_{y_j}	0,1	0,2	0,5	0,2

Не співпадіння умовного і безумовного законів говорить про те, що X і Y залежні.

Задачі для розв'язування:

24. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $\left(X,Y\right)$ заданий таблицею:

Y \ X	0	1	2
0	$1/9$	$1/3$	$1/4$
1	$1/9$	$1/6$	0
2	$1/36$	0	0

Знайти:
1) Одномірні закони розподілу компонент X і Y;
2) ймовірність $P\left(X<Y\right)$;
3) Скласти функцію розподілу $F_{X,Y}\left(x,y\right)$.

25. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $\left(X,Y\right)$ заданий таблицею:

26.

$Y \backslash X$	1	2	3
1	$1/9$	$1/9$	$1/9$
2	0	$1/6$	$1/6$
3	0	0	$1/3$

Знайти:
1) Одномірні закони розподілу компонент X і Y;
2) Ймовірність $P(X=Y)$;
3) Скласти функцію розподілу $F_{X,Y}(x,y)$.

27. Монета підкидається до першого випадіння герба, але не більше 3 разів. Випадкова величина X - кількість випадінь решки, Y - кількість підкидань. Описати закон розподілу випадкового вектору (X,Y). Знайти одновимірні закони розподілу компонент X і Y. Обчислити ймовірність $P(X<Y)$.

28. Стрілок 3 рази стріляє по мішені з імовірністю влучення 0,7 при кожному пострілі. Випадкова величина X - модуль різниці між кількістю попадань і кількістю промахів, Y - кількість влучень. Описати закон розподілу випадкового вектору (X,Y). Знайти одновимірні закони розподілу компонент X і Y. Обчислити ймовірність $P(X=Y)$.

29. Закон розподілу системи випадкових величини (X,Y) задано таблицею:

$Y \backslash X$	–1	0	1
0	0,01	0,04	0,05
1	0,06	0,24	0,10
2	0,05	0,15	0,10
3	0,04	0,07	0,09

Знайти:
а) Закони розподілу компонент X і Y;
б) Закон розподілу Y при умові $X=0$;
в) Ймовірність події $(X<2,\ Y<1)$.

З'ясуйте, чи є випадкові величини X і Y залежними.

30. Закон розподілу системи (X,Y) задано таблицею

31.

$Y \backslash X$	–1	0	1
0	0,1	0,2	0
1	0,2	0,3	0,2

Знайти:
а) Закони розподілу компонент X і Y;
б) Закон розподілу X при умові $Y = 1$;
в) Ймовірність події $(X = 1,\ Y \geq 0)$.

З’ясуйте, чи є випадкові величини X і Y залежними.

32. Двічі підкинута гральні кість. Нехай X - кількість очок, які випали при першому підкиданні, а Y - сума очок, які випали при обох підкиданнях.
Знайти:
а) Закон розподілу системи (X, Y);
б) Закони розподілу компонент X і Y;
в) Закон розподілу Y при умові $X = 3$;
г) Ймовірність події $(1 \leq X < 4,\ Y \leq 10)$.

З’ясуйте, чи є випадкові величини X і Y залежними.

33. Із коробки, в якій 4 червоних, 2 синіх, і 3 зелених олівця, навмання вийняли 3 олівця. Нехай X - кількість червоних, а Y - кількість синіх олівців серед вийнятих.
Знайти:
а) Закон розподілу системи (X, Y);
б) Закони розподілу компонент X і Y;
в) Закон розподілу X при умові $Y = 1$;
г) Ймовірність події $(X < 3,\ Y = 2)$.

З’ясуйте, чи є випадкові величини X і Y залежними.

34. 10 студентів написали контрольну роботу з математики, причому 4 з них отримали оцінку «відмінно», 3 – «добре», а останні – «задовільно». Для розбору помилок у групі випадковим чином відібрано 4 роботи. Нехай X - кількість робіт з оцінкою «відмінно» серед відібраних, а Y - кількість робіт з оцінкою «добре» серед відібраних.
Знайти: а) закон розподілу системи (X, Y);
б) Закони розподілу компонент X і Y;
в) Закон розподілу X при умові $Y = 2$;
г) Ймовірність події $(X \geq 2,\ Y \leq 2)$.

З’ясуйте, чи є випадкові величини X і Y залежними.

35. 2 стрілка незалежно один від одного зробили по два постріли по одній і тій же мішені. Ймовірність попадання для першого стрілка 0,8, а для другого – 0,6. Нехай X - кількість попадань першого, а Y - кількість попадань другого.
Знайти:
а) Закон розподілу системи (X, Y);
б) Закони розподілу компонент X і Y;
в) Закон розподілу Y при умові $X = 1$;
г) Ймовірність події $(X \leq 1,\ Y = 1)$.

З’ясуйте, чи є випадкові величини X і Y залежними.

§ 12. Функції від дискретних випадкових величини

Функція від однієї випадкової величини. Нехай X - випадкова величина, пов'язана з деяким випробуванням, і $y=\phi(x)$ - числова функція, визначена для всіх можливих значень величини X. Тоді можна розглядати випадкову величину Y, яка приймає свої значення в залежності від того, які значення приймає X, а саме: якщо в результаті випробування величина X прийняла значення x_0, то величина Y приймає значення $y_0=\phi(x_0)$. При цьому Y називають функцією випадкової величини X (функцією випадкового аргументу X) і записують $Y=\phi(X)$.

Нехай X - дискретна випадкова величина, задана рядом розподілу

x_i	x_1	x_2	$\dots$
p_i	p_1	p_2	$\dots$

Закон розподілу функції $Y=\phi(X)$ знаходимо наступним чином: можливими значеннями Y є всі різні числа $y_1,\ y_2,$ ... серед чисел $\phi(x_1),\ \phi(x_2),\ \dots$, а ймовірності $q_j=P(Y=y_j),\ j=1,\ ,2,\ \dots$обчислюються за формулою

$$q_j=\sum_{\{i:\phi(x_i)=y_j\}} p_i\,.$$

Приклад 12.1. Випадкова величина X має закон розподілу

x_i	0	1	2	3
p_i	0,1	0,3	0,4	0,2

Знайти закон розподілу випадкової величини $Y=\sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)+1.$

Розв'язування. Знаходимо значення функції $\phi(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)+1$ при $x=0,\ 1,\ 2,\ 3$, в результаті чого отримаємо числа $1,\ 2,\ 1,\ 0$; отже, можливими значеннями Y є $y_j=0,\ 1,\ 2$. Тепер знаходимо ймовірності:

$q_1=P(Y=0)=P(X=3)=0,2;$

$q_2=P(Y=1)=P(X=0)+P(X=2)=0,1+0,4=0,5;$

$q_3=P(Y=2)=P(X=1)=0,3.$

Закон розподілу Y наступний:

y_j	0	1	2
q_j	0,2	0,5	0,3

Функція від системи двох випадкових величин. Якщо кожній парі можливих значень випадкових величин X і Y по заданому правилу відповідає одне можливе значення випадкової величини Z, то Z називають функцію від двох випадкових величин, записують $Z = \phi(X, Y)$

Для системи $\left(X, Y\right)$ дискретного типу, заданої таблицею

Y X	y_1	y_2	$\ldots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\ldots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

легко знайти таблицю розподілу величини $Z = \phi\left(X, Y\right)$. Можливими значеннями Z будуть різні числа $z_1,\ z_2,\ \ldots$ серед чисел $\phi\left(x_i,\ y_j\right),\ i, j = 1,\ 2,\ \ldots$; ймовірності $r_k = P\left(Z = z_k\right) = \sum\limits_{\left\{i, j : \phi\left(x_i, y_j\right) = z_k\right\}} p_{ij}$.

Приклад 12.2. Задана система $\left(X, Y\right)$ законом розподілу

Y X	0	1	2	3
–1	0,01	0,06	0,05	0,04
0	0,04	0,24	0,15	0,07
1	0,05	0,10	0,10	0,09

Знайти закон розподілу випадкової величини $Z = X + Y$.

Розв'язування. Знаходимо числа $x_i + y_j$:

$$-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Можливими значеннями Z є числа $z_k = -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$. Знаходимо відповідні ймовірності:

$$r_1 = P\left(Z = -1\right) = P\left(X = -1, Y = 0\right) = 0{,}01;$$

$$r_2 = P\left(Z = 0\right) = P\left(X = -1, Y = 1\right) + P\left(X = 0, Y = 0\right) = 0{,}06 + 0{,}04 = 0{,}1;$$

$$r_3 = P\left(Z = 1\right) = P\left(X = -1, Y = 2\right) + P\left(X = 0, Y = 1\right) + P\left(X = 1, Y = 0\right) = 0{,}34;$$

$$r_4 = P\left(Z = 2\right) = P\left(X = -1, Y = 3\right) + P\left(X = 0, Y = 2\right) + P\left(X = 1, Y = 1\right) = 0{,}29;$$

$$r_5 = P\left(Z = 3\right) = P\left(X = 0, Y = 3\right) + P\left(X = 1, Y = 2\right) = 0{,}17;$$

$$r_6 = P\left(Z = 4\right) = P\left(X = 1, Y = 4\right) = 0{,}09.$$

Шуканий закон розподілу:

z_k	–1	0	1	2	3	4
r_k	0,01	0,1	0,34	0,29	0,17	0,09

Задачі для розв’язування

36. Випадкова величина X задана таблицею розподілу

x_i	–2	1	0	1	2
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Знайти таблицю розподілу величини Y:

а) $Y = 2X - 1$; б) $Y = X^2 + 1$;

в) $Y = 2^X$; г) $Y = 2^{|X|}$.

37. Випадкова величина X задана таблицею розподілу

x_i	-1	0	1	2
p_i	0,1	0,2	0,5	0,2

Знайти закон розподілу випадкової величини $Y = \phi(X)$::

а) $Y = X^2 - 1$; б) $Y = |X|$.

38. Задана таблиця розподілу системи випадкових величин (X, Y)

$Y \backslash X$	–2	–1	0	1
–1	0,01	0,02	0,05	0,03
0	0,03	0,24	0,15	0,06
1	0,06	0,09	0,16	0,10

Знайти закон розподілу випадкової величини $Z = \phi(X, Y)$:

а) $Z = X + Y$; б) $Y = X \cdot Y$;

в) $Y = 2X - 3Y$; г) $Y = |X| - Y$.

39. Задані незалежні випадкові величини X і Y:

x_i	-1	0	1
p_i	0,2	0,5	0,3

y_j	0	1	2	3
q_j	0,2	0,4	0,3	0,1

Скласти закон розподілу випадкової величини Z:

а) $Z = X + Y$; б) $Y = X \cdot Y$;

в) $Y = 2X + 3Y$;; г) $Y = X^2 + Y^2$.

40. 2 стрілка незалежно один від одного стріляють по одній і тій самій же мішені. Перший попадає в мішень з ймовірністю 0,4 і має 3 патрони в запасі, а другий – з ймовірністю 0,6 і має 2 патрони в запасі. Кожний із стрільців стріляє або до першого попадання в мішень, або до вичерпання патронів. Нехай X - кількість патронів, витрачених першим стрільцем, а Y - кількість патронів, витрачених другим. Знайти закони розподілу X, Y, (X, Y) і $X + Y$.

41. Монета підкинута 3 рази. Нехай X - кількість випадінь герба, а Y - кількість випадінь цифри. Знайти закони розподілу випадкових величини: а) $Z = X + Y$; б) $Z = X - Y$; в) $Z = X \cdot Y$.

42. Нехай випадкові величини X і Y незалежні і однаково розподілені, причому $P(X = 1) = p > 0$, $P(X = 0) = 1 - p > 0$. Розглянемо нову випадкову ве-

личину Z: $Z=0$ при $X+Y$ - парному і $Z=1$ при $X+Y$ - непарному. При якому значенні p величини X і Z незалежні?

§ 13. Неперервна випадкова величина

Функція розподілу та щільність розподілу ймовірностей

Випадкова величина називається неперервною, якщо її функція розподілу $F(x)$ неперервна на всій числовій вісі.

Для неперервної випадкової величини X при будь-якому $x_0 \in R$ мають місце рівності

$$P(X = x_0) = 1,$$
$$P(x_1 \le X < x_2) = P(x_1 < X < x_2) =$$
$$= P(x_1 < X \le x_2) = P(x_1 \le X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1),$$

де $F(x)$ функція розподілу величини X.

Нехай $f(x)$ невід’ємна інтегрована функція, визначена на всій числовій вісі і задовольняє умові

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Тоді функція

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

володіє всіма властивостями функції розподілу. Крім того, $F(x)$ неперервна. Отже, випадкова величина, визначена функцією розподілу $F(x)$, є неперервною.

Ми говоримо, що випадкова величина X з функцією розподілу $F(x)$ розподілена зі щільністю, якщо існує невід’ємна функція $f(x)$, така, що для будь-якого $x \in R$ має місце рівність $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. При цьому $f(x)$ називається щільністю ймовірностей випадкової величини X, а її графік - кривою розподілу.

Якщо випадкова величина X має щільність ймовірностей $f(x)$, то має місце формула

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

Приклад 13.1. Випадкова величина X з функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} e^x, & x \le 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

є неперервною, оскільки функція $F(x)$ неперервна на всій числовій вісі.

Приклад 13.2. Випадкова величина X з функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} e^x, & x\le -1,\\ 1, & x>-1 \end{cases}$$

не являється неперервною, оскільки $x=-1$ є точкою розриву функції $F(x)$.

Достатня умова існування щільності. Якщо $F(x)$ неперервна всюди, а $F'(x)$ неперервна всюди, за винятком, можливо, скінченої кількості точок, то випадкова величина X має щільність ймовірностей $f(x)$, причому $f(x)=F'(x)$ в точках неперервності $F(x)$. (В точках розриву функції $F'(x)$ значення $f(x)$ можна задавати довільно).

Якщо $F(x)$ розривна в точках $x_1,\ x_{2,}\ \dots\ ,\ x_n$, то покладемо:

$$f(x)=\begin{cases} F'(x), & x\ne x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n;\\ c_k, & x=x_k,\ \left(k=\overline{1,n}\right), \end{cases}$$

де c_k - довільні невід’ємні числа. Умова $f(x)\ge 0$ виконується, оскільки $F'(x)\ge 0$ і $c_k\ge 0$. Рівність також виконується. Справді, нехай, наприклад, $n=1$. Для будь-якого x, $x<x_1$, маємо:

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x} F'(t)dt=F(x).$$

Якщо ж $x\ge x_1$, то

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x_1} F'(t)dt+\int_{-\infty}^{x} F'(t)dt\,.$$

Отже,

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=F(x_1)-F(-\infty)+F(x)-F(x_1)=F(x).$$

Приклад 13.4. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ \sqrt{x}, & 0<x\le \dfrac{1}{4},\\ 8x^2, & \dfrac{1}{4}<x\le \dfrac{\sqrt{2}}{4},\\ 1, & x>\dfrac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$$

Переконатись, що величина X має щільність ймовірностей та знайти її.

Розв'язування. В точках $x=0,\ \frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{4}$ правосторонні та лівосторонні границі функції $F(x)$ співпадають, отже, $F(x)$ неперервна всюди. Похідна $F'(x)$ неперервна всюди, за винятком точок $x=0,\ \frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{4}$. Отже, щільність ймовірностей $f(x)$ існує. Обчислимо односторонні границі $F'(x)$ в точках $x=0,\ \frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{4}$:

$$F'(0-0)=0, \qquad F'(0+0)=\infty, \qquad F'\left(\frac{1}{4}-0\right)=1,$$

$$F'\left(\frac{1}{4}+0\right)=4, \qquad F'\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-0\right)=4\sqrt{2}, \qquad F'\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+0\right)=0.$$

Отже, точки $0,\ \frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{4}$ є точками розриву для функції $F'(x)$.

Таким чином,

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & 0<x<\dfrac{1}{4}, \\ 16x, & \dfrac{1}{4}<x<\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \\ 0, & x>\dfrac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$$

В точках $x=0,\ x=\frac{1}{4},\ x=\frac{\sqrt{2}}{4}$ значення $f(x)$ можна вибирати довільно.

Приклад 13.5. Дано функцію

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ ae^{-bx} & x>0\ \ (b>0). \end{cases}$$

При якому значенні константи a функція $f(x)$ є щільністю ймовірностей деякої випадкової величини X. Знайти функцію розподілу $F(x)$ величини X. Обчислити ймовірність попадання випадкової величини X у відрізок $[0;1]$ двома способами: за допомогою щільності ймовірностей $f(x)$ і за допомогою функції розподілу $F(x)$.

Розв'язування. По-перше $a\ge 0$. Для знаходження a використаємо умову нормування:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=1, \quad a\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bt}dt=1, \quad -\frac{a}{b}e^{-bx}\Big|_0^{\infty}=1, \quad \frac{a}{b}=1.$$

Отже, $a=b$ і функція $f(x)$ має вигляд

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ be^{-bx} & x>0 \ (b>0). \end{cases}$$

Знайдемо функцію розподілу $F(x)$. Якщо $x\le 0$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x} 0dt=0;$$

якщо $x\le 0$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_{0}^{x} be^{-bt}dt=1-e^{-bt}.$$

Отже,

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ 1-e^{-bx} & x>0 \ (b>0). \end{cases}$$

Обчислимо ймовірність $P(0\le X\le 1)$:

$$P(0\le X\le 1)=\int_{0}^{1} f(x)dx=\int_{0}^{1} be^{-bx}dx=1-\frac{1}{e^{b}}.$$

Формула $P(0\le X\le 1)=F(1)-F(0)$ дає нам такий же результат:

$$P(0\le X\le 1)=F(1)-F(0)=1-\frac{1}{e^{b}}.$$

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

Нормальний розподіл

Нормальним називають розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини, який описується щільністю

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}}.$$

Нормальний розподіл визначається двома параметрами : a і σ. Графік щільності нормального розподілу називають нормальною кривою (кривою Гаусса).

Функція розподілу нормального закону має вигляд

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{\sigma^2}}dt.$$

Показниковий розподіл

Показниковим називають розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X, який описується щільністю

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0, \end{cases}$$

де λ - постійна додатна величина.

Показниковий розподіл визначається одним параметром λ. Функція розподілу показникового закону має вигляд

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ 1-\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0. \end{cases}$$

Рівномірний розподіл

Рівномірним називають розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X, якщо на інтервалі (a,b), якому належать всі можливі значення X, щільність зберігає постійне значення, а саме $f(x)=1/(b-a)$, за межами цього інтервалу $f(x)=0$.

Функція розподілу рівномірного закону має вигляд

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x>a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b, \\ 1, & x>b. \end{cases}$$

Задачі для розв'язування

43. Випадкова величина X задана функцією розподілу $F(x)$.

а) Чи є випадкова величина X неперервною?

б) Чи має випадкова величина щільність розподілу $f(x)$? Якщо має, то знайдіть її;

в) Побудуйте схематично графіки $F(x)$ та $f(x)$.

1) $F(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0, \\ 1, & x>0; \end{cases}$ 2) $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1, \\ x-1, & 1<x\le 2, \\ 1, & x>2; \end{cases}$

3) $F(x)=\begin{cases} 0,5e^x, & x\le 0, \\ 0,8, & 0<x\le 2, \\ 1, & x>2; \end{cases}$ 4) $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -\dfrac{\pi}{2}, \\ 1+\sin x, & -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0, \\ 1, & x>0; \end{cases}$

5) $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1, \\ \ln x, & 1<x\le 2, \\ 1, & x>2; \end{cases}$ 6) $F(x)=\begin{cases} 0, x\le 1, \\ \dfrac{1}{\pi}(x-0,5\sin 2x), 1<x\le \pi, \\ 1, x>\pi. \end{cases}$

44. Випадкова величина X має щільність розподілу (закон Коші)

$$f(x)=\frac{c}{x^2+1}.$$

Знайти:

а) константу c;

б) функцію розподілу $F(x)$;

в) ймовірність події $-1 < X < 1$.

45. Випадкова величина X має щільність ймовірності

$$f(x)=\begin{cases} c\cos x, & -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайти:

а) константу c;

б) функцію розподілу $F(x)$; в) ймовірність події $|X|\le\dfrac{\pi}{4}$.

46. Задана щільність ймовірності випадкової величини X

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ ax, & 0<x\le 2, \\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Знайти:

а) константу a;

б) функцію розподілу $F(x)$;

в) ймовірність події $X>1$.

47. Випадкова величина X має щільність розподілу ймовірностей

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ 3x^2, & 0<x\le 1, \\ 0, & x>1. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$ і ймовірність події $-2\le X<\dfrac{1}{2}$. Побудувати криву розподілу і графік функції розподілу.

48. Випадкова величина має щільність ймовірностей (закон Релея)

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ 2h^{2xe^{-h^2x^2}}, & x>0. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$. Побудувати графіки $F(x)$ та $f(x)$ при $h=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

49. Нехай X - проекція радіус-вектору точки на вісь абсцис, навмання вибраної на колі радіуса R з центром в початку координат, причому ймовірність вибору точки, яка належить даній дузі кола, залежить тільки від цієї дуги і про-

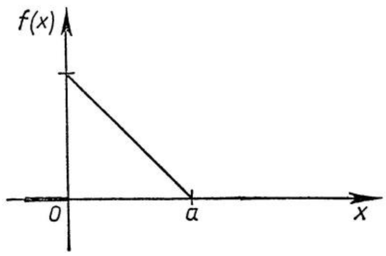
порційна їй. Знайти функцію розподілу випадкової величини X і щільність ймовірностей. Визначити ймовірність того, що X виявиться у проміжку $\left[-\frac{R}{2},\frac{R}{2}\right]$.

50. Точку кинуто в коло радіуса R. Ймовірність її попадання у будь-яку область, розташовану всередині кола, пропорційна площі цієї області. Знайти функцію розподілу $F(x)$ і щільність ймовірностей $f(x)$ випадкової величини X, яка дорівнює відстані від точки до центру кола.

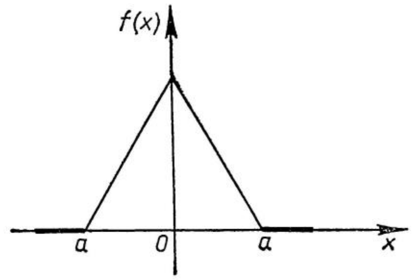
51. Випадкова величина X має щільність розподілу ймовірностей (закон Лапласа) $f(x)=ae^{-\lambda|x|}$, $\lambda>0$. Знайти коефіцієнт a і функцію розподілу. Побудувати графіки щільності ймовірностей і функції розподілу.

52. Крива розподілу випадкової величини X має вигляд, вказаний на мал. 13.1 (закон прямокутного трикутника). Записати вираз для щільності ймовірностей та побудувати її графік. Знайти ймовірність попадання випадкової величини X в проміжок від $\frac{a}{2}$ до a.

53. Випадкова величина X розподілена по закону Сімпсона (по «закону рівнобедреного трикутника») (див. мал. 13.2). Запишіть вираз щільності ймовірностей. Знайти функцію розподілу і побудуйте графік. Знайти $P\left(-\frac{a}{2}<X<a\right)$.



мал. 13.1



мал. 13.2

54. Випадкова величина X має рівномірний закон розподілу на відрізку $[0,2]$. Запишіть вираз для щільності ймовірностей $f(x)$ і для функції розподілу $F(x)$. Знайти ймовірність події $0<X<0,5$. Побудувати графіки $f(x)$ і $F(x)$.

55. Автобуси їдуть з інтервалом 5хв. Припускаючи, що час очікування автобусу на зупинці має рівномірний закон розподілу, знайти: а) функцію розподілу; б) щільність ймовірностей розподілу; в) ймовірність того, що час очікування не перевищить 2 хв.; г) побудувати графіки щільності ймовірностей і функції розподілу.

56. Випадкова величина X розподілена по нормальному закону з параметрами $a=0$, $\sigma=1$. Запишіть вираз для щільності ймовірностей $f(x)$ і функції розподілу $F(x)$. Використовуючи таблицю значень функції Лапласа, знайдіть ймовірність події $1,25<X<2,55$.

57. Щільність ймовірностей нормально розподіленої випадкової величини X має вигляд

$$f\left(x\right)=ce^{-\frac{\left(x-2\right)^2}{18}}.$$

Знайдіть коефіцієнт c і параметр σ; напишіть функцію розподілу $F\left(x\right)$; знайдіть ймовірність попадання випадкової величини X у відрізок $\left[2,5\right]$.

58. Випадкова величина X розподілена по нормальному закону з параметрами a і σ. В кожному із наступних чотирьох пунктів а), б), в), г) напишіть щільність ймовірностей і функцію розподілу; в одній і тій же системі координат побудуйте криві розподілу; користуючись «правилом трьох сигм», знайдіть інтервал, в який попаде випадкова величина X з практичною достовірністю (з ймовірністю 0,9973):

а) $a=0,\ \sigma=1;$ б) $a=2,\ \sigma=1;$

в) $a=-2,\ \sigma=1;$ г) $a=0,\ \sigma=0,5.$

59. Розмір діаметру втулок, виготовлених заводом, можна вважати випадковою величиною, розподіленою по нормальному закону, з параметрами $a=25$ і $\sigma=0,001$. Запишіть вираз для щільності ймовірностей та функції розподілу. В яких межах можна практично гарантувати розмір діаметру втулки, якщо за ймовірність практичної достовірності приймається 0,9973?

§ 14. Числові характеристики неперервних випадкових величин

По аналогії з дискретними, в якості основних числових характеристик неперервних випадкових величин розглядаються моменти і квантилі.

Початковим моментом v_k порядку k неперервної випадкової величини X називається вираз

$$v_k=\int_{-\infty}^{+\infty}x^k f\left(x\right)dx.$$

Початковий момент першого порядку називають математичним сподіванням випадкової величини, і він характеризує середнє значення.

Математичним сподіванням неперервної випадкової величина X з щільністю ймовірностей $f\left(x\right)$ називається число

$$M\left[X\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}xf\left(x\right)dx$$

при умові, що інтеграл збігається абсолютно.

Властивості математичного сподівання:

1. $M\left[c\right]=c,\ c-const.$
2. $M\left[cX\right]=cM\left[X\right],\ c-const.$
3. $M\left[X_1+X_2+...+X_n\right]=M\left[X_1\right]+M\left[X_2\right]+...+M\left[X_n\right].$
4. $M\left[X_1\cdot X_2\cdot...\cdot X_n\right]=M\left[X_1\right]\cdot M\left[X_2\right]\cdot...\cdot M\left[X_n\right]$ для незалежних X_1, X_2, … , X_n.

Центральним моментом μ_k порядку k неперервної випадкової величини X називають вираз

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x_i - M[X]\right)^k f(x)dx.$$

Дисперсія (центральний момент другого порядку) випадкової величини характеризує її розкид відносно середнього значення і виражається через початкові моменти першого і другого порядків:

$$D[X] == M\left(X^2\right) - \left[M(X)\right]^2.$$

Дисперсією неперервної випадкової величина X зі щільністю ймовірностей $f(x)$ називається число

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - M[X]\right)^2 f(x)dx.$$

Властивості дисперсії:

1. $D[X] \geq 0.$
2. $D[c] = 0,\ c - const.$
3. $D[cX] = c^2 \cdot D[X],\ c - const.$

3. $D[X_1 \pm X_2 \pm ... \pm X_n] = D[X_1] + D[X_2] + ... + D[X_n]$ для незалежних X_1, X_2, … , X_n.

4. $M[X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n] = M[X_1] \cdot M[X_2] \cdot ... \cdot M[X_n]$ для незалежних X_1, X_2, … , X_n.

Корінь квадратний із дисперсії називається середнім квадратичним відхиленням випадкової величини:

$$\sigma(X) = \sqrt{D[X]}.$$

Центральний момент третього порядку характеризує степінь несиметричності розподілу випадкової величини відносно її середнього значення. Величина

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

називається коефіцієнтом асиметрії і для неперервної випадкової величини обчислюється за формулою

$$A = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(x_i - M[X]\right)^3 f(x)dx}{\sigma^3}.$$

Задачі для розв’язування.

60. Неперервна випадкова величина X задана щільністю ймовірностей $f(x)$. Знайдіть $M[X]$, $D[X]$ і $\sigma[X]$.

1) $f(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ 2x, & 0\le x\le 1, \\ 0, & x>1; \end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases} 0, & x<2, \\ 0{,}5, & 2\le x\le 4, \\ 0, & x>4; \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} 0, & x<\dfrac{\pi}{2}, \\ 0{,}5\cos x, & -\dfrac{\pi}{2}\le x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & x>\dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0, \\ 0, & x>0. \end{cases}$

Обчисліть початковий момент третього порядку ν_3 та центральний момент третього порядку μ_3 для величини X із задачі 1.

61. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами a та σ. Виразіть через a та σ початкові та центральні моменти порядків 2, 3 та 4.

62. Знайдіть початкові та центральні моменти третього та четвертого порядків для випадкової величини X, розподіленої рівномірно: а) на відрізку $[-1,1]$; б) на відрізку $[0,1]$.

63. Випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку $[a-h,a+h]$, $h>0$. Знайдіть $M[X]$, $D[X]$ і $\sigma[X]$. Обчисліть ймовірність попадання X у проміжки:

а) $[M(X)-\sigma(X),M(X)+\sigma(X)]$;

б) $[M(X)-3\sigma(X),M(X)+3\sigma(X)]$.

64. Маршрутний автобус проїжджає через дану зупинку з інтервалам 10 хв. Ви підходите до зупинки у випадковий момент часу. Припускаючи, що час очікування автобуса має рівномірний закон розподілу, знайдіть середню тривалість і середнє квадратичне відхилення цього часу.

65. Випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку $[-1,1]$. Знайдіть: 1) $M(2X+3)$; 2) $M(X^2+1)$. Покажіть, що якщо X - випадкова величина з кінцевим математичним сподіванням і $\phi(x)$ - опукла донизу функція, то $M[\phi(X)]\ge\phi(M[X])$.

66. Знайдіть математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, у якої щільність ймовірностей рівна

$$f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+2)^2}{18}}.$$

Користуючись правилом «трьох сігм», вкажіть інтервал, симетричний відносно математичного сподівання, в який попадає випадкова величина X з ймовірністю 0,9973.

67. Випадкова величина X підпорядковується нормальному розподілу з $M\left[X\right]=0$. Ймовірність попадання величини X на ділянку від $-\alpha$ до α $\left(\alpha>0\right)$ рівна 0,5. Знайдіть $\sigma=\sigma\left[X\right]$ та запишіть вираз для щільності ймовірностей величини X.

68. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X відповідно рівні 10 і 2. Знайдіть ймовірність того, що в результаті випробування X прийме значення, яке буде знаходитись у проміжку $\left[12,14\right]$.

69. Автомат штампує деталі. Контролюється довжина деталі (випадкова величина X), яка розподілена нормально із середнім значенням 50 мм. Фактична довжина виготовлених деталей не менша 32 мм і не більша 68 мм. Знайдіть ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі: а) більша 55 мм; б) менша 40 мм.

70. Деталь, виготовлена автоматом, вважається придатною, якщо відхилення її фактичного розміру від проектного не перевищує 10 мм. Випадкові відхилення фактичного розміру від проектного підпорядковуються нормальному закону із середнім квадратичним відхиленням $\sigma=5$ мм і математичним сподіванням $a=0$. Скільки відсотків придатних деталей виготовляє автомат?

71. При вимірювання деталі її довжина X є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом з математичним сподіванням $M\left[X\right]=0$. Задано відрізок $\left[\alpha,\beta\right]$, який не містить початок координат. При якому значення середньоквадратичного відхилення $\sigma\left[X\right]$ ймовірність попадання випадкової величини у відрізок $\left[\alpha,\beta\right]$ досягає максимуму?

72. Знайдіть математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, яка має щільність ймовірностей (розподіл Лапласа)

$$f\left(x\right)=0,5e^{-|x|}.$$

Обчисліть ймовірність попадання значення випадкової величини у проміжок $\left[M\left(X\right)-3\sigma\left(X\right),M\left(X\right)+3\sigma\left(X\right)\right]$.

73. Щільність ймовірностей випадкової величини X має вигляд (закон арксинуса)

$$f\left(x\right)=\begin{cases}0, & x\le -a,\\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & -a<x<a,\\ 0, & x\ge a.\end{cases}$$

Обчисліть дисперсію та середнє квадратичне відхилення величини X.

74. Щільність ймовірностей випадкової величини X задана формулою

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \dfrac{x^m e^{-x}}{m!}, & x\geq 0. \end{cases}$$

Знайдіть $M[X]$, $D[X]$.

75. Неперервна випадкова величина X розподілена за показниковим законом

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ 0{,}04e^{-0{,}04x}, & x\geq 0. \end{cases}$$

Знайдіть математичне сподівання $M[X]$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma[X]$. Обчисліть ймовірність того, що відхилення величини X від $M[X]$ не перевищить $3\sigma[X]$.

76. Дано 2 незалежні випадкові величини X та Y. Величина X розподілена за нормальним законом

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{8}};$$

величина Y розподілена рівномірно на відрізку $[0,2]$. Визначте: а) $M[X+Y]$; б) $M[X\cdot Y]$; в) $M[X^2]$; г) $M[X-Y^2]$; д) $D[X+Y]$.

77. Щільності ймовірностей незалежних випадкових величин X та Y задано формулами

$$f_1(x)=\begin{cases} 0{,}5, & 0\leq x\leq 2, \\ 0, & x<0 \text{ або } \mathrm{x}\geq 2; \end{cases} \qquad f_2(y)=\begin{cases} 0, & y<0, \\ e^{-y}, & y\geq 0. \end{cases}$$

Знайдіть $M[XY]$, $D[XY]$.

§ 15. Функція неперервної випадкової величини

Нехай X - випадкова величина, пов'язана з деяким випробуванням, і $y=\phi(x)$ - числова функція, визначена для всіх можливих значень величини X. Тоді можна розглядати випадкову величину Y, яка приймає свої значення в залежності від того, які значення приймає X, а саме: якщо в результаті випробування величина X прийняла значення x_0, то величина Y приймає значення $y_0=\phi(x_0)$. При цьому Y називають функцією випадкової величини X (функцією випадкового аргументу X) і записують $Y=\phi(X)$.

Функція розподілу $G(y)$ випадкової величини $Y=\phi(X)$ виражається через функцію розподілу $F(x)$ аргументу X і функцію ϕ наступним чином:

$$G(y)=P(Y<y)=P(\phi(X)<y)=$$
$$=P\left(X<\phi^{-1}(y)\right)=F\left(\phi^{-1}(y)\right)=P\left(X\in D_y\right),$$

де

$$D_y = \{x | \phi(x) < y\}.$$

Якщо випадкова величина X має щільність ймовірностей $f(x)$, то

$$G(y) = \int_{D_y} f(x)dx.$$

У випадку, коли $G(y)$ неперервна всюди і має неперервну похідну $G'(y)$ всюди, за можливим винятком скінченої кількості точок, то випадкова величина $Y = \phi(X)$ має щільність ймовірностей $g(y)$, яка дорівнює

$$g(y) = G'(y).$$

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = F(x_1) - F(-\infty) + F(x) - F(x_1) = F(x).$$

Приклад 15.1. Випадкова величина X задана щільністю ймовірностей $f(x)$. Знайдіть функцію розподілу $G(y)$ та щільність ймовірностей $g(y)$ випадкової величини $Y = X^2$.

Розв'язування. В цьому прикладі $\phi(x) = x^2$. Знайдемо множину $D_y = \{x | \phi(x) < y\}$ при будь-якому y і скористаємось відповідною формулою

$$D_y = \{x | x^2 < y\} = \begin{cases} \varnothing, \ y \le 0, \\ \{x | -\sqrt{y} < x < \sqrt{y}\}, \ y > 0. \end{cases}$$

Отже, якщо $y \le 0$, то $G(y) = 0$, а при $y > 0$

$$G(y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(t)dt.$$

Отже,

$$G(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(t)dt, & y > 0. \end{cases}$$

Легко бачити, що $G(y)$ неперервна всюди і має неперервну похідну, за винятком точки $y = 0$. Тому

$$g(y) = G'(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f(\sqrt{y}) - f(-\sqrt{y})\right), & y > 0. \end{cases}$$

Приклад 15.2. Випадкова величина X задана розподілена нормально з параметрами $a = 0$ і $\sigma = 1$. Знайдіть функцію розподілу $G(y)$ та щільність ймовірностей $g(y)$ випадкової величини $Y = X^3$.

Розв'язування. В цьому прикладі $\phi(x) = x^3$ - строго зростаюча. Враховуючи, що щільність ймовірностей величини X дорівнює

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},$$

запишемо функцію розподілу $F(x)$

$$F(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Далі, скористаємось означенням

$$G(y)=F\left(\sqrt[3]{y}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\sqrt[3]{y}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=0{,}5+\Phi\left(\sqrt[3]{y}\right),$$

де Φ - функція Лапласа. Щільність ймовірностей $g(y)$ величини Y знаходимо за формулою:

$$g(y)=G'(y)=F\left(\sqrt[3]{y}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\sqrt[3]{y^2}}{2}}\cdot\left(\sqrt[3]{y}\right)'=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\sqrt[3]{y^2}}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}.$$

Для знаходження числових характеристик випадкової величини $Y=\phi(X)$ не обов’язково знати закон її розподілу, достатньо знати закон розподілу аргументу X:

$$M[Y]=M\left[\phi(X)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)f(x)dx,$$

$$D[Y]=D\left[\phi(X)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\phi(x)-M[Y]\right)^2 f(x)dx.$$

Задачі для розв’язування

78. Випадкова величина X задана функцією розподілу $F(x)$. Потрібно виразити функцію розподілу $G(y)$ випадкової величини $Y=\phi(X)$ через F:

1) $Y=2X$; 2) $Y=X^2-1$; 3) $Y=|X-1|$; 4) $Y=e^X$.

79. Випадкова величина X задана щільністю ймовірностей $f(x)$. Переконайтесь, що випадкова величина $Y=\phi(X)$ має щільність ймовірностей $g(y)$ і виразіть цю щільність через f:

1) $Y=-2X+3$; 2) $Y=X^2-1$; 3) $Y=|X|$; 4) $Y=e^X$.

80. Щільність ймовірностей $f(x)$ випадкової величини X дорівнює 0 при $x\le 0$ і дорівнює $h(x)$ при $x>0$. Знайдіть щільність ймовірностей випадкової величини:

1) $Y=\ln X$; 2) $Y=X^2$; 3) $Y=\frac{1}{X^2}$; 4) $Y=\sqrt{X}$.

81. Випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку $[-1,1]$. Знайдіть функцію розподілу $G(y)$ і щільність ймовірностей $g(y)$ випадкової величини $Y=\phi(X)$:

1) $Y=2X$; 2) $Y=X^2$; 3) $Y=|X|$; 4) $Y=e^X$.

82. Випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$. Знайдіть функцію розподілу $G(y)$ і щільність ймовірностей $g(y)$ випадкової величини $Y=\phi(X)$:

1) $Y=\sin X$; 2) $Y=\sin 2X$.

83. Закон розподілу радіуса X кола – нормальний з параметрами $a=1000$ і $\sigma=0,5$. Знайдіть закон розподілу:

1) довжини кола Y; 2) площі кола Z.

84. Закон розподілу ребра X куба - нормальний з параметрами $a=5$ і $\sigma=1$. Знайдіть закон розподілу:

1) об'єму куба Y; 2) площі повної поверхні куба Z.

85. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=1$ і $\sigma=1$. Знайдіть щільність ймовірностей величини $Y=|X|$.

86. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами a і σ. Знайдіть щільність ймовірностей величини $Y=kX$.

87. Випадкова величина X розподілена за законом Коші: $f(x)=\dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$.

Знайдіть щільність ймовірностей величини:

1) $Y=arctgX$; 2) $Y=\dfrac{1}{X}$.

88. Випадкова величина X має показників розподіл зі щільністю ймовірностей

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\end{cases}\quad \alpha>0.$$

89. Знайдіть щільність ймовірностей випадкової величини:

1) $Y=\sqrt{X}$; 2) $Y=\dfrac{1}{\alpha}\ln X$.

90. Задана щільність ймовірностей $f(x)$ випадкової величини X . Знайти математичне сподівання наступної випадкової величини $Y=\phi(X)$:

1) $f(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0,5, & -1\le x\le 1,\\ 0, & x>1,\end{cases}$ $Y=|X|+1$;

2) $f(x)=\begin{cases}0, & x<0,5,\\ 1, & 0,5\le x\le 1,5,\\ 0, & x>1,5,\end{cases}$ $Y=X^2-1$;

3) $f(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \cos x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & x>\dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$
$Y=\sin X;$

4) $f(x)=\begin{cases} 0, & x<1, \\ \dfrac{1}{x}, & 1\le x\le e, \\ 0, & x>e, \end{cases}$
$Y=\ln X+1.$

§ 16. Система неперервних випадкових величини

Функція $F(x,y)$, визначена на R^2 рівністю

$$F(x,y)=P(X<x,Y<y)$$

називається функцією розподілу системи (X,Y).

Система (X,Y) називається розподілена зі щільністю $f(x,y)$, якщо для $\forall x,y\in R$

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv.$$

Властивості щільність $f(x,y)$:

1. $f(x,y)\ge 0;$
2. $\iint\limits_{R^2} f(x,y)dxdy=1;$
3. Для будь-якої області $A\subset R^2$ має місце формула

$$P(A)=\iint\limits_{A} f(x,y)dxdy=1.$$

Для системи, яка має щільність $f(x,y)$, умовою незалежності X і Y є рівність:

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y),$$

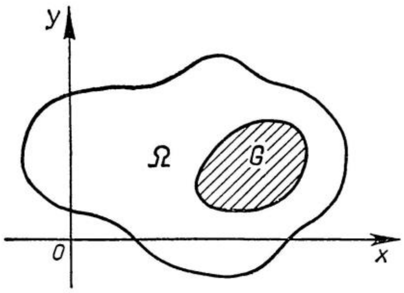
де $f_X(x)$ - щільність X, $f_Y(y)$ - щільність Y.

Приклад 16.1. (Рівномірний закон розподілу в плоскій площині.) Кажуть, що випадкова точка (X,Y) рівномірно розподілена в плоскій області Ω зі скінченою площею S_Ω, якщо щільність ймовірностей $f(x,y)$ системи (X,Y) має вигляд

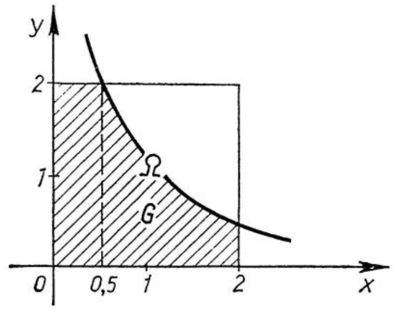
$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{S_\Omega}, & (x,y)\in\Omega, \\ 0, & (x,y)\notin\Omega. \end{cases}$$

Нехай $G\subset\Omega$ (мал. 16.1). Тоді будемо мати

$$P((X,Y)\in G)=\iint\limits_{G}\frac{1}{S_\Omega}dxdy=\frac{1}{S_\Omega}\iint\limits_{G}dxdy=\frac{S_G}{S_\Omega}.$$



мал. 16.1



мал. 16.2

Приклад 16.2. Коефіцієнти a і c квадратного рівняння $ax^2+2x+c=0$ навмання і незалежно один від одного вибираються на відрізку $\left[0,2\right]$. Знайдіть ймовірність того, що корні цього рівняння виявляться дійсними.

Розв'язування. Слово «навмання» означає, що кожна із випадкових величин a і c має рівномірний розподіл на відрізку $\left[0,2\right]$, отже, їх щільності рівні:

$$f_1\left(a\right)=\begin{cases}0, & a<0,\\ 0{,}5, & 0\le a\le 2,\\ 0 & a>0;\end{cases} \qquad f_2\left(c\right)=\begin{cases}0, & c<0,\\ 0{,}5, & 0\le c\le 2,\\ 0 & c>0.\end{cases}$$

Враховуючи незалежність a і c, щільність ймовірностей системи $\left(a,c\right)$ дорівнює:

$$f\left(a,c\right)=\begin{cases}0, & \left(a,c\right)\notin\Omega,\\ \dfrac{1}{4}, & \left(a,c\right)\in\Omega,\end{cases}$$

де Ω - квадрат з вершинами $\left(0,0,\right)$, $\left(2,2\right)$, $\left(0,2\right)$, $\left(2,0\right)$ (мал. 16.2). Коріння рівняння будуть дійсними тоді і тільки тоді, коли дискримінант $1-ac$ невід'ємний, тобто $ac\le 1$. Ця нерівність виконується для точок квадрату, які належать області G (заштрихована область на мал. 16.2). Отже, шукана ймовірність дорівнює:

$$P\left(\left(a,c\right)\in G\right)=\frac{S_G}{S_\Omega}=\frac{1}{4}\left(1+\int_{0,5}^{2}\frac{da}{a}\right)=\frac{1+2\ln 2}{4}\approx 0{,}42.$$

Приклад 16.3. Нормальний розподіл на площині. Кажуть, випадкова точка на площині має нормальний розподіл, якщо у деякій системі координат xOy її координати X та Y незалежні і кожна з них розподілена по нормальному закону:

$$f_X\left(x\right)=\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(x-a_X\right)}{2\sigma_X^2}} \text{ - щільність } X\,;$$

$$f_Y\left(y\right)=\frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(x-a_Y\right)}{2\sigma_Y^2}} \text{ - щільність } Y\,.$$

Незалежність X та Y означає, що щільність ймовірності $f(x,y)$ системи (X,Y) буде дорівнювати $f_X(x)\cdot f_Y(y)$:

$$f(x,y)=\frac{1}{\sigma_X\cdot\sigma_Y\cdot 2\pi}e^{-\left[\frac{(x-a_X)^2}{2\sigma_X^2}+\frac{(y-a_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right]}.$$

При $\sigma_X=\sigma_Y=\sigma$ отримуємо так званий круговий нормальний розподіл

$$f(x,y)=\frac{1}{\sigma^2\cdot 2\pi}e^{-\frac{(x-a_X)^2+(y-a_Y)^2}{2\sigma^2}}.$$

Приклад 16.4. Система (X,Y) розподілена по круговому нормальному закону з параметрами $a_X=a_Y=0$ і $\sigma=1$. Знайдіть функцію розподілу $F(x,y)$ ті ймовірність попадання (X,Y) в прямокутник $x_1\le x\le x_2$, $y_1\le y\le y_2$.

Розв'язування. Маємо

$$F(x,y)=P(X<x,Y<y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}dudv=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}e^{-\frac{v^2}{2}}dv=$$

$$=\left[0{,}5+\Phi(x)\right]\cdot\left[0{,}5+\Phi(y)\right],$$

де Φ - функція Лапласа. Шукана ймовірність дорівнює:

$$P(x_1\le X\le x_2,y_1\le Y\le y_2)=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}f(u,v)dudv=$$

$$=\left[\Phi(x_2)+\Phi(x_1)\right]\cdot\left[\Phi(y_2)+\Phi(y_1)\right].$$

Задачі для розв'язування:

91. Незалежні випадкові величини X та Y рівномірно розподілені відповідно на відрізках $[-1,1]$ та $[0,2]$.

Знайдіть:

а) щільності ймовірностей $f_X(x)$ та $f_Y(y)$ випадкових величин X та Y;

б) функції розподілу $F_X(x)$ та $F_Y(y)$;

в) щільність ймовірностей $f(x,y)$ системи (X,Y);

г) функцію розподілу $F(x,y)$ системи (X,Y);

д) ймовірність події $(-1\le X<0,\ 0\le Y<1)$ двома способами: перший – з допомогою $f(x,y)$, а другий – з допомогою $F(x,y)$.

92. Система випадкових величин (X,Y) рівномірно розподілена в прямокутнику з вершинами $(0,0,)$, $(a,0)$, (a,b), $(0,b)$.

1) Знайдіть:

а) щільність ймовірностей $f(x,y)$ системи (X,Y);

б) функцію розподілу $F(x,y)$ системи (X,Y);
в) щільності ймовірностей $f_X(x)$ та $f_Y(y)$ випадкових величин X та Y;
г) ймовірність події $\left(0 \le X \le \dfrac{a}{2},\ 0 \le Y \le \dfrac{b}{3}\right)$ двома способами: перший – з допомогою $f(x,y)$, а другий – з допомогою $F(x,y)$.
2) Чи являються X та Y незалежними?

93. Система (X,Y) розподілена рівномірно в трикутнику, обмеженому прямими $x=0,\ y=0$ та $x+y=a$, де $a>0$.
1) Знайдіть:
а) щільність ймовірностей $f(x,y)$ системи (X,Y);
б) функцію розподілу $F(x,y)$ системи (X,Y);
в) щільності ймовірностей $f_X(x)$ та $f_Y(y)$ випадкових величин X та Y;
г) функції розподілу $F_X(x)$ та $F_Y(y)$;
д) ймовірність події $X^2+Y^2 \le \dfrac{a^2}{4}$.
2) Чи являються X та Y незалежними?

94. Система (X,Y) розподілена рівномірно в трикутнику, обмеженому прямими $x=2,\ y=0$ та $x=y$.
1) Знайдіть:
а) щільність ймовірностей $f(x,y)$ системи (X,Y);
б) функцію розподілу $F(x,y)$ системи (X,Y);
в) щільності ймовірностей $f_X(x)$ та $f_Y(y)$ випадкових величин X та Y;
г) функції розподілу $F_X(x)$ та $F_Y(y)$ величин X та Y;
д) ймовірність того, що випадкова точка (X,Y) попаде в коло, вписане у вказаний трикутник.
2) Чи являються X та Y незалежними?

95. Система (X,Y) рівномірно розподілена у квадраті зі стороною a, діагоналі якого належать координатним осям.
1) Знайдіть:
а) щільність ймовірностей $f(x,y)$ системи (X,Y);
б) функцію розподілу $F(x,y)$ системи (X,Y);
в) щільності ймовірностей $f_X(x)$ та $f_Y(y)$ випадкових величин X та Y;
г) $P(X \le 0, Y \le 0)$
2) Залежні чи ні величини X та Y?

96. Система (X,Y) рівномірно розподілена у колі радіуса R і з центром у початку координат.
1) Знайдіть:

а) щільність ймовірностей $f(x,y)$ системи (X,Y);
б) щільності величин X та Y;
г) $P\left(|X|\le \frac{R}{2}, 0\le Y\le \frac{R}{3}\right)$.
2) Залежні чи ні величини X та Y?

97. Система випадкових величин (X,Y) розподілена по нормальному круговому закону з параметрами $a_X = a_Y = 0$ і $\sigma = 1$. Напишіть щільність ймовірностей $f(x,y)$ системи (X,Y) і щільності ймовірностей $f_X(x)$ та $f_Y(y)$ координат X та Y. Знайдіть ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) у квадрат $-1\le X\le 1,\ -1\le Y\le 1$.

98. Система 2 незалежних випадкових величини (X,Y) розподілена по нормальному закону з параметрами $a_X = 3,\ a_Y = -2,\ \sigma_X = 2,\ \sigma_Y = 4$. Запишіть щільності ймовірностей величин X та Y та щільність ймовірностей системи (X,Y). Знайдіть функцію розподілу системи (X,Y) та ймовірність події $(1\le X\le 5,\ -6\le Y\le 2)$.

99. Система 2 незалежних випадкових величини (X,Y) розподілена по нормальному закону з параметрами $a_X = -1,\ a_Y = 0;\ \sigma_X = 2,\ \sigma_Y = 3$. Напишіть ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) у прямокутник, центр якого співпадає з початком координат, а сторони паралельні осям координат і рівні відповідно 4 та 6.

100. Щільність ймовірностей системи двох випадкових величин X та Y дорівнює:
$$f(x,y) = ae^{-(x+1)^2-|y|}.$$
Знайдіть:
а) постійний коефіцієнт a;
б) щільності ймовірностей випадкових величин X та Y;
в) функцію розподілу системи (X,Y).
Залежні чи ні величини X та Y?

101. Система двох випадкових величин (X,Y) має щільність ймовірностей
$$f(x,y) = \frac{a}{1+\left(x^2+y^2\right)^2}.$$
Знайдіть:
а) постійний коефіцієнт a:
б) радіус кола з центром у початку координат, ймовірність попадання (X,Y) у який дорівнює 0,5.

102. Щільності ймовірностей незалежних випадкових величин X та Y відповідно дорівнюють

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x_2}}, & |x|<1,\\ 0, & |x|\ge 1,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\frac{1}{\pi\left(1+y^2\right)}.$$

Визначте:

а) щільність ймовірностей системи (X,Y);

б)функцію розподілу кожної випадкової величини;

в) функцію розподілу системи (X,Y).

103. Система двох випадкових величин (X,Y) має щільність ймовірностей

$$f(x,y)=\frac{a}{1+x^2+y^2+x^2y^2}.$$

Потрібно:

а) знайти коефіцієнт a;

б) ймовірність попадання точки (X,Y) у прямокутник $(0<X<1,\ -1\le Y\le 1)$;

в) визначити функцію розподілу системи (X,Y);

г) визначити щільності ймовірностей випадкових величин X та Y;

д) з'ясувати, чи являються величини X та Y залежними?

104. Система випадкових величин (X,Y) задана щільністю ймовірностей

$$f(x,y)=\begin{cases}\cos x\cos y, & 0<x<\dfrac{\pi}{2},\ 0<y<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \textit{для інших } \text{x} \textit{ та } y.\end{cases}$$

Потрібно:

а) знайти функцію розподілу системи (X,Y);

б) знайти щільності ймовірностей випадкових величин X та Y;

г) визначити, чи являються величини X та Y залежними?

д) знайти ймовірність події $Y<2X$.

105. Система випадкових величин (X,Y) задана щільністю ймовірностей

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y, & 0<x<1,\ 0<y<1,\\ 0, & \text{у протилежному випадку.}\end{cases}$$

Знайдіть

а) функцію розподілу системи (X,Y);

б) щільності ймовірностей випадкових величин X та Y;

в) функції розподілу X та Y;

г) ймовірність події $Y<X^2$;

д) чи являються величини X та Y незалежними?

106. Задана функція розподілу системи випадкових величин

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-x-y}, & x\ge 0,\ y\ge 0,\\ 0, & y<0 \text{ або } x<0.\end{cases}$$

Знайдіть щільність ймовірностей $f(x,y)$ і ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) у прямокутник $(0 \le X \le 1,\ 0 \le Y \le 1)$. Визначте ймовірність попадання двома способами: з допомогою $F(x,y)$ та з допомогою $f(x,y)$.

107. Задана функція розподілу системи (X,Y)

$$F(x,y)=\begin{cases}\left(1-e^{-4x}\right)\left(1-e^{-2y}\right), & x \ge 0,\ y \ge 0,\\ 0, & y<0 \text{ або } x<0.\end{cases}$$

Знайдіть

а) щільність ймовірностей системи (X,Y);

б) функції розподілу величин X та Y;

в) щільності ймовірностей випадкових величин X та Y.

§ 17. Функція від двох неперервних випадкових величин

Означення. Якщо кожній парі можливих значень випадкових величин X і Y по заданому правилу відповідає одне можливе значення випадкової величини Z, то Z називають функцію від двох випадкових величин, записують $Z=\phi(X,Y)$

При заданій сумісній щільності $f(x,y)$ системи неперервних випадкових величин (X,Y) функція розподілу $G(z)$ величин $Z=\phi(X,Y)$ знаходиться за формулою

$$G(z)=P(Z<z)=P(\phi(X,Y)<z)=P((x,y)\in D_z)=\iint\limits_{D_z} f(x,y)dxdy,$$

де $D_z=\{(x,y):\phi(x,y)<z\}$.

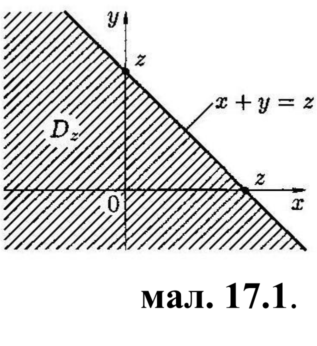
Якщо існує щільність $g(z)$ величини $Z=\phi(X,Y)$, то її знаходимо диференціюванням $g(z)=G'(z)$

Приклад 17.1. Нехай задана система (X,Y) зі щільністю $f(x,y)$. Знайти щільність $g(z)$ величини $Z=X+Y$

Розв'язування. Знайдемо функцію розподілу випадкової величини $Z=X+Y$

$$G(z)=P(Z<z)=P(X+Y<z)=\iint\limits_{D_z} f(x,y)dxdy,$$

де $D_z=\{(x,y):x+y<z\}$ - точки площини Oxy, координати яких задовольняють нерівність $x+y<z$ (мал.17.1).



мал. 17.1.

Отримуємо

$$G(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int\limits_{-\infty}^{z-x} f(x,y)dy\Big)dx$$

Диференціюючи отриману рівність по змінній z, отримаємо вираз для щільності випадкової величини $Z = X + Y$

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x)dx.$$

Якщо випадкові величини X і Y незалежні, то $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ і $g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \cdot f_2(z - x)dx$.

Закон розподілу суми незалежних випадкових величин називають композицією або згорткою законів розподілу доданків.

Приклад 17.2. Нехай незалежні випадкові величини X і Y рівномірно розподілені на $[0,1]$. Знайти розподіл випадкової величини $Z = X + Y$.

Розв'язування. Згідно з умовою, щільність кожної з величин X і Y дорівнює

$$f_1(x) \cdot f_2(y) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}.$$

За формулою згортки

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \cdot f_2(z - x)dx = \int_0^1 f_2(z - x)dx.$$

Далі, $f_2(z - x) = 1$, якщо $0 \le z - x \le 1$, $0 \le x \le 1$, а в усіх інших випадках $f_2(z - x) = 0$.Співвідношення $0 \le z \le x + 1$, $0 \le x \le 1$ визначають область, в якій $f_2(z - x) = 1$. Звідки отримуємо, що при z<0 і $z > 2$ $f_2(z - x) = 0$, тобто $g(z) = 0$.

Якщо $0 \le z \le 1$, то $g(z) = \int_0^z 1dx = z.$

Якщо $1 < z \le 2$, то $g(z) = \int_{z-1}^1 1dx = 2 - z.$

Таким чином,

$$g(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ z, & 0 \le z \le 1 \\ 2 - z, & 1 < z \le 2 \\ 0, & z > 2 \end{cases}.$$

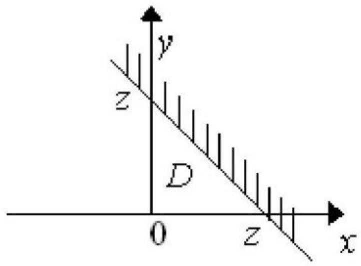
Приклад 17.3. Нехай X і Y – незалежні випадкові величини, що мають показниковий розподіл з параметром $\lambda = 2$. Знайти щільність суми $Z = X + Y$.

Розв'язування. Оскільки X і Y розподілені за показниковим законом з параметром $\lambda = 2$, то їх щільності рівні

$$f_1(x) = f_2(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 2e^{-2x}, & x > 0 \end{cases}.$$

За формулою згортки

$$g(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\cdot f_2(z-x)dx=\int\limits_{0}^{+\infty} 2e^{-2x}\cdot f_2(z-x)dx\,.$$



мал. 17.2

Згідно з формулою згортки інтегрування проводиться по області D - області додатних змінних x і y, межею якої (для заданого z) є пряма $x+y=z$.

Таким чином

$$g(z)=\int\limits_{0}^{z} 2e^{-2x}\cdot 2e^{-2(z-x)}dx=-4e^{-2z}\int\limits_{0}^{z} e^{-2x+2x}dx=4ze^{-2z}\,.$$

Отже,

$$g(z)=\begin{cases} 0, & z<0 \\ 4ze^{-2z} & z\ge 0 \end{cases}$$

Приклад 17.4. Незалежні випадкові величини X і Y розподілені нормально з параметрами $a_X=a_Y=0$ і $\sigma_X=\sigma_Y=1$. Знайти щільність суми $Z=X+Y$.

Розв'язування. За умовою

$$f_1(x)=f_2(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

За формулою згортки

$$g(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx= =\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\frac{2x^2-2zx+z^2}{2}}dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\frac{2((x-\frac{z}{2})^2+\frac{2^2}{4})}{2}}dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int\limits_{\infty}^{+\infty}e^{-(x-\frac{z}{2})^2}d(x-\frac{z}{2})=\frac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{z^2}{4}}\cdot\sqrt{\pi}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2(\sqrt{2})^2}},$$

де $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}$ - інтеграл Пуассона.

Таким чином,

$$g(X+Y)=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2(\sqrt{2})^2}}.$$

Сума незалежних нормальних випадкових величин (з $a=0,\sigma=1$) має нормальний розподіл (з $a=0,\ \sigma=\sqrt{2}$).

Приклад 17.5. Випадкові величини X і Y незалежні, X рівномірно розподілена на $[0,1]$, Y розподілена за нормальним законом з параметрами $a=0,\sigma=1$. Знайти композицію законів розподілу X і Y, тобто закон розподілу $Z=X+Y$

Розв'язування. За умовою

$$f_1(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\\ 0, & x\notin[0,1]\end{cases},\qquad f_2(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

За формулою згортки

$$g(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)\cdot f_2(z-x)dx=\int_0^1 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx=$$

$$=[u=z-x]=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_z^{z-1}e^{-\frac{u^2}{2}}=\Phi(z)-\Phi(z-1).$$

Приклад 17.6. Нехай X і Y – незалежні випадкові величини, що мають показниковий розподіл з параметром λ. Знайти функцію розподілу випадкової величини $Z=\dfrac{X+Y}{X}$

Розв'язування. За умовою щільність кожної з величин X і Y.

$$f_1(x)\cdot f_2(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}.$$

Оскільки $X>0,\ Y>0$, то з ймовірністю 1 $Z>1$. Тому $P\left(\dfrac{X+Y}{X}<Z\right)=0$, якщо $Z\le 1$.

Нехай $Z>1$. Розглянемо плоску область D_z:

$$D_z=\left\{(x,y):\frac{x+y}{x}<z,x>0,y>0\right\}.$$

Частиною її межі є пряма лінія $y=x(z-1)$. Якщо $x>0,y>0$, то

$$G(Z)=P(Z<z)=P((x,y)\in D_z)==\iint_{D_z}f_1(x)\cdot f_2(y)dxdy=\iint_{D_z}\lambda e^{-\lambda x}\cdot\lambda e^{-\lambda x}dxdy=$$

$$=\lambda^2\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_0^{x(z-1)}e^{-\lambda x}\cdot e^{-\lambda y}dy=\lambda^2\int_{+\infty}^{-\infty}\left(e^{-\lambda x}\cdot\frac{e^{-\lambda y}}{\lambda}\Bigg|_0^{x(z-1)}\right)dx=$$

$$=\lambda^2\int_0^{+\infty}(e^{-\lambda x}\cdot e^{-\lambda x})dx=1-\frac{1}{x}.$$

Таким чином,

$$G(z)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{z}, & z>1\\ 0, & z\le 0\end{cases}.$$

Задачі для розв'язування:

108. Задана щільність ймовірностей $f(x,y)$ системи випадкових величин (X,Y). Знайти щільність ймовірностей випадкової величини:

а) $Z = X + Y$; б) $Z = X - Y$; в) $Z = \frac{X}{Y}$; г) $Z = XY$.

109. Розв'язати задачу 1 при умові, що X і Y незалежні та мають щільності ймовірностей $f_X(x)$, $f_Y(y)$ відповідно.

110. Випадкові величини X і Y незалежні і кожна рівномірно рівномірна на відрізку $[0,1]$. Знайти щільність ймовірності випадкової величини:

а) $Z = X + Y$; б) $Z = X - Y$; в) $Z = \frac{X}{Y}$.

111. Кожна із незалежних випадкових величин X і Y рівномірно розподілена на відрізку $[0,2]$. Знайти закон розподілу випадкової величини $Z = X + Y$.

112. Кожна із незалежних випадкових величин X і Y рівномірно розподілена відповідно на відрізках $[1,3]$ і $[2,6]$. Знайти щільність ймовірності випадкової величини $Z = X + Y$.

113. Випадкові величини X і Y незалежні і мають показниковий розподіл

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0 \end{cases}, \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \beta e^{-\beta y}, & y > 0 \end{cases}.$$

Знайти щільність ймовірності випадкової величини $Z = X + Y$.

114. Випадкові величини X і Y незалежні і розподілені нормально з параметрами $a_X = a_Y = 0$ і $\sigma_X = \sigma_Y = 1$.

Знайти щільність ймовірності випадкової величини: а) $Z = X + Y$;

б) $Z = X^2 + Y^2$; в) $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

115. Знайти щільність імовірності суми незалежних випадкових величин X і Y, якщо X рівномірно розподілена на відрізку $[0,1]$, а Y має показниковий розподіл зі щільністю $f(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ e^{-y}, & y > 0 \end{cases}$.

116. Доведіть, що сума незалежних випадкових величин, розподілених по нормальному закону, також розподілена по нормальному закону.

§ 18. Характеристична функція

Характеристичною функцією випадкової величини X називається математичне сподівання випадкової величини e^{itX}, позначається $\phi_X(t)$ або $\phi(t)$:

$$\phi_{X(t)} = Me^{itX}, \ t \in R$$

де під комплексною випадковою величиною e^{itX} ми розуміємо комплексне число $e^{itX} = \cos tX + i \sin tX$.

Для ДВВ X, яка приймає значення $x_1, x_2, ...$ з ймовірностями $p_k = P(X = x_k),\ k = 1,\ 2, ...$ характеристична функція задається формулою

$$\phi_{X(t)} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} \cdot p_k,$$

для НВВ з функцією розподілу $F(x)$ – формулою

$$\phi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot dF(x),$$

для НВВ з щільністю $f(x)$ - формулою

$$\phi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot f(x) dx.$$

Властивості характеристичної функції.

1. $\forall t \in E \quad |\phi_X(t)| \le \phi_X(0) = 1;$
2. Якщо $Y = aX + b,\ \ a,\ b - const$, то $\phi_Y(t) = e^{itb} \phi_X(at)$;
3. Якщо $X_1,\ \ldots,\ X_n$ - незалежні, то
$$\phi_{X_1 + ... + X_n}(t) = \phi_{X_1}(t) \cdot \phi_{X2}(t) \cdot ... \cdot \phi_{X_n}(t);$$
4. Якщо для деякого k існує початковий момент k-го порядку випадкової величини X, тобто $\alpha_k = M(X^k)$, то існує k-а похідна характеристичної функції і її значення при $t = 0$ дорівнює α_k, помноженому на i^k:

$\phi_X^{(k)}(0) = i^k M(X^k)$,

$\alpha_k = i^k \phi_X''(0)$,

$\alpha_1 = MX = -i\phi_X''(0)$,

$\alpha_2 = MX^2 = -\phi_X''(0)$,

$DX = \alpha_2 - \alpha_1^2 = -\phi_X''(0) + (\phi_X'(0))^2$.

Приклад 18.1. а) Нехай $X_1,\ \ldots,\ X_n$ - незалежні випадкові величини, кожна з них приймає значення 1 та -1 з ймовірностями 0,5. Обчислити характеристичну функцію величин $Z = X_1 + \ldots + X_n$

б) Довести, що $\forall n \in N$ функції $\phi(t) = \cos^n t,\ t \in R$ є характеристичною.

Розв'язування. а) За умовою

X_k	-1	1
p_k	0,5	0,5

$k = \overline{1, n}$

Тоді,

$$\phi_{X_k}(t) = e^{-it} \cdot \frac{1}{2} + e^{it} \cdot \frac{1}{2} = \cos t$$

Виходячи з незалежності величин, маємо

$$\phi_Z(t) = \phi_{X_1 + ... + X_n}(t) = \phi_{X_1}(t) \cdot ... \cdot \phi_{X_n}(t) = \cos^n t$$

б) Функція $\phi(t)=\cos^n t,\ t\in R$, для $\forall n\in N$ є характеристичною функцією випадкової величини $Z=\sum_{i=1}^{n} X_i$, розглянутої в п. а).

Приклад 18.2. Знайти відповідний розподіл ймовірностей, якщо відома його характеристична функція:

$$\phi_X(t)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kt,\ a_k\ge 0,\ \forall k\ge 0,\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k=1.$$

Розв'язування. Використовуючи співвідношення

$$\cos t=\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$$

одержимо

$$\phi(t)=a_0+a_1\cos t+a_2\cos 2t+...=$$
$$=a_c+a_1\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}+a_2\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}+...=$$
$$=a_c+\frac{a_1}{2}e^{it}+\frac{a_1}{2}e^{-it}+\frac{a_2}{2}e^{2it}+\frac{a_2}{2}e^{-2it}+...$$

Нехай X - випадкова величина з таким розподілом ймовірностей:

X	0	-1	1	-2	2	…
p	a_0	$\frac{a_1}{2}$	$\frac{a_1}{2}$	$\frac{a_2}{2}$	$\frac{a_2}{2}$	…

Зрозуміло, що задана функція $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kt$ є характеристичною функцією цієї випадкової величини X.

Приклад 18.3. Знайти характеристичну функцію випадкової величини X, розподіленої за біноміальним законом та з її допомогою знайти MX та DX.

Розв'язування. Випадкова величина X приймає значення 0, 1, ..., n з ймовірностями

$$p_k=P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k},\ p+q=1,\ p,\ q\ge 0$$

Знаходимо

$$\phi_X(t)=\sum_{k=0}^{n} e^{itk} C_n^k p^k q^{n-k}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^{itk}\cdot p)^k q^{n-k}=$$
$$=(e^{it}p+q)^n,$$

тобто $\phi_X(t)=(e^{it}p+q)^n$. маємо

$$MX=-i(n(e^{it}p+q)^{n-1}pe^{it}i)\big|_{t=0}=np.$$
$$DX=npq.$$

Приклад 18.4. Знайти характеристичну функцію випадкової величини X, розподіленої нормально з параметрами a та σ, та з її допомогою знайти MX та DX.

Розв'язування. Характеристична функція X рівна

$$\phi_X(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2-2(a+it\sigma^2)x+a^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2-2x(a+it\sigma^2)+(a+it\sigma^2)^2+a^2-(a+it\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{-(x-(a+it\sigma^2))^2}{2\sigma^2}}\cdot e^{-\frac{2ait\sigma^2+(it\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{2ait\sigma^2-t^2\sigma^4}{2\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-(a+it\sigma^2))^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{iat-\frac{t^2\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(\frac{(x-(a+it\sigma^2))^2}{2\sigma^2}\right)^2}\sqrt{2}\sigma d\left(\frac{x-(a+it\sigma^2)}{2\sigma^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{iat-\frac{t^2\sigma^2}{2}}\cdot\sqrt{\pi}=e^{iat-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

Таким чином, $\phi_X(t)=e^{iat-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$, якщо $X\sim N(a,\sigma)$.

Обчислимо MX і DX:

$$MX=-i\phi'(0)=-ie^{iat-\frac{t^2\sigma^2}{2}}(i\alpha-t\sigma^2)\Big|_{t=0}=-i\cdot1\cdot i\cdot a=a,$$

тобто $MX=a$;

$$DX=\left[-\phi''(0)+(\phi'(0))^2\right]=$$

$$=-(-\sigma^2e^{iat-\frac{t^2\sigma^2}{2}}+(ia-t\sigma^2)e^{iat-\frac{t^2\sigma^2}{2}})\Big|_{t=0}+(ia)^2=$$

$$=\sigma^2-i^2a^2+i^2a^2=\sigma^2.$$

Тобто $DX=\sigma^2$. Отримали відомі нам результати: a - математичне сподівання, σ – середнє квадратичне відхилення.

Задачі для розв'язування:

117. Нехай X приймає значення 1 та -1 з ймовірностями 0,5 кожне. Знайти характерну функцію X.

118. Довести, що функція $\phi(z)=\cos^2 z$ є характерною функцією, знайти відповідний розподіл ймовірностей.

119. Довести, що функція $\phi(Z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_ke^{i\lambda_kz}$, де $a_k\ge0$, $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=1$ є характеристичною, знайти відповідний розподіл ймовірностей.

120. Знайти характерну функцію для:

а) розподілу Пуассона з параметром λ;

б) біноміального розподілу з параметрами p і m;

в) геометричного розподілу з параметром p.

121. Знайти за допомогою характеристичної функції математичне сподівання та дисперсію для:

а) розподілу Пуассона з параметром λ;

б) біноміального розподілу з параметрами p і m;

в) геометричного розподілу з параметром p.

122. Нехай X – рівномірно розподілена випадкова величина на відрізку $\left[-a,a\right]$. Обчислити характеристичну функцію X.

123. Нехай X – рівномірно розподілена випадкова величина. на відрізку $\left[-a,b\right]$. Довести, що характеристична функція X рівна

$$\phi(t)=\frac{e^{ibt}-e^{iat}}{it(b-a)}.$$

124. Випадкова величина X має показниковий розподіл з параметром λ. Знайти характеристичну функцію X.

125. Використовуючи характеристичну функцію довести, що справедливе твердження: якщо X, Y – незалежні випадкові величини, розподілені за нормальним законом $N\left(a_X,\sigma_X^2\right)$, $N\left(a_Y,\sigma_Y^2\right)$ відповідно, то випадкова величина $Z=X+Y$ розподілена за нормальним законом $N\left(a_X+a_Y,\sigma_X^2+\sigma_Y^2\right)$.

126. Нехай X, Y – незалежні випадкові величини, розподілені за законом Пуассона з параметрами λ_{X} та λ_{Y} відповідно. Довести, що випадкова величина $Z=X+Y$ розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda_{\mathrm{X}}+\lambda_{\mathrm{Y}}$.

127. Нехай $\phi(t)$ характеристична функція випадкової величини, яка нормально розподілена $N(0,1)$.

а) Використовуючи інтегрування та диференціювання по частинах, довести, що $\phi'(t)=-z\phi(t)$, а звідси $\phi(t)=e^{-\frac{1}{2}t^2}$.

б) Довести, що характеристична функція нормального розподілу із середнім a та дисперсією σ^2 має вигляд $\phi(t)=e^{ita-\frac{1}{2}t^2\sigma^2}$.

128. а) Нехай X_1 і X_2 - незалежні однаково розподілені випадкові величини з характеристичною функцією $\phi(t)$**.** Знайти характеристичну функцію випадкової величини X_1-X_2.

б) Якщо $\phi(t)$ характеристична функція, то $\left[\phi(t)\right]^2$ також є характеристичною функцією. Довести це.

129. а) Випадкова величина X має двосторонній показників розподіл зі щільністю

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},\ x\in R.$$

Довести, що характеристична функція X рівна

$$\phi(t)=\frac{1}{1+t^2}.$$

б) Випадкова величина X має розподіл Коші зі щільністю

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{a}{a^2+x^2},\ a>0.$$

Довести, що характеристична функція X рівна

$$\phi(t)=e^{-a|t|}.$$

130. Випадкова величина X має щільність розподілу

$$f(x)=\begin{cases}0, & |x|>a,\\ \frac{1}{a}\left(1-\frac{|x|}{a}\right), & |x|\le a.\end{cases}$$

Довести, що характеристична функція X рівна

$$\phi(t)=2\frac{1-\cos at}{a^2t^2}.$$

б) Випадкова величина X має щільність розподілу

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1-\cos ax}{a^2x^2}.$$

Довести, що характеристична функція X рівна

$$\phi(t)=\begin{cases}0, & |t|>a,\\ 1-\frac{|t|}{a}, & |t|\le a.\end{cases}$$

131. Характеристична функція $\phi(t)$ набуває тільки дійсні значення. Довести, що для $\forall t\in R$

$$\phi(t)=\phi(-t).$$

132. Випадкові величини X_1 і X_2 та Y незалежні, характеристичні функції X_1 і X_2 дорівнюють $\phi_1(t)$ і $\phi_2(t)$ відповідно, $P\{Y=1\}=1-P\{Y=0\}=p$, $p\in(0,1)$. Знайти характеристичну функцію випадкової величини $Z=YX_1+(1-Y)X_2$.

133. Довести, що періодична функція $\phi(t)=1-\frac{|t|}{a}$, $|t|<a$ і з періодом $2a$, є характеристичною.

134. Довести, що будь-яка дійсна характеристична функція $\phi(t)$ має властивість:

$$1-\phi(2t)\le 4\left(1-\phi(t)\right)$$

135. Чи є функція $\phi(t)=1-it$ характеристичною?

136. Переконатись, що функція

$$\phi(t)=\frac{1-\beta}{1+\alpha}\cdot\frac{1+\alpha e^{-it}}{1-\beta e^{it}},\quad 0<\alpha<\beta<1,$$

є характеристичною, і знайти відповідний розподіл.

§ 19. Закон великих чисел. Нерівності Чебишова

Якщо X - невід’ємна випадкова величина, $\exists\, M[X]$ і $\varepsilon>0$ - довільне число, то

$$P(X\geq\varepsilon)\leq\frac{M[X]}{\varepsilon}.$$

Якщо X - невід’ємна випадкова величина, $\exists\, M[X]$ і $D[X]<+\infty$, $\varepsilon>0$ - довільне число, то

$$P(|X-M[X]|\geq\varepsilon)\leq\frac{D[X]}{\varepsilon^2}.$$

Означення. Нехай $X_n,\ n=1,2,...$ - послідовність випадкових величин. Кажуть, що ця послідовність підпорядковується закону великих чисел, якщо

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}-\frac{\sum_{i=1}^{n}M[X_i]}{n}\right|<\varepsilon\right)=1,\ \forall\varepsilon>0.$$

Теорема Чебишова. Нехай випадкові величини $X_1,\ X_2,\ ...,X_n,\ ...$ незалежні $\exists\, M[X_1],\ \exists\, M[X_2],\ \ldots,\ \exists\, M[X_n],\ \ldots$ та $D[X_n]<L$ для $\forall n$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}-\frac{\sum_{i=1}^{n}M[X_i]}{n}\right|<\varepsilon\right)=1,\ \forall\varepsilon>0.$$

Окремим випадком теореми Чебишова є теорема Бернуллі: Нехай $\mu(n)$ - абсолютна частота події A в n незалежних випробуваннях, p - ймовірність події A в кожному випробуванні. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{\mu(n)}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1,\ \forall\varepsilon>0.$$

Приклад 19.1. гральний кубик підкидають навмання 350 разів. Оцінити знизу ймовірність того, що середнє арифметичне числа випавши очок відхилиться від математичного сподівання по модулю менше, ніж на 0,2.

Розв’язування. Нехай $X_i,\ i=\overline{1,350}$ - незалежні випадкові величини, що являють собою число очок, які випали на верхній грані грального кубика. Легко одержати $M\left[X_i\right]=3{,}5$ та $D\left[X_i\right]=\frac{35}{12}$. За другою нерівністю Чебишова, коли $X=\frac{\sum_{i=1}^{350}X_i}{350}$,

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{350}X_i}{350}-3{,}5\right|<0{,}2\right)=1-P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{350}X_i}{350}-3{,}5\right|\geq 0{,}2\right)\geq$$

$$\geq 1-\frac{D\frac{\sum_{i=1}^{350}X_i}{350}}{0{,}2^2}=1-\frac{350\cdot 35}{350^2\cdot 0{,}04\cdot 12}=1-\frac{35}{350\cdot 0{,}04\cdot 12}\approx 0{,}792.$$

Приклад 19.2. Нехай $X_n,\ n=1,2,...$ - послідовність випадкових величин. Випадкова величина $X_n,\ n=1,2,...$ може приймати тільки три значення: $-\sqrt{n},\ 0,\ \sqrt{n}$ з ймовірностями, рівними відповідно $\frac{1}{n},\ 1-\frac{2}{n},\ \frac{1}{n}$. Чи можна застосувати до цієї послідовності закон великих чисел?

Розв'язування. Підрахуємо $M\left[X_n\right]$ і $D\left[X_n\right]$. Маємо

$$M\left[X_n\right]=-\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n}+0\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)+\sqrt{n}\frac{1}{n}=0,$$

$$D\left[X_n\right]=M\left[X_n^2\right]-\left(M\left[X_n\right]\right)^2=n\cdot\frac{1}{n}+0\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)+n\frac{1}{n}=2.$$

Таким чином, виконані умови теореми Чебишова, і до даної послідовності $X_n,\ n=1,2,...$ можна застосувати закон великих чисел.

Задачі для розв'язування

137. 19.1. Середнє значення швидкості вітру біля землі в даному пункті дорівнює 10 км/год. Оцінити за допомогою нерівності Чебишова ймовірність того, що в цьому пункті швидкість вітру (при одному спостереженні) буде менша за 80 км/год.

138. 19.2. Середня витрата води в населеному пункті складає 50000 л за день. Оцінити ймовірність того, що в цьому населеному пункті за даний день витрата води буде менша за 150000 л.

139. Кількість сонячних днів впродовж року в даній місцевості є випадкова величина з математичним сподіванням 75 днів. Оцінити ймовірність того, що впродовж року в даній місцевості буде не менше, ніж 200 сонячних днів.

140. Середнє споживання електроенергії за травень населенням одного з мікрорайонів міста X дорівнює 360000 квт. год.

а) Оцінити ймовірність того, що споживання електроенергії а травень поточного року буде не менше, ніж 1000000 квт. год.
б) Оцінити ту ж саму ймовірність, якщо відомо, що середнє квадратичне відхилення споживання електроенергії в даному мікрорайоні за травень дорівнює 40000 квт. год.

141. Середня температура в студентському гуртожитку під час опалювального сезону дорівнює 20°, а середнє квадратичне відхилення дорівнює 2°. Оцінити ймовірність того, що температура в гуртожитку відхилиться від середньої за модулем менше, ніж на 4°.

142. Випадкова величина X має математичне сподівання $M\left[X\right]=1$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma=0,2$. За допомогою нерівності Чебишова оцінити ймовірність нерівності $0,5<X<1,5$.

143. Середнє квадратичне відхилення похибки вимірювання курсу літака $\sigma=2^\circ$, а математичне сподівання дорівнює 0. Оцінити ймовірність того, що похибка при даному вимірюванні курсу літака буде не менша за 5°.
Середнє квадратичне відхилення похибки вимірювання азимуту дорівнює $30'$, математичне сподівання 0. Оцінити ймовірність того, що похибка середнього арифметичного трьох незалежних вимірювань менша за 1°.

144. Ймовірність події A в кожному з незалежних випробувань дорівнює $p=\frac{1}{3}$.
а) Оцінити ймовірність того, що відносна частота події A відхилиться від її ймовірності за модулем менше, ніж на 0,01, якщо $n=9000$ випробувань.
б) Знайти найменше число випробувань так, щоб з ймовірністю, не меншою за 0,99, частота події A відхилялась за модулем від її ймовірності менше, ніж 0,01.

145. Дисперсія кожної з 2500 незалежних випадкових величин не більша за 5. Оцінити ймовірність того, що відхилення середнього арифметичного цих випадкових величин від середнього арифметичного математичних сподівань менше за 0,4.

146. Для визначення середньої тривалості горіння електролампочок у кожному зі 100 однакових ящиків партії було взято навмання по одній електролампочці. Оцінити ймовірність того, що відхилення середньої тривалості горіння лампочки у вибраній сукупності від середньої тривалості горіння лампочки у всій партії менше, ніж 8 годин, якщо середнє квадратичне відхилення тривалості горіння лампочки в партії не більше за 10 годин.

147. Технічний контролер перевіряє партію однотипних приладів. З ймовірністю 0,01 прилад може мати дефект A і, незалежно від цього, з ймовірністю 0,02 – дефект B. В яких практично вірогідних межах міститься число бракованих виробів в партії з 1000 приладів, якщо за ймовірність практичної вірогідності приймається 0,997?

148. Нехай X_n, $n=1,2,...$ – послідовність незалежних випадкових величин. Випадкова величина X_n, $(n=1,2,...)$ може приймати значення $-n\alpha$, 0, $n\alpha$ $(\alpha>0)$ з ймовірностями, відповідно рівними

а) $\frac{1}{2n^2}$, $1-\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{2n^2}$; б) $\frac{1}{2^n}$, $1-\frac{1}{2^{n-1}}$, $\frac{1}{2^n}$.

Чи можна застосувати до цієї послідовності закон великих чисел?

149. Нехай X_n, $n=1,2,...$ - послідовність незалежних випадкових величин. Кожна випадкова величина X_n може приймати тільки два значення: $\pm\sqrt{\ln n}$ з ймовірностями, що дорівнюють $\frac{1}{2}$. Чи можна застосувати до цієї послідовності закон великих чисел?

150. Нехай X_n, $n=1,2,...$ – послідовність незалежних випадкових величин $M\left[X_n\right]=0$ і $D\left[X_n\right]=n^{\alpha}$ $(\alpha<1)$. Чи можна застосувати до цієї послідовності закон великих чисел?

151. Випадкова величина X_n має «трикутний розподіл», тобто її щільність

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -a_n \\ \dfrac{a_n+x}{a_n^2}, & -a_n<x\le 0 \\ \dfrac{a_n-x}{a_n^2}, & 0<x\le a_n \\ 0, & x>a_n \end{cases}$$

причому $a_n=n^{\delta}$, $\delta<\frac{1}{2}$. Чи можна застосувати до цієї послідовності закон великих чисел?

152. Нехай X_1, X_2, ... – послідовність незалежних випадкових величин, $P\left(X_n=\pm 2^n\right)=2^{-(2n+1)}$, $P\left(X_n=0\right)=1-2^{-2n}$. Чи можна застосувати до цієї послідовності закон великих чисел?

153. Нехай X_1, X_2, ...– послідовність незалежних випадкових величин, причому X_n набуває значень 2^n та 2^{-n} з ймовірністю $\frac{1}{2}$. Чи можна застосувати до цієї послідовності закон великих чисел?

154. Нехай X_1, X_2, ... – послідовність незалежних випадкових величин. Величина X_n набуває з ймовірностями $\frac{1}{2}$ значень $\pm\sqrt{n}$, коли n є точний квадрат, з ймовірностями $\frac{1}{2}$ значень $\pm\frac{1}{2^n}$ – в інших випадках. Чи можна застосувати до цієї послідовності закон великих чисел?

155. При яких значеннях $\alpha > 0$ до послідовності незалежних випадкових величин $X_1,\ X_2,\ \dots$, таких що $P\left(X_n = n^{\alpha}\right) = P\left(X_n = -n^{\alpha}\right) = \dfrac{1}{2},$ можна застосувати закон великих чисел?

156. Нехай $X_1,\ X_2,\ \dots$ – послідовність незалежних випадкових величин, причому X_n набуває значень $-\phi(n),\ 0,\ \phi(n)$ з ймовірностями $\dfrac{1}{\psi(n)},\ 1-\dfrac{2}{\psi(n)},$ $\dfrac{1}{\psi(n)}$ відповідно, де $\phi(n)$ та $\psi(n)$ такі, що $\phi(n) \geq 0,\ \psi(n) \geq 2,\ \phi^2(n) \leq C\psi(n)$ де C – константа. Чи можна застосувати до цієї послідовності закон великих чисел?

Додаток 1

Таблиця значень функції $\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1926	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1947	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0043
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 2

Таблиця значень функції $\Phi\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,40	0,1554	0,80	0,2881	1,20	0,3849
0,01	0,0040	0,41	0,1591	0,81	0,2910	1,21	0,3869
0,02	0,0080	0,42	0,1628	0,82	0,2939	1,22	0,3883
0,03	0,0120	0,43	0,1664	0,83	0,2967	1,23	0,3907
0,04	0,0160	0,44	0,1700	0,84	0,2995	1,24	0,3925
0,05	0,0199	0,45	0,1736	0,85	0,3023	1,25	0,3944
0,06	0,0239	0,46	0,1772	0,86	0,3051	1,26	0,3962
0,07	0,0279	0,47	0,1808	0,87	0,3078	1,27	0,3980
0,08	0,0319	0,48	0,1844	0,88	0,3106	1,28	0,3997
0,09	0,0359	0,49	0,1879	0,89	0,3133	1,29	0,4015
0,10	0,0398	0,50	0,1915	0,90	0,3159	1,30	0,4032
0,11	0,0438	0,51	0,1950	0,91	0,3186	1,31	0,4049
0,12	0,0478	0,52	0,1985	0,92	0,3212	1,32	0,4066
0,13	0,0517	0,53	0,2019	0,93	0,3238	1,33	0,4082
0,14	0,0557	0,54	0,2054	0,94	0,3264	1,34	0,4099
0,15	0,0596	0,55	0,2088	0,95	,03289	1,35	0,4115
0,16	0,0636	0,56	0,2123	0,96	0,3315	1,36	0,4131
0,17	0,0675	0,57	0,2157	0,97	0,3340	1,37	0,4147
0,18	0,0714	0,58	0,2190	0,98	0,3365	1,38	0,4162
0,19	0,0753	0,59	0,2224	0,99	0,3389	1,39	0,4177
0,20	0,0793	0,60	0,2257	1,00	0,3413	1,40	0,4192
0,21	0,0832	0,61	0,2291	1,01	0,3438	1,41	0,4207
0,22	0,0871	0,62	0,2324	1,02	0,3461	1,42	0,4222
0,23	0,0910	0,63	0,2357	1,03	0,3485	1,43	0,4236
0,24	0,0948	0,64	0,2389	1,04	0,3508	1,44	0,4251
0,25	0,0987	0,65	0,2422	1,05	0,3531	1,45	0,4265
0,26	0,0126	0,66	0,2454	1,06	0,3554	1,46	0,4279
0,27	0,1064	0,67	0,2486	1,07	0,3577	1,47	0,4292
0,28	0,1103	0,68	0,2517	1,08	0,3599	1,48	0,4306
0,29	0,1141	0,69	0,2549	1,09	0,3621	1,49	0,4319
0,30	0,1179	0,70	0,2580	1,10	0,3643	1,50	0,4332
0,31	0,1217	0,71	0,2611	1,11	0,3665	1,51	0,4345
0,32	0,1255	0,72	0,2642	1,12	0,3686	1,52	0,4357
0,33	0,1293	0,73	0,2673	1,13	0,3708	1,53	0,4370
0,34	0,1331	0,74	0,2703	1,14	0,3729	1,54	0,4382
0,35	0,1368	0,75	0,2734	1,15	0,3749	1,55	0,4394
0,36	0,1406	0,76	0,2764	1,16	0,3770	1,56	0,4406
0,37	0,1443	0,77	0,2794	1,17	0,3790	1,57	0,4418
0,38	0,1480	0,78	0,2823	1,18	0,3810	1,58	0,4429
0,39	0,1517	0,79	0,2852	1,19	0,3830	1,59	0,4441
1,60	0,4452	1,85	0,4678	2,20	0,4861	2,70	0,4965
1,61	0,4463	1,86	0,4686	2,22	0,4868	2,72	0,4967
1,62	0,4474	1,87	0,4693	2,24	0,4875	2,74	0,4969

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,63	0,4484	1,88	0,4699	2,26	0,4881	2,76	0,4971
1,64	0,4495	1,89	0,4706	2,28	0,4887	2,78	0,4973
1,65	0,4505	1,90	0,4713	2,30	0,4893	2,80	0,4974
1,66	0,4515	1,91	0,4719	2,32	0,4898	2,82	0,4976
1,67	0,4525	1,92	0,4726	2,34	0,4904	2,84	0,4977
1,68	0,4535	1,93	0,4732	2,36	0,4909	2,86	0,4979
1,69	0,4545	1,94	0,4738	2,38	0,4913	2,88	0,4980
1,70	0,4554	1,95	0,4744	2,40	0,4918	2,90	0,4981
1,71	0,4564	1,96	0,4750	2,42	0,4922	2,92	0,4982
1,72	0,4573	1,97	0,4756	2,44	0,4927	2,94	0,4984
1,73	0,4582	1,98	0,4761	2,46	0,4931	2,96	0,4985
1,74	0,4591	1,99	0,4767	2,48	0,4934	2,98	0,4986
1,75	0,4599	2,00	0,4772	2,50	0,4938	3,00	0,49865
1,76	0,4608	2,02	0,4783	2,52	0,4941	3,20	0,49931
1,77	0,4616	2,04	0,4793	2,54	0,4945	3,40	0,49966
1,78	0,4625	2,06	0,4803	2,56	0,4948	3,60	0,499841
1,79	0,4633	2,08	0,4812	2,58	0,4951	3,80	0,499928
1,80	0,4641	2,10	0,4821	2,60	0,4953	4,00	0,499968
1,81	0,4649	2,12	0,4830	2,62	0,4956	4,50	0,499997
1,82	0,4656	2,14	0,4838	2,64	0,4959	5,00	0,499999
1,83	0,4664	2,16	0,4846	2,66	0,4961		
1,84	0,4671	2,18	0,4854	2,68	0,4963		

Список використаної літератури

1. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. — М., 2002
2. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика — М.: Высшая школа, 1977
3. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике — М.: Высшая школа, 1975
4. Золотаревская Д.И. Теория вероятностей Задачи с решениями. — М., 2003
5. Маценко П. К., Селиванов В.В. Руководство к решению задач по теории вероятностей. — Ульяновск, 2000
6. Чорна М. П. Методичні вказівки до практичних занять Теорія ймовірностей. — Одеса, 1996
7. Грахов В. Б. Теория вероятностей в упражнениях и задачах. — Екатеринбург, 2006
8. Агапов Г. И. Задачник по теории вероятностей. — Москва, Высшая школа, 1994.
9. Андрухаев Х. М. Сборник задач по теории вероятностей. — Москва, «Просвещение», 1985
10. Калинин В. В., Фастовец Н. О. Вероятность в примерах и задачах для нефтегазового образования. — Москва, 2004
11. Дороговцев А. Я., Сильвестров Д. С., Скороход А. В., Ядренко М. И. Теория вероятностей. Сборник задач. — Киев, «Вища школа», 1980
12. Письменный Д. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике. — Москва: Айрис-пресс, 2004. – 256с. – (Высшее образование)
13. Черняк О. І., Обушна О. М., Ставицький А. В. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики. — Київ, 2000
14. Чорна М. П., Чернецький В. О. Теорія ймовірностей. Методичні вказівки до практичних занять — Одеса, 1999.
15. Севастьянов Б. А. Курс теории вероятностей и математической статистики. — М.: Наука. Главная редакція физико-математической литературы, 1982. — 256с.
16. Єлейно Я. І., Копитко Б. І., Тріщ Б. М. Теорія ймовірностей. Теореми, приклади і задачі.: Навчально-методичний посібник.— Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2009. 260с.

Навчальне видання

Устимчик Ганна Василівна
Матвіюк Людмила Василівна
Вартанян Григорій Михайлович

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Методичні вказівки для студентів напряму 6.040201 - «математика»

За редакцією авторів

Підп. до друку 03.07.2015. Формат 60х84/16.
Ум.-друк. арк. 7,91. Тираж 25.
Зам. № 1212.

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.

Україна, 65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12
Тел. (048) 723-28-39. E-mail: druk@onu.edu.ua