Парадигма развития науки

Методологическое обеспечение

А. Е. Кононюк

ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНАЯ МАТЕМАТИКА

Книга 2

Множества

Часть 2

Нечеткие

Киев
«Освіта України»
2012


Структурная схема развивающейся панмедийной системы наук
I. Группа междисциплинарных наук
ПН Теория понятий
ЛГ Теория лингвистики
ПЗ Теория познания
СЗ Теория созидания
ПТ Общая теория понятоведения
II. Группа наук познания (фундаментальных наук)
ИН Теория информации
СТ Теория систем
РС Теория распознавания
КС Теория консалтинга (консультирования)
ПР Теория принятия решения
РР Теория реализации принятых решений
III. Группа наук созидания (прикладных наук)
СС Теория социальных систем
ЖО Теория жизнеобеспечения
КМ Теория коммуникаций и транспортирования
ОБ Теория образования (обучения)
СР Теория сохранения (защиты и охраны)
РЗ Теория развития
IV. Группа общедисциплинарных наук (обеспечивающих наук)
ДМ Теория дискретно-непрерывной математики (четкая и нечеткая)
НИ Теория научных исследований
ММ Теория моделей и моделирования
ОМ Теория оптимизации

УДК 51 (075.8)
ББК В161.я7
К213

Рецензенты:

В. В. Довгай — к-т физ.-мат. наук, доц. (Национальный тех— нический университет «КПІ»);

В. В. Гавриленко — д-р физ.-мат. наук, проф.,

О. П. Будя — к-т техн. наук, доц. (Киевский университет эко— номики, туризма и права);

Н. К. Печурин — д-р техн. наук, проф. (Национальный ави— ационный университет).

Кононюк А. Е.
К213 Дискретно-непрерывная математика. (Множества (нечеткие)). — В 12-и кн. Кн 2, ч.2— К.: Освіта України. 2012.,— К.: Освіта України. 2012. — 452 с.

ISBN 978-966-373-693-8 (многотомное издание)
ISBN 978-966-373-694-5 (книга 2, ч.2)

Многотомная работа содержит систематическое изложение математических дисциплин, исспользуемых при моделировании и исследованиях математических моделей систем.

В работе излагаются основы теории множеств, отношений, поверхностей, пространств, алгебраических систем, матриц, графов, математической логики, теории формальных грамматик и автоматов, теории алгоритмов, которые в совокупности образуют единную методолгически взамосвязанную математическую систему «Дискретно-непрерывная математика».

Для бакалавров, специалистов, магистров, аспирантов, докторантов всех специальностей.

УДК 51 (075.8)
ББК В161.я7

ISBN 978-966-373-693-8 (многотомное издание)
ISBN 978-966-373-694-5 (книга 2, ч.2)

Оглавление

1. Основные понятия и операции над нечеткими множествами

Введение

В свое время появление формальной логики были шагом вперед в борьбе с неопределенностью, нечеткостью представления человеческих знаний. Логика была призвана исключить нестрогость, неоднозначность из рассуждений. Возникла необходимость создания теории, позволяющей формально описывать нестрогие, нечеткие понятия и обеспечивающей возможность продвинуться в познании процессов рассуждений, которые содержат такие понятия. Крупным шагом в этом направлении явился подход, основанный на использовании понятия нечеткого множества Л. Заде. Этот подход позволяет дать строгое математическое описание в действительности нечетких утверждений, реализуя в такой способ попытку преодолеть лингвистический барьер между человеком, суждения и оценки которого являются приближенными и нечеткими, и машинами, которые могут выполнять только четкие инструкции. Человек способен рассуждать, обучаться и принимать решения в нечеткой, расплывчатой обстановке. Возможности же современных ЭВМ не позволяют еще реализовать возможностей человека, поэтому розвитие нечеткого подхода (теории нечетких множеств) - шаг вперед в развитии инструмента, который позволяет разработать методы решения указанных проблем.

Теория нечетких множеств появилась в результате обобщения, переосмысления достижений: многозначной логики, позволившей перейти к произвольному множеству значений истинности (трехзначная логика Лукасевича, *k*-значная логика Поста, бесконечнозначная логика); теории вероятностей и математической статистики, где аккумулируются различные способы обработки экспериментальных данных (гистограммы, функции распределения) и указываются пути формализации неопределенностей; дискретной математики (теория матриц, теория графов, теория автоматов, теория формальных грамматик, ...), предложившей инструмент для формулирования адекватных моделей при решении множества практических задач.

В теории нечетких множеств предлагаются следующие способы формализации нечетких понятий.

Первый способ (основан на роботах Загде) предполагает отказ от основного утверждения классической теории множеств о том, что некоторый элемент может либо принадлежать, либо не принадлежать множеству. При этом вводится специальная характеристическая функция множества - так называемая функция принадлежности, которая принимает значение в интервале [0, 1]. Этот способ приводит к *континуальной логике*.

При ***втором,*** более общем способе формализации нечеткости, предполагается, что характеристические функции множества принимают значение не в интервале [0, 1], а в конечной или бесконечной дистрибутивной решетке. Многие из основных операций нечеткой логики со значениями истинности в интервале [0, 1] могут быть распространенные на случай значений истинности в дистрибутивной решетке. Это обобщение называется *нечеткими множествами в смысле Гогена*.

Третий способ — Р-нечеткие множества. При этом обобщении каждый элемент универсального множества (reference space) связан не с точкой в интервале [0, 1], а с подмножеством, или частью этого интервала. *Алгебра* Р-нечетких множеств может быть сведена к *алгебре классов*.

Четвертый способ — *гетерогенные нечеткие множества*. Здесь в общем случае элементам универсального множества ставятся в соответствие значения в разных дистрибутивных решетках. Каждый элемент может быть связан с наиболее подходящей к нему оценкой. Более того, сами значения оценок могут быть нечеткими и задаваться в виде функций. Таким путем мы приходим к нечетким множествам типа 2. Обобщая эти соображения, получаем нечеткое множество типа n, $n = 1, 2, 3. ...$, для которого значениями оценок являются нечеткие множества типа $n — 1$.

Вышеприведенные способы формализации нечетких понятий позволяют приближенно описывать поведение систем настолько сложных и плохо определенных, что они не поддаются точному математическому анализу. В ряде случаев такое описание является единственно возможным.

В реальных ситуациях принятия решений цели, ограничения, критерии выбора в большей части субъективны и точно не определены. Поэтому при построении моделей принятия решений возникает необходимость использования нечеткой логики, нечетких множеств и отношений. Нечеткие отношения позволяют моделировать плавное, постепенное изменение свойств, а также неизвестные функциональные зависимости, выраженные в виде качественных связей. Нечеткие алгоритмы, которые допускают использование нечетких инструкций, широко распространенных в различных сферах человеческой деятельности, позволяют описывать приближенные рассуждения и, следовательно, являются полезным инструментом для приближенного анализа таких систем и процессов принятия решений, которые слишком сложны для применения общепринятых количественных методов. Важным понятием, относящимся к теории нечетких множеств, является невероятностная энтропия, которая служит интегральной характеристикой нечеткости нечеткого множества. Изменение энтропии есть основным информационным показателем в моделях принятия решений.

Чего же можно ожидать от теории нечетких множеств в различных областях человеческих знаний?

В *философском плане* теория нечетких множеств примечательна тем, что открывает новый подход к решению проблемы абстракции и образования понятий, которые обладают богатством всевозможных оттенков.

В *области анализа больших систем* (например, системы управления экономикой страны, области и т.д.) приоткрывается возможность моделирования неопределенности, выражененной, в частности, в градациях информированности центра о нижележащих уровнях.

В *области психологии* — это моделирование свойств целостности, диффузности психических образов и представлений, гибкости мышления, многозначности элементов языка, которые присутствуют на всех уровнях отображения, регуляции и коммуникации.

В области *лингвистики* — это моделирование смысла (семантики) предложений и текстов с помощью распределения возможностей, описываемых функциями принадлежности.

В *области техники* теория нечетких алгоритмов стимулирует развитие гибких автоматизированных производств и робототехнических комплексов, в частности, роботов, способных выполнять отдельные интеллектуальные действия человека. Это дало толчок как развитию командного управления (выполнение нечетких инструкций), так и созданию систем управления с повышенной автономностью. Открытость системы, взаимодействие с внешней средой ставят целый ряд проблем при конструировании соответствующих моделей. Эти проблемы связанны с неопределенностями, неизбежными при описании состояния внешнего мира. Источниками неопределенности такого представления являются: невозможность сколь угодно точного измерения реальных величин; невозможность полного и четкого описания многих физических объектов и ситуаций; принципиальные ограничения по точности и большие погрешности выполнения сенсорных или перцептивних действий; неточность исполнительских действий, которые зачастую не достигают цели; недостаточность размерности модели, не позволяющая отразить все значимые свойства мира. Все это позволяет считать отношение моделирования нечетким. В результате приходим к использованию в качестве состояний модели и мира нечетких множеств в исходных пространствах, а в качестве *действий* (в мире) или *операторов* (в модели) - нечетких преобразований над этими пространствами. Тогда из новых позиций рассматриваются такие проблемы, как поиск в пространстве состояний, декомпозиция задачи на подзадачи, построение планов посредством доказательства теорем в некоторой логической системе и т.д. Здесь также возможно привлечение аппарата нечеткой логики, нечетких автоматов, алгебры нечетких отношений и т.д. Эти и ряд других методов применяются в области искусственного интеллекта - одной из наиболее перспективных научных дисциплин, которая должна использовать теорию нечетких множеств.

Теория нечетких множеств, которая развивается после публикации основополагающей работы Л. Заде, представляет собой обобщение и переосмысление важнейших направлений классической математики.

Дальнейшие шаги в этом направлении связываются с созданием строгих и гибких математических методов исследования нечетко определенных объектов. При этом нечеткость образов, представлений и понятий человека вводится в формальные модели разными способами.

Можно выделить следующие основные классификационные признаки способов формализации нечеткости:

1) по виду представления нечеткой субъективной оценки любой величины (нечеткого множества);

2) по виду области значений функции принадлежности;

3) по виду области определения функции принадлежности;

4) по виду соответствия между областью определения и областью значений (однозначное, многозначное);

5) по признаку однородности или неоднородности области значений функции принадлежности.

Вначале мы рассмотрим основные определения, понятия и операции теории нечетких множеств (подмножеств). Традиционную теорию (обычных, четких) множеств можно рассматривать как частный случай теории нечетких подмножеств.

Важно, что здесь мы имеем новое и очень полезное для нас расширение традиционного понятия. И тем не менее, все то, что можно описать или объяснить с помощью теории нечетких подмножеств, рассматривают и без этой теории, используя другие понятия. Всегда можно заменить одно математическое понятие другим. Но будет ли это новое понятие настолько же понятным, как и старое, и будет ли оно порождать свойства, которые с его помощью было бы легче обнаружить, доказать и использовать.

1.1. Основные понятия и определения

Понятие принадлежности

Пусть P есть множество, A - подмножество P:

$$A \subset P. \tag{1}$$

Тот факт, что элемент x множества P есть элемент подмножества, или, как еще говорят, принадлежит A, обычно, как мы знаем, обозначают так**:**

$$x \in A. \tag{2}$$

Для выражения этой принадлежности можно использовать и другое понятие — *характеристическую функцию* $\mu_A(x)$, значения которой указывают, является ли (да или нет) x элементом A:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x \in A, \\ 0, \text{если } x \notin A. \end{cases} \tag{3}$$

Пример. Рассмотрим конечное множество из пяти элементов

$$P = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \tag{4}$$

и пусть подмножество A имеет следующие три элемента

$$A = \{x_2, x_3, x_5\}. \tag{5}$$

Выпишем для каждого элемента из P степень его принадлежности подмножеству A

$$\mu_A(x_1) = 0, \quad \mu_A(x_2) = 1, \quad \mu_A(x_3) = 1, \quad \mu_A(x_4) = 0, \quad \mu_A(x_5) = 1. \tag{6}$$

Это плзволяет представить A через все элементы множества P**,** сопроводив каждый из них значением его функции принадлежности:

$$A = \{(x_1, 0), \quad (x_2, 1), \quad (x_3, 1), \quad (x_4, 0), \quad (x_5, 1)\}. \tag{7}$$

Приведем некоторые свойства булевой бинарной алгебры.

Пусть $\bar{A}$ — дополнение A относительно P, т.е. такое множество P, для которого

$$A \square \bar{A} = \varnothing, \tag{8}$$

$$A \cup \bar{A} = P. \tag{9}$$

Если

$$x \in A, \text{ то } x \notin \bar{A}, \tag{10}$$

и можно записать

$$\mu_A(x) = 1 \text{ и } \mu_{\bar{A}}(x) = 0. \tag{11}$$

Рассматривая пример в (6) и (7), мы видим, что

$$\mu_{\bar{A}}(x_1)=1,\ \mu_{\bar{A}}(x_2)=0,\ \ \mu_{\bar{A}}(x_3)=0,\ \ \mu_{\bar{A}}(x_4)=1,\ \ \mu_{\bar{A}}(x_5)=0, \quad (12)$$

и можно записать

$$\bar{A}=\{(x_1,1),(x_2,0),(x_3,0),(x_4,1),(x_5,0)\}. \quad (13)$$

Для двух данных подмножеств A и B можно рассмотреть пересечение

$$A \square B. \quad (14)$$

Имеем

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\in A,\\ 0, & \text{если } x\notin A,\end{cases} \quad (15)$$

$$\mu_B(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\in B,\\ 0, & \text{если } x\notin B,\end{cases} \quad (16)$$

$$\mu_{A\cap B}(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\in A\cap B,\\ 0, & \text{если } x\notin A\cap B.\end{cases} \quad (17)$$

Это позволяет нам записать

$$\mu_{A\cap B}(x)=\mu_A(x)\cdot\mu_B(x) \quad (18)$$

где операция (·) определена таблицей на рис. 1 и называется *булевым произведением.*

Таким же образом для двух множеств A и B определяют объединение или соединение

$$\mu_{A\cup B}(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\in A\cup B,\\ 0, & \text{если } x\notin A\cup B.\end{cases} \quad (19)$$

обладающее свойством

$$\mu_{A\cup B}(x)=\mu_A(x)+\mu_B(x) \quad (20)$$

где операция (+) *(булева сумма)* определенная таблицей на рис. 2.

(•)	0	1
0	0	0
1	0	1

Рис. 1.

(+)	0	1
0	0	1
1	1	1

Рис.2.

Пример. Рассмотрим множество (4) и два его подмножества

$$A=\{(x_1,0),(x_2,1),(x_3,1),(x_4,0),(x_5,1)\}, \quad (21)$$

$$B=\{(x_1,1),(x_2,0),(x_3,1),(x_4,0),(x_5,1)\}. \quad (22.)$$

Имеем

$$A\cap B=\{(x_1,0\bullet 1),(x_2,1\bullet 0),(x_3,1\bullet 1),(x_4,0\bullet 0),(x_5,1\bullet 1)\}=$$

$$=\{(x_1,0),(x_2,0),(x_3,1),(x_4,0),(x_5,1)\}, \quad (23)$$

$A \square B$={(x_1, 0+1), (x_2, 1+0), (x_3, 1+1), (x_4, 0+0), (x_5, 1+1)}=
={(x_1, 1), (x_2, 1), (x_3, 1), (x_4, 0), (x_5, 1)}. (24)

Далее, для дополнений к этим двух подмножествам имеем

$$\overline{A \cap B}=\{(x_1, 1), (x_2, 1), (x_3, 0), (x_4, 1), (x_5, 0)\}, \quad (2.25)$$

$$\overline{A \cup B}=\{(x_1, 0), (x_2, 0), (x_3, 0), (x_4, 1), (x_5, 0)\}, \quad (2.26)$$

Эти два примера составляют только дидактическую преамбулу к пониманию нечетких подмножеств.

Понятие нечеткого подмножества

Начнем с примера. Рассмотрим подмножество A множества P, определенное в (7). Каждый с пяти элементов P или принадлежит или не принадлежит P. Характеристическая функция принимает только значения 0 или 1.

Представим теперь, что характеристическая функция может принимать любое значение в интервале [0, 1]. В соответствии с этим элемент x_i множества P может не принадлежать A(μ_A=0), может быть элементом A в небольшой степени (μ_A близко к 0), может более или менее принадлежать A (μ_A не слишком близко к 0, не слишком близко к 1), может в значительной степени быть элементом A (μ_A близко к 1) или, наконец, может быть элементом A (μ_A=1). Таким образом, понятие принадлежности получает обобщение, приводящее, как это мы увидим, к очень полезным результатам.

Математический объект, который определяется выражением

$$\tilde{A}=\{(x_1|0,2, (x_2|0), (x_3|0,3), (x_4|1), (x_5|0,8)\}, \quad (27)$$

где x_i — элемент универсального множества P, а число после вертикальной черточки дает значение характеристической функции на этом элементе, будем называть *нечетким подмножеством* множества P и обозначать

$$\tilde{A} \subset P$$

Принадлежность нечеткому подмножеству можно обозначать так:

$$x \underset{0,2}{\in} \tilde{A}, \ \ в \underset{1}{\in} \tilde{A}, \ \ z \underset{0}{\in} \tilde{A}.$$

Символ $\underset{1}{\in}$ можно считать эквивалентным $\in$, а $\underset{0}{\in}$ - символу $\notin$.

Во избежание громоздкого обозначения, используют просто символ $\in$ для указания принадлежности и символ $\notin$ для указания непринадлежности.

Следовательно, нечеткое подмножество, которое определено в (27), содержит в небольшой степени x_1, не содержит x_2, содержит x_3 в немного большей степени, чем x_2, полностью содержит x_4, и в значительной мере — x_5. Таким образом, мы можем создать математическую структуру, которая позволяет оперировать с относительно неполно определенными элементами и принадлежность которой к данному подмножеству лишь в какой-то мере иерархически упорядочена. К таким структурам можно, например, отнести: в заданном множестве людей - некоторое подмножество очень высоких людей; в множестве основных цветов - нечеткое подмножество темно-зеленых цветов; в множестве решений - нечеткое подмножество хороших решений и т.д. Далее мы увидим, как обращаться с такими понятиями, которые, очевидно, особенно хорошо подходят к описанию неточности, присущей социальным наукам.

Дадим строгое определение понятия нечеткого подмножества, введенного Заде.

Пусть P есть множество, счетное либо нет, и x - элемент P. Тогда *нечетким подмножеством* $\tilde{A}$ множества P называется множество упорядоченных пар

$$\{(x|\mu_{\tilde{A}}(x))\}, \qquad \forall x \in P,$$

где $\mu_{\tilde{A}}(x)$ – степень принадлежности x в $\tilde{A}$. Таким образом, если $\mu_{\tilde{A}}(x)$ принимает свои значения в множестве M значений функции принадлежности или во *множестве приналежностей,* то можно сказать, что x принимает значение в M посредством функции $\mu_{\tilde{A}}(x)$.

Таким образом,

$$x \underset{\mu_{\tilde{A}}}{\square} M .$$

Эта функция также называется *функцией принадлежности.*

Поскольку в дальнейшем мы будем рассматривать булевы бинарные функции как частный случай таких функций принадлежности в данной работе мы заменим приведенное высшее определение на следующее.

Пусть P - множество, счетное либо нет, и x — элемент M. Тогда нечеткое подмножество $\tilde{A}$ множества M определяется как множество упорядоченных пар

$$\{(x|\mu_{\tilde{A}}(x))\}, \qquad \forall x \in P,$$

где $\mu_{\tilde{A}}(x)$ - *характеристическая функция принадлежности,* которая принимает свои значения во вполне упорядоченном множестве M, которая указывает *степень* или *уровень* принадлежности элемента x подмножеству $\tilde{A}$. Множество M будет называться *множеством приналежностей.*

Если $M\{0, 1\}$, то «нечеткое подмножество» $\tilde{A}$ будет рассматриваться как «четкое» или просто «обычное» подмножество.

Таким образом, понятие нечеткого подмножества связано с понятием множества и позволяет изучать нестрого определенные понятия, используя математические структуры.

Рассмотрим несколько примеров:

1) нечеткое подмножество чисел x, приблизительно равных данному действительному числу n, где $n\in R$ (R — множество действительных чисел);

2) нечеткое подмножество целых чисел, очень близких к 0;

3) пусть a — действительное число и x — небольшое положительное приращение a; тогда числа $a+x$ образуют нечеткое подмножество во множестве действительных чисел;

4) пусть H - элемент решетки; элементы, ближайшие к H, по отношению порядка образуют нечеткое подмножество в множестве всех элементов решетки.

Множества или подмножества будем обозначать буквами: A, X, a, p, ... Нечеткое подмножество обозначим буквой с символом ~ над ней. Таким образом, нечеткие подмножества будем записывать в виде

$$\tilde{A}, \tilde{X}, \tilde{a}, \tilde{p}.$$

Принадлежность и непринадлежность будем обозначать символами $\in$ и $\notin$, нечеткую принадлежность и нечеткую непринадлежность, если в этом возникнет необходимость, будем обозначать $\tilde{\in}$ и $\tilde{\notin}$.

В некоторых случаях, когда вполне упорядоченное множество M, в котором $\mu_A(x)$ принимает свои значения, есть сегмент — «двусторонне замкнутый интервал» [0, 1], под символом $\in$ удобно помещать число из [0, 1]. Например,

$x \underset{1}{\in} \tilde{A}$ означает, что $x\in \tilde{A}$, т.е. «x есть элемент $\tilde{A}$ »,

$x \underset{0}{\in} \tilde{A}$ означает, что $x\notin \tilde{A}$, т.е. «x не принадлежит $\tilde{A}$ »,

$x \underset{0,8}{\in} \tilde{A}$ означает, что x есть элемент $\tilde{A}$ со степенью 0,8 и т.д.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Рассмотрим конечное множество

$$P=\{a, b, c, d, e, f\}$$

и конечное упорядоченное множество

$$M=\{0; 0,5; 1\}$$

Тогда

$$\tilde{A}=\{(a|0), (b|1), (c|0,5), (d|0), (e|0,5), (f|0)\} \qquad (28)$$

есть нечеткое подмножество P и можно записать

$$a \underset{0}{\in} \tilde{A}, \; b \underset{1}{\in} \tilde{A}, \; c \underset{0,5}{\in} \tilde{A}, \; d \underset{0}{\in} \tilde{A} \text{ и т.д.}$$

Пример 2. Пусть N — множество натуральных чисел:

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

Рассмотрим нечеткое подмножество «небольших» натуральных чисел

$$\tilde{A} = \{(0|1), (1|0,8), (2|0,6), (3|0,4), (4|0,2), (5|0), (6|0), \dots\} \dots \qquad (29)$$

Здесь функциональные значения $\mu_{\tilde{A}}(x)$, где x=0, 1, 2, 3, ..., задаются, конечно, субъективно. Формулу (29) можно записать в виде

$$0 \underset{1}{\in} \tilde{A}, \; 1 \underset{0,8}{\in} \tilde{A}, \; 2 \underset{0,6}{\in} \tilde{A}, \; 3 \underset{0,4}{\in} \tilde{A}, \dots$$

Пример 3. Пусть P состоит из первых десяти целых чисел:

$$P = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Рассмотрим нечеткое подмножество $\tilde{A}$, составленное из чисел множества P:

$$\tilde{A} = \{(0|0), (1|0,2), (2|0,3), (3|0), (4|1), (5|1), (6|0,8), (7|0,5), (8|0), (9|0)\}.$$

где значение $\mu_{\tilde{A}}(x)$ опять заданы субъективно.

Можно написать

$$0 \underset{0}{\in} \tilde{A}, \; 1 \underset{0,2}{\in} \tilde{A}, \; 2 \underset{0,3}{\in} \tilde{A}, \; 3 \underset{0}{\in} \tilde{A}, \dots$$

Можно заметить, что символ обобщенной принадлежности можно употреблять в обратной записи. Так, (28) можно записать в виде

$$\tilde{A} \underset{0}{\ni} a, \; \tilde{A} \underset{1}{\ni} b \, \tilde{A} \underset{0,5}{\ni} c,$$

а (29) в виде

$$\tilde{A} \underset{0}{\ni} 0, \; \tilde{A} \underset{0,2}{\ni} 1, \; \tilde{A} \underset{0,3}{\ni} 2.$$

Отношение доминирования

Напомним сначала природу отношения доминирования, существующего между двумя упорядоченными наборами с n чисел (n-ками). Рассмотрим две упорядоченные n-ки

$$v = (k_1, k_2, \dots, k_n)$$

и

$$v' = (k'_1, k'_2, \dots, k'_n)$$

в которых k_i и k'_i, i=1, 2, ..., n, принадлежат одному и тому же вполне упорядоченному множеству K. Отношение порядка на K обозначим символом $\geq$.

Будем говорить, что v' *доминирует* v, и записывать

$$v' \tilde{>} v$$

тогда и только тогда, когда

$$k'_1 \geq k_1,\ k'_2 \geq k_2, \ldots, k'_n \geq k_n$$

Символы $\geq$ и $\tilde{>}$ используются для отношения нестрогого порядка.

Для обозначения отношения строгого порядка используют символы $>$ и $\sqsubset$ и в этом случае мы будем говорить, что «v' *строго доминирует* v».

Очевидно, что

$$v' \text{f} \quad v$$

если

$$k'_1 \geq k_1,\ k'_2 \geq k_2, \ldots, k'_n \geq k_n$$

и имеются по крайней мере одно k'_i и одно k_i, между которыми существует строгое отношение.

Учитывая изложенное выше, можно сказать, что отношение доминирования индуцирует отношение порядка (совершенное или частичное) между n-наборами вроде v и v'.

Пример 1. Рассмотрим следующие наборы из четырех чисел:

$$u=(7, 3, 0, 5),$$
$$v=(2, 2, 0, 4),$$
$$w=(3, 4, 1, 4).$$

Очевидно, что

$$u \tilde{>} v,$$

так как 7>2, 2>3, 0=0,5>4

Поскольку ни один из элементов v не больше соответствующего элемента из u, то можно также записать $v' \text{f} \quad v$. Аналогичным образом можно убедиться, что $w \tilde{>} v$. Однако u и w несравнимы. Действительно,

$$7>2,\ 2>3,\ 0<1,\ 5>4$$

Пример 2. Рассмотрим множество P точек (x_1, x_2) в плоскости, которая изображена на рис. 3, таких, что $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$. Все точки заштрихованной области II, которые удовлетворяют неравенствам $x_1 \geq a$ и $x_2 \geq b$, доминируют, а в действительности строго доминируют все точки области I, в которой выполняются неравенства $0 \leq x_1 \leq a$, $0 \leq x_2 \leq b$. Не все точки области III обязательно сравнимы со всеми точками областей I или II, то же самое справедливо для области IV при сравнимые ее с I и с II соответственно. Наконец, каждая точка области III несравнима с точками области IV и наоборот, за очевидным исключением точек x_1 и x_2, для которых $x_1=a$ или $x_2=b$.

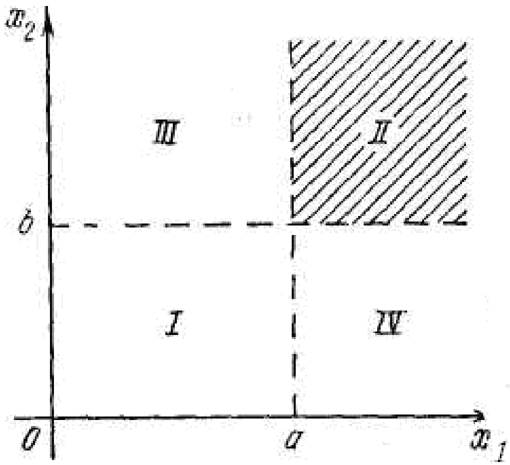


Рис. 3.

1.2. Операции над нечеткими подмножествами

Включение. Пусть P - множество, M - множество приналежностей и $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ два нечетких подмножества P; будем говорить, что $\tilde{A}$ содержится в $\tilde{B}$, если

$$\forall x \in P: \ \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x),$$

и обозначать

$$\tilde{A} \subset \tilde{B}$$

или, если нужно избежать недоразумений,

$$\tilde{A} \mathrel{\tilde{\subset}} \tilde{B} \tag{30}$$

Последняя запись совершенно выразительно указывает, что в данном случае включение понимается в смысле теории нечетких подмножеств.

Строгое включение соответствует случаю, когда в (30) по крайней мере одно неравенство строгое и обозначается

$$\tilde{A} \subset\subset \tilde{B} \text{ или } \tilde{A} \mathrel{\tilde{\subset}\tilde{\subset}} \tilde{B}$$

Рассмотрим три примера.

1. Пусть

$$P=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \ M=[0, 1].$$

$$\tilde{A}=\{(x_1|0,4), (x_2|0,2), (x_3|0), (x_4|1)\},$$

$$\tilde{B} = \{(x_1|0{,}3), (x_2|0), (x_3|0), (x_4|0)\},$$

Имеем

$$\tilde{B} \subset \tilde{A}, \text{ так как } 0{,}3<0{,}4,\ 0<0{,}2,\ 0=0,\ 0<1.$$

2. Пусть

$$\tilde{A} \subset P,\ \tilde{B} \subset P,\quad M=[0,\ 1].$$

Если

$$\forall\, x \in P:\ \mu_{\tilde{A}}(x) \le \mu_{\tilde{B}}(x),$$

то

$$\tilde{B} \subset \tilde{A}$$

3. Пусть

$$P=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\},\ M=[0,\ 1].$$

Можно записать

$$P=\{(x_1, 1), (x_2, 1), (x_3, 1), (x_4, 1), (x_5, 1)\}.$$

Следовательно, P также содержится само в себе в смысле теории нечетких подмножеств:

$$P \mathrel{\tilde{\subset}} P$$

И это свойство остается справедливым, каким бы ни было множество P.

Равенство. Пусть P — множество, M — множество принадлежностей, $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ два нечетких подмножества P. Будем говорить, что $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ равны тогда и только тогда, когда

$$\forall\, x \in P:\ \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x),$$

и будем обозначать

$$\tilde{A} = \tilde{B}$$

Если найдется по крайней мере один такой элемент x из P**,** что равенство

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)$$

не удовлетворяется, то мы будем говорить, что $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ не равны, и обозначать

$$\tilde{A} \ne \tilde{B}.$$

Дополнение. Пусть P — множество, $M=[0,\ 1]$ — множество принадлежностей, $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — два нечетких подмножества P; будем говорить, что $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ дополняют друг друга, если

$$\forall x \in P: \mu_{\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{B}}(x),$$

Это будет обозначаться так:

$$\tilde{B} = \overline{\tilde{A}} \text{ или } \overline{\tilde{A}} = \tilde{B}$$

Очевидно, что всегда

$$\left(\overline{\overline{\tilde{A}}}\right) = A$$

Заметим, что здесь дополнение определено для M=[0, 1], но его можно распространить на другие упорядоченные множества M, используя другие подходящие определения.

Рассмотрим пример:

$$P=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\},\ M=[0, 1].$$

$$\tilde{A} = \{(x_1|0{,}13), (x_2|0{,}61), (x_3|0), (x_4|0), (x_5|1), (x_6|0{,}03)\},$$

$$\tilde{B} = (x_1|0{,}87), (x_2|0{,}39), (x_3|1), (x_4|1), (x_5|0), (x_6|0{,}97)\}.$$

Тогда очевидно

$$\overline{\tilde{A}} = \tilde{B}$$

Пересечение. Пусть P — множество и M = [0, 1] — соответствующее ему множество принадлежностей, $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — два нечетких подмножества P; пересечение

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} \qquad (31)$$

определяют как наибольшее нечеткое подмножество, содержащееся одновременно в $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$:

$$\forall x \in P: \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \mathrm{MIN}(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)). \qquad (32)$$

Пример.

$$P=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5,\},\ M=[0, 1]. \qquad (33)$$

$$\tilde{A} = \{(x_1|0{,}2), (x_2|0{,}7), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|0{,}5)\}, \qquad (34)$$

$$\tilde{B} = (x_1|0{,}5), (x_2|0{,}3), (x_3|1), (x_4|0{,}1), (x_5|0{,}5)\}. \qquad (35)$$

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = (x_1|0{,}2), (x_2|0{,}3), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|0{,}5)\}.$$

Кроме того, используя общее определение (31) и (32), можно записать

$$\forall x \in P: x \underset{\mu_{\tilde{A}}}{\in} \tilde{A} \text{ и } x \underset{\mu_{\tilde{B}}}{\in} \tilde{B} \Rightarrow x \underset{\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}}{\in} \tilde{A} \cap \tilde{B}.$$

Это позволит ввести нечеткое «*и*», которое обозначим «$\mathscr{U}$».

Таким образом, можно сказать: если $\tilde{A}$ - нечеткое подмножество действительных чисел, очень близких до 5, и $\tilde{B}$ - нечеткое подмножество действительных чисел, очень близких к 10, то $\tilde{A}$ □ $\tilde{B}$ подмножество действительных чисел, очень близких к 5 $\widetilde{и}$ 10. Нечеткая конъюнкция *«$\widetilde{и}$ »* произносится как *и;* за исключением того, где это необходимо, символ ~ можно опускать.

Объединение. Пусть P – множество и M = [0, 1] — соответствующее ему множество принадлежностей, $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — два нечетких подмножества P; определим объединение

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} \tag{35}$$

как наименьшее нечеткое подмножество, которое содержит как $\tilde{A}$, так и $\tilde{B}$:

$$\forall x \in P: \ \mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) = \mathrm{MAX}(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)). \tag{36}$$

Вернувшись к примеру (33)-(35), получим

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = (x_1|0,5), (x_2|0,7), (x_3|1), (x_4|0,1), (x_5|0,5)\}.$$

Кроме того, в соответствии с общими определениями (35) и (36) можно записать

$$\forall x \in P: x \underset{\mu_{\tilde{A}}}{\in} \tilde{A} \text{ или } x \underset{\mu_{\tilde{B}}}{\in} \tilde{B} \Rightarrow x \underset{\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}}{\in} \tilde{A} \cup \tilde{B}\ .$$

Это позволяет ввести нечеткое *«или/и»,* которое будет обозначаться *или* $\tilde{/}$ *и.* За исключением того, где это необходимо, символ ~ опускается.

Таким образом, можно сказать: если $\tilde{A}$ — нечеткое подмножество действительных чисел, очень близких к 5, и $\tilde{B}$ — нечеткое подмножество действительных чисел, очень близких к 10, то $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ — нечеткое подмножество действительных чисел, очень близких к 5 или $\tilde{/}$ и к 10. Конъюнкция *или* $\tilde{/}$ *и* произносится как *или/и.*

Замечание. Если ошибка в интерпретации невозможна, будем писать «и » вместо «$\widetilde{и}$ » и аналогично «*или/и*» вместо «*или* $\tilde{/}$ *и».*

Дизъюнктивная сумма. Дизъюнктивная сумма двух нечетких подмножеств определяется в терминах объединений и пересечений следующим образом:

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \left(\tilde{A} \cap \overline{\tilde{B}}\right) \cup \left(\overline{\tilde{A}} \cap \tilde{B}\right).$$

Эта операция отвечает «нечеткому дизъюнктивному $\widetilde{или}$ », где «$\widetilde{или}$ » читается как «*или*» и пишется «*или*», если нет опасности ошибиться.

Рассмотрим тот же пример, который иллюстрировал операции объединения и пересечение:

$$\tilde{A} = \{(x_1|0{,}2), (x_2|0{,}7), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|0{,}5)\},$$

$$\tilde{B} = (x_1|0{,}5), (x_2|0{,}3), (x_3|1), (x_4|0{,}1), (x_5|0{,}5)\},$$

$$\overline{\tilde{A}} = \{(x_1|0{,}8), (x_2|0{,}3), (x_3|0), (x_4|1), (x_5|0{,}5)\},$$

$$\overline{\tilde{B}} = (x_1|0{,}5), (x_2|0{,}7), (x_3|0), (x_4|0{,}9), (x_5|0{,}5)\}, \qquad (37)$$

$$\tilde{A} \,\square\, \overline{\tilde{B}} = (x_1|0{,}2), (x_2|0{,}7), (x_3|0), (x_4|0), (x_5|0{,}5)\}, \qquad (38)$$

$$\overline{\tilde{A}} \;\mathrm{I}\; \tilde{B} = (x_1|0{,}5), (x_2|0{,}3), (x_3|0), (x_4|0{,}1), (x_5|0{,}5)\}.$$

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (x_1|0{,}5), (x_2|0{,}7), (x_3|0), (x_4|0{,}1), (x_5|0{,}5)\}.$$

Разность. Разность определяется соотношением

$$\tilde{A} - \tilde{B} = \tilde{A} \;\mathrm{I}\; \overline{\tilde{B}} \;.$$

Рассмотрим опять пример (34) и (35), используя (37) и (38):

$$\tilde{A} \;\mathrm{I}\; \overline{\tilde{B}} = (x_1|0{,}2), (x_2|0{,}7), (x_3|0), (x_4|0), (x_5|0{,}5)\},$$

Конечно, кроме частных случаев,

$$\tilde{A} - \tilde{B} \neq \tilde{B} - \tilde{A}.$$

Наглядное представление простейших операций с нечеткими подмножествами. Для нечетких подмножеств можно построить визуальное представление, родственное представлению четких (обычных) подмножеств (диаграмма Венна -Эйлера).

Рассмотрим прямоугольную систему координат (рис. 4), на оси ординат которой откладываются значения $\mu_A(x)$, а на оси абсцисс в произвольном порядке расположены элементы P (если P по своей природе целиком упорядоченное множество, то такой же порядок должен сохраняться в расположении элементов на оси абсцисс).

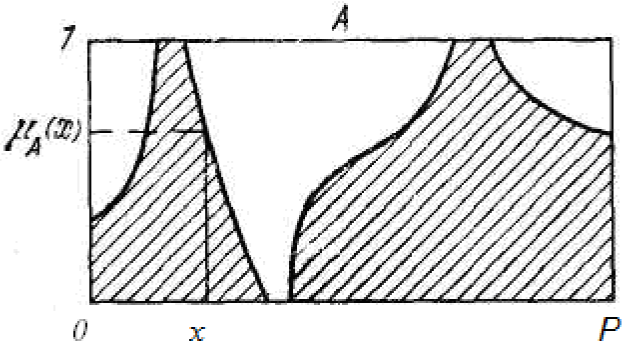


Рис. 4.

На рис. 4 принадлежность каждого элемента изображена его ординатой, заштрихованная часть наглядно изображает нечеткое подмножество $\tilde{A} \subset P$. Заштрихованная часть прямоугольника представляет данное нечеткое подмножество $\tilde{A}$ и все нечеткие подмножества, которые содержатся в $\tilde{A}$. Такая штриховка удобна, чтобы отличать одно нечеткое подмножество от другого.

Такое представление позволяет сделать зримыми простые операции на нечетких подмножествах. Ниже на нескольких рисунках будет показано, как используется это представление.

На рис. 5, *а-в* отражено свойство включения. Рис. 6, *а-в* иллюстрируют дополнение. Свойства объединения и пересечения отражены на рис. 7, *а-г.*

На рис. 8 , *а-ж* представлены свойства разности

$$\tilde{A} - \tilde{B} = \tilde{A} \cap \overline{\tilde{B}} \ .$$

и дизъюнктивной суммы

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \left(\tilde{A} \cap \overline{\tilde{B}}\right) \cup \left(\overline{\tilde{A}} \cap \tilde{B}\right)$$

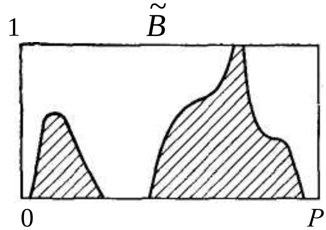


Рис. 5,*а*

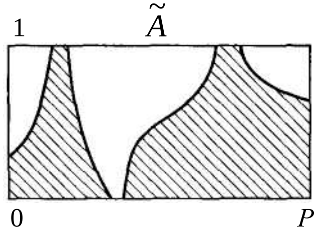


Рис. 5,*б*

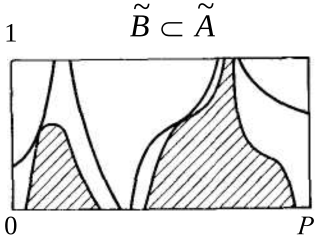


Рис. 5,*в*

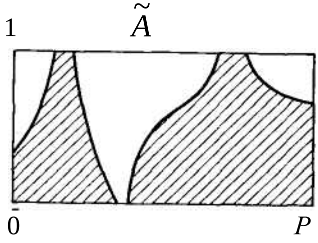


Рис. 6,*а*

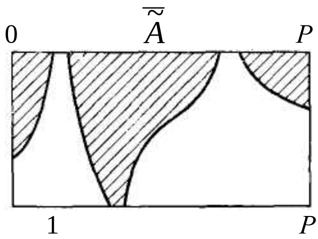


Рис. 6,*б*

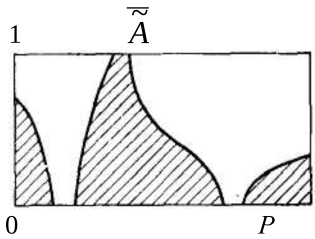
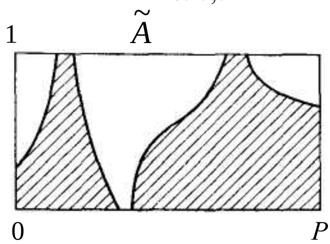


Рис. 6,*в*



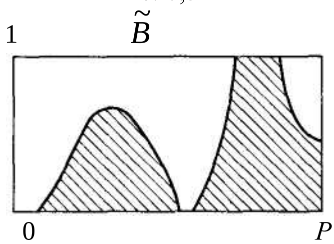


Рис. 7,*а*

Рис. 7,*б*

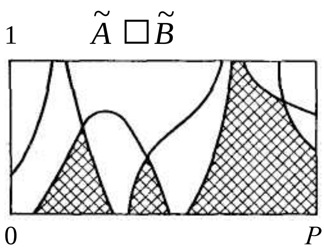


Рис. 7,*в*

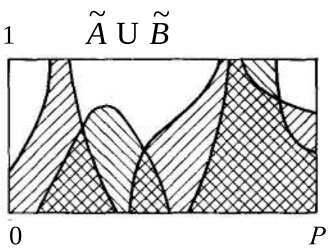


Рис. 7,*г*

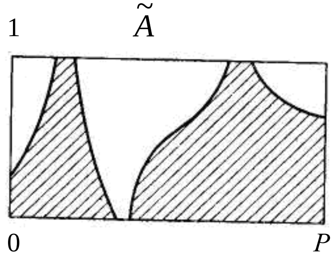


Рис. 8,*а*

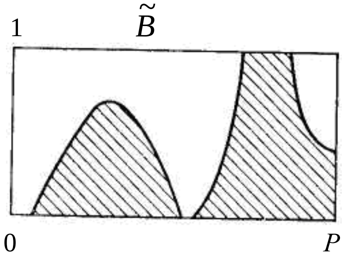


Рис. 8,*б*

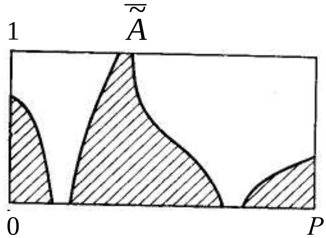


Рис. 8,*в*

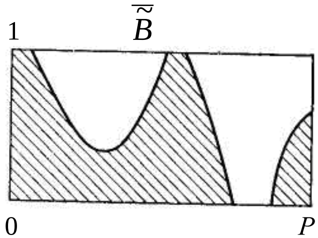


Рис. 8,*г*

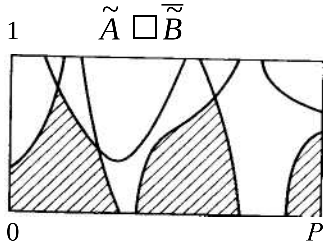


Рис. 8,*д*

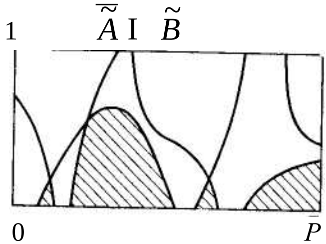


Рис. 8, *е*

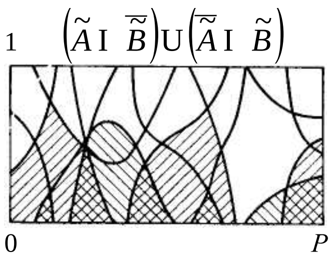


Рис. 8,*ж*

1.3. Расстояния на множествах и оценка нечеткости

Расстояние Хемминга. Сначала напомним, что понимают под расстоянием Хемминга в теории обычных подмножеств. Рассмотрим два обычных подмножества $A\subset P$, $B\subset P$ и конечное множество

$$A=\{(x_1|1), (x_2|0), (x_3|0), (x_4|1), (x_5|0), (x_6|1), (x_7|0)\}, \qquad (39)$$

$$B=\{(x_1|0), (x_2|1), (x_3|0), (x_4|0), (x_5|0), (x_6|1), (x_7|1)\}. \qquad (40)$$

Под расстоянием Хемминга между A и B понимают величину

$$d(A\ , B)=\sum_{i=1}^{n}|\ \mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)\ |\ . \qquad (41)$$

Например, для A и B из (39) и (40) имеем

$d(A, B)$=|1-0|+|0-1|+|0-0|+|1-0|+|0-0|+|1-1|+|0-1|=1+1+0+1+0+0+1=4

Известно, что в математике слово «расстояние» нельзя использовать произвольно. Если мы хотим определить расстояние d между любой парой элементов X, Y множества P, то напомним, что должны выполняться следующие условия: $\forall\ X, Y, Z\in P$:

1) $d(X, Y)\geq 0$ - неотрицательность, (42)

2) $d(X, Y)=d(Y, X)$ - симметричность, (43)

3) $d(X, Z)\leq d(X, Y)*d(Y, Z)$ - транзитивность, (44)

где * - оператор, связанный с понятием расстояния.

К этим трех условий можно прибавить четвертое:

4) $d(X, X)=0.$ (45)

Легко проверить, что расстояние Хемминга - действительно расстояние в смысле, определяемом условиями (42)-(44), если оператор * = + (обычная сумма).

Для конечного множества P мощности n (т.е. n — число элементов в P) определим также *относительное расстояние Хемминга:*

$$\delta(A\ , B)=(1/n)\ d(A\ , B). \qquad (46)$$

Например, для A и B в (39) и (40) имеем

$$\delta(A\ , B)=(d(A\ , B)\ /7=4/7.$$

Очевидно, что всегда

$$0\leq\delta(A\ , B)\leq 1$$

Для обобщения понятия расстояния Хемминга на случай не только обычных, но и нечетких подмножеств докажем две теоремы.

Теорема 1. Пусть

$$p_i, m_i, n_i\in R^+, i=1, 2, \ldots, k;$$

тогда

$$(p_i \le m_i + n_i,\ i=1, 2, \ldots, k) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} p_i \le \sum_{i=1}^{k} m_i + \sum_{i=1}^{k} n_i. \qquad (47)$$

Доказательство. Этот результат получается непосредственным суммированием левых и правых частей неравенств $p_i \le m_i + n_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Теорема 2. Пусть

$$p_i,\ m_i,\ n_i \in R^+,\ i=1, 2, \ldots, k;$$

тогда

$$(p_i \le m_i + n_i,\ i=1, 2, \ldots, k) \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{k} p^2{}_i} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{k} m^2{}_i} + \sqrt{\sum_{i=1}^{k} n^2{}_i}. \qquad (48)$$

Доказательство. Этот результат менее очевиден. Рассмотрим очевидное неравенство

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i\ne j}}^{k} (m_i n_j - m_j n_i)^2 \ge 0$$

Разлагая сумму квадратов, имеем

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i\ne j}}^{k} m_i^2 n^2{}_j - 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i\ne j}}^{k} m_i n_i m_j n_j \ge 0,$$

т.е.

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i\ne j}}^{k} m_i^2 n^2{}_j \ge 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i\ne j}}^{k} m_i n_i m_j n_j.$$

Добавив $\sum_{i=1}^{k} m_i^2 n^2{}_j$ к обеим частям неравенства, получаем

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i\ne j}}^{k} m_i^2 n^2{}_j + \sum_{i=1}^{k} m_i^2 n^2{}_i \ge \sum_{i=1}^{k} m_i^2 n^2{}_i + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\ne j}}^{k} 2 m_i n_i m_j n_j,$$

что можно переписать в таком виде:

$$\left(\sum_{i=1}^{k} m_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k} n^2{}_i\right) \ge \left(\sum_{i=1}^{k} m_i n_i\right)^2,$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{k} m_i^{\ 2}} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{k} n^2{}_i} \geq \sum_{i=1}^{k} m_i n_i,$$

$$2\sqrt{\sum_{i=1}^{k} m_i^{\ 2}} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{k} n^2{}_i} \geq 2\sum_{i=1}^{k} m_i n_i.$$

добавив

$$\sum_{i=1}^{k} m_i^{\ 2} + \sum_{i=1}^{k} n^2{}_i,$$

имеем

$$\sum_{i=1}^{k} m_i^{\ 2} + \sum_{i=1}^{k} n^2{}_i + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{k} m_i^{\ 2}} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{k} n^2{}_i} \geq \sum_{i=1}^{k} m^2{}_i + \sum_{i=1}^{k} n^2{}_i + 2\sum_{i=1}^{k} m_i n_i,$$

что можно переписать в виде

$$\left(\sum_{i=1}^{k} m_i^{\ 2} + \sum_{i=1}^{k} n^2{}_i\right)^2 \geq \sum_{i=1}^{k} (m_i + n_i)^2,$$

или

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{k} m_i^{\ 2}} + \sqrt{\sum_{i=1}^{k} n^2{}_i} \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (m_i + n_i)^2},$$

Однако по предположению

$$\forall i = 1, 2, \dots, k : m_i + n_i \geq p_i$$

и , следовательно,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{k} m_i^{\ 2}} + \sqrt{\sum_{i=1}^{k} n^2{}_i} \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} p_i^{\ 2}},$$

что и требовалось доказать.

Обобщение понятия «расстояние Хемминга». Рассмотрим теперь три нечетких подмножества $\tilde{A},\ \tilde{B}, \tilde{C} \subset P,\ P$ - конечное множество мощности n

$\tilde{A}$ ={(x_1|a_1), (x_2|a_2), (x_3|a_3), …, (x_n|a_n)}… (49)

$\tilde{B}$ ={(x_1|b_1), (b_2|a_2), (b_3|b_3), …, (b_n|a_n)}… (50)

$\tilde{C}$ ={(c_1|a_1), (c_2|a_2), (c_3|a_3), …, (c_n|a_n)}… (51)

Предположим, что мы определили расстояния $\mathcal{D}(a_i, b_i)$ между a_i и b_i для всех i = 1, 2, ..., n, а также для (b_i, c_i) и (a_i, c_i). Тогда согласно (42) - (45) для этих расстояний справедливо неравенство

$$\forall i = 1, 2, \ldots, n: \mathcal{D}(a_i, c_i) \le \mathcal{D}(a_i, b_i) * \mathcal{D}(b_i, c_i)\ldots \qquad (52)$$

Кроме того, по теоремам 1 (47) и 2 (48) можно записать

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}(a_i, c_i) \le \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}(a_i, b_i) + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}(b_i, c_i), \qquad (53)$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}^2(a_i, c_i)} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}^2(a_i, b_i)} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}^2(b_i, c_i)}\,. \qquad (54)$$

(при переходе от (52) к (53) и (54) необходимо отождествить операцию $*$ с операцией суммирования +).

Эти две формулы дают две оценки расстояния между нечеткими подмножествами: первая - линейную оценку, вторая - квадратичную.

Рассмотрим случай, когда функции принадлежности нечетких подмножеств принимают свои значения в M = [0, 1], т.е. когда в (49)—(51) $a_i, b_i, c_i \in [0, 1]$, i=1, 2, ..., n. Теперь положим

$$\mathcal{D}(a_i, b_i) = |a_i - b_i|, \quad \mathcal{D}(b_i, c_i) = |b_i - c_i|, \quad \mathcal{D}(a_i, c_i) = |a_i - c_i|$$

и по (53) и (44) определим два типа расстояний.

Обобщенное расстояние Хемминга, или линейное расстояние, определяется по формуле:

$$d(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = \sum_{i=1}^{n} |\, \mu_{\widetilde{A}}(x_i) - \mu_{\widetilde{B}}(x_i)\,|, \qquad (55)$$

(заметим,что

$|\, \mu_{\widetilde{A}}(x_i) - \mu_{\widetilde{B}}(x_i)\,| = MAX[\mu_{\widetilde{A}}(x_i), \mu_{\widetilde{B}}(x_i)] - MIN[\mu_{\widetilde{A}}(x_i), \mu_{\widetilde{B}}(x_i)]$)

которая обобщает (41) на случай, когда

$$\mu_{\widetilde{A}}(x_i), \mu_{\widetilde{B}}(x_i) \in [0, 1], \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Очевидно, что

$$0 \le d(\widetilde{A}, \widetilde{B}) \le n.$$

Евклидово, или квадратичное, расстояние определяется по формуле

$$e(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mu_{\widetilde{A}}(x_i) - \mu_{\widetilde{B}}(x_i))^2}.$$

Имеем

$$0 \le e(\widetilde{A}, \widetilde{B}) \le \sqrt{n}.$$

Величина $e^2(\widetilde{A},\widetilde{B})$ называется «евклидовой нормой»

$$e^2(\widetilde{A},\widetilde{B}) = \sum_{i=1}^{n}(\mu_{\widetilde{A}}(x_i) - \mu_{\widetilde{B}}(x_i))^2.$$

Определим несколько относительных расстояний.

Обобщенное относительное расстояние Хемминга:

$$\delta(\widetilde{A},\widetilde{B}) = \frac{a(A,B)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\,\mu_{\widetilde{A}}(x_i) - \mu_{\widetilde{B}}(x_i)\,|. \qquad (56)$$

Можно проверить, что это действительно расстояние, которое удовлетворяет условиям (42)—(45), и с учетом неравенства (53), которое не нарушается от деления обоих его членов на *n,* имеем

$$0 \le \delta(\widetilde{A},\widetilde{B}) \le 1.$$

Следовательно, (56) является обобщением (46) для случая, когда

$$\mu_{\widetilde{A}}(x_i), \mu_{\widetilde{B}}(x_i) \in [0, 1], \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Относительное евклидово расстояние:

$$\varepsilon(\widetilde{A},\widetilde{B}) = \frac{e(A,B)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mu_{\widetilde{A}}(x_i) - \mu_{\widetilde{B}}(x_i))^2}.$$

Можно проверить, что это действительно расстояние, которое удовлетворяет условиям (42)—(45), и с учетом неравенства (53), которое не нарушается от деления обоих его членов на $\sqrt{n}$, имеем

$$0 \le \varepsilon(\widetilde{A},\widetilde{B}) \le 1. \qquad (57)$$

$\varepsilon^2(\widetilde{A},\widetilde{B})$ называется *относительной евклидовой нормой:*

$$\varepsilon^2(\widetilde{A},\widetilde{B}) = \frac{\varepsilon^2(A,B)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mu_{\widetilde{A}}(x_i) - \mu_{\widetilde{B}}(x_i))^2.$$

Не удивительно, что в частном случае, когда

$$\mu_{\widetilde{A}}(x_i), \mu_{\widetilde{B}}(x_i) \in \{0, 1\},$$

$$e^2(\widetilde{A},\widetilde{B}) = d(\widetilde{A},\widetilde{B}) \;,$$

$$\varepsilon^2(\widetilde{A},\widetilde{B}) = \delta(\widetilde{A},\widetilde{B}) \;.$$

Эти равенства соответствуют булеву свойству

$$a^2 = a, \quad a \in \{0, 1\}$$

Таким образом, можно видеть, что (55) и (56) обобщают понятия расстояния Хемминга, абсолютного (41) и относительного (46); евклидову норму нельзя классифицировать как расстояние, поскольку эта норма не удовлетворяет неравенству (44), входящему в определение понятия расстояния.

Выбор того или другого расстояния - обобщенного (абсолютного или относительного) Хемминга или евклидова (абсолютного или относительного) зависит от природы рассматриваемой проблемы. Каждое из этих расстояний имеет свои преимущества и недостатками, которые становятся очевидными в приложениях.

Пример. Пусть

$\widetilde{A}$ ={(x_1|0,7), (x_2|0,2), (x_3|0), (x_4|0,6), (x_5|0,6), (x_6|1), (x_7|0)}

и

$\widetilde{B}$ ={(x_1|0,2), (x_2|0), (x_3|0), (x_4|0,6), (x_5|0,8), (x_6|0,4), (x_7|1)}

Имеем

$d(\widetilde{A},\widetilde{B})$ =|0,7-0,2|+|0,2-0|+|0-0|+|0,6-0,6|+|0,5-0,8|+|1-0,4|+|0-1|= =0,5+0,2++0+0+0,3+0,6+1=2,6.

$$\delta(\widetilde{A},\widetilde{B})=(1/7)\ d(\widetilde{A},\widetilde{B})=2,6/7=0,37;$$

$e^2(\widetilde{A},\widetilde{B})$ =(0,7-0,2)^2+(0,2-0)^2+(0-0)^2+(0,6-0,6)^2+(0,5-0,8)^2+(1-0,4)^2 + +(0-1)^2=(0,5)^2+(0,2)^2+(0)^2+(0)^2+(0,3)^2+(0,6)^2+(1)^2=1,74;

$$e(\widetilde{A},\widetilde{B})=\sqrt{1{,}74}=1{,}32;$$

$$\varepsilon(\widetilde{A},\widetilde{B})=\frac{e(\widetilde{A},\widetilde{B})}{\sqrt{7}}=\frac{1{,}32}{\sqrt{7}}=0{,}49.$$

Случай бесконечного универсального множества. Расстояния $d(\widetilde{A},\widetilde{B})$, $e(\widetilde{A},\widetilde{B})$, а поэтому, очевидно, и норма $e^2(\widetilde{A},\widetilde{B})$ могут быть определены и в случае, когда универсальное множество бесконечное (счетное или нет) с той оговоркой, что соответствующие суммы сходятся.

Если P — счетное, то пишут

$$d(\widetilde{A},\widetilde{B})=\sum_{i=1}^{\infty}|\,\mu_{\widetilde{A}}(x_i)-\mu_{\widetilde{B}}(x_i)\,|.$$

если этот ряд сходится.

Если $P=R$, то пишут

$$d(\widetilde{A},\widetilde{B})=\int_{-\infty}^{+\infty}|\,\mu_{\widetilde{A}}(x_i)-\mu_{\widetilde{B}}(x_i)\,|\,dx, \tag{58}$$

если этот интеграл сходящийся.

Аналогично (рис. 9)

$$e(\widetilde{A},\widetilde{B})=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(\mu_{\widetilde{A}}(x_i)-\mu_{\widetilde{B}}(x_i))^2}.$$

если ряд, который стоит под знаком корня, сходится;

$$e(\widetilde{A},\widetilde{B})=\sqrt{\int_{x=-\infty}^{+\infty}(\mu_{\widetilde{A}}(x_i)-\mu_{\widetilde{B}}(x_i))^2\,dx}, \tag{59}$$

если интеграл такой, сходящийся.

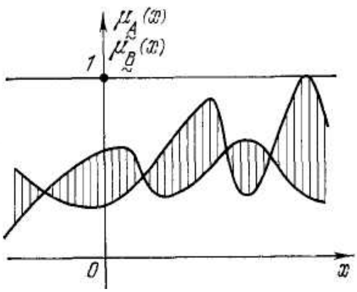


Рис. 9

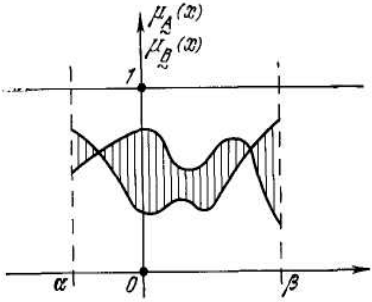


Рис. 10

Как правило, $\delta(\widetilde{A},\widetilde{B})$ и $\varepsilon(\widetilde{A},\widetilde{B})$ не используют в случае бесконечных множеств, однако, если необходимо, это можно сделать, используя другое определение или вводя другое понятие сходимости.

Если множество $P\subset R$ ограничено (сверху и снизу), то интеграл (58) сходится так же, как и (59); тогда $d(\widetilde{A},\widetilde{B})$ и $e(\widetilde{A},\widetilde{B})$ всегда конечны.

В этом случае всегда можно определить $\delta(\widetilde{A},\widetilde{B})$ и $\varepsilon(\widetilde{A},\widetilde{B})$ (рис. 10)

$$\delta(\widetilde{A},\widetilde{B})=\frac{d(\widetilde{A},\widetilde{B})}{\beta-\alpha},$$

$$\varepsilon(\widetilde{A},\widetilde{B})=\frac{e(\widetilde{A},\widetilde{B})}{\sqrt{\beta-\alpha}}.$$

Обычное подмножество, ближайшее к нечеткому. Зададимся следующим вопросом: какое обычное подмножество (или подмножества) A расположено на наименьшем евклидовом расстоянии от данного нечеткого подмножества $\widetilde{A}$?

Легко доказать, что это будет обычное множество (обозначим его $\underset{\sim}{\tilde{A}}$) такое, что

$$\begin{aligned}
&\mu_{\underline{\tilde{A}}}(x_i) = 0, \quad если\ \mu_{\tilde{A}}(x_i) < 0,5, \\
&\mu_{\underline{\tilde{A}}}(x_i) = 1, \quad если\ \mu_{\tilde{A}}(x_i) > 0,5, \qquad (60)\\
&\mu_{\underline{\tilde{A}}}(x_i) = 0\ или\ 1, \quad если\ \mu_{\tilde{A}}(x_i) = 0,5,
\end{aligned}$$

где «по определению» мы принимаем, что

$$\mu_{\underline{\tilde{A}}}(x_i) = 0, \quad если\ \mu_{\tilde{A}}(x_i) = 0,5.$$

Пример. Пусть

$\tilde{A}$ ={(x_1|0,2), (x_2|0,2), (x_3|0,5), (x_4|0,3), (x_5|1), (x_6|0), (x_7|0,9), (x_8|0,4)} (61)

тогда имеем

$\underline{\tilde{A}}$ ={(x_1|0), (x_2|1), (x_3|0), (x_4|0), (x_5|1), (x_6|0), (x_7|1), (x_8|0)}. (62)

Индекс нечеткости. Кроме уже указанных можно рассмотреть еще два индекса нечеткости: линейный индекс нечеткости, определяемый с посредством обобщенного относительного расстояния Хемминга, и квадратичный индекс нечеткости, определяемый с помощью относительного евклидова расстояния. Обозначим их ν($\tilde{A}$) и η($\tilde{A}$) соответственно:

$$\nu(\tilde{A}) = \frac{2}{n} \cdot d(\tilde{A}, \underline{\tilde{A}}), \qquad (63)$$

$$\eta(\tilde{A}) = \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot e(\tilde{A}, \underline{\tilde{A}}).$$

Число 2 появилось в числителе для того, чтобы получить

$$0 \le \nu(\tilde{A}) \le 1$$

и

$$0 \le \eta(\tilde{A}) \le 1$$

так как

$$0 \le \delta(\tilde{A}, \underline{\tilde{A}}) \le 1/2$$

и

$$0 \le \varepsilon(\tilde{A}, \underline{\tilde{A}}) \le 1/2$$

Понятие подмножества, ближайшего к данному нечеткому подмножеству, и понятие индекса нечеткости можно распространить на случай бесконечного универсального множества с оговоркой (например,

относительно индекса нечеткости), что все рассматриваемые ряды сходящиеся. Рассмотрим случай, когда множество $P=[a,b]\subset R$.
На рис. 11 показано, как определить ближайшее обычное множество и индекс нечеткости.

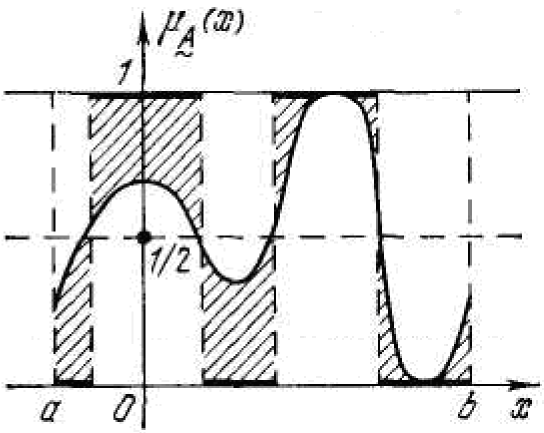


Рис. 11.

Например, по формуле (63) получаем

$$\nu(\tilde{A}) = \frac{2}{b-a}\int_{x=a}^{b} |\,\mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\underline{\tilde{A}}}(x)\,|\,dx.$$

Основные свойства, связанные с ближайшим обычным множеством.

Легко проверить следующие свойства:

$$\underline{\tilde{A}\cap\tilde{B}} = \underline{\tilde{A}} \cap \underline{\tilde{B}},$$

$$\underline{\tilde{A}\cup\tilde{B}} = \underline{\tilde{A}} \cup \underline{\tilde{B}}.$$

Другое свойство

$$\forall x_i \in P : |\,\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{\underline{\tilde{A}}}(x_i)\,| = \mu_{\tilde{A}\cap\underline{\tilde{A}}}(x_i)$$

доказывается на основе свойств (60).

Рассмотрим пример, используя (61) и (62):

$\underline{\tilde{A}}$ ={(x_1|0,8), (x_2|0,2), (x_3|0,5), (x_4|0,7), (x_5|0), (x_6|1), (x_7|0,1), (x_8|0,6)}

$\tilde{A}\cap\underline{\tilde{A}}$ ={(x_1|0,2),(x_2|0,2),(x_3|0,5),(x_4|0,3),(x_5|0),(x_6|0),(x_7|0,1),(x_8|0,4)}

Нечеткое подмножество с функцией принадлежности $2\mu_{\tilde{A}\cap\underline{\tilde{A}}}(x)$ иногда называют *векторным индикатором нечеткости.* Таким образом, для (61) имеем

$\{(x_1|0{,}4), (x_2|0{,}4), (x_3|1), (x_4|0{,}6), (x_5|0), (x_6|0), (x_7|0{,}2), (x_8|0{,}8)\}$

Формулу (63) можно переписать в более удобном виде:

$$\nu(\tilde{A}) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_{\tilde{A}\Box\underline{\tilde{A}}}(x_i) \qquad (63\text{-а})$$

И снова имеем

$$\nu(\underline{\tilde{A}}) = \nu(\tilde{A}).$$

Оценка нечеткости через энтропию. Ограничимся здесь рассмотрением конечного универсального множества. Мы знаем, что энтропия системы измеряет степень беспорядка (хаоса) компонентов системы относительно вероятностей состояния.

Рассмотрим N состояний $L_1, L_2, \ldots, L_N$ системы, с которыми связанны вероятности $p_1, p_2, \ldots, p_N$, тогда *энтропия* системы определяется выражением

$$H(p_1, p_2, \ldots, p_N) = -\sum_{i=1}^{N} p_i \ln p_i.$$

Легко показать, что

$$H=0 \ (H \text{ номинально) при } p_r=1, \ r=\in \{1, 2, \ldots N\};$$
$$p_i=0, \ i\neq r.$$
$$H=\ln N \ (H \text{ максимально) при } p_1=p_2=\ldots=p_N=p=1/N.$$

Если мы воспользуемся формулой

$$H=(p_1, p_2, \ldots, p_N) = -(1/\ln N)\sum_{i=1}^{N} p_i \ln p_i,$$

то энтропия будет величиной, которая изменяется между 0 и 1:

$$H_{\min}=0 \text{ и } H_{\max}=1$$

Посмотрим, как использовать это понятие для оценки нечеткости подмножества. Рассмотрим нечеткое подмножество

$$\mu_{\tilde{A}}(x_1)=0{,}7,\ \mu_{\tilde{A}}(x_2)=0{,}9,\ \mu_{\tilde{A}}(x_3)=0,\ \mu_{\tilde{A}}(x_4)=0{,}6,$$
$$\mu_{\tilde{A}}(x_5)=0{,}5,\ \mu_{\tilde{A}}(x_6)=1$$

Положив

$$\pi_{\tilde{A}}(x_i) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{\sum_{i=1}^{6}\mu_{\tilde{A}}(x_i)}$$

получим

$$\pi_{\tilde{A}}(x_1)=\frac{7}{37},\ \pi_{\tilde{A}}(x_2)=\frac{9}{37},\ \pi_{\tilde{A}}(x_3)=0,\ \pi_{\tilde{A}}(x_4)=\frac{6}{37},$$

$$\pi_{\tilde{A}}(x_5) = \frac{5}{37},\ \pi_{\tilde{A}}(x_6) = \frac{10}{37}.$$

Тогда

$$H=(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_6) = -\frac{1}{\ln 6}\sum_{i=1}^{6}\pi_{\tilde{A}}(x_i)\cdot\ln\pi_{\tilde{A}}(x_i) =$$

$$= -\frac{1}{\ln 6}\left(\frac{7}{37}\ln\frac{7}{37} + \frac{9}{37}\ln\frac{9}{37} + \frac{6}{37}\ln\frac{6}{37} + \frac{5}{37}\ln\frac{5}{37} + \frac{10}{37}\ln\frac{10}{37}\right) = 0{,}89$$

Общую формулу, которая позволяет подсчитать энтропию по нечеткости, можно записать в виде

$$H(\pi_{\tilde{A}}(x_1), \pi_{\tilde{A}}(x_2), ..., \pi_{\tilde{A}}(x_N)) = -\frac{1}{\ln N}\sum_{i=1}^{N}\pi_{\tilde{A}}(x_i)\cdot\ln\pi_{\tilde{A}}(x_i) =$$

$$= \frac{1}{\ln N\sum_{i=1}^{N}\mu_{\tilde{A}}(x_i)}\left[\left(\sum_{i=1}^{N}\mu_{\tilde{A}}(x_i)\cdot\ln\sum_{i=1}^{N}\mu_{\tilde{A}}(x_i)\right) - \sum_{i=1}^{N}\mu_{\tilde{A}}(x_i)\cdot\ln\mu_{\tilde{A}}(x_i)\right]$$

Заметим, что метод подсчета нечеткости через энтропию зависит не непосредственно от значений функции принадлежности, а от их относительных значений. Таким образом, два нечетких подмножества

$\tilde{A}$={(x_1|0,1), (x_2|0,1), (x_3|0,1), (x_4|0,1), (x_5|0,1), (x_6|0,1)},

$\tilde{B}$={(x_1|0,8), (x_2|0,8), (x_3|0,8), (x_4|0,8), (x_5|0,8), (x_6|0,8)},

имеют одну и ту же энтропию. То же справедливо и для обычного подмножества

C={(x_1|1), (x_2|1), (x_3|1), (x_4|1), (x_5|1), (x_6|1)} .

Все обычные подмножества с единственным ненулевым элементом имеют энтропию 0. Наконец, пустое подмножество всегда имеет энтропию, равную 1.

Обычное подмножество α-уровня. Пусть $\alpha \in [0, 1]$; *подмножеством α-уровня* нечеткого подмножества $\tilde{A}$ будет называться обычное подмножество

Пример 1. Пусть

$\tilde{A}$={(x_1|0,8), (x_2|0,1), (x_3|1), (x_4|0,3), (x_5|0,6), (x_6|0,2), (x_7|0,5)}.

Имеем

$A_{0,3}$={(x_1|1), (x_2|0), (x_3|1), (x_4|1), (x_5|1), (x_6|0), (x_7|1)},

$A_{0,55}$={(x_1|1), (x_2|0), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|1), (x_6|0), (x_7|0)},

Пример 2. На рис. 12 представлен пример, в котором рассматриваемое множество есть R^+.

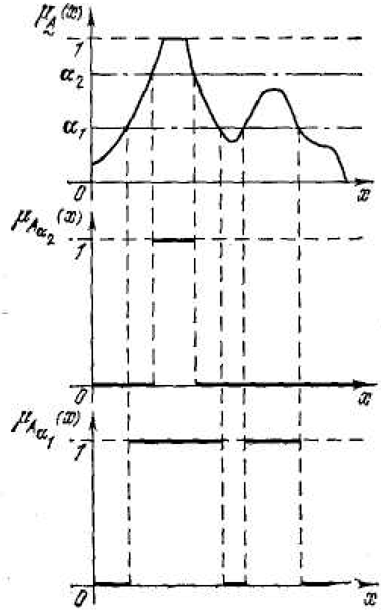


Рис. 12.

Свойство. Используя рис. 12 можно вывести следующее свойство

$$\alpha_2 \ge \alpha_1 \Rightarrow A_{\alpha_2} \subset A_{\alpha_1} .$$

Рассмотрим следующую теорему.

Теорема о декомпозициях. Всякое нечеткое подмножество $\tilde{A}$ можно следующим образом разложить на произведения обычных подмножеств по коэффициентам α_i:

$$\tilde{A} = \underset{\alpha_i}{MAX}[\alpha_1 \cdot A_{\alpha_1}, \alpha_2 \cdot A_{\alpha_2}, ..., \alpha_n \cdot A_{\alpha_n}], \qquad (64)$$

$$0 < \alpha_i \le , i=1, 2, \dots, n...$$

Доказательство следует непосредственно:

$$\mu_{A_{\alpha_i}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \mu_{\tilde A}(x) \ge \alpha_i, \\ 0, & \text{если} \quad \mu_{\tilde A}(x) < \alpha_i. \end{cases}$$

Таким образом, функцию принадлежности A можно записать в виде

$$\underset{\underset{\alpha_i}{MAX}[\alpha_i \cdot A_{\alpha_i}]}{\mu(x)} = \underset{\alpha_i}{MAX}[\alpha_i \cdot A_{\alpha_i}] = \underset{\alpha_i \le \mu_{\tilde A}(x)}{MAX}[\alpha_i] = \mu_A(x).$$

Пример 1.

$(x_1|0{,}2), (x_2|0), (x_3|0{,}5), (x_4|1), (x_5|0{,}7)=$
$=\mathrm{MAX}((0{,}2)\bullet (x_1|1),(x_2|0),(x_3|1),(x_4|1),(x_5|1),$
$(0{,}5)\bullet (x_1|0),(x_2|0),(x_3|1),(x_4|1), (x_5|1), (0{,}7)\bullet (x_1|0),(x_2|0),(x_3|0), (x_4|1), (x_5|1),$
$(1)\bullet (x_1|0),(x_2|0),(x_3|0), (x_4|1), (x_5|0))$.

Пример 2. Формула разложения (64) остается справедливой и в случае, когда универсальное множество имеет мощность континума. Пусть, например,

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2},\ x \in R^+. \qquad (65)$$

Рассматривая интервал $[\alpha, 1]$, где $0 < \alpha \leq 1$, можно записать

$$\mu_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu_{\tilde{A}}(x) \in [\alpha, 1], \\ 0, & \text{если } \mu_{\tilde{A}}(x) \notin [\alpha, 1]. \end{cases}$$

Таким образом, в данном примере

$$\mu_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq \sqrt{\dfrac{\alpha}{1-\alpha}}, \\ 0, & \text{если } x < \sqrt{\dfrac{\alpha}{1-\alpha}}. \end{cases}$$

и (65) можно разложить для любых произвольных множеств значений α-уровня, $0 < \alpha \leq 1$.

Синтез нечеткого подмножества посредством объединения обычных подмножеств. Теорему о декомпозициях можно применить не только для анализа, но и для синтеза. Если рассмотреть последовательность обычных подмножеств

$$A_1 \subset\subset A_2 \subset\subset \ldots \subset\subset A_n$$

и присвоить значения α_1 для A_1, α_2 для A_2,. .., $\alpha_г$, для A_n, причем такие, что

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n,,$$

то с помощью (64) получим нечеткое подмножество $\tilde{A}$.

1.4. Свойства множества нечетких подмножеств

Множество нечетких подмножеств для конечных *P* и *M*

Ограничимся случаем, когда P и M — конечные множества. Напомним определение *множества всех подмножеств* данного множества на простом примере. Пусть

$$P=\{x_1, x_2, x_3\}.$$

Тогда

$$U(P)=\{\varnothing, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, P\}. \quad (66)$$

Это множество состоит из $2^3 = 8$ элементов. В общем случае для множеств

$$P=\{x_1, x_2,..., x_n\}$$

можно в таким же образом определить 2^n элементов.

Для нечетких подмножеств множество всех подмножеств или «множество нечетких подмножеств» определяется иначе. Рассмотрим сначала пример. Пусть

$$P=\{x_1, x_2\} \quad (67)$$

$$M=\{0;\ 0{,}5;1\} \quad (68)$$

Выпишем множество $U(P)$ нечетких подмножеств множества P

$$U(P)=\{\{(x_1|0), (x_2|0)\}, \{(x_1|0), (x_2|0{,}5)\},\{(x_1|0{,}5), (x_2|0)\}, \{(x_1|0{,}5), (x_2|0{,}5)\}, \{(x_1|0), (x_2|1)\},\{(x_1|1), (x_2|0)\}, \{(x_1|1), (x_2|0{,}5)\}, \{(x_1|0{,}5), (x_2|1)\},\{(x_1|1), (x_2|1)\}\}. \quad (69)$$

(Заметим, что всегда $U(P)\subset \tilde{U}(P)$. Таким образом, учитывая (67) и (68), можно записать

$$U(P)=\{\varnothing, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_1, x_2\}\}=\{\{(x_1|0), (x_2|0)\}, \{(x_1|1),(x_2|0)\}, \{(x_1|0),(x_2|1)\}, \{(x_1|1),(x_2|1)\}.$$

Здесь конечно, выписано подмножество множеств (69), что более четко увидим на рис 13-18.)

В общем случае, если

$$\text{card}\, P=n \quad \text{и} \quad \text{card}\, M=m$$

где card означает «мощность», а в нашем случае - число элементов множества, то

$$\text{card}\, U(P)=m^n.$$

Отсюда следует, что card $U(P)$ - конечное число тогда и только тогда, когда m и n конечны. Множество $U(P)$ содержит 2^n обычных подмножеств.

Для лучшего сравнения с (66) рассмотрим другой пример:

$$P = \{x_1, x_2, x_3\} \text{ и } M = \{0;\ 0{,}5;\ 1\}.$$

$U(P)$={(x_1|0),(x_2|0),(x_3|0)},{(x_1|0),(x_2|0,(x_3|0,5)},{(x_1|0,5),(x_2|0,5), (x_3|0)}, {(x_1|0,5),(x_2|0),(x_3|0)},{(x_1|0),(x_2|0), (x_3|1)},{(x_1|0), (x_2|0,5) , (x_3|0,5)}, {(x_1|0), (x_2|1) , (x_3|0)},…,{(x_1|1),(x_2|0,5),(x_3|1)},{(x_1|1),(x_2|1),(x_3|0,5)},{(x_1|1),(x_2|1),(x_3|1)}}.

Как известно, структура множества всех подмножеств $U(P)$ множества P представляет собой дистрибутивную решетку с дополнениями, т.е. булеву решетку. Однако множество нечетких подмножеств $U(P)$ наделено структурой векторной решетки, а точнее — дистрибутивной решеткой без дополнений.

Напомним, что если дополнение элемента в дистрибутивной решетке существует, то оно единственно, то же справедливо для случая векторной решетки. Рассматриваемые в теории решеток дополнения имеют другой смысл - это не дополнение в смысле определения

$$\forall x \in P: \ \mu_{\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{B}}(x),$$

Дополнения, определяемые приведенным выше выражением, не обязательно дают

$$A \square \overline{A} = \varnothing \text{ и } A \cup \overline{A} = P,$$

в то время как это справедливо для дополнений в решетке. Все различие в этом и состоит, но различие это существенно.

На рис. 13-18 изображено несколько простых примеров, где для упрощения обозначений нечеткие подмножества представлены соответствующими им функциями принадлежности.

Рис. 14: $P = \{x_1, x_2\}$, $M = \{0;\ 0{,}5;\ 1\}$.

На рис. 14 изображена векторная решетка нечетких подмножеств, а на рис. 13 - булева решетка обычных множеств.

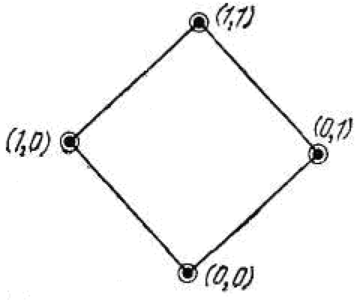


Рис. 13.

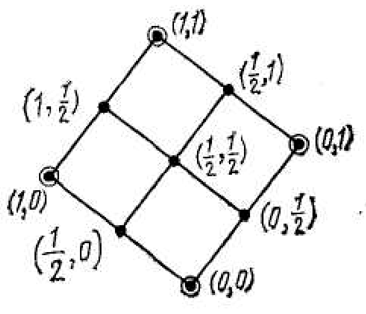


Рис. 14.

Рис. 16: $P=\{x_1, x_2, x_3\}$, $M=\{0;\ 0{,}5;\ 1\}$.

На рис. 16 изображена векторная решетка нечетких подмножеств, а на рис. 15 - булева решетка обычных множеств.

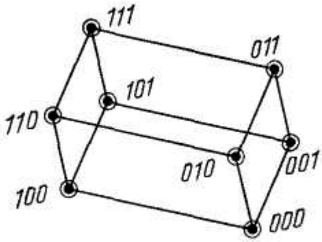


Рис. 15.

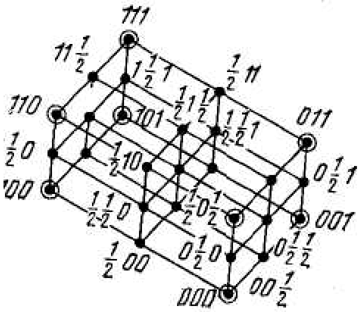


Рис. 16.

Рис. 18: это другое представление векторной решетки рис. 16, а слева на рис. 17 помещена булева решетка обычных множеств.

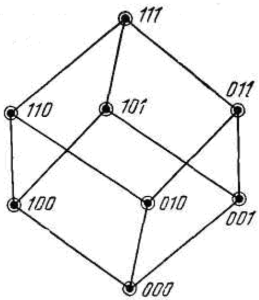


Рис. 17.

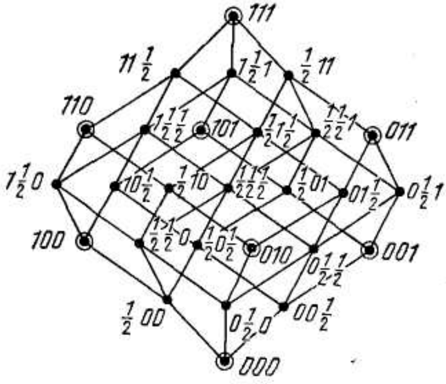


Рис. 18.

Свойства множества нечетких подмножеств

Напомним основные свойства подмножества всех подмножеств обычного множества P. Пусть заданы подмножества

$$A \subset P, \quad B \subset P, \quad C \subset P,$$

имеем:

$$\left.\begin{aligned}&A \cap B = B \cap A,\\ &A \cup B = B \cup A,\end{aligned}\right\} \text{ коммутативность}$$

$$\left.\begin{aligned}&(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),\\ &(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),\end{aligned}\right\} \text{ ассоциативность}$$

$$\left.\begin{aligned}&A \cap A = A,\\ &A \cup A = A,\end{aligned}\right\} \text{ идемпотентность}$$

$$\left.\begin{aligned}&A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),\\ &A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),\end{aligned}\right\} \text{ дистрибутивность пересечения}$$

относительно объединения и объединение относительно пересечения

$$A \cap \overline{A} = \varnothing, \qquad (70)$$

$$A \cup \overline{A} = P, \qquad (71)$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing,$$

$$A \cup \varnothing = A\ ,$$

$$A \cap P = A,$$

$$A \cup P = P,$$

$$\overline{\left(\overline{A}\right)} = A \text{ - инволюция,}$$

$$\left.\begin{aligned}&\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},\\ &\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.\end{aligned}\right\} \text{ теоремы де-Моргана}$$

Если $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ и $\tilde{C}$ - нечеткие подмножества универсального множества P, то удовлетворяются все выше приведенные свойства, за исключением (70) и (71). Можно определить единственное дополнение, однако свойства (70) и (71) справедливы только для обычных подмножеств.

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{B} \cap \tilde{A},\\ &\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \cup \tilde{A},\end{aligned}\right\} \text{ коммутативность}$$

$$\left.\begin{aligned}&(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cap \tilde{C} = \tilde{A} \cap (\tilde{B} \cap \tilde{C}),\\ &(\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cup \tilde{C} = \tilde{A} \cup (\tilde{B} \cup \tilde{C}),\end{aligned}\right\} \text{ ассоциативность}$$

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{A} \cap \tilde{A} = \tilde{A},\\ \tilde{A} \cup \tilde{A} = \tilde{A},\end{array}\right\} \text{ идемпотентность}$$

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{A} \cap \left(\tilde{B} \cup \tilde{C}\right) = \left(\tilde{A} \cap \tilde{B}\right) \cup \left(\tilde{A} \cap \tilde{C}\right),\\ \tilde{A} \cup \left(\tilde{B} \cap \tilde{C}\right) = \left(\tilde{A} \cup \tilde{B}\right) \cap \left(\tilde{A} \cup \tilde{C}\right),\end{array}\right\} \text{дистрибутивность}$$

пересечения относительно объединения и объединения относительно пересечения

$$\tilde{A} \cap \varnothing = \varnothing,$$

где Ø – обычное множество, такое, что $\forall x_i \in P$: $\mu_{\varnothing}(x_i)=0$

$$\tilde{A} \cup \varnothing = \tilde{A},$$

$$\tilde{A} \cap P = \tilde{A},$$

где P – обычное множество, такое, что $\forall x_i \in P$: $\mu_P(x_i)=1$, т.е., универсальное множество.

$$\tilde{A} \cup P = P,$$

$$\left(\overline{\overline{\tilde{A}}}\right) = \tilde{A} \text{ - инволюция },$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{\tilde{A} \cap \tilde{B}} = \overline{\tilde{A}} \cup \overline{\tilde{B}},\\ \overline{\tilde{A} \cup \tilde{B}} = \overline{\tilde{A}} \cap \overline{\tilde{B}}.\end{array}\right\} \text{теоремы де-Моргана для нечетких}$$

подмножеств

Еще раз подчеркнем: все свойства обычного множества всех подмножеств также справедливы для множества всех нечетких подмножеств, за исключением (70) и (71). Таким образом, в случае нечетких подмножеств мы уже не имеем дело с алгеброй в смысле теории обычных множеств; структуры нечетких подмножеств представляют собой векторные решетки.

Алгебраическое произведение и сумма двух нечетких подмножеств

Пусть P — множество и M=[0, 1] — связанное с ним множество принадлежностей; пусть $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — два нечетких подмножества P.

Алгебраическое произведение $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ обозначается

$$\tilde{A} \bullet \tilde{B}$$

и определяется следующим образом:

$$\forall x \in P: \quad \mu_{\tilde{A} \cdot \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x).$$

Алгебраическая сумма этих двух подмножеств обозначается

$$\tilde{A} \hat{+} \tilde{B}$$

и определяется следующим образом:

$$\forall\, x \in P: \quad \mu_{\tilde{A}\hat{+}\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x).$$

Рассмотрим, например, нечеткие подмножества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, которые определены в (34 - 35):

$$\tilde{A} = \{(x_1|0{,}2),\ (x_2|0{,}7),\ (x_3|1),\ (x_4|0),\ (x_5|0{,}5)\},$$

$$\tilde{B} = (x_1|0{,}5),\ (x_2|0{,}3),\ (x_3|1),\ (x_4|0{,}1),\ (x_5|0{,}5)\}.$$

$$\tilde{A} \bullet \tilde{B} = \{(x_1|0{,}10),\ (x_2|0{,}21),\ (x_3|1),\ (x_4|0),\ (x_5|0{,}25)\}.$$

$$\tilde{A} \hat{+} \tilde{B} = \{(x_1|0{,}60),\ (x_2|0{,}79),\ (x_3|1),\ (x_4|0{,}1),\ (x_5|0{,}75)\}.$$

Сделаем следующее замечание. Если $M=\{0,\ 1\}$, т.е. в случае обычных подмножеств, имеем

$$A \square B = A \bullet B$$

$$A \cup B = A \hat{+} B$$

Действительно, если

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \in \{0, 1\} \text{ и } \mu_{\tilde{B}}(x) \in \{0, 1\},$$

то следующие таблицы эквивалентны (но за исключением некоторых тривиальных случаев это не так, если $M \neq \{0,\ 1\}$).

MIN	0	1
0	0	0
1	0	1

Эквивалентна

(.)	0	1
0	0	0
1	0	1

,

MAX	0	1
0	0	1
1	1	1

Эквивалентна

(+)	0	1
0	0	1
1	1	1

.

Можно убедиться, что для двух операций ($\bullet$) и ($\hat{+}$) на множестве всех нечетких подмножеств справедливы только перечисленные ниже свойства; их значительно меньше, чем соответствующих свойств для операций $\cap$ и $\cup$ в множестве всех нечетких подмножеств, и, следовательно, меньше, чем в множестве всех обычных подмножеств. Легко проверяются следующие свойства:

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{A}\cdot\tilde{B}=\tilde{B}\cdot\tilde{A},\\&\tilde{A}\hat{+}\tilde{B}=\tilde{B}\hat{+}\tilde{A},\end{aligned}\right\}\ \text{коммутативность} \qquad (72\text{-}73)$$

$$\left.\begin{aligned}&(\tilde{A}\cdot\tilde{B})\cdot\tilde{C}=\tilde{A}\cdot(\tilde{B}\cdot\tilde{C}),\\&(\tilde{A}\hat{+}\tilde{B})\hat{+}\tilde{C}=\tilde{A}\hat{+}(\tilde{B}\hat{+}\tilde{C}),\end{aligned}\right\}\ \text{ассоциативность} \qquad (74\text{-}75)$$

$$\tilde{A}\cdot\varnothing=\varnothing, \qquad (76)$$

$$\tilde{A}\hat{+}\varnothing=\tilde{A}\ , \qquad (77)$$

$$\tilde{A}\cdot P=\tilde{A}, \qquad (78)$$

$$\tilde{A}\hat{+}P=P, \qquad (79)$$

$$\left(\overline{\overline{\tilde{A}}}\right)=\tilde{A}\ \text{- инволюция,} \qquad (80)$$

$$\left.\begin{aligned}&\overline{\tilde{A}\cdot\tilde{B}}=\overline{\tilde{A}}\hat{+}\overline{\tilde{B}},\\&\overline{\tilde{A}\hat{+}\tilde{B}}=\overline{\tilde{A}}\cdot\overline{\tilde{B}}.\end{aligned}\right\}\ - \qquad (81\text{-}82)$$

- теоремы де-Моргана для операций (•) и ($\hat{+}$) на нечетких подмножествах.

Для операций (•) и ($\hat{+}$) свойства идемпотентность и дистрибутивность, а также свойства (70) и (71) не выполняются. Отсутствие этих свойств, особенно свойства дистрибутивности, значительно обедняет структуру. Покажем на нескольких примерах, как доказываются свойства (72) - (82).

Докажем, например, свойство (75). Положим

$$a=\mu_{\tilde{A}}(x)\,,\ b=\mu_{\tilde{B}}(x),\ c=\mu_{\tilde{C}}(x).$$

$$(\tilde{A}\hat{+}\tilde{B})\hat{+}\tilde{C}=\tilde{A}\hat{+}(\tilde{B}\hat{+}\tilde{C}) \qquad (83)$$

выполняется, если

$$(a+b-ab)+c-(a+b-ab)c=a+(b+c-bc)-a(b+c-bc)$$

Избавляясь от скобок, приходим к тождеству

$$a+b-ab+c-ac-bc+abc=a+b+c-bc-ab-ac+abc.$$

Таким образом, формула (83) доказана.

Докажем (81). Равенство

$$\overline{\tilde{A}\cdot\tilde{B}}=\overline{\tilde{A}}\hat{+}\overline{\tilde{B}}$$

выполняется, если

$$1-ab=(1-a)+(1-b)-(1-a)(1-b)=1-a+1-b-1+a+b-ab=1-ab.$$

Докажем, что свойство дистрибутивности не выполняется. Например, покажем, что, вообще говоря,

$$\tilde{A}\cdot(\tilde{B}\,\hat{+}\,\tilde{C}) \neq (\tilde{A}\cdot\tilde{B})\,\hat{+}\,(\tilde{A}\cdot\tilde{C}).$$

Для левой части уравнения получаем

$$a\,(b+c-bc)=ab+ac-abc,$$

а для правой части

$$ab+ac-(ab)(ac)=ab+ac-a^2bc.$$

Это доказывает, что дистрибутивность не выполняется, если $a^2 \neq a$.

Заметим, что операция $\cup$ не дистрибутивна относительно (•) или ($\hat{+}$), равно как и операция пересечения $\cap$, однако с другой стороны имеем

$$\tilde{A}\cdot(\tilde{B}\cap\tilde{C})=(\tilde{A}\cdot\tilde{B})\cap(\tilde{A}\cdot\tilde{C}),$$

$$\tilde{A}\cdot(\tilde{B}\cup\tilde{C})=(\tilde{A}\cdot\tilde{B})\cup(\tilde{A}\cdot\tilde{C}),$$

$$\tilde{A}\,\hat{+}\,(\tilde{B}\cap\tilde{C})=(\tilde{A}\,\hat{+}\,\tilde{B})\cap(\tilde{A}\,\tilde{+}\,\tilde{C}),$$

$$\tilde{A}\,\hat{+}\,(\tilde{B}\cup\tilde{C})=(\tilde{A}\,\hat{+}\,\tilde{B})\cup(\tilde{A}\,\tilde{+}\,\tilde{C}).$$

Индекс нечеткости для произведения. Индекс нечеткости для произведения можно определить аналогично (63-а); положим

$$\eta(\tilde{A}) = \frac{4}{N}\sum_{i=1}^{n} \mu_{\tilde{A}\cdot\bar{\tilde{A}}}(x_i)$$

Пример. Пусть

$\tilde{A}$ = {(x_1|0,7), (x_2|0,2), (x_3|0,9), (x_4|1), (x_5|0), (x_6|0,4), (x_7|1)},

$\bar{\tilde{A}}$ = {(x_1|0,3), (x_2|0,8), (x_3|0,1), (x_4|0), (x_5|1), (x_6|0,6), (x_7|0)},

$\tilde{A}\cdot\bar{\tilde{A}}$ ={(x_1|0,21),(x_2|0,16),(x_3|0,09),(x_4|0),(x_5|0),(x_6|0,24), (x_7|0)},

$\eta\,\tilde{A}$ =4/7(0,21+0,16+0,09+0+0+0,24+0)=0,40.

Общее замечание о нечеткостях. Мы уже видели, что каждая из операций $\cap$, $\cup$, (•) , ($\hat{+}$), будучи примененной к разным подмножествам одного и того же универсального множества, увеличивает или уменьшает нечеткость подмножества A не систематическим образом. При этом необходимо помнить, что когда речь идет об обработке нечетких подмножеств, то функции принадлежности предполагаются всегда известными.

Если * — одна из четырех рассмотренных выше операций, то для произвольных $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, $\tilde{A}\subset P$, $\tilde{B}\subset P$ априори нельзя сказать, будет ли величина $\nu(\tilde{A} * \tilde{B})$ большей или меньшей, чем $\nu(\tilde{A})$ или $\nu(\tilde{B})$.

Та же самая ситуация возникает при рассмотрении энтропии. Чтобы знать, как увеличить или уменьшить энтропию $H=H(\tilde{A})$, нужно знать подмножество A; понятно, что знания только значения энтропии H для этого недостаточно.

Примеры решения типовых задач

Операции над нечеткими множествами

Операция включения

1. Пусть

$$P=\{x_1, x_2, x_3, x_4\},\ M=[0, 1].$$
$$\tilde{A}=\{(x_1|0{,}5), (x_2|0{,}3), (x_3|0), (x_4|1)\},$$
$$\tilde{B}=\{(x_1|0{,}4), (x_2|0), (x_3|0), (x_4|0)\},$$

Имеем $\tilde{B} \subset \tilde{A}$, так как 0,4<0,5, 0<0,3, 0=0, 0<1.

2. Пусть

$$\tilde{A} \subset P,\ \tilde{B} \subset P,\ M=[0, 1].$$

Если

$$\forall x \in P:\ \mu_{\tilde{A}}(x) \le \mu_{\tilde{B}}(x),$$

то

$$\tilde{B} \subset \tilde{A}$$

3. Пусть

$$P=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\},\ M=[0, 1].$$

Тогда можно записать

$$P=\{(x_1, 1), (x_2, 1), (x_3, 1), (x_4, 1), (x_5, 1), (x_6, 1)\}.$$

Дополнение

Рассмотрим пример:

$$P=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\},\ M=[0, 1].$$
$$\tilde{A}=\{(x_1|0{,}15), (x_2|0{,}60), (x_3|0), (x_4|0), (x_5|1), (x_6|0{,}05)\},$$
$$\tilde{B}=(x_1|0{,}85), (x_2|0{,}40), (x_3|1), (x_4|1), (x_5|0), (x_6|0{,}95)\}.$$

Тогда очевидно

$$\overline{\tilde{A}}=\tilde{B}$$

Пересечение

Пример.

$$P=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5,\},\ M=[0, 1].$$
$$\tilde{A}=\{(x_1|0{,}3), (x_2|0{,}7), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|0{,}6)\},$$
$$\tilde{B}=(x_1|0{,}5), (x_2|0{,}4), (x_3|1), (x_4|0{,}4), (x_5|0{,}6)\}.$$

$\tilde{A} \square \tilde{B}$ =$(x_1|0{,}3), (x_2|0{,}4), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|0{,}6)\}$.

Объединение

$P=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5,\}$, $M=[0, 1]$.

$\tilde{A}=\{(x_1|0{,}3), (x_2|0{,}7), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|0{,}6)\}$,

$\tilde{B}=(x_1|0{,}5), (x_2|0{,}4), (x_3|1), (x_4|0{,}4), (x_5|0{,}6)\}$.

$\tilde{A} \cup \tilde{B}=(x_1|0{,}5), (x_2|0{,}7), (x_3|1), (x_4|0{,}4), (x_5|0{,}6)\}$.

Дизъюктивная сумма

Рассмотрим тот же пример, который иллюстрировал операции объединения и пересечение:

$\tilde{A}=\{(x_1|0{,}3), (x_2|0{,}7), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|0{,}6)\}$,

$\tilde{B}=(x_1|0{,}5), (x_2|0{,}4), (x_3|1), (x_4|0{,}4), (x_5|0{,}6)\}$,

$\overline{\tilde{A}}=\{(x_1|0{,}7), (x_2|0{,}3), (x_3|0), (x_4|1), (x_5|0{,}4)\}$,

$\overline{\tilde{B}}=(x_1|0{,}5), (x_2|0{,}6), (x_3|0), (x_4|0{,}6), (x_5|0{,}4)\}$,

$\tilde{A} \cap \overline{\tilde{B}}=(x_1|0{,}2), (x_2|0{,}7), (x_3|0), (x_4|0), (x_5|0{,}6)\}$,

$\overline{\tilde{A}} \cap \tilde{B}=(x_1|0{,}5), (x_2|0{,}3), (x_3|0), (x_4|0{,}4), (x_5|0{,}4)\}$.

$\tilde{A} \oplus \tilde{B}=(x_1|0{,}5), (x_2|0{,}7), (x_3|0), (x_4|0{,}4), (x_5|0{,}6)\}$.

Разность

Рассмотрим снова пример

$P=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5,\}$, $M=[0, 1]$.

$\tilde{A}=\{(x_1|0{,}3), (x_2|0{,}7), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|0{,}6)\}$,

$\tilde{B}=(x_1|0{,}5), (x_2|0{,}4), (x_3|1), (x_4|0{,}4), (x_5|0{,}6)\}$.

используя

$\overline{\tilde{B}}=(x_1|0{,}5), (x_2|0{,}6), (x_3|0), (x_4|0{,}6), (x_5|0{,}4)\}$,

$\tilde{A} \cap \overline{\tilde{B}}=(x_1|0{,}2), (x_2|0{,}7), (x_3|0), (x_4|0), (x_5|0{,}6)\}$,

получим

$\tilde{A} \cap \overline{\tilde{B}}=(x_1|0{,}2), (x_2|0{,}7), (x_3|0), (x_4|0), (x_5|0{,}6)\}$,

Определение расстояния Хемминга

Рассмотрим два обычных подмножества $A \subset P$, $B \subset P$ и конечное множество

$A=\{(x_1|1), (x_2|0), (x_3|0), (x_4|1), (x_5|0), (x_6|1), (x_7|0)\}$,

$B=\{(x_1|0), (x_2|1), (x_3|0), (x_4|0), (x_5|0), (x_6|1), (x_7|1)\}$.

Под расстоянием Хемминга между A и B понимают величину

$$d(A\ , B)=\sum_{i=1}^{n}|\ \mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)\ |$$

Тогда, для A и B имеем расстояние Хемминга

$d(A, B)$=|1-0|+|0-1|+|0-0|+|1-0|+|0-0|+|1-1|+|0-1|=1+1+0+1+0+0+1=4

Определение относительного евклидова расстояния

Пусть

$\tilde{A}$={(x_1|0,7), (x_2|0,2), (x_3|0), (x_4|0,6), (x_5|0,6), (x_6|1), (x_7|0)}

и

$\tilde{B}$={(x_1|0,2), (x_2|0), (x_3|0), (x_4|0,6), (x_5|0,8), (x_6|0,4), (x_7|1)}

Имеем

$d(\tilde{A},\tilde{B})$ =|0,7-0,2|+|0,2-0|+|0-0|+|0,6-0,6|+|0,5-0,8|+|1-0,4|+|0-1|=
=0,5+0,2++0+0+0,3+0,6+1=2,6.

$$\delta(\tilde{A},\tilde{B})=(1/7)\ d(\tilde{A},\tilde{B})=2{,}6/7=0{,}37;$$

$e^2(\tilde{A},\tilde{B})=(0{,}7-0{,}2)^2+(0{,}2-0)^2+(0-0)^2+(0{,}6-0{,}6)^2+(0{,}5-0{,}8)^2+(1-0{,}4)^2+$
$+(0-1)^2=(0{,}5)^2+(0{,}2)^2+(0)^2+(0)^2+(0{,}3)^2+(0{,}6)^2+(1)^2=1{,}74;$

$$e(\tilde{A},\tilde{B})=\sqrt{1{,}74}=1{,}32;$$

$$\varepsilon(\tilde{A},\tilde{B})=\frac{e(\tilde{A},\tilde{B})}{\sqrt{7}}=\frac{1{,}32}{\sqrt{7}}=0{,}49.$$

Индивидуальные тестовые задачи

1. Для универсального множества

$$P = \{A, B, C, D, E, F, G\}$$

и нечетких подмножеств

$\tilde{A}$={(A|0), (B|0,3), (C |0,7), (D|l), (E|0), (F|0,2), (G|0,6)},
$\tilde{B}$ ={(A|0,3), (B|1), (C|0,5), (D|0,8),(E|1),(F|0,5), (G|0,6)}, C={(A|1), (D|0,5), (C|0.5), (D |0,2), (E|0), (F|0,2), (G|0,9)}

найдите

а) $\tilde{A}\ \square\ \tilde{B}$, б) $\tilde{A}\ \mathrm{U}\ \tilde{B}$, в) $\tilde{A}\ \mathrm{I}\ \overline{\tilde{B}}$, г) $(\tilde{A}\ \mathrm{U}\ \overline{\tilde{B}})\ \mathrm{I}\ \tilde{C}$,

д) $(\overline{\tilde{A}\ \mathrm{I}\ \tilde{B}})\ \mathrm{I}\ \overline{\tilde{C}}$, е) $\tilde{A}\oplus\tilde{B}$, же) $\overline{\tilde{A}\oplus\tilde{B}}$, з) $(\tilde{A}\ \mathrm{I}\ \overline{\tilde{A}})\ \mathrm{U}\ \tilde{A}$.

2. Для нечетких подмножеств из упражнения 1 определите

а) δ ($\tilde{A}\bullet\tilde{B}$), δ($\tilde{B}\bullet\tilde{C}$), δ ($\tilde{A}\bullet\tilde{C}$);

б) ε ($\tilde{A}$, $\tilde{B}$), ε ($\tilde{B}$, $\tilde{C}$), ε($\tilde{A}$, $\tilde{C}$);

в) $\nu(\tilde{A})$, $\nu(\tilde{B})$, $\nu(\tilde{A} \cap \tilde{B})$, $\nu(\tilde{A} \cup \tilde{B})$, $\nu(\overline{\tilde{A}})$;

г) $\eta(\tilde{A})$, $\eta(\tilde{B})$, $\eta(\tilde{A} \cap \tilde{B})$, $\eta(\tilde{A} \cup \tilde{B})$, $\eta(\overline{\tilde{A}})$.

3. Пусть задано универсальное множество

$$P = [0, a] \subset R.$$

Для нечеткого подмножества $\tilde{A}$, заданного функцией принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$, определите индекс ν нечеткости подмножества $\tilde{A}$.

а) $\mu_{\tilde{A}}(x) = \dfrac{x^2}{a^2}$, $x \in [0, a]$,

б) $\mu_{\tilde{A}}(x) = \dfrac{(x-a)^2}{a^2}$, $x \in [0, a]$,

в) $\mu_{\tilde{A}}(x) = \dfrac{4x^2}{a^2}$, $0 \le x \le \dfrac{a}{2}$,

г) $\mu_{\tilde{A}}(x) = \dfrac{4(x-a)^2}{a^2}$, $\dfrac{a}{2} \le x \le a$.

4. Определите обычное подмножество α-уровня для нечеткого подмножества

$$\tilde{A} = \{(A|0{,}7), (B|0{,}5), (C|1), (D|0{,}2), (E|0{,}6)\}:$$

а) α = 0,1, б) α = 0,6, в) α = 0,8, г) α = 0,9.

Представьте разложение нечеткого подмножества в виде

$$\alpha_2 \ge \alpha_1 \Rightarrow A_{\alpha_2} \subset A_{\alpha_1}.$$

5. Выпишите множества всех нечетких подмножеств для случаев

а) $P = \{x_1, x_2\}$, $M = \{0; 1/3; 2/3; 1\}$,

б) $P = \{x_1\ x_2, x_3\}$, $M = \{a, b, c\}$, $a < b < c$.

6. Докажите следующие свойства:

а) $\tilde{A} \cap (\tilde{A} \cup \tilde{B}) = \tilde{A}$ и $\tilde{A} \cup (\tilde{A} \cap \tilde{B}) = \tilde{A}$,

б) $\varnothing \subset \tilde{A} \cap \overline{\tilde{A}} \subset$; $\tilde{A} \cup \overline{\tilde{A}} \subset P$,

в) $(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) \cup (\tilde{C} \cap \tilde{A}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B})(\tilde{B} \cup \tilde{C}) \cap$
$\cap (\tilde{C} \cup \tilde{A})$.

7. Для трех нечетких подмножеств из упражнения 1 вычислите

а) $\tilde{A} \hat{+} \tilde{B} \hat{+} \tilde{C}$, б) $\tilde{A} \bullet (\tilde{B} \hat{+} \tilde{C})$

и докажите

в) $\tilde{A}\bullet\tilde{A}\subset\tilde{A}$ i $\tilde{A}\hat{+}\tilde{A}\supset\tilde{A}$, г) $\tilde{B}\hat{+}\tilde{A}\bullet\tilde{C}\supset(\tilde{B}\hat{+}\tilde{C})$.

8. Упростите выражение

$[\tilde{A}\,\square\,[\tilde{B}\ \mathrm{I}\ \tilde{C})\,\mathrm{U}\,(\overline{\tilde{A}}\ \mathrm{I}\ \overline{\tilde{C}})]]\ \mathrm{U}\ \overline{\tilde{C}}$.

2. Меры возможности и нечеткие множества

Содержание этого материала основывается на нетрадиционном подходе к моделированию неточности и неопределенности, изложенном в книге Д.Дюбуа, А.Прад «Теория возможностей». Базовым понятием этого подхода является мера возможности. Цель этого паздела— обоснование, определение и обсуждение меры возможности, а также представление других базовых понятий, необходимых для усвоения последующих разделов.

2.1. Неопределенность и неточность

Неопределенность и неточность могут рассматриваться как две противоположные точки зрения на одну и ту же реальность - неполноту информации. Далее будет предполагаться, что информация выразима в форме логического высказывания, содержащего предикаты и в случае необходимости — квантификаторы. Под базой знаний будет пониматься множество сведений, имеющихся у субъекта или группы субъектов или содержащихся в информационной системе и относящихся к одной и той же проблемной области. Тогда предикаты, появляющиеся при выражении информации, могут интерпретироваться как подмножества одного и того же универсального множества. Любое высказывание может также рассматриваться как утверждение, относящееся к появлению некоторого события. В свою очередь, события представимы в виде подмножеств этого универсального множества, называемого "достоверным событием". Таким образом, имеются три эквивалентных способа анализа множества данных в зависимости от того, делается ли акцент на структуре (логическая точка зрения), содержании (теоретико-множественная точка зрения) этой информации или на ее отношении к действительным фактам (событийная точка зрения).

Мы **определим информационную единицу четверкой (<u>объект, признак, значение, уверенность</u>).** *Признаку* соответствует функция, задающая значение (множество значений) объекта или *предмета,* название которого фигурирует в информационной единице. Это значение соответствует некоторому предикату, т. е. подмножеству универсального множества, связанного с данным признаком. *Уверенность* есть показатель надежности информационной единицы. Очевидно, что четыре компонента, образующие информационную единицу, могут быть составными (множество объектов, множество признаков, n-местный предикат, разные степени уверенности). Кроме того, могут вводится переменные, особенно на уровне объектов, если информация содержит квантификаторы. В данном контексте можно четко различать понятия неточности и неопределенности: **неточность относится к содержанию информации (составляющая "значение" в четверке), а неопределенность — к ее истинности, понимаемой в смысле соответствия действительности (составляющая "уверенность").**

Степень неопределенности информации отражают с помощью квалификаторов (модальностей) типа "вероятно", "возможно", "необходимо", "правдоподобно" и др., которым здесь мы попытаемся придать точный смысл. Модальность "вероятно" исследовалась на протяжении уже двух веков. Вероятность имеет две различные интерпретации. Одна из них — физическая (статистическая) , связанная с проведением статистических испытаний и определением частоты появления события. Другая — эпистемологическая, относящаяся к субъективному суждению. **Модальности "возможно" и "необходимо" изучались еще Аристотелем, который подчеркнул факт их двойственности (если некоторое событие является необходимым, то противоположное ему событие невозможно).** Любопытно, что в противоположность понятию "вероятно" понятия "возможно" и "необходимо" часто рассматривались в рамках двузначной логики как категории типа "все" или "ничего". Но понятие "возможно", как и понятие "вероятно", допускает две интерпретации: физическую (мера трудоемкости выполнения некоторого действия) и эпистемологическую (суждение, которое мало связывает его автора). Наоборот, "необходимо" — гораздо более утвердительное понятие в физическом или эпистемологическом смысле (субъективная необходимость есть определенность, уверенность). Естественно допустить наличие степеней возможности и необходимости, как и степеней вероятности (оттенки возможности находятся уже в естественном языке, поскольку можно сказать, например, "очень возможно"). Правдоподобность и доверие имеют чисто эпистемологическую интерпретацию и связаны с возможностью и необходимостью соответственно. Каждое из этих понятий соответствует некоторому способу вывода из заданной базы знаний: **заслуживает доверия все то, что непосредственно дедуктивно выводится из базы знаний, а правдоподобно все то, что не противоречит ей (индуктивная точка зрения).**

Примерами неопределенных высказываний являются высказывания:

"Вероятно, что рост Жана не менее 1,70 м" $\triangleq$ (рост, Жан, $\geq$1,70 м, вероятно) .

"Вероятность того, что завтра выпадет 10 мм осадков, равна 0,5" $\triangleq$ (количество, осадки завтра, 10 мм, вероятность = 0,5).

Будем называть информационную единицу точной, если подмножество, соответствующее "значение" в наборе, является одноточечным, т. е. его нельзя разбить на части. В зависимости от способа анализа множества данных будем говорить об элементарном высказывании (т. е. не имплицированном никаким другим высказыванием, за исключением всегда ложного высказывания), синглетоне (теоретико-множественная точка зрения) или элементарном событии. Точность, конечно, зависит от способа определения базового множества (от его "зернистости", например от выбора единицы измерения). В других случаях будем говорить о неточной (imprecise) информации. Во французском языке есть и другие квалификаторы для описания неточности, такие как vague (расплывчатый, неясный, смутный), flou (нечеткий, размытый), general (обобщенный), ambigu (двусмысленный). Двусмысленность представляет собой форму неточности, связанную с языком: иногда она является следствием омонимии языка. Информация двусмысленна в той мере, в которой она относится к различным контекстам или различным возможным базам (универсальным множествам). Этот тип неточности не рассматривается в данной книге: универсальное множество, связанное с информационной единицей, считается известным. Обобщенность есть "доброкачественная" форма неточности, связанная с процессом абстрагирования: информация является обобщенной, если указывается множество объектов с общим свойством. Нечеткий, размытый, расплывчатый характер информации заключается в отсутствии четких границ у множества значений соответствующих объектов. Многие квалификаторы естественного языка расплывчаты, и для них характерна обобщенность. В качестве примера можно привести неточное четкое высказывание: "х =у" с точностью $\epsilon \triangleq$ (равенство, (х, у), с точностью ϵ, 1); неточное нечеткое высказывание: "х *приблизительно* равен у" = (равенство, (х, у), приблизительно, 1).

Расплывчатый термин "приблизительно" характеризует совокупность значений, более или менее адекватных ϵ.

Отсюда следует, что информация может быть одновременно нечеткой и неопределенной, о чем свидетельствует предложение: "Вероятно, что завтра выпадет много осадков" = (количество, осадки завтра, много, вероятно).

Для заданного множества сведений противоречие между неточностью и неопределенностью выражается в том, что с повышением точности содержания высказывания возрастает его неопределенность. И наоборот, неопределенный характер точной информации приводит в общем случае к некоторой неточности окончательных заключений, выводимых из этой информации.

2.2. Традиционные модели неточности и неопределенности

Традиционно используются два средства представления неполноты данных: теория вероятностей и теория ошибок. Кратко рассмотрим их области применения.

Теория вероятностей — вполне разработанная математическая теория с ясными и общепринятыми аксиомами. Основная из них — аксиома аддитивности вероятностей совместных событий. Споры вокруг теории вероятностей касаются ее интерпретации: какого рода действительность хотят выразить с помощью этой математической модели? Исторически ею пользовались в основном для "подсчета шансов" в азартных играх, причем вероятность события определялась отношением числа благоприятных исходов к числу возможных исходов. Недостаточная строгость этого определения породила школу частотной интерпретации вероятности, в которой вероятность рассматривается как предел частот наблюдаемых событий. Третья, так называемая субъективистская школа, попыталась избежать трудностей приложений теории, с которыми сталкиваются "частотники" (требований достаточного числа наблюдений, повторяемости экспериментов и т. д.), предложив интерпретацию вероятности как меры неуверенности. Значение вероятности при этом понимается как число, пропорциональное сумме, которую субъект согласится заплатить в том случае, если высказывание, являющееся по его утверждению истинным, в действительности окажется ложным. Было, показано, что подобным образом определенная мера неуверенности подчиняется аксиомам теории вероятностей, если только поведение субъекта удовлетворяет условиям "рациональности" (Сэвидж). Исходя из этого "субъективисты" стали утверждать, что аксиомы Колмогорова — единственные рациональные условия для оценки чувства неуверенности. .

Такую крайнюю позицию можно оспаривать и с философской, и с практической точек зрения. Прежде всего трудно согласиться с тем, что всякое неопределенное суждение подчиняется законам пари. Денежный залог, присутствующий в субъективистской модели, может помешать субъекту раскрыть истинный уровень своих знаний из-за страха потерять деньги. Так, профессиональный игрок распределит ставки поровну, если ему известно, что все соперники, на которых он ставит, равны по силе. При отсутствии всякой информации новичок сделает то же самое, потому что такая стратегия — наиболее осторожная. Субъективные вероятности не позволяют проводить различия между этими двумя уровнями информированности и представляются малопригодными в ситуациях, когда информации мало. В вероятностной модели особенно плохо учитывается предельный случай полного незнания, поскольку в ней всегда предполагается заданным множество взаимно независимых событий, которым в силу принципа максимума энтропии приписываются равные вероятности (в конечном случае). Тогда идентификация всех этих событий исключена и кажется спорным, что значения неопределенности, связанные с этими событиями, зависят от числа рассматриваемых альтернатив, как в случае вероятностей.

С практической точки зрения очевидно, что числа, назначаемые субъектами для вероятностного описания уровня их информированности, должны рассматриваться как приближенные оценки. Теория субъективных вероятностей не затрагивает этот тип неточности и полагает, что "рациональный индивидуум" должен в результате процедур оценивания задавать точные числа.

В заключение отметим, что теория вероятностей представляется слишком нормативной для выражения всех аспектов субъективного суждения. Теория же ошибок, часто используемая в физике, отражает лишь неточность средств измерения, выраженную в интервальной форме, в величинах, оцениваемых с помощью этих средств. В математическом плане определяется образ отображения, аргументы которого суть подмножества. **Теория ошибок <u>не приемлет</u> <u>оттенков</u>: если неизвестно точное значение параметра, то точно известны пределы его изменения.** Заметим, что когда задана мера неточности М величины Х, то предложения типа: "Х принадлежит интервалу I будут естественным образом характеризоваться с помощью модальностей "возможно" и "необходимо", так как:

1) если пересечение $\mathbf{M \cap I}$ непусто, то **"$\mathbf{X \in I}$",** возможно, истинно;

2) если $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{I}$, то $"X \in I"$ с необходимостью истинно.

Здесь выявляются связи между этими модальностями и теорией множеств: возможность оценивается с помощью теоретико-множественного пересечения содержаний M и I двух высказываний: $"X \in M"$ и $"X \in I"$, а необходимость вычисляется, исходя из отношения вложенности.

Принцип "все или ничего" — характерная черта теории ошибок, тогда как в теории вероятностей учитываются оттенки, градации неопределенности. Это вводит определенные различия между ними, которые хотелось бы по возможности стереть. Очевидно, что теория вероятностей не обобщает теорию ошибок, поскольку распределение вероятностей для функции равномерно распределенных случайных переменных (вероятностный аналог интервала ошибки) в общем случае не является равномерным. В данной книге предлагается **вариант канонического обобщения теории ошибок, позволяющий учитывать оттенки неопределенности.**

Часто оказывается, что неточность типа ошибки измерения присутствует в самой серии испытаний, проводимых для определения случайного явления. Можно констатировать, что в этом случае без введения дополнительных гипотез вряд ли удастся представить полученную информацию в чисто вероятностной форме. В самом деле, **основная гипотеза, обеспечивающая применимость теории вероятностей в математической статистике, состоит в том, что пространство испытаний можно поставить во взаимно однозначное соответствие с пространством событий.** С каждым событием связывается множество его реализаций (непустое, если только данное событие не является невозможным) , и для любой пары различных событий существует по крайней мере одно испытание, в котором одно событие исключает другое. Эта гипотеза позволяет разбить достоверное событие на элементарные события, каждое из которых соответствует какой-то реализации. При обработке статистических данных это приводит к предположению о существовании такого разбиения множества реализаций, что результат всякого эксперимента можно будет сопоставить с одним, и только одним элементом этого разбиения, т. е. **результат есть элементарное событие.**

Можно отыскать такие ситуации, в которых гипотеза о разбиении испытаний не справедлива. Например, если измерения дают интервалы ошибок, то вообще мало шансов соотнести их с непересекающимися классами реализаций. Физик часто оказывается в противоположной ситуации: ему требуется получить пересекающиеся интервалы, порожденные независимыми измерениями, чтобы иметь возможность с помощью проверки уменьшить ошибку измерения. Отсюда видно, что даже в случае "объективных" повторяющихся явлений не всегда можно напрямую применять теорию вероятностей. **Вероятностная модель приспособлена к обработке точной, но распределенной по реализациям информации.** Как только возникает неточность в отдельной реализации, модель становится неприменимой.

Это краткое обсуждение ограничений традиционных моделей неточности и неопределенности проведено с целью обосновать необходимость в описании более широкого плана, общего для теории вероятности и теории ошибок, в котором оба этих понятия заняли бы надлежащее место и были бы вскрыты их связи и различия. В данной книге очерчиваются лишь контуры этого общего подхода, который будет включать новое семейство мер неопределенности, тесно связанное с теорией ошибок, — **меры возможности**. **Эти функции множества полностью отличны от вероятностных мер**. В то время как вероятности были приспособлены к обработке точных, но противоречивых результатов испытаний, меры возможности станут естественным средством для построения баз знаний, хотя и неточных, но согласованных.

2.3. Меры неопределенности

Рассмотрим множество событий, связанных с базой неточных и неопределенных знаний, понимаемых как подмножества универсального множества Ω, называемого достоверным событием. Пустое множество $\varnothing$ отождествляется с невозможным событием. Предполагается, что каждому событию $A \subset \Omega$ можно поставить в соответствие действительное число g(A), задаваемое субъектом — "хранителем" базы знаний (или получаемое с помощью процедуры переработки информации, хранящейся в памяти информационной системы). Значение g(A) оценивает степень уверенности, имеющейся у субъекта по отношению к событию A с учетом текущего уровня информированности. По определению величина g(A) растет с увеличением уверенности. Более того, если A — достоверное событие, то полагают g(A) = 1, а если A — невозможное событие, то полагают g(A) = 0. Имеем

$$g(\varnothing) = 0 \text{ и } g(\Omega) = 1. \tag{1}$$

Однако g (A) = 1 (соответственно 0) вообще говоря, не означает, что A непременно является достоверным (соответственно, невозможным) событием. Наиболее слабая аксиома для обеспечения некоторого минимума согласованности при определении функции множества g, которую можно себе представить, — это монотонность по включению

$$A \subseteq B \Rightarrow g(A) \leqslant g(B). \tag{2}$$

Эта аксиома выражает следующее: если событие A влечет за собой другое событие B, то всегда имеется по меньшей мере столько же уверенности появлении B, сколько в появлении A.

Такие функции множества были предложены Сугено для оценки неопределенности под названием *нечеткие меры.* А. Кофман предложил термин "оценка". Мы принимаем здесь название *мера неопределенности*[1]. (В оригинале авторы называют произвольную неаддитивную функцию множества, удовлетворяющую аксиомам ограниченности, монотонности и непрерывности, термином "мера доверия". Такое название представляется не совсем удачным, так как термин "мера доверия" или "функция уверенности" используется в зарубежной и отечественной литературе для характеристики более узкого класса супераддитивных мер, удовлетворяющих помимо указанных аксиом требованию $\forall A \subseteq \Omega,\ Cr(A) =$

$= \sum_{B \subset A} m(B)$ (см. также формулу (26)). Мы решили использовать термин "мера неопределенности", заранее оговаривая, что поскольку эти меры являются расширением математических объектов, изучаемых в классической теории меры, то с большей строгостью их следовало бы называть "квазимеры" или "полумеры".)

Следует напомнить, что эти функции множества не являются обычными мерами, поскольку они могут не быть аддитивными, за исключением специально оговоренных случаев.

Если Ω — бесконечное множество, то можно ввести условие непрерывности в виде

$$\lim_{n \to +\infty} g(A_n) = g(\lim_{n \to +\infty} A_n) \tag{3}$$

для любой последовательности $\{A_n\}_n$ вложенных множеств вида $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ или $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots$

Будем предполагать, что мера неопределенности удовлетворяет условию (3) по крайней мере для одной из двух указанных последовательностей вложенных множеств.

2.3.1. Меры возможности и необходимости

Следующие неравенства непосредственно вытекают из аксиомы монотонности (1.2) и характеризуют объединение $A \cup B$ или пересечение $A \cap B$ событий:

$$\forall A, B \subseteq \Omega,\ g(A \cup B) \geqslant \max(g(A), g(B)), \tag{4}$$

$$g(A \cap B) \leqslant \min(g(A), g(B)). \tag{5}$$

Предельным случаем мер неопределенности оказываются функции множества П такие, что

$$\forall A, B,\ \Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B)). \tag{6}$$

Они называются *мерами возможности* по Заде. В формуле (6) читателей может удивить отсутствие предположения о том, что А и В — непересекающиеся множества. Легко проверить, что если условие (6) справедливо для любой пары непересекающихся множеств $A \cap B = \emptyset$, то оно справедливо и для любой пары множеств (событий) (Дюбуа и Прад). Использование термина "возможность" для обозначения этих мер неопределенности может быть оправдано с нескольких точек зрения.

Пусть $E \subseteq \Omega$— достоверное событие. Легко определить функцию П со значениями из {0,1}, удовлетворяющую условию (6):

$$\Pi_E(A) = \begin{cases} 1, \text{ если } A \cap E \neq \emptyset, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{7}$$

Ясно, что в данном контексте $\Pi_E(A) = 1$ означает, что событие А возможно.

Это наводит на мысль о связи мер возможности с теорией ошибок (см. выше) . В частности, если A и $\bar{A}$ — два противоположных события ($\bar{A}$ есть дополнение А в 12), то имеем

$$\max(\Pi(A), \Pi(\bar{A})) = 1. \tag{8}$$

Это интерпретируется как факт, что из двух противоположных событий по крайней мере одно безусловно возможно. Более того, когда некоторое событие считается возможным, то не исключается возможность противоположного события. Это согласуется с семантикой суждений о возможности, которые мало к чему обязывают их авторов. Утверждение, что события A и $\bar{A}$ одинаково возможны, соответствует случаю полного незнания, когда событие А столь же ожидаемо, что и противоположное событие.

Наконец, условие (6) согласуется с представлением о возможности на уровне здравого смысла: для того чтобы реализовать $A \cup B$, достаточно реализовать самый "легкий" вариант из этих двух (наименее дорогостоящий).

Когда множество Ω конечно, то всякую меру возможности П можно определить по ее значениям на одноточечных подмножествах Ω:

$$\Pi(A) = \sup\{\pi(\omega) \mid \omega \in A\}, \tag{9}$$

где $\pi(\omega) = \Pi(\{\omega\})$; π есть отображение из Ω в [0,1], называемое *функцией распределения возможностей.* Оно является *нормальным* в смысле

$$\exists \omega, \quad \pi(\omega) = 1, \tag{10}$$

поскольку П(Ω) = 1

Замечание. Формула (9) справедлива даже в случае, когда (как и у Заде) не накладывается условие П(Ω) = 1. Тогда условие (8) и (10) выполняются, если заменить 1 на П (Ω).

Когда множество Ω бесконечно, то не гарантировано существование функции распределения возможностей. Соответствующее распределение становится распределением возможности лишь тогда, когда аксиома (6) расширяется на случай бесконечных объединений событий. В прикладных задачах можно всегда исходить из функций распределения возможностей и строить меру возможности П с помощью формулы (9). В наиболее общем случае меры возможности не удовлетворяют аксиоме непрерывности (3) для убывающих последовательностей вложенных множеств. Другой граничный случай мер неопределенности получается при достижении равенства в формуле (5). При этом определяется класс функций множества, называемых *мерами необходимости* и обозначаемых N, которые удовлетворяют аксиоме, двойственной аксиоме (6):

$$\forall A, B, \quad N(A \cap B) = \min\,(N(A), N(B)). \tag{11}$$

Легко построить функцию N со значениями в {0,1} исходя из информации о достоверном событии и полагая

$$N(A) = \begin{cases} 1, \text{ если } E \subseteq A, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{12}$$

Здесь N(A)=1 означает, что A — достоверное событие (с необходимостью истинное). Более того, легко видеть, что функция множества N удовлетворяет аксиоме (11) тогда, и только тогда, когда функция П, определяемая в виде

$$\forall A, \Pi(A) = 1 - N(\bar{A}), \tag{13}$$

является мерой возможности. Формулы (12) и (13) поясняют название "меры необходимости" для функции N. Формула (13) есть численное выражение отношения двойственности между модальностями "возможно" и "необходимо" (в модальной логике), постулирующее, что некоторое событие необходимо, когда противоположное событие невозможно. Это отношение двойственности означает, что всегда можно построить функцию распределения необходимости исходя из функции распределения возможности с помощью формулы

$$N(A) = \inf\{1 - \pi(\omega) \mid \omega \notin A\}. \qquad (14)$$

Меры необходимости удовлетворяют соотношению

$$\min(N(A), N(\bar{A})) = 0, \qquad (15)$$

которое исключает одновременную необходимость двух противоположных событий. С помощью (13) и (15) (или (8)) нетрудно проверить, что

$$\forall A \subseteq \Omega, \Pi(A) \geqslant N(A). \qquad (16)$$

Данное условие отвечает интуитивному представлению о том, что, прежде чем быть необходимым, событие должно быть возможным. К тому же имеются более сильные утверждения, чем аксиома (16):

$$N(A) > 0 \Rightarrow \Pi(A) = 1; \qquad (17)$$

$$\Pi(A) < 1 \Rightarrow N(A) = 0. \qquad (18)$$

2.3.2. Возможность и вероятность

Когда имеется информация о появлении событий в форме измеренных частот элементарных событий, полученная мера неопределенности естественным образом удовлетворяет аксиоме аддитивности

$$\forall A, \forall B, A \cap B = \varnothing, P(A \cup B) = P(A) + P(B), \qquad (19)$$

т.е. становится *вероятностной мерой,* которая, конечно, является монотонной в смысле условия (2). Формула (19) - вероятностный эквивалент аксиом (6) и (11).

Условие, эквивалентное условиям (9) и (14), для конечного случая записывается в виде

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega), \qquad (20)$$

где $p(\omega) = P(\{\omega\})$. Условие нормировки $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$

является аналогом условия (10). Общая черта вероятностных мер, мер возможности и необходимости заключается в том, что все они могут характеризоваться некоторыми распределениями на элементах универсального множества.

Здесь аналогом соотношений (8) и (15) является хорошо известное соотношение

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1, \tag{21}$$

в то время как из (8) и (15) следуют лишь неравенства

$$N(A) + N(\bar{A}) \leqslant 1, \tag{22}$$

$$\Pi(A) + \Pi(\bar{A}) \geqslant 1. \tag{23}$$

Из этих соотношений видно одно из главных различии между возможностью и вероятностью. Вероятность некоторого события полностью определяет вероятность противоположного события. Возможность (или необходимость) некоторого события и возможность (необходимость) противоположного ему события связаны слабее; в частности, для того, чтобы охарактеризовать неопределенность по отношению к событию А, требуются два числа П(А) и N(А), удовлетворяющие условию (17) или (18).

Когда моделируется субъективное суждение, кажется естественным стремление не устанавливать жесткой связи между показателями, свидетельствующими в пользу некоторого события (степень необходимости), и показателями, свидетельствующими против него (степень возможности). В этой ситуации понятие вероятности оказывается менее гибким, чем понятие меры возможности.

Даже когда сохраняется требование аддитивности, можно построить меры возможности и необходимости, если не требовать дополнительно, чтобы значения вероятностей (распределение p) относились к элементарным событиям. Точнее, пусть $E_1, E_2, \ldots, E_p$ непустые, попарно различные подмножества множества Ω (предполагаемого конечным) с соответствующими значениями вероятности $m(E_1), \ldots, m(E_p)$, такими, что

$$\sum_{i=1,\ldots,p} m(E_i) = 1, \tag{24}$$

и

$$\forall i, m(E_i) > 0. \tag{25}$$

Величина $m(E_i)$ понимается как значение вероятности совокупности элементарных событий, составляющих E_i, причем здесь не оговаривается распределение величины $m(E_i)$ по элементарным событиям. Подмножества E_i называются "фокальными элементами" и могут отражать неточность наблюдений. В этой ситуации вероятность события А можно охарактеризовать лишь неточно как величину, содержащуюся в интервале

$$[P_*(A),\ P^*(A)]$$

с границами

$$P_*(A) = \sum_{E_i \subseteq A} m(E_i) = \sum_i m(E_i) \cdot N_{E_i}(A), \qquad (26)$$

$$P^*(A) = \sum_{E_i \cap A \neq \emptyset} m(E_i) = \sum_i m(E_i) \cdot \Pi_{E_i}(A). \qquad (27)$$

Значение P∗(A) вычисляется по всем фокальным элементам, которые делают необходимым появление события A (или влекут за собой событие A). Значение P*(A) получается при рассмотрении всех фокальных элементов, которые делают возможным появление события A. Отметим, что имеется отношение двойственности между P* и P∗:

$$\forall A, P^*(A) = 1 - P_*(\bar{A}). \qquad (28)$$

Доказано (Шейфер), что функция P* (соответственно P∗) удовлетворяет аксиоме (6) (соответственно (11)), т. е. является мерой возможности (соответственно необходимости) тогда, и только тогда, когда фокальные элементы образуют последовательность вложенных множеств. А именно если $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_p$, то функция распределения возможностей π, связанная с P* и P∗, определяется в виде

$$\forall \omega, \pi(\omega) = P^*(\{\omega\}) = \begin{cases} \sum_{j \geq i} m(E_j), \text{ если } \omega \in E_i, \omega \notin E_{i-1}, \\ 0, \text{ если } \omega \in \Omega - E_p. \end{cases} \qquad (29)$$

Ясно, что если, наоборот, фокальные элементы являются элементарными (а значит, несовместными) событиями, то $\forall A, P_*(A) = P^*(A) = P(A)$, т. е. снова возвращаемся к вероятностной мере.

Если схематично представить базу знаний с помощью множества фокальных элементов (которые являются составляющими "значение" в наборе, описывающем информационную единицу), то легко понять, что вероятностные меры естественным образом синтезируют базу точных и дифференцированных знаний, тогда как меры возможности суть отражение неточных, но связных (т. е. подтверждающих друг друга) знаний. Отметим, что функции возможности в этом смысле более естественны для представления чувства неуверенности: от субъекта не ждут слишком точной информации, но желают услышать по возможности наиболее связную речь. Зато точные, но флуктуирующие данные чаще всего получают из наблюдений физического явления.

Несомненно, в базе знаний будет содержаться информация, которая в общем случае не сведется ни к точной, ни к полностью согласованной информации. Вероятность, с одной стороны, и пара "возможность — необходимость" — с другой соответствуют двум крайним, а значит, идеальным ситуациям.

Формулы (26) и (27) позволяют считать, что функция распределения возможностей определяет класс вероятностных мер $\mathcal{P}$, такой, что

$$\mathcal{P} = \{ P \mid \forall A, N(A) \leqslant P(A) \leqslant \Pi(A) \}. \quad (30)$$

Это позволяет строго определить понятие математического ожидания в рамках мер возможности. Если f — функция, определенная на Ω и принимающая значения из множества действительных чисел $\mathcal{R}$, то верхние и нижние математические ожидания f, обозначаемые $E^*(f)$ и $E_*(f)$ соответственно, определяются с помощью интегралов Лебега — Стилтьеса (Демпстер)

$$E_*(f) = \int r d\Pi(\{\omega \mid f(\omega) \leqslant r\}), \quad (31)$$

$$E^*(f) = \int r dN(\{\omega \mid f(\omega) \leqslant r\}). \quad (32)$$

Названия верхних и нижних математических ожиданий оправдываются тождествами

$$E^*(f) = \sup \{E(f) \mid P \in \mathcal{P}\}; \; E_*(f) = \inf\{E(f) \mid P \in \mathcal{P}\}. \quad (33)$$

Эти соотношения были получены Демпстером для случая, когда множество Ω конечно.

2.4. Нечеткие множества

Понятие нечеткого множества можно определить без ссылки на какую-либо меру неопределенности, видоизменяя традиционную характеристическую функцию множества, а именно вводя градации в обычное отношение принадлежности. Это — точка зрения логики. При всем том задание меры неопределенности сводится к стремлению локализовать значение переменной x, выражая для каждого подмножества A универсального множества X имеющуюся информацию об отношении $x \in A$. Семейство подмножеств, подходящих для представления переменной x, будет индуцировать обобщенную характеристическую функцию нечеткого множества, причем эти два представления строго эквивалентны в случае мер возможности.

Согласно первой точке зрения определение нечеткого множества F эквивалентно заданию универсального множества Ω и отображения из Ω в единичный интервал, т. е. $\mu_F: \Omega \rightarrow [0, 1]$ (Заде). Значение $\mu_F(\omega)$ для $\omega \in \Omega$ понимается как степень принадлежности элемента ω нечеткому множеству F. Это — прямое определение, которое позволяет строить простые модели расплывчатых категорий естественного языка (например, понятие "высокий"), определенных на объективном носителе, например в числовой шкале (Ω — множество чисел, характеризующих рост человека), или на множестве объектов, качественно описываемых с помощью таких категорий (Ω - множество людей). Величина $\mu_F(\omega)$ выражает тогда степень совместимости значения (или объекта) ω с понятием F. Если $\Omega = \mathbb{R}$ (множество действительных чисел), то F есть *нечеткая величина.*

Вполне естественна постановка задачи нахождения обычных теоретико-множественных представлений для нечеткого множества F. Когда $\mu_F(\omega) \in \{0, 1\}, \forall\omega,$ то F — обычное подмножество универсального множества Ω. В этом случае F называется "областью определенности" в Ω. В противном случае можно выбрать порог $\alpha \in (0, 1]$ и определить обычное множество

$$F_\alpha = \{\omega \in \Omega | \mu_F(\omega) \geqslant \alpha\}, \tag{34}$$

которое называется *множеством уровня* α или *α-срезом* нечеткого множества F. Множество F_α содержит все элементы универсального множества Ω, для которых уровень совместимости с F не меньше α. Семейство $C(F) = \{F_\alpha | \alpha \in (0, 1]\}$ всех α-срезов есть монотонная последовательность, удовлетворяющая условию

$$0 < \alpha \leqslant \beta \leqslant 1 \Rightarrow F_\alpha \supseteq F_\beta. \tag{35}$$

Она позволяет следующим образом представить нечеткое множество F с помощью обычных множеств (Заде):

$$\forall\omega, \mu_F(\omega) = \sup\{\alpha | \omega \in F_\alpha\}. \tag{36}$$

Обратно, если задано конечное семейство множеств в виде монотонной последовательности $\{F_{\alpha_1}, \ldots, F_{\alpha_m}\}$, удовлетворяющей условию (35), то оно образует множество α-срезов нечеткого множества, определяемого условием (36). В случае бесконечного семейства множеств условия (35) недостаточно и необходимо, чтобы для любой возрастающей последовательности $(\alpha_n)_n$ элементов из (0, 1] выполнялось требование (Ралеску)

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = \alpha \Rightarrow F_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{\alpha_n}. \qquad (37)$$

С другой стороны, для представления нечеткого множества F можно взять его *строгие* α-*срезы* (множества строгого уровня α), определяемые в виде

$$F_{\bar{\alpha}} = \{\omega \in \Omega \mid \mu_F(\omega) > \alpha\}, \alpha \in [0, 1). \qquad (38)$$

Строгие α-срезы удовлетворяют условиям (35), (36) так же, как и α-срезы. Среди обычных множеств, описывающих нечеткое множество F в виде последовательности $\{F_\alpha\}$, часто упоминаются следующие два множества:

множество уровня 1, называемое *ядром* нечеткого множества F и обозначаемое $\mathring{F}$:

$$\mathring{F} = \{\omega \in \Omega \mid \mu_F(\omega) = 1\};$$

множество строгого уровня 0, называемое *носителем* нечеткого множества F и обозначаемое S(F) :

$$S(F) = \{\omega \in \Omega \mid \mu_F(\omega) > 0\}.$$

Примечание. В ряде случаев для представления множества F желательно вводить не α-срезы, а другие последовательности множеств.

Вторая точка зрения на нечеткое множество состоит в рассмотрении его как "следа" меры возможности на одноточечных множествах в Ω. В самом деле, всякому множеству $E \subseteq \Omega$ можно поставить в соответствие меру возможности Π_E, такую, что Π_E (A) = 1 тогда, и только тогда, когда $E \cap A \neq 0$, и $\Pi_E(A) = 0$ в противном случае.

Когда мера возможности П принимает значения в единичном интервале, функцию распределения возможностей можно интерпретировать как функцию принадлежности нечеткого множества F, рассматриваемого как достоверное событие, на котором сосредоточена мера П. Действительно, обозначая через $[0, 1]^\Omega$ множество нечетких подмножеств универсума Ω, имеем

$$\forall \Pi, \exists F \in [0, 1]^\Omega, \forall \omega \in \Omega, \Pi(\{\omega\}) = \pi(\omega) = \mu_F(\omega). \qquad (39)$$

Обратно, задание нечеткого множества достаточно для описания функции распределения возможностей при условии, что это нечеткое множество нормально, т. е.

$$\exists \omega, \mu_F(\omega) = 1. \qquad (40)$$

Но если не накладывать более ограничения $\Pi(\Omega) = 1$, то, основываясь на формуле (9), получаем

$$\forall F \in [0,1]^{\Omega},\ \exists \Pi,\ \forall \omega \in \Omega,\ \Pi(\{\omega\}) = \Pi(\omega) = \mu_F(\omega). \quad (41)$$

Величина $\Pi(\Omega) = \sup \mu_F$. иногда называется *высотой* нечеткого множества F.

Легко видеть, что если функция распределения возможностей определяется по весам m фокальных элементов, то фокальные элементы образуют семейство α-срезов некоторого нечеткого множества F. Пусть $\{A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_p\}$ суть фокальные элементы. Тогда

$$A_i = F_{\alpha_i},\ \text{где}\ \alpha_i = \sum_{j=i,\ldots,p} m(A_j),$$

т. е. в отличие от условия (1.36) имеем

$$\forall \omega \in \Omega,\ \mu_F(\omega) = \sum_{i,\omega \in F_{\alpha_i}} m(F_{\alpha_i}). \quad (42)$$

Это — вероятностный способ представления нечеткого множества.

Когда выражение (39) применяется к вероятностной мере на конечном универсальном множестве, это приводит к рассмотрению вероятностей как значений принадлежности. Если заметить, что плотность распределения вероятностей описывает наши представления о *точке* с неизвестным расположением, *а отнюдь не о множестве* (поскольку при $P(A) \in \{0,1\}$ функция множества P(A) есть мера Дирака, сосредоточенная на одноточечном множестве), то станет понятно, что это смешение вероятностей и значений принадлежности не вполне правомерно. В то время как распределение возможностей легко интерпретировать как нечеткое множество, распределение вероятностей нельзя рассматривать как "нечеткую точку"! Более того, в отличие от случая мер возможности знание $\{P(\{\omega\}) \mid \omega \in \Omega\}$ не определяет с необходимостью вероятностную меру, поскольку (при бесконечном множестве Ω) мы можем иметь $P(\{\omega\}) = 0, \forall \omega$.

В заключение обсудим вопрос нормировки нечеткого множества. Здесь все зависит от природы универсального множества. Если, например, мы хотим описать множество целых чисел, очень близких к 3,5, то естественно отказаться от нормировки функции принадлежности, поскольку наиболее близкие к 3,5 числа лежат вне множества натуральных чисел $\mathcal{N}$. Зато нечеткая величина, определенная на

$\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, будет в общем случае нормированной, причем ее универсум обладает полнотой. Отказ от нормировки меры возможности может также интерпретироваться как отсутствие полного доверия к данной информации (например, при анализе информации, поступившей от двух противоречивых источников) или как факт наличия неопределенности, когда переменная, связанная с данной мерой возможности, не принимает никакого значения (если, например, *п* - множество реализаций действия, которое, может быть, останется невыполненным).

2.5. Элементарные операции над нечеткими множествами

Понятия включения и равенства легко расширяются на случай нечетких множеств; их наиболее распространенное определение принадлежит Заде.

$$\textit{Включение:}\ \mathrm{F} \subseteq \mathrm{G}\ \ \forall\omega, \mu_{\mathrm{F}}(\omega) \leqslant \mu_{\mathrm{G}}(\omega). \quad (43)$$

$$\textit{Равенство:}\ \ \mathrm{F} = \mathrm{G}\ \ \forall\omega, \mu_{\mathrm{F}}(\omega) = \mu_{\mathrm{G}}(\omega). \quad (44)$$

Основные теоретико-множественные операции (дополнение, пересечение и объединение) были определены Заде для нечетких множеств следующим образом.

Дополнение: нечеткое множество F, дополнительное к F в универсальном множестве Ω, определяется в виде

$$\forall\omega, \mu_{\mathrm{F}}(\omega) = 1 - \mu_{\mathrm{F}}(\omega). \quad (45)$$

Пересечение: пересечение $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ двух нечетких множеств F и G в универсальном множестве Ω определяется в виде

$$\forall\omega, \mu_{\mathrm{F}\cap\mathrm{G}}(\omega) = \min(\mu_{\mathrm{F}}(\omega), \mu_{\mathrm{G}}(\omega)). \quad (46)$$

Объединение: объединение $\mathrm{F} \cup \mathrm{G}$ двух нечетких множеств F и G в универсальном множестве Ω определяется в виде

$$\forall\omega, \mu_{\mathrm{F}\cup\mathrm{G}}(\omega) = \max(\mu_{\mathrm{F}}(\omega), \mu_{\mathrm{G}}(\omega)). \quad (47)$$

Все эти определения могут показаться в достаточной степени произвольными, хотя и не противоречат нашим интуитивным представлениям. Они совпадают с классическими теоретико-множественными определениями, когда рассматриваемые множества являются обычными подмножествами универсального множества. Однако на самом деле обобщения операций дополнения, пересечения и объединения, а также отношений включения и равенства на случай нечетких множеств не единственны. В разделе 3 представлена сводка операций над нечеткими множествами, отличных от операций (45) — (47). Точно также и соотношения (43), (44) могут оказаться слишком жесткими для практического сравнения нечетких множеств между собой. Ими удобно пользоваться главным образом по соображениям математического порядка. Показатели сравнения этих операций будут рассмотрены далее.

Тем не менее определения, приведенные выше, можно оправдать богатством структуры, которую они индуцируют на $[0, 1]^{\Omega}$.

Отношение включения, определяемое формулой (43), рефлексивно и транзитивно.

Дополнение, определяемое по формуле (45), удовлетворяет свойству инволюции $\overline{\overline{F}} = F$ и является единственным, если принять, что для каждой пары $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ при переходе от элемента ω_1 к ω_2 степень принадлежности к нечеткому множеству F изменяется симметричным образом по отношению к изменению степени принадлежности к $\overline{F}$, т. е.

$$\forall(\omega_1, \omega_2), \mu_F(\omega_1) - \mu_F(\omega_2) = \mu_{\overline{F}}(\omega_2) - \mu_{\overline{F}}(\omega_1). \quad (48)$$

Множество $[0, 1]^{\Omega}$ нечетких подмножеств над универсумом Ω с операциями (45) — (47) имеет структуру векторной решетки. Это означает, что все свойства классических теоретико-множественных операций сохраняются, кроме законов непротиворечивости $F \cap \overline{F} = \varnothing$ и исключенного третьего $F \cup \overline{F} = \Omega$, от которых остается лишь ослабленный вариант:

$$\forall\omega, \mu_{F \cap \overline{F}}(\omega) = \min(\mu_F(\omega), 1 - \mu_F(\omega)) \leqslant 0{,}5 \quad (49)$$

$$\forall\omega, \mu_{F \cup \overline{F}}(\omega) = \max(\mu_F(\omega), 1 - \mu_F(\omega)) \geqslant 0{,}5. \quad (50)$$

Выражения (46) и (47), т. е. операции взятия минимума и максимума, — единственно возможные определения операций пересечения и объединения нечетких множеств, которые сохраняют такую структуру на нечетких подмножествах универсума Ω. При этом получается некоторая "оптимальная" структура, так как на $[0, 1]^{\Omega}$ невозмбжно сохранить структуру булевой решетки. В частности, законы непротиворечивости $F \cap \overline{F} = \varnothing$ и исключенного третьего $F \cup \overline{F} = \Omega$ становятся несовместимыми с условиями идемпотентности $F \cap F = F$, $F \cup F = F$, когда понятие принадлежности градуировано.

Отметим еще совместимость включения, пересечения и объединения с понятием α-среза. Легко проверить, что при $\forall\alpha \in (0, 1]$

$$(F \cap G)_\alpha = F_\alpha \cap G_\alpha, \quad (F \cup G)_\alpha = F_\alpha \cup G_\alpha, \tag{51}$$

$$F \subseteq G \Leftrightarrow F_\alpha \subseteq G_\alpha. \tag{52}$$

При этом (51) — еще одно характеристическое свойство операций минимума и максимума для пересечения и объединения нечетких множеств. Условия (51) и (52) выполняются и для строгих α-срезов. Однако операцию дополнения нельзя напрямую заменить тождественной операцией на α-срезах. Для нее имеем

$$(\overline{F})_\alpha = \overline{F}_{\overline{1-\alpha}}. \tag{53}$$

Де Люка и Термини расширили понятие мощности множества на случай нечетких множеств для конечного универсального множества Ω в виде

$$|F| = \sum_{\omega \in \Omega} \mu_F(\omega).$$

Используя формулы (46), (47), легко проверить, что:

1) $|F \cup G| + |F \cap G| = |F| + |G|$;
2) $F \subseteq G \Rightarrow |F| \leqslant |G|$.

Интерпретируя нечеткие множества μ_F и μ_G как функции распределения возможностей π и π′ на основе последнего соотношения приходим к трактовке мощности нечеткого множества как показателя неточности данных. В самом деле, мощность минимальна для одноточечных множеств, т. е. наиболее точных значений, и максимальна для *F*=Ω. Наоборот, под показателем точности понимается функция из $[0, 1]^\Omega$ в [0, 1], которая является монотонно убывающей в смысле сложенности нечетких множеств и максимальна лишь для одноточечных подмножеств базового множества. Примером *меры точности,* называемой также *мерой специфичности* (mesure de specificite), служит мера, предложенная Ягером, которая для конечного случая, когда элементы множества Ω предполагают упорядоченными по убыванию значений μ_F, имеет вид

$$Sp(F) = \int_0^{\overline{\alpha}} \frac{1}{|F_\alpha|} d\alpha = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}(\mu_F(\omega_j) - \mu_F(\omega_{j+1})),$$

Где $\overline{\alpha} = \sup\{\alpha | F_\alpha \neq \varnothing\}$, $|\Omega| = n$ и по определению $\mu_F(\omega_{n+1}) = 0$.

Легко убедиться, что Sp(F) = 1 тогда, и только тогда, когда $\exists \omega \in \Omega$, F = {ω}, и что если F и F' — нормальные нечеткие множества, то имеем

$$F \subset F' \Rightarrow Sp(F) \geqslant Sp(F').$$

Кроме того, Хигаши и Клир предложили другой показатель неточности для нечетких множеств, определяемый выражением

$$H(F) = \frac{1}{\bar{\alpha}} \int_0^{\bar{\alpha}} \log_2 (|F_\alpha|) d\alpha = \sum_{j=1}^{n} (\mu_F(\omega_j) - \mu_F(\omega_{j+1}) \cdot \log_2 (j), \text{ если } \bar{\alpha} = 1$$

в предположении, что все элементы множества Ω упорядочены таким же образом. Легко проверить, что здесь выполняются следующие условия:

а) $F \subseteq F' \Rightarrow H(F) \leqslant H(F')$;

б) величина H минимальна и равна нулю тогда, и только тогда, когда F — одноточечное множество;

в) величина H максимальна и равна $\log_2 n$ тогда, и только тогда, когда F = Ω.

Наконец, мощность нечеткого множества может рассматриваться как нечеткое множество целых чисел, обозначаемое ||F|| и определяемое Заде следующим образом:

$$\forall n \in \mathcal{H}, \mu_{||F||}(n) = \sup \{\alpha, |F_\alpha| \geqslant n\}.$$

Это определение напоминает выражение (1.36). Когда F — обычное множество, данная формула сводится к $||F|| = \{0, 1, \ldots, |F|\}$. Свойства нечеткой величины мощности ||F|| и ее связи со скалярной величиной мощности |F| нечеткого множества рассмотрены в работе Дюбуа и Прада.

Замечание. Не следует смешивать показатель точности и показатель нечеткости (Кофман). Последний позволяет оценить, до какой степени плохо определены границы множества. Пусть $f(F) \in [0, +\infty)$. Указанные показатели характеризуются набором аксиом, весьма отличающихся от аксиом, задающих показатели точности (Хигаши и Клир) для конечного множества Ω:

1) f(F)=0 тогда, и только тогда, когда F - обычное, четкое подмножество множества Ω*:*

2) показатель нечеткости f (F) максимален тогда, и только тогда, когда $\mu_F = 0{,}5$, $\forall \omega \in \Omega$;

$$3)\ f(F) \leqslant f(F') \Longleftrightarrow \forall \omega, |\mu_F(\omega) - \mu_{\bar{F}}(\omega)| \geqslant |\mu_{F'}(\omega) - \mu_{\bar{F}}'(\omega)|$$

Вторая аксиома показывает, что 0,5 - наиболее неопределенное значение принадлежности, а третья аксиома задает отношение порядка "более нечеткий, чем" в смысле этой неопределенности по принадлежности, поскольку $|\mu_F(\omega) - \mu_{\bar{F}}(\omega)| = 2|\mu_F(\omega) - 0{,}5|$. Следствием этой аксиомы является равенство $f(F) = f(\bar{F})$,Т. е. множество F столь же нечетко, что и его дополнение. Как отмечали Хигаши и Клир, решением для данной системы аксиом будут показатели нечеткости $f(F) = 1 - D(F, \bar{F})$, где D - нормированное расстояние между F и его дополнением, т. е. $D(F, \bar{F}) = 1$, когда F – обычное множество. Если D - расстояние Хэмминга, т. е. $D(F, \bar{F}) = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\omega} |\mu_F(\omega) - \mu_{\bar{F}}(\omega)|$, то получаем показатель нечеткости Кофмана. Другой показатель был предложен Де Люка и Термини и, как нам кажется, ошибочно назван энтропией. Ягер оценивал, насколько пусто пересечение $F \cap \bar{F}$ (или насколько объединение $F \cup \bar{F}$ покрывает универсальное множество Ω), причем он опирался на понятие разделения между нечетким множеством F и его дополнением, что необязательно связано с расстоянием.

2.6. Практические методы определения функций принадлежности

Один из вопросов, возникающих при изучении теории нечетких множеств: "Как найти функции принадлежности?" Следует различать случаи, когда нечеткое множество F отражает представление субъекта о некоторой расплывчатой категории, и случаи, когда множество F строится по статистическим данным.

2.6.1. Расплывчатая категория, воспринимаемая субъектом

Прежде всего следует различать простые категории, определенные на объективном линейно-упорядоченном универсальном множестве (например, "большой"), и сложные категории, которые требуют одновременного рассмотрения нескольких универсумов ("коренастый") и в которых даже сами универсальные шкалы определимы с трудом ("красивый").

Вначале обратимся к простым категориям. В этом случае оценка функции принадлежности есть задача теории психологических измерений. Функция принадлежности строится с помощью опросника. В основном функция принадлежности на Ω определяет порядок элементов, и именно этот порядок важен для нас. Так, соотношение $\omega_1 \geqslant \omega_2$ означает, что "ω_1 есть более F, чем ω_2 ".

Норвич и Турксен установили связь между классическими психометрическими теориями и оцениванием функции принадлежности: если мы в состоянии задать отношение, порядка в широком смысле (порядок в широком смысле означает, что не обязательно выполняются все три свойства (рефлексивность, транзитивность и антисимметричность), определяющие обычное отношение нестрогого порядка.), всюду определенное на Ω^2, с наибольшим и наименьшим элементами, то мы можем представить категорию F нечетким множеством, функция принадлежности которого единственна с точностью до некоторого строго возрастающего преобразования. Если желательна большая точность, то надо найти более богатую структуру порядка, а именно порядка в широком смысле, всюду определенного на Ω^2. При этом пары (ω_1, ω'_1) и (ω_2, ω'_2) сравниваются по принадлежности к нечеткому множеству F, причем неравенство $(\omega_1, \omega'_1)^{-} \geqslant$ $\geqslant (\omega_2, \omega'_2)$ означает, что " ω_1 есть в большей степени F по отношению к ω'_1, чем ω_2 по отношению к ω'_2". С помощью ряда аксиом согласованности и полноты (в частности, универсальное множество Ω должно быть континуумом), Норвич и Турксен показывают, что функция принадлежности единственна с точностью до возрастающего аффинного преобразования, т. е. единственна на [0,1] в случае, если известны носитель и ядро нечеткого множества F. Практические методы определения функций принадлежности, основанные на психометрических методиках, активно разрабатываются в настоящее время. На практике можно задать приближенное представление формы функции μ_F, которое достаточно для реальных приложений. Если Ω - универсальное множество, специфическое для категории, то легко получить от субъекта описание ядра $\mathring{F}$ и носителя S(F). Здесь ядро $\mathring{F}$ содержит все прототипы для расплывчатой категории, а носитель получается при исключении тех объектов, которые совсем не соответствуют этой категории. Использование графических средств информатики может облегчить сбор информации о значениях μ_F на $S(F) - \mathring{F}$, позволяя избежать явного употребления числовых

значений принадлежности. Другой подход заключается в использовании параметризованных представлений функции μ_F и обращений к опроснику с целью определения значений параметра. Эти два метода наиоолее успешно применяются при сборе нечетких данных.

Отметим, что вовсе не обязательно располагать точными значениями степеней принадлежности. Небольшая ошибка в определении границ ядра или носителя и вообще в определении степени принадлежности объекта классу будет менее значимой, чем при представлении данной категории обычным множеством (интервалом), т. е. когда границы соответствующего множества суть точки разрыва функции μ_F. К тому же не всегда ясна интерпретация этих границ: содержат ли они прототипы категории? Характеризуют ли они сколько-нибудь связанные между собой объекты? Или они определяют промежуточное множество?

Другой аргумент, подкрепляющий мысль о том, что на практике достаточно приближенного представления функции μ_F, заключается в следующем: ошибка не будет возрастать при комбинировании нечетких множеств как с помощью операций (45) — (47), определенных выше, так и с помощью методов теории возможности, поскольку при этом большей частью используются лишь операции нахождения минимума и максимума.

В случае более сложной категории, универсальное множество которой определяется декартовым произведением линейных шкал, функцию принадлежности можно получить за счет свертывания исходной информации. Например, рассмотрим случай, когда некоторую категорию можно описать в виде дерева простых категорий и связок естественного языка, таких как И, ИЛИ и т. д. Это приводит к задаче идентификации каждой простой категории и (приближенного) определения нечетких теоретико-множественных операций, которые можно использовать для описания этих связок. Однако при этом следует выбрать более широко понимаемые операции, чем определяемые формулами (45) — (47), что и обсуждается в разделе 3.

Наконец, когда мы имеем дело с категорией, для которой трудно определить универсальное множество (ввиду отпечатка субъективности нет общего согласия по ее поводу), можно условиться о применении некоторого множества, состоящего из небольшого числа эталонных значений или состояний, в случае необходимости упорядоченных, которое и станет универсумом. Каждое лингвистическое значение, относящееся к рассматриваемому понятию, будет тогда представлено нечетким подмножеством данного универсума. В этом случае достаточно ограничиться небольшим числом "типовых" значений принадлежности.

2.6.2. Нечеткие множества, построенные по статистическим данным

Здесь можно различать две точки зрения. Первая состоит в использовании множества неточных данных, которые можно моделировать распределением частот, относящихся к вложенным событиям. Вторая заключается в аппроксимации распределения вероятностей, построенного по гистограмме, распределением возможностей так, чтобы значения вероятностей событий с двух сторон приближались степенями возможности и необходимости.

Статистики, относящиеся к неточным результатам опытов. Построение гистограммы всегда происходит в предположении, что результат случайной выборки достаточно точен. Эта гипотеза не всегда справедлива: измерения чаще всего дают интервалы ошибки; экспертные опросы также дают неточные ответы. Ниже показано, как на базе такой неточной статистической информации можно построить меру возможности вместо вероятностной меры, когда имеющиеся данные согласуются между собой.

Предположим, что данные образуют семейство подмножеств $\{I_k | k = 1, \ldots, q\}$. Вообще говоря, в случае неточности данных желательно, чтобы они были хотя бы минимально согласованными, т. е.

$$I \triangleq \bigcap_{k=1,\ldots,q} I_k \neq \varnothing. \tag{54}$$

Тогда информацию можно обобщенно представить следующим образом: задаются семейством стандартных подмножеств (интервалов) E_i, $i=1,\ldots, r$, вложенных друг в друга таким образом, что

$$I \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \subseteq E_r = \bigcup_{k=1,\ldots,q} I_k.$$

Интервалы E_i служат эталонами для классификации данных и играют ту же самую роль, что и дизъюнктивные классы, которые используются для построения гистограммы. Каждый результат эксперимента I_k единственным образом связывается с самым малым эталоном E_i, который может его содержать. Пусть $p(I_k)$ — относительное число результатов, равных I_k. Определим частоты:

$$\forall i,\ m^*(E_i) = \Sigma\{p(I_k) \mid I_k \text{ связан с } E_i\}.$$

Очевидно, что функция m* находит значения вероятностей для вложенных фокальных элементов и, следовательно, определяет через формулы (26) и (27) меры возможности и необходимости, которые дают нижнее и верхнее приближения тех оценок значений вероятности, которые были бы получены по точно определенным данным.

Эта идея требует, однако, разработки метода определения эталонов E_i В ряде работ показано, что наилучший выбор эталонов E_i — это множество α-срезов нечеткого множества F_*, построенного на основе данных $\{J_k, k = 1, \ldots, q\}$ в виде

$$\forall\omega, \mu_{F_*}(\omega) = \sum_{k=1,\ldots,q} p(I_k)\mu_{I_k}(\omega),$$

где μ_{I_k} - характеристическая функция I_k. Отметим, что функция μ_{F_*} является нормированной при выполнении условия (1.54). В дальнейшем предполагается, что эталоны E_i суть α-срезы F_*. Обозначим Π_* и N_* меры возможности и необходимости, получаемые на основе функции распределения возможностей μ_{F_*}, которая определяется по частоте $m^*(E_i)$ с помощью формулы (42), а Π^* и N^* — меры возможности и необходимости, определяемые на базе функции μ_{F_*}. Доказываются следующие результаты:

1) $F_* \subseteq F^*$, т. е. множество F^* является более неточным, чем множество F_*. Равенство здесь выполняется тогда, и только тогда, когда I_k образуют последовательность вложенных множеств.

2) Пусть P_* и P^* - нижние и верхние вероятности, определяемые формулами (26) и (27), где I_k— фокальные элементы, а $m(I_k) = p(I_k), \forall k,$ т.е.

$$P_*(A) = \sum_{k=1}^{q} p(I_k) \cdot N_{I_k}(A) \text{ и } P^*(A) = \sum_{k=1}^{q} p(I_k) \cdot \Pi_{I_k}(A).$$

Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\forall A, [N_*(A), \Pi_*(A)] \subseteq [P_*(A), P^*(A)] \subseteq [N^*(A), \Pi^*(A)]. \quad (55)$$

Более того, F_* и F^* являются соответственно самым большим и самым малым нечеткими множествами по отношению вложенности, такими, что выполняются отношения вложенности (1.55), и такими, что порядки, определенные функциями μ_{F_*}, μ_{F^*} и $\underline{P}^*$ на элементах множества Ω, идентичны. Кроме того, отметим, что

$$\forall\omega \in \Omega, P^*(\{\omega\}) = \mu_{F_*}(\omega).$$

Этот результат показывает, что множества F_* и F^* составляют наилучшие нижние и верхние воз-можностные приближения множества данных I_k, k = 1, . . . ,q, в смысле отношений вложенности вышеуказанных интервалов. Таким образом, видно, что множество интервалов можно аппроксимировать функциями распределения возможностей. Результаты, относящиеся к F*, не требуют выполнения условия (54); к тому же функция принадлежности μ_F всегда нормирована.

Гистограмма и функция распределения возможностей. Когда задана мера возможности, представленная в виде вложенных фокальных элементов и вероятностных весов, ее можно аппроксимировать вероятностной мерой, введя для каждого фокального элемента E_i условное равномерное распределение вероятностей $P(\cdot|E_i)$. Тогда вероятность появления элемента $\omega \in \Omega$ (Ω — конечное множество) определяется в виде

$$\forall \omega \in \Omega, p(\omega) = \sum_{i=1}^{r} P(\omega|E_i) \cdot m(E_i) = \sum_{\omega \in E_i} \frac{m(E_i)}{|E_i|}, \quad (56)$$

где $|E_i|$ — мощность множества E_i.

Таким образом, вероятностная мера P (которую можно считать до некоторой степени произвольной) выбирается в классе мер, которые удовлетворяют неравенствам

$$\forall A, N(A) \leqslant P(A) \leqslant \Pi(A). \quad (57)$$

Значения вероятностей $\{p(\omega_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$ вычисляются непосредственно по функции распределения возможностей $\{\pi(\omega_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$:

$$p(\omega_i) = \sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j}(\pi(\omega_j) - \pi(\omega_{j+1}), \quad (58)$$

где

$$\pi(\omega_1) = 1 \geqslant \pi(\omega_2) \geqslant \ldots \geqslant \pi(\omega_{n+1}) = 0 \text{ и } \omega_{n+1}$$

— фиктивный элемент (множество Ω состоит из n элементов).

Легко заметить, что формула (58) определяет взаимно однозначное отображение между функциями распределения p и π. В ряде работ получено обратное соотношение

$$\pi(\omega_i) = \sum_{j=1}^{n} \min(p(\omega_i), p(\omega_j)). \quad (59)$$

Это последнее соотношение позволяет определить нечеткое множество по гистограмме с учетом условия связности (57). К тому же данное преобразование легче обосновать, поскольку здесь вместо сложения степеней неопределенности можно ограничиться их сравнением друг с другом. Такой образ действий оправдывает себя на практике лишь тогда, когда в рамках поставленной задачи вероятностная модель оказывается трудно реализуемой, а возможностная модель обеспечивает удовлетворительные результаты.

Легко видеть, что неравенства (57) по форме совпадают с правой частью выражения (55), где $P^*=P_*=P$. Однако функция распределения возможностей π, определяемая формулой (59), не является наилучшим верхним приближением функции распределения вероятностей p, в отличие от функции μ_{F*}. Используя процедуру аппроксимации, изложенную в данном разделе применительно к случаю функции распределения вероятностей (множества I_k являются одноточечными, а $\mu_{F_*}(\omega) = p(\omega))$, получаем

$$\mu_{F*}(\omega) = \sum_{\omega':\, p(\omega') \leqslant p(\omega)} p(\omega').$$

Легко проверить, что функция распределения возможностей π, определяемая формулой (59), является менее точной, чем функция распределения μ_{F*} в том смысле, что $\pi \geqslant \mu_{F*}$. Множества α-уровня нечеткого множества F* естественным образом интерпретируются как "доверительные множества" (подобно доверительным интервалам в статистике), связанные с функцией распределения вероятностей p. В частности, можно убедиться, что если $\alpha = \mu_{F*}(\omega)$, то имеем $1 - \alpha = P(F^*_{\alpha})$, т. е. с вероятностью 1 — α можно быть уверенным в том, что значение случайной переменной, описываемое функцией p, находится среди элементов множества строгого α-уровня нечеткого множества F*. В статистике часто предполагается, что α=5%. Использование функции распределения возможностей μ_{F*} позволяет избежать такого произвольного назначения порога.

2.6.3. Замечания относительно множества значений функции принадлежности

Задача оценки функции принадлежности связана с выбором множества значений принадлежности; ранее везде предполагалось, что

$\mu_F(\omega) \in [0, 1]$, т. е. что элементы множества Ω всегда можно линейно упорядочить (в широком смысле) по их отношению к категории F. Некоторые авторы опирались на более слабые предположения. Так, Гоген заменил интервал [0, 1] решеткой L, Заде предложил для выражения неопределенности на множестве оценок $\mu_F(\omega)$ рассматривать сами значения принадлежности как нечеткие множества со значениями в интервале [0, 1]. В этом случае получаются так называемые нечеткие множества типа 2, когда принадлежности μ_F принимает свои значения в решетке вида $[0, 1]^{[0, 1]}$. Наоборот, если неточным оказывается аргумент функции принадлежности $\mu_F(\omega)$, то Ω в действительности является множеством нечетких подмножеств другого универсума — $V(\Omega = [0, 1]^V)$, а F — нечетким множеством уровня 2 на универсуме. Это понятие позволяет представлять все более и более абстрактные категории (например, категорию "цвет", рассматриваемую как нечеткое множество на универсуме *черный, серый, красный, синий. . .*).

2.7. Меры неопределенности в нечетком событии

Нечеткое (плохо определенное) событие может быть описано нечетким множеством. Следовательно, можно попытаться расширить меры неопределенности, введенные выше, для оценки информации о наступлении нечеткого события.

Если тройка $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ описывает вероятностное пространство, где $\mathcal{A}$— σ-алгебра подмножеств множества элементарных событий Ω, а P — вероятностная мера, то нечеткое событие F характеризуется функцией принадлежности μ_F, измеримой по Борелю $(\forall\alpha, F_\alpha \in \mathcal{A})$, причем вероятность нечеткого события определяется формулой

$$P(F) = \int_\Omega \mu_F(x)\,dP(x). \tag{60}$$

Это выражение — математическое ожидание функции принадлежности.

Можно проверить, что

$$P(\bar{F}) = 1 - P(F) \tag{61}$$

и, более того, что

$$P(F \cap G) + P(F \cup G) = P(F) + P(G). \tag{62}$$

Наряду с вероятностями нечетких событий можно определить понятия возможности и необходимости нечеткого события.

Если придерживаться семантики понятия возможности, то, как и Заде, придем к использованию в измерениях возможности нечеткого события F показателя частичного перекрытия между нечетким множеством F и нечетким множеством F_π, которое задает функцию распределения возможностей π:

$$\Pi(F) = \sup_{\omega \in \Omega} \min(\mu_F(\omega), \pi(\omega)). \tag{63}$$

Можно убелитьея в том, что $\Pi(F) = 0 \Leftrightarrow S(F) \cap S(F_\pi) = \varnothing$, а

$\Pi(F) = 1 \Leftrightarrow \exists \omega \in \mathring{F} \cap \mathring{F}_\pi$ (для конечного случая), что обобщает выражение (7). В работе Прада формула (63) обосновывается в терминах α-срезов, поскольку это определение эквивалентно формуле

$$\Pi(F) = \sup\{\alpha \mid F_\alpha \cap (F_\pi)_\alpha \neq \varnothing\}. \tag{64}$$

Утверждается, что аксиома (6) для возможностей четких событий остается справедливой и для нечетких событий:

$$\Pi(F \cup G) = \max(\Pi(F), \Pi(G)). \tag{65}$$

Из выражение (65) следует, что П остается мерой неопределенности в нечетких событиях

$$F \subseteq G, \text{ т. е. } \mu_F \leqslant \mu_G \Rightarrow \Pi(F) \leqslant \Pi(G).$$

В силу двойственности необходимость нечеткого события будет определяться в виде $N(F) = 1 - \Pi(\bar{F})$, т. е.

$$N(F) = \inf_{\omega \in \Omega} \max(\mu_F(\omega), 1 - \pi(\omega)). \tag{66}$$

Эту величину можно рассматривать как степень вложенности нечеткого множества F_π в нечеткое множество F, поскольку

$$N(F) > 0 \Leftrightarrow \mathring{F}_\pi \subseteq S(F),$$

$$N(F) = 1 \Leftrightarrow S(F_\pi) \subseteq \mathring{F}.$$

Отсюда видно, что понятию необходимости нечеткого события соответствует более сильное определение вложенности, чем определение (43): нечеткое множество F включает в себя нечеткое множество G, если ядро нечеткого множества F содержит носитель нечеткого множества G.

Легко убедиться, что если $F_{\pi} \subseteq F$ (в смысле определения (43)), то $N(F) \geqslant 0{,}5$. При этом остается справедливой аксиома (11) для мер необходимости

$$N(F \cap G) = \min(N(F), N(G)) \tag{67}$$

и функция N — мера неопределенности в нечетких событиях. Отметим, что $\max(\Pi(F), \Pi(F)) \leqslant 1$, если F — нечеткое подмножество множества Ω. Однако в силу условий (49), (50) всегда имеем

$$\max(\Pi(F), \Pi(\bar{F})) \geqslant 0{,}5; \;\; \min(N(F), N(\bar{F})) \leqslant 0{,}5. \tag{68}$$

При этом, если нечеткое множество $F_{\bar{\bar{\pi}}}$ нормально, всегда выполняется соотношение (16), т.е.

$$\forall F, \Pi(F) \geqslant N(F), \tag{69}$$

в то время как выражения (17), (18) не выполняются, если F - нечеткое множество.

2.8. Нечеткие отношения и декартово произведение нечетких множеств

Нечетким отношением называется нечеткое множество (или функция распределения возможностей) на декартовом произведении базовых множеств. Пусть Ω_1 и Ω_2— два базовых множества. Нечеткое отношение R описывается функцией принадлежности $\mu_R = \pi$ с аргументами $\omega_1 \in \Omega$ и $\omega_2 \in \Omega_2$.

Проекция нечеткого отношения R на Ω_1 описьюается распределением возможностей n_1 вида

$$\pi_1(\omega_1) = \Pi(\{\omega_1\} \times \Omega_2) = \sup_{\omega_2} \pi(\omega_1, \omega_2). \tag{70}$$

Если рассматривать π как возможностный аналог плотности совместного распределения вероятностей, то выражение (70) напоминает плотность одномерного распределения.

Если F_1 — нечеткое множество в универсуме Ω_1, то μ_{F_1} можно расширить на случай $\Omega_1 \times \Omega_2$ следующим образом:

$$\forall \omega_1, \omega_2, \mu_{C_2(F_1)}(\omega_1, \omega_2) = \mu_{F_1}(\omega_1). \tag{71}$$

Тогда множество $C_2(F_1)$ называется цилиндрическим продолжением множества F_1 на Ω_2.

Пусть F_1 и F_2 — два нечетких множества в универсальных множествах Ω_1 и Ω_2 соответственно. Понятия декартова произведения и декартова копроизведения можно расширить на случай нечетких множеств F_1 и F_2. В случае обычных множеств декартово произведение есть множество $A_1 \times A_2 = \{(\omega_1, \omega_2) | \omega_1 \in A_1, \omega_2 \in A_2\}$,

а декартово копроизведение определяется в виде

$$A_1 + A_2 = \{(\omega_1, \omega_2 | \omega_1 \in A_1\} \cup \{(\omega_1, \omega_2) | \omega_2 \in A_2\},$$

т. е. в терминах цилиндрических продолжений

$$A_1 \times A_2 = C_2(A_1) \cap C_1(A_2), \; A_1 + A_2 = C_2(A_1) \cup C_1(A_2) = \overline{\bar{A}_1 \times \bar{A}_2}.$$

Очевидно, что декартово произведение нечетких множеств можно определить как пересечение, а копроизведение — как объединение их цилиндрических продолжений, т. е.

$$\mu_{F_1 \times F_2}(\omega_1, \omega_2) = \min(\mu_{F_1}(\omega_1), \mu_{F_2}(\omega_2)), \tag{72}$$

$$\mu_{F_1 + F_2}(\omega_1, \omega_2) = \max(\mu_{F_1}(\omega_1), \mu_{F_2}(\omega_2)). \tag{73}$$

Здесь существенно следующее замечание: если $\mathrm{Proj}_i(R)$ — проекция нечеткого отношения R на Ω_i, то всегда имеем

$$R \subseteq \mathrm{Proj}_1(R) \times \mathrm{Proj}_2(R), \tag{74}$$

где $\times$ обозначается операция взятия минимума, а $\subseteq$ — отношение вложенности в смысле определения (43).

Обратно, если F_1 и F_2 — два нормальных нечетких множества в универсумах Ω_1 и Ω_2 соответственно, то наибольшее нечеткое отношение R, такое, что $F_i = \mathrm{Proj}_i(R)$, равно декартову произведению $F_1 \times F_2$. Нечеткое отношение R называется сепарабельным, если

$$R = \mathrm{Proj}_1(R) \times \mathrm{Proj}_2(R). \tag{75}$$

Показатель неточности Хигаши и Клира, введенный выше, удовлетворяет неравенству:

$$H(R) \leqslant H(Proj_1(R)) + H(Proj_2(R)),$$

Которое согласуется с выражением (1.74); в частности, если нечеткое отношение R сепарабельно, то здесь выполняется строгое равенство. Зато когда R — сепарабельное нечеткое отношение, равенство $|R| = |Proj_1(R)| \cdot |Proj_2(R)|$ несправедливо.

Переменные X_1 и X_2, для которых область изменения (X_1, X_2) ограничена нечетким отношением R, называются невзаимодействующими (несвязанными) . Если F_i — нечеткое множество возможных значений X_i на Ω_i, то переменные X_1 и X_2 являются невзаимодействующими тогда, когда совместная функция распределения возможностей для (X_1, X_2) имеет вид

$$\pi_{X_1, X_2} = \min(\mu_{F_1}, \mu_{F_2}). \tag{76}$$

Тогда и нечеткие множества F_1 и F_2 называются невзаимодействующими. Это означает, что область изменения переменной X_1 не зависит от значений, принимаемых переменной X_2, и наоборот. Формула (76) определяет наибольшее (в смысле включения) нечеткое отношение или эквивалентным образом функцию распределения возможностей, наименее связанную с проекциями F_1 и F_2. Иными словами, если F_1 и F_2 — единственные нечеткие ограничения на (X_1, X_2), то выражение (76) наиболее естественно определяет распределение π_{X_1, X_2}. Эта формула становится

несправедливой, как только переменные X_1 и X_2 связываются каким-либо другим отношением (например, если $\exists f : X_2 = f(X_1)$) .

Пусть Π_{12} — мера возможности, определенная по функции распределения возможностей π_{12} в универсуме $\Omega_1 \times \Omega_2$. Если функция распределения π_{12} сепарабельна и нормальна, то

$$\forall A_1 \times A_2 \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2,\ \Pi_{12}(A_1 \times A_2) = \min(\Pi_1(A_1), \Pi_2(A_2)) \tag{77}$$

и

$$N_{12}(A_1 + A_2) = \max(N_1(A_1), N_2(A_2)), \tag{78}$$

где N_{12}, N_1, N_2 — меры необходимости, двойственные мерам возможности

Π_{12}, Π_1, Π_2 соответственно. Если функция π_{12} сепарабельна и нормальна, то формулы (77) и (78) распространяются на нечеткие события F_1 и F_2 в универсумах Ω_1 и Ω_2 соответственно, т. е.

$$\forall (F_1, F_2) \in [0,1]^{\Omega_1} \times [0,1]^{\Omega_2}, \Pi_{12}(F_1 \times F_2) = \min(\Pi_1(F_1), \Pi_2(F_2)), \tag{79}$$

$$N_{12}(F_1 + F_2) = \max(N_1(F_1), N_2(F_2)). \tag{80}$$

Заметим, что, даже если функция π_{12} не является сепарабельной, и независимо от того, являются ли F_1, F_2 нечеткими или обычными множествами,

$$\Pi_{12}(F_1 + F_2) = \max(\Pi_1(F_1), \Pi_2(F_2)), \quad (81)$$

$$N_{12}(F_1 \times F_2) = \min(N_1(F_1), N_2(F_2)), \quad (82)$$

в то время как при указанных предпосылках выражения (79) и (80) превращаются в неравенства (со знаками $\leqslant$ и $\geqslant$ соответственно).

Отметим определенную аналогию между независимыми случайными событиями и невзаимодействующими нечеткими переменными, характеризуемыми мерами возможности. Если P_{12} — совместная вероятностная мера в $\Omega_1 \times \Omega_2$, а P_1 и P_2 — вероятностные меры для переменных X_1 и X_2 соответственно, причем X_1 и X_2 — две независимые случайные переменные, то

$$\forall A_1 \subseteq \Omega_1,\ \forall A_2 \subseteq \Omega_2,\ P_{12}(A_1 \times A_2) = P_1(A_1) \cdot P_2(A_2). \quad (83)$$

С точки зрения частотной интерпретации вероятности это означает, что событие A_1 появляется с одной и той же частотой как в экспериментах, где возникает событие A_2, так и в экспериментах, где A_2 не имеет места (и наоборот). С другой стороны, выражение (76) означает, что область изменения переменной X_1 не зависит от области изменения переменной X_2 (и наоборот). Зато если для двух событий A_1 и A_2 выполняется соотношение

$$P_{12}(A_1 \times A_2) = \min(P_1(A_1), P_2(A_2)), \quad (84)$$

то из него следует, что A_1 влечет за собой A_2 (при $P_1(A_1) \leqslant P_2(A_2)$) или с частотной точки зрения событие A_1 происходит лишь в экспериментах, где реализуется и событие A_2. В самом деле, поскольку $P_1(A_1) = P_{12}(A_1 \times A_2) + P_{12}(A_1 \times \bar{A}_2)$ и $P_2(A_2) = P_{12}(A_1 \times A_2) + P_{12}(\bar{A}_1 \times A_2)$, то из формулы (1.84) следует, что $P_{12}(A_1 \times \bar{A}_2) = 0$ или $P_{12}(\bar{A}_1 \times A_2) = 0.$ Таким образом, равенство (84) далеко не означает независимости событий A_1 и A_2.

3. Нечеткие величины и операции над ними

3.1. Нечеткие величины

Прежде чем приступить к рассмотрению основных понятий нечетких величин, напомним основные понятия теории нечетких множеств, которые будут тесно связаны с понятиями нечетких величин.

Математически нечеткие множества могут быть представлены двумя разными способами в зависимости от класса рассматриваемых объектов. Пусть *X* — совокупность дискретных объектов, члены которой обозначаются *x*. Нечеткое множество *A* в *X* представляется в виде набора упорядоченных соответствий:

$$\tilde{A} = ((x, \mu_{\tilde{A}}(x))|x \in (X),$$

где $\mu_{\tilde{A}}(x)$ — степень принадлежности или значение функции принадлежности (ФП) *x* в $\tilde{A}$. При представлении нечеткого множества в такой форме, у него есть конечный опорный набор. Например, для случая «нахождения в салоне автобуса двенадцати человек», нечеткое множество $\tilde{A}$ «много мужнин» можно представить так:

$\tilde{A}$={(4, 0.1),(5, 0.15),(6, 0.2), (7, 0.4), (8, 1.0), (9,0.5), (10,0.05)}.

Иллюстрация этого нечеткого множества представлена на рис. 1.

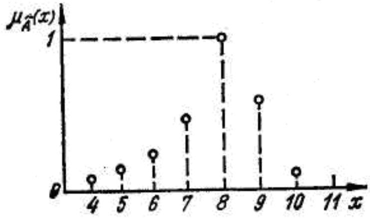


Рис. 1.

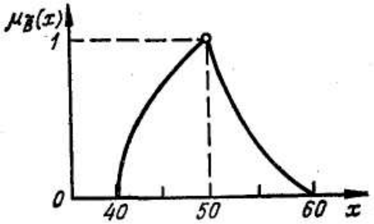


Рис. 2.

Нечеткое множество $\tilde{B}$ в *X* представляется в виде функции на полуоси *Ox:*

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} f_1(x), & x_1 \le x \le x_2; \\ f_2\left(x\right), & x_2 \le x \le x_3; \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В качестве примера рассмотрим нечеткое множество $\tilde{B}$ «возраст пассажиров средних лет», которое можно представить так:

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} -(x-50)^2+1, & 40 \le x \le 50; \\ \left(x-6\right)^2, & 50 < x \le 60; \\ 0 & \textit{в остальных случаях}; \end{cases} \qquad (*)$$

где x измеряется в годах (рис. 2).

Рассмотрим теперь некоторые дополнительные понятия теории нечетких множеств, которые мы не рассматривали раньше.

Выпуклость. Нечеткое множество $\tilde{A}$ является выпуклым, если

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)>\min[\mu_{\tilde{A}}(x_1),\ \mu_{\tilde{A}}(x_2)] \qquad (**)$$

для всех $x_1, x_2 \in X$ и $\lambda \in [0, 1]$.

Графическая интерпретация понятия «выпуклость» представлена на рис. 3, *а, б.*

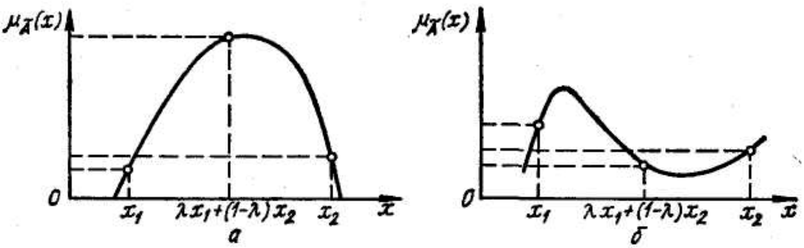


Рис. 3, *а, б.*

В то же время нечеткое множество, которое описывается соотношениями

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} -(x-3)^2+5, & 0\le x\le 4; \\ (x-5)^2+3, & 4\le x\le 6; \\ -((x-9)^2)/3+7, & 6< x\le 13.58; \\ 0 & \textit{в остальных случаях}, \end{cases} \qquad (***)$$

не является выпуклым, поскольку для него не удовлетворяется условие (*) (рис. 4). Следует заметить, что при λ=0,5, x_1= 4 и x_2 = 7 имеем

$$\mu_{\tilde{A}}((0,5 \bullet 4) + (0,5 \bullet 7)) < \min(\mu_{\tilde{A}}(4),\ \mu_{\tilde{A}}(7)),$$

или

$$\mu_{\tilde{A}}(5,5)<\min(4,5\bullet 5),$$

или $\qquad 3,25 < 4.$

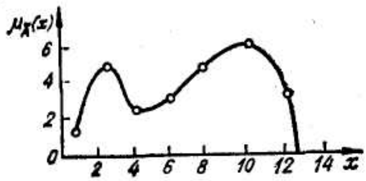


Рис. 4.

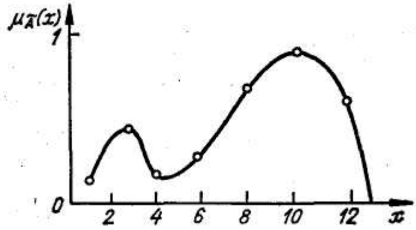


Рис. 5.

Нормализованность. Как уже говорилось, функция принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$ может принимать любые значения. Однако, если максимальное значение $\mu_{\tilde{A}}(x)$ на X $\sup\limits_X \mu_{\tilde{A}}(x)$ равно 1, то нечеткое множество считается нормализованным. Ненормализованные случайные множества могут быть легко нормализованы делениям всех значений $\mu_{\tilde{A}}(x)$ на $\sup\limits_X \mu_{\tilde{A}}(x)$. Например, для того, чтобы нормализовать нечеткое множество, определенное уравнениям (***), необходимо разделить все значения ФП на 7, поскольку 7 есть $\sup\limits_X \mu_{\tilde{A}}(x)$ (рис. 5).

Нечеткие величины. Существуют два определения нечетких величин (переменных). Оба утверждают, что выпуклое и нормальное нечеткое подмножество $\tilde{N}$ вещественной оси является также нечеткой величиной $\tilde{N}$. Больше того, ФП $\mu_{\tilde{A}}(x)$ должна быть кусочно-непрерывной и существует по крайней мере один элемент $x \in R$ ФП, для которого $\mu_{\tilde{N}}(x) = 1$.

Проиллюстрируем сказанное на примере нечеткого множества, которое также является и нечеткой величиной.

Пусть $\tilde{A}$ = (числа, близкие к пяти). При этом ФП имеет вид

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} (-(x-5)^2)/4+1, & 3 \le x \le 5; \\ x/3 - x/8, & 5 < x \le 8; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

На рис. 6 представлена иллюстрация этой величины.

Нечеткие величины «треугольного типа». При решении ряда практических задач или задач, которые требуют выполнения больших объемов арифметических операций с нечеткими величинами (сложение, вычитание, умножение, деление) возникают определенные сложности в случае представления нечетких величин в общем виде, задаваемой уравнением (*).

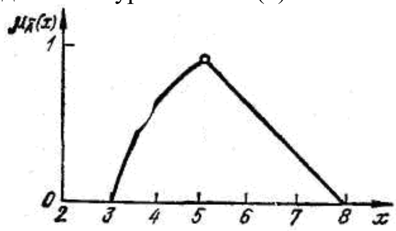


Рис. 6.

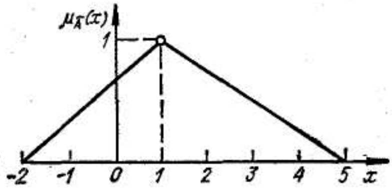


Рис. 7.

Для упрощения указанных манипуляций целесообразно использовать специальный способ представления нечетких величин в форме треугольных функций. Соответствующие нечеткие величины будем называть «треугольными».

Это название возникло благодаря треугольной форме графического представления нечетких величин. Такое представление основывается на использовании двух линейных функций, соединенных в средней точке X_m. В общем виде ФП треугольной нечеткой величины имеет вид:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}(x-a_1)/(a_2-a_1), & a_1\le x\le a_2;\\ (a_3-x)/(a_3-a_2), & a_2<x\le a_3;\\ 0 & \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Например, пусть $\tilde{A}$ является нечетким множеством величин, близких к 1:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}x/3+2/3, & -2\le x\le 1;\\ -x/4+5/4, & 1<x\le 5;\\ 0 & \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Функция принадлежности на отрезке $—2\le x\le 1$ называется *левосторонней* (ЛСТ), а на отрезке $1<x\le 5$ — *правосторонней* (ПСТ). На рис. 7 показана треугольная форма такой нечеткой величины.

В данном случае манипуляции с нечеткими величинами упрощаются в связи с тем, что используются лишь верхнее и нижнее значения ЛСТ и ПСТ, а не сами функции принадлежности этих величин.

3.2. Операции с нечеткими величинами

Прежде чем приступить к более подробному рассмотрению основных операций с нечеткими величинами, таких как операции сложения, вычитания, умножения, деления, извлечения квадратного корня и др., напомним определение множества α-уровня или α-сечение. Заметим, что рассмотрение всех операций (за исключением операции свертки) проводится для треугольных нечетких величин.

Набор элементов, которые принадлежат нечеткому множеству, по крайней мере со степенью α, обозначим так:

$$A_\alpha=\{x\in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x)\geq\alpha\}$$

где A_α называется α - сечением нечеткого множества $\tilde{A}$. Заметим, что над A в A_α отсутствует волнистая линия, поскольку A_α является четким множеством (с четко определенными границами).

Для иллюстрации этого понятия рассмотрим треугольное нечеткое множество $\tilde{A}$ «чисел, близких к 1», или треугольную нечеткую величину «единица», которая описывается следующей ФП:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} x/3+2/3, & -2\leq x\leq 1; \\ x/4+5/4, & 1< x\leq 5; \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для определения верхней и нижней границ α - сечения при α = 0,6, a_1^α и a_2^α соответственно, необходимо приравнять функции ЛСТ и ПСТ к значению 0,6 и найти x. В результате имеем:

$$x/3+2/3=0{,}6,\ \ x=-0{,}2.$$

Тогда

$$a_1^{0,6} = -0{,}2.$$

Аналогично

$$-x/4+5/4 = 0{,}6;\ \ x=2{,}6;$$
$$a_2^{0,6} = 2{,}6.$$

Таким образом, α-сечение при α=0,6 или четкое множество элементов, приналежащих $\tilde{A}$, по крайней мере со степенью 0,6, выглядит так (рис. 8):

$$A_\alpha = \{x\in X \mid -0{,}2\leq x\leq 2{,}6\}.$$

Сложение нечетких величин. Сложение двух нечетких величин $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ на определенном α-уровне осуществляется сложением нижней (a_1^α и b_1^α) и верхней (a_2^α и b_2^α) границ соответствующего им α -сечения:

$A_\alpha\,(+)B_\alpha = (a_1^\alpha, a_2^\alpha\,)+(\,b_1^\alpha, b_2^\alpha\,) = (a_1^\alpha+b_1^\alpha\,,\,a_2^\alpha + b_2^\alpha\,)$.

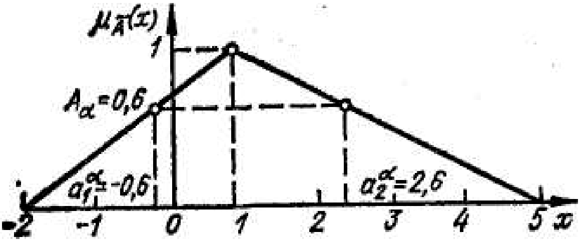


Рис. 8.

Полное сложение двух нечетких величин $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ производится повторением описанной выше процедуры для всех α-уровней на интервале [0, 1]. На рис. 9 приведена иллюстрация операции сложения нечетких величин.

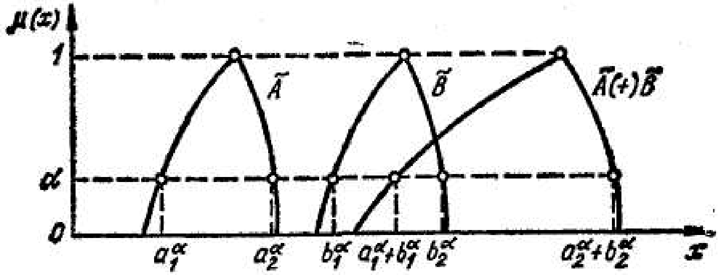


Рис. 9.

В качестве примера выполним операцию сложения двух треугольных нечетких величин, описываемых следующими ФП:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x/3+2/3, & -2 \le x \le 1; \\ -x/5+6/4, & 1 < x \le 6; \\ 0 & \text{\textit{в остальных случаях.}} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} x/2-1/2, & 1 \le x \le 3; \\ -x/1+4/1, & 3 < x \le 4; \\ 0 & \text{\textit{в остальных случаях.}} \end{cases}$$

В первую очередь определим α-сечкния в терминах ЛСТ и ПСТ функций:

$\alpha = a_1^\alpha/3 + 2/3;$
$\alpha = -\,a_2^\alpha/5 + 6/5;$
$\alpha = b_1^\alpha\,/2 - 1/2;$
$\alpha = -b_2^\alpha + 4.$

Теперь, решая эту систему уравнений для верхней и нижней границы обеих нечетких величин, получаем:

$$a_1^\alpha = 3\alpha\text{-}2;$$
$$a_2^\alpha = -5\alpha + 6;$$
$$b_1^\alpha = 2\alpha + 1;$$
$$b_2^\alpha = -\alpha + 4.$$

Следовательно, α-сечение для нечетких величин $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ может быть представлено как:

$$A_\alpha = (3\alpha - 2, -5\alpha + 6);$$
$$B_\alpha = (2\alpha + 1, -\alpha + 4).$$

Тогда сумма $\tilde{A}_\alpha$ и $\tilde{B}_\alpha$ имеет вид:

$$A_\alpha(+)B_\alpha = [(3\alpha - 2) + (2\alpha + 1), (-5\alpha + 6) + (-\alpha + 4) = (5\alpha - 1, 6\alpha + 10).$$

Для того, чтобы найти x, необходимо использовать определения верхней и нижней границ α-сечения:

$$x = a_1^\alpha + b_1^\alpha = 5\alpha - 1;$$
$$x = a_2^\alpha + b_2^\alpha = - 6\alpha + 10.$$

Определяя α, соответственно получаем ЛСТ и ПСТ функции для суммы нечетких величин:

$$\alpha = x/5 + 1/5;$$
$$\alpha = - x/6 + 10/6.$$

В данном случае формирование ФП суммы двух нечетких величины почти завершено. Осталось лишь найти области изменения значений ЛСТ и ПСТ. Для определения нижнего значения области для ЛСТ необходимо приравнять ЛСТ функцию к нулю и найти x. Аналогично, для определения верхнего значения необходимо приравнять эту функцию к единице и найти x:

$$0 = x/5 + 1/5, \quad x = -1;$$
$$1 = - x/6 + 10/6, \quad x = 4.$$

Таким образом, полученные границы ЛСТ следующие:

$$-1 \le x \le 4.$$

Для нахождения нижнего значения области для ПСТ функции необходимо приравнять ее к единице и найти x. Нахождение верхнего значения для этой функции сводится к приравниванию ее к нулю и нахождению x:

$$1 = - x/6 + 10/6, \quad x = 4.$$
$$0 = - x/6 + 10/6, \quad x = 10.$$

Таким образом, области изменения значений ЛСТ и ПСТ функций определены, что является завершением формирования ФП суммы двух нечетких величин.

Заметим, что рассмотренная операция сложения обладает свойствами коммутативности и ассоциативности при сложении нечетких величин, нечеткой и скалярной, скалярной и нечеткой величин.

Вычитание нечетких величин. В отличие от операции сложения, вычитание нечетких величин не имеет свойства коммутативности и ассоциативности. Прежде чем рассмотреть операцию вычитания, введем определение очень важного свойства нечетких величин, которую называют свойством *изображения.*

Если α-сечение A_α нечеткой величины $\widetilde{A}$ определено как $[a_1^\alpha, a_2^\alpha]$, тогда α- сечение изображения $A_{\overline{\alpha}}$ определяется как $[-a_2^\alpha\ -a_1^\alpha]$.

Следовательно, изображение величины A или $\widetilde{A}$ представляет собой сумму всех α-сечений на интервале $0 \leq x \leq 1$ (рис. 10).

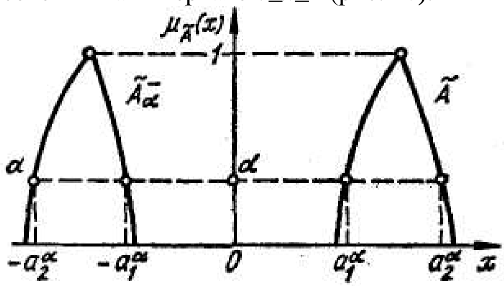


Рис. 10.

Сумма α-сечения и соответствующего изображения в общем случае тождественно не равна нулю:

$$A_\alpha(+)A_{\overline{\alpha}} = [a_1^\alpha, a_2^\alpha](+)[-a_2^\alpha, -a_1^\alpha]=[a_1^\alpha — a_2^\alpha, a_2^\alpha — a_1^\alpha]\neq[0, 0].$$

Теперь рассмотрим операцию вычитания одной нечеткой величины из другой.

Вычитание нечеткой величины $\widetilde{B}$ из нечеткой величины $\widetilde{A}$ производится прибавлением изображения вычитаемого $\widetilde{B}$ к уменьшаемому $\widetilde{A}$. Если оба нечетких подмножества принадлежат R, то разность также принадлежит R.

Рассмотрим пример вычитания нечетких величин, которые описываются следующими функциями принадлежности:

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \begin{cases} x/5 - 5/5, & 5 \leq x \leq 10; \\ -x/2 + 12/2, & 10 < x \leq 12; \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases} x/3-2/3, & 2\le x\le 5;\\ -x/5+10/5, & 5<x\le 10;\\ 0 & \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Для произвольного α-сечения имеем

a_1^α=5α+5; a_2^α =— 2α+2; b_1^α=3α+2; b_2^α = - 5α +10.

Для того, чтобы вычесть $\tilde{B}$ из $\tilde{A}$ сначала находим изображение для α-сечения:

$\tilde{B}_{\bar{\alpha}}$ =[-b_2^α, -b_1^α]=[5α-10, -3α-2].

Затем прибавляем $\tilde{B}$ к $\tilde{A}$ для α-сечения:

[a_1^α - b_2^α, a_2^α - b_1^α] =[5α+5+5α -10, - 2α +12- 3α - 2] =

=[10α -5, - 5α +10].

Теперь находим ЛСТ и ПСТ функции:

x = 10α — 5, откуда α = x /10 + 5/10;

x = — 5 α+10, откуда α = — x/5 + 10/5.

Приравнивание ЛСТ и ПСТ функций соответственно к нулю и к единице дает значения (-5,0) и (1,5) для ЛСТ и (5,1) и (10,0) для ПСТ функций.

Полная ФП разности тогда имеет вид:

$$\mu_{\tilde{A}(-)\tilde{B}}(x)=\begin{cases} x/10+5/10, & -5\le x\le 5;\\ -x/5+10/5, & 5<x\le 10;\\ 0 & \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$$

На рис. 11 представлена иллюстрация операции вычитания нечетких величин.

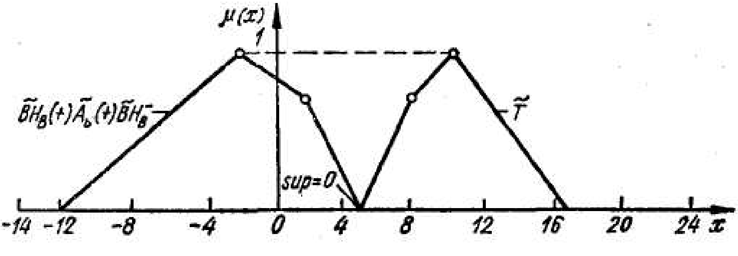


Рис. 11.

Умножение нечетких величин. Если две нечеткие величины $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ находятся в пространстве R^+, то для любого α-сечения справедливо соотношение

$$A_\alpha(\bullet)B_\alpha = [a_1^\alpha a_2^\alpha]\,[b_1^\alpha b_2^\alpha]=[a_1^\alpha\, b_1^\alpha, a_2^\alpha b_2^\alpha].$$

Произведение $\tilde{A}(\bullet)\tilde{B}$ также находится в пространстве R^+ и является выпуклым и нормализованным. Операция умножения нечетких величин обладает свойством коммутативности и ассоциативности, т.е.

$$\tilde{A}(\bullet)\tilde{B} = \tilde{B}(\bullet)\tilde{A}$$

$$[\tilde{A}(\bullet)\tilde{B}](\bullet)\tilde{C} = \tilde{A}(\bullet)[\tilde{B}(\bullet)\tilde{C}].$$

Умножение также дистрибутивно в R^+ относительно операции сложения:

$$\tilde{A}(\bullet)[\tilde{B}(+)]=[\tilde{A}(\bullet)\tilde{B}](+)[\tilde{A}(\bullet)\tilde{C}].$$

Рассмотрим пример умножения нечетких величин. Пусть $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — две положительные нечеткие величины с ФП

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} x/3-1/3, & 1\le x\le 4;\\ -x/2+6/2, & 4\le x\le 6;\\ 0 & \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases} x-2, & 2\le x\le 3;\\ -x/3+6/3, & 3< x\le 6;\\ 0 & \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Для произвольного α-сечения имеем:

$$a_1^\alpha=3\alpha+1;\quad a_2^\alpha = -2\alpha+6;\quad b_1^\alpha=\alpha+2;\quad b_2^\alpha = -3\alpha+6.$$

Используя определение операции умножения нечетких величин

$$A_\alpha(\bullet)B_\alpha = [a_1^\alpha a_2^\alpha]\,[b_1^\alpha b_2^\alpha]=[a_1^\alpha\, b_1^\alpha, a_2^\alpha b_2^\alpha].$$

запишем:

$$A_\alpha(\bullet)B_\alpha=[a_1^\alpha b_1^\alpha,\ a_2^\alpha b_2^\alpha]=$$

$$=[(3\alpha+1)(\alpha+2,\ (-2\alpha+6)\ (-3\alpha+6)]=[3\alpha^2+7\alpha+2, 6\alpha^{2-30}\alpha+36].$$

В отличие от операций сложения и вычитания определение ЛСТ и ПСТ функций требует решения квадратных уравнений:

$$x=3\alpha^2+7\alpha+2;\quad x = 6\alpha^{2-30}\alpha+36. \qquad (*)$$

Для нахождения α преобразуем уравнение (*) так:

$$3\alpha^2+7\alpha+(2 - x)=0,\qquad 6\alpha^{2-30}\alpha+(36 - x) = 0. \qquad (**)$$

Оставляя лишь корни, которые находятся в интервале [0, 1], из уравнения (**) можно получить:

$\alpha=(-7+\sqrt{25+12x})/6, \quad \alpha=(30-\sqrt{36+24x})/12.$

Границы области ЛСТ и ПСТ функций также определяются приравниванием этих функций к нулю и к единице и определением *x*. Для ЛСТ функции имеем:

а) $\alpha=(-7+\sqrt{25+12x})/6=0$, откуда $x=2$;

б) $\alpha=(-7+\sqrt{25+12x})/6=1$, откуда $x=12$.

Аналогично для ПСТ функции:

а) $\alpha=(30-\sqrt{36+24x})/12=1$, откуда $x=12$

б) $\alpha=(30-\sqrt{36+24x})/12=0$, откуда $x=36$.

Нечеткая величина, являющаяся произведением $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ в пространстве R^{+}, имеет вид

$$\mu_{\tilde{A}(\bullet)\tilde{B}}(x)=\begin{cases}(-7+\sqrt{25+12x})/6, & 2\le x\le 12;\\ (30-\sqrt{36+24x})/12, & 12< x\le 36;\\ 0 & \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Заметим, что как и при сложении треугольных нечетких величин, для решения рассмотренной задачи было необходимо перемножить соответствующие верхние и нижние границы ЛСТ и ПСТ функций и затем найти эти функции.

Этот пример проиллюстрирован на рис. 12. Следует заметить, что произведение двух треугольных нечетких величин не является треугольной нечеткой величиной.

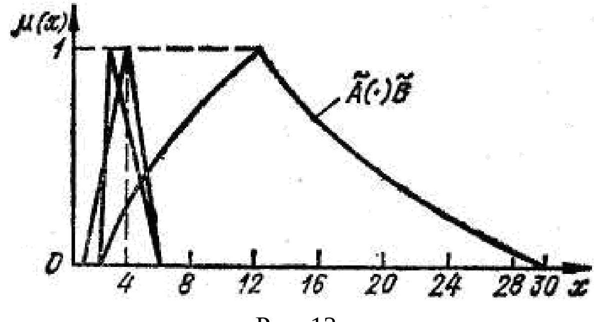


Рис. 12.

Умножение нечеткой величины на скаляр. Умножение нечеткой величины на скаляр производится с использованием так называемого метода «двух нечетких величин», в соответствии с которым скалярная величина представляется в виде условной нечеткой величины, α-сечение которой определяется как [k, k].

Таким образом, используя уравнение

$$A_\alpha(\bullet)B_\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]\,[b_1^\alpha, b_2^\alpha]=[a_1^\alpha b_1^\alpha, a_2^\alpha b_2^\alpha],$$

запишем

$$kA_\alpha = [k, k](\bullet)[a_1^\alpha, a_2^\alpha]=[ka_1^\alpha, ka_2^\alpha].$$

В общем случае ФП имеет вид

$$\mu_{k(\bullet)\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}}\left(\frac{x}{k}\right).$$

Рассмотрим пример. Пусть $\tilde{A}$ — нечеткая величина, описываемая ФП в соответствии с уравнением

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x/3-1/3, & 1\le x\le 4; \\ -x/2+6/2, & 4\le x\le 6; \\ 0 & \textit{в остальных случаях}. \end{cases}$$

$k = 2$. Тогда

$$kA_\alpha = [2,2](\bullet)[3\alpha+1, -2\alpha+6]=[6\alpha+2, -4\alpha+12].$$

Определим ЛСТ и ПСТ функции:

$$x=6\alpha+2,\ \alpha = x/6 - 2/6; \qquad (*)$$

$$x = -4\alpha+12,\ \alpha=-x/4 + 12/4. \qquad (**)$$

Решение уравнения (*) при α= 0; 1 дает границы области ЛСТ:

$$2\le x \le 8.$$

Решение уравнения (**) при α=1; 0 дает границы области ПСТ:

$$8\le x \le 12.$$

Тогда полная ФП имеет вид

$$\mu_{k\bullet\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x/6-2/6, & 2\le x\le 8; \\ -x/4+12/4, & 8< x\le 12; \\ 0 & \textit{в остальных случаях}. \end{cases} \qquad (***)$$

Заметим, что уравнение (***) в точности соответствует ФП $\mu_{\tilde{A}}(x/2)$. Эффект от умножения нечеткой величины на скаляр проявляется в растяжении обеих сторон нечеткой величины в такое количество раз, которое равно этой скалярной величине.

В отличие от произведения двух треугольных нечетких величин, произведение нечеткой величины на скаляр представляет собой треугольную нечеткую величину. Приведенный пример иллюстрируется рис. 13.

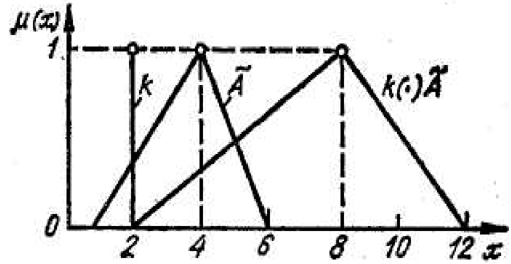


Рис. 13.

Деление нечетких величин. В отличие от «нечеткого умножения», операция деления нечетких величин не обладает свойством коммутативности и ассоциативности в пространстве R^+.

Прежде чем перейти к рассмотрению операции деления, необходимо определить еще одно свойство нечетких величин, которое называют инверсией или свойством возвратности. А именно, если α-сечение нечеткая величина $\tilde{A}$ определено как $A_\alpha=[a_1^\alpha , a_2^\alpha]$, тогда α-сечение обратной нечеткой величины $\tilde{A}^{-1}$ определяется как $\tilde{A}^{-1}=[1/a_1^\alpha , 1/a_2^\alpha]$. Тогда обратная нечеткая величина $\tilde{A}^{-1}$ является суммой всех α- сечений на интервале $0 < \alpha < 1$. Нечеткая величина $\tilde{A}^{-1}$ и обратная ей показаны на рис. 14.

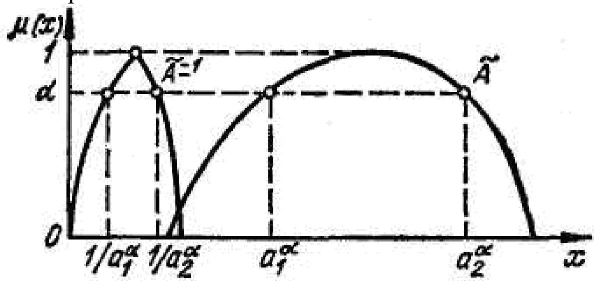


Рис. 14.

Важно заметить, что инверсия нечетких величин не обладает свойством мультипликативной тождественности:

$$\tilde{A}(\bullet)\tilde{A}^{-1}=[a_1^\alpha , a_2^\alpha](\bullet)[1/a_1^\alpha , 1/a_2^\alpha]=[a_1^\alpha/a_2^\alpha , a_2^\alpha/a_1^\alpha]\neq[1,1].$$

Теперь рассмотрим операцию деления нечеткой величины на нечеткую величину.

Деление нечеткой величины $\tilde{A}$ на нечеткую величину $\tilde{B}$ производится умножением делимого $\tilde{A}$ на инверсию делителя $\tilde{B}$.

Если обе нечеткие величины принадлежат пространству R^+, то частное также является нечеткой величиной R^+, но оно может не обладать той же формой.

Рассмотрим пример деления нечетких величин. Пусть $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ следующие:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x/3 - 3/3, & 3 \le x \le 6; \\ -x/4 + 10/1, & 6 < x \le 10; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} x/2 - 1/2, & 3 \le x \le 3; \\ -x/1 + 4/1, & 3 < x \le 4; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для произвольного α-сечения имеем:

$a^{\alpha}{}_1$=3α+3; $a^{\alpha}{}_2$=—4α+0; $b^{\alpha}{}_1$=—2α +1; $b^{\alpha}{}_2$ = — α + 4.

Инверсия $\tilde{B}$ для α-сечения имеет вид

$$\tilde{B}_{\alpha}{}^{-1}=[1/ b^{\alpha}{}_2, 1/ b^{\alpha}{}_1]=\left[\frac{1}{-\alpha+4}, \frac{1}{2\alpha+1}\right].$$

Умножение $\tilde{A}$ на $\tilde{B}^{-1}$ на любом α - уровне дает

$$\tilde{A}(\bullet)\tilde{B}^{-1}=[a^{\alpha}{}_{1}/ b^{\alpha}{}_2, a^{\alpha}{}_{2}/ b^{\alpha}{}_1]=\left[\frac{3\alpha+3}{-\alpha+4}, \frac{-4\alpha+10}{2\alpha+1}\right].$$

Затем определяются ЛСТ и ПСТ функции:

x=(3α+3)/(—α+4),   откуда α=(4x—3)/(x+3);

x=(—4α+10)/(2α+1), откуда α=(10 -x)/(2x+4).

Приравнивая ЛСТ и ПСТ функций последовательно к нулю и к единице, получаем:

а) для ЛСТ функции

при α=0 x=¾, при α=1 x=6/3;

б) для ПСТ функции

при α =1 x=6/3, при α=0 x = l0/1.

Тогда полная ФП для $\tilde{A}(:)\tilde{B}$ следующая:

$$\mu_{\tilde{A}(:)\tilde{B}}(x)=\begin{cases}(4x-3)/(x+3), & 3/4\le x\le 6/3;\\ (10-x)/(2x+4), & 6/3<x\le 10/1;\\ 0 & \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Заметим, что представленное на рис. 15 частное от деления двух треугольных нечетких величин не является треугольной нечеткой величиной.

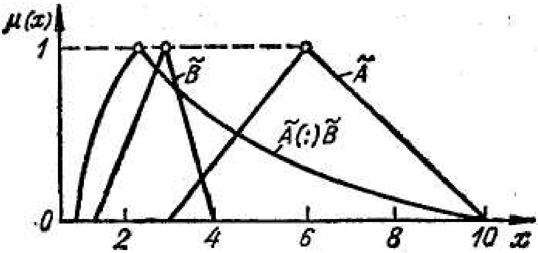


Рис. 15.

Квадратный корень из треугольной нечеткой величины.

Извлечение квадратного корня из треугольной нечеткой величины сводится к извлечению квадратного корня из верхней и нижней границ ЛСТ и ПСТ функций и преобразование этих функций для ФП результата на основе использования новых границ. Заметим, что ЛСТ и ПСТ функции для квадратного корня верхней границы не являются треугольными нечеткими величинами. Вспомним, что произведение двух треугольных нечетких величин не является треугольной нечеткой величиной. Поэтому, для того, чтобы произведение было треугольной нечеткой величиной, как это требуется по определению квадратного корня, сомножители, которые дают произведение, или квадратные корни не могут самые быть треугольными нечеткими величинами. Рассмотрим следующий пример. Пусть $\tilde{A}$ — нечеткая величина в пространстве R^+, функция принадлежности которой описывается уравнением

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}x/3-1/3, & 1\le x\le 4;\\ -x/2+6/2, & 4<x\le 6;\\ 0 & \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Для произвольного α-сечения имеем:

$a^{\alpha}{}_1=3\alpha+1;\quad a^{\alpha}{}_2 = -2\alpha + 6.$

Чтобы удовлетворить условию извлечения квадратного корня запишем

$A_\alpha{}^{1/2}(\bullet)A_\alpha{}^{1/2} = A_\alpha = [a^\alpha{}_1,\ a^\alpha{}_2]$

Используя методику умножения двух нечетких величин, получаем

$A_\alpha{}^{1/2}(\bullet)A_\alpha{}^{1/2} = [a^{1/2\alpha}{}_1\, a^{1/2\alpha}{}_1,\ a^{1/2\alpha}{}_2\, a^{1/2\alpha}{}_2],$

откуда

$a^{1/2\alpha}{}_1\, a^{1/2\alpha}{}_1 = a^\alpha{}_1,\quad a^{1/2\alpha}{}_2\, a^{1/2\alpha}{}_2 = a^\alpha{}_2.$

Следовательно,

$a^{1/2\alpha}{}_1 = \pm\, a^\alpha{}_2$ или $\pm\, [a^\alpha{}_2]^{1/2}$,

$a^{1/2\alpha}{}_2 = \pm\, a^\alpha{}_2$ или $\pm[a^\alpha{}_2]^{1/2}$.

Продолжая аналогично, запишем

$a^{1/2\alpha}{}_1 = \pm\, [a^\alpha{}_1]^{1/2} \pm (3\alpha+1)^{1/2}$,

$a^{1/2\alpha}{}_2 = \pm\, [a^\alpha{}_1]^{1/2} \pm (-\, 2\alpha + 6)^{1/2}$.

Решение четырех последующих уравнений относительно α дает ЛСТ и ПСТ функции для двух «нечетких квадратных корней»:

а) $x = (3\alpha+1)^{1/2}$ ()

$x = (-\, 2\alpha + 6)^{1/2}$ ()

для положительного нечеткого квадратного корня

б) $x = -\, (3\alpha+1)^{1/2}$ (&)

$x = -\, (-\, 2\alpha + 6)^{1/2}$ (&&)

для отрицательного нечеткого квадратного корня.

Таким образом, ЛСТ и ПСТ функции для положительного и отрицательного квадратных корней имеют вид:

$\alpha = (x^2 - 1)/3;$ (*)

$\alpha = (-\, x^2 + 6)/2$ (**)

Для получения ФП квадратного корня последовательно приравняем уравнения (*) и (**) к нулю и к единице и найдем верхнюю и нижнюю границы областей для ЛСТ и ПСТ функций:

$0 = (x^2 - 1)/3$, откуда $x = \pm\, 1$;

$1 = (x^2 - 1)/3$, откуда $x = \pm\, 2$;

$1 = (-\, x^2 + 6)/2$, откуда $x = \pm\, 2$;

$0 = (-\, x^2 + 6)/2$, откуда $x = \pm\sqrt{6}$.

Следовательно, ФП положительных и отрицательных квадратных корней на $\tilde{A}$ соответственно равны:

$$\mu_{\tilde{A}^{1/2}}(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)/3, & 1 \le x \le 2; \\ (-x^2 + 6)/2, & 2 < x \le \sqrt{6}; \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases} \qquad (+)$$

$$\mu_{\tilde{A}^{1/2}}(x)=\begin{cases}(-x^2+6)/2, -\sqrt{6}\le x\le -2;\\ (x^2-1)/3, \quad -2<x\le -1;\\ 0 \qquad \text{в остальных случаях.}\end{cases} \qquad (++)$$

Для подтверждения того, что функции принадлежности (+), (++) действительно соответствуют квадратному корню из $\tilde{A}$, вычислим квадраты этих величин для α-сечения.

Для положительного квадратного корня

$$\tilde{A}_\alpha^{1/2}(\bullet)\,\tilde{A}_\alpha^{1/2} = [a_{11/2}{}^\alpha\, a_{11/2}{}^\alpha,\ a_{21/2}{}^\alpha\, a_{21/2}{}^\alpha]. \ (***)$$

Подставляя (*) и (**) в (***), получаем

$[(3\alpha+1)^{1/2}(3\alpha+1)^{1/2}, (-2\alpha+6)^{1/2}(-2\alpha+6)^{1/2}] = [(3\alpha+1), (-2\alpha+6)] = [a_1{}^\alpha,\ a_2{}^\alpha] = A_\alpha$.

Для отрицательного квадратного корня

$$-\tilde{A}_\alpha^{1/2}(\bullet)-\tilde{A}_\alpha^{1/2} = [-a_{11/2}{}^\alpha\, -a_{11/2}{}^\alpha,\ -a_{21/2}{}^\alpha\, -a_{21/2}{}^\alpha]. \qquad (****)$$

Подставляя () и () в (****), имеем

$$[(-(3\alpha+1)^{1/2})(-(3\alpha+1)^{1/2}), (-(-2\alpha+6)^{1/2})(-(-2\alpha+6)^{1/2})] =$$
$$=[(3\alpha+1), (-2\alpha+6)] = [a_1{}^\alpha,\ a_2{}^\alpha] = A_\alpha.$$

Изображение нечеткой величины $\tilde{A}$ и ее положительного и отрицательного квадратного корней представлено на рис. 16.

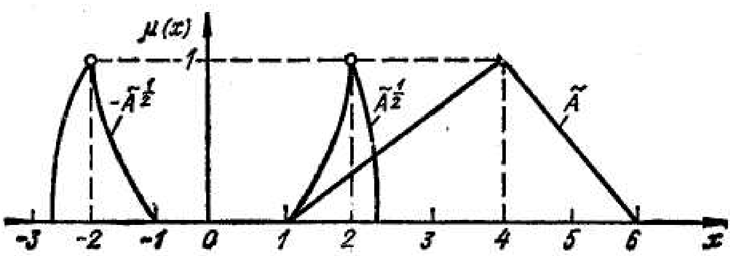


Рис. 16.

Заметим, что отрицательный квадратный корень является зеркальным отображением положительного относительно оси симметрии x=0.

3.3. Понятия нечеткого максимума и нечеткого минимума

При решении задач управления и проектирования ТС с использованием аппарата нечетких множеств широко используются операции сравнения нечетких множеств и величин. В свою очередь, эти операции основываются на таких важнейших понятиях, как нечеткий максимум ($\widetilde{\max}$) и нечеткий минимум ($\widetilde{\min}$).

Определим нечеткий максимум двух нечетких величин как

$$\mu_{\widetilde{\max}(\tilde{A},\tilde{B})}(x)=\begin{cases}\mu_{\tilde{A}}(x), & \text{если} \quad x^{\alpha}{}_{A}\geq x^{\alpha}{}_{B};\\ \mu_{\tilde{B}}(x), & \text{если} \quad x^{\alpha}{}_{B}\geq x^{\alpha}{}_{A};\\ \quad \text{для} \quad \text{всех} \quad \alpha\in[0,1] & .\end{cases}$$

Иллюстрация понятия нечеткого максимума представлена на рис. 17.

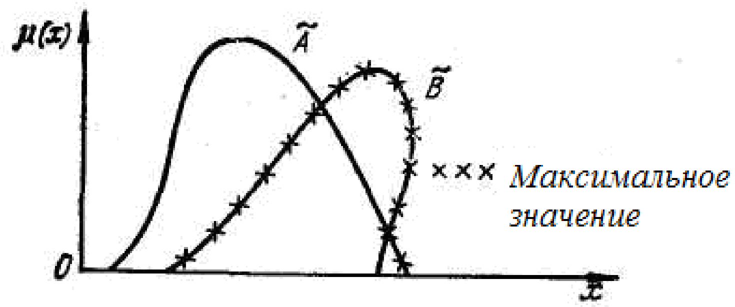


Рис. 17.

Аналогично определим нечеткий минимум двух нечетких множеств как

$$\mu_{\widetilde{\min}(\tilde{A},\tilde{B})}(x)=\begin{cases}\mu_{\tilde{A}}(x), & \text{если} \quad x^{\alpha}{}_{A}\geq x^{\alpha}{}_{B};\\ \mu_{\tilde{B}}(x), & \text{если} \quad x^{\alpha}{}_{B}\geq x^{\alpha}{}_{A};\\ \quad \text{для} \quad \text{всех} \quad \alpha\in[0,1] & .\end{cases}$$

Иллюстрация понятий нечеткого максимума и нечеткого минимума представлена соответственно на рис. 17, 18. Следует заметить, что

$$[\widetilde{\max}(\tilde{A},\tilde{B})\cap\widetilde{\min}(\tilde{A},\tilde{B})=(\tilde{A}\cup\tilde{B}).$$

В соответствии с рисунками 17 и 18 $\widetilde{\max}$ представляет собой набор величин x_i, которые для заданного α-сечения имеют более высокие значение. Точно так же, $\widetilde{\min}$ — это такой набор x_i, которые для данного α-сечения имеют наименьшие значения.

Рис. 18.

Концептуально предполагается, что традиционные процедуры определения $\widetilde{\max}$ и $\widetilde{\min}$ представляют собой нечеткую версию $\widetilde{\max}$ и $\widetilde{\min}$ соответственно. К сожалению, при объединении обеих частей нечетких величин и осуществлении процедуры $\widetilde{\max}$ или $\widetilde{\min}$, эти операции не приводят к успеху в выборе явной максимальной или минимальной нечеткой величины из этой пары. Поэтому необходима разработка других методов сравнения.

Операции $\widetilde{\max}$ и $\widetilde{\min}$ можно при необходимости выполнять для двух и более нечетких величин. Для этого необходимо найти самое правое (левое) или наибольшее (наименьшее) значение x для каждого α - сечение.

Метод пропорции оптимума. Согласно этому методу выполняется сравнение нечетких величин на основе использования фиктивной максимальной или минимальной нечеткой величины. Нормализованные нечеткие величины сравниваются на основе их пропорционального вклада как в нечеткий максимум, так и в нечеткий минимум. Затем производится ранжирование пропорционально площади, которую нечеткая величина вносит в $\widetilde{\max}$ и $\widetilde{\min}$. Чем выше вклад в $\widetilde{\max}$, тем выше стоит данная нечеткая величина при ранжировке, а чем выше вклад в $\widetilde{\min}$, тем ниже она стоит при ранжировке.

Определим пропорцию $\widetilde{\max}$ для каждой нечеткой величины:

$$MP(\tilde{A}_i)=\frac{\int\limits_S[\mu_{\tilde{max}}(\tilde{A}_i\tilde{A}_j)(x)\wedge\mu_{\tilde{A}_i}(x)]dx}{\int\limits_{S(\tilde{A}_i)}\mu_{\tilde{A}}(x)\,dx}.$$

Аналогично, пропорция $\tilde{min}$ для каждой нечеткой величины определяется:

$$mp(\tilde{A}_i)=\frac{\int\limits_S[\mu_{\tilde{min}}(\tilde{A}_i\tilde{A}_j)(x)\wedge\mu_{\tilde{A}_i}(x)]dx}{\int\limits_{S(\tilde{A}_i)}\mu_{\tilde{A}}(x)\,dx}.$$

После вычисления MP($\tilde{A}_i$) и mp($\tilde{A}_i$) для каждого альтернативного $\tilde{A}_i$, они ранжируются согласно алгоритму (табл. 1).

Таблица 1

Логический алгоритм ранжирования для метода пропорции оптимума

№№ п/п	Логические условия		
	Если	И	ТО
1.	MP($\tilde{A}_i$)> MP($\tilde{A}_j$)	mp($\tilde{A}_i$)≤ mp($\tilde{A}_j$)	($\tilde{A}_i$)>($\tilde{A}_j$)
		mp($\tilde{A}_i$>mp($\tilde{A}_j$)	Вычислить и сравнить сложные пропорции (табл. 2)
2.	MP($\tilde{A}_i$)< MP($\tilde{A}_j$)	mp($\tilde{A}_i$)≥ mp($\tilde{A}_j$)	($\tilde{A}_i$)>($\tilde{A}_j$)
		mp($\tilde{A}_i$)<mp($\tilde{A}_j$)	Вычислить и сравнить сложные пропорции (табл. 2)
3.	MP($\tilde{A}_i$)= MP($\tilde{A}_j$)	mp($\tilde{A}_i$)< mp($\tilde{A}_j$)	($\tilde{A}_i$)>($\tilde{A}_j$)
		mp($\tilde{A}_i$)= mp($\tilde{A}_j$)	($\tilde{A}_i$)=($\tilde{A}_j$)
		mp($\tilde{A}_i$)> mp($\tilde{A}_j$)	($\tilde{A}_i$)=($\tilde{A}_j$)

Если после сравнения MP($\tilde{A}_i$) и mp($\tilde{A}_i$) возникает неопределенность, образуются сложные пропорции $\tilde{max}$ и $\tilde{min}$ для каждой нечеткой величины, которые определяют вклад, вносимый $\tilde{max}$ и $\tilde{min}$ в сумму пропорции, т.е.

$$CMP(\tilde{A}_i) = \frac{MP(\tilde{A}_i)}{MP(\tilde{A}) + mp(\tilde{A}_i)};$$

$$cmp(\tilde{A}_i) = \frac{mp(\tilde{A}_i)}{MP(\tilde{A}) + mp(\tilde{A}_i)} = 1 - CMP(\tilde{A}_i).$$

Таблица 2

Алгоритм, основанный на вычислении и сравнении сложных пропорций .

№№ п/п	Логические условия		
	Если	И	ТО
1.	CMP($\tilde{A}_i$)>CMP($\tilde{A}_j$)	cmp($\tilde{A}_i$)< cmp($\tilde{A}_j$)	($\tilde{A}_i$)>($\tilde{A}_j$)
2.	CMP($\tilde{A}_i$)<CMP($\tilde{A}_j$)	cmp($\tilde{A}_i$)> cmp($\tilde{A}_j$)	($\tilde{A}_i$)<($\tilde{A}_j$)
3.	CMP($\tilde{A}_i$)=CMP($\tilde{A}_j$)	mp($\tilde{A}_i$)= mp($\tilde{A}_j$)	Если d[CMP($\tilde{A}_i$)]>d[CMP($\tilde{A}_j$)], то ($\tilde{A}_i$)>($\tilde{A}_j$); d[CMP($\tilde{A}_i$)]<d[CMP($\tilde{A}_j$)], то ($\tilde{A}_i$)<($\tilde{A}_j$); d[CMP($\tilde{A}_i$)]<d[CMP($\tilde{A}_j$)], то ($\tilde{A}_i$)=($\tilde{A}_j$); где d[CMP($\tilde{A}_i$)] -знаменатель сложной пропорции CMP($\tilde{A}_i$), т.е. MP($\tilde{A}_i$)+mp($\tilde{A}_i$)

Если после сравнения MP($\tilde{A}_i$) и mp($\tilde{A}_i$) возникает неопределенность, образуются сложные пропорции $\widetilde{\max}$ и $\widetilde{\min}$ для каждой нечеткой величины, которые определяют вклад, вносимый $\widetilde{\max}$ и $\widetilde{\min}$ в сумму пропорции, т.е.

$$CMP(\widetilde{A}_i) = \frac{MP(\widetilde{A}_i)}{MP(\widetilde{A}) + mp(\widetilde{A}_i)};$$

$$cmp(\widetilde{A}_i) = \frac{mp(\widetilde{A}_i)}{MP(\widetilde{A}) + mp(\widetilde{A}_i)} = 1 - CMP(\widetilde{A}_i).$$

Затем эти сложные пропорции $\widetilde{\max}$ и $\widetilde{\min}$ сравниваются согласно алгоритму, представленному в табл. 2 (заметим, что из-за структуры CMP($\widetilde{A}_i$)+cmp($\widetilde{A}_i$)=1 только три случая, которые приведены в табл. 2 возможны с точки зрения математики). В общем случае этот метод учитывает (в виде штрафа) большой разброс случайного набора величин.

При необходимости сравнения более двух нечетких величин CMP($\widetilde{A}_i$) и cmp ($\widetilde{A}_i$) основываются на $\widetilde{\max}$ и $\widetilde{\min}$, образованными большим количеством нечетких величин. Затем выполняется ранжирование по двум группам: по группе, образованной на основе CMP($\widetilde{A}_i$) и по группе cmp($\widetilde{A}_i$). Вспомним, что при первом ранжировании нечеткая величина с наибольшим CMP считается наибольшей и так далее сверху вниз. При втором ранжировании нечеткая величина с наибольшим cmp считается наименьшей и так далее снизу вверх. В большинстве случаев эти два ранжирования будут конфликтовать. Соотношение нечетких величин, которые конфликтуют при первоначальном групповом ранжировании должны дополнительно попарно исследоваться с использованием алгоритмов (табл. 1 и 2) для устранения конфликта.

3.4. Исчисление нечетких величин

В этом разделе обсуждаются методы исчисления выражений с неточными величинами, представленным в виде распределений возможности на множестве действительных чисел. Эти методы находятся в полном соответствии с методами расчета неопределенностей или теорией ошибок и представляют собой их расширение на случай взвешенных интервалов. Их значение показано на ряде примеров в конце этого раздела. Кроме того, нечеткие величины будут рассматриваться в последующих разделах. В сущности, в исчислении нечетких величин предлагается один из вариантов развития теории чувствительности, которая, может приобретать оттенки без *заметного увеличения* объема необходимых вычислений. Когда затруднительно применение теории случайных функций, на смену ей также приходит исчисление нечетких величин, хотя, конечно, ценой некоторой потери информации — большей или меньшей в зависимости от характера решаемых проблем.

3.4.1. Определения

3.4.1.1. Нечеткие величины, нечеткие интервалы и нечеткие числа

Нечеткая величина Q — это нечеткое множество, определенное на множестве действительных чисел, т. е. отображение μ_Q из $\mathfrak{R}$ в [0, 1]. Здесь функция принадлежности μ_Q будет естественным образом рассматриваться как функция распределения возможностей на значениях, принимаемых некоторой переменной. В соответствии с результатами, обсуждавшимися ранее и относящимися к нормировке нечетких множеств и к "возможностной" природе нечеткой величины Q, будем в общем случае предполагать, что функция μ_Q нормирована.

Всякое действительное число m, принадлежащее ядру $\mathring{Q}$ (т. е. $\mu_Q(m) = 1$),

называется *модальным значением* Q.

Можно определить такой тип нечеткой величины, который обобщает понятие интервала: *нечеткий интервал* — это выпуклая нечеткая величина, функция принадлежности которой квазивогнута:

$$\forall u, v, \forall w \in [u, v], \ \mu_Q(w) \geqslant \min(\mu_Q(u), \mu_Q(v)). \quad (3.1)$$

Нечеткая величина является выпуклой тогда, и только тогда, когда ее α-срезы выпуклы, т. е. являются (ограниченными или неограниченными) интервалами. Понятие замкнутых интервалов обобщается в виде понятия нечетких интервалов, у которых функция принадлежности полунепрерывна сверху, т. е. по определению их α-срезы являются замкнутыми интервалами. Понятие компактных подмножеств множества действительных чисел (R (замкнутых и ограниченных) обобщается с помощью понятия нечетких величин с полунепрерывными сверху функциями принадлежности, определенными на компактном носителе. Будем называть *нечетким числом* полунепрерывный сверху нечеткий интервал с компактным носителем и единствен ным модальным значением. Если М — нечеткое число с модальным значением m, то М является возможным представлением понятия "около m". В случае же нечеткого интервала множество модальных значений само есть некоторый интервал. Нечеткая величина Q будет называться *полимодалъной,* если существует *конечное* множество выпуклых нечетких подмножеств $\{M_i \mid i \in I\}$ с полунепрерывными сверху функциями принадлежности, таких, что Q есть объединение M_i в смысле формулы (1.47).

Нечеткий интервал — это удобная форма представления неточных величин, более богатая информацией, чем обычный, точный интервал. Действительно, часто встречаются ситуации, когда требуется оценить точность некоторого параметра или обеспечить прогноз значения некоторого признака, а обычный интервал оказывается неудовлетворительным представлением. Следует ли в таком случае фиксировать границы этого интервала: давать пессимистические оценки (тогда интервал окажется широким, а проводимые расчеты будут иметь ничтожную ценность из-за их неточности) или оптимистические (тогда будет существовать риск выхода таким образом определенной величины за пределы назначенной области, что подвергает сомнению получаемые "точные" результаты)? Нечеткий интервал позволяет иметь одновременно пессимистическое и оптимистическое представление: носитель нечеткого интервала будет выбираться так, чтобы гарантировать "невыход" рассматриваемой величины за нужные пределы, а его ядро будет содержать наиболее правдоподобные значения.

Способы определения функций принадлежности на основе неточных оценок, обусловленных субъективным восприятием человека, или на базе статистических данных, которые обсуждались ранее, особым образом применяются для задания нечетких величин.

В рамках вероятностной интерпретации функций принадлежности можно строго определить среднее значение нечеткого интервала, которое также будет некоторым интервалом.

Пусть П — мера возможности, связанная с распределением μ_Q, где Q— нечеткий интервал с функцией принадлежности, полунепрерывный сверху, и компактным носителем. Отметим, что в этом случае мера возможности (как, впрочем, и связанная с ней мера необходимости) удовлетворяет условию непрерывности мер неопределенности (1.3) для монотонно возрастающих или убывающих последовательностей компактных множеств. Рассмотрим множество $\mathcal{P}$ всех вероятностных мер, совместимых с мерой возможности П, т. е. в соответствии с формулой (1.30):

$$\mathcal{P} = \{P \mid \forall A,\ N(A) \leqslant P(A) \leqslant \Pi(A)\}.$$

Пусть $[q_1, q_2]$ — ядро $\mathring{Q}$ нечеткого интервала Q.

Верхняя граница множества $\mathcal{P}$ достигается вероятностной мерой $\overline{\mathbf{P}}$ с функцией распределения F*, такой, что

$$\forall u \in \mathcal{R}\ \ F^*(u) = \overline{P}((-\infty, u]) = \Pi((-\infty, u]) = \sup\{\mu_Q(r) \mid r \leqslant u\},$$

т. е.

$$F^*(u) = \begin{cases} \mu_Q(u), \text{ если } u \leqslant q_1 \\ 1, \quad \text{если } u > q_1 \end{cases}$$

См. рис. 19.

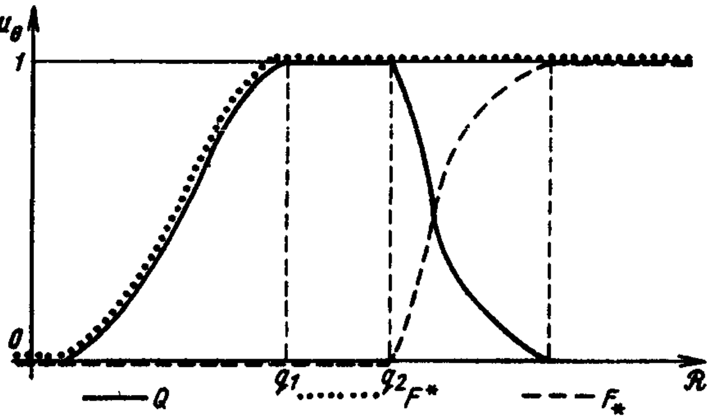


Рис. 19

Точно так же нижняя граница множества $\mathcal{P}$ достигается вероятностной мерой $\underline{\mathbf{P}}$ с функцией распределения F_*, такой, что

$$\forall u \in \mathcal{R},\ F_*(u) = \underline{P}((-\infty, u]) = N((-\infty, u]) = \inf\{1 - \mu_Q(r) \mid r > u\},$$

т.е.

$$F_*(u) = \begin{cases} 0, \text{ если } u < q_2, \\ 1 - \lim\limits_{r \to u} \mu_Q(r), \text{ если } u \geqslant q_2 \end{cases}$$

См. рис. 19.

Используя определения верхних и нижних математических ожиданий — формулы (1.31) и (1.32), можно получить соответственно нижнее и верхнее средние значения нечеткой величины Q:

(3.2).

$$E_*(Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} r \, d\Pi((-\infty, r]) = \int_{-\infty}^{+\infty} r \, dF^*(r),$$

$$E^*(Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} r dN((-\infty, r]) = \int_{-\infty}^{+\infty} r dF_*(r). \quad (3.3)$$

Тогда среднее значение нечеткого интервала Q будет являться множеством всех средних значений случайных величин, совместимых с Q (удовлетворяющих условию (1.30)), т. е. интервалом $[E_*(Q), E^*(Q)]$. Кажется вполне естественным, что среднее значение нечеткого интервала — обычный интервал. Если Q = [a, b], то легко убедиться, что $E_*(Q) = a, E^*(Q) = b$.

3.4.1.2. Принцип обобщения

В этом разделе ставится следующая задача: как по заданным невзаимодействующим возможностным переменным X, Y, Z,.. ., каждая из которых характеризуется нечеткой величиной, ограничивающей ее область определения, вычислить нечеткую величину, которая ограничивает область определения переменной f (X, Y, Z, ...), где f — заданная функция, принимающая действительные значения.

Для ее решения рассмотрим два множества Ω и U, а также отображение f из Ω в U. Предположим, что в пространстве $(\Omega, \mathcal{A})$ задана мера доверия $g(\mathcal{A}$ — множество обычных подмножеств Ω, на котором определена мера g). Тогда с помощью обратного отображения $f^{-1}(A) = \{\omega, f(\omega) \in A\}$, $A \subseteq U$, можно построить функцию множества g_f, индуцируемую этим отображением:

$$\forall A \in \mathcal{S}, \; g_f(A) = g(f^{-1}(A)), \quad (3.4)$$

где $\mathcal{S} = \{A | f^{-1}(A) \in \mathcal{A}\}$. Легко проверить, что функция множества g_f является мерой неопределенности в $(U, \mathcal{S})$.

Хорошо известен частный случай применения формулы (3.4), когда g — вероятностная мера. Если $\Omega = U = \mathcal{R}$, а g — вероятностная мера на борелевской σ-алгебре подмножеств множества $\mathcal{R}$, определяющая случайную переменную X, то f называется функцией случайных переменных. Зная функцию распределения F_X, связанную с вероятностной мерой $g(F_X(r) = \mathrm{Prob}(X \leqslant r))$, ищем функцию распределения F_Y или Y = f (X) по формуле $F_Y(r) = \mathrm{Prob}\,(X \leq r)$.

В настоящей книге рассматривается случай, когда g является мерой возможности. Тогда формула (3.4) принимает вид

$$\Pi_F(A) = \Pi(f^{-1}(A)) = \sup\{\pi(\omega) \mid f(\omega) \in A\}, \text{ если } f^{-1}(A) \neq \varnothing, \quad (3.5)$$

где π — функция распределения возможностей, связанная с мерой возможности П. Отметим, что здесь можно выбрать $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ (следовательно, $\mathcal{J} = 2^{U}$).

Функция множества Π_f действительно является мерой возможности, поскольку $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. При этом функция распределения возможностей π_f, связанная с мерой возможности Π_f, имеет вид

$$\forall u \in U,\ \pi_f(u) = \Pi_f(\{u\}) = \begin{cases} \sup\{\pi(\omega) \mid f(\omega) = u\}, \\ 0, \text{ если } f^{-1}(u) = \varnothing. \end{cases} \quad (3.6)$$

Выражение (3.6) хорошо известно в теории нечетких множеств под названием принципа обобщения (Заде).

Формулу (3.4) можно применять и для построения меры необходимости N, двойственной мере П. Таким образом построенная функция множества действительно является мерой необходимости N_f, причем эта мера двойственна мере Π_f, поскольку $f^{-1}(\bar{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$, когда f — отображение. Следовательно, мера необходимости N_f также выражается через распределение возможности π_f по формуле (1.14).

Когда имеется декартово произведение $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, а функция π сепарабельна, т. е. выражается в форме

$$\pi = \min(\mu_{Q_1}, \mu_{Q_2}),$$

где Q_1 и Q_2 - нечеткие множества, ограничивающие область изменения невзаимодействующих переменных X_1 и X_2, то принцип обобщения записывается в виде

$$\pi_f(u) = \begin{cases} \sup\{\min(\mu_{Q_1}(\omega_1), \mu_{Q_2}(\omega_2) \mid f(\omega_1, \omega_2) = u\}, \\ 0, \text{ если } f^{-1}(u) = \varnothing. \end{cases} \quad (3.7)$$

Здесь функция π_f описывает распределение возможностей, ограничивающее область определения переменной $f(X_1, X_2)$, т. е. нечеткое множество, обозначаемое $f(Q_1, Q2)$ с функцией принадлежности

$$\mu_{f(Q_1, Q_2)} = \pi_f .$$

Очевидно, что когда нечеткие множества Q_1 и Q_2 вырождаются в одноточечные множества $\{\omega_1\}$ и $\{\omega_2\}$, то f (Q_1, Q_2) также является одноточечным множеством

$\{f(\omega_1, \omega_2)\}$.

Нечеткое множество $f(Q_1, Q_2)$ можно построить с помощью α-срезов $(Q_1)_\alpha$ и $(Q_2)_\alpha$, поскольку показано, что

$$\forall u,\ \mu_{f(Q_1,Q_2)}(u) = \sup\{\alpha \in (0, 1] \mid u \in f((Q_1)_\alpha, (Q_2)_\alpha)\}. \quad (3.8)$$

Однако в общем случае для любого $\alpha \in (0, 1]$ не выполняется равенство $(f(Q_1, Q_2))_\alpha = f((Q_1)_\alpha, (Q_2)_\alpha)$. Имеем лишь отношение вложенности

$$f((Q_1)_\alpha, (Q_2)_\alpha) \subseteq [f(Q_1, Q_2)]_\alpha. \quad (3.9)$$

В ряде работ показано, что равенство в формуле (3.9) получается тогда, и только тогда, когда в выражении (3.7) верхняя грань достигается для любого $u \in U$.

Более того, если рассматриваются строгие α-уровни, то всегда выполняется равенство

$$f((Q_1)_{\bar{\alpha}}, (Q_2)_{\bar{\alpha}}) = [f(Q_1, Q_2)]_{\bar{\alpha}}. \quad (3.10)$$

Принцип обобщения естественным образом расширяется на случай, когда f является нечетким отношением R, рассматриваемым как многозначная функция, которая каждому элементу ω ставит в соответствие нечеткое множество $f(\omega) \subseteq U$ возможных образов, определяемое так:

$$\forall u, \mu_{f(\omega)}(u) = \mu_R(\omega, u). \quad (3.11)$$

Тогда принцип обобщения записывается в виде

$$\mu_{Q \circ R}(u) = \sup\{\min(\mu_Q(\omega), \mu_R(\omega, u)) \mid \omega \in \Omega\}, \quad (3.12)$$

известном под названием (sup-min)-композиции и обозначаемом символом $\circ$, причем обозначения $Q \circ R$ и f(Q) эквивалентны.

Пусть S — нечеткое отношение, определенное на декартовом произведении $U \times V$. Тогда свойство ассоциативности нечетких отношений записывается в виде

$$(Q \circ R) \circ S = Q \circ (R \circ S),$$

где $R \circ S$— нечеткое отношение на $\Omega \times V$, определяемое как

$$\mu_{R \circ S}(\omega, v) = \sup \{\min(\mu_R(\omega, u)\mu_S(u, v)) \mid u \in U\}.$$

Важный частный случай этого свойства ассоциативности получается, если в качестве R и S берутся однозначные функции f и g, что записывается в виде

$$(g \circ f)(Q) = g(f(Q)).$$

3.4.2. Исчисление нечетких величин при невзаимодействующих переменных

В этом разделе формулируются достаточные условия для выражения a-уровня нечеткой величины f (Q_1, Q_2) в виде функции α-уровней нечетких величин Q_1 и Q_2. Нечеткая величина $f(Q_1, Q_2)$ получается за счет применения принципа обобщения к функции действительных переменных f, которая принимает действительные значения и строится на основе двух невзаимодействующих нечетких величин Q_1 и Q_2. Этот результат позволит нам показать, что исчисление нечетких интервалов является обобщением теории ошибок, а также теории действительных чисел. Более того, оно лежит в основе методов выполнения практических вычислений, которые станут предметом следующего раздела.

3.4.2.1. Основной результат

Предложение 3.1. Пусть M и N — два нечетких интервала с функциями принадлежности, полунепрерывными сверху. Предположим, что для любого α > 0 множества α-уровня M_α и N_α не покрывают собой всего множества действительных чисел $\mathcal{R}$. Пусть f — непрерьюная и изотонная функция из R^2 в $\mathcal{R}$, т. е.

$$\forall u \geqslant u', \ \forall v \geqslant v', \ f(u, v) \geqslant f(u', v').$$

Тогда *множества* α-*уровня нечеткой величины* f (M, N) *являются образами множеств* α-уровня нечетких величин M и N при отображении f. Математически это можно записать так:

$$\forall \alpha > 0, \ [f(M, N)]_\alpha = f(M_\alpha, N_\alpha). \quad (3.13)$$

Если M_α и N_α - замкнутые ограниченные интервалы вида $[\underline{m}_\alpha, \overline{m}_\alpha]$ и

$[\underline{n}_\alpha, \overline{n}_\alpha]$, то $\forall\alpha \in (0, 1]$, $f(M_\alpha, N_\alpha) = [f(\underline{m}_\alpha, \underline{n}_\alpha), f(\overline{m}_\alpha, \overline{n}_\alpha)]$,
т. е. f $(M_\alpha > N_\alpha)$ — замкнутый интервал.

Примечание. Соотношение (3.13) доказано для случая нечетких величин с компактным носителем, когда функция принадлежности полунепрерывна сверху; этот результат остается справедливым и в том случае, когда все множества α-уровня рассматриваемых нечетких величин компактны.

Соотношение (3.13) справедливо также при выполнении следующих условий (в дополнение к ограничению по непрерывности функции f):

функция f определена лишь в некоторой области множества $\mathbb{R}^2$ (тогда рассматриваются сужения функций μ_M и μ_N на эту область);

функция f является антитонной: $u \geqslant u'$ и $v \geqslant v' \Rightarrow f(u, v) \leqslant f(u', v')$

(тогда $f(M_\alpha, N_\alpha) = [f(\overline{m}_\alpha, \overline{n}_\alpha), f(\underline{m}_\alpha, \underline{n}_\alpha)]$, когда M_α и N_α - замкнутые и ограниченные интервалы;

функция f является "гибридной": $u \geqslant u'$ и $v \leqslant v' \Rightarrow f(u, v) \geqslant f(u', v')$

(тогда $f(M_\alpha, N_\alpha) = [f(\underline{m}_\alpha, \overline{n}_\alpha), f(\overline{m}_\alpha, \underline{n}_\alpha)]$, когда M_α и N_α - замкнутые и ограниченные интервалы);

функция f имеет более двух аргументов и является монотонной по каждому из них.

Таким образом, мы видим, что согласно предложению 3.1, если для любого α интервалы M_α и N_α замкнуты и ограничены, то $(f(M, N))_\alpha$ тоже замкнутый и ограниченный интервал. Следовательно, f (M, N) является функцией принадлежности, полунепрерывной сверху. Более того, согласно гипотезам, используемым в предложении 3.1, если M и N - нечеткие интервалы, то f (M, N) - также нечеткий интервал.

Замечательным следствием из предложения 3.1 является то, что функцию f (M, N) можно вычислять, взяв по отдельности, с одной стороны, участки возрастания функций μ_M и μ_N, обозначаемые μ_M^+ и μ_N^+ и определенные на интервалах $[-\infty, \underline{m}_1]$ и $[-\infty, \underline{n}_1]$ соответственно, а с другой стороны - участки убывания функций μ_M и μ_N, обозначаемые μ_M^- и μ_N^- и определенные на интервалах $[\overline{m}_1, +\infty)$ и $[\overline{n}_1, +\infty)$ соответственно. Причем, когда функции f - изотонны или антитонны, интервалы $[\underline{m}_1, \overline{m}_1]$ и $[\underline{n}_1, \overline{n}_1]$ суть множества максимумов M и N.

В таблице, помещенной ниже, представлены четыре возможных случая построения функции f с двумя аргументами.

Функция f(x, y)		Полученная функция $\mu^{+}_{f(M,N)}$	
По аргументу x	По аргументу y		
Возрастающая	Возрастающая	μ^{+}_{M}	μ^{+}_{N}
Возрастающая	Убывающая	μ^{+}_{M}	μ^{-}_{N}
Убывающая	Возрастающая	μ^{-}_{M}	μ^{+}_{N}
Убывающая	Убывающая	μ^{-}_{M}	μ^{-}_{N}

Примечание. **Значение $\mu^{-}_{f(M,N)}$ получается заменой в таблице знака + на знак — и наоборот.**

Такой способ вычисления функции f (M, N) изображен на рис. 20, где рассматривается изотонная функция.

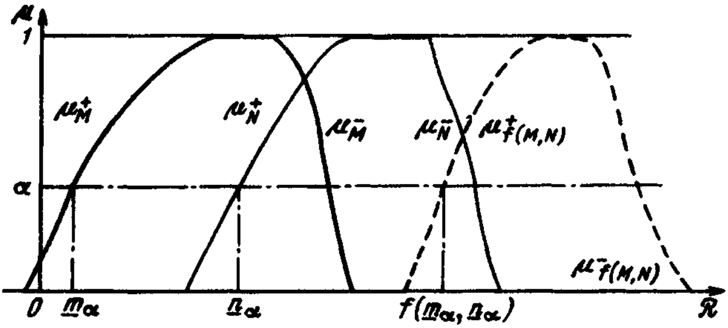


Рис. 20.

Следовательно, когда функции μ_M и μ_N строго монотонны на участках $\mu^{+}_{M}, \mu^{-}_{M}, \mu^{+}_{N}, \mu^{-}_{N}$, можно записать следующие соотношения:

$$\forall w \leqslant f(\underline{m}_1, \underline{n}_1), \mu^{+}_{f(M,N)}(w) = \sup\{\min\{\mu^{+}_{M}(\underline{m}_\alpha), \mu^{+}_{N}(\underline{n}_\alpha)\},$$

$$\alpha \in (0, 1], f(\underline{m}_\alpha, \underline{n}_\alpha) = w\}, \tag{3.14}$$

$$\forall w \in [f(\underline{m}_1, \underline{n}_1), f(\overline{m}_1, \overline{n}_1)], \ \mu_{f(M.N)}(w) = 1, \tag{3.15}$$

$$\forall w \geqslant f(\overline{m}_1, \overline{n}_1), \ \mu^{-}_{f(M,N)}(w) = \sup\{\min\{\mu^{-}_{M}(\overline{m}_\alpha), \mu^{-}_{N}(\overline{n}_\alpha)\},$$

$$\alpha \in (0, 1], \ f(\overline{m}_\alpha, \overline{n}_\alpha) = w\}. \tag{3.16}$$

Если функция f строго изотонна, (т. е. $u > u', v > v' \Rightarrow f(u, v) > f(u', v')$), то при строго возрастающих функциях μ^{+}_{M} и μ^{+}_{N} (строго убывающих функциях μ^{-}_{M} и μ^{-}_{N}) из соотношений (3.14) и (3.16) следует равенство

$$\forall \epsilon \in \{-,+\}, (\mu^{\epsilon}_{f(M,N)})^{-1} = f((\mu^{\epsilon}_{M})^{-1}, (\mu^{\epsilon}_{N})^{-1}). \quad (3.17)$$

Примечание. Формула (3.17) остается справедливой, когда у функций μ_M и μ_N имеются области постоянства; при расширении понятия обратной функции эти участки соответствуют разрывам функций $(\mu^{\epsilon}_{M})^{-1}$ или $(\mu^{\epsilon}_{N})^{-1}$.

Равенство (3.17) четко показывает, что применение принципа обобщения к важному классу числовых функций приводит к простым и очевидным вычислениям. Для отыскания функции f (M, N) достаточно решить следующее уравнение относительно α:

$$w = f((\mu^{\epsilon}_{M})^{-1}(\alpha), (\mu^{\epsilon}_{N})^{-1}(\alpha)), \quad \epsilon \in \{+,-\}. \quad (3.18)$$

Однако даже если уравнение (3.18) трудноразрешимо, то можно довольствоваться:

либо определением обратных функций $\mu^{+}_{f(M,N)}$ и $\mu^{-}_{f(M,N)}$, задаваемых формулой (3.17) в *аналитической форме;* либо дискретизацией интервала [0, 1] и вычислением функции f (M_α, N_α) для конечного числа значений α;

тогда получается квантованная функция принадлежности f(M, N).

Два простых результата позволяют свести вычисление функции f(Q_1, Q_2), где Q_1 и Q_2 — полимодальные нечеткие величины (то есть нечеткие величины, функции принадлежности которых могут иметь более одного участка возрастания (убывания).), к вычислениям на нечетких интервалах.

Предложение 3.2. Пусть Q_1 и Q_2 — нечеткие множества в $\mathfrak{R}$, такие, что $\sup\mu_{Q_1} \leqslant \sup\mu_{Q_2}$. Тогда если $\underline{Q}_2$ — срез Q_2 на уровне $\sup\mu_{Q_1}$, т. е. $\mu_{\underline{Q}_2} = \min(\sup\mu_{Q_1}, \mu_{Q_2})$, то выполняется равенство $\forall f : f(Q_1, Q_2) = f(Q_1, \underline{Q}_2)$ (эффект среза).

Предложение 3.3. Если

$$Q_1 = \bigcup_{i=1,\ldots,m_1} M^1_i,$$

а

$$Q_2 = \bigcup_{j=1,\ldots,m_2} M^2_j,$$

где M^2_j и M^2_i — выпуклые нечеткие множества в пространстве действительных чисел $\mathfrak{R}$, то

$$f(Q_1, Q_2) = \bigcup_{\substack{i=1,\dots,m_1 \\ j=1,\dots,m_2}} f(M^1_i, M^2_j).$$

Нечеткая полимодальная величина является конечным объединением нечетких интервалов (возможно, и не удовлетворяющих условию нормировки). Таким образом, эти два результата позволяют получить функцию $f(Q_1, Q_2)$ как объединение нечетких интервалов, построенных комбинированием каждого из нечетких интервалов, составляющих нечеткое множество Q_l с нечеткими интервалами, составляющими нечеткое множество Q_2. Это комбинирование производится на нечетких интервалах одной и той же высоты за счет эффекта среза.

3.4.2.2. Связь с теорией ошибок

Если две величины Q_1 и Q_2 являются неточно определенными в виде обычных подмножеств множества действительных чисел $\mathfrak{R}$, то величина $f(Q_1, Q_2)$ определяется в виде

$$f(Q_1, Q_2) = \{f(u, v) \mid u \in Q_1, v \in Q_2\}. \tag{3.19}$$

Когда Q_1 и Q_2 — замкнутые интервалы, приходим к теории ошибок, хорошо известной в физике. С появлением новых высокопроизводительных ЭВМ возникла новая волна интереса к теории ошибок, связанная с оценкой ошибок округления аппроксимации). Легко увидеть, что формула (3.19) эквивалентна принципу обобщения (3.7), когда Q_1 и Q_2 — множества действительных чисел. Формула (3.8) показывает, что принцип обобщения в (sup-min)-форме приводит к определению величины $f(Q_1, Q_2)$ в соответствии с теоремой представления (1.36) в виде семейства вложенных множеств $f(Q_{1\overline{\alpha}}, Q_{2\overline{\alpha}})$, которые в случае интервалов получаются с помощью методов теории ошибок. В силу соотношения (3.10) можно столь же успешно использовать семейство множеств $f(Q_{1\overline{\alpha}}, Q_{2\overline{\alpha}})$ для представления функции $f(Q_1, Q_2)$. В этом случае нечеткий интервал Q рассматривается как семейство $\mathcal{Y}(Q)$ доверительных интервалов (множеств строгих α-уровней Q), характеризуемых дополнением степени необходимости к единице, так, чтобы ограничение Q находилось в рассматриваемом множестве строгого уровня. В самом деле, если $S \in \mathcal{Y}(Q)$, то

$$S = Q_{\overline{\alpha}},$$

где α определяется формулой

$$1 - \alpha = N(S) = \inf\{1 - \mu_Q(x) \mid x \notin S\}. \quad (3.20)$$

В дальнейшем мы покажем, что все свойства интервального анализа в случае замкнутых интервалов выполняются и для нечетких интервалов с функциями принадлежности, полунепрерывными сверху. Например, в общем случае имеем свойство монотонности, отмеченное для интервалов

$$Q_1 \subseteq Q_1', Q_2 \subseteq Q_2' \Rightarrow f(Q_1, Q_2) \subseteq f(Q_1', Q_2'). \quad (3.21)$$

Это вновь напоминает о том, что при увеличении неточности исходных данных неминуемо возрастает неточность получаемых по ним результатов.

Ввиду совпадения с результатами интервального анализа данный вариант исчисления нечетких величин может рассматриваться как пессимистический, поскольку $f(Q_1, Q_2)$ - *наибольшее нечеткое множество* (в смысле отношения вложенности (1.43)) при аргументах функции f, ограниченных множествами Q_1 и Q_2 соответственно. Это легко проверить, замечая, что каждое множество α-уровня нечеткого множества $f(Q_1, Q_2)$ в соответствии с формулой (3.19) является наибольшим из всех возможных.

3.4.2.3. Приложение к обычным операциям

Общие результаты, изложенные выше, позволяют выявить интересные свойства обычных операций, в частности четырех арифметических операций, а также операций взятия максимума и минимума.

В первую очередь рассмотрим унарные операции.

Функции одной действительной переменной. Бели f - функция одного аргумента, а Q - нечеткая величина, то функция принадлежности образа f (Q) имеет вид

$$\mu_{f(Q)}(w) = \begin{cases} \sup_{w = f(u)} \mu_Q(u), \\ 0, \text{если } f^{-1}(w) = \varnothing, \\ \mu_Q(f^{-1}(w)), \text{если отображение } f - \text{инъекция} \end{cases} \quad (3.22)$$

(То есть $u_1 \neq u_2 \Rightarrow f(u_1) \neq f(u_2)$.)

Тогда на базе нечеткой величины Q можно определить следующие величины:

f(u)	f(Q)	$\mu_{f(Q)}(u)$
$-u$	$-Q$ (величина, противоположная по знаку)	$\mu_Q(-u)$
λu	λQ (умножение на число)	$\mu_Q(u/\lambda),\ \lambda \neq 0$
$1/u$	$1/Q$ (обратная величина)	$\mu_Q(1/u),\ u \neq 0$
u^p	Q^p (степень)	$\mu_Q(u^{1/p}),\ p \neq 0$
$\lvert u\rvert$	$\lvert Q\rvert$ (абсолютная величина)	$\lvert Q\rvert = (Q \cup -Q) \cap [0, +\infty]$
e^u	e^Q	$\mu_Q(\log(u)),\ u > 0$

Нечеткая величина Q называется положительной, если $\inf S(Q) \geqslant 0$, и отрицательной, если sup S(Q) ≤ 0, где буквой S обозначен носитель нечеткой величины. Примем обозначения $Q \geqslant 0$ и $Q \leqslant 0$, причем строгие неравенства > и < будут использоваться тогда, когда число 0 исключается из носителя нечеткой величины Q. Легко увидеть, что если М — нечеткий интервал, то обратная величина 1/М будет нечетким интервалом лишь тогда, когда исходный интервал либо положителен, либо отрицателен. Величины, определенные выше в таблице, представляют собой обобщения известных определений интервального анализа.

Расширения четырех основных арифметических операций. Прежде всего отметим, что расширение любой коммутативной (ассоциативной) операции коммутативно (ассоциативно).

Расширенная операция сложения $Q_1 \oplus Q_2$ двух нечетких величин определяется формулой

$$\mu_{Q_1 \oplus Q_2}(w) = \sup\{\min(\mu_{Q_1}(u), \mu_{Q_2}(w-u)) \mid u \in \mathcal{R}\}. \tag{3.23}$$

Это — вариант задания свертки нечетких величин в (sup-min)-форме. Множество $\mathcal{J}(\mathcal{R})$ всех нечетких интервалов с полунепрерывными сверху функциями принадлежности вместе с операцией $\oplus$ образует полугруппу с нулевым элементом 0. На множестве действительных чисел операция $\oplus$ совпадает с обычным сложением. В общем случае величина — Q не является обратной к величине Q для операции расширенного сложения $\oplus$, поскольку $(-Q) \oplus Q$ — нечеткое множество, в котором число 0 имеет степень принадлежности 1, но не числом 0. Пара $(\mathcal{J}(\mathcal{R}), \oplus)$ является подполугруппой полугруппы $([0,1]^{\mathcal{R}}, \oplus)$.

Верхнее и нижнее средние значения нечеткой величины Q, обозначаемые $E_*(Q)$ и $E^*(Q)$ (см. формулы (3.2) и (3.3)), удовлетворяют свойству аддитивности для нечетких интервалов с функциями принадлежности, полунепрерывными сверху:

$$E^*(Q_1 \oplus Q_2) = E^*(Q_1) + E^*(Q_2),$$
$$E_*(Q_1 \oplus Q_2) = E_*(Q_2) + E_*(Q_2). \quad (3.24)$$

Равенства (3.24) контрастируют с тем фактом, что если две нечеткие величины Q_1 и Q_2, рассматриваемые как множества вероятностных мер в смысле определения (1.30), свертываются с помощью обычной операции линейной комбинации, то свойство аддитивности математических ожиданий ослабляется за счет появления неравенств для верхнего и нижнего математических ожиданий.

Расширенная операция вычитания $Q_1 \ominus Q_2$ двух нечетких величин определяется в виде

$$\mu_{Q_1 \ominus Q_2}(w) = \sup\{\min(\mu_{Q_1}(w+u), \mu_{Q_2}(u)) \mid u \in \mathcal{R}\}. \quad (3.25)$$

Легко убедиться, что $Q_1 \ominus Q_2 = Q_2 \oplus (-Q_2)$.

Расширенная операция умножения $Q_2 \odot Q_2$ двух нечетких величин определяется в виде

$$\mu_{Q_1 \odot Q_2}(w) = \begin{cases} \sup\{\min(\mu_{Q_1}(u), \mu_{Q_2}(w/u)) \mid u \in \mathcal{R} - \{0\}, \text{если } w \neq 0; \\ \max(\mu_{Q_1}(0), \mu_{Q_2}(0)), \text{если } w = 0. \end{cases} \quad (3.26)$$

Множество положительных нечетких интервалов $\mathcal{J}(\mathcal{R}^+)$ с функциями принадлежности, полунепрерывными сверху, вместе с расширенной операцией умножения $\odot$ образует полугруппу с единичным элементом 1. На множестве действительных чисел операция $\odot$ совпадает с обычным умножением. Величина 1/Q не является обратным элементом, обеспечивающем существование группы, поскольку произведение $Q \odot 1/Q$— нечеткое множество, содержащее 1 со степенью 1, но не число 1. Число 0 — поглощающий элемент для операции $\odot$. Наконец, множно проверить, что

$$Q_1 \odot Q_2 = (-Q_1) \odot (-Q_2),$$
$$(-Q_1) \odot Q_2 = Q_1 \odot (-Q_2) = -(Q_1 \odot Q_2).$$

В общем случае не выполняется свойство дистрибутивности расширенной операции умножения $\odot$ по отношению к расширенному сложению $\oplus$. Здесь имеем ослабленный вариант дистрибутивности :

$$Q_1 \odot (Q_2 \oplus Q_3) \subseteq (Q_1 \odot Q_2) \oplus (Q_1 \odot Q_3). \quad (3.27)$$

Свойство дистрибутивности выполняется по крайней мере в следующих случаях:

а) Q_1 —действительное число;

б) Q_1, Q_2, Q3 — нечеткие интервалы с функциями принадлежности, полунепрерывными сверху, причем интервалы Q_2 и Q_3 — либо оба отрицательны, либо оба положительны;

в) Q_1, Q_2, Q3 — нечеткие интервалы с функциями принадлежности, полунепрерывными сверху, причем Q_2 и Q_3 — симметричные нечеткие интервалы

$$(Q_2 = -Q_2, Q_3 = -Q_3).$$

Эти результаты получаются за счет использования формулы (3.13) и являются обобщением классических результатов интервального анализа.

Расширенная операция деления $Q_1 \odot Q_2$ двух нечетких величин определяется в виде

$$\mu_{Q_1 \odot Q_2}(w) = \sup\{\min(\mu_{Q_1}(u \cdot w), \mu_{Q_2}(u)) \mid u \in \mathcal{R}\}. \qquad (3.28)$$

Здесь имеем $Q_1 \odot Q_2 = Q_1 \odot 1/Q_2$. Когда величины Q_1 и Q_2 - одного и того же знака (обе положительны или обе отрицательны) и Q_1 и Q_2 - нечеткие интервалы, частное $Q_1 \odot Q_2$ также является нечетким интервалом.

Расширение операций взятия минимума и максимума. Интересно узнать, имеют ли смысл операции взятия максимума или минимума двух интервалов, расширенные с помощью принципа обобщения.

Функции $g_1(s, t) = \max(s, t)$ и $g_2(s, t) = \min(s,t)$ являются изотонными на декартовом произведении $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$, что легко позволяет их расширить, поскольку

$$\max([a, a'] [b, b']) = [\max(a, b), \max(a', b')],$$

$$\min([a, a'], [b, b']) = [\min(a, b), \min(a', b')],$$

откуда очевиден способ построения операций $\widetilde{\max}(M, N)$ и $\widetilde{\min}(M, N)$, где символами $\widetilde{\max}$ и $\widetilde{\min}$ обозначены расширенные по принципу обобщения операции (рис. 21), а M и N - нечеткие интервалы с функциями принадлежности, полунепрерывными сверху.

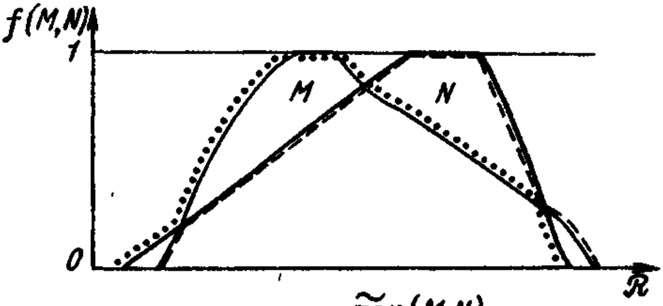


Рис. 21

Заметим, что результат операции $\widetilde{\max}(M, N)$ может не совпадать ни с M, ни с N. Операции $\widetilde{\max}$ и $\widetilde{\min}$ - коммутативны и ассоциативны, причем — $\widetilde{\max}(M, N) = \widetilde{\min}(-M, -N)$.

Расширенные операции $\widetilde{\max}$ и $\widetilde{\min}$ взаимно дистрибутивны на множестве нечетких интервалов $\mathcal{Y}(\mathcal{R})$ и удовлетворяют следующим свойствам:

$$\widetilde{\min}(M, N) \oplus \widetilde{\max}(M, N) = M \oplus N,$$

$$M \oplus \widetilde{\min}(N, P) = \widetilde{\min}(M \oplus N, M \oplus P),$$

$$M \oplus \widetilde{\max}(N, P) = \widetilde{\max}(M \oplus N, M \oplus P),$$

$$\widetilde{\max}(M, N) = M \text{ тогда, и только тогда, когда } \widetilde{\min}(M, N) = N,$$

$$\widetilde{\max}(M, M) = M, \quad \widetilde{\min}(M, M) = M.$$

3.4.2.4. Задача об эквивалентных представлениях функции

Функция действительных переменных математически может быть представлена различными способами. Пусть f и g — две функции, такие, что f = g на множестве действительных чисел $\mathcal{R}$. Легко видеть, что когда их аргументы становятся нечеткими величинами, то в общем случае эти функции не равны между собой (f ≠ g). Данный случай встречается при рассмотрении свойства дистрибутивности произведения нечетких интервалов относительно их суммы; в ряде работ он отмечен в контексте обычного интервального анализа.

Например, пусть f — некоторая функция двух переменных x и y, а g — функция четырех переменных x_1 x_2, x_3, x_4, такая, что $\forall x, y, f(x, y) = g(x, x, x, y)$. В общем случае имеем отношение включения

$$f(Q_1, Q_2) \subseteq g(Q_1, Q_1, Q_1, Q_2), \tag{3.29}$$

но не равенство значений этих функций. Непосредственную иллюстрацию этого положения можно получить, выбрав $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_1, x_4) - x_2 + x_3$, так как $f(Q_1, Q_2) \ominus Q_2 \oplus Q_1 \supset f(Q_1, Q_2)$ в силу того, что $Q_1 \ominus Q_1 \neq 0$.

Функция g называется несобственным представлением функции f в той мере, насколько часто одна и та же переменная появляется в выражении для функции g при том, что эта же переменная входит лишь один раз в выражение для функции f. Соотношение (3.29) является общим для тех случаев, когда используются несобственные представления.

Выражение $g(Q_1, Q_1, Q_1, Q_2)$ содержит неопределенность в том смысле, что различные переменные x_1, x_2, x_3, не связанные между собой ограничением типа равенства, могут иметь одну и ту же нечеткую область возможных значений Q_1. Отметим, наконец, что различные нечеткие области с необходимостью соответствуют различным переменным, но обратное утверждение неверно.

Заметим, что результат, получаемый при использовании несобственного представления функции, строго говоря, не является ложным. В самом деле, согласно формуле (3.29) он содержит действительный результат.

В ряде работ показано, что когда рассматриваются функции действительных переменных, принимающие действительные значения, то для нечетких интервалов с функциями принадлежности, полунепрерывными сверху, равенство в формуле (3.29) достигается, если g-изотонное несобственное представление изотонной функции f. Например, функция $f(x_1, x_4) - x_2 + x_3$ не является изотонной, даже если функция f изотонна. Зато обе функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2 + x_3) \text{ и } g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4,$$

определенные на множестве положительных действительных чисел, изотонны; этим объясняется тот факт, что для положительных нечетких интервалов сохраняется свойство дистрибутивности расширенного произведения $\odot$ относительно расширенной суммы $\oplus$.

Наконец, отметим, что для нечетких интервалов с полунепрерывными сверху функциями принадлежности равенство $M \oplus M = 2M$ всегда справедливо, тогда как равенство $M \odot M = M^2$ выполняется лишь для положительных или отрицательных значений M. В самом деле, имеем $S(M^2) \subseteq \mathcal{R}^+$, в то время как если $M = M_+ \cup M_-$, где $S(M_-) \subseteq \mathcal{R}^-$, $S(M_+) \subseteq \mathcal{R}^+$, то $M \odot M = M_+^2 \cup M_-^2 \cup$ $\cup (M^+ \odot M^-) = M^2 \cup (M^+ \odot M^-)$ и $S(M^+ \odot M^-) \subseteq \mathcal{R}^-$.

Замечание. Условие $Q \oplus Q = 2Q$ в общем случае не выполняется для полимодальных нечетких величин. Например, $2\{0, 1\} = \{0, 2\}$, но $\{0, 1\} \oplus \{0, 1\} = \{0, 1, 2\}$.

В заключение отметим, что если в некотором представлении функции f ее аргументы x_1 и x_2 появляются однократно, то это представление обеспечит "хорошую" функцию принадлежности для f(Q_1, Q2). Такое представление не всегда существует — например, для функции $f(x, y, z) = xy + yz + zx$, где каждый из аргументов появляется дважды. Тем не менее для нечетких интервалов с полунепрерывными сверху функциями принадлежности два изотонных представления всегда оказываются эквивалентными.

3.4.3. Практическое вычисление нечетких интервалов

В этом разделе мы покажем, что во многих случаях вычисление нечетких интервалов может порой без всякой аппроксимации сводиться к их параметрическому представлению и вычислению соответствующих параметров.

3.4.3.1. Параметрическое представление нечеткого интервала

Хорошее параметрическое представление нечеткого интервала $M \in \mathcal{Y}(\mathcal{R})$ с полунепрерывной сверху функцией принадлежности получается при использовании двух типов функций $\mathcal{R}^+ \to [0, 1]$, обозначаемых буквами L или R: L — убывающая в широком смысле функция, полунепрерывная сверху и удовлетворяющая условиям:

$$L(0) = 1, \text{ а также } \forall u > 0, L(u) < 1, \forall u < 1, L(u) > 0,$$
$$L(1) = 0 \text{ или } L(u) > 0, \forall u \text{ и } L(+\infty) = 0.$$

Функция L (или R), удовлетворяющая этим условиям, называется функцией представления формы.

Рассмотрим нечеткие интервалы М с функциями принадлежности, полунепрерывными сверху и выражаемыми с помощью двух функций L, R и четырех параметров $(\underline{m}, \overline{m}) \in R^2$ и $\alpha, \beta \geqslant 0$ в виде

$$\mu_{M}(u) = \begin{cases} L\left(\frac{\underline{m} - u}{\alpha}\right) \text{ при } u \leqslant \underline{m}; \\ 1 \text{ при } \underline{m} \leqslant u \leqslant \overline{m}; \\ R\left(\frac{u - \overline{m}}{\beta}\right) \text{ при } u \geqslant \overline{m}. \end{cases} \qquad (3.30)$$

Этот класс нечетких интервалов является очень общим, поскольку он содержит все нормальные нечеткие интервалы с компактным (а значит, ограниченным) носителем и, вообще говоря, включает все нечеткие интервалы, функции принадлежности которых удовлетворяют условиям

$$\lim_{x \to +\infty} \mu_M(x) \in \{0, 1\}; \ \lim_{x \to -\infty} \mu_M(x) \in \{0, 1\}; \ \overset{\circ}{M} \neq \varnothing.$$

На рис. 22 изображены нечеткие интервалы трех возможных форм: колоколообразные кривые, неубьюающие функции, невозрастающие функции.

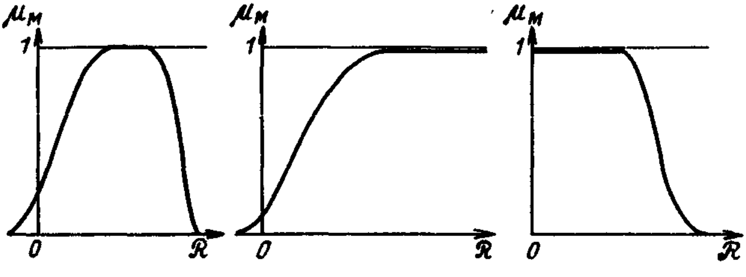


Рис. 22

Здесь интервал $[\underline{m}, \overline{m}]$ является ядром нечеткого интервала М, а величины $\underline{m}$ и $\overline{m}$ называются соответственно нижним и верхним модальными значениями нечеткого интервала М. Интервал $[\underline{m} - \alpha, \overline{m} + \beta]$ является носителем нечеткого интервала М (если M обладает ограниченным носителем). Параметры α и β называются левым и правым коэффициентами нечеткости соответственно .

Итак, нечеткий интервал можно представить в виде четверки параметров

$$M = (\underline{m}, \overline{m}, \alpha, \beta)_{LR}. \tag{3.31}$$

При этом говорят, что M является нечетким интервалом (L-R)-типа.

Примеры.

1. M — действительное число $m \in \mathcal{R}$. Тогда, по определению,

$$M = (m, m, 0, 0)_{LR}, \ \forall L, \forall R.$$

2. M = [a, b), тогда по определению

$$M = (a, b, 0, 0)_{LR}, \ \forall L, \forall R.$$

3. Нечеткий интервал M имеет трапециевидную форму, тогда в формуле (3.31) используются функции вида .

$$L(u) = R(u) = \max(0, 1 - u).$$

4. Нечеткий интервал M такой, что $\forall u \geqslant \underline{m}, \mu_M(u) = 1.$

Тогда

$$M = (\underline{m}, +\infty, \alpha, +\infty)_{LR}, \forall R.$$

5. M — нечеткое число. Тогда $\underline{m} = \overline{m} = m$ и получаем

$$M = (m, \alpha, \beta)_{LR}.$$

В качестве функций представления формы могут браться

$$L(u) = \max(0, 1 - u)^p, L(u) = \max(0, 1 - u^p) \text{ при } p > 0,$$

$$L(u) = e^{-u}, L(u) = e^{-u^2} \text{ и т. д.}$$

3.4.3.2. Точные практические вычисления четырех арифметических операций

Если $M = (\underline{m}, \overline{m}, \alpha, \beta)_{LR}$ и $N(\underline{n}, \overline{n}, \gamma, \sigma)_{LR}$, то задача решения уравнения

(3.18) для получения f (M, N) в случае изотонной функции f принимает вид: найти значение $\lambda \in (0, 1]$, такое, что

$$w = \begin{cases} f(\underline{m} - \alpha \cdot L^{-1}(\lambda),\ \underline{n} - \gamma \cdot L^{-1}(\lambda)), \text{если } w \leqslant f(\underline{m}, \underline{n}); \\ f(\overline{m} + \beta \cdot R^{-1}(\lambda),\ \overline{n} + \delta \cdot R^{-1}(\lambda), \text{если } w \geqslant f(\overline{m}, \overline{n}). \end{cases}$$

Вычисления сводятся к решению двух уравнений относительно $L^{-1}(\lambda)$ и $R^{-1}(\lambda)$ соответственно, причем их сложность зависит только от сложности одного уравнения относительно u вида

$$x = f(a + bu, c + du). \tag{3.32}$$

В частности имеем:

для $f(u, v) = u + v$ (изотонная функция на $\mathcal{R}^2$) уравнения первого порядка, если M и N — нечеткие интервалы (L-R)-типа:

$$M \oplus N = (\underline{m} + \underline{n}, \overline{m} + \overline{n}, \alpha + \gamma, \beta + \delta)_{LR}; \tag{3.33}$$

для $f(u, v) = u - v$ (гибридная функция на $\mathcal{R}^2$) уравнения первого порядка, если M и N —нечеткие интервалы противоположного типа (LR и RL) соответственно:

$$M \ominus N = (\underline{m} - \overline{n}, \overline{m} - \underline{n}, \alpha + \delta, \beta + \gamma)_{LR}. \tag{3.34}$$

Таким образом, получаем теорему инвариантности для суммы нечетких чисел: если $\mathcal{J}_{LR}(\mathcal{R})$ — множество нечетких интервалов, построенных по функциям L и R с использованием аффинных преобразований по формуле (3.30), т. е. представляет собой множество так называемых нечетких интервалов (L-R)-типа, то справедливо следующее.

Предложение 3.4.

Если $M, N \in \mathcal{J}_{LR}(\mathcal{R})$, то $M \oplus N \in \mathcal{J}_{LR}(\mathcal{R})$; если $M \in \mathcal{J}_{LR}(\mathcal{R})$, $N \in \mathcal{J}_{RL}(\mathcal{R})$, то $M \ominus N \in \mathcal{J}_{LR}(\mathcal{R})$. Это свойство инвариантности гораздо сильнее свойства инвариантности, полученного для сумм случайных переменных, где инвариантны лишь некоторые распределения, например нормальные (гауссовы).

Легко провести сравнение основных параметров распределений, полученных в вероятностном и нечетком случаях, когда сами распределения нормальны.

Сумма двух нормальных случайных величин, имеющих средние значения m и n, а стандартные отклонения σ_m и σ_n соответственно, —

нормальная случайная величина со средним значением m + n и стандартным отклонением $\sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_n^2}$.

Сумма двух гауссовых нечетких чисел (где $L(u) = R(u) = e^{-u^2}$), имеющих модальные значения m и n соответственно, и коэффициенты нечеткости $\sigma_m + \sigma_n > \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_n^2}$, — гауссово нечеткое число с модальным значением m + n и левым и правым коэффициентами нечеткости, равными $\alpha = \beta = \sigma_m$, $\gamma = \delta = \sigma_n$, причем в общем случае $\sigma_m + \sigma_n > \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_n^2}$.

Замечание. Сложение нечетких интервалов позволяет в удобной форме представлять нечеткие отношения близости между действительными числами. В самом деле, пусть P — нечеткое отношение, определяемое функцией

$$\mu_P(u, v) = \begin{cases} 1, \text{ если } |u - v| < \epsilon; \\ L\left(\dfrac{|u - v| - \epsilon}{\eta}\right), \text{ если } |u - v| \geq \epsilon. \end{cases}$$

Нечеткое множество чисел, близких к нечеткомv интервалу M в смысле отношения P, когда $M = (\underline{m}, \overline{m}, \alpha, \beta)_{LL}$, определяется с помощью (sup-min)-композиции (см. (3.12)) как $M \circ P$, каким бы ни было отношение P. Когда отношение P задается в вышеприведенной форме, практически вычислить $M \circ P$очень просто, так как

$$M \circ P = M \oplus E, \text{ где } E = (-\epsilon, +\epsilon, \eta, \eta)_{LL};$$

$$M \circ P = (\underline{m} - \epsilon, \overline{m} + \epsilon, \alpha + \eta, \beta + \eta)_{LL}.$$

Этот результат легко обобщается на случай, когда L≠R, если соответствующим образом изменить отношение P.

Предложение 3.4 не справедлизо для произведения и частного нечетких интервалов, однако уравнение (3.32) остается простым и дает: для $f(u, v) = u \cdot v$ (изотонная функция на $(R^+)^2$ при M > 0, N > 0 уравнения второй степени, если M и N — нечеткие интервалы (L-R) -типа; например, для $w \leq \underline{m} \cdot \underline{n}$ получаем

$$\mu_{M \cdot N}(w) = L\left(\frac{\underline{n}\alpha + \underline{m}\gamma - \sqrt{(\underline{m}\gamma - \underline{n}\alpha)^2 + 4\alpha\gamma w}}{2\alpha\gamma}\right); \quad (3.35)$$

для $f(u, v) = u/v$ (гибридная функция напри $(R^+)^2$) M >0, N> 0, когда M — нечеткий интервал (L-R)-типа, а N — нечеткий интервал (R-L)-типа, уравнение (3.32) первой степени; например, для $w \leqslant \leqslant \underline{m}/\overline{n}$ получаем

$$\mu_{M \odot N}(w) = L\left(\frac{\underline{m} - w\overline{n}}{\alpha + w\delta}\right). \tag{3.36}$$

Уравнения второй степени получаются также при вычислении сумм вида $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i M_i \odot N_i$, где M_i и N_i — положительные нечеткие

интервалы (L-R)-типа, а α_i —действительные числа одного знака.

Зато для точного определения функции принадлежности произведения $\prod_{i=1}^{p} M_i$, где M_i — положительные нечеткие интервалы, требуется решение уравнений p-й степени.

3.4.3.3. Приближенное вычисление функций нечетких интервалов

Если функцию f (M, N) нельзя рассчитать аналитически, ее можно вычислить либо поточечно (см. разд. 3.4.2.1), либо при непрерывных функциях L и R с помощью приближенных формул, которые дают (L-R) -аппроксимацию искомого результата.

Если функция f дифференцируема, то, полагая $u = L^{-1}(\lambda) > 0, w \leqslant f(\underline{m}, \underline{n})$ и пользуясь разложением функции в ряд с точностью до второго порядка в окрестности $\lambda = 1$, уравнение (3.32) можно записать в виде

$$w = f(\underline{m}, \underline{n}) - f'_X(\underline{m}, \underline{n})\, u \cdot \alpha - f'_Y(\underline{m}, \underline{n})\, u \cdot \gamma$$

(в случае изотонной функции).

Это уравнение первой степени по u, где f'_X и f'_Y — частные производные функции f. Таким образом, если M и N — нечеткие интервалы (L-R)-типа, а f — изотонная функция, то в окрестности ядра получаем (L-R) -аппроксимацию функции f (M, N) в виде

$$f_1(M, N) = (f(\underline{m}, \underline{n}), f(\overline{m}, \overline{n}), f'_X(\underline{m}, \underline{n})\alpha + \\ + f'_Y(\underline{m}, \underline{n})\gamma, f'_X(\overline{m}, \overline{n})\beta + f'_Y(\overline{m}, \overline{n})\delta)_{LR}. \tag{3.37}$$

Формула (3.37) обобщает формулы для вычисления произведения и частного нечетких интервалов, а также подчеркивает внутреннюю связь между исчислением нечетких интервалов и теорией ошибок.

Легко видеть, что $f(\underline{m}, \underline{n})$ и $f(\overline{m}, \overline{n})$ — точки касания функций $\mu_{f_1(M,N)}$ и $\mu_F(M,N)$.

Точно так же можно построить аппроксимации функции f (M, N) в любой другой точке, соответствующей λ-уровню нечеткого интервала, записывая ее разложение в ряд в окрестности $L^{-1}(\lambda)$. В результате имеем функцию $f_\lambda(M, N)$. Особый интерес представляют выражения вида $f_0(M, N)$, получаемые при разложении функции f (M, N) в окрестности ее носителя (если он ограничен).

Другой способ аппроксимации заключается в следующем: надо выбрать нечеткий интервал (L-R)-типа с тем же носителем и тем же ядром, что у функции нечетких интервалов f(M, N), и положить (если носители M и N ограничены)

$$\tilde{f}(M, N) = (f(\underline{m}, \underline{n}), f(\overline{m}, \overline{n}), f(\underline{m}, \underline{n}) - f(\underline{m} - \alpha, \underline{n} - \gamma), f(\overline{m} + \beta, \overline{n} + \delta) - f(\overline{m}, \overline{n}))_{LR}. \quad (3.38)$$

В отличие от формулы (3.37) формула (3.38) применима для f(x, y) = min(x, y) или f (x, y) = max(x, y).

В некоторых случаях $\mu_f(M, N)$, $\mu_{f_0}(M, N)$ и $\mu_{\tilde{f}}(M, N)$ определяют два криволинейных треугольника, содержащих $\mu_{f(M,N)}$, что позволяет посчитать допущенную ошибку этих аппроксимаций.

3.4.4. Некоторые методы вычислений с нечеткими величинами

В разд. 3.4.3.2 и 3.4.3.3 предполагалось, что все нечеткие величины в вычисляемых выражениях соответствуют невзаимодействующим переменным. Когда это не справедливо, принцип обобщения требуется видоизменить так, чтобы учесть взаимодействие переменных. В первой части этого раздела рассматривается случай, когда это взаимодействие линейно. Отсутствие связи между переменными ведет к накоплению неточности от каждой отдельной нечеткой переменной, причем возрастание неточности невозможно компенсировать. В таких случаях расчет нечетких величин называется *пессимистическим.* Во второй части этого раздела излагаются основы *оптимистического* расчета нечетких величин, когда степень компенсации между различными источниками неточности максимальна. Соответствующие методы возникли в связи с решением уравнений с нечеткими величинами.

3.4.4.1. Расчет нечетких величин с взаимодействующими переменными

Ранее при отыскании области изменения функции f(x, y) предполагалось, что переменные x и y не связаны между собой, т. е. область изменения пары (x, y) — это декартово произведение нечетких интервалов M×N, определенное с помощью оператора min.
Если это не так, то существует связь между переменными x и y из $\mathbb{R}$ в форме отношения D, определяющего некоторую область в $\mathbb{R}^2$. Тогда принцип обобщения принимает вид

$$\forall w, \mu_{f(M,N;D)}(w) = \sup\{\min(\mu_M(u), \mu_N(v)) : w = f(u, v), (u, v) \in D\}. \quad (3.39)$$

Здесь отношение D может в частном случае сводиться к функциональной связи типа g (x, y) = 0.
Замечание. Отметим, что вычисление функции f (M, N) на основе несобственного представления способом, изложенным ранее, является частным случаем использования формулы (3.39). Например, вычисление M^2 можно рассматривать как вычисление расширенного произведения M⊙M, где обе переменные x и y, характеризующие две возможности появления M, связаны между собой ограничением вида равенства.
Можно также вообразить случай, когда D — нечеткое отношение, определяющее более или менее допустимые области значений пары (x, y). Тогда формулу (3.39) можно записать так:

$$\forall w, \mu_{f(M,N;D)}(w) = \sup\{\min(\mu_M(u), \mu_N(v), \mu_D(u, v)) \mid f(u, v) = w\}. \quad (3.40)$$

Изучение свойств и тем более вычисление функции f (M, N, D) в общем случае может вызывать большие затруднения. Поэтому ниже дается представляющий практический интерес пример расчета с взаимодействующими переменными, когда это взаимодействие линейно и возможны анализ и вычисление функции f(M, N, D).
Заданы n переменных $X_1, \ldots, X_n$, каждая из которых ограничена нечетким интервалом M_i, i = 1, .. ., n. Требуется найти функцию распределения возможностей для переменной $Z = a_1X_1 + \ldots + a_nX_n$, где a_i — постоянные действительные коэффициенты, если известно, что переменные X_i связаны между собой ограничением $X_1 + X_2 + \ldots + X_n = 1$, определяющим область D.
Пусть N - нечеткое множество возможных значений Z. В ряде работ показано, что

$$\sup \mu_N = \mu_{M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_N}.$$

Если это значение меньше 1, то можно в соответствии с предложением 3.2 при вычислении N заменить μ_{M_i} величиной $(\mu_{M_i}, \sup \mu_N)$. Здесь условие $\sup \mu_N = 1$ означает, что существует такой вектор (u_1,..., u_n), принадлежащий декартову произведению ядер нечетких интервалов M_i, который удовлетворяет ограничению

$$\sum_i u_i = 1.$$

Если M_i —нечеткие интервалы с функциями принадлежности, полунепрерывными сверху, и компактным носителем, то N — нечеткий интервал с функцией принадлежности, полунепрерывной сверху, и N_λ вычисляется по $M_{i\lambda}$, $\forall \lambda \in (0, 1]$. При этом границы интервала N_λ можно определить в явном виде как функцию границ интервалов $M_{i\lambda}$, $i = 1, \ldots, n$. Например, если

$$0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \text{ и } M_{i\lambda} = [b_i, B_i],$$

то $\forall \lambda \leqslant \sup \mu_N$:

$$\inf N_\lambda = \max_{k=1,\ldots,n} \left(\sum_{j=1}^{k-1} B_j a_j + \left(1 - \sum_{j=1}^{k-1} B_j - \sum_{j=k+1}^{n} b_j\right) a_k + \sum_{j=k+1}^{n} b_j a_j \right); \tag{3.41}$$

$$\sup N_\lambda = \min_{k=1,\ldots,n} \left(\sum_{j=1}^{k-1} b_j a_j + \left(1 - \sum_{j=1}^{k-1} b_j - \sum_{j=k+1}^{n} B_j\right) a_k + \sum_{j=k+1}^{n} B_j a_j \right). \tag{3.42}$$

Если все M_i - нечеткие интервалы (L-L)-типа, то, когда нечеткий интервал N нормален, он также является нечетким интервалом (L-L)-типа. Если $M_i = (\underline{m}_i, \overline{m}_i, \alpha_i, \beta_i)_{LL}$, то $N = (\inf \overset{\circ}{N}, \sup \overset{\circ}{N}, \gamma, \delta)$, где значения γ и δ определяются из условий $\inf S(N) = \inf \overset{\circ}{N} - \gamma$ и $\sup S(N) = \sup \overset{\circ}{N} + \delta$ соответственно. В формулах (3.41) и (3.42) $B_j = \overline{m}_j + \beta_j$, $b_j = \underline{m}_j - \alpha_j$, буквой S обозначен носитель, а символ ° означает ядро.

В случае, когда переменные X связаны между собой каким-то линейным отношением, простой заменой переменной типа $y_i = k_i x_i$ соответствующее выражение можно привести к нормальной форме $\sum y_i = 1$.

Существует алгоритм вычисления величины N, когда a_j — нечеткие интервалы с распределениями μ_{A_j}. Показано, что:
если M_i и A_i — положительные нечеткие интервалы с полунепрерывными сверху функциями принадлежности и компактным носителем, то величина N (интерактивная сумма произведений нечетких интервалов) — также положительный нечеткий интервал с полунепрерывной сверху функцией принадлежности, а множество уровня N_α получается на основе множеств уровня $M_{i\alpha}$ и $A_{i\alpha}$;
величина inf N_α определяется по формуле (3.41), если положить $a_j = \inf A_{j\alpha}$, а величина sup N_α — по формуле (3.42), если положить $a_j = \sup A_{j\alpha}$.

Большой интерес к расчету величины N объясняется открывающейся возможностью оценки математических ожиданий в тех случаях, когда значения вероятностей точно не известны. Тогда эти значения рассматриваются как нечеткие интервалы с носителем на [0, 1], связанные с переменными X_i, которые должны удовлетворять условию нормировки вероятностей $\sum_i X_i = 1$.

3.4.4.2. Расчет нечетких величин с невзаимодействующими переменными

Прежде всего заметим, что равенство A = B двух выражений A и B, содержащих нечеткие величины, понимается как равенство соответствующих функций принадлежности. Следовательно, величина неточности — одна и та же для обоих членов равенства. Законный, допустимый перенос нечеткой части выражения A в правую часть выражения B может осуществляться только с помощью некоторой операции, которая одновременно снижает неточность в члене B. Однако операции над нечеткими величинами, введенные выше в данной главе, не позволяют компенсировать ошибки и, следовательно, не обеспечивают уменьшения неточности.
Например, уравнение по X

$$X \ominus M = N, \tag{3.43}$$

где M, N и X - нечеткие интервалы с полунепрерывными сверху функциями принадлежности, не будет иметь своим решением $X = M \oplus N$, так как согласно (3.43) интервал X — более точен, чем N. Это связано с отсутствием "настоящего" обратного элемента для нечеткой величины (в смысле расширенного сложения).

Тем не менее уравнение (3.43) иногда имеет решения. В самом деле, оно соответствует функциональному уравнению по μ_X

$$\forall v \in \mathcal{R},\ \sup\{\min(\mu_X(w), \mu_M(u)) \mid w - u = v\} = \mu_N(v).$$

Отметим, что $\mu_N(v) \wedge^{-1} \mu_M(u)$ есть наибольшее (по вложенности) решение уравнения $\min(\mu_X(w), \mu_M(u) = \mu_N(v))$, когда это решение существует, оно равно

$$\mu_N(v) \wedge^{-1} \mu_M(u) = \begin{cases} 1, \text{ если } \mu_M(u) = \mu_N(v); \\ \mu_N(v), \text{ если } \mu_M(u) > \mu_N(v). \end{cases}$$

Должно выполняться условие

$$\forall v, \mu_X(w) \leqslant \mu_N(v) \wedge^{-1} \mu_M(w - v).$$

Таким образом, когда существует наибольшее в смысле отношения вложенности (1.43) решение уравнения (3.43), оно записывается в виде

$$\mu_X(w) = \inf_{v \in \mathcal{R}} \mu_N(v) \wedge^{-1} \mu_M(w - v). \tag{3.44}$$

Формулу (3.44) удобно интерпретировать в случае, когда M и N — нечеткие числа (R-L)-типа и (L-R)-типа соответственно, имеющие полунепрерывные сверху функции принадлежности. Воспользовавшись формулой (3.34), легко видеть, что

$$X = (m + n, \gamma - \beta, \delta - \alpha)_{LR}, \tag{3.45}$$

где $M = (m, \alpha, \beta)_{RL}$ и $N = (n, \gamma, \delta)_{LR}$.

В данном случае существование и единственность решения обеспечивается, как только выполняются условия $\gamma \geqslant \beta$ и $\delta \geqslant \alpha$.

Формула (3.45) определяет операцию сложения нечетких чисел, когда степень компенсации неточности максимальна, что находит свое выражение в самом факте вычитания, а не сложения коэффициентов нечеткости. В чистом виде уравнения типа (3.43) представляют весьма ограниченный практический интерес из-за использования в них обычного отношения равенства, которое носит чересчур жесткий характер, если вспомнить, что значения принадлежности не всегда точно известны. Равенство в формуле (3.43) можно "ослабить", заменив его отношением вложенности нечетких множеств, которое все-таки остается несколько "жестковатым" для уравнений с нечеткими величинами, или (что еще лучше) использовав некоторый показатель включения, например описываемый формулой (1.66). Последний подход будет применяться далее для проведения сравнения двух нечетких величин.

3.4.5. Иллюстративные примеры

3.4.5.1. Оценивание денежных средств в бюджете

В рамках составления проекта бюджета рассматриваются различные источники финансирования, причем некоторые из них характеризуются неточностью оценки денежных сумм на день оценивания, а другие — малой надежностью. В нашем примере берутся четыре источника финансирования, обозначаемые буквами А, В, С и D.

Источник А: надежен и точен, ожидаемая сумма 100 тыс. гривен.

Источник В: финансирование обеспечивается, его сумма может изменяться от 40 тыс. до 100 тыс. в зависимости от конъюнктуры, но с наибольшейвероятностью можно ожидать поступления размером от 50 тыс. до 70 тыс. гривен.

Источник С: разумно полагать, что финансирование будет предоставлено и составит сумму 100 — 110 тыс. гривен, но решение пока не принято и нельзя полностью исключить вариант отказа от финансирования.

Источник D: очень ненадежен потому, что новый и неустойчивый. Можно ожидать поступления размером 20 тыс. гривен и выше, но в любом случае не больше 30 тыс. гривен.

Различные источники финансирования можно представить с помощью нечетких величин с распределениями, изображенными на рис.3.5.

Каждая нечеткая величина рассматривается здесь как объединение трапециевидных и не обязательно нормальных нечетких интервалов. Каждый из этих нечетких интервалов M_i представлен пятеркой

$$M_i = (\underline{m}_i, \overline{m}_i, \alpha_i, \beta_i, h_i),$$

где $\underline{m}_i$ и $\overline{m}_i$ — соответственно нижнее и верхнее модальные значения нечеткого интервала M_i; α_i и β_i — левый и правый коэффициенты нечеткости, а h_i — высота нечеткого интервала (рис. 3.6). В соответствии с этими обозначениями нечеткие величины, связанные с различными источниками финансирования, представляются в виде

$$A = (100, 100, 0, 0, 1); \quad B = (50, 70, 10, 30, 1);$$
$$C = C_1 \cup C_2 = (0, 0, 0, 0, 0{,}5) \cup (100, 110, 0, 0, 1);$$
$$D = D_1 \cup D_2 = (0, 0, 0, 0, 1) \cup (20, 20, 0, 10, 0{,}8).$$

Использовав результаты, полученные в разд. 3.3, заметим, что нечеткая величина $\mathbf{M_i} \oplus \mathbf{M_j}$, где $\mathbf{M_i}$, $\mathbf{M_j}$ — два трапециевидных нечетких интервала, подобных изображенным на рис. 3.6, есть также трапециевидный нечеткий интервал $(\underline{\mathbf{m}}, \overline{\mathbf{m}}, \alpha, \beta, \mathbf{h})$, где $\mathbf{h} = \min(\mathbf{h_i}, \mathbf{h_j})$ (эффект среза);

$$\alpha = h\left(\frac{\alpha_i}{h_i} + \frac{\alpha_j}{h_j}\right); \quad \beta = h\left(\frac{\beta_i}{h_i} + \frac{\beta_j}{h_j}\right);$$

$$\underline{m} = \underline{m}_i + \underline{m}_j - \alpha_i - \alpha_j + \alpha; \quad \overline{m} = \overline{m}_i + \overline{m}_j + \beta_i + \beta_j - \beta.$$

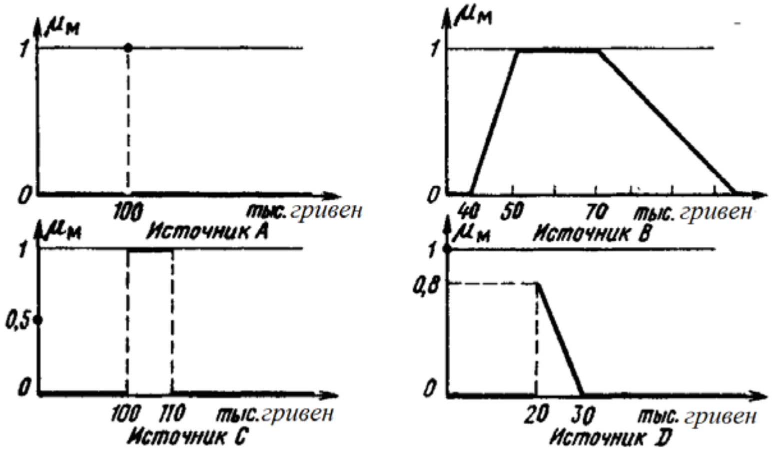


Рис. 3.5

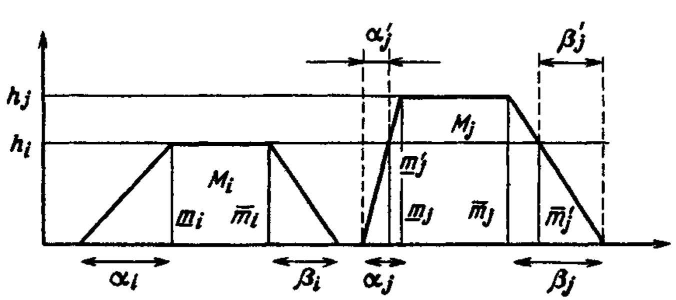


Рис. 3.6

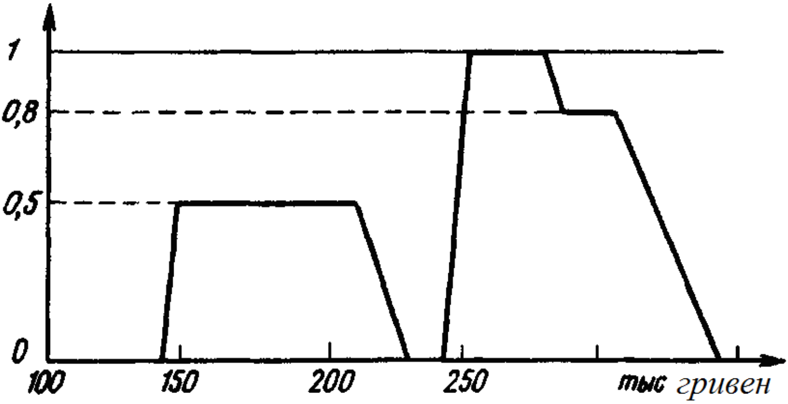


Рис. 3.7

Сумма $\mathbf{S} = \mathbf{A} \oplus \mathbf{B} \oplus \mathbf{C} \oplus \mathbf{D}$ получается как объединение (см. предложение 2.3).

В нашем примере получаем

$$\mathbf{S} = (250, 280, 10, 30, 1) \cup (145, 185, 5, 15, 0{,}5) \cup (165, 209, 5, 21, 0{,}5) \cup$$
$$\cup (268, 306, 8, 34, 0{,}8).$$

Этот результат показан на рис. 3.7.

В соответствии с полученным результатом область наиболее вероятного финансирования простирается в диапазоне 250 — 280 тыс. гривен; превышение суммы в 280 тыс. гривен возможно, но менее вероятно (уровень 0,8); маловероятно и то, что поступления не составят более 150 — 200 тыс. гривен (уровень 0,5). В любом случае они не могут опуститься ниже 140 тыс. гривен или подняться выше 340 тыс. гривен. Отметим, что уровни 0,5 и 0,8 при описании источников С и D выглядят несколько произвольными, но указывают, что более вероятно (со степенью 0,8) получить 20 тыс. гривен от источника D, чем ничего не получить от источника С (со степенью 0,5). Эти значения не сворачиваются в одно и вновь появляются в конечном результате. Следовательно, вовсе не обязательно знать их точно. Важно как раз то, что они различны и могут служить своего рода метками, облегчающими толкование конечного результата.

3.4.5.2. Сетевое планирование (расчет по методу PERT) с нечеткими оценками продолжительности работ

Рассматривается классическая задача организации проекта, разбитого на отдельные работы. Множество работ образует семейство дуг некоторого ориентированного графа без циклов. Эти дуги отражают ограничения на порядок следования работ, причем каждой дуге приписывается определенное значение d_{ij} продолжительности выполнения соответствующей работы. Известны самый ранний срок начала проекта t_0 и при необходимости — самый поздний срок его окончания T_w. Таким образом, здесь используется представление типа "потенциал - этапы".

Бьюают ситуации, когда сроки выполнения работ априори плохо известны и оцениваются субъективно. Их можно естественным образом представить в виде нечетких интервалов. Обозначим через D_{ij} нечеткую продолжительность выполнения работы, характеризуемой дугой (i, j) в графе (S, A), где i и j — вершины графа.

Для расчета самого раннего срока начала и самого позднего срока окончания работ в общем случае поступают следующим образом:

нумеруют вершины графа по возрастающим рангам;

получают самый ранний срок начала выполнения группы работ, исходящих из вершины i, с помощью следующей формулы:

$$t_i = \begin{cases} \max\{t_j + d_{ji} \mid j \in P_i\}, \text{ если } P_i \neq \varnothing; \\ t_0, \text{ если } P_i = \varnothing, \end{cases}$$

где $P_i = \{j, (j, i) \in A\}$- множество работ, предшествующих i-й работе.

Упорядочение вершин обеспечивает выполнение условия

$$\forall j \in P_i = \varnothing, \ i < i.$$

Самый ранний срок окончания проекта $t_w = \max\{t_i \mid i \in S\}$.

Точно так же получается самый поздний срок начала работ с исходной вершиной i:

$$T_i = \begin{cases} \min\{T_j - d_{ij} \mid j \in S_i\}, \text{ если } S_i \neq \varnothing; \\ T_w, \text{ если } S_i = \varnothing, \end{cases}$$

где $S_i = \{j \mid (i,j) \in S\}$ — множество работ, следующих за i-й работой.

Упорядочение вершин обеспечивает выполнение условия $\forall j \in S_i, \ j > i.$ Интервал $[t_i, T_i]$ определяет для каждой вершины *резерв* времени начала работ, исходящих из вершины i (конца работ, входящих в вершину i), так, чтобы самый поздний срок окончания работ по проекту не нарушался. Если $T_i = t_i$, то i-я вершина расположена на критическом пути, т. е. на пути, целиком состоящем из критических работ критическими считаются работы, задержка которых приводит к соответствующей задержке окончания всего проекта). Если выбрать значение $T_w \geqslant t_w$, где t_w -самый ранний срок окончания проекта, то $\forall i, T_i \geqslant t_i$.

Когда продолжительности работ точно не известны и представлены нечеткими интервалами, то этот алгоритм остается справедливым при замене операций сложения, вычитания, максимизации, минимизации их расширениями на случай нечетких аргументов (разд. 3.4.3.2 и 3.4.3.3, работы.

В программе можно найти процедуры, реализующие указанные операции на нечетких интервалах (L-R)-типа. Для операций максимизации и минимизации используется вариант аппроксимации с использованием формулы (3.38). Если $M = (\underline{m}, \overline{m}, \alpha, \beta)_{LR}$, а $N = (\underline{n}, \overline{n}, \gamma, \delta)_{LR}$, то

$\widetilde{\max}(M, N) \cong (\max(\underline{m}, \underline{n}), \max(\overline{m}, \overline{n}), \max(\underline{m}, \underline{n}) - \max(\underline{m} - \alpha, \underline{n} - \gamma), \max(\overline{m} + \beta, \overline{n} + \delta) - \max(\overline{m}, \overline{n}))_{LR}$. Эта приближенная операция еще сохраняет свойство ассоциативности. Расширенная операция $\widetilde{\min}(M, N)$ получается точно так же заменой максимума на минимум в вышеприведенном выражении. На практике рассматриваются трапециевидные нечеткие интервалы. Становится возможным прямое обобщение алгоритма расчета самого раннего и самого позднего сроков наступления событий благодаря тому, что в нашем случае его результаты суть монотонные функции данных; следовательно, можно избежать проблем, связанных с несобственными представлениями этих результатов (разд. 3.4.2.4).

Рассмотрим пример, изображенный на рис. 3.8, со следующими нечеткими оценками продолжительности работ:

i, j	D_{ij}	i, j	D_{ij}
1,2	(2, 3, 0, 1)	3,4	(1, 2, 0, 0)
1,3	(3, 3, 1, 3)	3,6	(8, 11, 1, 4)
1,5	(3, 4, 1, 1)	4,5	(3, 3, 1, 2)
2,4	(2, 4, 0, 1)	4,6	(3, 4, 0, 2)
2,5	(4, 5, 2, 3)	5,6	(1, 1, 0, 1)

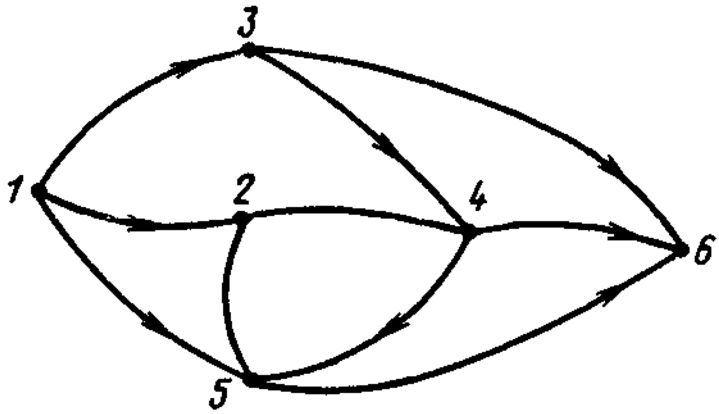


Рис. 3.8.

Зададимся самым ранним сроком начала проекта t_0 = (1, 1, 1, 1) и самым поздним сроком его окончания T_w = (20, 21, 1,0). Легко получить следующие результаты:

Вершина	Самый ранний срок начала работ	Самый поздний срок начала работ
1	(1, 1, 1, 1)	(6, 10, 8, 2)
2	(3, 4, 1, 2)	(12, 15, 5, 1)
3	(4, 4, 2, 4)	(9, 13, 5, 1)
4	(5, 8, 1, 3)	(16, 17, 4, 1)
5	(8, 11, 2, 5)	(19, 20, 2, 0)
6	(12, 15, 3, 8)	(20, 21, 1, 0)

Например, время

$$t_4 = \widetilde{\max}(t_2 \oplus d_{24}, t_3 \oplus d_{34}) = \widetilde{\max}(3, 4, 1, 2) \oplus (2, 4, 0, 1),$$

$$(4, 4, 2, 4) \oplus (1, 2, 0, 0)) = \widetilde{\max}((5, 8, 1, 3), (5, 6, 2, 4)) = (5, 8, 5 - \max(4, 3),$$

$$\max(11, 10) - \max(8, 6)) = (5, 8, 1, 3).$$

Интервал $[t_i, T_i]$ становится интервалом, ограниченным нечеткими величинами; критичность вершины i становится в большей или меньшей степени неопределенной в зависимости от того, насколько накладываются друг на друга нечеткие числа t_i и T_i. Например, такое наложение наблюдается для вершины 1. Понятие критического пути обсуждается далее.

Замечания: 1. Когда данные являются точными, вершины, лежащие на критическом пути, определяются расчетом самого позднего срока работ из условия равенства срока окончания проекта T_w самому раннему возможному сроку окончания проекта t_w. Тогда вершина, расположенная на критическом пути, находится из условия $t_i = T_i$. При анализе неточных данных такая процедура уже не имеет смысла, так как величина t_w отражает неточность данных о продолжительности работы D_{ij}. Поскольку эта неточность может возрастать, имеется риск ее двукратного учета при вычислении T_i из условия $T_w = t_w$. Следовательно, здесь необходимо определять величину T_w независимо от величины t_w.

2. Другой подход к той же задаче сетевого планирования с неточно известными данными заключается в рассмотрении величин продолжительности работ D_{ij} как случайных переменных. Однако в силу возникновения проблем зависимости между различными путями графа, а следовательно, и между переменными, связанными с величинами t_i и T_i, известные алгоритмы поиска кратчайшего или, наоборот, длиннейшего пути трудно приспособить к вероятностным исходным данным. Известно, что построение вероятностного аналога метода PERT — труднорешаемая проблема, в то время как вышеизложенный подход, основывающийся на нечетких величинах, оказывается более простым для практической реализации благодаря тому, что в нем рассматриваются наихудший и наилучший случаи, а также потому, что в силу результатов, полученных в разд. 3.4.2.4, стандартный алгоритм сетевого планирования в применении к нечетким данным дает точные распределения возможностей для t_i и T_i .

3.4.5.3. Задача регулировки станка

Операция механической обработки в общем случае определяется прохождением режущего инструмента или сверла по поверхности металлической детали. Основные параметры регулировки — скорость резания и перемещение режущего инструмента (подача), которые прямо определяют качество продукта операции. Основные ограничения на эти параметры относятся к способу использования инструмента, динамике станка, состоянию обрабатываемой поверхности и т. д. Для отдельной операции механической обработки задача регулировки может рассматриваться как задача оптимизации, где критерием оптимизации может быть стоимость операции, количество снимаемого металла и т. д.. При этом специалист способен очень быстро определить для заданной операции области значений скорости и перемещения режущего инструмента, которые позволят получить заданное качество детали.

Эта задача осложняется, если должны регулироваться параметры группы одновременно действующих станков, размещенных в виде последовательности рабочих мест. Тогда имеются еще два дополнительных ограничения: для обеспечения требований производительности линия механической обработки должна функционировать в определенном ритме, одном и том же на каждом рабочем месте. К тому же желательно обеспечить равномерный средний износ инструментов, чтобы заранее планировать их замену. Специалисту приходится определять это ощупыванием вплоть до отыскания удовлетворительных параметров регулировки, удовлетворяющих ограничению по темпу работы. В общем случае ему трудно определить величину износа. Поэтому предложен интерактивный метод расчета с целью оказания помощи человеку в регулировке станка. В качестве исходных данных для расчета берутся диапазоны значений подачи и скорости резания, оцениваемые специалистом (экспертом) в виде нечетких интервалов. Использование нечетких интервалов позволяет установить для каждой операции по каждому регулируемому параметру предпочтительную область для обеспечения требуемого качества резания и допустимую область, за пределы которой нельзя выходить. Таким образом получаем ядро и носитель нечеткого интервала. Форму функции принадлежности можно уточнить с помощью проверки возможности отклонения от предпочтительной области.

Рассмотрим рабочее место, на котором выполняется единственная операция i. Пусть V_i и A_i — нечеткие интервалы, характеризующие скорость резания v_i и подачу s_i соответственно. Зависимость времени выполнения операции t_i от этих двух параметров выражается формулой

$$t_i = \frac{K_i}{a_i \cdot v_i},$$

где K_i — постоянная величина, зависящая от геометрических характеристик заготовки. Значения принадлежности

$$\mu_{V_i}(v_i) \text{ и } \mu_{A_i}(a_i)$$

интерпретируются как меры качества резания.

Тогда задачу регулировки параметров механической обработки с учетом ограничения на темп работы можно сформулировать следующим образом: максимизировать величину

$$\min(\mu_{V_i}(v_i), \mu_{A_i}(a_i)),$$

при ограничении $K_i/\underline{a}_i\underline{v}_i = \hat{t}$, где $\hat{t}$ — задаваемый темп работы на конкретном рабочем месте. Выбор операции пересечения нечетких интервалов в виде min выражает логическую конъюнкцию целей.
Оптимальное решение

$$(a_i^*, v_i^*)$$

Удовлетворяет равенству

$$\mu_{V_i}(v_i^*) = \mu_{A_i}(a_i^*) = \mu_{K_i/(A_i \odot V_i)}(\hat{t}) = \lambda_i^*,$$

где значение $K_i/(A_i \odot V_i)$ определяется в рамках исчисления нечетких интервалов. Отсюда получается оптимальная степень λ_i^*,для которой всякое увеличение скорости резания ведет к ухудшению подачи, и наоборот. Значения v_i* и a_i* легко определяются по известным значениям λ_i^*. Если $\lambda_i^* = 1$, то, обозначая через $[\underline{a}_i, \overline{a}_i]$, $[\underline{v}_i, \overline{v}_i]$ предпочтительные области значений подачи и скорости резания, имеем более одной разрешенной регулировки, например

$$a_i^* \in [\underline{a}_i, \overline{a}_i] \cap [\frac{K_i}{\hat{t} \cdot \overline{v}_i}, \frac{K_i}{\hat{t} \cdot \underline{v}_i}].$$

В противном случае для $A_i = (\underline{a}_i, \overline{a}_i, \alpha_i, \beta_i)_{LR}$ имеем

$$a_i^* = \begin{cases} \underline{a}_i - \alpha_i \cdot L(\lambda_i^*), \text{если } \hat{t} > \dfrac{K_i}{\underline{a}_i \cdot \underline{v}_i}; \\ \overline{a}_i + \beta_i \cdot R(\lambda_i^*), \text{если } \hat{t} < \dfrac{K_i}{\overline{a}_i \cdot \overline{v}_i}. \end{cases}$$

Если величина λ_i^* очень мала, то отсюда следует вывод, что заданный темп несовместим с требуемым качеством резания.
В качестве примера рассмотрим операцию расточки цилиндра длиной L = 200 мм и диаметром D = 100 мм. Расточка проводится в два прохода:
разметка с большим допуском по условиям резания, например A_1 = (0,4,0,8,0,2,0,2) мм; V_1 = (80,90, 10,30) м/мин;

отделка с более точными характеристиками подачи и более высокой скоростью резания, например A_2 = (0,5,0,5,0,3,0,1) мм и V_2 = (110, 120,20, 10) м/мин.

Эти две операции выполняются последовательно на двух рабочих местах с темпом $\hat{t} = 0{,}9$ **мин.** Имеем $K_1 = K_2 = L\pi D$ ($L\pi D$ — величина обрабатываемой поверхности).

Используя точную формулу произведения двух нечетких интервалов (L-R)-типа) и замечая, что

$$\mu_{K_i/(A_i \odot V_i)}(\hat{t}) = \mu_{A_i \odot V_i}\left(\frac{K_i}{\hat{t}}\right),$$

получаем следующие результаты:

при разметке

$\lambda_1^* = 1$ **и** $a_1^* \in [0,78,\ 0{,}8]$ **мм, а** $v_1^* \in [87, 90]$ **м/мин,**

если только $a_1^* \cdot v_1^* = K_1/\hat{t}$;

следовательно, таким образом получено уточнение спецификаций; при отделке $\lambda_2^* = 0,44$, $a_2^* = 0{,}55$ **мм и** $v_2^* = 125{,}5$ **м/мин.**

Примеры решения типовых задач

Операции над нечеткими величинами

Сложение нечетких величин.

1. Выполним операцию сложения двух треугольных нечетких величин, которые описаны следующими ФП:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x/3 + 2/3, & -2 \le x \le 1; \\ -x/5 + 6/4, & 1 < x \le 6; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} x/2 - 1/2, & 1 \le x \le 3; \\ -x/1 + 4/1, & 3 < x \le 4; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В первую очередь определим α-сечения в терминвх ЛСТ и ПСТ функций:

$\alpha = a_1^\alpha/3 + 2/3;$

$\alpha = -\, a_2^\alpha/5 + 6/5;$

$\alpha = b_1^\alpha/2 - 1/2;$

$\alpha = -b_2^\alpha + 4.$

Теперь, решая эту систему уравнений для верхней и нижней границы обеих нечетких величин, получаем:
$a_1^\alpha = 3\alpha\text{-}2$;
$a_2^\alpha = -5\ \alpha + 6$;
$b_1^\alpha = 2\ \alpha + l$;
$b_2^\alpha = -\ \alpha + 4$.

Следовательно, α-сечение для нечетких величин $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ может быть представлено как:
$A_\alpha = (3\ \alpha\ -2,\ -5\ \alpha\ +6)$;
$B_\alpha = (2\ \alpha\ +1,\ -\ \alpha\ +4)$.
Тогда сумма $\tilde{A}_\alpha$ и $\tilde{B}_\alpha$ имеет вид:

$A_\alpha(+)B_\alpha=[(3\alpha\ -2)+(2\alpha+1),\ (-5\alpha+6)+(-\ \alpha\ +4)=(5\ \alpha\ -1{,}6\ \alpha\ +10)$.

Для того, чтобы найти *x,* необходимо использовать определения верхней и нижней границ α-сечения:

$$x = a_1^\alpha + b_1^\alpha = 5\alpha - 1;$$
$$x = a_2^\alpha + b_2^\alpha = - 6\alpha + 10.$$

Определяя α, соответственно получаем ЛСТ и ПСТ функции для суммы нечетких величин:

$\alpha = x/5 + 1/5;$
$\alpha = - x/6 + 10/6.$

В данном случае формирования ФП суммы двух нечетких величины почти завершено. Осталось лишь найти области изменения значений ЛСТ и ПСТ. Для определения нижнего значения области для ЛСТ необходимо приравнять ЛСТ функцию к нулю и найти *x.* Аналогично, для определения верхнего значения необходимо приравнять эту функцию к единице и найти *x:*

$$0 = x/5 + 1/5, \quad x=-1;$$
$$1 = - x/6 + 10/6, \quad x=4.$$

Таким образом, полученные границы ЛСТ следующие: $-1 \le x \le 4$.

Для нахождения нижнего значения области для ПСТ функции необходимо приравнять ее к единице и найти *x.* Определение верхнего значения для этой функции сводится к приравниванию ее к нулю и нахождению *x:*

$$1 = - x/6 + 10/6, \quad x=4.$$
$$0 = - x/6 + 10/6, \quad x=10.$$

Вычитание нечетких величин.

2. Рассмотрим пример вычитания нечетких величин, которые описываются следующими функциями принадлежности:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x/5 - 5/5, & 5 \le x \le 10; \\ -x/2 + 12/2, & 10 < x \le 12; \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} x/3 - 2/3, & 2 \le x \le 5; \\ -x/5 + 10/5, & 5 < x \le 10; \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для произвольного α-сечения имеем

a_1^α=5α+5; a_2^α =— 2α+2; b_1^α=3α+2; b_2^α = - 5α +10.

Для того, чтобы вычесть $\tilde{B}$ из $\tilde{A}$ сначала находим изображение для α-сечения:

$\tilde{B}_{\bar{\alpha}}$ =[-b_2^α, -b_1^α]=[5α-10, -3α-2].

Затем прибавляем $\tilde{B}$ к $\tilde{A}$ для α-сечения:

[a_1^α - b_2^α, a_2^α - b_1^α] =[5α+5+5α -10, - 2α+12-3α -2] =[10α -5, - 5α +10].

Теперь находим ЛСТ и ПСТ функции:

x = 10α — 5, откуда α = *x* /10 + 5/10;

x = — 5 α+10, откуда α = — *x*/5 + 10/5.

Приравнивание ЛСТ и ПСТ функций соответственно к нулю и к единице дает значения (-5,0) и (1,5) для ЛСТ и (5,1) и (10,0) для ПСТ функций.

Полная ФП разности тогда имеет вид:

$$\mu_{\tilde{A}(-)\tilde{B}}(x) = \begin{cases} x/10 + 5/10, & -5 \le x \le 5; \\ -x/5 + 10/5, & 5 < x \le 10; \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Умножение нечетких величин.

3. Пусть $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — две положительные нечеткие величины с ФП

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x/3 - 1/3, & 1 \le x \le 4; \\ -x/2 + 6/2, & 4 \le x \le 6; \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases} x-2, & 2\le x\le 3;\\ -x/3+6/3, & 3<x\le 6;\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Для произвольного α -сечения имеем:

a_1^{α} =3α+1; a_2^{α} = —2α+6; b_1^{α}=α+2; b_2^{α} = - 3α +6.

Используя определение операции умножения нечетких величин

$A_{\alpha}(\bullet)B_{\alpha} = [a_1^{\alpha} a_2^{\alpha}]\ [b_1^{\alpha} b_2^{\alpha}]=[a_1^{\alpha}\ b_1^{\alpha}, a_2^{\alpha} b_2^{\alpha}]$.

запишем:

$A_{\alpha}(\bullet)B_{\alpha} =[a_1^{\alpha} b_1^{\alpha}, a_2^{\alpha} b_2^{\alpha}]=$

=[(3α+1)(α+2, (- 2α+6) (- 3α+6)]=[3α^2+7α+2,6α $^{2\text{-}30}$α+36].

В отличие от операций сложения и вычитания определение ЛСТ и ПСТ функций требует решения квадратных уравнений:

x=3α^2+7α+2; x = 6α $^{2\text{-}30}$α+36. (*)

Для нахождения α преобразуем уравнение (*) так:

3α^2+7α+(2 — x) =0, 6α$^{2\text{-}30}$α+(36 — x) = 0. (**)

Оставляя лишь корни, которые находятся в интервале [0, 1], из уравнения (**) можно получить:

α=(—7+$\sqrt{25+12x}$)/6, α=(30—$\sqrt{36+24x}$)/12.

Границы области ЛСТ и ПСТ функций также определяются приравниванием этих функций к нулю и к единице и определением x. Для ЛСТ функции имеем:

а) α=(—7+$\sqrt{25+12x}$)/6=0, откуда x=2;

б) α=(—7+$\sqrt{25+12x}$)/6= 1, откуда x=12.

Аналогично для ПСТ функции:

а) α=(30—$\sqrt{36+24x}$)/12= 1, откуда x=12

б) α=(30—$\sqrt{36+24x}$)/12= 0, откуда x= 36.

Нечеткая величина, являющаяся произведением $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ в пространстве R^+, имеет вид

$$\mu_{\tilde{A}(\bullet)\tilde{B}}(x)=\begin{cases} (-7+\sqrt{25+12x})/6, & 2\le x\le 12;\\ (30-\sqrt{36+24x})/12, & 12<x\le 36;\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Умножение нечеткой величины на скаляр.

4. Пусть $\widetilde{A}$ — нечеткая величина, описываемая ФП в соответствии с уравнением

$$\mu_{\widetilde{A}}(x)=\begin{cases} x/3-1/3, & 1\le x\le 4;\\ -x/2+6/2, & 4\le x\le 6;\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

$k=2$. Тогда

kA_α = [2,2](•)[3α+1, -2α+6]=[6α+2, -4α+12].

Определим ЛСТ и ПСТ функции:

x=6α+2, α = x/6 - 2/6; (*)

x = —4α+12, α=-x/4 + 12/4. (**)

Решение уравнения (*) при α= 0; 1 дает границы области ЛСТ: $2\le x\le 8$.

Решение уравнения (**) при α=1; 0 дает границы области ПСТ: $8\le x\le 12$.

Тогда полная ФП имеет вид

$$\mu_{k\bullet\widetilde{A}}(x)=\begin{cases} x/6-2/6, & 2\le x\le 8;\\ -x/4+12/4, & 8< x\le 12;\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Деление нечетких величин.

5. Пусть $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ следующие:

$$\mu_{\widetilde{A}}(x)=\begin{cases} x/3-3/3, & 3\le x\le 6;\\ -x/4+10/1, & 6< x\le 10;\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

$$\mu_{\widetilde{B}}(x)=\begin{cases} x/2-1/2, & 3\le x\le 3;\\ -x/1+4/1, & 3< x\le 4;\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Для произвольного α-сечения имеем:

$a^\alpha{}_1$=3α+3; $a^\alpha{}_2$=—4α+0; $b^\alpha{}_1$=—2α +1; $b^\alpha{}_2$ = — α + 4.

Инверсия $\widetilde{B}$ для α-сечения имеет вид

$$\widetilde{B}_\alpha^{-1}=[1/b^\alpha{}_2,\ 1/b^\alpha{}_1]=\left[\frac{1}{-\alpha+4},\frac{1}{2\alpha+1}\right].$$

Умножение $\tilde{A}$ на $\tilde{B}^{-1}$ на любом α - уровне дает

$$\tilde{A}(\bullet)\tilde{B}^{-1}=[a^{\alpha}_{1/}\,b^{\alpha}_{2},\,a^{\alpha}_{2/}\,b^{\alpha}_{1}]=\left[\frac{3\alpha+3}{-\alpha+4},\frac{-4\alpha+10}{2\alpha+1}\right].$$

Затем определяются ЛСТ и ПСТ функции:

x=(3α+3)/(—α+4), откуда α=(4x—3)/(x+3);

x=(—4α+10)/(2α+1), откуда α=(10 -x)/(2x+4).

Приравнивая ЛСТ и ПСТ функций последовательно к нулю и к единице, получаем:

а) для ЛСТ функции

при α=0 x=¾, при α=1 x=6/3;

б) для ПСТ функции

при α =1 x=6/3, при α=0 x = l0/1.

Тогда полная ФП для $\tilde{A}(:)\tilde{B}$ следующая:

$$\mu_{\tilde{A}(:)\tilde{B}}(x)=\begin{cases}(4x-3)/(x+3), & 3/4\le x\le 6/3;\\ (10-x)/(2x+4), & 6/3<x\le 10/1;\\ 0 & \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Квадратный корень из треугольной нечеткой величины.

6. Пусть $\tilde{A}$ — нечеткая величина в пространстве R^{+}, функция принадлежности которой описывается уравнением

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}x/3-1/3, & 1\le x\le 4;\\ -x/2+6/2, & 4<x\le 6;\\ 0 & \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Для произвольного α-сечения имеем:

a^{α}_{1}=3α+1; a^{α}_{2} = — 2α + 6.

Чтобы удовлетворить условию извлечения квадратного корня запишем

$A_{\alpha}^{1/2}(\bullet)A_{\alpha}^{1/2} = A_{\alpha} = [a^{\alpha}_{1},\ a^{\alpha}_{2}]$

Используя методику умножения двух нечетких величин, получаем

$A_{\alpha}^{1/2}(\bullet)A_{\alpha}^{1/2} = [a^{1/2\alpha}_{1}\, a^{1/2\alpha}_{1},\ a^{1/2\alpha}_{2}\, a^{1/2\alpha}_{2}]$,

откуда

$a^{1/2\alpha}_{1}\, a^{1/2\alpha}_{1}=a^{\alpha}_{1},\quad a^{1/2\alpha}_{2}\, a^{1/2\alpha}_{2}=a^{\alpha}_{2}.$

Следовательно,

$a^{1/2\alpha}_{1}=\pm\, a^{\alpha}_{2}$ или $\pm\,[a^{\alpha}_{2}]^{1/2}$,

$a^{1/2\alpha}_{2}=\pm\, a^{\alpha}_{2}$ или $\pm[a^{\alpha}_{2}]^{1/2}$.

Продолжая аналогично, запишем

$a^{1/2\alpha}_{1}=\pm\,[a^{\alpha}_{1}]^{1/2}\pm(3\alpha+1)^{1/2}$,

$a^{1/2\alpha}_{2}=\pm\,[a^{\alpha}_{1}]^{1/2}\pm(-\,2\alpha+6)^{1/2}$.

Решение четырех последующих уравнений относительно α дает ЛСТ и ПСТ функции для двух «нечетких квадратных корней»:

а) $x = (3\alpha+1)^{1/2}$ ()

$x=(— 2\alpha + 6)^{1/2}$ ()

для положительного нечеткого квадратного корня

б) $x =— (3\alpha+1)^{1/2}$ (&)

$x=— (— 2\alpha + 6)^{1/2}$ (&&)

для отрицательного нечеткого квадратного корня.

Таким образом, ЛСТ и ПСТ функции для положительного и отрицательного квадратных корней имеют вид:

$\alpha =(x^2 —1)/3;$ (*)

$\alpha = (— x^2 +6)/2$ (**)

Для получения ФП квадратного корня последовательно приравняем уравнения (*) и (**) к нулю и к единице и найдем верхнюю и нижнюю границы областей для ЛСТ и ПСТ функций:

$0= (x^2 — 1)/3$, откуда $x = \pm 1$;

$1= (x^2 — 1)/3$, откуда $x = \pm 2$;

$1=(— x^2 + 6)/2$, откуда $x = \pm 2$;

$0=(- x^2 + 6)/2$, откуда $x = \pm \sqrt{6}$.

Следовательно, ФП положительных и отрицательных квадратных корней на $\tilde{A}$ соответственно равны:

$$\mu_{\tilde{A}^{1/2}}(x) = \begin{cases} (x^2-1)/3, & 1 \le x \le 2; \\ (-x^2+6)/2, & 2 < x \le \sqrt{6}; \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (+)$$

$$\mu_{\tilde{A}^{1/2}}(x) = \begin{cases} (-x^2+6)/2, & -\sqrt{6} \le x \le -2; \\ (x^2-1)/3, & -2 < x \le -1; \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (++)$$

Для подтверждения того, что функции принадлежности (+), (++) действительно соответствуют квадратному корню из $\tilde{A}$, вычислим квадраты этих величин для α-сечения.

Для положительного квадратного корня

$\tilde{A}_\alpha^{1/2}(\bullet)\,\tilde{A}_\alpha^{1/2} =[a_{11/2}^{\alpha}\, a_{11/2}^{\alpha},\ a_{21/2}^{\alpha}\, a_{21/2}^{\alpha}]$. (***)

Подставляя (*) и (**) в (***), получаем

$[(3\alpha+1)^{1/2}(3\alpha+1)^{1/2}, (-2\alpha+6)^{1/2}(-2\alpha+6)^{1/2}] = [(3\alpha+1), (-2\alpha +6)] =[a_1^{\alpha},\ a_2^{\alpha}]= A_\alpha$.

Для отрицательного квадратного корня

$-\tilde{A}_{\alpha}{}^{1/2}(\bullet)-\tilde{A}_{\alpha}{}^{1/2}$ =[-$a_{11/2}{}^{\alpha}$ -$a_{11/2}{}^{\alpha}$, -$a_{21/2}{}^{\alpha}$ -$a_{21/2}{}^{\alpha}$]. (****)

Подставляя () и () в (****), имеем

[(-(3α+1)$^{1/2}$)(-(3α+l)$^{1/2}$), (-(-2α+6)$^{1/2}$)(-(-2α+6)$^{1/2}$)] =

=[(3α+1), (-2α+6)] =[$a_1{}^{\alpha}$, $a_2{}^{\alpha}$]= A_{α}.

Нечеткие максимум и минимум

Пример 7. Пусть $\tilde{A}_1$ есть $\widetilde{\min}\ (\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)$, а $\tilde{A}_2$ $\widetilde{\max}\ (\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)$. Тогда пропорции вычисляются несколько легче (рис. 2.37):

$$MP(\tilde{A}_1)=\frac{S_1}{3}=\frac{\int_5^7\left[\frac{x}{3}\right]dx+\int_7^9\left[\frac{-x}{3}+\frac{9}{3}\right]dx}{3}=\frac{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{3}=0{,}44,$$

$$MP(\tilde{A}_2)=\frac{3}{3}=1;$$

$$mp(\tilde{A}_1)=\frac{3}{3}=1;\quad mp(\tilde{A}_2)=\frac{S_1}{3}=\frac{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{3}=0{,}44.$$

Используя алгоритм, представленный в табл. 2.1, и учитывая то , что

$$MP(\tilde{A}_1)<MP(\tilde{A}_2) \text{ и } mp(\tilde{A}_1)>mp(\tilde{A}_2),$$

имеем $(\tilde{A}_1)<(\tilde{A}_2)$.

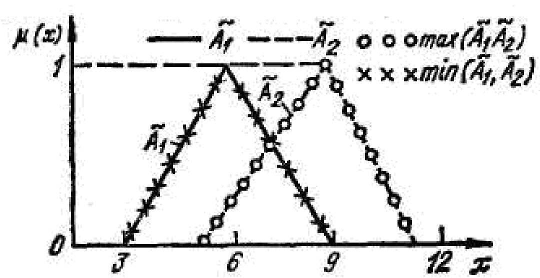


Рис. 2.37.

Пример 8. На рис. 2.38 приведены функции $\widetilde{\max}\ (\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)$, и $\widetilde{\min}\ (\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)$. Расчет пропорций для обеих нечетких величин следующий:

$$MP(\tilde{A}_1) = \frac{S_2 + S_3}{3} = \frac{1+1}{3} = 0,67;\; MP(\tilde{A}_2) = \frac{S_2}{1} = \frac{1}{1} = 1;$$

$$mp(\tilde{A}_1) = \frac{S_1 + S_2}{3} = \frac{1+1}{3} = 0,67;\; mp(\tilde{A}_2) = \frac{S_2}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

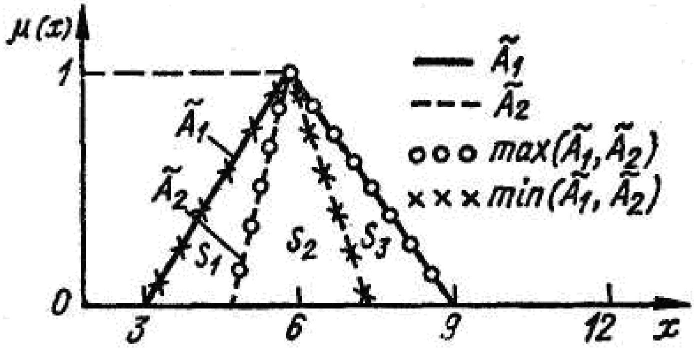


Рис. 2.38.

Используя алгоритм, табл. 2.1 и, учитывая то, что

$$MP(\tilde{A}_1) < MP(\tilde{A}_2) \text{ и } mp(\tilde{A}_1) < mp(\tilde{A}_2),$$

проведем вычисление сложных пропорций для каждой нечеткой величины, с целью окончательного ранжирования:

$$CMP(\tilde{A}_1) = \frac{0,67}{0,67 + 0,67} = 0,5;\; CMP(\tilde{A}_2) = \frac{1}{2} = 0,5;$$

$$cmp(\tilde{A}_1) = 0,5;\;\; cmp(\tilde{A}_2) = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Поскольку разбросы симметричны, сложные пропорции не дают никакой дополнительной информации о нечетких величинах. Как показано в табл. 2.1, в этом частном случае может быть вычислен коэффициент сравнения. Он представляет собой знаменатель коэффициента $CMP(\tilde{A}_1)$ или $cmp(\tilde{A}_1)$, т.е.

$$d[\,CMP(\tilde{A}_1)\,] = MP(\tilde{A}_1) + mp(\tilde{A}_1),$$

причем, чем большее значение $d[\,CMP(\tilde{A}_1)\,]$, тем считается большей нечеткая величина. Такое решение принимается для нечетких величин с меньшим разбросом. Для нечетких величин с большим разбросом суждение противоположно, т.е., чем меньше значение

$d[CMP(\widetilde{A}_1)]$, тем большей считается нечеткая величина. Для рассматриваемого примера имеем

$d[CMP(\widetilde{A}_1)] = 0{,}67 + 0{,}67 = 1{,}34$; $d[CMP(\widetilde{A}_2)] = 1+1 = 2$.

Здесь

$d[CMP(\widetilde{A}_2)] > d[CMP(\widetilde{A}_1)]$

и можно произвести ранжирование $\widetilde{A}_2 > \widetilde{A}_1$.

Пример 9. Рассмотрим $\widetilde{\max}(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2)$, и $\widetilde{\min}(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2)$, которые приведены на рис. 2.39.

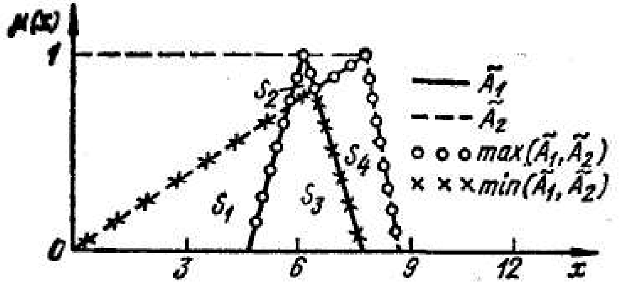


Рис. 2.39.

Пропорции максимума и минимума для каждого нечеткого мнжества следующие:

$$MP(\widetilde{A}_1) = \frac{S_3}{1} = \int_5^{35/6}(x-5)\,dx + \int_{35/6}^{49/8}\frac{x}{7}\,dx + \int_{49/8}^{7}(-x+7)\,dx = 0{,}98;$$

$$MP(\widetilde{A}_2) = \frac{S_3+S_4}{4} = \frac{0{,}98 + \int_{49/8}^{7}\left[\frac{x}{7} - (-x+7)\right]dx + \int(-x+8)\,dx}{4} =$$

$$= \frac{0{,}98 + 0{,}44 + 0{,}5}{4} = 0{,}48;$$

$$mp(\widetilde{A}_1) = \frac{S_2+S_3}{1} = 1;$$

$$mp(\widetilde{A}_2) = \frac{S_1+S_3}{4} = \frac{2{,}08+0{,}98}{4} = 0{,}77.$$

Поскольку $MP(\widetilde{A}_1) > MP(\widetilde{A}_2)$ и $mp(\widetilde{A}_1) > mp(\widetilde{A}_2)$, то необходимо вычислять сложные пропорции:

$$CMP(\tilde{A}_1) = \frac{0,98}{1+0,98} = 0,49; \;\; CMP(\tilde{A}_2) = \frac{0,48}{0,48+0,77} = 0,38;$$

$$cmp(\tilde{A}_1) = 1 - 0,49 = 0,51; \quad cmp(\tilde{A}_2) = 1 - 0,38 = 0,62 = 0,5\,.$$

Здесь $MP(\tilde{A}_1) > MP(\tilde{A}_2)$ и $cmp(\tilde{A}_1) < cmp(\tilde{A}_2)$, так что $\tilde{A}_1 > \tilde{A}_2$, исходя из алгоритма табл. 2.1.

Пример 10. На рис. 2.40 представлены функции

$$\widetilde{\max}(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2) = \tilde{A}_2 \text{ и } \widetilde{\min}(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2) = \tilde{A}_1\,.$$

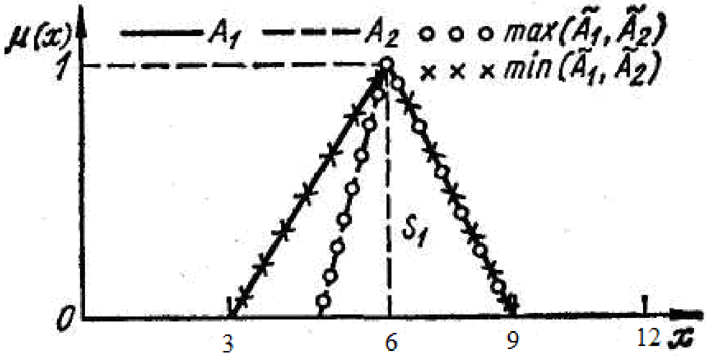


Рис. 2.40.

Пропорции для $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ следующие:

$$MP(\tilde{A}_1)\; S_1/3 = 2/3 = 0,67, \qquad cmp(\tilde{A}_1) = 3/3 = 1;$$

$$MP(\tilde{A}_2) = 2/2 = 1, \;\; cmp(\tilde{A}_2) = 2/2 = 1.$$

Здесь $MP(\tilde{A}_1) < MP(\tilde{A}_2)$ и $cmp(\tilde{A}_1) = cmp(\tilde{A}_2)$, так что $\tilde{A}_1 > \tilde{A}_2$.

Индивидуальные тестовые задачи

1. Выполнить операции сложения нечетких величин, которые описаны следующими ФП:

1.1. $$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x/3 + 2/3, & -2 \le x \le 1; \\ -x/5 + 6/4, & 1 < x \le 6; \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} x/3 - 1/3, & 1 \le x \le 3; \\ -x/2 + 4/2, & 3 < x \le 4; \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

1.2. $$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x/4 + 2/4, & -2 \le x \le 1; \\ -x/6 + 6/5, & 1 < x \le 6; \\ 0 & \textit{востальных случаях.} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} x/2 - 1/2, & 1 \le x \le 3; \\ -x/1 + 4/1, & 3 < x \le 4; \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

1.3. $$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x/2 + 2/2, & -2 \le x \le 1; \\ -x/4 + 6/3, & 1 < x \le 6; \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} x/2 - 1/2, & 1 \le x \le 3; \\ -x/1 + 4/1, & 3 < x \le 4; \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

1.4. $$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x/3 + 2/3, & -2 \le x \le 1; \\ -x/5 + 6/4, & 1 < x \le 6; \\ 0 & \textit{в оствльных случаях.} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} x/2 - 1/2, & 1 \le x \le 3; \\ -x/3 + 4/3, & 3 < x \le 4; \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

1.5. $$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} x/4+2/5, & -2\le x\le 1;\\ -x/4+6/2, & 1< x\le 6;\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases} x/2-1/2, & 1\le x\le 3;\\ -x/1+4/1, & 3< x\le 4;\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

2. Выполнить операции вычитания нечетких величин, которые описаны следующими ФП:

2.1. $$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} x/5-5/5, & 5\le x\le 10;\\ -x/2+12/2, & 10< x\le 12;\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases} x/3-2/3, & 2\le x\le 5;\\ -x/5+10/5, & 5< x\le 10;\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

2.2. $$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} x/5-5/5, & 5\le x\le 10;\\ -x/2+12/2, & 10< x\le 12;\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases} x/2-2/2, & 2\le x\le 5;\\ -x/5+10/5, & 5< x\le 10;\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

2.3. $$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} x/5-5/5, & 5\le x\le 10;\\ -x/2+12/2, & 10< x\le 12;\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases} x/4-2/4, & 2\le x\le 5; \\ -x/5+10/5, & 5<x\le 10; \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

2.4. $$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} x/5-5/5, & 5\le x\le 10; \\ -x/2+12/2, & 10<x\le 12; \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases} x/3-2/3, & 2\le x\le 5; \\ -x/3+10/3, & 5<x\le 10; \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

2.5. $$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} x/5-5/5, & 5\le x\le 10; \\ -x/2+12/2, & 10<x\le 12; \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases} x/3-2/3, & 2\le x\le 5; \\ -x/4+10/4, & 5<x\le 10; \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

3. Выполнить операции умножения нечетких величин, которые описаны следующими ФП:

3.1. $$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} x/3-1/3, & 1\le x\le 4; \\ -x/2+6/2, & 4<x\le 6; \\ 0 & \textit{в інших випадках.} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases} x-2, & 2\le x\le 3; \\ -x/3+6/3, & 3<x\le 6; \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$3.2.\ \mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} x/3-1/3, & 1\le x\le 4;\\ -x/2+6/2, & 4<x\le 6;\\ 0 & \textit{в інших випадках.}\end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases} x-3, & 2\le x\le 3;\\ -x/4+6/4, & 3<x\le 6;\\ 0 & \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$$

$$3.3.\ \mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} x/3-1/3, & 1\le x\le 4;\\ -x/2+6/2, & 4<x\le 6;\\ 0 & \textit{в інших випадках.}\end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases} x-1, & 2\le x\le 3;\\ -x/2+6/2, & 3<x\le 6;\\ 0 & \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$$

$$3.4.\ \mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} x/3-1/3, & 1\le x\le 4;\\ -x/2+6/2, & 4<x\le 6;\\ 0 & \textit{в інших випадках.}\end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases} x-4, & 2\le x\le 3;\\ -x/4+6/4, & 3<x\le 6;\\ 0 & \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$$

$$3.5.\ \mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} x/3-1/3, & 1\le x\le 4;\\ -x/2+6/2, & 4<x\le 6;\\ 0 & \textit{в інших випадках.}\end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases} x-2, & 2\le x\le 3;\\ -x/5+6/5, & 3<x\le 6;\\ 0 & \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$$

4. Выполнить операции деления нечетких величин, которые описаны следующими ФП:

4.1. $$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} x/3-3/3, & 3\le x\le 6; \\ -x/4+10/1, & 6<x\le 10; \\ 0 & \textit{в інших випадках.} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases} x/2-1/2, & 3\le x\le 3; \\ -x/1+4/1, & 3<x\le 4; \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

4.2. $$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} x/3-3/3, & 3\le x\le 6; \\ -x/4+10/1, & 6<x\le 10; \\ 0 & \textit{в інших випадках.} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases} x/3-1/3, & 3\le x\le 3; \\ -x/2+4/2, & 3<x\le 4; \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

4.3. $$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} x/3-3/3, & 3\le x\le 6; \\ -x/4+10/1, & 6<x\le 10; \\ 0 & \textit{в інших випадках.} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases} x/4-1/4, & 3\le x\le 3; \\ -x/3+4/3, & 3<x\le 4; \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

4.4. $$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} x/3-3/3, & 3\le x\le 6; \\ -x/4+10/1, & 6<x\le 10; \\ 0 & \textit{в інших випадках.} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases} x/2-1/2, & 3\le x\le 3; \\ -x/3+4/3, & 3<x\le 4; \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$4.5.\ \mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} x/3-3/3, & 3\le x\le 6; \\ -x/4+10/1, & 6<x\le 10; \\ 0 & \textit{в інших випадках.} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases} x/4-1/4, & 3\le x\le 3; \\ -x/1+4/1, & 3<x\le 4; \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

4. Альтернативный подход к формализации нечеткости

4.1. Два основных подхода к формализации нечеткости

Мы рассмотрели первый подход к формализации нечеткости (подход Заде). Напомним его суть.

Нечеткое множество (НМ) образуется путем введения обобщенного понятия принадлежности, т.е. расширение двухэлементного множества значений характеристической функции {0, 1} до континуму [0, 1]. Это означает, что переход от полной принадлежности объекта классу к полной его непринадлежности происходит не скачком, а плавно, постепенно, причем принадлежность элемента множеству выражается числом из интервала [0, 1].

Нечеткое множество

$$A=\{x,\ \mu_A(x)\} \qquad (1)$$

определяется математически как совокупность упорядоченных пар, составленных из элементов x универсального множества X (*универсальным множеством* X нечеткого множества A называется область определения функции принадлежности μ_A) и соответствующих степеней принадлежности $\mu_A(x)$ или (поскольку функция принадлежности является исчерпывающей характеристикой НМ) непосредственно в виде функции

$$\mu_A\colon X\rightarrow[0, 1].$$

Возможные виды функций принадлежности $\mu_A(x)$ изображены на рис.1.

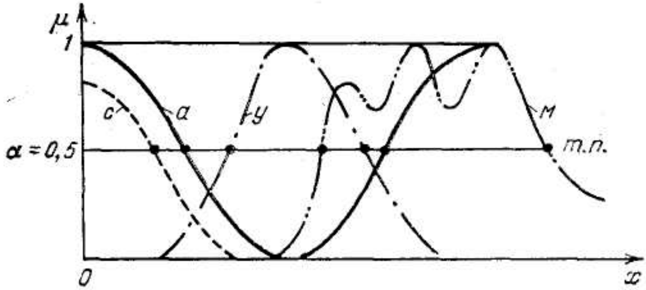


Рис. 1. Виды функций принадлежности : *c* – субнормальная; *a* – амодальная; *м* – многомодальная; *в* – унимодальная; *тп* – точка перехода.

Пример записи НМ:

$$A=\{(x_1,0{,}7), (x_2,0{,}2), (x_3,0{,}9), (x_4,1), \quad (2)$$

или

$$A=0{,}7|\ x_1+0{,}2|x_2|+0{,}9|x_3+1|x_4.$$

Второй подход к формализации понятия нечеткости тесно связан с центральным понятием так называемой *альтернативной теории множеств* — *понятием полумножества*. В то же время как множество прелполагает наличие определенных границ принадлежности и непринадлежности, полумножество есть более широким понятием, не имеющим максимальных или минимальных элементов, а следовательно, фиксированных значений принадлежности. В альтернативной теории множеств четко разграничиваются понятие множества и класса. Множество — это совокупность четко разрозненных элементов, которые можно пересчитать, представить в виде списка. Понятие класса есть более общим, чем понятие множества. Свойство объектов $\mu_A(x)$, рассматриваемое как объект, определяет класс $\{x, \mu_A(x)\}$.

Полумножеством называется собственный класс (не множество), являющийся подклассом некоторого множества

$$X\colon \mathcal{A} = \{x, \mu_A(x)\} \subset X.$$

Поскольку при определении полумножества не используется отношение принадлежности между элементом и множеством, этот математический объект является более общим, чем НМ. Но для практических применений полумножеств следует ввести функциональные ограничения на принадлежность и аппроксимировать полумножества нечеткими множествами.

Основные операции над НМ из класса всех НМ $\mathfrak{I}(X)=\{\mu|\mu\colon X\rightarrow[0, 1]\}$ универсального множества X представленные в табл. 1.

Таблица 1.

№	Название операции	Символическая запись (в классе $\Im(X)$)	Графическое представление	Символическая запись (в классе Ф([0, 1]))	Модификатор или связка
1	Дополнение	$\mu_3(x) = \overline{\mu}\ (x) =$ $=1- \mu(x)$ $\forall x \in X$	Рис. 2.	$M_3(\alpha) = \overline{M}(\alpha) =$ $= X \setminus \underset{\beta\in[0,\alpha]}{\square} M(1-\beta)$ $\forall \alpha \in [0, 1]$	НЕ
2	Пересечение I (минимум: невзаимодействующие переменные)	$\mu_3(x)=(\mu_1 \wedge \mu_2)(x)=$ $=\min\{\mu_1(x),\mu_2(x)\}$ $\forall x \in X$	Рис.3.	$M_3(\alpha) = M_1(\alpha) \cap$ $\cap\ M_2(\alpha)$ $\forall \alpha \in [0, 1]$	И (И,...И)
3	Объединение I (максимум : невзаимодействующие переменные)	$\mu_3(x)=(\mu_1 \vee \mu_2)(x)=$ $=\max\{\mu_1(x),\mu_2(x)\}$ $\forall x \in X$	Рис.4.	$M_3(\alpha) = M_1(\alpha) \cup$ $\cup M_2(\alpha)$ $\forall \alpha \in [0, 1]$	ИЛИ (ЛИБО,..,ЛИБО)
4	Пересечение II (ограниченное произведение)	$\mu_3(x)=(\mu_1 \& \mu_2)(x)=$ $=\max\{0,\mu_1(x)+$ $+\mu_2(x)-1\}$ $\forall x \in X$	Рис.5.	$M_3(\alpha) =$ $= \bigcup_{\substack{\beta_1+\beta_2-1\geq\alpha \\ \beta_1,\beta_2\in[0,\alpha]}} M_1(\beta_1) \cap$ $\cap\ M_2(\beta_2)$ $\forall \alpha \in [0, 1]$	И
5	Объединение II (ограниченная сумма)	$\mu_3(x)=(\mu_1 \vee\!\!\& \mu_2)(x)=$ $=\min\{1,\mu_1(x)+$ $+\mu_2(x)-1\}$ $\forall x \in X$	Рис.6.	$M_3(\alpha) =$ $= \bigcup_{\substack{1\geq\beta_1+\beta_2\geq\alpha \\ \beta_1,\beta_2\in[0,\alpha]}} M_1(\beta_1) \cap$ $\cap\ M_2(\beta_2)$ $\forall x \in X$	ИЛИ

6	Пересечение III (алгебраическое произведение)	$\mu_3(x)=(\mu_1\cdot\mu_2)(x)=$ $=\mu_1(x)\cdot\mu_2(x)$ $\forall x\in X$	Рис.7.	$M_3(\alpha)=$ $=\bigcup\limits_{\substack{\beta_1\cdot\beta_2\geq\alpha \\ \beta_1,\beta_2\in[0,\alpha]}} M_1(\beta_1)\cap M_2(\beta_2)$ $\forall x\in X$	И .
7	Объединение III (алгебраическая сумма)	$\mu_3(x)=(\mu_1\hat{+}\mu_2)(x)=$ $=\mu_1(x)+\mu_2(x)-$ $-\mu_1(x)\cdot\mu_2(x)$ $\forall x\in X$	Рис.8.	$M_3(\alpha)=$ $=\bigcup\limits_{\substack{\beta_1+\beta_2-\beta_1\cdot\beta_2\geq\alpha \\ \beta_1,\beta_2\in[0,\alpha]}} M_1(\beta_1)\cap M_2(\beta_2)$ $\forall x\in X$	ИЛИ .
8	Разность	$\mu_3(x)=\mu_1(x)-\mu_2(x)=$ $=\max\{0,\mu_1(x)-$ $-\mu_2(x)\}$ $\forall x\in X$	Рис.9.	$M_3(\alpha)=$ $=\bigcup\limits_{\substack{\beta_1-\beta_2\geq\alpha \\ \beta_1,\beta_2\in[0,\alpha]}} M_1(\beta_1)\cap M_2(\beta_2)$ $\forall x\in X$	
9	Концентрирование	$\mu_3(x)=\mu^2(x)$ $\forall x\in X$	Рис.10.		ОЧЕНЬ

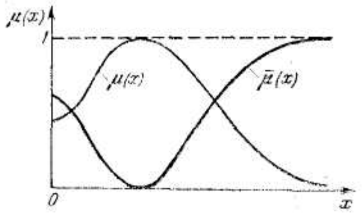


Рис. 2

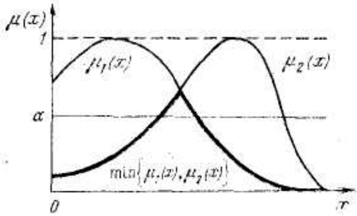


Рис. 3.

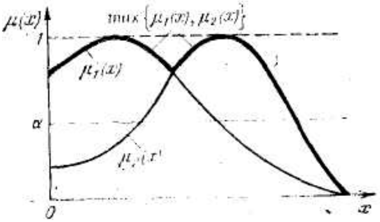


Рис. 4.

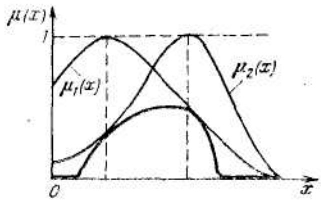


Рис. 5.

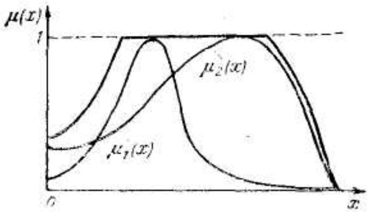


Рис. 6.

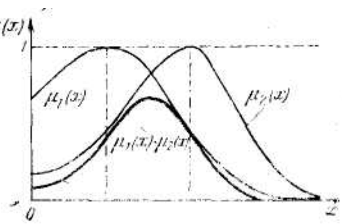


Рис. 7.

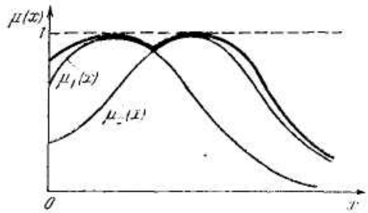


Рис.8.

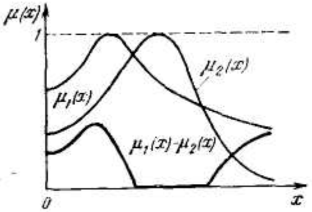


Рис.9.

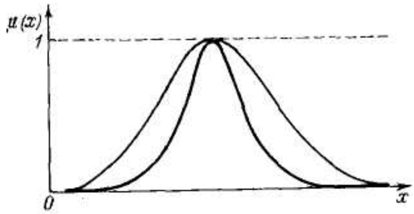


Рис. 10.

Ниже приводятся наиболее важные понятия теории нечетких множеств.

Нормальность НМ. Нечеткое множество *A* нормально, если верхняя граница его функции принадлежности равнна единице, т.е.

$$\sup_{x \in X} \mu_A(x) = 1.$$

При $\sup\limits_{x \in X} \mu_A(x) < 1$ НМ называется субнормальным.

Нечеткое множество пусто, если $\mu_A(x) = 0 \quad \forall x \in X$. Непустое субнормальное НМ можно привести к нормальному (нормализовать) по формуле

$$\mu_A(x) = \frac{\mu_A(x)}{\sup\limits_{x \in X} \mu_A(x)}. \tag{3}$$

Множество уровня α *НМ.* Множеством уровня α (α - срезом) НМ *A* называется четкое подмножество универсального множества *X*, определяемое в виде

$$A_\alpha = \{x \in X \mid [\mu_A(x) \geq \alpha\}, \tag{4}$$

где $\alpha \in [0, 1]$ (см. рис. 11).

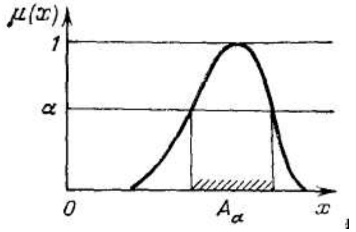


Рис. 11. Нечеткое множество и его множества уровня.

Например, для (2) и α = 0,6 множество уровня α имеет вид

$A_\alpha=\{x_2, x_3, x_4\}$. С другой стороны, A_α есть образ интервала [α, 1] при обратном отображении μ^{-1}, т.е. $A_\alpha=\mu^{-1}([\alpha, 1])$. Множество строгого уровня определяется в виде

$$A^s_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) > \alpha\}. \tag{5}$$

Например, для (2) и α = 0,6 множеством строгого уровня будет $A^s_\alpha=\{x_3, x_4\}$. В частности, носителем НМ *A* (обозначаемым supp *A*) является множество элементов $x \in X$, для которых $\mu_A(x)>0$, т.е. $\mathrm{supp}A=\{x \in X | \mu_A(x)>0\}$. Понятие множества уровня является расширением понятия интервала $\{x | a \leq x \leq b\}$. Оно представляет собой объединение не более чем счетного числа интервалов. Соответственно, алгебра интервалов есть частный случай алгебры множеств уровня.

Точка перехода НМ *A* — это такой элемент $x \in X$, для которого $\mu_A(x)=0,5$.

Четкое множество, ближайшее к НМ, определяется как

$$\mu_A*(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad \mu_A(x)<0,5,\\ 1, & \text{если} \quad \mu_A(x)>0,5,\\ 0 \text{ или } 1, & \text{если} \quad \mu_A(x)=0,5.\end{cases} \qquad (6)$$

Выпуклость НМ. Нечеткое множество A в пространстве $X=\Re^n$ называется выпуклым нечетким множеством тогда и только тогда, когда его функция принадлежности выпукла, т.е. для каждой пары точек x, y из X удовлетворяет неравенству

$$\mu_A(\lambda x+(1-\lambda)y)\geq\min(\mu_A(x),\ \mu_A(y)) \qquad (7)$$

для всех λ: $0\leq\lambda\leq1$.

Пример нечеткой функции — отображение $\varphi: X\xrightarrow{н} Y$, которое каждому $x\in X$ ставит в соответствие $y\in Y$ со степенью $\mu_\varphi(x, y)$. Другие варианты — это функция с нечетким аргументом и функция с нечеткой областью определения. Нечеткая функция определяет нечеткую поверхность принадлежности в $X\times Y$ (X, Y — произвольные множества).

Принцип обобщения. Принцип обобщения как одна из основных идей теории НМ носит эвристический характер и позволяет расширить область определения исходного отображения φ на класс НМ, а также обобщить определения операций над НМ типа 1, на НМ типа 2 и выше. (Нечетким множеством типа n называется НМ, у которого значениями функции принадлежности является НМ типа n—1. Например, НМ типа 1 есть $\mu: X\to[0, 1]$, а НМ типа 2 можно определить как

$$\mu: X\times[0, 1]\to[0, 1], \text{ и т.д.)}$$

Пусть $\varphi: X\to Y$ - заданное отображение, а A — НМ в X. Тогда образ НМ A при отображении φ есть НМ в Y с функцией принадлежности

$$\mu_B(y)=\sup_{x\in\varphi^{-1}(y)}\mu_A(x),\quad y\in Y, \qquad (8)$$

где $\varphi^{-1}(y)=\{x\in X \mid \varphi(x)=y\}$. В случае нечеткого отображения $\varphi: X\xrightarrow{н} Y$ имеем

$$\mu_B(y)=\sup_{x\in X}\min\{\mu_A(x),\ \mu_\varphi(x, y)\}. \qquad (9)$$

В отличие от булевой алгебры, где $\forall A\subset X: A\cap\overline{A}=\varnothing$, $A\cup\overline{A}=X$, в $\Im(X)$ законы исключенного третьего не выполняются:

$$A\cap\overline{A}\neq\varnothing,\ A\cup\overline{A}\neq X.$$

В ряде литературных источников показано, что при построении операций объединения или пересечения в $\Im(X)$ надо отбросить либо законы исключенного третьего, либо свойства дистрибутивности и идемпотентности.

Изложенный выше подход является наиболее распространенным при моделировании нечетких понятий.

Всякое НМ можно разложить по множествам уровня согласно теореме декомпозиции

$$\mu_A = \underset{\alpha\in[0,1]}{\Box}(\alpha\cdot\mu_{A_\alpha}), \qquad (10)$$

где

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & если \quad \mu_A(x)\geq\alpha, \\ 0, & если \quad \mu_A(x)<\alpha. \end{cases}$$

Данное разложение лежит в основе второго способа формализации нечеткости, когда нечеткость выражается с помощью набора иерархически упорядоченных четких множеств.

Следовательно, для конечного числа n градаций рассматриваемого свойства n-нечеткое множество задается через n-ку обычных множеств

$F=(M_1, \dots, M_n)$, где $M_i \subseteq X$, i=1, ...,n, и $M_i \subseteq \dots \subseteq Mn$.

Для бесконечного числа градаций имеем бесконечное семейство множеств $F=(M_\alpha)$,$\alpha\in[0,1]$, т.е. отображение вида M: [0, 1] $\to 2^x$, где любому числу (индексу) $\alpha\in[0, 1]$ ставится в соответствие четкое подмножество множества X. Тогда размытость моделируется отображениями M из класса

$$\Phi([0, 1])=\{M \mid M: [0, 1] \to 2^x\}$$

со свойствами

а) $M(0)=X$;

б) $\forall\ \alpha_1,\alpha_2\in[0, 1]: \alpha_1\leq\alpha_2 \Rightarrow M(\alpha_1)\supseteq M(\alpha_2)$, (11)

и соответствующими операциями над ними (табл. 1).

Связь между выделенными альтернативными способами формализации нечеткости устанавливается на основе *теоремы представления,* согласно которой классы $\Im(X)$ и Φ([0, 1]) изоморфны относительно операций пересечения и объединение (табл. 1). При этом любой бинарной операции в $\Im(X)$ соответствует объединение пересечений разных срезов в Φ([0, 1]):

$$\begin{aligned}&\forall x\in X: \mu_3(x)=\mu_1(x)*\mu_2(x)\Leftrightarrow M_3(\alpha)=\\&=\bigcup_{\beta_1*\beta_2\geq\alpha}(M_1(\beta_1)\cap M_2(\beta_2))\forall\alpha\in[0,1].\end{aligned} \qquad (12)$$

Задание вероятностной меры на M обусловливает переход к теории случайных множеств. В особую группу будем выделять различные комбинированные подходы, которые учитывают как нечеткость, так и стохастичность в системах управления и искусственного интеллекта. В частности, вероятностное нечеткое множество определяется рандомизированной функцией принадлежности

$$\mu_{A:}\ X\times\Omega\rightarrow[0,\ 1].$$

Здесь принимается к вниманию случайная погрешность при экспертном оценивании функции принадлежности (рис. 12). Этот подход, как и случайные нечеткие множества, применим в частности при групповом экспертном оценивании.

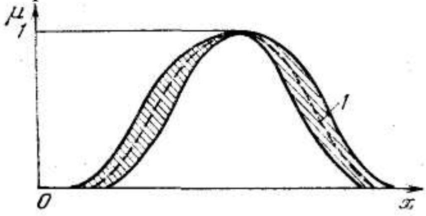


Рис. 12. Нечеткая оценка (1) со случайным шумом

Рядом с выражением (11) есть и другие варианты формализации нечеткости данных с помощью семейства обычных множеств, например *приближенные множества* (rough sets). Пусть X — множество, а $R\subset X\times X$ — отношение эквивалентности на X. Упорядоченную пару $\Psi = < X, R >$, будем называть *пространством приближений*, а R — отношением неразличимости в просторные Ψ. Классы эквивалентности по отношению R называются *элементарными множествами* в Ψ, а всякое объединение элементарных множеств образует *составное множество* в Ψ .

Пусть $Y\subset X$. Под нижним приближением множества Y в пространстве Ψ будем понимать наибольшее составное множество в Ψ, содержащееся в Y, а под верхним приближением Y в Ψ — наименьшее составное множество в Ψ, содержащее Y. Обозначим нижнее и верхнее приближения множества Y в пространстве Ψ через $\underline{\Psi}Y$ и $\overline{\Psi}Y$ соответственно. Произвольные два множества $Y, Z\subset X$ приближенно (снизу) равны в Ψ= <X, R>, если $\underline{\Psi}Y = \overline{\Psi}Z$, и приближенно (сверху) равны в Ψ= <X, R>, если $\overline{\Psi}Y = \overline{\Psi}Z$. Обозначим приближенное снизу и сверху в Ψ в форме $Y \underset{\Psi}{\eqsim} Z$ и $Y \underset{\Psi}{\simeq} Z$ соответственно.

Два множества $Y,Z\subset X$ приближенно равны в Ψ= <X, R>, если они приближенно равны снизу и сверху, т.е. $Y \underset{\Psi}{\approx} Z$, если $Y \underset{\Psi}{\eqsim} Z$ и $Y \underset{\Psi}{\simeq} Z$. . Тогда понятие приближенного множества вводится в виде семейства приближенно равных множеств в пространстве приближений. Соответственно, множество $(\underline{\Psi})Y=\{Z\subset X|\ Y \underset{\Psi}{\eqsim} Z\}$ называется нижним приближенным множеством, порожденным множеством Y в пространстве Ψ, множество $(\overline{\Psi})Y=\{Z\subset X|\ Y \underset{\Psi}{\simeq} Z\}$ - верхним приближенным множеством, а $(\overline{\Psi})Y=\{Z\subset X|\ Z \underset{\Psi}{\approx} Y\}$ - приближенным множеством.

Данные три типа приближенных множеств представляют собой семейства семейств обычных множеств.

В некоторых литературных источниках предложено интересное обобщение пространства Ψ и отношения неразличимости R. В НМ $\{(x, \mu(x)\}$ определяется нечеткая эквивалентность σ. Вводится понятие *совершенно нечеткого множества* как тройки $A=(X, \mu, \sigma)$, где $\mu: X \to [0, 1]$ есть функция принадлежности, а $\sigma: X\times X \to [0, 1]$ — функция неразличимости.

Близким к идеям альтернативной теории множеств является *неопределенное множество,* описываемое четверкой

$$N=<{}^{+}A, {}^{-}A, M_x, M_n>.$$

Здесь множества ${}^{+}A$ и ${}^{-}A$ суть конечные подмножества универсального множества X, причем ${}^{+}A$ есть множество элементов $x\in X$, которые точно принадлежат множеству (денотату) A, а ${}^{-}A$ есть множество элементов $x\in X$, которые точно не принадлежат множеству A. Натуральные числа M_x и M_n выражают соответственно верхнюю и нижнюю оценку мощности множества A. Это определение, которое моделирует неполные сведения о конкретной совокупности A элементов некоторого универсума X, неявно задает трехзначную функцию принадлежности

$$\mu(x)=\begin{cases}1 & \text{для } {}^{+}A,\\ 0 & \text{для } {}^{-}A,\\ ? & \text{для } X\setminus({}^{+}A\cup{}^{-}A).\end{cases}$$

Естественным обобщением N есть переход к паре

$$\mathcal{N}=\langle\mu_A, |\overline{\overline{\mu}}_A|\rangle,$$

где μ_A есть непрерывная функция принадлежности элементов $x\in X$ множеству (денотату) A, а $|\overline{\overline{\mu}}_A|$ характеризует возможность для элементов натурального ряда быть значением мощности данного множества A.

Итак, короткий обзор ряда способов формализации нечеткости показывает, что в этом направлении развиваются два основных подхода.

Первый базируется на обобщении понятия принадлежности элемента множеству, которое приводит к размыванию границ множества, а в предельном случае, к появлению объекта с неопределенными границами - полумножества.

Второй подход предполагает описание нечеткости с помощью иерархии - семейства упорядоченных четких множеств. Прослеживается взаимосвязь этих подходов, что указывает на существование глубокой внутренней связи проблем математической обработки нечеткой информации и построения моделей сложных, иерархических систем. Ниже в рамках первого подхода будут обсуждены различные варианты задания области определения и области значений функции принадлежности НМ, а также соответствия между ними. Возникающее при этом разнообразие видов НМ открывает широкие перспективы их применения в моделях управления и искусственного интеллекта.

4.2. Виды областей значений функций принадлежности

Все рассмотренные выше нечеткие объекты можно далее классифицировать по виду области значений функции принадлежности. Кроме интервала [0, 1] функция принадлежности может принимать свои значения в интервале [—1, +1] (тогда предельное значение полной непринадлежности равно — 1, а 0 берется как точка перехода нечеткого множества), на числовой прямой $\Re$, а также в различных множествах, наделенных некоторой структурой. Например, область значений функции принадлежности $\mu: X \to (-\infty; +\infty)$ состоит из трех участков:

а) $\mu(x)>0$, б) $-1\leq\mu(x)<0$ и в) $\mu(x)<-1$.

При интерпретации X как множества деталей подмножество $\{x\in X|\mu(x)>0\}$ охватывает все годные детали, которые не выходят за пределы требуемых допусков, подмножество $\{x\in X|-1\leq\mu(x)<0\}$— негодные детали, которые можно исправить, а $\{x\in X|\mu(x)<-1\}$— бракованные детали.

Исторически первым обобщением понятия НМ $\mu: X \to [0, 1]$ стали *L-нечеткие множества* $\mu: X\to L$, т.е. функции, которые принимают свои значения в конечной или бесконечной дистрибутивной решетке L (*решетка* — частично упорядоченное множество с точной нижней и точной верхней границами). Области принадлежности моделируются также *полной решеточно упорядоченной полугруппой, полукольцом, категорией.*

Важным для практических приложений в плане выражения качественных представлений и оценок человека в процессе решения задачи является случай *S-нечетких* множеств, которые задаются парой (X, μ), где

$$\mu\colon X \to S \tag{13}$$

отображение из X в линейно упорядоченное множество S. На S естественно наложить требования конечности и полноты. Пример конечного линейно упорядоченного множества — набор лингвистических значений лингвистической переменной «КАЧЕСТВО»={плохое, среднее, хорошее, отличное}. (*Лингвистическая переменная* — это переменная, значениями которой могут быть не только числа, но и слова и словосочетания естественного или искусственного языка. Смысл каждого лингвистического значения выражается в виде нечеткого подмножества универсального множества X).

Свойство линейной упорядоченности не несет информации о расстоянии между элементами множества S, т.е. если указывается, что один элемент предпочтительнее другого: $s_i \sqsubset s_j$, то нельзя выразить количественно, насколько s_i лучше s_j. Линейный порядок не допускает арифметических операций, поэтому вместо дополнения НМ

$$\overline{\mu}(x)=1-\mu(x),\ \forall x \in X$$

в классе *S-нечетких* множеств применяется операция отрицания; если $\mu(x)=s_i$, то $\overline{\mu}(x)= s_{n-i}$, где s_n — максимальный элемент в S. Эта операция удовлетворяет свойствам инволюции: $\overline{\overline{\mu}}(x)=\mu(x)$ и инверсии порядка: если

$$\mu(x)\geq \mu(y) \text{ то } \overline{\mu}(x) \leq \overline{\mu}(y), \tag{14}$$

где $x, y\in X$, $\mu\in\mathcal{F}(X)$

Операции возведения в степень НМ (см. табл. 1) отвечает операция сдвига S – нечеткого множества в X. Пусть A — НМ в X с функцией принадлежности, которая принимает значения в $S=\{s_0, ..., s_n\}$, a — любое целое число. Оператор сдвига S^a, действуя на *S-нечеткое* подмножество A, образует новое S-нечеткое подмножество $A^+=S^aA$ причем, если $\mu_A(x)=s_i$, $s_i\in S$,то

$$S^a\mu_A(x)=\begin{cases} s_0 & при \quad i-a<0, \\ s_{i-a} & при \quad n\leq i-a\leq 0, \\ s_n & при \quad i-a>n, \quad i=0,...,n. \end{cases} \tag{15}$$

Определение операций пересечения min и объединение max для *S-нечетких* множеств аналогичны определениям для НМ класса $\mathcal{F}(X)$

Гетерогенные нечеткие множества

В том случае, когда набор НМ $\tilde{A}_j$, j= 1, ..., m, в X соответствует m свойствам рассмотренного объекта, каждый элемент $x \in X$ характеризуется вектором значений принадлежности ($\mu_1(x)$, ..., $\mu_m(x)$), выражающим степень удовлетворения этим свойствам. Таким образом, строится функция μ: $X \to [0, 1]^m$, где $[0, 1]^m$ — полная решетка. В ряде литературных источников векторнозначное НМ представляется отображением

$$\mu: X \to S_1 \times ... \times S_m, \tag{16}$$

где S_i, (i=l, ..., m) - ограниченные линейно упорядоченные множества.

Дальнейшим обобщением понятия НМ является понятие *гетерогенного нечеткого множества*. По признаку однородности/неоднородности области значений функции принадлежности все описанные выше виды НМ являются гомогенными в том смысле, что одна и та же структура области значений функции принадлежности берется при оценке всех элементов базового множества X. Если же допустить, что на различных (в пределе, на каждом) элементах универсального множества X функция принадлежности может принимать свои значения из различных наиболее подходящих математических структур, например, различных дистрибутивных решеток, то приходим к понятию гетерогенной НМ

$$\mu \in L_1^{\{x_1\}} \times L_2^{(x_2)} \times ... \times L_n^{(n)}, \tag{17}$$

где L_i (i = 1, ..., n) — различные решетки, $\times$ - знак декартова произведения.

Пример. Пусть $X=\{x_1 ..., x_4\}$, $L_1 = L_4 = [0, 1]$, $L_2 = \{s_0, ..., s_6\}$, а $L_3=\{0, 1, ..., 5\}$. Тогда гетерогенное нечеткое множество $\tilde{A}$ можно представить в виде

$$\tilde{A} = \{(x_1|0,9),(x_2|s_3,),(x_3|4),(x_4|0,6)\},$$

гетерогенное нечеткое множество $\tilde{B}$ можно представить в виде

$$\tilde{B} =\{(x_1|0,2),(x_2|s_5,),(x_3|5),(x_4|0,7)\},$$

и т.д. Гетерогенные НМ и связываемые с ними составные лингвистические переменные высокого порядка позволяют моделировать ситуации многокритериального принятия решения, когда имеются признаки как с количественными, так и с порядковыми шкалами.

Виды областей определения функций принадлежности

Еще одним основанием для классификации НМ является вид области определения функции принадлежности. До сих пор предполагалось, что область определения функции принадлежности НМ совпадает с базовым множеством *X*. Однако нередко точность моделирования реального процесса не ухудшается, если задавать нечеткие множества на различных подмножествах универсального множества *X*. Более того, это дает возможность отобразить динамику изменения базового множества в конкретной ситуации принятия решения, например, уменьшение полного количества сравниваемых альтернатив в задаче выбора в условиях дефицита времени и, таким образом, понизить общую размерность задачи. Формально нечеткие подмножества, которые определены на четких подмножествах базового множества *X*, записываются в виде отображения μ: $2^x \to [0, 1]$ или в обозначениях Заде как множество упорядоченных пар

$$A(\alpha)=\{(x\in A_\alpha, \mu_{A(\alpha)}(x)= \mu_A(x))\},\ \alpha\in[0, 1]\ , \qquad (18)$$

где $A_\alpha=\{x\in X|\mu_A(x)\geq\alpha\}$ и называются *нечеткими множествами уровня* α.

Пример задания НМ уровня α. Пусть в универсальном множестве $X = \{x_1 ..., x_5\}$ определено НМ

$$\tilde{A} = \{(x_1,0,7), (x_2,0,4,), (x_3,0), (x_4,1), (x_5,0,9)\}.$$

Тогда НМ уровня

$$\alpha =0,6 \quad \tilde{A}_{\alpha=0,6} = \{(x_1,0,7), (x_4,1), (x_5,0,9)\},$$

а НМ уровня

$$\alpha =0,9 \quad \tilde{A}_{\alpha=0,9} = \{(x_4,1), (x_5,0,9)\}.$$

Иллюстративный пример. Пусть *U*— физическое пространство сигналов, а *V* - сенсорное пространство в задачах восприятия сигналов. Отображение множества сигналов в образах сенсорного пространства представляем с помощью нечеткого соответствия

$$\Psi^*: 2^U \xrightarrow{i} \mathcal{F}(2^V),$$

т.е. любой последовательности сигналов физического пространства $u_1, u_2, ...$ ставится в соответствие динамический нечеткий образ сенсорного пространства

$$\mu_C\in\mathcal{F}(2^V)\ ;\ \mathcal{F}(2^V)=\{\mu_C|\mu_C;\ 2^V\to[0, 1]\};$$

тогда проблема определения порогов в психофизике связывается с определением уровня α для μ_C.

В ряде работ *множество нечеткого уровня* α понимается как множество элементов $x\in X$, для которых функция принадлежности больше, чем «приблизительно α», т.е. принадлежит нечеткому интервалу ($\tilde{\alpha}$, 1]. Если $\mu_{A_\alpha}=\mu^{-1}((\tilde{\alpha}$, 1]), где μ^{-1}: [0, 1]$\to X$ и $\mu_{[\alpha,\ 1]}$ – характеристическая функция интервала [α, 1] , то

$$\mu_{A_\alpha}(x)=\mu_{[\alpha,\ 1]}(\mu_A(x)) \quad \forall (x) \in X. \tag{19}$$

Продолжая обобщать структуру области определения НМ, приходим к понятию нечетких подмножеств нечетко описанных универсальных множеств.

Нечеткое множество есть НМ типа р (р = 1, 2, ...), если значениями ее функции принадлежности являются НМ типа *(р* — 1). Иначе такие объекты определяются рекурсивно как элементы классов *(р* = 0, 1, 2, ...)

$$\mathcal{F}^p{}_{\mathrm{L}}(X)\ (p = 0, 1, 2, ...)$$

где

$$\mathcal{F}^0_L(X) = X, \quad \mathcal{F}_L(X) = \mathcal{F}_L\left(\mathcal{F}^0_L(X)\right) = \{\mu \mid \mu : X \to L\};$$

$$\mathcal{F}^2_L(X) = \mathcal{F}_L(\mathcal{F}_L(X)) = \{\mu^2 \mid \mu^2 : \mathcal{F}_L(X) \to L\} \tag{20}$$

Нечеткие множества типа 2 могут интерпретироваться как нечеткие высказывания вида *«х* есть *А* есть λ», где *А* — некоторая оценка, которая принимает значения из *L,* а λ — степень истинности или достоверности этой оценки. Все операции над НМ класса $\mathcal{F}(X)$ расширяются для НМ типа 2 согласно принципу обобщения: если

$$A\text{:}\ \mu_A(x)=\{(u, f(u))\}, \quad B\text{:}\ \mu_B(x)=\{(v, g(v))\}\ \ \forall (x) \in X,$$

то $A{*}B\text{:}\ \mu_A * \mu_B = \{((u{*}v), f(u) \wedge g(v))\}$, где $\wedge$ - операция пересечения min. Когда в качестве оператора пересечения для *f(u)* и *g(v)* используется произведение, то имеем

$$\mu_A(x) * \mu_B(x) = \{(u{*}v, f(u){\bullet} g(v))\}.$$

Операция отрицания для НМ типа 2 с функцией принадлежности $\mu_A(x) = \{(u, f(u))\}\ \forall (x) \in X$ принимает вид $\mu_{\neg A}x)=\{((1-u), f(u))\}$

В отличие от класса $\mathcal{F}_L(X)=L^X$ НМ типа 2 из класса $\mathcal{F}_L(\mathcal{F}_L(X))=(L^L)^X$ не образуют дистрибутивных решеток, а дают лишь квазирешетку относительно расширенных операций объединения $\widetilde{(\max)}$, пересечения $\widetilde{(\min)}$ и дополнения.

Здесь в общем случае не выполняются законы поглощения; для того чтобы $(L^L)^X$ была дистрибутивной решеткой, нечеткие множества типа 2 должны дополнительно удовлетворять свойствам нормальности и выпуклости.

Понятие класса объектов бесконечного порядка нечеткости $\mathcal{F}^\infty_L(X)$ вводится как прямой предел последовательности отображений

$$X \xrightarrow{i_0} \mathscr{F}_{\mathrm{L}}(X) \xrightarrow{i_1} \mathscr{F}_{\mathrm{L}}^{2}(X) \xrightarrow{i_2} \dots \xrightarrow{i_{n-1}} \mathscr{F}_{\mathrm{L}}^{n}(X).$$

Класс $\mathscr{F}_{\mathrm{L}}^{\infty}$ представляет собой как бы универсум *L-нечетких* множеств, замкнутый относительно процесса построения новых *L-нечетких* множеств (дальнейшего увеличения порядка нечеткости), а элементы из $\mathscr{F}_{\mathrm{L}}^{\infty}(X)$ являются классами эквивалентности для элементов $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_{\mathrm{L}}^{n}(X)$. Соотношение между $\mathscr{F}_{\mathrm{L}}^{n}(X)$ и $\mathscr{F}_{\mathrm{L}}(X)$ устанавливается с помощью теоремы изоморфизма .

Важный частный случай нечеткого множества типа 2 - так называемое *$\mathscr{P}$-нечеткое множество,* (выбор буквы $\mathscr{P}$ объясняется тем, что, с одной стороны, принадлежность оценивается подмножеством или частью (part) интервала [0, 1], а с другой стороны, $\mathscr{P}$ обозначает класс всех четких подмножеств) каждое значение функции принадлежности которой есть не точкой, а фиксированным интервалом в [0, 1]. $\mathscr{P}$-нечеткое множество задается отображением

$$\mu: X \to 2^{[0,\,1]}. \tag{21}$$

Как показано в ряде работ, алгебра $\mathscr{P}$-нечетких множеств является булевой алгеброй. Основные операции над $\mathscr{P}$-нечеткими множествами и отношениями рассмотрены на рис. 13, 14.

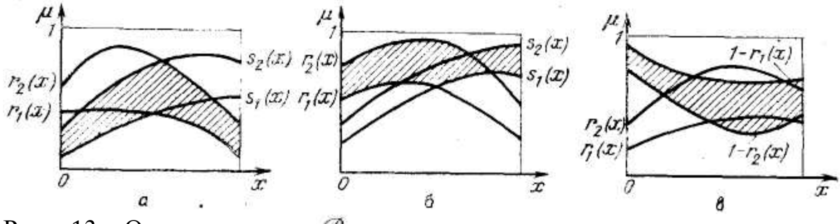


Рис. 13. Операции над $\mathscr{P}$-нечеткими множествами, изменяющие уровень принадлежности:

а — $\mu_{A\square B}(x)=[\min\{r_1(x), s_1(x)\}, \min\{r_2(x), s_2(x)\}]$;

б — $\mu_{A\cup B}(x)=[\max\{r_1(x), s_1(x)\}, \max\{r_2(x), s_2(x)\}]$; *в* — $\mu_{A'}(x)=[1-r_2(x), 1-r_1(x)]$.

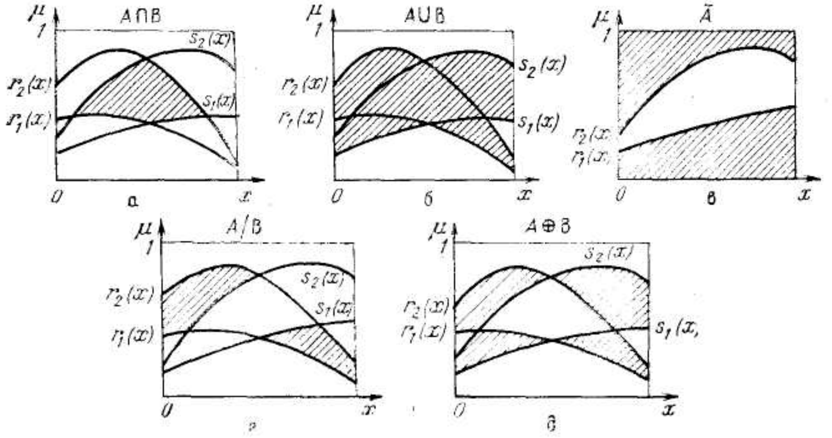


Рис. 14. Операции над $\mathscr{P}$-нечеткими множествами, изменяющие уровень нечеткости:

а— $\mu_{A\square B}$ (x)=[max $\{r_1(x),s_1(x)\}$,min$\{r_2(x), s_2(x)\}$] $\forall (x) \in X$ при условиях $s_2(x) \geq r_1(x); r_2(x) \geq s_1(x)$; *б*— μ_{AUB} (x)=[min$\{r_1(x), s_1(x)\}$, max$\{r_2(x), s_2(x)\}$] $\forall (x) \in X$ при условиях $s_2(x) \geq r_1(x)$, $r_2(x) \geq s_1(x)$; *в* — $\mu_{\bar{A}}$ (x)= [0, l]\[$r_1(x)$, $r_2(x)$] $\forall (x) \in X$; г— $\mu_{A\backslash B}$ =[$r_1(x)$, $r_2(x)$]\ [max $\{r_1(x), s_1(x)$, min$\{r_2(x),s_2(x)\}$];

д— $\mu_{A\oplus B}$ (x)= μ_{AUB} (x)\ $\mu_{\mathrm{AI}\ B}$ (x)=[min$\{r_1(x),s_1(x)\}$, max$\{r_2(x),s_2(x)\}$]\[max$\{r_1(x),s_1(x)$,min$\{r_2(x),s_2(x)\}$] $\forall (x) \in X$ при условиях $s_2(x) \geq r_1(x)$, $r_2(x) \geq s_1(x)$.

На рис. 15 дана общая классификационная схема вариантов описания нечеткой информации. С ее помощью прослеживаются возможные пути формального описания нечетких понятий.

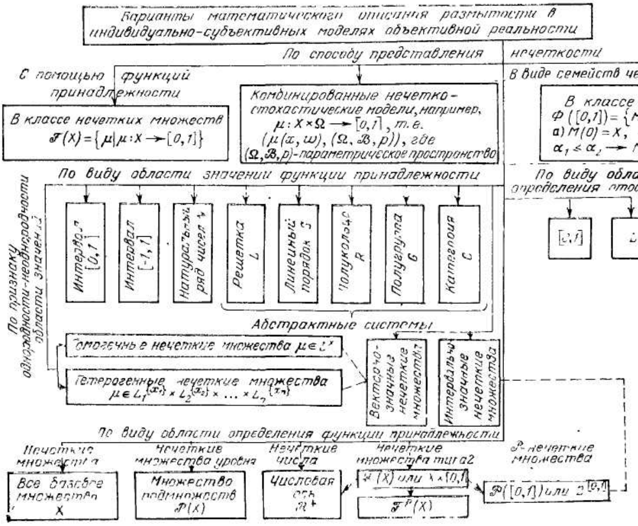


Рис 15. Классификация способов формализации нечеткости

4.3. Нечеткие операторы

Важному вопросом использования НМ в моделях управления и искусственного интеллекта является построение соответствующих операторов агрегирования нечеткой информации и анализ их семантики. В теории НМ есть возможность применять различные операции объединения, пересечения и дополнения множеств в зависимости от контекста, ситуации управления. Основные бинарные операции над НМ, которым соответствуют лингвистические связки «и» и «или» сведены в табл. 1. Ряд исследований посвящен их экспериментальному и аксиоматическому обоснованию, показано, что для любых НМ из $\mathcal{F}(X)$ операторы F=min и G=max являются единственно возможными операторами пересечения и объединения при выполнении следующих условий:

1. $F(\mu_A, \mu_B) = F(\mu_B, \mu_A)$; $G(\mu_A, \mu_B) = G(\mu_B, \mu_A)$ (коммутативность) ;

2. $F(\mu_A, F(\mu_B, \mu_C)) = F(F(\mu_A, \mu_B)\ \mu_C$;

$G(\mu_A, G(\mu_B, \mu_C)) = G(G(\mu_A, \mu_B)\ \mu_C$

(ассоциативность);

3. $F(\mu_A, \mu_B) \le F(\mu_C, \mu_D)$; $G(\mu_A, \mu_B) \le G(\mu_C, \mu_D)$, если $\mu_A \le \mu_C$, $\mu_B \le \mu_D$ (монотонность);

4. $F(\mu_A, \mu_A) < F(\mu_B, \mu_B)$; $G(\mu_A, \mu_A) < G(\mu_B, \mu_B)$, если $\mu_A < \mu_B$;

5. $F(1, 1)=1$; $G(0, 0) = 0$;

6. $F(\mu_A, \mu_B) \le \min(\mu_A, \mu_B)$; $G(\mu_A, \mu_B) \ge \max(\mu_A, \mu_B)$;

7. F и G — непрерывные функции;

8. $F(\mu_A, G(\mu_B, \mu_C)) = G(F(\mu_A, \mu_B), F(\mu_A, \mu_C))$;

$G(\mu_A, F(\mu_B, \mu_C)) = F(G(\mu_A, \mu_B), G(\mu_A, \mu_C))$

(дистрибутивность) .

Установлено, что для справедливости данного вывода вполне достаточно условий (аксиом) 2, 3, 4, 6 и 8. Этот же результат можно получить, оставляя лишь условия 3 и 8 и добавляя к ним условие ограниченности

$$F(\mu_A, 1) = F(1, \mu_A) = \mu_A, \ G(0, \mu_A) = \mu_A .$$

С другой стороны, ясно, что жесткие, поточечно однозначные операторы недостаточно полно отражают смысл многозначных лингвистических преобразований термов лингвистических переменных. Поэтому большой практический интерес представляет построение обобщенных нечетких операторов, т.е. параметризованных операторов пересечения, объединения, дополнения и др., позволяющих учесть гибкость, изменение степени компенсации операндов и т.д. Весьма общий подход к целенаправленному формированию нечетких операторов пересечения и объединения заключается в их определении в классе треугольных норм и конорм.

Треугольные нормы. *Треугольной нормой* (сокращенно t-*нормой*) называется двухместная действительная функция $\top$: $[0, 1]\times[0, 1] > [0, 1]$, удовлетворяющая следующим условиям:

1а) $\top(0, 0)=0$; $\top(\mu_A, 1) = \top(1, \mu_A) = \mu_A$ (ограниченность);

2а) $\top(\mu_A, \mu_B) \le \top(\mu_C, \mu_D)$, если $\mu_A \le \mu_C$, $\mu_B \le \mu_D$ (монотонность) ;

3а) $\top(\mu_A, \mu_B) = \top(\mu_B, \mu_A)$ (коммутативность);

4а) $\top(\mu_A, \top(\mu_B, \mu_C)) = \top(\top(\mu_A, \mu_B), \mu_C)$ (ассоциативность).

Пара ([0, 1],T) образует коммутативную полугруппу с единицей.
Треугольная норма $\top$ является архимедовой, если она непрерывна и $\top(\mu_A, \mu_A) < \mu_A$ для всех $\mu_A \in \mathcal{F}(X)$. Она называется строгой, если функция $\top$ строго возрастает по обеим аргументам, т.е. в условии 2а)

нестрогое неравенство обращается в строгое. Простыми случаями треугольных норм являются операции

$$\min(\mu_A, \mu_B),$$

$$\top_p(\mu_A, \mu_B) = \mu_A, \mu_B,$$

$$\top_m(\mu_A, \mu_B) = \max(0, \mu_A + \mu_B - 1),$$

$$\top_w(\mu_A, \mu_B) = \begin{cases} \mu_{A,} & если \quad \mu_B = 1, \\ \mu_{B,} & если \quad \mu_A = 1, \\ 0 & в\ остальных\ случаях. \end{cases}$$

Для этих t-норм справедливо неравенство

$$\top_w(\mu_A, \mu_B) \le \top_m(\mu_A, \mu_B) \le \top_p(\mu_A, \mu_B) \le \min(\mu_A, \mu_B).$$

Архемедовы t-нормы (а, следовательно, взаимодействующие операции пересечения НМ) можно представить с помощью аддитивных генераторов — одноместных, непрерывных, монотонно убывающих функций f: $[0, 1] \to \Re^+$. Функция f определяется с точностью до положительного множителя k. Тогда

$$\top(\mu_A, \mu_B) = f^{(-1)}(f\mu_A) + (f\mu_B)),$$

где функция $f^{(-1)}$ называется псевдообратной f:

$$f^{(-1)}(y) = \begin{cases} f^{(-1)}(y), & если \quad y \in [0, f(0)], \\ 0, & если \quad y \in [f(0), \infty]. \end{cases}$$

Аддитивный генератор любой строгой t-нормы имеет свойства $f(0) = +\infty$ и $f(1)=0$. В частности, t-норма $\top_m(\mu_A, \mu_B)$ порождается аддитивным генератором $f_m(\mu)=1-\mu$, а t-норма $\top_p(\mu_A, \mu_B)$ — аддитивным генератором $f_p(\mu)=-\ln\mu$. Полагая $h=e^{-f}$, можно перейти к мультипликативному представлению строгих t-норм:

$$\top(\mu_A, \mu_B) = h^{-1}(h(\mu_A) \bullet h(\mu_B)),$$

где h: $[0, 1] \to [0, 1]$, причем $h(0)=0$; $h(1)=1$. Такая функция h называется *мультипликативным генератором*.

Треугольные конормы. Функция $\perp$: $[0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ называется *треугольной конормой* (t -конормой), если:

1б) $\perp(1,1) = 1$; $\perp(0, \mu_A) = \perp(\mu_A, 0) = \mu_A$;

2б) $\perp(\mu_A, \mu_B) \ge \perp(\mu_C, \mu_D)$, если $\mu_A \ge \mu_C$, $\mu_B \ge \mu_D$;

3б) $\perp(\mu_A, \mu_B) = \perp(\mu_B, \mu_A)$;

4б) $\perp(\mu_A, \perp(\mu_B, \mu_C)) = \perp(\perp(\mu_A, \mu_B), \mu_C)$.

Треугольная конорма $\perp$ является архимедовой, если она непрерывна и $\perp(\mu_A, \mu_A) > \mu_A$. Она называется строгой, если функция $\perp$ строго убывает по обеим аргументам, т.е. в условии 2б) нестрогое неравенство превращается в строгую.

Треугольные конормы есть класс функций, двойственных треугольным нормам. Любую t-конорму $\perp$ можно получить с t-нормы $\top$ путем преобразования $\perp(\mu_A, \mu_B) = 1 - \top(1-\mu_A, 1-\mu_B)$. Простые случаи t -конорм — это операции

$$\max(\mu_A, \mu_B),$$

$$\perp_p(\mu_A, \mu_B) = \mu_A + \mu_B - \mu_A \bullet \mu_B,$$

$$\perp_m(\mu_A, \mu_B) = \min(1, \mu_A + \mu_B),$$

$$\perp_s(\mu_A, \mu_B) = \begin{cases} \mu_{A,} & если \quad \mu_B = 0, \\ \mu_{B,} & если \quad \mu_A = 0, \\ 0 & в\ остальных\ случаях. \end{cases}$$

Для них справедливо неравенство

$$\perp_s(\mu_A, \mu_B) \geq \perp_m(\mu_A, \mu_B) \geq \perp_p(\mu_A, \mu_B) \geq \max(\mu_A, \mu_B).$$

Треугольные конормы также можно построить с помощью адитивных генераторов — одноместных, непрерывных, монотонно возрастающих функций g: $[0, 1] \to \Re^+$. Имеем

$$\perp(\mu_A, \mu_B) = g^{(-1)}(g(\mu_A) + g(\mu_B)),$$

где

$$g^{(-1)}(y) = \begin{cases} g^{(-1)}(y), & если \quad y \in [0, g(1)], \\ 1, & если \quad y \in [g(1), \infty]. \end{cases}$$

Генератор любой строгой t-нормы удовлетворяет свойствам $g(1) = +\infty$ и $g(0)=0$. Примерами могут служить $g_m(\mu)=\mu$ для $\perp_m(\mu_A, \mu_B)$, а также $g_p(\mu)=-\ln(1-\mu)$ для $\perp_p(\mu_A, \mu_B)$. В случае нестрогих норм и конорм аддитивные генераторы, обладающие свойствами $f(0)=1$ и $g(1)=1$, называются *нормированными*.

Отрицания в теории нечетких множеств. В теории НМ оператор дополнения не является единственным. Кроме общеизвестного $\overline{\mu}(x)=1-(\mu)$ $\forall x \in X$ существует целый набор операторов отрицания (дополнений НМ). Наиболее общее определение функции отрицания в теории НМ c: [0, 1]→[0, 1] предполагает, что выполняются по крайней мере два следующих свойства: 1) $c(0)=1$ и $c(1)=0$; 2) c — невозрастающая функция, т.е. если $\mu_A \le \mu_B$, то $c(\mu_A) \ge c(\mu_B)$. Если же, кроме того, c есть 2) строго убывающая и 3) непрерывная функция, то она называется *строгим отрицанием*. Функция c называется *сильным отрицанием* или *инволюцией*, если рядом с требованиями 1) и 2) для нее справедливо условие 4) $c(c\mu.))=\mu$. При $c(c(\mu))\ge\mu$ отрицание называется *слабым*, а при $c(c(\mu))\le\mu$ — *обычным*. Установлено, что для любого сильного отрицания существует *генератор отрицания* — монотонно возрастающая функция t:[0, 1]→ $\Re^+$, $t(0)=0$ такая, что $c(\mu)=t^{-1}(t(l)-t(\mu))$. Отметим, что функция kt ($k>0$ — постоянный множитель) также порождает отрицание c. Например, функция $t(\mu))=\mu$ порождает классическое отрицание $c(\mu)=\overline{\mu}$ =l-μ, функция $t_r(\mu))=\mu^2$ — квадратичное отрицание $c_r(\mu)=\sqrt{1-\mu^2}$, а $t_\lambda(\mu)=\frac{1}{\lambda}$ ln(1+$\lambda(\mu)$ - отрицание Сугено $c_\lambda(\mu)=\dfrac{1-\mu}{1+\lambda\mu}$, —1<λ<∞. Иногда практический интерес представляет дополнение предельного типа

$$c_l(\mu)=\begin{cases}1 & при \quad \mu\le\alpha,\\ 0 & при \quad \mu>\alpha.\end{cases}$$

Будем называть любое значение c, для которого $c(\mu)=\mu$, *равновесной точкой е*. Для любого непрерывного отрицания существует единственная равновесная точка $e=t^{-1}(t(1)/2)$.

С помощью некоторого оператора отрицания можно расширенно определить понятие двойственности для нечетких операторов. Два оператора $\top$ и $\perp$ называются c-двойственными, если для всех

$$\mu_A, \mu_B \in \mathcal{F}(X)\ \mu_A \perp \mu_B = c^{-1}(c(\mu_A)\top(c(\mu_B)))$$

и, наоборот,

$$\mu_A \top \mu_B = c^{-1}(c(\mu_A)\perp(c(\mu_B))).$$

Например, операторы

$\top(\mu_A, \mu_B)=\dfrac{\mu_A \cdot \mu_B}{\mu_A+\mu_B-\mu_A\cdot\mu_B}$ и $(\mu_A, \mu_B)=c$- $\dfrac{\mu_A+\mu_B-2\mu_A\cdot\mu_B}{1-\mu_A\cdot\mu_B}$

двойственные относительно отрицания Сугено.

Нечеткие операторы как параметризованные семейства функций

Изложенные высшее понятие аддитивных генераторов архимедовых функций и *с*-двойственности треугольных норм и конорм служат основой для перехода к целенаправленному построению и исследованию обобщенных нечетких операторов. Перечислим наиболее интересные из них (двойственные операторы обозначаются *).

I. Семейства строгих (при 0≤γ<∞) архимедовых t-норм и *t*-конорм $\top = H_\gamma$, $\perp = H^*_\gamma$

$$H_\gamma(\mu_A, \mu_B) = \frac{\mu_A \cdot \mu_B}{\gamma + (1-\gamma)(\mu_A + \mu_B - \mu_A \cdot \mu_B)};$$

$$H^*_\gamma(\mu_A, \mu_B) = \frac{\mu_A + \mu_B + (2-\gamma)\cdot\mu_A\cdot\mu_B}{1-(1-\gamma)\cdot\mu_A\cdot\mu_B}.$$

В частных случаях имеем:

при $\gamma = 0$ $\quad H_0(\mu_A, \mu_B) = \dfrac{\mu_A \cdot \mu_B}{\mu_A \cdot \mu_B - \mu_A \cdot \mu_B}$,

при $\gamma = 1$ $\quad H_1(\mu_A, \mu_B) = \mu_A \bullet \mu_B = \top_p(\mu_A, \mu_B)$,

при $\gamma = \infty$ $\quad H_{+\infty}(\mu_A, \mu_B) = \top_w(\mu_A, \mu_B)$.

Отметим, что $H_0 \geq H_1 \geq \ldots \geq H_\infty$.

Для семейства конорм получаем, в частности,

$$H^*_0(\mu_A, \mu_B) = \frac{\mu_A + \mu_B - 2\cdot\mu_A\cdot\mu_B}{1-\mu_A\cdot\mu_B},$$

$$H^*_1(\mu_A, \mu_B) = \mu_A + \mu_B - \mu_A \bullet \mu_B = \perp_p.$$

При γ=2 конорма H^*_γ обращается в оператор Лоренца

$H^*_2(\mu_A, \mu_B) = \dfrac{\mu_A + \mu_B}{1+\mu_A\cdot\mu_B}$, тогда как $H^*_{+\infty}(\mu_A, \mu_B) = \perp_s(\mu_A, \mu_B)$.

Здесь

$$H^*_0 \leq H^*_1 \leq \ldots \leq H^*_\infty.$$

II. Семейства строгих (при 0≤γ<∞) архимедовых *t*-норм и *t*-конорм $\top = D_\lambda$; $\perp = D^*_\lambda$ (λ>0)

$$D_\lambda(\mu_A, \mu_B) = \left\{1 + \left[\left(\frac{1-\mu_A}{\mu_A}\right)^{\lambda} + \left(\frac{1-\mu_B}{\mu_B}\right)^{\lambda}\right]^{\frac{1}{\lambda}}\right\}^{-1};$$

$$D^*_\lambda(\mu_A, \mu_B) = \left\{1 + \left[\left(\frac{1-\mu_A}{\mu_A}\right)^{-\lambda} + \left(\frac{1-\mu_B}{\mu_B}\right)^{-\lambda}\right]^{-\frac{1}{\lambda}}\right\}^{-1}.$$

При $\lambda \to \infty$ получаем треугольную норму

$$D_{+\infty}(\mu_A, \mu_B) = \min(\mu_A, \mu_B).$$

Отметим, что

$$\lim_{\gamma \to 0} H_\gamma(\mu_A, \mu_B) = D_1(\mu_A \bullet \mu_B).$$

Для двойственной D_λ t-конормы D^*_λ имеем

$$\lim_{\gamma \to 0} H_\gamma(\mu_A, \mu_B) = D^*_1(\mu_A, \mu_B),$$

а при $\lambda \to \infty$ $D^*_{+\infty}(\mu_A, \mu_B) = \max(\mu_A, \mu_B)$.

Здесь

$$D_1 \le D_2 \le \ldots \le D_\infty, \text{ а } Z>; D^*_1 \ge D^*_2 \ge \ldots \ge D^*_\infty.$$

III. Семейства операторов Сугено $\top = S_\lambda$; $\perp = S^*_\lambda$ ($\lambda \ge -1$).

$$S_\lambda(\mu_A, \mu_B) = \max[0, \mu_A + \mu_B - 1 - \lambda(1-\mu_A)(1-\mu_B)];$$

$$S^*_\lambda(\mu_A, \mu_B) = \min[1, \mu_A + \mu_B + \lambda \bullet \mu_A \bullet \mu_B].$$

При увеличении параметра λ, оба семейства функций возрастают.
Для

$$\lambda = -1 \quad S_{-1}(\mu_A, \mu_B) = \top_w(\mu_A, \mu_B),$$

для

$$\lambda = 0 \quad S_0(\mu_A, \mu_B) = \max(0, \mu_A + \mu_B - 1) = \top_m(\mu_A, \mu_B),$$

а в случае

$$\lambda = \infty \quad S_\infty(\mu_A, \mu_B) = \top_p.$$

Соответственно

$$S^*_{-1}(\mu_A, \mu_B) = \mu_A + \mu_B - \mu_A \bullet \mu_B = \perp_p(\mu_A, \mu_B),$$

$$S^*_0(\mu_A, \mu_B) = \min(1, \mu_A + \mu_B) = \perp_m(\mu_A, \mu_B],$$

$$S^*_\infty(\mu_A, \mu_B) = \perp_s(\mu_A, \mu_B).$$

Свойство c-двойственности S_λ и S^*_λ выполняется для

$$c_\lambda(\mu)=\frac{1-\mu}{1+\lambda\mu}.$$

IV. Семейства *t*-норм и *t* -конорм $\top= Y_q$; $\bot=Y^*_q$ ($q\geq 0$)

$$Y_q(\mu_A, \mu_B)=1-\min[1,(1-\mu_A)^q+(1-\mu_B)^q]^{1/q},$$

$$Y^*_q(\mu_A, \mu_B)=\min[1, \mu_A{}^q+\mu_B{}^q]^{1/q}.$$

Здесь

$$Y_o(\mu_A, \mu_B)=\top_w(\mu_A, \mu_B),$$

$$Y_1(\mu_A, \mu_B)=\top_m(\mu_A, \mu_B),$$

$$Y_\infty(\mu_A, \mu_B)=\min(\mu_A, \mu_B),$$

т.е. $Y_0\leq Y_1\leq\ldots\leq Y_\infty$.

$$Y^*_0(\mu_A, \mu_B)=\bot_s(\mu_A, \mu_B),$$

$$Y^*_1(\mu_A, \mu_B)=\bot_m(\mu_A, \mu_B),$$

$$Y^*_\infty(\mu_A, \mu_B)=\max(\mu_A, \mu_B).$$

Соответственно $Y^*_в\geq Y^*_1\geq\ldots\geq Y^*_\infty$.

V. Семейства *t*-норм и *t*-конорм $\top= E_p$; $\bot=E^*_p$ ($p\in\Re$)

$$E_p(\mu_A, \mu_B)=\max[0, \mu_A{}^{-p}+\mu_B{}^{-p}-1]^{-(1\backslash p)};$$

$$E^*_p(\mu_A, \mu_B)=1-\max[0,(1-\mu_A)^{-p}+(1-\mu_B)^{-p}-1]^{-(1\backslash p)}.$$

Имеем

$$E_{-1}(\mu_A, \mu_B)=\top_m(\mu_A, \mu_B),\ E_{+\infty}(\mu_A, \mu_B)=\min(\mu_A, \mu_B),$$
$$E_{-\infty}(\mu_A, \mu_B)=\top_w(\mu_A, \mu_B).$$

VI. Семейства *t* -норм и *t* -конорм $\top= C_p$; $\bot=C^*_p$ ($p\geq 1$)

$$C_p(\mu_A, \mu_B)=\max[0, \mu_A{}^{2p-1}+\mu_B{}^{2p-1}-1]^{1/(2p-1)};$$

$$C^*_p(\mu_A, \mu_B)=1-\max[0,(1-\mu_A)^{2p-1}+(1-\mu_B)^{2p-1}-1]^{1/(2p-1)}.$$

При $p=1$

$$C_1(\mu_A, \mu_B)=\top_m(\mu_A, \mu_B),$$

а при $p=\infty$

$$C_\infty(\mu_A, \mu_B)=\top_w(\mu_A, \mu_B).$$

VII. Семейства *t*-норм и *t*-конорм $\top= F_s$; $\bot=F^*_s$ ($s>0$)

$$F_s(\mu_A, \mu_B)=\log_s\left[1+\frac{(s^{\mu_A}-1)(s^{\mu_B}-1)}{s-1}\right];$$

$$F^*_s(\mu_A, \mu_B) = 1 - \log_s\left[1 + \frac{\left(s^{1-\mu_A} - 1\right)\left(s^{1-\mu_B} - 1\right)}{s - 1}\right].$$

Данное семейство операторов является единственным, которое удовлетворяет условию

$$\top(\mu_A, \mu_B) + \perp(\mu_A, \mu_B) = \mu_A + \mu_B$$

В частных случаях

$$F_o(\mu_A, \mu_B) = \min(\mu_A, \mu_B),$$

$$F_1(\mu_A, \mu_B) = \mu_A \bullet \mu_B = \top_P(\mu_A, \mu_B)»$$

$$F_{+\infty}(\mu_A, \mu_B) = \top_m(\mu_A, \mu_B).$$

VIII. Семейства операторов $\top = DP_q$; $\perp = DP^*_q$ ($0 \leq q \leq 1$)

$$DP_q(\mu_A, \mu_B) = \frac{\mu_A \cdot \mu_B}{\max(\mu_A, \mu_B, q)};$$

$$DP^*_q(\mu_A, \mu_B) = \frac{\mu_A + \mu_B - \mu_A \cdot \mu_B - \min(\mu_A \cdot \mu_B, 1 - q)}{\max(1 - \mu_A, 1 - \mu_B, q)}.$$

Все эти варианты определения нечетких операторов можно обобщить, если рассмотреть их не в классе t-норм и t-конорм, а в классе бинарных операций на множестве действительных чисел $\Re$, обладающих аналогичными свойствами.

Помимо нечетких операторов, которые входят в класс t -норм и t -конорм, существуют операторы осреднения

$$\mathcal{M}: [0, 1]\times[0, 1] \rightarrow [0, 1],$$

удовлетворяющие основному требованию

$$\mathcal{M}(\mu_{A_1}, ..., \mu_{A_n}) \in \left[\min(\mu_{A_1}, ..., \mu_{A_n}), \max(\mu_{A_1}, ..., \mu_{A_n})\right].$$

Например, обобщенный оператор осреднения

$$\mathcal{M}_w(\mu_{A_1}, ..., \mu_{A_n}) = \sqrt[w]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu^w{}_{A_i}}$$

дает

при w=1

$$\mathcal{M}_1(\mu_{A_1}, ..., \mu_{A_n}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_{A_i}$$, (среднее арифметическое),

при w= -1

$$\mathcal{M}_{-1}(\mu_{A_1},...,\mu_{A_n}) = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\mu_{A_i}}}$$, (среднее гармоническое),

при $w=0$

$$\mathcal{M}_0(\mu_{A_1},...,\mu_{A_n}) = \sqrt[n]{\mu_{A_1},...,\mu_{A_n}}$$, (среднее геометрическое).

В случае $w\to -\infty$

$$\mathcal{M}_{-\infty}(\mu_{A_1},...,\mu_{A_n}) = \min(\mu_{A_1},...,\mu_{A_n}),$$

а при $w\to+\infty$

$$\mathcal{M}_{+\infty}(\mu_{A_1},...,\mu_{A_n}) = \max(\mu_{A_1},...,\mu_{A_n}).$$

Таким образом, теория нечетких множеств имеет в своем распоряжении значительное количество гибких параметризованных операторов, позволяющих агрегировать нечеткую информацию с учетом изменчивости ситуационных данных.

4.4. Показатели размытости нечетких множеств

4.4.1. Основные виды показателей размытости

Как уже отмечалось, нечеткие множества используются для описания плохо определенных, неднознчно понимаемых ситуаций, объектов, понятий. В ряде работ предложено ввести в рассмотрение показатель этой неопределенности, который можно было бы использовать для оценки, классификации объектов, описываемых НМ. Сформулированы основные свойства, которым должен удовлетворять такой показатель, называемый *показателем размытости (мерой энтропии)* нечетких множеств, и в качестве этого показателя предложен функционал, аналогичный шенноновской энтропии в теории информации. В настоящее время существует большое количество работ, в которых рассматриваются разные подходы к определению показателя размытости НМ, обсуждаются их свойства и возможные приложения.

Можно выделить несколько аспектов, связанных с понятием показателя размытости НМ.

Первый аспект это — интерпретация показателя размытости как показателя внутренней неопределенности, двусмысленности, противоречивости, обусловленных неполной, частичной принадлежностью объектов множеству.

Второй аспект связан с интерпретацией показателя размытости как меры отличия нечеткого множества от обычного множества.

И наконец, *третий аспект,* существование нетривиального показателя размытости, удовлетворяющего определенным свойствам, оказывается тесно связанным со свойствами самой алгебры НМ и характеризует ее как алгебраическую структуру.

В соответствии с этими *тремя аспектами* и будут рассмотрены основные результаты, которые связаны с понятием показателя размытости НМ.

4.4.2. Аксиоматическим подход к определению показателей размытости НМ

В ряде работ по теории НМ были сформулированы основные свойства, выполнение которых разумно потребовать от показателя размытости нечетких множеств, предложены различные модификации и дополнения этих свойств, положенные в основу аксиоматического определения показателя нечеткости НМ.

Показатель размытости НМ можно определить как меру внутренней неопределенности, двусмысленности объектов множества *X* по отношению к некоторому свойству *A,* характеризуещему эти объекты и определяющему в *X* НМ объектов *A*. Если некоторый объект $x \in X$ обладает свойством *A,* но лишь в частичной мере:

$$0<\mu_A(x)<1,$$

то внутренняя неопределенность, двусмысленность объекта *x* по отношению к свойству *A* проявляется в том, что он, хотя и в разной степени, принадлежит сразу двум противоположным классам: классу объектов, «обладающих свойством *A*», и классу объектов, «не обладающих свойством *A*». Эта двусмысленность объекта *x* по отношению к свойству *A* максимальна, когда степени принадлежности объекта *x* до обеим классам « *A* » и «не *A* » равны, т.е.

$$\mu_A(x)=0{,}5 \text{ и } \mu_{\text{не } A}(x)=1-\mu_A(x)=0{,}5.$$

И наоборот, двусмысленность объекта минимальна, когда объект принадлежит только к одному из этих классов, т.е. или

$$\mu_A(x)=1,\ \mu_{\text{не } A}(x)=0, \text{ или } \mu_A(x)=0,\ \mu_{\text{не } A}(x)=1.$$

Таким образом, глобальный *показатель размытости* НМ *A* можно определить в виде функционала

$$d: \mathcal{F}(X) \to \Re^+$$

удовлетворяющего следующим условиям:

B1. $d(A)=0$ тогда и только тогда, когда A - обычное множество;

B2. $d(A)$ принимает максимальное значение тогда и только тогда, когда

$$\mu_A(x)=0,5 \quad \forall x \in X;$$

B3. $d(A)\leq d(B)$, если A является *заострением* B: $\mu_A \leq' \mu_B$, т.е. $\mu_A(x)\leq\mu_B(x)$ при $\mu_B(x)<0,5$, $\mu_A(x) \geq\mu_B(x)$ при $\mu_B(x)>0,5$ и $\mu_A(x)$- любое при $\mu_B(x)=0,5$;

B4. $d(A)\leq d(\overline{A})$, (симметричность по отношению к 0,5),

B5. $d(A \cup B)+d(A \cap B)= d(A)+d(B)$, т.е. d является оценкой на решетке $\mathcal{F}(X)$.

Условие B4 представляется достаточно естественным, а B5 приводит к аддитивности показателя нечеткости d.

В ряде работ установлено, что условие B5 при конечному X выполняется для любой функции d: $\mathcal{F}(X)\to \Re^+$ тогда и только тогда, когда d допускает представление

$$d(A)=\sum_{j=1}^{N} T_j(\mu_A(x_j)), \tag{28}$$

где $T_i(y)$ -вещественнозначные функции от $y\in [0, 1]$, и N— число элементов множества $X = \{x_1 .. ., x_N\}$.

У последующих роботах предложено усилить условие B3 и потребовать наряду с условиями B1 и B2 строгого возрастания d (предложено условие B6):

B6. $d(A)<d(B)$, если A является заострением B и $A\neq B$.

Тогда условие B2 оказывается лишним, так как оно следует из B6, а из B6, B5 следует, что условие B1 можно заменить на более простое: B7.

B7. $d(\varnothing)=0$, где $\varnothing$ — наименьшим элемент решетки $\mathcal{F}(X)$, т.е. $\varnothing(x) = 0$ для всех $x\in X$.

Условия B5 и B7 эквивалентны условию B8.

B8. $d(A \cup B)= d(A)+d(B)$, если $A \cap B=\varnothing$.

Итак, показатель размытости можно рассматривать как аддитивный (B8), симметричный (B4) и строго возрастающий с увеличением размытости нечеткого множества (B6) функционал, определенный на $\mathcal{F}(X)$. Можно показать, что вещественный, определенный на $\mathcal{F}(X)$ функционал является показателем размытости на $\mathcal{F}(X)$, тогда и только тогда, когда он допускает представление

$$d(A)=\sum_{j=1}^{N} T_j(\mu_A(x_j)), \tag{29}$$

где для всех $j\in J=\{1, 2,\dots,\text{N}\}$, $T_j(y)$—вещественные функции от

$y \in [0, 1]$ такие что $T_j(0)=0$, $T_j(y)= T_j(1-y)$, и $T_j(y)$ строго возрастают на интервале [0; 0,5]. Здесь предполагается, что $X = \{x_1, .. ., x_N\}$.

По аналогии из шенноновской энтропией теории информации вводится логарифмическая энтропия НМ:

$$d(A)=k\sum_{j=1}^{N} S(\mu_A(x_j)), \qquad (30)$$

где S — функция Шеннона

$$S(y)= -y \ln y-(1-y) \ln (1-y) \qquad (31)$$

и k — положительная константа. В (31) полагается, что $S(0)=S(1)=0$. В ряде работ исследуются также свойства показателя размытости (28), в котором функция $T_j(y)$ имеет следующий вид:

$$T(y)= h(y)+ h(1-y), \qquad (32)$$

где $h(y)$ - непрерывные и строго вогнутые функции в интервале [0 , 1] такие, что

$$\lim_{y\to 0} h(y) = \lim_{y\to 1} h(1) = 0$$

Этот показатель размытости связан с *мощностью* НМ

$$P(A)=\sum_{j=1}^{N} \mu_A(x_j)$$

следующим неравенством:

$$d(A)\le NT(P(A)/N).$$

В (32) функции h могут быть записаны в виде $h(y)= yL(1/y)$, где L - *непрерывнная* вогнутая функция в $(1, +\infty)$. Выбор в качестве L функции $L(y)=\ln(y)$ приводит к логарифмической энтропии (30), выбор $L(y)=1 — 1/y$ приводит к функционалу, который имеет вид:

$$d(A)=\sum_{j=1}^{N} \mu_A(x_j)[1- \mu_A(x_j)]. \qquad (33)$$

Если определить моменты нечеткого множества в виде :

$$M_k(A)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \{\mu^k_A(x_j)[1- \mu_A(x_j)]+)[1- \mu_A(x_j)]^k \mu_A(x_j)],\ k=1, 2,...,\infty,$$

то показатель размытости (33) будет моментом первого порядка, а логарифмическая энтропия может быть выражена через моменты следующим образом

$$d(A)=2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k(A)}{k}.$$

Если отказаться от условия аддитивности В5, то показатель размытости может быть задан, например, как монотонно возрастающая функция от (29) :

$$d(A)=F[\sum_{j=1}^{N} T_j\,(\mu_A(x_j))]. \tag{34}$$

В ряде работ рассматриваются дополнительные аксиомы строгой выпуклости и обобщенной аддитивности. Выбор конкретного показателя зависит от условия задачи. В следующем разделе будет показано, что показатель размытости нечетких множеств может быть задан с помощью метрики, введенной в $\mathcal{F}(X)$. В ряде работ обсуждается связь между показателем размытости НМ и неопределенностью, возникающей при принятии решения, к какому с двух классов «*A*» или «не *A»* отнести объекты множества *X***.** В практике человеку часто приходится принимать подобные решения, когда необходимо отнести объект к одному из двух классов, характеризующихся противоположными свойствами типа: «белый — черный», «пригоден — не пригоден», «нравится — не нравятся», «хороший — плохой» и т.п. Такие решения вызывают у лица, принимающего решение, неопределенность, которая обусловлена тем, что объекты часто обладают сразу обеими противоположными свойствами, хотя и в разной мере. Можно предположить, что показатель этой неопределенности зависит от размытости ситуации, в которой принимается решение. Предполагается, что показатель неопределенности решений может удовлетворять тем же свойствам, которые и показатель размытости нечетких множеств. Однако систему свойств, которым должен удовлетворять показатель неопределенности, можно и ослабить, заменив в системе свойств (В4, В6, В8) условие В6 на более слабое В3. Это приводит к нестрогому возрастанию функций $T_i(y)$ в (29), а условия В1 и В2 заменяются также на более слабые условия:

В9. $d(A)=0$, если *A* — обычное множество,

В10. $d(A)$ максимально, если $\mu_A(x)=0{,}5 \quad \forall\, x\in X$.

Такое определение меры неопределенности решения в размытой ситуации позволяет включить в рассмотрение пороговые функции принятия решений, например, такие:

$$T_j(y)=\begin{cases} 0, & \text{если}\quad 0\le y<\alpha, \\ c, & \text{если}\quad \alpha\le y\le 1-\alpha, \\ 0, & \text{если}\quad 1-\alpha<y\le 1, \end{cases} \tag{35}$$

где $\alpha \le 0{,}5$ - некоторый параметр, который зависит от условий принятия решений, а c — некоторая константа.

4.4.3. Метрический подход к определению показателей размытости НМ

Показатель размытости нечетких множеств можно определить как меру отличия нечеткого множества от ближайшей к нему обычного четкого множества с помощью метрики, введенной в $\mathcal{F}(X)$. Другой способ задання показателя размытости с помощью метрики — это определение его с помощью расстояния до максимального нечеткого множества $A_{0,5}$:

$$\mu_{A_{0,5}}(x)=0{,}5 \quad \forall\, x \in X$$

и расстояния между нечетким множеством и его дополнением. Оказывается, эти подходы имеют много общего между собой, и определяемый с помощью метрики показатель размытости обладает многими свойства, сформулированными в предыдущем разделе. Множеством, ближайшим к нечеткому множеству $\tilde{A}$, называется четкое множество A такое, что $\mu_A(x)=0$ при $\mu_{\tilde{A}}(x)\leq 0{,}5$ и $\mu_A(x)=1$ при $\mu_{\tilde{A}}(x)>0{,}5$.

Показателем размытости называется функционал

$$d(A)=\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N} |\mu_{\tilde{A}}(x_j)-\mu_A(x_j)|, \tag{36}$$

который может быть представлен также в виде:

$$d(A)=\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N} \mu_{\tilde{A}\Box A}(x_j).$$

Если вместо расстояния Хемминга в (36) использовать евклидово расстояние, то получим:

$$d(A)=\frac{2}{\sqrt{N}}\sqrt{\sum_{j=1}^{N}\left(\mu_{\tilde{A}}(x_j)-\mu_A(x_j)\right)^2}\ . \tag{37}$$

Показатели (36) и (37) имеют, соответственно, вид (29) и (34) и удовлетворяют соответствующим свойствам показателя размытости. В случае произвольной метрики функция

$$d(A)=\rho(\tilde{A}, A)$$

удовлетворяет условиям В1, В3, В10.

Показатель размытости можно задать с помощью расстояния между нечетким множеством и его дополнением :

$$d(A)=k[\rho(\varnothing,U)-\rho(\tilde{A}, A)],$$

где

$$U(x)=1 \quad \forall x\in X, \text{ а } \rho(\tilde{A}, A)$$

в случае метрического свидетельства Хемминга имеет вид:

$$\rho(\tilde{A}, A)= \sum_{j=1}^{N} |\mu_A(x_j)- \mu_{\tilde{A}}(x_j)|= \sum_{j=1}^{N} |2\mu_A(x_j)- 1|.$$

В общем случае такой показатель размытости удовлетворяет условиям В2, В3, В4, В9.

Показатель размытости можно задать функционалом :

$$d(A)=\frac{1}{2}\rho(\varnothing,U)-\rho(\tilde{A}, A_{0,5}),$$

который удовлетворяет, в общем случае, лишь свойствам В1, В2 и В3.

В общем случае разные показатели размытости, а также мощности НМ можно получить на базе метрики Минковского, заданной в классе нечетких множеств $\mathcal{F}(X)$. В ряде работ введено понятие энтропии произвольной операции в $\mathcal{F}(X)$ как расстояния между результатом этой операции и максимально нечетким НМ

$$\mu_A(x)=0,5 \quad \forall x\in X$$

Предложен также показатель взаимной компенсации операндов в виде расстояния между результатом рассмотренной операции и результатом операции пересечения $\wedge$ (показатель рискованности решения).

Как видим, наиболее общими свойствами, которыми обладают показатели размытости при метрическом подходе для метрики произвольного вида, являются В3, В9, В10. Свойства В1 и В2 в зависимости от определения показателя размытости не выполняются для метрики

$$\rho(A, B)= \sup_{x\in X}|\mu_A(x_j)- \mu_B(x_j)|.$$

Свойство В4 выполняется для большинства известных. А свойство В5 выполняется для метрик, которые приводят к аддитивной мере (28). В следующем разделе будет, в частности, показано, что между показателями размытости, которые удовлетворяют условиям В4, В6, В8, и метриками определенного класса может быть установленно взаимно однозначное соответствие.

4.4.4. Связь показателя размытости с алгебраическими свойствами решетки НМ

Существование показателя размытости НМ оказывается тесно связанным со свойствами алгебры НМ Заде. Для алгебры обычных множеств показатель размытости со свойствами В4, В6, В8 вырождается в тривиальный показатель, всюду равный нулю. Для более общих алгебр такого показателя просто не существует. Вначале укажем соотношения, которые существуют между произвольными положительными оценками (и определяемыми ими метриками) и показателями размытости, а потом установим связь между свойствами показателя размытости и свойствами алгебры НМ.

Положительной оценкой на решетке НМ $\mathcal{F}(X)$ называется функция

$$v: \mathcal{F}(X) \rightarrow \Re^{+},$$

удовлетворяющая свойству

$$v(A \cup B) + v(A \cap B) = v(A) + v(B) \tag{38}$$

и условию

$$\text{из } A \subset B \text{ следует } \quad v(A) < v(B). \tag{39}$$

Положительная оценка v определяет на $\mathcal{F}(X)$ метрику:

$$\rho(A, B) = v(A \cup B) - v(A \cap B). \tag{40}$$

Решетка $\mathcal{F}(X)$ с положительной оценкой v и метрикой (40) называется метрической решеткой НМ.

Метрика называется симметричной, если она удовлетворяет условию

$$\rho(A, B) = \rho\left(\overline{A}, \overline{B}\right). \tag{41}$$

Так как в алгебре нечетких множеств выполняются законы де Моргана:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \tag{42}$$

то из (38), (40) и (42) получаем, что метрика является симметричной тогда и только тогда, когда она определяется симметричной оценкой, т.е. такой оценкой, которая удовлетворяет условию

$$v(A) + v(\overline{A}) = v(\varnothing) + v(U). \tag{43}$$

Теорема 1. В метрической решетке нечетких множеств функционалы

$$d(A) = 2k[v(U) - v(\tilde{A} \cup A)], \tag{44}$$

$$d(A) = 2k[v(\tilde{A} \cap A) - v(\varnothing)], \tag{45}$$

$$d(A)=k[\rho(\varnothing,U)-\rho(\tilde{A}, A)], \qquad (46)$$

удовлетворяют свойствам B4, B6, B8. Они попарно тождественны тогда и только тогда, когда положительная оценка v симметрична. Приведем основные моменты доказательства теоремы. Условие B6 следует из (39) и из того факта, что A является заострением B, если

$$A \cap \overline{A} \subseteq B \cap \overline{B} \text{ и } B \cup \overline{B} \subseteq A \cup \overline{A}.$$

Условие B4 очевидно. Условие B8 следует из (38) и из соотношения

$$(A) \cap \overline{A} \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap \overline{A}, \qquad (47)$$

которое выполняется для всех $A, B \in \mathcal{F}(X)$.

Справедливость второй половины теоремы следует из того, что (46) является полусуммой (44) и (45), а (38) приводит к

$$v(A \cup \overline{A}) + v(A \cap \overline{A}) = v(A)+v(\overline{A}).$$

Теорема 2. Если ρ симметричная метрика, то функционал

$$d(A)=k[\rho(\varnothing,U)-2\rho(\tilde{A}, A_{0,5})], \qquad (48)$$

удовлетворяет свойствам B4, B6, B8 и тождествен функционалам (44) — (46), причем для любого показателя размытости, введенного на $\mathcal{F}(X)$ и удовлетворяющего свойствам B4, B6, B8, существует единственная, согласованная с ним соотношением (48), симметричная метрика.

Справедливость первой половины теоремы следует из того, что любая оценка v на $\mathcal{F}(X)$ представима в виде (28)

$$v(A)=\sum_{j=1}^{N} Q_j(\mu_A(x_j)),$$

что вместе с (43) приводит к

$$\rho(\tilde{A}, A)= 2\rho(\tilde{A}, A_{0,5})$$

Последнее соотношение совместно с (46) приводит к (48). Справедливость второй половины теоремы следует из того, что любой показатель размытости d, удовлетворяющий свойствам B4, B6, B8, можно представить в виде (29). Тогда оценка

$$v(A)=\sum_{j=1}^{N} Q_j(\mu_A(x_j)),$$

где

$$Q_j(y)=\begin{Bmatrix} T_j(y) & \text{при } y \le 0{,}5 \\ 2T_j(0{,}5)-T_j(y) & \text{при } y > 0{,}5 \end{Bmatrix} =$$

$$= T_j(0{,}5)+\operatorname{sign}(y-0{,}5)[T_j(0{,}5)-T_j(y)]$$

является положительной, которая удовлетворяет условию (43) и определяет симметричную метрику, согласованную с показателем размытости *d*.

Примером симметричной оценки на решетке НМ может служить *энергия нечеткого множества*

$$E(\widetilde{A})=\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \mu_A(x_j),$$

которая определяет *симметричную метрику*

$$\rho(A, B)=\sum_{j=1}^{N} \lambda_j |\mu_A(x_j)- \mu_B(x_j)|$$

и согласованную с ней *меру энтропии:*

$$d(\widetilde{A})=E(\widetilde{A} \square A)=2\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \min\{\mu_A(x_j), 1- \mu_A(x_j)\}=$$

$$=\sum_{j=1}^{N} \lambda_j - 2\sum_{j=1}^{N} \lambda_j |\mu_A(x_j)- 0,5|.$$

Поскольку при доказательстве теоремы 1 используются лишь алгебраические свойства решетки нечетких множеств ($\mathcal{F}$ $(X), \cup, \cap, -$), которая является нормальной алгеброй де Моргана (алгеброй Клини), так как удовлетворяет тождествам (42) и (47), то эта теорема может быть обобщена на произвольные нормальные алгебры де Моргана ($L_m, \cup, \cap, -$), т.е. дистрибутивные решетки L_m, в которых выполняются законы де Моргана (42) и условие нормальности (47). Более того, оказывается, что меры размытости могут быть определены на произвольной алгебре де Моргана лишь в том случае, когда она является нормальной, т.е. когда в ней выполняется условие (47).

Сформулируем условия, аналогичные условиям В4, В6, В8, для произвольных алгебр де Моргана ($L_m, \cup, \cap, -$). Условие В8 удобнее будет записать в виде В5 и В7:

А1. $d(\varnothing)=0$.

А2. $d(A)= d(\overline{A})$.

А3. $d(A)<d(B)$, если $A \cap \overline{A} \subset B \cap \overline{B}$.

А4. $d(A \cup B)+d(A \cap B)= d(A)+d(B$.

Теорема 3. На метрической алгебре де Моргана L_m с положительной оценкой *v* может быть задана функция *d*, удовлетворяющая условиям

А1 — А4, тогда и только тогда, когда L_m является нормальной алгеброй де Моргана. Эта функция всюду на L_m равна нулю тогда и только тогда, когда L_m является булевой алгеброй. Функции (44) — (46), которые определены на L_m, удовлетворяют условиям А1 — А4. Они попарно тождественны тогда и только тогда, когда оценка v симметрична. Оценка v симметрична тогда и только тогда, когда определяемая ею метрика симметрична.

Теорема 2 выполняется в метрической алгебре де Моргана L_m лишь при некоторых дополнительных условиях на L_m.

В некоторых роботах с помощью функционалов, аналогичных (44) — (46), вводятся показатели неопределенности на алгебре «стандартной логики неопределенности». Как следует из теоремы 3, алгебру такой логики можно задать в виде нормальной алгебры де Моргана. Заметим, что показатель неопределенности, определяемый условиями В3, В4 и В8, в частности, вида (35), можно задать на алгебре нечетких множеств с помощью изотонной оценки, определяемой условием: из $A \subseteq B$, следует $v(A) \leq v(B)$.

Для такого показателя неопределенности многие результаты этого раздела будут выполняться при замене в утверждениях положительной оценки на изотонную, метрики на псевдометрику и т.п.

4.4.5. Другие подходы к определению показателей размытости

В некоторых роботах предлагается обобщение понятия показателя неопределенности на случай M ортогональных свойств, т.е. таких

$$A^j \ (j=1, 2, \ldots, M), \text{что} \quad \sum_{j=1}^{M} \mu_{A^j}(x) = 1 .$$

Обычный показатель размытости получается при M=2. Этот обобщенный показатель неопределенности описывается для каждого $x \in X$ с помощью функций (32):

$$H(x) = \sum_{j=1}^{M} h(\mu_{A^j}(x)) .$$

Этот показатель может использоваться при анализе процессов принятия решений на основе описания объектов с помощью M ортогональных свойств.

Рассмотрим еще один вариант аксиоматизации показателей нечеткости, где рассмотрен класс C дополнений в алгебре НМ, введено понятия равновесного значение $c(x)=x$ и дана интерпретация условия В3

B11. $\mu_A \leq' \mu_B$, если $|\mu_A(x)- c(\mu_A(x))| \geq |\mu_B(x)- c(\mu_B(x))|$.

Обобщение показателя размытости на случай L-нечетких множеств приводится во многих роботах**.** Например, когда L — векторная решетка, показатель размытости (29) может быть записан в виде вектора

$$d(\widetilde{A})=\begin{bmatrix} d_1(\widetilde{A}) \\ d_2(\widetilde{A}) \\ \square \\ d_k(\widetilde{A}) \end{bmatrix}$$

или его свертки

$$d(\widetilde{A})=\sum_{j=1}^{k} d_j(\widetilde{A})$$

где $d_j(\widetilde{A})$ - показатель размытости НМ A^j, характеризующего множество X по j-му признаку, критерию, свойству, а $\widetilde{A}$ - это совокупность таких A^j, описывающих различные стороны объектов из X. Заметим, что обобщение показателя размытости на L-нечеткие множества $\mu_A : X \to L$, может быть получено в случае, когда L является нормальной алгеброй де Моргана, с помощью теоремы 3.

В ряде работ приводится обобщение понятия показателя размытости НМ на случай произвольного (не обязательно конечного) множества X**.** Эти подходы основаны, соответственно, на понятиях сходящегося ряда, интеграла по мере и нечеткого интеграла. В последнем случае условие В5 отбрасывается, и определяются неаддитивные показатели размытости вида sup-min или sup-prod. Другой подход может быть основан на теореме 3 при существовании положительной оценки на решетке НМ.

Двойствнно понятию показателя размытости может быть введено понятие показателя неразмытости, меры заостренности НМ. Подобная мера, двойственная функционалу (33), вводится в некоторых роботах. Довольно специфический показатель размытости, характеризующий степень разделимости нечетких образов, используется в задачах автоматической классификации. Вводится также показатель неопределенности, как число элементов множества X, для которых $\mu_A(x)>0$. Здесь X означает множество различных способов выполнения нечеткой программы A.

Предлагается показатель размытости вводить как число плохо определенных элементов множества X, т.е. таких, для которых $0<\mu_A(x)<1$, а в общем случае $\varepsilon<\mu_A(x)<1-\varepsilon$, где ε - ширина некоторого интервала, который характеризуется функцией принадлежности, $\varepsilon \in [0, 0{,}5]$. Подобный показатель используется как характеристика неопределенности представлений и понятий, используемых на разных уровнях иерархического описания систем.

Показатели размытости НМ могут использоваться при анализе процессов принятия решений. В этом случае показатель размытости может трактоваться как показатель неопределенности, которая возникает при выборе в плохо определенной ситуации. Последовательность решений, обучение могут уменьшать эту неопределенность. Естественно предполагать, что в процессе обучения лицо, принимающее решение, получает информацию, количество которой равно количеству имевшейся ранее неопределенности. Предлагается в качестве показателя информационного различия нечетких ситуаций использовать разность их показателей неопределенности. Однако такой подход не учитывает сходства и различия нечетких ситуаций. В качестве показателя информационного различия, учитывающего взаимную зависимость нечетких ситуаций, предлагают следующую функцию:

$$D(A,B)=d[(A \square \bar{A}) \cup (B \cap \bar{B})]=d[A \cap \bar{A}) \cap (B \cap \bar{B})].$$

В отдельную группу выделяют показатели неопределенности в ситуации принятия решения, которые основаны на понятии мощности подмножества α-уровня НМ

$$|A_\alpha|=|\{x \in X \mid \mu(x) \geq \alpha\}|.$$

Примерами могут служить

$$\mathrm{Tr}(\mu_A)=\int_0^{\alpha_{\max}} \frac{1}{|A_\alpha|}\,d\alpha$$

и двойственный ему показатель

$$\mathrm{An}(\mu_A)=1-\mathrm{Tr}(\mu_A)$$

а также показатель неопределенности

$$U(\mu_A)=\int_0^1 \log_2 |A_\alpha|\,d\alpha$$

и связанная с ним мера прироста информации

$$g(\mu_A, \mu_B)=U(\mu_B)-U(\mu_A)=\int_0^1 \log_2\left|\frac{B_\alpha}{A_\alpha}\right|d\alpha$$

где

$B_\alpha=\{x\in X\,|\mu_B(x)\geq\alpha\}$, $A_\alpha=\{x\in X\,|\mu_A(x)\geq\alpha\}$.

Показатель размытости (30) используется при анализе причинно-следственных связей между различными факторами в социологических исследованиях. Показатель размытости в НМ используется как параметр в задачах лингвистической аппроксимации оптимального управления динамическими системами.

Широко используются показатели размытости в задачах распознавания образов.

5. Нечеткие меры и интегралы (начала)

5.1. Методические замечания

При решении многих задач: анализа сложных систем в условиях неопределенности широко используются методы теории вероятности и математической статистики. Эти методы предполагают вероятностную интерпретацию обрабатываемых данных и полученных статистических выводов. В настоящее время возрасла потребность в новых подходах к математическому описанию информации, характеризующейся высоким уровнем неопределенности. Один из возможных подходов здесь может основываться на обобщении понятия меры и построении нечетких мер, свободных от ряда ограничений вероятностной меры.

Существуют различные интерпретации понятия вероятности. Это — классическая частотная интерпретация Лапласа, субъективная вероятность по Байесу, субъективная вероятность по Де Финетти, Севиджу и т. д. Наиболее содержательной с математической точки зрения является аксиоматическая трактовка вероятности А. Н. Колмогорова с позиций теории меры.

Как известно, *мерой* называется функция множества $m\colon \mathscr{P}(X)\to\mathscr{R}$, удовлетворяющая следующим трем аксиомам:

1) $A\subseteq X\Leftrightarrow m(A)\geqslant 0$;
2) $m(\varnothing)=0$;
3) если $A,\ B\in\mathscr{P}(X)$, то $m(A\cup B)=m(A)+m(B)-m(A\cap B)$.

Здесь $\mathscr{P}(X)$ — множество всех подмножеств *X*, а $\mathscr{R}$ — множество действительных чисел. При $\mathscr{R}=[0,\ 1]$ эти аксиомы определяют вероятностную меру.

Под субъективной вероятностью понимается степень уверенности в данном событии, возникающая у человека на основе известных ему данных. Эта степень уверенности всегда зависит от индивидуального опыта и поэтому различна для разных людей. Неясность суждений, основанных на субъективном анализе, обусловливает многие трудности, которые возникают при использовании субъективной вероятности.

Субъективную вероятность можно рассматривать как индивидуальный способ обработки тех аспектов субъективных данных, которые доступны индивидуальному суждению. Однако чаще всего такие суждения неаддитивны. В ряде работ показано, что реальное поведение человека, как правило, противоречит предположению об аддитивности мер, которые он использует при оценке событий. В отличие от субъективной вероятности, нечеткая мера свободна от ограничительного требования аддитивности, что делает ее особенно привлекательной для решения ряда задач при наличии неопределенности типа нечеткости.

Существует тенденция вероятностной трактовки НМ. Следует отметить, что, с точки зрения теории меры, такой подход является неоправданным, поскольку понятие вероятностной меры является сужением понятия нечеткой меры. Для сравнения рассмотрим обе теоретико-мерные трактовки вероятности и нечеткости.

Пусть $(X, \mathscr{B}, P)$— вероятностное пространство. Здесь $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ — поле борелевских подмножеств множества *X* (минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые подмножества множества *X),* а *Р*— вероятностная мера, т. е. функция множества $P\colon \mathscr{B} \to [0, 1]$, удовлетворяющая условиям 1) —3). С другой стороны, нечеткое множество Л. Заде описывается функцией принадлежности μ, принимающей свои значения в интервале [0, 1]. С точки зрения теории отображений $P\colon \mathscr{B} \to [0, 1]$ и $\mu\colon X \to [0, 1]$ — совершенно разные объекты. Вероятность *Р* определяется в σ -алгебре $\mathscr{B}$ и является функцией множества, а μ*(х)* есть обычная функция, областью определения которой является множество *X*. Поэтому понятия вероятности и нечеткого множества не имеет смысла сравнивать на одном уровне абстрагирования.

Когда *X* — является конечным множеством можно сравнивать $P(\{x\})$ с $\mu_A(x)$: $\sum\limits_{x \in X} P(\{x\}) = 1$ и $\sum\limits_{x \in X} \mu_A(x) \neq 1$. В этом случае, когда $X \subset \mathscr{R}$, приходится сталкиваться со следующими трудностями. Если

$$(a, b] \subset \mathscr{R}, \text{ то } P((a, b]) = \int_a^b p(x)\, dx,$$

где *р (х)* — плотность вероятности. При этом очевидно, что $\forall x \in \mathscr{R}\colon P(\{x\}) \neq 0$, когда $p(x) \neq 0$. Нетрудно увидеть, что понятия плотности вероятности и функции принадлежности сравнимы. В то время как вероятностная мера является шкалой для измерения неопределенности типа случайности, нечеткие меры являются субъективными шкалами для нечеткости.

5.2. Нечеткие меры

Рассмотрим основные свойства нечетких мер и интегралов, а также их содержательную связь с мерами возможности, используемыми для построения алгоритмов нечеткого вывода.

Пусть X — произвольное множество, а $\mathscr{B}$ — поле борелевских множеств (σ-алгебра) для X.

Определение 5.1. Функция $g(\cdot)$, определяемая в виде $g\colon \mathscr{B} \to [0,\ 1]$, называется *нечеткой мерой* (в зарубежной литературе используется термин «нечеткая мера» (fuzzy measure), хотя по сути дела четкая функция множества $g(\cdot)$ определяет неаддитивпую меру (квазимеру) на обычном множестве X), если она удовлетворяет следующим условиям:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}1)\ g(\varnothing)=0,\\ 2)\ g(X)=1,\end{array}\right\}\ \text{(ограниченность);}\\ 3)\ \text{если } A,\ B\in\mathscr{B} \text{ и } A\subset B, \text{ то } g(A)\leqslant g(B) \text{ (монотонность);}\\ 4)\ \text{если } F_n\in\mathscr{B} \text{ и } \{F_n\} \text{ является монотонной последовательностью, то } \lim\limits_{n\to\infty} g(F_n)=g\left(\lim\limits_{n\to\infty}F_n\right) \text{ (непрерывность).}\end{array}\right\} \quad (5.1)$$

Тройка $(X,\ \mathscr{B},\ g)$ называется *пространством с нечеткой мерой.* Для нечеткой меры в общем случае не должно выполняться условие аддитивности: $g(A \cup B) \neq g(A) + g(B)$. Таким образом, нечеткая мера является однопараметрическим расширением вероятностной меры.

Выражение $g(A)$ представляет собой меру, характеризующую степень нечеткости A, т. е. оценку нечеткости суждения «$X \in A$» или степень субъективной совместимости X с A. Нетрудно увидеть, что монотонность меры g влечет за собой

$$\forall A,\ B\in\mathscr{B}\colon\ g(A\cup B)\geqslant \max(g(A),\ g(B));$$
$$\forall A,\ B\in\mathscr{B}\colon\ g(A\cap B)\leqslant \min(g(A),\ g(B)).$$

Для построения нечетких мер используется следующее λ-*правило*. Пусть $A,\ B\in\mathscr{B},\ \bar{A}\cap B=\varnothing$. Тогда

$$g_\lambda(A\cup B)=g_\lambda(A)+g_\lambda(B)+\lambda\cdot g_\lambda(A)\cdot g_\lambda(B),\quad -1<\lambda<\infty. \quad (5.2)$$

В случае $A\cup B=X$ будем называть выражение (5.2) условием нормировки для g_λ-мер. Очевидно, что $g_\lambda(X)=1;\ g_\lambda(\varnothing)=0.$

Параметр $\lambda \in (-1, +\infty)$ называется параметром нормировки g_λ-меры. При $\lambda > 0$, $g_\lambda(A \cup B) > g_\lambda(A) + g_\lambda(B)$ имеем класс супераддитивпых мер, а при
$-1 < \lambda < 0$, $g_\lambda(A \cup B) < g_\lambda(A) + g_\lambda(B)$ получаем класс субаддитивных мер.

Легко убедиться, что если $\bar{A} = X \setminus A$, $A \in \mathscr{B}$, то из (5.2) следует

$$g_\lambda(\bar{A}) = \frac{1 - g_\lambda(A)}{1 + \lambda \cdot g_\lambda(A)}. \qquad (5.3)$$

Формула (5.3) определяет класс так называемых λ-дополнений Сугено.

В общем случае, когда A и B — произвольные непересекающиеся подмножества множества X, т. е. $A, B \in \mathscr{B}$, $A \cap B \neq \varnothing$, выражение (5.2) приобретает вид

$$g_\lambda(A \cup B) = \frac{g_\lambda(A) + g_\lambda(B) - g_\lambda(A \cap B) + \lambda \cdot g_\lambda(A) \cdot g_\lambda(B)}{1 + \lambda \cdot g_\lambda(A \cap B)}. \qquad (5.4)$$

Если $X = \mathscr{R}$, то g_λ-меру можно получить с помощью непрерывной функции h, удовлетворяющей следующим свойствам:

1) если $x \leqslant y$, то $h(x) \leqslant h(y)$; $x, y \in \mathscr{R}$;
2) $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 1$.

Функция h аналогична функции распределения вероятности и называется нечеткой функцией распределения.

Таким образом, нечеткую меру g_λ на $(\mathscr{R}, \mathscr{B})$ можно построить в виде

$$g_\lambda([a, b]) = \frac{h(b) - h(a)}{1 + \lambda \cdot h(a)} \quad \forall [a, b] \subset \mathscr{R}. \qquad (5.5)$$

Мера g_λ в (5.5) удовлетворяет g_λ-правилу. В частности,

$$g_\lambda((-\infty, x]) = h(x) \ \forall \lambda \in (-1, +\infty) \qquad (5.6)$$

Далее предположим, что $K = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Мера g_λ на $(K, 2^K)$ строится следующим образом $(0 \leqslant g_n^i \leqslant 1,\ i \in I)$:

$$\frac{1}{\lambda}\left[\prod_{i=1}^{n}(1 + \lambda g^i) - 1\right] = 1, \quad \lambda \in (-1, +\infty). \qquad (5.7)$$

Если $K' \subset K$, то

$$g_\lambda(K') = \frac{1}{\lambda}\left[\prod_{s_i \in K'}(1 + \lambda g^i) - 1\right]. \qquad (5.8)$$

Выражение (5.8) также удовлетворяет λ-правилу и из (5.7) следует, что

$$g_\lambda(\{s_i\}) = g^i,$$
$$g_\lambda(\{s_i,\ s_j\}) = g^i + g^j + \lambda g^i g^j, \quad i \neq j. \qquad (5.9)$$

Рассмотрим несколько примеров нечетких мер (см. рис. 5.1).

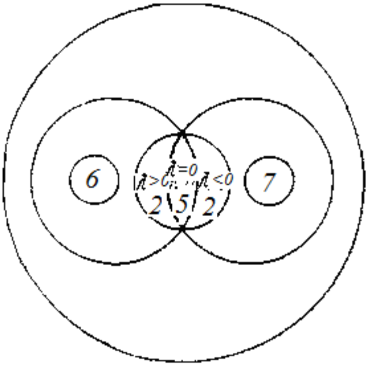


Рис. 5.1. Соотношения между нечеткими мерами: *1* — нечеткие меры (исключая меру Дирака); *2* — g_λ-меры, —1 < λ < ∞; *3* — функции доверия; *4* — меры доподобия; 5 = 3 ∩ 4 — вероятностная мера (λ = 0); 6 — согласованные функции доверия (мера необходимости); *7* — мера возможности

Меры Дирака. Примитивный класс мер Дирака определяется соотношением

$$\forall A \in \mathscr{B}, \quad \mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{при } x_0 \in A, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad (5.10)$$

где x_0 — заданный элемент в *X*. Меры Дирака — частный случай вероятностной меры, соответствующий детерминпрованной ситуации (меры полной уверенности). Все рассматриваемые далее нечеткие меры можно разделить на два класса: *супераддитивные меры* (*X* > 0) *и субаддитивпые меры* (—1<λ<0).

5.2.1. Супераддитивные меры

Функция доверия. В определении *функции доверия* (belief function) предполагается, что степень доверия высказыванию *A(A≠∅),* которое является истинным, не обязательно равна 1. Это означает, что сумма степеней доверия высказыванию *A* и его отрицанию $\bar{A}$ также не обязательно равна 1, а может быть либо равной, либо меньшей 1. Другими словами, когда высказывание *A* *(A ≠∅)* является истинным с определенной степенью $s \in [0, 1]$, его мера неопределенности выражается с помощью функции

$$\forall B \in \mathscr{B}: \quad b(B) = \begin{cases} 1, & \text{если } B = X, \\ s, & \text{если } B \supset A, \quad B \neq X, \\ 0, & \text{если } B \not\supset A, \end{cases} \tag{5.11}$$

которая называется *простой функцией носителя, сосредоточенной на А*.

Если s=1, то получаем меру, которая называется мерой определенности, сосредоточенной на *А*. Если |*A*| = 1, то получаем меру Дирака, сосредоточенную на *А*.

Если s = 0 или *А* = *X*, то тогда *b(B)* называется пустой функцией доверия (полное незнание). В результате обобщения этих рассуждений введена *функция доверия* — мера, удовлетворяющая следующим свойствам:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ b(\varnothing) = 0; \quad b(X) = 1; \quad \forall A \in \mathscr{B}: 0 \leqslant b(A) \leqslant 1; \\ &2)\ \forall A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{B}: b(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \geqslant \sum_{i=1}^{n} b(A_i) - \\ &- \sum_{i<j} b(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} b(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n). \end{aligned}\right\} \tag{5.12}$$

В случае, когда $|\mathscr{B}| = 2$, получаем:

$$\forall A,\ B \in \mathscr{B}:\ b(A \cup B) \geqslant b(A) + b(B) - b(A \cap B)$$

(свойство супераддитивпости) и

$$\forall A \in \mathscr{B}:\ b(A) + b(\overline{A}) \in [0,\ 1].$$

Возможно также другое определение этой меры. Пусть m — мера, удовлетворяющая следующим свойствам:

$$\begin{aligned} &1) && m(\varnothing) = 0; \\ &2) && \sum_{A \subseteq \mathscr{B}} m(A) = 1 \qquad \text{(полное доверие).} \end{aligned} \tag{5.13}$$

Тогда

$$\forall A \in \mathscr{B}:\ b(A) = \sum_{B \subset A} m(B) \tag{5.14}$$

является *функцией доверия.* Поэтому функции доверия называются также нижними вероятностями. Из (5.14) вытекает:

$$\forall A \in \mathscr{B}:\ b(A) + b(\overline{A}) = 1 - \sum_{\substack{B \not\subset A \\ B \not\subset \overline{A}}} m(B) \in [0,\ 1]. \tag{5.15}$$

Любая g_λ-нечеткая мера (кроме меры Дирака) является функцией доверия тогда и только тогда, когда $\lambda \geq 0$. Отсюда следует, что мера вероятности есть частный случай функции доверия.

Согласованная функция доверия. Понятие согласованной функции доверия (consonant belief function) базируется на определении ядра $C = \{B \subset X | m(B) > 0\}$, полностью упорядоченного по вложенности. Легко показать, что любая простая функция носителя является согласованной функцией доверия. Если *A≠X,* то мера неопределенности

$$\forall B \subset \mathscr{B}:\ b(B) = \begin{cases} s, & \text{если } B = A, \\ 1 - s, & \text{если } B = X, \\ 0, & \text{если } B \neq A,\ B \neq X. \end{cases} \tag{5.16}$$

Согласованная функция доверия определяется с помощью следующих аксиом:

$$\begin{aligned} &1)\ b(\varnothing) = 0; \quad b(X) = 1, \\ &2)\ b(A \cap B) = \min\ (b(A),\ b(B));\ \forall A \in \mathscr{B}. \end{aligned} \tag{5.17}$$

При этом

$$\min\left(b(A),\ b\left(\bar{A}\right)\right) = 0;\ \forall b\ \exists A,\ B:\ b(A \cup B) > \max(b(A),\ b(B)).$$

5.2.2. Субаддитнвные меры

Меры правдоподобия. *Мера правдоподобия* множества *A из X* определена как

$$\mathrm{Pl}\ (A) = 1 - b(\bar{A}), \tag{5.18}$$

где *b* — функция уверенности.

Мера правдоподобия удовлетворяет следующим аксиомам

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \mathrm{Pl}(\varnothing) = 0;\ \mathrm{Pl}(X) = 1, \\ &2)\ \forall A_1, \ldots, A_n \subseteq X:\ \mathrm{Pl}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \leqslant \\ &\qquad \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Pl}(A_i) - \sum_{i<j} \mathrm{Pl}(A_i \cup A_j) + \ldots + \\ &\qquad\qquad + (-1)^{n+1}\ \mathrm{Pl}(A_1 \cup \ldots \cup A_n). \end{aligned}\right\} \tag{5.19}$$

Существует другой способ определения функции правдоподобия. Пусть *m* — мера, удовлетворяющая свойствам (5.13), тогда

$$\forall A \in \mathscr{B}:\ \mathrm{Pl}(A) = \sum_{B \cap A \neq \varnothing} m(B) \tag{5.20}$$

является *мерой правдоподобия.* Меры правдоподобия называются также верхними вероятностями.

Пусть μ и ν — две меры такие, что $\forall A \in \mathscr{B}: \quad \mu(A)+\nu(\bar{A})=1.$ В этом случае μ является функцией доверия тогда и только тогда, когда ν — мера правдоподобия.

Мера возможности. Мерой возможности называется функция $\Pi\colon \mathscr{B} \to [0,\ 1],$ удовлетворяющая следующим аксиомам:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \Pi(\varnothing)=0;\ \ \Pi(X)=1, \\ 2) & \forall i \in \mathbf{N},\ \ A_i \subset X,\ \ \Pi\left(\bigcup\limits_{i\in\mathbf{N}} A_i\right)=\sup\limits_{i\in\mathbf{N}} \Pi(A_i). \end{array}\right\} \quad (5.21)$$

Здесь **N** — множество натуральных чисел.

Мера возможности может быть построена с помощью распределения возможности *π(x),* являющегося функцией $\pi\colon X \to [0,\ 1],$ такой, что $\sup\limits_{x\in X} \pi(x)=1$ (условие нормировки). Нетрудно увидеть, что $\forall A \in \mathscr{B}\colon \Pi(A)=\sup\limits_{x\in A} \pi(x).$ Очевидно, что для счетного множества $\pi(x)=\Pi(\{x\}).$

Любая мера возможности является нечеткой мерой тогда и только тогда, когда существует функция распределения *f* такая, что $\sup\limits_{x\in X} f(x)=1.$

Любая мера возможности П является g_λ-мерой $(\lambda \in (-1,\ \infty))$ тогда и только тогда, когда П — мера Дирака.

Пусть μ и ν две меры такие, что $\forall A \in \mathscr{B}: \quad \mu(A)+\nu(\bar{A})=1.$ Нечеткая мера μ является согласованной функцией доверия тогда и только тогда, когда ν является мерой возможности.

Мера вероятности. Вероятностная мера (λ = 0) является частным случаем функции доверия или меры правдоподобия (см. рис. 5.1). Нечеткая мера $g \triangleq P$ является вероятностной мерой тогда и только тогда, когда выполняются условия:

1) $\forall A \in \mathscr{B}\colon P(A) \in [0,\ 1];\ P(\varnothing)=0;\ P(X)=1;$

2) если $\forall i \in \mathbf{N}\colon A_i \in \mathscr{B}$ и $\forall i \neq j\colon A_i \cap A_j=\varnothing$, то $P\left(\bigcup\limits_{i\in\mathbf{N}} A_i\right)= =\sum P(A_i).$

g_λ-мера. Нечеткая мера $g \triangleq g_\nu$ называется g_ν-мерой, если она удовлетворяет следующим аксиомам:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ g_\nu(X)=1;\ g_\nu(\varnothing)=0; \\ 2)\ \text{если}\ \forall i \in \mathbf{N}\colon A_i \in \mathscr{B}\ \text{и}\ \forall i \neq j\colon A_i \cap A_j=\varnothing, \\ \text{то} \\ \quad g_\nu\left(\bigcup\limits_{i\in N} A_i\right)=(1-\nu)\bigvee\limits_{i\in\mathbf{N}} g_\nu(A_i)+\nu\sum\limits_{i\in\mathbf{N}} g_\nu(A_i), \\ \text{где}\ \nu \geqslant 0; \\ 3)\ \forall A,\ B \in \mathscr{B}\colon A \subseteq B,\ g_\nu(A) \leqslant g_\nu(B). \end{array}\right| \quad (5.22)$$

Нетрудно увидеть, что g_v-мера является расширением меры Цукамото, для которой $v \in [0, 1]$. Очевидно, что при $v = 0$, g_v-мера является мерой возможности, а при $v = 1$ — вероятностной мерой. Если $v > 1$, то g_v-мера описывает неопределенность, отличающуюся по своим свойствам от вероятности или возможности.

Условие нормировки для g_v-меры в случае счетного множества X имеет вид

$$g_v(X) = (1 - v) \bigvee_{i \in \mathbf{N}} g_i + v \sum_{i \in \mathbf{N}} g_i = 1, \tag{5.23}$$

где $g_i = g_v(\{x_i\}), \ \forall i \in \mathbf{N}, \ x_i \in X.$

Если $X = \mathscr{R}$, то нетрудно увидеть, что для нечеткой плотности $f_v(x): \ X \to [0, 1]$ можно получить

$$g_v(X) = (1 - v) \sup_{x \in X} f_v(x) + v \int_X f_v(x)\, dx.$$

Утверждение 5.1. Пусть X — произвольное множество, $A \subset X$, а $g_v: \mathscr{B} \to [0, 1]$ является g_v-мерой. Тогда для $\bar{A} = X \setminus A$ мера нечеткости примет вид

$$g_v(\bar{A}) = \begin{cases} \max((1 - g_v(A))/v, \ 1 - v g_v(A)), & \text{если} \ \ v > 1; \\ \min((1 - g_v(A))/v, \ 1 - v g_v(A)), & \text{если} \ \ v \in [0, 1]. \end{cases}$$

Доказательство. Поскольку $\forall a, \ b \in \mathscr{R}: \ a \bigvee b = (a + b)/2 + (a - b)/2,$ то условие нормировки для $A \subset X$ и $\bar{A} = X \setminus A$ примет вид:

$$(1 - v)\left(\left(g_v(A) - g_v(\bar{A})\right)/2 + \left(g_v(A) + g_v(\bar{A})\right)/2\right) + v\left(g_v(A) + g_v(\bar{A})\right).$$

Если $g_v(A) \geqslant g_v(\bar{A})$, тогда $g_v(\bar{A}) = (1 - g_v(A))/v$, а при $g_v(A) < g_v(\bar{A})$, $g_v(\bar{A}) = 1 - v g_v(A)$. Для случая $v > 1$ условие нормировки имеет силу, если $g_v(\bar{A}) = \max((1 - g_v(A))/v,$ $1 - v g_v(A))$, а для $v \in [0, 1]$ $g_v(\bar{A}) = \min((1 - g_v(A))/v,$ $1 - v g_v(A))$.

Утверждение 5.2. Пусть X — произвольное множество, $\mathscr{B}$ — борелевская σ-алгебра, $g_v: \mathscr{B} \to [0, 1]$ — нечеткая g_v-мера. Тогда

$$g_v(A \cup B) = (1 - v)\left(g_v(B) \vee g_v(C)\right) + v\left(g_v(B) + g_v(C)\right),$$

$\forall A, \ B \in \mathscr{B}: \ A \cap B \neq \varnothing$, где $C = A \setminus (A \cap B)$;

$$g_v(C) = \begin{cases} \min((g_v(A) - g_v(A \cap B))/v, \ g_v(A) - v g_v(A \cap B)), & \text{если } v \in [0, 1]; \\ \max((g_v(A) - g_v(A \cap B))/v, \ g_v(A) - v g_v(A \cap B)), & \text{если } v > 1. \end{cases}$$

Доказательство. Условие нормировки для $A,\ B \in \mathscr{B}$ относительно $g_v(A)$ имеет вид

$$g_v(A) = (1-v)(g_v(A \setminus (A \cap B)) \vee g_v(A \cap B)) + \\ + v(g_v(A \setminus (A \cap B)) + g_v(A \cap B)),$$

если $g_v(A \setminus (A \cap B)) \geqslant g_v(A \cap B)$, тогда $g_v(A \setminus (A \cap B)) = (g_v(A) - - g_v(A \cap B))/v$, а если $g_v(A \setminus (A \cap B)) < g_v(A \cap B)$, то $g_v(A \setminus (A \cap \cap B)) = g_v(A) - vg_v(A \cap B)$.

Нетрудно увидеть, что если $v > 1$, то

$$g_v(A \setminus (A \cap B)) = \\ = \max((g_v(A) - g_v(A \cap B))/v,\ g_v(A) - vg_v(A \cap B)),$$

а при $v \in [0,\ 1]$

$$g_v(A \setminus (A \cap B)) = \min((g_v(A) - g_v(A \cap B))/v,\ \ g_v(A) - vg_v(A \cap B)),$$

что доказывает утверждение.

Утверждения 5.1 и 5.2 справедливы только для конкретного разбиения множества на подмножества.

5.3. Особенности аппроксимации нечетких мер

При решении практических задач моделирования нечетких систем с использованием аппарата теории нечетких мер возникает необходимость оперирования большими объемами нечетких данных. Поэтому для упрощепия вычислительных алгоритмов на ЭВМ удобно аппроксимировать нечеткие меры. Для этой цели можно использовать *(L — R)*-функции.

Определение 5.2. Функция, обозначаемая *L* (или *R*), является *функцией (L — R)-типа* тогда и только тогда, когда

$$\forall x \in \mathscr{R}^+ \triangleq [0,\ +\infty):\ L(-x) = L(x);\ L(0) = 1,$$

L(·) монотонно убывает на $\mathscr{R}^+$.

Пример: $L_1(x) = \max(0,\ \ 1 - |x|^p)$; $\quad L_2(x) = \exp(-|x|^p)$; $p \geq 1$.

Особенно удобно использовать *(L — R)*-функции в случав g_v-меры Сугено.

При этом функция *h(x)* может быть представлена как

$$h(x) = L((a-x)/\beta \vee 0); \quad x \in X \subset \mathscr{R}, \tag{5.24}$$

где *a* — параметр, при котором *h(x)=1*, β — коэффициент нечеткости. Пример функции *(L — R)* -типа, аппроксимирующей функцию распределения нечеткости, приведен на рис. 5.2.

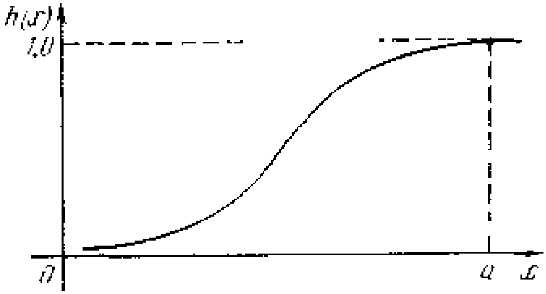


Рис. 5.2. Функция (L- *R*)-типа, аппроксимирующая функцию распределения нечеткости

Рассмотрим особенности процедуры приближения экспериментальных функций распределения нечеткости функциями (L — *R*)-типа. Пусть в результате формализации некоторой выборки нечетких данных получен ряд экспериментальных значений плотности распределения нечеткости $g'_1, g'_2, \ldots, g'_n$, которым соответствуют

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ x_i \in X \subset \mathscr{R},\ i \in I = \{\overline{1,\ n}\}.$$

Все множество *X* можно разбить на подынтервалы таким образом, что $X = \bigcup_{i \in I} \Delta_i;\ x_i \in \Delta_i;\ \Delta_i = [x_i - \Delta/2,\ x_i + \Delta/2]$, где $\Delta \in \mathscr{R}$, Δ — длина подынтервала; $\Delta = (b - a)/(n - 1);\ a = \inf X,\ b = \sup X.$

Значение плотности распределения нечеткости в *i*-й точке интервала [*a*, *b*], определенное экспериментально, можно приближенно определять как $g_\lambda(\Delta_i) \approx g_\lambda(\{x_i\})$. Нечеткие меры для подынтервалов Δ_i можно вычислять, используя *(L — R)*-аппроксимацию функции распределения нечеткости. При этом

$$g_\lambda(\Delta_i) = L\left(\frac{2\ (a - x_i) + \Delta}{2\beta}\right) - L\left(\frac{2\ (a - x_i) - \Delta}{2\beta}\right)\left|\left(1 + \lambda L\left(\frac{2\ (a - x_i) - \Delta}{2\beta}\right)\right)\right..$$

Пусть $S \subset \{\Delta_i | \Delta_i \subset [a,\ b]\}$ — множество подынтервалов множества X, $\mathscr{P}(S)$ — множество всех подмножеств множества подынтервалов. Нетрудно увидеть, что $\forall A \in \mathscr{P}(S)$: $\Delta_i \in A \subset S$;

$$g_\lambda(A) = \frac{1}{\lambda}\left[\prod_{i \in \theta}(\lambda g_\lambda(\Delta_i) + 1) - 1\right],$$

где $\theta = \{i | x_i \in \Delta_i \in A\};\ \ \Delta_i = [x_i - \Delta/2,\ x_i + \Delta/2]$. Нечеткой мере $g_\lambda(A)$ будет соответствовать нечеткая мера $g_\lambda(A)$, полученная из эксперимента при формализации нечеткой плотности:

$$g'_\lambda(A) = \frac{1}{\lambda}\left[\prod_{i\in\theta}(\lambda g'_i + 1) - 1\right]; \quad A \in \mathscr{B}.$$

Параметр λ определяется из условия нормировки:

$$g'_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda}\left[\prod_{i\in\theta}(\lambda g'_i + 1) - 1\right] = 1.$$

Таким образом, задача *(L — R)*-аппроксимации функции распределения нечеткости сводится к оценке параметров *а* и β *(L — R)*-функции по минимуму функционала качества

$$\mathscr{H} = \left\{\sum_{A\in\mathscr{P}(S)}\left(g_\lambda(A) - g'_\lambda(A)\right)^2\right\}^{1/2} \to \min. \qquad (5.25)$$

При большем количестве экспериментальных точек минимизация функционала (5.25) становится затруднительной. В этом случае можно воспользоваться приближенной процедурой, смысл которой заключается в использовании только части множества подмножеств подынтервалов $\mathscr{P}(S)$ для оценки *а* и β. При этом

$$\mathscr{H} = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(\left(\frac{1}{\lambda}\left(\prod_{k=1}^{i}(\lambda g_\lambda(\Delta_i) + 1) - 1\right) - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{1}{\lambda}\left(\prod_{k=1}^{i}(\lambda g'_i + 1) - 1\right)\right)^2\right)\right)^{1/2} \to \min. \quad (5.26)$$

Задачу можно упростить, если параметр *а* определять непосредственно по результатам эксперимента. Можно показать, что если λ→ —1, то функция множества $g_\lambda((-\infty,\ x]) = 1$ при $x = x^*$, где

$$x^* = \arg\sup_{i\in\mathbf{N}} g(\{x_i\}).$$

Таким образом, для определения *а,* при λ = —1, достаточно найти минимальное значение $x \in [a,\ b]$, при котором нечеткая плотность равна 1. Если λ > —1, тогда *а* = sup*X.* В этом случае параметр β может быть легко найден при помощи любой процедуры численной минимизации.

Решение многих задач нахождения значения g_ν-меры для случаев множества действительных чисел может выглядеть сравнительно просто, если применять аналитическую аппроксимацию нечетких плотностей, с помощью которых задаются g_ν-меры. Такая аппроксимация может быть сделана с помощью аналога *(L — R)*-функций — функций *(S — L)* -типа.

Определение 5.3. Функция, обозначаемая *SL(·),* является функцией *(S — L)* -типа тогда и только тогда, когда

$$\forall x \in \mathscr{R}^+:\ SL(-x) = SL(x); \quad SL(0) = S,$$

причем $SL(\cdot)$ — монотоппо убывает на $\mathcal{R}^+$: $S \in [0, 1]$.
Пример: $SL(x) = S\max(0,\ 1-|x|^p)$; $SL(x) = S\exp(-|x|^p)$;
$p \geq 1$.

Определение 5.4. Нечеткой плотностью *SL*-типа называется нечеткая плотность $g'\colon X \to [0, 1]$ такая, что

$$g'(x) = \begin{cases} SL'\left(\dfrac{a'-x}{\underline{a}}\right) & \text{при } x \leqslant a',\ \underline{a} \geqslant 0; \\ SL''\left(\dfrac{x-a''}{\bar{a}}\right) & \text{при } x > a'',\ \bar{a} \geqslant 0; \\ S, & \text{если } x \in [a', a''] \subset \mathcal{R}; \end{cases}$$

где $\bar{a}$, $\underline{a}$— правый и левый коэффициенты нечеткости, $L'(\cdot)$, $L''(\cdot)$ — функции *(L — R)* -типа. Очевидно, что если $L' \triangleq L'' = L$, то

$$g'(x) = SL\left(\frac{a'-x}{\underline{a}} \vee \frac{x-a''}{\bar{a}} \vee 0\right) \triangleq L(a(x)).$$

Можно показать, что $\forall\ [a, b] \subset X \subset \mathcal{R}$

$$g_\nu([a, b]) = \sup_{x\in[a,b]} g'(x)\cdot(1-\nu) + \nu\int_a^b g'(x)\,dx =$$

$$= S\left((1-\nu)L\left(\inf_{x\in[a,b]}\left(\frac{a'-x}{\underline{a}} \vee \frac{x-a''}{\bar{a}} \vee 0\right)\right) + \nu\widetilde{L}_a^b\right),$$

где $\widetilde{L}_a^b \triangleq \int_a^b L((a'-x)/\underline{a} \vee (x-a'')/\bar{a} \vee 0)dx$. Нетрудно увидеть, что

$$\inf\left(\frac{a'-x}{\underline{a}} \vee \frac{x-a''}{\bar{a}} \vee 0\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } [a', a''] \cap [a, b] \neq \varnothing; \\ \dfrac{a'-b}{\underline{a}}, & \text{если } b \leqslant a'; \\ \dfrac{a-a''}{\bar{a}}, & \text{если } a \geqslant a''. \end{cases}$$

Рассмотрим особенности приближения экспериментальных g_ν-мер аналитическими выражениями с помощью функций *(S — L)*-типа.

Аналогично вышеизложенному будем предполагать, что имеется экспериментальная последовательность значений нечеткой плотности $g_1', g_2', \ldots, g_n'$. Используя аналогичные обозначения для подынтервалов, можпо предположить, что нечеткая мера на элементарном подынтервале равна значению нечеткой плотности в точке, принадлежащей этому подынтервалу, т. е. $g_\nu(\Delta_i) \approx$ $\approx g_\nu'(\{x_i\})$, где $g_\nu(\Delta_i)$— нечеткая мера, задаваемая аналитически для Δ_i, $g_\nu(\{x_i\}) = g_i'$. В случае *(S — L)* -аппроксимации получаем

$$g_\nu(\Delta_i) = S\left((1-\nu)\sup_{x\in\Delta_i} L(a(x)) + \nu\int_{\Delta_i} L(a(x))\,dx\right).$$

Параметр *S* определяется как

$$S = \arg\sup_{x\in X} g'_\nu(\{x_i\}).$$

Параметр нормировки g_ν-меры *ν* может быть найден из условия нормировки (5.23) по формуле

$$\nu = \left(1 - \bigvee_{i=1}^{n} g'_i\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} g'_i - \bigvee_{i=1}^{n} g'_i\right).$$

Оценка параметров *(L — R)*-функций может быть проредена аналогично (5.25).
При этом

$$\mathcal{H} = \left(\sum_{A\in\mathcal{P}(S)} \left(g_\nu(A) - g_\nu(A)\right)^2\right)^{1/2} \to \min, \tag{5.27}$$

где

$$g_\nu(A) = S\left((1-\nu)\bigvee_{i\in\theta} g_\nu(\Delta_i) + \nu\sum_{i\in\theta} g_\nu(\Delta_i)\right),$$

$$g'_\nu(A) = S\left((1-\nu)\bigvee_{i\in\theta} g'_i + \nu\sum_{i\in\theta} g'_i\right),$$

$$\theta = \{i \mid x_i \in \Delta_i \in A\}.$$

Когда минимизация функционала (5.27) затруднительна, можно воспользоваться приближенной процедурой, аналогичной (5.26). При этом

$$\mathcal{H} = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(S\left((1-\nu)\sup_{\Delta_k\in D_i} L(a(x)) + \nu\int_{D_i} L(a(x))\,dx\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - (1-\nu)\sup_{k\in\{\overline{1,i}\}} g'_k + \nu\sum_{k=1}^{i} g'_k\right)^2\right)^{1/2} \to \min,$$

где $D_i = \bigcup_{k\in\{\overline{1,i}\}} \Delta_k$.

В простейшем случае, оценивание параметров *(S — L)*-функции следует производить, используя функционал следующего нида:

$$\mathcal{H} = \left(\sum_{x_i\in X} \left(SL(a(x_i)) - g'_i(\{x_i\})\right)^2\right)^{1/2}.$$

Рассмотренные методы аппроксимации позволяют значительно упростить процедуры вычисления нечетких мер при определении значений нечетких интегралов (здесь и далее под нечеткими интегралами понимаются некоторые монотонные и, вообще говоря, нелинейные функционалы, определяемые на базе нечетких мер.) в различных алгоритмах. Кроме того, при использовании *SL*- и (*L* — *R*)-аппроксимаций можно значительно сократить объем памяти ЭВМ, необходимый для хранения информации о функциях распределения нечеткости.

5.4. Нечеткие интегралы

Определение 5.5. *Нечеткий интеграл* от функции $h\colon X \to [0, 1]$ на множестве $A \subseteq X$ по нечеткой мере g определяется как

$$\int_A h(x) \circ g = \sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \wedge g(A \cap H_\alpha)), \qquad (5.28)$$

где $H_\alpha = \{x | h(x) \geqslant \alpha\}$. Нечеткий интеграл принято также называть нечетким ожиданием или FEV (fuzzy expected value).

Пусть $\mathcal{F}(X)$— множество нечетких подмножеств базового множества *X*. Поскольку понятие нечеткого подмножества включает в себя понятие обычного подмножества, то $\mathcal{F}(X)$ является нечетким расширением $\mathcal{B}$: $\mathcal{F}(X) \supset \mathcal{B}$.

Определение 5.6. Функция множества $\tilde{g}$, определяемая в виде

$$\tilde{g}(A) = \int \mu_A \circ g \qquad (5.29)$$

для $A = \{(x, \mu_A(x))\}$, $\mu_A \in \mathcal{F}(X)$, называется расширением g на $\mathcal{F}(X)$.

Определение 5.7. Нечеткий интеграл от функции $h\colon X \to [0, 1]$ на нечетком множестве $\mu_A \in \mathcal{F}(X)$ по нечеткой мере g определяется как

$$\int_{\mu_A} h(x) \circ g = \int_X (\mu_A(x) \wedge h(x)) \circ g. \qquad (5.30)$$

Для описания различных видов неопределенности в теории нечетких мер используется общее понятие «степень нечеткости». В общем случае это понятие включает в себя «степень важности», «степень уверенности» и как отдельный случай «степень принадлежности» в теории НМ. Нечеткая мера, таким образом, может интерпретироваться различными способами в зависимости от конкретного применения. Пусть необходимо оценить степень принадлежности некоторого элемента $x \in X$ множеству $E \subset X$.

Очевидно, что для пустого множества эта степень принадлежности равна 0, а для $x \in F$ $(F \supset E)$ равна 1, т. е. степень принадлежности для $x \in F$ будет больше, чем для $x \in E$, если $E \subset F$. Если степень принадлежности $x_0 \in E$ равна $g(x_0, E)$, а вместо E задано нечеткое подмножество $\mu_A \in \mathcal{F}(X)$, то

$$g(x_0, A) = \oint_X \mu_A(x) \circ g(x_0, \cdot) = \mu_A(x_0). \qquad (5.31)$$

Это говорит о том, что степень нечеткости суждения «$x_0 \in A$» равна степени принадлежности x_0 нечеткому подмножеству μ_A. Таким образом, понятие степени нечеткости в теории нечетких мер включает в себя понятие степени принадлежности теории НМ.

Отметим основные свойства нечетких интегралов (НИ). Пусть $a \in [0, 1]$, $(E, F) \subseteq X$. Тогда, если $h\colon X \to [0, 1]$, то:

$$\oint_E (a \vee h) \circ g = a \vee \oint_E h \circ g;$$

$$\oint_E (a \wedge h) \circ g = a \wedge \oint_E h \circ g;$$

$$\oint_E (h_1 \wedge h_2) \circ g \leqslant \oint_E h_1 \circ g \wedge \oint_E h_2 \circ g;$$

$$\oint_E (h_1 \vee h_2) \circ g \geqslant \oint_E h_1 \circ g \vee \oint_E h_2 \circ g;$$

$$\oint_{E \cup F} h \circ g \geqslant \oint_E h \circ g \vee \oint_E h \circ g;$$

$$\oint_{E \cap F} h \circ g \leqslant \oint_E h \circ g \wedge \oint_F h \circ g.$$

Кроме того,

$$\oint_A h \circ g = M$$

тогда и только тогда, когда $g(A \cap F_M) \geqslant M \geqslant g(A \cap F_{M+0})$, где $F_M = \{x | h \geqslant M\}$ и $F_{M+0} = \{x | h > M\}$.

Можно показать, что понятие НИ сходно с понятием интеграла Лебега. Для этого рассмотрим разбиение множества X на непересекающиеся подмножества $E_i\colon X = \bigcup_{i=1}^{n} E_i,\ E_i \cap E_j = \varnothing,\ i \neq j,\ i = 1, \ldots, n.$

Пусть

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot f_{E_i}(x),$$

где $\alpha_i \in [0, 1]$, $E_i \in \mathscr{B}$, а f_{E_i} — характеристическая функция обычного множества E_i, т. е. $f_{E_i}(x) = 1$, если $x \in E_i$, и $f_{E_i}(x) = 0$, если $x \notin E_i$. Пусть l есть мера Лебега. Интеграл Лебега от функции h по множеству A определяеася как

$$\oint_A h\,dl = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l(A \cap E_i), \qquad (5.32)$$

где $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$; $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n$.

Предположим, что $F_i = E_i \cup E_{i+1} \cup \ldots \cup E_n$. Тогда, определяя h в виде $h(x) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \min\left(\alpha_i, f_{F_i}(x)\right)$, получаем следующее выражение для НИ:

$$\oint_A h(x) \circ g(\cdot) = \max_{i=\overline{1,n}} \min(\alpha_i, g(A \cap F_i)). \qquad (5.33)$$

Оба интеграла — лебегов и нечеткий — можно сравнить, используя вероятностную меру. Если $(X, \mathscr{B}, P)$ — вероятностное пространство, а h: $X \to [0, 1]$ есть $\mathscr{B}$-измеримая функция, то имеем, что

$$\left| \oint_X h(x) \circ P(\cdot) - \int_X h(x)\,dP \right| \leqslant \frac{1}{4}. \qquad (5.34)$$

В теории НИ имеет место следующая теорема.

Теорема 5.1. Пусть $(Y, \mathscr{B}_Y, g_Y)$ и $(X, \mathscr{B}_X, g_X)$ — пространства с нечеткими мерами g_Y и g_X соответственно; h: $X \times Y \to [0, 1]$, $x \in X$, $y \in Y$. Тогда если $g = g_X \times g_Y$, то для $Z = X \times Y$:

$$\oint_Z h(x,y) \circ g = \oint_Y \left(\oint_X h(x, y) \circ g_X \right) \circ g_Y. \qquad (5.35)$$

Данная теорема является аналогом теоремы Фубини из теории меры и начинается теоремой Сугено — Фубини.

Пусть $\{h_n\}$ — монотонная последовательность $\mathscr{B}$-измеримых функций, тогда

$$\oint \lim_{n\to\infty} h_n \circ g = \lim_{n\to\infty} \oint h_n \circ g.$$

Если k_n — монотонно возрастающая (убывающая) последовательность $\mathscr{B}$-измеримых функций и $\{a_n\}$ — монотонно убывающая (возрастающая) последовательность вещественных чисел, то

$$\oint \left[\bigvee_{n=1}^{\infty} (a_n \wedge h_n) \right] \circ g = \bigvee_{n=1}^{\infty} \left[a_n \wedge \oint h_n \circ g \right].$$

На рис. 5.3 дан пример графической интерпретации НИ для $X = \mathscr{R}$, где $S = \oint_A h(x) \circ g = \sup\limits_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(H_\alpha \cap A)]$; $H_\alpha = \{x | h(x) \geqslant \alpha\}$; $f(x)$ — нечеткая плотность.

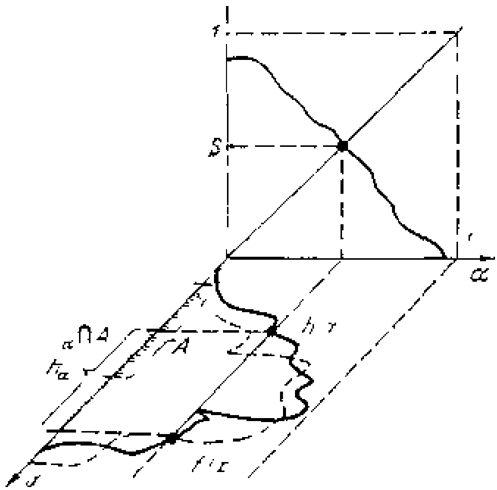


Рис. 5.3. Графическая интерпретация нечеткого интеграла

Пусть $\varphi\colon X \to Y$, тогда борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}^{(\varphi)}$ и нечеткая мера $g^{(\varphi)}$ индуцируются из X в *Y*. То есть $F \in \mathcal{B}^{(\varphi)}$ тогда и только тогда, когда $\varphi^{-1}(F) \in \mathcal{B}$, $g^{(\varphi)}(F) = g(\varphi^{-1}(F))$.

Пространство с нечеткой мерой $(Y, \mathcal{B}^{(\varphi)}, g^{(\varphi)})$ интерпретируется следующим образом. Если *Y* связано с *X* с помощью отображения φ, тогда нечеткая мера на *Y*, с помощью которой измеряется степень нечеткости в *Y*, также связана с мерой нечеткости в *X*.

Пусть $E \in \mathcal{B}$ и $F \in \mathcal{B}^{(\varphi)}$. Обозначим через $\rho(E|\varphi = y)$ семейство всех функций, эквивалентных *h(y)* по отношению g:

$$g\left(E \cap \varphi^{-1}(F)\right) = \oint_F h(y) \circ g^{(\varphi)}.$$

Здесь $\rho(\cdot|\varphi = y)$ называется условной нечеткой мерой при условии φ=*y*.

Пусть $F = Y$, тогда

$$g(E) = \oint_Y \rho(E\,|\,\varphi = y) \circ g^{(\varphi)}(\cdot).$$

Условная нечеткая мера обладает следующими свойствами :

1) Для фиксированных $E \in \mathcal{B}$, $\rho(E|\varphi = y)$ как функция от *y* является $\mathcal{B}^{(\varphi)}$-измеримой.

2) Для фиксированных *y*, $\rho(\cdot|\varphi = y)$ является нечеткой мерой для $(X, \mathscr{B})$ в смысле $g^{(\varphi)}$.

Если два пространства с нечеткими мерами $(X, \mathscr{B}_X, g_X)$ и $(Y, \mathscr{B}_Y, g_Y)$ связаны друг с другом, то отображение φ нельзя определить в общем случае. Далее условную нечеткую меру $\rho(\cdot|\varphi = y)$ будем обозначать как $\rho_X(\cdot|y)$.

В этом случае будет справедливо $g_X(\cdot) = \oint_Y \rho_X(\cdot\,|\,y) \circ g_Y.$

Если заданы нечеткие меры g_X, $\rho_Y(\cdot|x)$, g_Y, то существует нечеткая условная мера $\rho(\cdot|y)$ такая, что

$$\rho_Y(F\,|\,x) \circ g_X = \oint_Y \rho_X(E\,|\,y) \circ g_Y.$$

Данное уравнение соответствует байесовской формуле определения апостериорной вероятности в этом смысле $\rho_X(\cdot|y)$, которая называется апостериорной нечеткой мерой, а g_X— априорной нечеткой мерой.

В качестве примеров рассмотрим вычисления НИ для счетных множеств в случаях g_λ- и g_v-мер.

П р и м е р. Пусть задано пятиэлементное счетное множества $X = \{x_i\} \quad i \in \overline{\{1, 5\}} \triangleq I.$ Каждому элементу $x_i \in X$ соответствуют значения нечетких плотностей g_i из табл. 5.1.

Таблица 5.1

i	1	2	3	4	5
g_i	0,170	0,257	0,216	0,212	0,061
$h(x_i)$	0,5	0,7	0,1	0,2	0,3

Согласно условию нормировки для g_λ-меры получаем λ= 0,25. Значение НИ $S = \sup\limits_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g_\alpha]$, где

$$g_\alpha = \frac{1}{\lambda}\left(\prod_{i \in \theta_\alpha} (\lambda g_i + 1) - 1\right);\ \theta_\alpha = \{i\,|\,h(x_i) \geqslant \alpha\},$$

принимает величину S = 0,4379.

Для g_v-меры из условия нормировки можно получить

$$v = \left(1 - \bigvee_{i=1}^{5} g_i\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{5} g_i - \bigvee_{i=1}^{5} g_i\right) = 1{,}127.$$

При этом для g_v-меры S = 0,448.

5.5. Применение нечетких мер и интегралов для решения слабо структурированных задач

5.5.1. Процесс субъективного оценивания

Рассмотрим задачу субъективного оценивания некоторым индивидом нечетко описываемых объектов, например, дом, лицо и т. д.. Предположим, что объект характеризуется n показателями.

Пусть $K = \{s_1, \ldots, s_n\}$ — множество показателей. При оценивании дома такими показателями могут быть: $s_1 \triangleq$ площадь, $s_2 \triangleq$ удобства и т. д., а для лица $s_1 \triangleq$ глаза, $s_2 \triangleq$ нос и т. д.

В общем случае множество K необязательно должно быть множеством физических показателей, оно может быть множеством мнений, критериев и т. д. Пусть $h\colon K \to [0,\ 1]$— частная оценка объекта, т. е. $h(s)$ — оценка элемента s. Если речь идет о распознавании образов, то $h(s)$ может рассматриваться как характеристическая функция образа. На практике $h(s)$ может быть легко определена объективно или субъективно.

Например, когда объект — дом, объективно имеем оценку $h(s_1)=h$ (площадь) = 800 м^2, которая может быть нормализована числом из интервала [0, 1]. Для лица мы можем пользоваться лишь субъективной оценкой индивида; например, h (глаза) = 0,7.

Предположим, что нечеткая мера для $(K,\ 2^K)$ является субъективной мерой, выражающей степень важности подмножества из K. Например, $g(\{s_1\})$ выражает степень важности элемента s_1 при оценке объекта, $g(\{s_1,\ s_2\})$— аналогично обозначает степень важности показателей s_1 и s_2. Необходимо отметить, что степень важности всего множества K равна единице.

Вычисляя НИ от h до g получаем:

$$e \triangleq \oint_K h(s) \circ g, \tag{5.36}$$

где e — обобщенная оценка объекта.

Уравнение (5.36) представляет собой свертку n частных оценок. Линейный обобщенный критерий используется обычно в том случае, когда отдельные показатели взаимно независимы. Свертка (5.36) может быть очень полезной, когда существует взаимозависимость показателей, что характерно для большинства задач выбора в нечеткой обстановке.

Процесс субъективного оценивания объектов предполагает идентификацию самой нечеткой меры.

5.5.2. Экспериментальное определение нечеткой меры.

Рассмотрим метод приближенного экспериментального определения нечеткой меры. Предположим, что существует m объектов. Пусть h_j: $K \to [0, 1]$ —частная оценка j-го объекта, а e_j — общая оценка, получаемая из (5.17). Предъявляя индивиду объекты и их частные оценки, можно получить его субъективные оценки d, из интервала [0, 1] для всех объектов.

Обозначим $\bar{e} = \max\{e_j\}$; $\underline{e} = \min\{e_j\}$ и аналогично $\bar{d}$ и $\underline{d}$.

Производя нормализацию $e_j \forall j \in \{\overline{1, m}\}$, мы имеем

$$w_j = \frac{\bar{d} - \underline{d}}{\bar{e} - \underline{e}} e_j + \frac{\underline{d}\bar{e} - \bar{d}\underline{e}}{\bar{e} - \underline{e}}.$$

Субъективная нечеткая мера может быть получена при условии минимума критерия

$$J = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} (d_j - w_j)^2}. \qquad (5.37)$$

Для простоты предполагается, что g в (5.36) удовлетворяет λ-правилу.

Впервые нечеткие меры применялись для оценки сходства одномерных образов. Рассматривалось решение задачи оценки домов. При этом дома оценивались по следующим пяти показателям: площадь, удобства и обстановка, окружающая среда, стоимость, время, требуемое на дорогу до места работы. Известны применения нечетких мер для оценки привлекательности экскурсионных районов, которые оценивались по таким показателям как красота природы, архитектурные памятники и т. д. Результаты оцонок использовались для предсказания увеличения экскурсий в ближайшие десять лет.

Интересное решение задачи информационного поиска с применением нечетких мер рассмотрено в литературе применительно к библиотечной информационно-поисковой системе.

5.5.3. Принятие решения в нечеткой обстановке.

Рассмотрим пример использования условных нечетких мер для решения задачи принятия решения в нечеткой обстановке. Процесс принятия решения описывается шестеркой

$$\langle \theta,\ X,\ A,\ g_\theta(\cdot),\ \sigma_X(\cdot|\vartheta),\ l \rangle,$$

где θ — множество показателей, характеризующих оцениваемый объект *x;*

X — множество оцениваемых объектов $x \in X$;

g_θ — нечеткая мера степени важности показателей;

$\sigma_X(\cdot|\vartheta)$ — нечеткая мера привлекательности объектов из *X* при их оценке с точки зрепия показателя $\vartheta \in \theta$;

Y — множество действий покупателя;

l — функция принадлежности нечеткого отношения на декартовом произведении $\theta \times Y$, обозначающая нечеткие потери, когда действие $y \in Y$ выбирается для $\vartheta \in \theta$. Задача заключается в поиске стратегии, которая минимизирует нечеткое ожидание функции потерь. При этом нечеткое действие *A* имеет функцию принадлежности $\mu_A\colon Y \to [0,\ 1]$, а нечеткая стратегия *B,* являющаяся нечетким отношением на декартовом произведении $X \times A$, имеет функцию принадлежности $\mu_B\colon X \times Y \to [0,\ 1]$. Нечеткое действие *A,* основанное на нечеткой стратегии *B,* определяется с помощью функции принадлежности $\mu_{B(x)}(y) = \mu_B(x,\ y)$. Нечеткие потери для нечеткого действия определяются через функцию принадлежности

$$l(\vartheta,\ A) \triangleq 1 - \max_{y \in Y} (\mu_A(y) \wedge (1 - l(\vartheta,\ y))). \qquad (5.38)$$

Если ЛПР выбирает нечеткую стратегию *B,* то нечеткое ожидаемое значение потерь примет вид

$$\langle l \rangle_B = \oint_\theta \left[\oint_X l(\vartheta \mid B(x)) \circ \sigma_X(\cdot \mid \vartheta) \right] \circ g_\theta.$$

Решением задачи принятия решения будет

$$\mu_{B^0}(x,\ y) = \oint_\theta (1 - l(\vartheta,\ y)) \circ \sigma_\theta(\cdot \mid x),$$

где $\sigma_\theta(\cdot|x)$ — апостериорная нечеткая мера.

Данный подход может быть использован для широкого класса задач принятия решения в нечеткой обстановке. Следует отметить, что при небольшом количестве элементов множества θ нечеткая мера g_θ может быть идентифицирована точным методом. Для идентификации нечеткой меры в этом случае эксперимент должен дать оценки степени важности всех подмножеств из θ, т. е. необходимо иметь субъективные оценки *d* такие, что $d\colon\ 2^{\theta}\to[0,\ 1]$. Идентификация нечеткой меры заключается в минимизации функционала

$$J=\sqrt{\frac{1}{|2^{\theta}|}\sum_{E\in 2^{\theta}}(d_{\theta}(E)-g_{\lambda,\theta}(E))^{2}},\qquad (5.39)$$

где $|2^{\theta}|\triangleq \mathrm{card}\,2^{\theta}$ — мощность мпожестна 2^{θ}, а $g_{\theta}(E)$ вычисляется так же, как и п. 5.3. Результатом решения задачи (5.39) является значение параметра *К* и нечетких плотностей $g_{\theta_1}, g_{\theta_2},\ldots,g_{\theta_n}$; n = card 0. Опыт рассмотрения задач принятия решения показывает, что значение λ на практике бывает или положительным или отрицательным числом, но не близким или равным нулю.

Еще один из вариантов применения нечетких мер и интегралов в задаче принятия решений предложен в литературе. В этом случае предпочтения ЛПР описываются с помощью логико-лингвистической модели, т. е. схемы нечетких рассуждений вида $\mathbf{C}\Rightarrow\mathbf{U}$, где $\mathbf{C}=[\mu_{ij}]$— матрица нечетких множеств размером $n\times m$, соответствующая n значениям m лингвистических показателей, $\mathbf{U}=(\mu_{U_1},\ldots,\mu_{U_n})^{T}$— вектор нечетких множеств, характеризующих полезность. Выбор группой ЛПР рациональной альтернатины осуществляется по критерию максимума значений НИ вида

$$D=\oint u_{kr}\circ\omega,$$

где ω — нечеткая мера, характеризующая идеальную полезность, а u_{kr}— полезность *к*-й альтернативы для группы ЛПР. Последняя вычисляется по формуле $u_{kr}=\mathbf{M}[u_{kt}]$. Здесь **М** — оператор вычисления обобщенной меры средних, а u_{kt} — НМ, характеризующее полезность *к*-й альтернативы для *t*-го ЛПР.

5.5.4. Процесс обучения в нечеткой обстановке.

Одной из замечательных способностей человека является его способность обучаться в нечеткой обстановке. При обучении он успешно использует нечеткую информацию, которая во многих случаях является единственно доступной. В психологии по традиции используются стохастические модели обучаемости, например, модель Буша и Мостеллера, хотя ряд авторов экспериментально показал, что способность обучаться в вероятностной обстановке, как правило, не свойственна человеку. Исходя из этой точки зрения, и предложена модель обучения, которая, являясь структурным аналогом байесовской модели обучения, позволяет учитывать нечеткую информацию. Данная модель построена с помощью нечетких мер и использовалась для нахождения экстремумов многоэкстремальных функций.

Пусть *X* — множество причин и Y — множество следствий; g_X и g_Y — нечеткие меры для *X* и Y соответственно. Пусть g_Y выражается НИ от $\sigma_Y(\cdot|x)$ по g_X как

$$g_Y(\cdot) = \oint \sigma_Y(\cdot \mid x) \circ g_X, \tag{5.40}$$

где $\sigma_Y(\cdot|x)$— есть условная нечеткая мера от Y по отношению к *X*. Физический смысл этого уравнения легко установить по аналогии с теорией вероятности: $g_Y(\cdot)$ соответствует вероятности $p(y),\ y \in Y$, для случая, когда заданы вероятностная мера *p(x)* и условная вероятность $p(\cdot|x)$. Следует отметить, что определение $g_Y(\cdot)$ и математические свойства уравнения (5.40) совершенно отличаются от его вероятностного аналога.

Нечеткая мера g_X называется априорной нечеткой мерой, соответствующей степени нечеткости субъективной оценки суждения «один из элементов $E \subset X$ имеет место». Нечеткая мера $\sigma_Y(F|x)$, $F \subset Y$ является мерой нечеткости суждения «один из элементов $F \subset Y$ имеет место при заданном *x»*.

Рассмотрим метод, позволяющий уточнять g_X в процессе получения новой информации, которая в общем случае выражается подмножеством $F \subset Y$. Эта информация может быть трех типов. Если *F* состоит лишь из одного элемента, то информация является детерминированной, а если несколько, то недетерминированной. Если *F* — нечеткое подмножество, то информация — нечеткая.

Пусть нечеткое множество $A \subset Y$ имеет функцию принадлежности $\mu_A\colon Y \to [0,\ 1]$. Нечеткая мера для нечеткого подмножества *A* определяется как

$$g_Y(A) = \oint_Y \mu_A(y) \circ g_Y.$$

Здесь $g_Y(A)$ выражает степень нечеткости информации, содержащейся в *A*. Нетрудно показать, что

$$g_Y(A) = \oint_Y \mu_A(y) \circ \left[\oint_X \sigma_Y(\cdot \mid x) \circ g_X\right] = \oint_X \sigma_Y(A \mid x) \circ g_X,$$

где

$$\sigma_Y(A \mid x) = \oint_Y \mu_A(y) \circ \sigma_Y(\cdot \mid x).$$

После получения информации *A,* нечеткая мера g_X может быть уточнена таким образом, чтобы значение $g_Y(A)$ увеличилось.

Если $g_X(\cdot)$ и $\sigma_Y(\cdot|x)$ удовлетворяют λ-правилу и — $\sigma_Y(A|x_i)$ убывающая функция, то

$$g_Y(A) = \bigvee_{i=1}^{n} [\sigma_Y(A \mid x_i) \wedge g_X(F_i)],$$

где $F_i = \{x_1, x_2, \ldots, x_i\}$. И далее следует, что

$$g_Y(A) = \sigma_Y(A \mid x_l) \wedge g_X(F_l), \tag{5.41}$$

где *l* является наибольшим индексом, для которого имеет место (5.41) и выполняется условие

$$\sigma_Y(A \mid x_{l-1}) \wedge g_X(F_{l-1}) \leqslant \sigma_Y(A \mid x_l) \wedge g_X(F_l),$$
$$\sigma_Y(A \mid x_{l+1}) \wedge g_X(F_{l+1}) > \sigma_Y(A \mid x_l) \wedge g_X(F_l).$$

Обучение характеризуется возрастанием нечетких плотностей g_X, что приводит к увеличению $g_Y(A)$.

Пусть g_i, $i = 1, \ldots, n$, являются нечеткими плотностями для g_X. Тогда легко показать, что только g_i, $1 \le i \le l$ влияют на значения $g_Y(A)$, поэтому алгоритм обучения имеет вид

$$(g_X^i)' = \alpha g_X^i + (1-\alpha)\sigma_Y(A \mid x_i) \quad \forall i = 1, \ldots, l,$$
$$(g_X^i)' = \alpha g_X^i \quad \forall i = l+1, \ldots, n,$$

где $\alpha \in (0, 1)$ — параметр, определяющий скорость сходимости. Следует помнить, что после каждой итерации должна осуществляться проверка условия (5.40).

Рассмотренный алгоритм обучения использовался при решении задач минимизации многоэкстремальпых функций. При этом отмечалась высокая эффективность данного алгоритма по сравнению со стохастическими алгоритмами.

Наиболее интересное применение алгоритма рассмотрено при решении задачи классификации. Классификация в этом случае осуществлялась роботом-исследователем. Предварительно осуществилось обучение робота, а точнее, алгоритма классификации. Информация о параметрах предметов, которые классифицировал роьот, снималась в виде сигналов с рецепторов искусственной руки и представлялась в виде лингвистических переменных.

Полученные значения лингвистических переменных, соответствующие отдельным классам предметов, использовались для построения условной меры нечеткости, связывающей параметры предметов с отдельным классом.

Основными преимуществами алгоритма являются: возможность использования нечеткой информации; высокая скорость сходимости;

малое время вычисления и большое число используемых классов. Обширной областью применения нечетких мер и НИ является нечеткая статистка. Подробно исследованы методы вычисления нечетких ожиданий (FEV) и их связь с мерами центрального расположения.

5.5.5. Применение нечеткого интеграла для оценки неопределенности НМ.

Для решения многих практических задач с применением теории НМ необходимо оценивать степень неопределенности, размытости нечетких подмножеств, характеризующих различные объекты. Эффективным средством оценки размытости НМ является нечеткая энтропия. Предложен метод вычисления нечеткой энтропии с помощью НИ.

Пусть $\Phi\colon [0,\ 1] \to [0,\ 1]$ является N-функцией такой, что: а) $\Phi(0)=0$; б) $\Phi(x)=\Phi(1-x)$, $x\in[0,\ 1]$;

в) функция Ф является неубывающей в интервале [0, 0,5] и невозрастающей в [0,5, 1]. Пусть тройка $(X,\ \mathcal{B},\ g)$ определяет пространство с нечеткой мерой g. В этом случае нечеткая (Ф — g)-энтропия есть функционал

$$E_{\Phi,g}(\mu)=\oint_X \Phi(\mu)\circ g, \tag{5.42}$$

где Ф —$\mathcal{B}$-измеримая функция.

Если X — конечное множество; и его мощность есть card X = n, то энтропия (5.42) примет вид максиминной энтропии и будет вычисляться по формуле

$$E_{\Phi,g}(h)=\bigvee_{i=1}^{n}(a_i\wedge\Phi(\mu(x_i))),$$

где

$$x_i\in X,\quad a_i=g(\{x_i,\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n\})\quad \forall i=1,\ \ldots,\ n;\quad a_i>0.$$

Рассмотренная энтропия является очень удобным инструментом анализа неопределенности НМ в задачах распознавания, принятия решения, диагностики и управления в нечеткой обстановке.

В теории систем развивается направление, предполагающее возможность использования нечетких мер и НИ для аналитического описания систем с нечеткими возмущениями на входах. При этом предполагается, что система является детерминированной. В ряде работ исследуется математический аппарат для описания переходов таких систем из одного состояния в другое на основе соотношений, аналогичных уравнениям Чепмена — Колмогорова.

При исследовании сложных систем нечеткие меры представляют особый интерес для анализа их устойчивости. В случае нечетких систем устойчивость понимается как сохранение уровня сходства нечеткого состояния системы с недопустимой областью меньше некоторого порога ε. В качестве меры сходства можно взять нечеткую меру. Тогда m-мерная нечеткая система $\Phi: \mathcal{F}(X^m) \to \mathcal{F}(Y^m)$ будет ε-устойчивой относительно некоторого семейства нечетких соответствий $F(X^m) \subset \mathcal{F}(X^m)$ тогда и только тогда, когда для $\forall \mu_A \in F(X^m)$ имеем $\Phi(\mu_A) = \mu_B$ и $g(\mu_B) \leq \varepsilon$, где $\mu_A \in \mathcal{F}(X^m)$, $\mu_B \in \mathcal{F}(Y^m)$.

Рассмотрены методы коррекции ε-устойчивости динамических многокритериальных систем нечеткого целевого управления, в том числе с $(L — R)$-аппроксимацией нечетких мер.

6. Методы построения функции принадлежности

6.1. Основные группы методов

В основании теории из любой области природоведения лежит очень важное, основополагающее для ее построения понятие *элементарного объекта*. Например, для механики — это материальная точка, для электродинамики — это вектор напряженности поля, для квантовой теории — понятие состояния. Для теории нечетких множеств основным понятием является *понятие нечеткого множества, которое характеризуется функцией принадлежности*. Посредством НМ можно строго описывать присущие для языка человека расплывчатые элементы, без формализации которых нет надежды существенно продвинуться вперед в моделировании интеллектуальных процессов. Но основной трудностью, мешающей интенсивному применению теории нечетких множеств при решении практических задач, является то, что функция принадлежности должна быть задана вне самой теории и, следовательно, ее адекватность не может быть проверена непосредственно средствами теории. В каждом в настоящее время известном методе построения функции принадлежности формулируются свои требования и обоснования к выбору именно такого построения.

Л. Заде предложил оценивать степень принадлежности числами из интервала [0, 1]. Фиксирование конкретных значений при этом носит субъективный характер. С одной стороны, для экспертных методов важным является характер измерений (первичный или производный) и тип шкалы, в которой получают информацию от эксперта и которая определяет допустимый вид операций, применяемых к экспертной информации. С другой стороны, *имеется два типа свойств*: те, которые можно непосредственно измерить, и те, которые являются качественными и требуют попарного сравнения объектов, обладающих рассматриваемым свойством, чтобы определить их относительное место по отношению к рассматриваемому понятию.

Существует ряд методов построения по экспертным оценкам функции принадлежности нечеткого множества. Можно выделить *две группы методов: прямые и косвенные методы*.

Прямые методы определяются тем, что эксперт непосредственно задает правила определения значений функции принадлежности μ_A, которая характеризует понятие *А*. Эти значения согласуются с его предпочтениями на множестве объектов *U* следующим образом :

1) для любых $u_1,u_2 \in U$ $\mu_A(u_1) < \mu_A(u_2)$ тогда и только тогда, когда u_2 предпочтительнее u_1, т.е. в большей степени характеризуется понятием *А;*

2) для любых $u_1,u_2 \in U$ $\mu_A(u_1) = \mu_A(u_2)$ тогда и только тогда, когда u_1 и u_2 безразличны относительно понятия *А*.

Примеры прямых методов: непосредственная задача функции принадлежности таблицей, формулой, примером. В ряде работ прямое назначение обусловливается следующим: «По своей природе оценка является приближением. Во многих случаях достаточна весьма приближенная характеризация набора данных, поскольку в большинстве основных задач, решаемых человеком, не нужна высокая точность. Человеческий мозг использует допустимость такой неточности, кодируя информацию, достаточную для задачи (или достаточную для решения), элементами нечетких множеств, которые приблизительно описывают исходные данные. Поток информации, которая поступает в мозг через органы зрения, слуха, осязания и др., суживается таким образом в тонкую струйку информации, необхолимой для решения поставленной задачи с минимальной степенью точности».

В косвенных методах значения функции принадлежности выбираются таким образом, чтобы удовлетворить заранее сформулированным условиям. Экспертная информация является только исходной информацией для дальнейшей обработки. Дополнительные условия могут накладываться как на вид получаемой информации, так и на процедуру обработки. Примерами дополнительных условий могут служить следующие: функция принадлежности должна отражать близость к заранее выделенному эталону, объекты множества *U* являются точками в параметрическом пространстве; результатом процедуры обработки должна быть функция принадлежности, которая удовлетворяет условиям интервальной шкалы; при попарном сравнении объектов, если один объект оценивается в α раз сильнее, чем другой, то второй объект оценивается только в 1/α раз сильнее, чем первый и т.д.

Как правило, прямые методы используются для описания понятий, которые характеризуются измеренными свойствами, такими, как высота, рост, вес, объем. В этом случае удобно непосредственное задання значений степени принадлежности. К прямым методам можно отнести методы, которые основаны на вероятностной трактовке функции принадлежности $\mu_A(u)=P(A|u)$, т.е. вероятность того, что объект $u \in U$ будет отнесен к множеству, которое характеризует понятие *A*.

Если гарантируется, что люди далеки от случайных ошибок и работают как «надежные и правильные приборы», то можно спрашивать их непосредственно о значениях принадлежности. Однако имеются искажения, например, субъективная тенденция сдвигать оценки объектов в направлении концов оценочной шкалы. Следовательно, прямые измерения, которые основаны на непосредственном определении принадлежности, должны использоваться только в том случае, когда такие ошибки незначительны или маловероятны.

Косвенные методы основаны на более слабых предположениях о людях как «измерительных приборах». Рассмотрим, например, понятие «красота», которое, в отличие от понятий «длина», или «высота»,- сложное понятие. Практически не существует универсальных элементарных измеримых свойств, через которые определяется красота. В таких случаях используются только ранговые измерения при попарном сравнении объектов. Косвенные методы более трудоемки, чем прямые, но их преимущество - в стойкости по отношению к искажениям в ответе. Часто для косвенных методов выдвигается «условие безоговорочного екстремума»: при определении степени принадлежности множество исследуемых объектов должно содержать, по крайней мере, два объекта, численные представления которых на интервале [0, 1] 0 и 1 соответственно.

Итак, нами выделенно две основные группы методов построения функции принадлежности: **прямые и косвенные.** Однако функция принадлежности может отражать, как мнение группы экспертов, так и мнение одного (уникального) эксперта, следовательно, возможны, по крайней мере, четыре группы методов*: прямые и косвенные для одного* *эксперта, прямые и косвенные для группы экспертов*. Кроме этого, необходимо рассмотреть методы построения функций принадлежности терм-множеств.

В ряде научных работ обсуждаются прямые методы для одного эксперта, которые предлагают непосредственное назначение степени принадлежности, или назначение аналитической функции, совпадающей с функцией принадлежности. Осгудом предложен метод семантических дифференциалов для описания понятия с помощью нечеткого множества, которые характеризуют его свойства. В ряде научных работ обсуждаются косвенные методы для одного эксперта Интенсивность принадлежности определяется, исходя из парных сравнений объектов. Предлагается использовать параметрическую задачу идеального и произвольного объектов, на основе которого вводится мера сходства между объектом и идеалом. Также используется подход, пригодный для описания сложных иерархических свойств. Для получения значений функции принадлежности решается задача на поиск наибольшего собственного значения матрицы попарных сравнений.

Используется метод наибольших квадратов. Осуществляют поиск наиболее близкого по порядку к оценкам эксперта числового набора в факторном (параметрическом) пространстве минимальной размерности.

Предлагаются прямые методы для группы экспертов. В этих методах степень принадлежности трактуется как вероятность, или - как субъективная вероятность.

Рассматривается метод построения функции принадлежности, в определенном смысле согласованной с нечетким групповым преимуществом и заданной в интервальной шкале.

Анализируется возможность построения косвенных методов для группы экспертов. Обсуждается процедура, позволяющая сводить исходную «размытую» функцию, полученную усреднением экспертных оценок, к характеристической функции неразмытого, четкого множества. В некоторых методах значения функции принадлежности вычисляются по ранговым упорядочениям объектов группой экспертов.

Имеются работы, в которых предлагаются методы построения терм-множеств лингвистических переменных. В этих роботах систематизированны правила выбора терм-множеств.

Очень интересным есть способ построения частотных оценок на основании психологического эксперимента. В некоторых работах делается попытка построения методики предварительной обработки экспериментальной таблицы для выравнивания статистических данных.

Предлагается параметрическое определение функций принадлежности термов в зависимости от расстояния до эталонов. Функции принадлежности элементов терм-множеств строятся одновременно на основе так называемого отношения моделирования, получаемого в виде таблицы, строки и столбцы которой отвечают термам и элементам базового множества. Классификация методов построения функции принадлежности приведена на рис. 6.1.

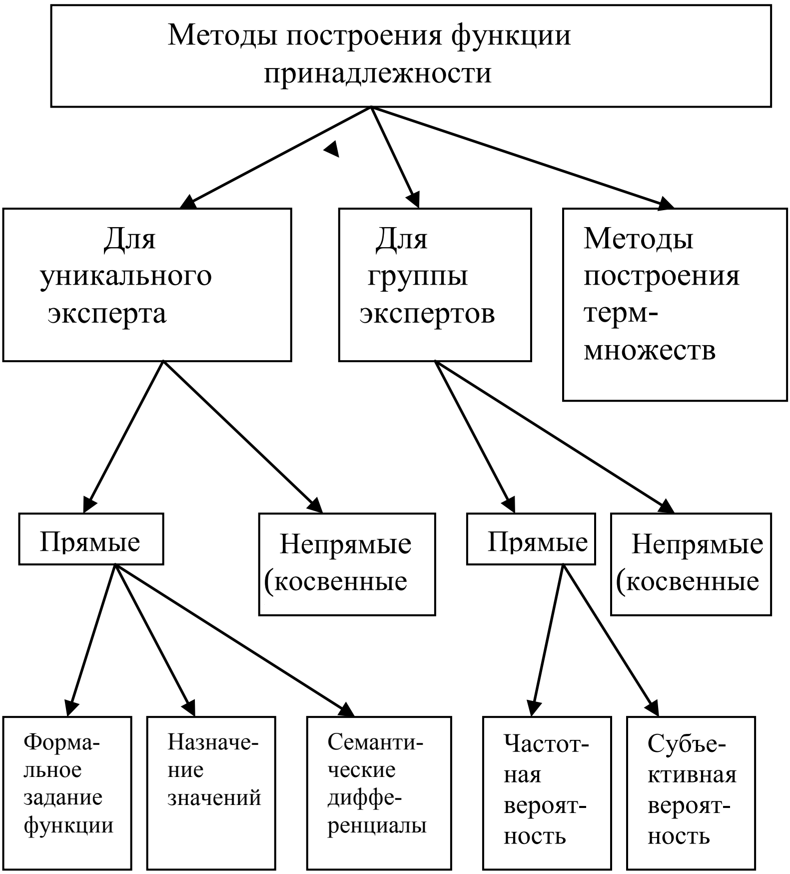


Рис. 6.1. Классификация методов построения функции принадлежности.

Рассмотрим подробнее перечисленные методы.

6.2. Прямые методы для одного эксперта

Прямые методы для одного (уникального) эксперта состоят в непосредственном назначении степени принадлежности для исследуемых объектов или непосредственном назначении функции (правила), позволющем вычислять значения. В одном из рассматриваемых методов при назначении степени принадлежности руководствуются следующими соображениями: пусть возраст человека принимает значение в интервале U=[0,100]. Слово «молодой» можно интерпретировать как имя нечеткого подмножества U, которое характеризуется функцией совместимости. Таким образом, степень, с которой числовое значение возраста, скажем u=28, совместимо с понятием «молодой» есть 0,7, в то время как совместимость 30 и 35 с тем же понятием есть 0,5 и 0,2 соответственно. Эквивалентно, функция [$\mu_{\text{молодой}}(u)$] может рассматриваться как функция принадлежности нечеткого множества «молодой» со значением [$\mu_{\text{молодой}}(u)$] в точке u, представлющим степень принадлежности понятию «молодой».

Аналогичный пример назначения степени принадлежности приводится в другом методе: рассматривается множество рукописных объектов, которые похожи на цифру пять. Здесь также понятие «пять» можно рассматривать как нечеткое множество на множестве различных изображений цифры 5. Каждое конкретное изображение некоторые читатели могут воспринять как «четыре», в то время как другие - «пять» (например, рукописное изображение цифры пять на языке хинди). В этом случае принадлежность определяется индивидуальным восприятием. В этом методе также анализируется предложенный Осгудом метод семантических дифференциалов. Практически в любой области можно получить множество шкал оценок, используя следующую процедуру:

а) определить список свойств, по которым оценивается понятие (объект);

б) найти в этом списке полярные свойства и сформировать полярную шкалу;

в) для каждой пары полюсов понятия оценить на то, как сильно оно обладает положительным свойством (в оригинальной схеме использовались числа от - 3 до 3 или от 1 до 7, а также интервалы от 0 до 100%, или от 0 до 10). Совокупность оценок по шкалам была названа профилем понятия. Следовательно, вектор с координатами, изменяющимися от 0 до 1, также называется профилем. Профиль есть нечеткое подмножество положительного списка свойств или шкал.

Пример 1. В задаче распознавания лиц можно выделить следующие шкалы:

x_1 высота лба	низкий (узкий)-широкий;
x_2 профиль носа	горбатый — курносый;
x_3 длина носа	короткий — длинный;
x_4, разрез глаз	узкие — широкие;
x_5 цвет глаз	темные— светлые;
x_6 форма подбородка	остроконечный — квадратный;
x_7 толщина губ	тонкие — толстые;
x_8 цвет лица	темное (смуглое)-светлое (белое);
x_9 очертание лица	овальное — квадратное.

Светлое, квадратное лицо, у которого чрезвычайно широкий лоб, курносый длинный нос, широкие, светлые глаза, остроконечный подбородок, может быть определенное как нечеткое множество $\{1|x_1, ..., 1|x_9\}$ или вектор 111 111 111. Лицо, которое отвечает вектору 000 000 000, полярно противоположно.

Некоторые авторы предлагают следующий способ вычисления частичной принадлежности друг другу строгих множеств, называемой степенью принадлежности. Пусть покрытием K обычного множества U является любая совокупность обычных подмножеств $\{A_1 \ ..., \ A_k\}$ множества U: $A_i \neq \varnothing$; $A_1 \cup ..., \cup A_k = U$. В крайнем случае, когда для любых $i, j, i \neq j, A_i \cap A_j = \varnothing$, имеет место разбиение U. Предположим, что имеется $B \subseteq U$, тогда B может рассматриваться как нечеткое подмножество K с функцией принадлежности

$$\mu_B(A_i) = \frac{|A_i \cap B|}{|A_i \cup B|},$$

где $|A|$ - число элементов в A.

Пример 2. Пусть $U = \{1, ..., 9\}$, $K = \{\{1, 3, 5\}, \{3, 6, 9\}, \{2, 4, 8\}, \{1, 3, 7), \{2, 3, 8\}\} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$, $B = \{2, 3, 5, 9, 8\}$; тогда, рассматривая B как нечеткое подмножество K, можно написать $B = 1/3|A_1, 1/3|A_2, 1/3|A_3, 4/7|A_4, 3/5|A_5$ или как набор значений частичной принадлежности $\mu_в = \{1/3, 1/3, 1/3, 1/7, 3/5\}$.

Любое решение задачи многоцелевой оптимизации может рассматриваться как нечеткое подмножество значений целевых функций следующим образом. Пусть $f_1 ...., f_r$ — целевые функции, где f: $R^n \to R$, и пусть нужно решить задачу $f_i \to \max$ для всех i. Пусть $f_i^* < \infty$— максимальное значение функции f_i (независимо от других функций) и $C = \{ f_1 ...., f_r \}$ — множество целевых функций, тогда любое значение x в области определения $f_i(x) \leq f_i^*$ можно рассматривать как нечеткое множество на C с вектором значений принадлежности

$$\mu_x = (\mu_1, ..., \mu_r), \ \mu_i = (f_i^* - f_i(x))/f_i^*.$$

6.3. Косвенные методы для одного эксперта

Т. Л. Саати предлагает следующий способ вычисления функции принадлежности. В практике часто имеют место случаи, когда не существует элементарных измеримых свойств, признаков, через которые определяются интересующие нас понятия, например, красота, интеллектуальность. Трудно в таких случаях проранжировать степень проявления свойства у рассматриваемых элементов. Так как степени принадлежности рассматриваются на данном реальном множестве, а не в абсолютном смысле, то интенсивность принадлежности можно определить исходя из попарных сравнений рассматриваемых элементов. Если значение степени принадлежности были бы известны, например, $\mu_s(u_i)=\omega_u$ $(i=1, ..., n)$, то попарные сравнения можно представить матрицей отношений $A=((a_{ij}))$, $a_{ij}=\omega_u/\omega_j$. Если отношения точные, то получается соотношение $A\omega=n\omega$, $\omega=(\omega_1, ..., \omega_n)$, где n — собственное значение матрицы A, по которому можно восстановить вектор ω (с учетом условия нормализации $\sum_{i=1}^{n} \omega_u = 1$).

Так как отношения сравнения a_{ij} в реальном случае неточны из-за того, что они получены эмпирическим способом, то необходимо вычислить оценки для ω. Для улучшения согласованности оценок предполагается, что $a_{ij}\ a_{jk} = a_{ik}$, $a_{ij} = \omega_u/\omega_j$, откуда для диагональных элементов $a_{ij}=1$ и для элементов, симметричных относительно диагонали $a_{ij}=1/a_{ji}$. Грубо говоря, если элемент оценивается в α раз сильнее, чем другой, то второй только в $1/\alpha$ раз сильнее, чем первый. Если имеется полная согласованность в рассуждениях эксперта (согласованность по транзитивности), то ранг матрицы A есть 1, и чтобы решить поставленную задачу, достаточно знать элементы только по одну сторону диагонали A. В этом случае

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ \omega_j/\omega_i = n \quad (i = 1,\ldots,n),$$

где n — наибольшее собственное значение A, а другие собственные значения λ нулевые, так как

$$\sum\lambda_i = \sum a_{ii} = n.$$

В общем случае эмпирическая шкала $\omega=(\omega_1, ..., \omega_n)$ должна удовлетворять задаче на поиск собственного значения $A\omega=\lambda_{max}$, где λ_{max} наибольшее собственное значение.

Из теории матриц известно, что собственные значения матрицы являются непрерывными функциями коэффициентов. Следовательно, задача сводится к поиску вектора ω, который удовлетворяет уравнению $A\omega = \lambda_{max}\omega$. Чем ближе λ_{max} к числу *n,* тем более верным является результат. Отклонение λ_{max} от *n* используется как мера полезности (правильности) результата. В процедуре решения задачи формируется матрица сравнений рассматриваемого множества элементов. Элементы такой матрицы — это значения, которые показывают во сколько раз один элемент лучше другого. Так как известно, что задача $A\omega=\lambda_{max}\omega$ имеет единственное решение, то значения координат собственного вектора, который отвечает максимальному собственному значению, деленные на их сумму, будут искомыми степенями принадлежности. При формировании оценок попарных сравнений, обычно эксперта просят отразить ощущение или опыт следующим образом:

а) установить какой из двух предлагаемых элементов, по его мнению, более важный;

б) оценить восприятие интенсивности различия в виде ранга важности по определенной ранговой шкале.

В табл. 1 приводятся качественные оценки и соответствующие им численные значения.

Таблица 1

Интенсивность важности	Качественная оценка	Объяснения
0	Несравнимость	Нет смысла сравнивать элементы.
1	Одинаковая значимость	Элементы равны по значимости.
3	Слабо значимее	Существуют показания о предпочтении одного элемента над другим, но показания не убедительные.
5	Существенно или сильно значимее	Существует хорошее доказательство и логические критерии, которые могут показать, что элемент более важен.
7	Очевидно значимее	Существует убедительное доказательство большей

9	Абсолютно значимее	значимости одного элемента над другим. Максимально подтверждается ощутимость предпочтения одного элемента над другим.
2, 4, 6, 8	Промежуточные оценки между соседними оценками	Когда необходим компромисс.
Обратные значения ненулевых значений	Если оценка a_{ij} имеет ненулевое значение, приписанное на основании сравнения элемента i с элементом j, то a_{ji} имеет обратное значение $1/a_{ij}$	
Нормирование	Нормирование возникает из описанной шкалы	

Предполагается, что элемент с нулевой оценкой не рассматривается при попарном сравнении. При анализе составных свойств, которые представляются как иерархическая система, Саати предлагает использовать описанный подход при сравнении составных свойств на удовлетворение (соответствие) сложному свойству.

Для иерархического случая доказана теорема .

Теорема 1 (Саати). Пусть H — полная иерархия с наибольшим элементом b (уровень 0) и k уровнями. Пусть B_k — матрица приоритетов k-го уровня k=1, ..., h. Если ω' — вектор приоритетов p-го уровня относительно некоторого элемента z в $(p$ — 1)-уровне, тогда вектор приоритетов ω q-го уровня $(p < q)$ относительно z есть:

$$\omega = B_q B_{q-1} \ldots B_{q+1} \omega \ldots$$

Таким образом, вектор приоритетов низшего уровня относительно элемента b есть:

$$\omega = B_1 \ldots B_h \omega'.$$

Одним из косвенныхх методов предлагается метод наименьших квадратов для получения значений функции принадлежности по матрице бинарных отношений

$$A=((a_{ij}))=((\omega_u/\omega_j)),$$

т.е. искомые значения получаются при решении оптимизационной задачи:

$$f = \sum\sum(a_{ij}\omega_j - \omega_i)^2 \to \min, \sum\omega_i = 1, \omega_i > 0.$$

Скала предлагает общий метод варьирования прототипов для получения числового значения функции принадлежности. Этот подход используется для распознавания образов. Пусть есть прототип (или идеальный объект), описание которого можно деформировать изменением параметров $(p_1, ..., p_n)$. Если дан некоторый объект (элемент), то, варьируя параметры, можно добиться наибольшего соответствия прототипа и объекта. Вводится мера сходства между объектом и прототипом m

$$(\text{объект } p_1, ..., p_n) = \|\text{объект} - \text{прототип } (p_1, ..., p_n)\|.$$

Для улучшения измерения сходства объекта с разными прототипами вводится штрафная функция d. Например, тот самый символ может быть близким как к прототипу A так и к прототипу H:

$$\text{sim (объект)} = \min_{p_1 \cdots p_n} (m \text{ (объект; } p_1, ..., p_n) + d(p_1, ..., p_n)).$$

Так как прототип полностью соответствует самому себе, то sim(прототип)=0. Числовые значения функции принадлежности вычисляются по формуле:

$$\mu_{\text{прототип}} \text{ (объект)} = 1 - \frac{sim\ (объект)}{\max sim\ (объект)},$$

где максимум берется по всем возможным объектам.

В литературе предлагается процедура построения функции принадлежности, в которой используются парные сравнения объектов и допускается матрица парных сравнений с неполной информацией (некоторые ее элементы отсутствуют). Рассматривается понятие «класс S», которое описывается функцией принадлежности на множестве объектов $A=\{a^0, ..., a^{n-1}\}$. В A имеется только два объекта a^0 и a^1, о которых можно сказать, что a^1 — идеальный представитель тех объектов, которые принадлежат S, и что a^0 — идеальный представитель тех объектов, которые не принадлежат понятию «класс S», т.е. $\mu_s(a^1)=1$, $\mu_s(a^0)=0$. Эксперту предлагается проранжировать степень различия объектов в каждой паре объектов в смысле принадлежности понятия классу S. В результате формируется матрица попарных сравнений, которая задает порядок пар объектов по степени различия в парах. Дальше посредством методов неметрического шкалированния вычисляются в факторном (метрическом) пространстве X^m координаты n точек $x^i=\{x^i_1, ..., x^i_m\}$, порядок расстояний $d(x^i, x^j)$ между которыми совпадает или максимально близкий к порядку элементов матрицы попарных сравнений. Для полученных расстояний имеют место следующие утверждения: если объекты x^i и x^j

неразличимы то d_{ij}=0, если степень различия объектов x^i, x^j больше чем степень различия объектов a^i, a^k, то $d_{ij}>d_{ik}$; если степень различия объектов x^i, x^j совпадает со степенем различия объектов a^i, a^k, то $d_{ij}=d_{ik}$.

Дальнейшие выводы основываются на следующих предположениях.

Предположение 1. Понятие *S* характеризуется несколькими одномерными признаками, которые определяются по помощи методов неметрического шкалирования.

Согласно предположению объекты формально описываются точками в пространстве признаков. Наличие нескольких признаков позволяет объяснить, например, нетранзитивность в парных сравнениях. Из процедуры получения формального описания объектов следует, что максимальное расстояние на множестве объектов будет между объектами a^0 и a^1, так как их различие в смысле принадлежности понятию *S* будет максимально возможным. Следовательно, чем дальше объект a^i от объекта a^1 в пространстве признаков, тем в меньшей степени он характеризуется принадлежностью к *S*.

Предположение 2. Степеь различия двух объектов a^i и a^j из *A* по отношению к понятию «класс *S*» пропорциональна разности расстояний в пространстве признаков от a^i и a^j к объекту a^1, который с максимально возможной степенью принадлежит *S*.

Из предположения следует, что степень различия двух объектов a^i и a^j по отношению к понятию *S* будет пропорциональна разности значений функций принадлежности на этих объектах, т.е.

$$c|d_{1i} — d_{1j}|=| \mu_s(a^i)-\mu_s(a^j)|,$$

где *c* - некоторая константа.

Если в качестве объекта a^i рассматривать a^0, потом a^1, то будут иметь место следующие соотношения:

$$c(d_{10} — d_{1j})=\mu_s(a^j), \quad cd_{1j}=1-\mu_s(a^j),$$

т.е. d_{11}=0.

Из этих уравнений следует, что

$$\mu_s(a_j)=\frac{d_{10}-d_{1j}}{d_{1j}}=1-\frac{d_{1j}}{d_{10}}.$$

Таким образом, функция принадлежности на множестве объектов *A,* которая характеризует понятие *S,* определяется по расстояниям в пространстве признаков X^m согласно полученному соотношению.

6.4. Прямые методы для группы экспертов

При интерпретации степени принадлежности как вероятности предлагается получать функции принадлежности для нескольких классов понятий S_j расчетным путем, используя равенство

$$\mu_{S_j} = p(S_j \mid u_i),$$

где условная вероятность определяется по формуле Байеса

$$p(S_j \mid u_i) = \frac{p_{u_i}(S_j)\,p(u_i \mid S_j)}{\sum_{j=1}^{m} p_{u_i}(S_j)\,p(u_i \mid S_j)}$$

причем

$$p_{u_i}(S_j) = \frac{(y_j)_{u=u_i}}{n}, \quad j = 1,...,m \quad (i = 1, ...,n),$$

y_j — число случаев при значении параметра u_i, когда верной оказалась j-я гипотеза.

В ряде работ предлагают трактовать степень принадлежности как субъективную вероятность. Так, например, утверждается, что степенью принадлежности $\mu_s(u)$ является вероятность того, что лицо, принимающее решение, отнесет элемент $u \in U$ к множеству S в случае, когда S — некоторое понятие естественного языка, U — экстенсионал понятия S, а $\mu_s(u)$ есть вероятность того, что ЛПР использует понятие S в качестве имени объекта $u \in U$.

Заслуживает внимания следующая методика оценки функции принадлежности. Сначала определяется то максимальное количество классов, которое может быть описано данным набором параметров. Для каждого элемента u значение функции принадлежности класса S_1 дополняет до единицы значения функции принадлежности класса S_2 (в случае двух классов). Таким образом, система классов должна состоять из классов, которые представляют противоположные события. Сумма значений функций принадлежности произвольного элемента u к системе таких классов будет равна единице. Если число классов и их состав четко не определены, то необходимо вводить условный класс, который включает те классы, которые не выявлены. Далее эксперты оценивают в процентах в данном состоянии u степень проявления каждого класса из названного перечня.

Однако в некоторых случаях мысль эксперта очень тяжело выразить в процентах, поэтому более приемлемым способом оценки функции принадлежности будет метод опроса, котороый состоит в следующем.

Оцениваемое состояние предъявляется большому числу экспертов. Каждый эксперт имеет один голос. Он должен однозначно отдать предпочтение одному из классов заранее известного перечня. Значение функции принадлежности вычисляется по формуле

$$\mu_s(u)=n_s/n,$$

где n — число экспертов, которые принимают участие в эксперименте, n_s — число экспертов, которые проголосовали за класс S.

Пример. Пусть в результате переписи населения в некоторой области численностью p получено множество значений возраста U от 0 до 100 лет. Пусть $y(u)$ — число людей, которые имеют возраст u и утверждающих, что являются молодыми. Пусть $n(u)$ - действительное число людей, которые имеют возраст u, тогда

$$p=\int_0^{100} d\, n(\mathrm{u}).$$

Можно считать, что понятие «молодые» описывается нечетким множеством на U с функцией принадлежности

$$\mu(u)=y(u)/n(u).$$

Очевидно, что для малых значений возраст от 0 до 20 лет $y(u)=n(u)$, следовательно, $\mu(u)=1$. Однако не все $n(35)$ считают себя молодыми, следовательно, $y(35)<n(35)$. Для $u>80$ число $y(u)$ должно быть очень маленьким.

6.5. Косвенные методы для группы экспертов

Рассмотрим способ определения функции принадлежности на основе интервальних оценок. Пусть интервал $[x_{ij}, x_{ij}']$ отражает мысль i-го эксперта, $m>1$ $(i=1, ..., m)$ о значении j-го $(j=1,...,n)$ признака оцениваемого понятия S. Тогда полным описанием этого понятия i-м экспертом является гиперпараллелепипед

$$\theta_i = [x_{1i}, x_{1i}] \times ... \times [x_{ni}, x_{ni}].$$

Описывается процедура, позволяющая вычислять коэффициенты компетентности экспертов, а также сводить исходную «размытую» функцию (усредненные экспертные оценки) к характеристической функции неразмытого, четкого множества. Предлагается следующий алгоритм.

1. Рассматривая для каждого признака j все интервалы, которые предложены экспертами, находим связное покрытие их объединения, состоящее из непересекающихся интервалов, концами которых есть только концы исходных интервалов:

$$[x_{jk}, x_{jk}] \ (j = 1,\ldots,г; \ k = 1, ..., m_j - 1).$$

2. Образуем на основе полученных покрытий гиперпараллелепипеды, которые не пересекаются:

$$T_k = [x_{nk}, x_{nk}] \times \ldots \times [x_{nk}, x_{nk}], \; k = 1, \ldots, m'.$$

3. Вычисляем для $x \in T_k$

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 1, \; если \; T_k \cap \theta_i \neq \varnothing \\ 0, \; если \; T_k \cap \theta_i = \varnothing \end{cases}$$

4. Полагаем номер итерации l =1.

5. Вводим коэффициенты компетентности

$$\{\lambda^l_i\}^m_{i=1} = \{1/m\}^m_{i=1}.$$

6. Вычисляем приближение функции принадлежности при нормированных

$$\lambda_i : \sum \lambda^l_i = 1, \quad f^{\,l}(x) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x)\lambda^l_i, \quad x \in T_k, \quad k=1, \ldots, m'.$$

7. Вычисляем функционал рассогласования мнения i-го эксперта с мнением экспертного совета на l-й итерации:

$$\delta^l_i = \sum_{\substack{x \in T_k \\ k=1,\ldots,m'}} [f^{\,l}(x) - \varphi_i(x)]^2, \; i = 1, \ldots, m.$$

8. Вычисляем $\Delta = \sum_{i=1}^{m} 1/\delta^l_i$.

9. Присваиваем $l = l+1$.

10. Вычисляем $\lambda^l_i = \Delta/\delta_i^{l-1}$.

11. Если величина $\max|\lambda_i^{l-1} - \lambda^l_i|$ близка к нулю, то вычисления прекращаем и приближением функции принадлежности считаем $f(x) = \mu_s(x)$, в противном случае возврашаемся к шагу 6.

Опишем коротко еще одний косвенный метод. Пусть U — универсальное множество, S — понятие, общее название элементов (концепт). Задача определения нечеткого подмножества U, описывающего понятие S, решается путем опроса экспертов. Каждый эксперт $Э_i$ ($i = 1, \ldots, m$) выделяет из U множество элементов Q_i по его мнению, соответствующие понятию S. Ранжируя все элементы множества $Q = \bigcup_{i=1}^{m} Q_i$ по предпочтению в смысле соответствия понятию S, каждый эксперт упорядочивает Q, используя отношение порядка $\succ$, или $\tilde{\geq}$, или ~. Отношение ~ указывает на одинаковую степень предпочтения между любыми элементами $q_\alpha, q_\beta \in Q$. Предполагается, что эксперты могут поставить коэффициенты степени предпочтения γ

перед элементами в упорядоченной последовательности, усиливая или ослабляя отношение предпочтения. Вводится расстояние между элементами указанной последовательности $q^i_\alpha, q^i_\beta \in Q$:

$$\rho(q^i_\alpha, q^i_\beta) = \frac{1}{\gamma}\sum_{j=\alpha}^{\gamma=\beta-1}\gamma_\gamma \rho(q^i{}_j, q^i{}_{j+1})$$

где
$$\rho(q_i, q_{i+1}) = \begin{cases} 1, & если \quad q_i \succ q_{i+1}, \\ 1/2 & если \quad q_i \succsim q_{i+1}, \\ 0 & если \quad q_i \sim q_{i+1} \end{cases}$$

Здесь α, β - порядковые номера элементов в упорядочении. Расстояние вычисляется через первый в упорядочении элемент:

$$\rho(q^i_\alpha, q^i_\beta) = \rho(q^i_1, q^i_\beta) - \rho(q^i_1, q^i_\alpha) = \rho^i_\beta - \rho^i_\alpha.$$

Эта разность показывает насколько предпочтительнее q^i_α по сравнению с q^i_β. При решении задачи взвешивания предпочтительности элементов множества Q предполагается, что разность между весами

$$\varphi(q^i_\alpha) — \varphi(q^i_\beta)$$

пропорциональна разности

$$\rho^i_\beta - \rho^i_\alpha : \varphi(q^i_{\beta+v}) — \varphi(q^i_\beta) = c\,(\rho^i_{\beta+v} — \rho^i_\beta).$$

Когда v=1, формула превращается в рекурентную формулу, и задача сводится к определению веса первого элемента. При использовании рекурентних формул вес последнего элемента должен отличаться от нуля. Например, в качестве $\varphi(q^i_1)$ можно выбрать $\max\limits_\alpha \rho^i_\alpha + \rho_0$. На основании всех $\varphi(q^i_\alpha)$ $(i = 1, ...,m)$ для q_α определяется значение

$$\varphi(q^i_\alpha) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\varphi(q^i{}_\alpha)$$

что и есть степень принадлежности элемента $u \in U$ нечеткому множеству с общим названием S.

В литературе рассматривается метод, который комбинирует преимущества косвенных методов в их простоте и стойкости по отношению к искажениям ответов экспертов и преимущества прямых методов, позволяющих получать непосредственно значения степени принадлежности. Выборку объектов необходимо брать такой, чтобы достаточно равномерно представить степень принадлежности от 0 до 1 по отношению к рассматриваемому нечеткому множеству. Эта выборка должна удовлетворять условию безоговорочного экстремума, т.е. должна содержать, по крайней мере, два объекта, значения функции принадлежности на которых с определенностью 0 и 1 (все эксперты приписывают эти числа экстремумам). Далее, когда множество подходящих объектов отобрано, эксперты опрашиваются о степенях принадлежности в процентной шкале. Оценка позиции по шкале каждого объекта определяется посредством медианы из распределений значений принадлежности. В качестве процедуры шкалирования используется метод, основанный на законе Тёрстона измерения категорий. Процедура, требующая отсортировки n стимулов (объектов) в $(k+1)$ категорий на некотором континууме свойств N экспертами, дает распределение частоты для каждого стимула по категориям. Средние значения границ категорий, полученные методом наименьших квадратов, позволяют определить значение оценок стимулов на шкале.

В литературе предлагается следующий метод отображения множества объектов $U = \{u_1, ..., u_n\}$ в множество действительных чисел из [0, 1]. Эксперту предъявляются все возможные пары объектов из U. В результате эксперимента с v-м экспертом получается матрица $||\delta^v_{ij}||$, где $i, j = 1, ..., n$; а δ^v_{ij} - равно 1, если эксперт ответил $u_i \tilde{>} u_j$ и равно 0 — в противном случае. В результате опроса N экспертов сформировано N матриц. Вводятся новые величины

$$n_{ij} = \sum_{v=1}^{N} \delta^v_{ij},$$

которые указывают число голосов, поданных за решение u_j, против решения $t_{ij}=n_{ij}-n_{ji}=2n_{ij}-N$. Значение функции принадлежности определяются следующей формулой:

$$\mu_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i t_{ij}\ ,\ (j = 1,..., n),\ \lambda_j \geq 0,\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1,$$

На основании этого представления каждому решению u_i приписывается число μ_i в интервальной шкале, если выполняются условия:

$$\mu_{ij} = \mu_i — \mu_j = z_{ij}\ ,\quad z_{ij} = \Delta\mu_{lj} + \Delta\mu_{il}.$$

Поскольку эксперимент с экспертами протекает произвольно, то следует ожидать, что будет нарушено условие $t_{il}=z_{ij}+z_{jl}$. В работе приведен метод сглаживания, позволяющий получить новые элементы z_{ij}, которые определяют $\Delta\mu_{ij}$: $\Delta\mu_{il} = \tilde{z}_{ij}$.

6.6. Методы построения терм-множеств

Некоторыми авторами утверждается, что для практических задач достаточно наличия нечеткого языка с фиксированным, конечным словарем. Это ограничение не слишком сильное с точки зрения практического использования. Лингвистическая переменная *L*, используемая при формализации задач принятия решений, на практике, как правило, имеет базовое терм-множество $T=\{T_i\}$, которое состоит из 2—10 термов. Каждый терм описывается нечетким подмножеством множества значений *U* некоторой базовой переменной *u* и рассматривается как лингвистическое значение *L*. Предполагается, что объединение всех элементов терм-множества покрывает полностью *U*. Это гарантирует то, что любой элемент $u \in U$ описывается некоторым $T_i \in T$. На практике для представления нечетких отношений в матричном виде определяют нечеткое отображение терм-множества в дискретный (целочисленный) универсум U^I. Отображение $U \to U^I$ определяется множителем

$$C_E = (n_k - 1)/(u_{max} - u_{min}),$$

где n_k — число элементов в U^I, т.е. $n_k = |U^I|$.

Для определения нечетких множеств из *T*, описывающих некоторый элемент *u* из *U*, вычисляется индекс

$$k = C_E(u_{МН} - u_{min}) + 1, \text{ где } u_{МН} = \max\{u_{min}, \min\{u_{max}, u\}\}.$$

В практических задачах значения на входе, например, для нечеткого управляющего устройства часто сильно зашумлены (шум в общем случае характеризуется функцией распределения вероятности), поэтому функции принадлежности должны выбираться достаточно широкими, чтобы шум не давал ощутимого эффекта (рис. 2).

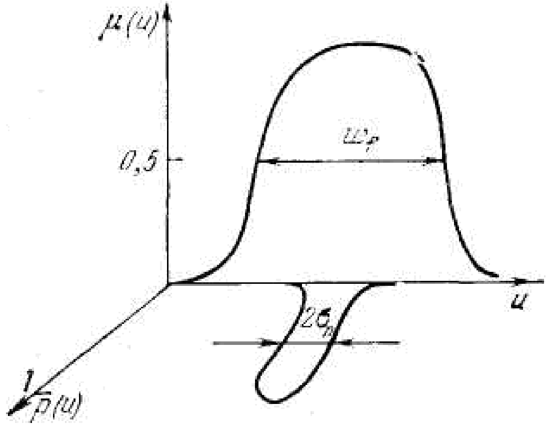


Рис. 2. Правило выбора функции принадлежности при наличии шума вероятностного характера

Правила для выбора терм-множества сводятся в табл.2

Таблица 2

Определяемые величины	Критерий	Типичные значения
$\|T\|$	Выбирается в результате компромисса между сложностью и простотой	2-10
n_k для U^I	Выбирается так, чтобы хорошо приблизить T_i из T и использовать по возможности меньше памяти ЭВМ	5-30
$u_{\max}$, $u_{\min}$	Для измеримых переменных на основании априорных знаний определяют допустимую область значений базовой переменной	
w_j	Должны быть достаточно широки, чтобы избежать чрезмерного влияния шума при переходе от базовой переменной к лингвистической переменной	$w_j > 5\delta_n$

В другом методе перенумеровываются все термы $T_i \in T = \{T_j\}^n{}_1$ на множестве действительных чисел $u \in R'$, так что терм, имеющий левее расположенный носитель, имеет меньший номер, вводятся более строгие условия:

1) $\mu_{T_1}(u_{\min}) = 1$, $\mu_{T_n}(u_{\max}) = 1$

2) для любых i, $i+1 \leq n$, $0 < \max\limits_{u \in U} \mu_{T_i \square T_{i+1}}(u) < 1$;

3) для любого i существует $u \in U$: $\mu_{T_i}(u) = 1$;

4) для любого i и $U \sum\limits_{u \in U} \mu_{T_i}(u) > 1$.

В литературе приведен способ построения частотных оценок

$$S = \{«редко», «часто», «иногда», ...\},$$

который основан на предположении о том, что слово s_i употребляется человеком не для обозначения зарегистрированной частоты появления факта, а для обозначения относительного числа событий в прошлой деятельности человека, когда рассматривалась такая же частота.

Каждому s_i - ставится в соответствие нечеткое подмножество интервала [0, 1]. Функции принадлежности μ_{s_i} получаются на основании психологического эксперимента следующим образом: группе испытуемых предъявляется набор стимулов (оценок частоты) и шкала из k категорий, упорядоченных по степени интенсивности частоты от наименьшей (1) до наибольшей (k); испытуемым предлагается разбить стимулы на k классов согласно интенсивности частоты, независимо оценивая каждый стимул и помещая в любую категорию любое число стимулов. Каждому числу u_j из [0, 1], $u_j=(j—1)/(k — 1)$, ставятся в соответствие степени употребления группой испытуемых слова s_i для обозначения категорий. Значения функции принадлежности определяются в результате нормирования:

$$\mu_{s_i}(u):[0, 1]\rightarrow[0, 1].$$

Предложенная методика оправдывается следующим: выбор обозначения категорий не влияет сколь-нибудь значительно на результаты эксперимента; число категорий (делений шкалы) не влияет радикально на результаты эксперимента, в котором производится шкалирование субъективных ощущений; шкала из k категорий является шкалой равнокажущихся интервалов, поскольку предполагается, что ее деления отстоят на психологическом континууме на равные интервалы.

Естественным шагом при построении функций принадлежности элементов терм-множества лингвистической переменной является построение одновременно всех функций принадлежлости этого терм-множества, сгруппированных в так называемое отношение моделирования R. Процесс построения состоит в заполнении таблицы, где, например, для лингвистической переменной «расстояние» столбцы индексированы расстояниями в метрах, а строки - элементами терм-множества «очень близко», «близко», ..., «далеко», «очень далеко». На пересечении соответствующей строки и столбца стоит степень сходства для испытуемого данных понятий между собой в данной семантической ситуации, например, насколько сходны понятия «близко» и 5 метров в ситуации перебегания улицы перед быстро едущим транспортом. Расстояние берется от пешехода до машины и в данном случае является синонимом опасности. Вообще говоря, каждую клеточку таблицы можно заполнять отдельно, а потом, переставляя строки и столбцы, постараться сделать строки и столбцы унимодальными. Если это удастся, то исходное терм-множество может быть использовано для построения нечеткой шкалы измерений, точками отсчета которой являются сами элементы терм-множества. Перевод в эту шкалу будет осуществляться с помощью минимаксного умножения строки, задающей исходную лингвистическую переменную в шкале метров, на отношение моделирования. Отношение сходства между элементами терм-множества $R \circ R'$, полученное с помощью умножения матрицы R на транспонированную, задает набор функций принадлежности элементов лингвистической шкалы в самой шкале, а отношение $R' \circ R$ задает набор функций принадлежности расстояний в метрах в метрической шкале.

7. Меры возможности и нечеткие множества

Содержание этого раздела основывается на подходе к моделированию неточности и неопределенности. Базовым понятием этого подхода является мера возможности. Цель этого раздела — обоснование, определение и обсуждение меры возможности, а также представление других базовых понятий, необходимых для усвоения последующих разделов.

7.1. Неопределенность и неточность

Неопределенность и неточность могут рассматриваться как две противоположные точки зрения на одну и ту же реальность - **неполноту информации**. Далее будет предполагаться, что информация выразима в форме логического высказывания, содержащего предикаты и в случае необходимости — **кванти-фикаторы**. Под **базой знаний будет пониматься множество сведений, имеющихся у субъекта или группы субъектов или содержащихся в информационной системе и относящихся к одной и той же проблемной области.** Тогда предикаты, появляющиеся при выражении информации, могут интерпретироваться как подмножества одного и того же универсального множества. Любое высказывание может также рассматриваться как утверждение, относящееся к появлению некоторого события. В свою очередь, события представимы в виде подмножеств этого универсального множества, называемого "достоверным событием". Таким образом, имеются три эквивалентных способа анализа множества данных в зависимости от того, делается ли акцент на структуре (логическая точка зрения), содержании (теоретико-множественная точка зрения) этой информации или на ее отношении к действительным фактам (событийная точка зрения).

Мы определим информационную единицу четверкой (объект, признак, значение, уверенность). *Признаку* соответствует функция, задающая значение (множество значений) объекта или *предмета,* название которого фигурирует в информационной единице. Это значение соответствует некоторому предикату, т. е. подмножеству универсального множества, связанного с данным признаком. Уверенность есть показатель надежности информационной единицы. Очевидно, что четыре компонента, образующие информационную единицу, могут быть составными (множество объектов, множество признаков, n-местный предикат, разные степени уверенности). Кроме того, могут вводится переменные, особенно на уровне объектов, если информация содержит квантификаторы. В данном контексте можно четко различать понятия неточности и неопределенности: **<u>неточность</u> относится к содержанию информации (составляющая "значение" в четверке), а <u>неопределенность</u> — к ее истинности, понимаемой в смысле соответствия действительности (составляющая "уверенность").**

Степень неопределенности информации отражают с помощью квалификаторов (модальностей) типа "вероятно", "возможно", "необходимо", "правдоподобно" и др., которым здесь мы попытаемся придать точный смысл. Модальность "вероятно" исследовалась на протяжении уже двух веков. Вероятность имеет две различные интерпретации. Одна из них — физическая (статистическая) , связанная с проведением статистических испытаний и определением частоты появления события. Другая — эпистемологическая, относящаяся к субъективному суждению. Модальности "возможно" и "необходимо" изучались еще Аристотелем, который подчеркнул факт их двойственности (если некоторое событие является необходимым, то противоположное ему событие невозможно). Любопытно, что в противоположность понятию "вероятно" понятия "возможно" и "необходимо" часто рассматривались в рамках двузначной логики как категории типа "все" или "ничего". Но понятие "возможно", как и понятие "вероятно", допускает две интерпретации: физическую (мера трудоемкости выполнения некоторого действия) и эпистемолощческую (суждение, которое мало связывает его автора). Наоборот, "необходимо" — гораздо более утвердительное понятие в физическом или эпистемологическом смысле (субъективная необходимость есть определенность, уверенность). Естественно допустить наличие степеней возможности и необходимости, как и степеней вероятности (оттенки возможности находятся уже в естественном языке, поскольку можно сказать, например, "очень возможно"). Правдоподобность и доверие имеют чисто эпистемологическую интерпретацию и связаны с возможностью и необходимостью соответственно. Каждое из этих понятий соответствует некоторому способу вывода из заданной базы знаний: **заслуживает доверия все то, что непосредственно дедуктивно выводится из базы знаний, а правдоподобно все то, что не противоречит ей (индуктивная точка зрения).**

Примерами неопределенных высказываний являются высказывания:

"Вероятно, что рост Жана не менее 1,70 м" $\triangleq$ (рост, Жан, > 1,70 м, вероятно) .

"Вероятность того, что завтра выпадет 10 мм осадков, равна 0,5" $\triangleq$ (количество, осадки завтра, 10 мм, вероятность = 0,5).

Будем называть информационную единицу точной, если подмножество, соответствующее "значение" в наборе, является одноточечным, т. е. его нельзя разбить на части. В зависимости от способа анализа множества данных будем говорить об элементарном высказывании (т. е. не имплицированном никаким другим высказыванием, за исключением всегда ложного высказывания), синглетоне (теоретико-множественная точка зрения) или элементарном событии. Точность, конечно, зависит от способа определения базового множества (от его "зернистости", например от выбора единицы измерения). В других случаях будем говорить о неточной (imprecise) информации. В естественном языке есть и другие квалификаторы для описания неточности, такие как vague (расплывчатый, неясный, смутный), flou (нечеткий, размытый), general (обобщенный), ambigu (двусмысленный). Двусмысленность представляет собой форму неточности, связанную с языком: иногда она является следствием омонимии языка. Информация двусмысленна в той мере, в которой она относится к различным контекстам или различным возможным базам (универсальным множествам). Этот тип неточности не рассматривается нами: универсальное множество, связанное с информационной единицей, считается известным. Обобщенность есть "доброкачественная" форма неточности, связанная с процессом абстрагирования: **информация является обобщенной, если указывается множество объектов с общим свойством.** Нечеткий, размытый, расплывчатый характер информации заключается в отсутствии четких границ у множества значений соответствующих объектов. Многие квалификаторы естественного языка расплывчаты, и для них характерна обобщенность. В качестве примера можно привести неточное четкое высказывание: "x=y" с точностью $\epsilon \triangleq$

(равенство, (x, y), с точностью ϵ, 1); неточное нечеткое высказывание: "x *приблизительно* равен y" = (равенство, (x, y), приблизительно, 1). Расплывчатый термин "приблизительно" характеризует совокупность значений, более или менее адекватных ϵ.
Отсюда следует, что информация может быть одновременно нечеткой и неопределенной, о чем свидетельствует предложение: "Вероятно, что завтра выпадет много осадков" = (количество, осадки завтра, много, вероятно).
Для заданного множества сведений противоречие между неточностью и неопределенностью выражается в том, что с повышением точности содержания высказывания возрастает его неопределенность. И наоборот, неопределенный характер точной информации приводит в общем случае к некоторой неточности окончательных заключений, выводимых из этой информации.

7.2. Традиционные модели неточности и неопределенности

Традиционно используются два средства представления неполноты данных: теория вероятностей и теория ошибок. Кратко рассмотрим их области применения.
Теория вероятностей — вполне разработанная математическая теория с ясными и общепринятыми аксиомами. Основная из них — **аксиома аддитивности вероятностей совместных событий**. Споры вокруг теории вероятностей касаются ее интерпретации: какого рода действительность хотят выразить с помощью этой математической модели? Исторически ею пользовались в основном для "подсчета шансов" в азартных играх, причем вероятность события определялась отношением числа благоприятных исходов к числу возможных исходов. Недостаточная строгость этого определения породила школу частотной интерпретации вероятности, в которой вероятность рассматривается как предел частот наблюдаемых событий. Третья, так называемая субъективистская школа, попыталась избежать трудностей приложений теории, с которыми сталкиваются "частотники" (требований достаточного числа наблюдений, повторяемости экспериментов и т. д.), **предложив интерпретацию вероятности как <u>меры неуверенности</u>**. **Значение вероятности при этом понимается как число, пропорциональное сумме, которую субъект согласится заплатить в том случае, если высказывание, являющееся по его утверждению истинным, в действительности окажется ложным.** Было, показано, что подобным образом определенная мера

неуверенности подчиняется аксиомам теории вероятностей, если только поведение субъекта удовлетворяет условиям "рациональности" (Сэвидж). Исходя из этого "субъективисты" стали утверждать, что аксиомы Колмогорова — единственные рациональные условия для оценки чувства неуверенности. .

Такую крайнюю позицию можно оспаривать и с философской, и с практической точек зрения. Прежде всего трудно согласиться с тем, что всякое неопределенное суждение подчиняется законам пари. Денежный залог, присутствующий в субъективистской модели, может помешать субъекту раскрыть истинный уровень своих знаний из-за страха потерять деньги. Так, профессиональный игрок распределит ставки поровну, если ему известно, что все соперники, на которых он ставит, равны по силе. При отсутствии всякой информации новичок сделает то же самое, потому что такая стратегия — наиболее осторожная. Субъективные вероятности не позволяют проводить различия между этими двумя уровнями информированности и представляются малопригодными в ситуациях, когда информации мало. В вероятностной модели особенно плохо учитывается предельный случай полного незнания, поскольку в ней всегда предполагается заданным множество взаимно независимых событий, которым в силу принципа максимума энтропии приписываются равные вероятности (в конечном случае). Тогда идентификация всех этих событий исключена и кажется спорным, что значения неопределенности, связанные с этими событиями, зависят от числа рассматриваемых альтернатив, как в случае вероятностей.

С практической точки зрения очевидно, что числа, назначаемые субъектами для вероятностного описания уровня их информированности, должны рассматриваться как приближенные оценки. Теория субъективных вероятностей не затрагивает этот тип неточности и полагает, что "рациональный индивидуум" должен в результате процедур оценивания задавать точные числа.

В заключение отметим, что теория вероятностей представляется слишком нормативной для выражения всех аспектов субъективного суждения. Теория же ошибок, часто используемая в физике, отражает лишь неточность средств измерения, выраженную в интервальной форме, в величинах, оцениваемых с помощью этих средств. В математическом плане определяется образ отображения, аргументы которого суть подмножества. Теория ошибок не приемлет оттенков: если неизвестно точное значение параметра, то точно известны пределы его изменения. Заметим, что когда задана мера неточности М величины X, то предложения типа: "X принадлежит интервалу I будут естественным образом характеризоваться с помощью модальностей "возможно" и "необходимо", так как:

1) если пересечение $\mathbf{M} \cap \mathbf{I}$ непусто, то $\mathbf{"X \in I"}$, возможно, истинно;

2) если $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{I}$, то $\mathbf{"X \in I"}$, с необходимостью истинно.

Здесь выявляются связи между этими модальностями и теорией множеств: возможность оценивается с помощью теоретико-множественного пересечения содержаний M и I двух высказываний: $\mathbf{"X \in M"}$ **и** $\mathbf{"X \in I"}$, а необходимость вычисляется, исходя из отношения вложенности.

Принцип "все или ничего" — характерная черта теории ошибок, тогда как в теории вероятностей учитываются оттенки, градации неопределенности. Это вводит определенные различия между ними, которые хотелось бы по возможности стереть. Очевидно, что теория вероятностей не обобщает теорию ошибок, поскольку распределение вероятностей для функции равномерно распределенных случайных переменных (вероятностный аналог интервала ошибки) в общем случае не является равномерным. В данной книге предлагается вариант канонического обобщения теории ошибок, позволяющий учитывать оттенки неопределенности.

Часто оказывается, что неточность типа ошибки измерения присутствует в самой серии испытаний, проводимых для определения случайного явления. Можно констатировать, что в этом случае без введения дополнительных гипотез вряд ли удастся представить полученную информацию в чисто вероятностной форме. В самом деле, **основная гипотеза, обеспечивающая применимость теории вероятностей в математической статистике, состоит в том, что <u>пространство испытаний</u> можно поставить во взаимно однозначное соответствие с <u>пространством событий</u>.** С каждым событием связывается множество его реализаций (непустое, если только данное событие не является невозможным), и для любой пары различных событий существует по крайней мере одно испытание, в котором одно событие исключает другое. **Эта гипотеза позволяет <u>разбить достоверное событие на элементарные события</u>, каждое из которых соответствует какой-то реализации.** При обработке статистических данных это приводит к предположению о существовании такого разбиения множества реализаций, что результат всякого эксперимента можно будет сопоставить с одним, и только одним элементом этого разбиения, т. е. **результат есть элементарное событие.**

Можно отыскать такие ситуации, в которых гипотеза о разбиении испытаний не справедлива. Например, если измерения дают интервалы ошибок, то вообще мало шансов соотнести их с непересекающимися классами реализаций. Физик часто оказывается в противоположной ситуации: ему требуется получить пересекающиеся интервалы, порожденные независимыми измерениями, чтобы иметь возможность с помощью проверки уменьшить ошибку измерения. Отсюда видно, что даже в случае "объективных" повторяющихся явлений не всегда можно напрямую применять теорию вероятностей. **Вероятностная модель приспособлена к обработке точной, но распределенной по реализациям информации. Как только возникает неточность в отдельной реализации, модель становится неприменимой**.

Это краткое обсуждение ограничений традиционных моделей неточности и неопределенности проведено с целью обосновать необходимость в описании более широкого плана, общего для теории вероятности и теории ошибок, в котором оба этих понятия заняли бы надлежащее место и были бы вскрыты их связи и различия. В данной книге очерчиваются лишь контуры этого общего подхода, который будет включать новое семейство мер неопределенности, тесно связанное с теорией ошибок, — **меры возможности**. Эти функции множества полностью отличны от вероятностных мер. В то время как вероятности были приспособлены к обработке точных, но противоречивых результатов испытаний, меры возможности станут естественным средством для построения баз знаний, хотя и неточных, но согласованных.

7.3. Меры неопределенности

Рассмотрим множество событий, связанных с базой неточных и неопределенных знаний, понимаемых как подмножества универсального множества Ω, называемого достоверным событием. Пустое множество $\varnothing$ отождествляется с невозможным событием. Предполагается, что каждому событию $A \subset \Omega$ можно поставить в соответствие действительное число g(A), задаваемое субъектом — "хранителем" базы знаний (или получаемое с помощью процедуры переработки информации, хранящейся в памяти информационной системы). Значение g(A) оценивает степень уверенности, имеющейся у субъекта по отношению к событию A с учетом текущего уровня информированности. По определению величина g(A) растет с увеличением уверенности. Более того, если A — достоверное событие, то полагают $g(A) = 1$, а если A — невозможное событие, то полагают $g(A) = 0$. Имеем

$$g(\emptyset) = 0 \text{ и } g(\Omega) = 1. \qquad (1)$$

Однако $g(A) = 1$ (соответственно 0) вообще говоря, не означает, что А непременно является достоверным (соответственно, невозможным) событием. Наиболее слабая аксиома для обеспечения некоторого минимума согласованности при определении функции множества g, которую можно себе представить, — это монотонность по включению

$$A \subseteq B \Rightarrow g(A) \leqslant g(B). \qquad (2)$$

Эта аксиома выражает следующее: если событие А влечет за собой другое событие В, то всегда имеется по меньшей мере столько же уверенности появлении В, сколько в появлении А.

Такие функции множества были предложены Сугено для оценки неопределенности под названием *нечеткие меры.* А. Кофман предложил термин "оценка". Мы принимаем здесь название *мера неопределенности*. (Некоторые авторы называют произвольную неаддитивную функцию множества, удовлетворяющую аксиомам ограниченности, монотонности и непрерывности, термином "мера доверия". Такое название представляется не совсем удачным, так как термин "мера доверия" или "функция уверенности" используется в литературе для характеристики более узкого класса супераддитивных мер, удовлетворяющих помимо указанных аксиом требованию $\forall A \subseteq \Omega,\ Cr(A) = \sum_{B \subset A} m(B)$ (см. также формулу (26)). Мы решили использовать термин "мера неопределенности", заранее оговаривая, что поскольку эти меры являются расширением математических объектов, изучаемых в классической теории меры, то с большей строгостью их следовало бы называть "квазимеры" или "полумеры".)

Следует напомнить, что эти функции множества не являются обычными мерами, поскольку они могут не быть аддитивными, за исключением специально оговоренных случаев.

Если Ω — бесконечное множество, то можно ввести условие непрерывности в виде

$$\lim_{n \to +\infty} g(A_n) = g(\lim_{n \to +\infty} A_n) \qquad (3)$$

для любой последовательности $\{A_n\}_n$ вложенных множеств вида $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ или $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots$.

Будем предполагать, что мера неопределенности удовлетворяет условию (3) по крайней мере для одной из двух указанных последовательностей вложенных множеств.

7.3.1. Меры возможности и необходимости

Следующие неравенства непосредственно вытекают из аксиомы монотонности (2) и характеризуют объединение $A \cup B$ или пересечение $A \cap B$ событий:

$$\forall A, B \subseteq \Omega,\ g(A \cup B) \geqslant \max(g(A), g(B)), \quad (4)$$

$$g(A \cap B) \leqslant \min(g(A), g(B)). \quad (5)$$

Предельным случаем мер неопределенности оказываются функции множества П такие, что

$$\forall A, B, \Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B)). \quad (6)$$

Они называются *мерами возможности* по Заде. В формуле (6) читателей может удивить отсутствие предположения о том, что А и В — непересекающиеся множества. Легко проверить, что если условие (6) справедливо для любой пары непересекающихся множеств $A \cap B = \emptyset$, то оно справедливо и для любой пары множеств (событий) (Дюбуа и Прад). Использование термина "возможность" для обозначения этих мер неопределенности может быть оправдано с нескольких точек зрения.

Пусть $E \subseteq \Omega$— достоверное событие. Легко определить функцию П со значениями из $\{0,1\}$, удовлетворяющую условию (6):

$$\Pi_E(A) = \begin{cases} 1, \text{если } A \cap E \neq \emptyset, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases} \quad (7)$$

Ясно, что в данном контексте $\Pi_E(A) = 1$ означает, что событие А возможно.

Это наводит на мысль о связи мер возможности с теорией ошибок (см. выше). В частности, если А и $\bar{A}$— два противоположных события ($\bar{A}$ есть дополнение А в Ω), то имеем

$$\max(\Pi(A), \Pi(\bar{A})) = 1. \quad (8)$$

Это интерпретируется как факт, что из двух противоположных событий по крайней мере одно безусловно возможно. Более того, когда некоторое событие считается возможным, то не исключается возможность противоположного события. Это согласуется с семантикой суждений о возможности, которые мало к чему обязьюают их авторов. Утверждение, что события А и $\bar{A}$ одинаково возможны, соответствует случаю полного незнания, когда событие А столь же ожидаемо, что и противоположное событие.

Наконец, условие (6) согласуется с представлением о возможности на уровне здравого смысла: для того чтобы реализовать $A \cup B$, достаточно реализовать самый "легкий" вариант из этих двух (наименее дорогостоящий).

Когда множество Ω конечно, то всякую меру возможности П можно определить по ее значениям на одноточечных подмножествах Ω:

$$\Pi(A) = \sup\{\pi(\omega) \mid \omega \in A\}, \qquad (9)$$

где $\pi(\omega) = \Pi(\{\omega\})$; π есть отображение из Ω в [0,1], называемое *функцией распределения возможностей.* Оно является *нормальным* в смысле

$$\exists\omega, \quad \pi(\omega) = 1, \qquad (10)$$

поскольку $\Pi(\Omega) = 1$.

Замечание. Формула (9) справедлива даже в случае, когда (как и у Заде) не накладывается условие $\Pi(\Omega) = 1$. Тогда условие (8) и (10) выполняются, если заменить 1 на $\Pi(\Omega)$.

Когда множество Ω бесконечно, то не гарантировано существование функции распределения возможностей. Соответствующее распределение становится распределением возможности лишь тогда, когда аксиома (6) расширяется на случай бесконечных объединений событий. В прикладных задачах можно всегда исходить из функций распределения возможностей и строить меру возможности П с помощью формулы (9). В наиболее общем случае меры возможности не удовлетворяют аксиоме непрерывности (3) для убывающих последовательностей вложенных множеств. Другой граничный случай мер неопределенности получается при достижении равенства в формуле (5). При этом определяется класс функций множества, называемых *мерами необходимости* и обозначаемых N, которые удовлетворяют аксиоме, двойственной аксиоме (6):

$$\forall A, B, \quad N(A \cap B) = \min\left(N(A), N(B)\right). \qquad (11)$$

Легко построить функцию N со значениями в $\{0,1\}$ исходя из информации о достоверном событии и полагая

$$N(A) = \begin{cases} 1, \text{ если } E \subseteq A, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases} \qquad (12)$$

Здесь N(A)=1 означает, что A — достоверное событие (с необходимостью истинное). Более того, легко видеть, что функция множества N удовлетворяет аксиоме (11) тогда, и только тогда, когда функция П, определяемая в виде

$$\forall A, \Pi(A) = 1 - N(\bar{A}), \qquad (13)$$

является мерой возможности. Формулы (12) и (13) поясняют название "меры необходимости" для функции N. Формула (13) есть численное выражение отношения двойственности между модальностями "возможно" и "необходимо" (в модальной логике), постулирующее, что некоторое событие необходимо, когда противоположное событие невозможно. Это отношение двойственности означает, что всегда можно построить функцию рапределения необходимости исходя из функции распределения возможности с помощью формулы

$$N(A) = \inf \{1 - \pi(\omega) \mid \omega \notin A\}. \tag{14}$$

Меры необходимости удовлетворяют соотношению

$$\min\,(N(A), N(\bar{A})) = 0, \tag{15}$$

которое исключает одновременную необходимость двух противоположных событий. С помощью (13) и (15) (или (8)) нетрудно проверить, что

$$\forall A \subseteq \Omega, \Pi(A) \geqslant N(A). \tag{16}$$

Данное условие отвечает интуитивному представлению о том, что, прежде чем быть необходимым, событие должно быть возможным. К тому же имеются более сильные утверждения, чем аксиома (16):

$$N(A) > 0 \Rightarrow \Pi(A) = 1; \tag{17}$$

$$\Pi(A) < 1 \Rightarrow N(A) = 0. \tag{18}$$

7.3.2. Возможность и вероятность

Когда имеется информация о появлении событий в форме измеренных частот элементарных событий, полученная мера неопределенности естественным образом удовлетворяет аксиоме аддитивности

$$\forall A, \forall B, A \cap B = \varnothing, P(A \cup B) = P(A) + P(B), \tag{19}$$

т.е. становится *вероятностной мерой,* которая, конечно, является монотонной в смысле условия (2). Формула (19) - вероятностный эквивалент аксиом (6) и (11).

Условие, эквивалентное условиям (9) и (14), для конечного случая записывается в виде

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega), \tag{20}$$

где $p(\omega) = P(\{\omega\})$. Условие нормировки

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$$

является аналогом условия (10). Общая черта вероятностных мер, мер возможности и необходимости заключается в том, что все они могут характеризоваться некоторыми распределениями на элементах универсального множества.

Здесь аналогом соотношений (8) и (15) является хорошо известное соотношение

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1, \tag{21}$$

в то время как из (8) и (15) следуют лишь неравенства

$$N(A) + N(\bar{A}) \leqslant 1, \tag{22}$$

$$\Pi(A) + \Pi(\bar{A}) \geqslant 1. \tag{23}$$

Из этих соотношений видно одно из главных различий между возможностью и вероятностью. Вероятность некоторого события полностью определяет вероятность противоположного события. Возможность (или необходимость) некоторого события и возможность (необходимость) противоположного ему события связаны слабее; в частности, для того, чтобы охарактеризовать неопределенность по отношению к событию А, требуются два числа П(А) и N(А), удовлетворяющие условию (17) или (18).

Когда моделируется субъективное суждение, кажется естественным стремление не устанавливать жесткой связи между показателями, свидетельствующими в пользу некоторого события (степень необходимости), и показателями, свидетельствующими против него (степень возможности). В этой ситуации понятие вероятности оказывается менее гибким, чем понятие меры возможности.

Даже когда сохраняется требование аддитивности, можно построить меры возможности и необходимости, если не требовать дополнительно, чтобы значения вероятностей (распределение р) относились к элементарным событиям. Точнее, пусть $E_1, E_2, \ldots, E_p$ непустые, попарно различные подмножества множества Ω (предполагаемого конечным) с соответствующими значениями вероятности $m(E_1), \ldots, m(E_p)$, такими, что

$$\sum_{i=1,\ldots,p} m(E_i) = 1, \tag{24}$$

и

$$\forall i, m(E_i) > 0. \tag{25}$$

Величина $m(E_i)$ понимается как значение вероятности совокупности элементарных событий, составляющих E_i, причем здесь не оговаривается распределение величины $m(E_i)$ по элементарным событиям. Подмножества E_i называются "фокальными элементами" и могут отражать неточность наблюдений. В этой ситуации вероятность события A можно охарактеризовать лишь неточно как величину, содержащуюся в интервале

$$[P_*(A),\ P^*(A)]$$

с границами

$$P_*(A) = \sum_{E_i \subseteq A} m(E_i) = \sum_i m(E_i) \cdot N_{E_i}(A), \quad (26)$$

$$P^*(A) = \sum_{E_i \cap A \neq \emptyset} m(E_i) = \sum_i m(E_i) \cdot \Pi_{E_i}(A). \quad (27)$$

Значение $P_*(A)$ вычисляется по всем фокальным элементам, которые делают необходимым появление события A (или влекут за собой событие A). Значение $P^*(A)$ получается при рассмотрении всех фокальных элементов, которые делают возможным появление события A. Отметим, что имеется отношение двойственности между P^* и P_*:

$$\forall A, P^*(A) = 1 - P_*(\bar{A}). \quad (28)$$

Доказано (Шейфер), что функция P^* (соответственно P_*) удовлетворяет аксиоме (6) (соответственно (11)), т. е. является мерой возможности (соответственно необходимости) тогда, и только тогда, когда фокальные элементы образуют последовательность вложенных множеств. А именно если $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_p$, то функция распределения возможностей π, связанная с P^* и P_*, определяется в виде

$$\forall \omega, \pi(\omega) = P^*(\{\omega\}) = \begin{cases} \sum_{j=i} m(E_j), \text{ если } \omega \in E_i, \omega \notin E_{i-1}, \\ 0, \text{ если } \omega \in \Omega - E_p. \end{cases} \quad (29)$$

Ясно, что если, наоборот, фокальные элементы являются элементарными (а значит, несовместными) событиями, то

$$\forall A, P_*(A) = P^*(A) = P(A),$$

т. е. снова возвращаемся к вероятностной мере.

Если схематично представить базу знаний с помощью множества фокальных элементов (которые являются составляющими "значение" в наборе, описывающем информационную единицу), то легко понять, что вероятностные меры естественным образом синтезируют базу точных и дифференцированных знаний, тогда как меры возможности суть отражение неточных, но связных (т. е. подтверждающих друг друга) знаний. Отметим, что функции возможности в этом смысле более естественны для представления чувства неуверенности: от субъекта не ждут слишком точной информации, но желают услышать по возможности наиболее связную речь. Зато точные, но флуктуирующие данные чаще всего получают из наблюдений физического явления.

Несомненно, в базе знаний будет содержаться информация, которая в общем случае не сведется ни к точной, ни к полностью согласованной информации. Вероятность, с одной стороны, и пара "возможность — необходимость" — с другой соответствуют двум крайним, а значит, идеальным ситуациям.

Формулы (26) и (27) позволяют считать, что функция распределения возможностей определяет класс вероятностных мер $\mathcal{P}$, такой, что

$$\mathcal{P} = \{ P \mid \forall A, N(A) \leqslant P(A) \leqslant \Pi(A) \}. \tag{30}$$

Это позволяет строго определить понятие математического ожидания в рамках мер возможности. Если f — функция, определенная на Ω и принимающая значения из множества действительных чисел $\mathcal{R}$, то верхние и нижние математические ожидания f, обозначаемые $E^*(f)$ и $E_*(f)$ соответственно, определяются с помощью интегралов Лебега — Стилтьеса (Демпстер)

$$E_*(f) = \int r d\Pi(\{\omega \mid f(\omega) \leqslant r\}), \tag{31}$$

$$E^*(f) = \int r dN(\{\omega \mid f(\omega) \leqslant r\}). \tag{32}$$

Названия верхних и нижних математических ожиданий оправдываются тождествами

$$E^*(f) = \sup \{E(f) \mid P \in \mathcal{P}\}; \; E_*(f) = \inf\{E(f) \mid P \in \mathcal{P}\}. \tag{33}$$

Эти соотношения были получены Демпстером для случая, когда множество Ω конечно.

7.4. Нечеткие множества

Как мы роворили ранее, понятие нечеткого множества можно определить без ссылки на какую-либо меру неопределенности, видоизменяя традиционную характеристическую функцию множества, а именно вводя градации в обычное отношение принадлежности. Это — точка зрения логики. При всем том задание меры неопределенности сводится к стремлению локализовать значение переменной x, выражая

для каждого подмножества A универсального множества X имеющуюся информацию об отношении $x \in A$. Семейство подмножеств,
подходящих для представления переменной x, будет индуцировать обобщенную характеристическую функцию нечеткого множества, причем эти два представления строго эквивалентны в случае мер возможности.

Согласно первой точке зрения определение нечеткого множества F эквивалентно заданию универсального множества Ω и отображения из Ω в единичный интервал, т. е. $\mu_F : \Omega \to [0, 1]$ (Заде). Значение $\mu_F(\omega)$ для $\omega \in \Omega$ понимается как степень принадлежности элемента ω нечеткому множеству F. Это — прямое определение, которое позволяет строить простые модели расплывчатых категорий естественного языка (например, понятие "высокий"), определенных на объективном носителе, например в числовой шкале (Ω — множество чисел, характеризующих рост человека), или на множестве объектов, качественно описываемых с помощью таких категорий (Ω - множество людей). Величина $\mu_F(\omega)$ выражает тогда степень совместимости значения (или объекта) ω с понятием F. Если $\Omega = \mathcal{R}$ (множество действительных чисел), то F есть *нечеткая величина.*

Вполне естественна постановка задачи нахождения обычных теоретико-множественных представлений для нечеткого множества F. Когда $\mu_F(\omega) \in \{0, 1\}, \forall \omega,$ то F — обычное подмножество универсального множества Ω. В этом случае F называется "областью определенности" в Ω. В противном случае можно выбрать порог $\alpha \in (0, 1]$ и определить обычное множество

$$F_\alpha = \{\omega \in \Omega | \mu_F(\omega) \geqslant \alpha\}, \tag{34}$$

которое называется *множеством уровня* α или α-*срезом* нечеткого множества F. Множество F_α содержит все элементы универсального множества Ω, для которых уровень совместимости с F не меньше α. Семейство $C(F) = \{F_\alpha | \alpha \in (0, 1]\}$ всех α-срезов есть монотонная последовательность, удовлетворяющая условию

$$0 < \alpha \leqslant \beta \leqslant 1 \Rightarrow F_\alpha \supseteq F_\beta. \tag{35}$$

Она позволяет следующим образом представить нечеткое множество F с помощью обычных множеств (Заде):

$$\forall\omega, \mu_F(\omega) = \sup\{\alpha | \omega \in F_\alpha\}. \quad (36)$$

Обратно, если задано конечное семейство множеств в виде монотонной последовательности $\{F_{\alpha_1}, \ldots, F_{\alpha_m}\}$, удовлетворяющей условию (35), то оно образует множество α-срезов нечеткого множества, определяемого условием (36). В случае бесконечного семейства множеств условия (35) недостаточно и необходимо, чтобы для любой возрастающей последовательности $(\alpha_n)_n$ элементов из (0, 1] выполнялось требование (Ралеску)

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \alpha \Rightarrow F_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{\alpha_n}. \quad (37)$$

С другой стороны, для представления нечеткого множества F можно взять его *строгие* α*-срезы* (множества строгого уровня α), определяемые в виде

$$F_{\bar{\alpha}} = \{\omega \in \Omega \mid \mu_F(\omega) > \alpha\}, \alpha \in [0, 1). \quad (38)$$

Строгие α-срезы удовлетворяют условиям (135), (1.36) так же, как и α-срезы. Среди обычных множеств, описывающих нечеткое множество F в виде последовательности $\{F_\alpha\}$, часто упоминаются следующие два множества:

множество уровня 1, называемое *ядром* нечеткого множества F и обозначаемое $\mathring{F}$:

$$\mathring{F} = \{\omega \in \Omega | \mu_F(\omega) = 1\};$$

множество строгого уровня 0, называемое *носителем* нечеткого множества F и обозначаемое S(F) :

$$S(F) = \{\omega \in \Omega \mid \mu_F(\omega) > 0\}.$$

Примечание. В ряде случаев для представления множества F желательно вводить не α-срезы, а другие последовательности множеств.

Вторая точка зрения на нечеткое множество состоит в рассмотрении его как "следа" меры возможности на одноточечных множествах в Ω. В самом деле, всякому множеству $E \subseteq \Omega$ можно поставить в соответствие меру возможности Π_E, такую, что $\Pi_E(A) = 1$ тогда, и только тогда, когда $E \cap A \neq 0$, и $\Pi_E(A) = 0$ в противном случае. Когда мера возможности П принимает значения в единичном интервале, функцию распределения возможностей можно интерпретировать как функцию принадлежности нечеткого множества F, рассматриваемого как достоверное событие, на котором сосредоточена мера П. Действительно, обозначая через $[0,\ 1]^{\Omega}$ множество нечетких подмножеств универсума Ω, имеем

$$\forall \Pi,\ \exists F \in [0,1]^{\Omega}, \forall \omega \in \Omega, \Pi(\{\omega\}) = \pi(\omega) = \mu_F(\omega). \quad (39)$$

Обратно, задание нечеткого множества достаточно для описания функции распределения возможностей при условии, что это нечеткое множество нормально, т. е.

$$\exists \omega, \mu_F(\omega) = 1. \quad (40)$$

Но если не накладывать более ограничения П(Ω) = 1, то, основываясь на формуле (9), получаем

$$\forall F \in [0,1]^{\Omega},\ \exists \Pi,\ \forall \omega \in \Omega,\ \Pi(\{\omega\}) = \Pi(\omega) = \mu_F(\omega). \quad (41)$$

Величина

$$\Pi(\Omega) = \sup \mu_F$$

иногда называется *высотой* нечеткого множества F.

Легко видеть, что если функция распределения возможностей определяется по весам *m* фокальных элементов, то фокальные элементы образуют семейство α-срезов некоторого нечеткого множества F. Пусть

$$\{A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_p\}$$

суть фокальные элементы. Тогда

$$A_i = F_{\alpha_i},\ \text{где}\ \alpha_i = \sum_{j=i,\ldots,p} m(A_j),$$

т. е. в отличие от условия (36) имеем

$$\forall \omega \in \Omega,\ \mu_F(\omega) = \sum_{i,\omega \in F_{\alpha_i}} m(F_{\alpha_i}). \quad (42)$$

Это — вероятностный способ представления нечеткого множества.

Когда выражение (39) применяется к вероятностной мере на конечном универсальном множестве, это приводит к рассмотрению вероятностей как значений принадлежности. Если заметить, что плотность распределения вероятностей описывает наши представления о *точке* с неизвестным расположением, *а отнюдь не о множестве* (поскольку при $P(A) \in \{0,1\}$ функция множества **P**(A) есть мера Дирака, сосредоточенная на одноточечном множестве) , то станет понятно, что это смешение вероятностей и значений принадлежности не вполне правомерно. В то время как распределение возможностей легко интерпретировать как нечеткое множество, распределение вероятностей нельзя рассматривать как "нечеткую точку"! Более того, в отличие от случая мер возможности знание $\{P(\{\omega\}) \mid \omega \in \Omega\}$ не определяет с необходимостью вероятностную меру, поскольку (при бесконечном множестве Ω) мы можем иметь $P(\{\omega\}) = 0, \forall\omega.$

В заключение обсудим вопрос нормировки нечеткого множества. Здесь все зависит от природы универсального множества. Если, например, мы хотим описать множество целых чисел, очень близких к 3,5, то естественно отказаться от нормировки функции принадлежности, поскольку наиболее близкие к 3,5 числа лежат вне множества натуральных чисел $\mathcal{N}$. Зато нечеткая величина, определенная на $\mathcal{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, будет в общем случае нормированной, причем ее универсум обладает полнотой. Отказ от нормировки меры возможности может также интерпретироваться как отсутствие полного доверия к данной информации (например, при анализе информации, поступившей от двух противоречивых источников) или как факт наличия неопределенности, когда переменная, связанная с данной мерой возможности, не принимает никакого значения (если, например, *п* - множество реализаций действия, которое, может быть, останется невыполненным).

7.5. Элементарные операции над нечеткими множествами

Понятия включения и равенства легко расширяются на случай нечетких множеств; их наиболее распространенное определение принадлежит Заде.

$$\textit{Включение:}\ F \subseteq G \ \ \forall\omega, \mu_F(\omega) \leqslant \mu_G(\omega). \qquad (43)$$

$$\textit{Равенство:}\ \ F = G \ \ \forall\omega, \mu_F(\omega) = \mu_G(\omega). \qquad (44)$$

Основные теоретико-множественные операции (дополнение, пересечение и объединение) были определены Заде для нечетких множеств следующим образом.

Дополнение: нечеткое множество F, дополнительное к F в универсальном множестве Ω, определяется в виде

$$\forall\omega, \mu_{\bar{F}}(\omega) = 1 - \mu_F(\omega). \qquad (45)$$

Пересечение: пересечение $F \cap G$ двух нечетких множеств F и G в универсальном множестве Ω определяется в виде

$$\forall \omega, \mu_{F \cap G}(\omega) = \min(\mu_F(\omega), \mu_G(\omega)). \qquad (46)$$

Объединение: объединение $F \cup G$ двух нечетких множеств F и G в универсальном множестве Ω определяется в виде

$$\forall \omega, \mu_{F \cup G}(\omega) = \max(\mu_F(\omega), \mu_G(\omega)). \qquad (47)$$

Все эти определения могут показаться в достаточной степени произвольными, хотя и не противоречат нашим интуитивным представлениям. Они совпадают с классическими теоретико-множественными определениями, когда рассматриваемые множества являются обычными подмножествами универсального множества. Однако на самом деле обобщения операций дополнения, пересечения и объединения, а также отношений включения и равенства на случай нечетких множеств не единственны. Соотношения (43), (44) могут оказаться слишком жесткими для практического сравнения нечетких множеств между собой. Ими удобно пользоваться главным образом по соображениям математического порядка. Показатели сравнения этих операций будут рассмотрены далее.

Тем не менее определения, приведенные выше, можно оправдать богатством структуры, которую они индуцируют на $[0, 1]^{\Omega}$.

Отношение включения, определяемое формулой (43), рефлексивно и транзитивно.

Дополнение, определяемое по формуле (45), удовлетворяет свойству инволюции $\bar{\bar{F}} = F$ и является единственным, если принять, что для каждой пары $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ при переходе от элемента ω_1 к ω_2 степень принадлежности к нечеткому множеству F изменяется симметричным образом по отношению к изменению степени принадлежности к $\bar{F}$, т. е.

$$\forall (\omega_1, \omega_2), \mu_F(\omega_1) - \mu_F(\omega_2) = \mu_{\bar{F}}(\omega_2) - \mu_{\bar{F}}(\omega_1) \qquad (48)$$

Множество $[0, 1]^{\Omega}$ нечетких подмножеств над универсумом Ω с операциями (45) — (47) имеет структуру векторной решетки. Это означает, что все свойства классических теоретико-множественных операций сохраняются, кроме законов непротиворечивости $F \cap \bar{F} = \emptyset$ и исключенного третьего $F \cup \bar{F} = \Omega$, от которых остается лишь ослабленный вариант:

$$\forall \omega, \mu_{F \cap \bar{F}}(\omega) = \min(\mu_F(\omega), 1 - \mu_F(\omega)) \leqslant 0{,}5 \qquad (49)$$

$$\forall\omega, \mu_{F\cup\bar{F}}(\omega) = \max(\mu_F(\omega), 1-\mu_F(\omega)) \geqslant 0{,}5. \quad (50)$$

Выражения (46) и (47), т. е. операции взятия минимума и максимума, — единственно возможные определения операций пересечения и объединения нечетких множеств, которые сохраняют такую структуру на нечетких подмножествах универсума Ω. При этом получается некоторая "оптимальная" структура, так как на $[0, 1]^{\Omega}$ невозмбжно сохранить структуру булевой решетки. В частности, законы непротиворечивости $F \cap \bar{F} = \varnothing$ и исключенного третьего $F \cup \bar{F} = \Omega$ становятся несовместимыми с условиями идемпотентности $F \cap F = F$, $F \cup F = F$, когда понятие принадлежности градуировано (Дюбуа и Прад).

Отметим еще совместимость включения, пересечения и объединения с понятием α-среза. Легко проверить, что при $\forall\alpha \in (0, 1]$

$$(F \cap G)_{\alpha} = F_{\alpha} \cap G_{\alpha}, \quad (F \cup G)_{\alpha} = F_{\alpha} \cup G_{\alpha}, \quad (51)$$

$$F \subseteq G \Longleftrightarrow F_{\alpha} \subseteq G_{\alpha}. \quad (52)$$

При этом (51) — еще одно характеристическое свойство операций минимума и максимума для пересечения и объединения нечетких множеств. Условия (51) и (52) выполняются и для строгих α-срезов.

Однако операцию дополнения нельзя напрямую заменить тождественной операцией на α-срезах. Для нее имеем

$$(\bar{F})_{\alpha} = \bar{F}_{\overline{1-\alpha}}. \quad (53)$$

Де Люка и Термини расширили понятие мощности множества на случай нечетких множеств для конечного универсального множества Ω в виде

$$|F| = \sum_{\omega \in \Omega} \mu_F(\omega).$$

Используя формулы (46), (47), легко проверить, что:

1) $|F \cup G| + |F \cap G| = |F| + |G|$;
2) $F \subseteq G \Rightarrow |F| \leqslant |G|$.

Интерпретируя нечеткие множества μ_F и μ_G как функции распределения возможностей π и π', на основе последнего соотношения приходим к трактовке мощности нечеткого множества как показателя неточности данных. В самом деле, мощность минимальна для одноточечных множеств, т. е. наиболее точных значений, и максимальна для F = Ω. Наоборот, под показателем точности понимается функция из $[0, 1]^{\Omega}$ в [0, 1], которая является монотонно убывающей в смысле сложенности нечетких множеств и максимальна лишь для одноточечных подмножеств базового множества. Примером *меры точности,* называемой также *мерой специфичности* (mesure de specificite), служит мера, предложенная Ягером, которая для конечного случая, когда элементы множества Ω предполагают упорядоченными по убыванию значений μ_F, имеет вид

$$Sp(F) = \int_0^{\bar{\alpha}} \frac{1}{|F_\alpha|} d\alpha = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}(\mu_F(\omega_j) - \mu_F(\omega_{j+1})),$$

где $\bar{\alpha} = \sup\{\alpha | F_\alpha \neq \varnothing\}, |\Omega| = n$ и по определению $\mu_F(\omega_{n+1}) = 0.$

Легко убедиться, что $Sp(F) = 1$ тогда, и только тогда, когда $\exists\omega \in \Omega, F = \{\omega\},$ и что если F и $\bar{F}'$ — нормальные нечеткие множества, то имеем

$$F \subset F' \Rightarrow Sp(F) \geqslant Sp(F').$$

Кроме того, Хигаши и Клир предложили другой показатель неточности для нечетких множеств, определяемый выражением

$$H(F) = \frac{1}{\bar{\alpha}} \int_0^{\bar{\alpha}} \log_2(|F_\alpha|) d\alpha = \sum_{j=1}^{n} (\mu_F(\omega_j) - \mu_F(\omega_{j+1})) \cdot \log_2(j), \text{ если } \bar{\alpha} = 1$$

в предположении, что все элементы множества Ω упорядочены таким же образом. Легко проверить, что здесь выполняются следующие условия:

а) $F \subseteq F' \Rightarrow H(F) \leqslant H(F');$

б) величина H минимальна и равна нулю тогда, и только тогда, когда F — одноточечное множество;

в) величина H максимальна и равна $\log_2 n$ тогда, и только тогда, когда F = Ω.

Наконец, мощность нечеткого множества может рассматриваться как нечеткое множество целых чисел, обозначаемое $||F||$ и определяемое Заде следующим образом:

$$\forall n \in \mathcal{H}, \mu_{||F||}(n) = \sup\{\alpha, |F_\alpha| \geqslant n\}.$$

Это определение напоминает выражение (36). Когда F — обычное множество. данная формула сводится к $||F|| = \{0, 1, \ldots, |F|\}$. Свойства нечеткой величины мощности $||F||$ и ее связи со скалярной величиной мощности $|F|$ нечеткого множества рассмотрены в работе Дюбуа и Прада.

Замечание. Не следует смешивать показатель точности и показатель нечеткости (Кофман). Последний позволяет оценить, до какой степени плохо определены границы множества. Пусть $f(F) \in [0, +\infty)$. Указанные показатели характеризуются набором аксиом, весьма отличающихся от аксиом, задающих показатели точности (Хигаши и Клир) для конечного множества Ω:

1) f(F)=0 тогда, и только тогда, когда F - обычное, четкое подмножество множества Ω*:*

2) показатель нечеткости f (F) максимален тогда, и только тогда, когда $f_F(\omega) = 0{,}5$, $\forall \omega \in \Omega$;

3) $f(F) \leqslant f(F') \Longleftrightarrow \forall \omega, |\mu_F(\omega) - \mu_{\bar{F}}(\omega)| \geqslant |\mu_{F'}(\omega) - \mu_{\bar{F}}'(\omega)|$

Вторая аксиома показывает, что 0,5 - наиболее неопределенное значение принадлежности, а третья аксиома задает отношение порядка "более нечеткий, чем" в смысле этой неопределенности по принадлежности, поскольку $|\mu_F(\omega) - \mu_{\bar{F}}(\omega)| = 2|\mu_F(\omega) - 0{,}5|$.

Следствием этой аксиомы является равенство $f(F) = f(\bar{F})$, т. е. множество F столь же нечетко, что и его дополнение. Как отмечали Хигаши и Клир, решением для данной системы аксиом будут показатели нечеткости $f(F) = 1 - D(F, \bar{F})$, где D - нормированное расстояние между F и его дополнением, т. е. $D(F, \bar{F}) = 1$, когда F – обычное множество. Если D - расстояние Хэмминга, т. е.

$$D(F, \bar{F}) = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\omega} |\mu_F(\omega) - \mu_{\bar{F}}(\omega)|,$$

то получаем показатель нечеткости Кофмана. Другой показатель был предложен Де Люка и Термини и, вероятно, ошибочно назван энтропией. Ягер оценивал, насколько пусто пересечение $F \cap \bar{F}$ (или насколько объединение $F \cup \bar{F}$ покрывает универсальное множество Ω), причем он опирался на понятие разделения между нечетким множеством F и его дополнением, что необязательно связано с расстоянием. Эта идея разделения независимо от Ягера разрабатывалась Дюже).

7.6. Практические методы определения функций принадлежности

Один из вопросов, возникающих при изучении теории нечетких множеств: "Как найти функции принадлежности?" Следует различать случаи, когда нечеткое множество F отражает представление субъекта о некоторой расплывчатой категории, и случаи, когда множество F строится по статистическим данным.

7.6.1. Расплывчатая категория, воспринимаемая субъектом

Прежде всего следует различать простые категории, определенные на объективном линейно-упорядоченном универсальном множестве (например, "большой"), и сложные категории, которые требуют одновременного рассмотрения нескольких универсумов ("коренастый") и в которых даже сами универсальные шкалы определимы с трудом ("красивый").

Вначале обратимся к простым категориям. В этом случае оценка функции принадлежности есть задача теории психологических измерений. Функция принадлежности строится с помощью опросника. В основном функция принадлежности на Ω определяет порядок элементов, и именно этот порядок важен для нас. Так, соотношение $\omega_1 \geqslant \omega_2$ означает, что "ω_1 есть более F, чем ω_2 "

Норвич и Турксен установили связь между классическими психометрическими теориями и оцениванием функции принадлежности: если мы в состоянии задать отношение, порядка в широком смысле (порядок в широком смысле означает, что не обязательно выполняются все три свойства (рефлексивность, транзитивность и антисимметричность), определяющие обычное отношение нестрогого порядка), всюду определенное на Ω^2, с наибольшим и наименьшим элементами, то мы можем представить категорию F нечетким множеством, функция принадлежности которого единственна с точностью до некоторого строго возрастающего преобразования. Если желательна большая точность, то надо найти более богатую структуру порядка, а именно порядка в широком смысле, всюду определенного на Ω^2. При этом пары (ω_1, ω_1') и (ω_2, ω_2') сравниваются по принадлежности к нечеткому множеству F, причем неравенство $(\omega_1, \omega_1') \geqslant \geqslant (\omega_2, \omega_2')$ означает, что " ω_1 есть в большей степени F по отношению к ω'_1, чем ω_2 по отношению к ω'_2". С помощью ряда аксиом согласованности и полноты (в частности, универсальное множество Ω должно быть континуумом), Норвич и Турксен показывают, что функция принадлежности единственна с точностью до возрастающего аффинного преобразования, т. е. единственна на [0,1] в случае, если известны носитель и ядро нечеткого множества F. Практические методы определения функций принадлежности, основанные на психометрических методиках, активно разрабатываются в настоящее время (см., например, Циммерманн и Цисно. На практике можно задать приближенное представление формы функции μ_F, которое достаточно для реальных приложений. Если Ω - универсальное множество, специфическое для категории, то легко получить от субъекта описание ядра $\mathring{\mathbf{F}}$ и носителя S(F). Здесь ядро $\mathring{\mathbf{F}}$ содержит все прототипы для расплывчатой категории, а носитель получается при исключении тех объектов, которые совсем не соответствуют этой категории. Использование графических средств информатики может облегчить сбор информации о значениях μ_F на $\mathbf{S(F)} - \mathring{\mathbf{F}}$, позволяя избежать явного употребления числовых значений принадлежности. Другой подход заключается в использовании параметризованных представлений функции μ_F и обращений к опроснику с целью определения значений параметра. Эти два метода наиболее успешно применяются при сборе нечетких данных.

Отметим, что вовсе не обязательно располагать точными значениями степеней принадлежности. Небольшая ошибка в определении границ ядра или носителя и вообще в определении степени принадлежности объекта классу будет менее значимой, чем при представлении данной категории обычным множеством (интервалом), т. е. когда границы соответствующего множества суть точки разрыва функции μ_F. К тому же не всегда ясна интерпретация этих границ: содержат ли они прототипы категории? Характеризуют ли они сколько-нибудь связанные между собой объекты? Или они определяют промежуточное множество?

Другой аргумент, подкрепляющий мысль о том, что на практике достаточно приближенного представления функции μ_F, заключается в следующем: ошибка не будет возрастать при комбинировании нечетких множеств как с помощью операций (45) — (47), определенных выше, так и с помощью методов теории возможности, поскольку при этом большей частью используются лишь операции нахождения минимума и максимума.

В случае более сложной категории, универсальное множество которой определяется декартовым произведением линейных шкал, функцию принадлежности можно получить за счет свертывания исходной информации. Например, рассмотрим случай, когда некоторую категорию можно описать в виде дерева простых категорий и связок естественного языка, таких как И, ИЛИ и т. д. Это приводит к задаче идентификации каждой простой категории и (приближенного) определения нечетких теоретико-множественных операций, которые можно использовать для описания этих связок. Однако при этом следует выбрать более широко понимаемые операции, чем определяемые формулами (45) — (47), что и обсуждается далее).

Наконец, когда мы имеем дело с категорией, для которой трудно определить универсальное множество (ввиду отпечатка субъективности нет общего согласия по ее поводу), можно условиться о применении некоторого множества, состоящего из небольшого числа эталонных значений или состояний, в случае необходимости упорядоченных, которое и станет универсумом. Каждое лингвистическое значение, относящееся к рассматриваемому понятию, будет тогда представлено нечетким подмножеством данного универсума. В этом случае достаточно ограничиться небольшим числом "типовых" значений принадлежности.

7.6.2. Нечеткие множества, построенные по статистическим данным

Здесь можно различать две точки зрения. Первая состоит в использовании множества неточных данных, которые можно моделировать распределением частот, относящихся к вложенным событиям. Вторая заключается в аппроксимации распределения вероятностей, построенного по гистограмме, распределением возможностей так, чтобы значения вероятностей событий с двух сторон приближались степенями возможности и необходимости.

Статистики, относящиеся к неточным результатам опытов. Построение гистограммы всегда происходит в предположении, что результат случайной выборки достаточно точен. Эта гипотеза не всегда справедлива: измерения чаще всего дают интервалы ошибки; экспертные опросы также дают неточные ответы. Ниже показано, как на базе такой неточной статистической информации можно построить меру возможности вместо вероятностной меры, когда имеющиеся данные согласуются между собой.

Предположим, что данные образуют семейство подмножеств $\{I_k | k = 1, \ldots, q\}$. Вообще говоря, в случае неточности данных желательно, чтобы они были хотя бы минимально согласованными, т. е.

$$I \triangleq \bigcap_{k=1,\ldots,q} I_k \neq \varnothing. \tag{54}$$

Тогда информацию можно обобщенно представить следующим образом: задаются семейством стандартных подмножеств (интервалов) $E_i, i = 1, \ldots, r,$ вложенных друг в друга таким образом, что

$$I \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \subseteq E_r = \bigcup_{k=1,\ldots,q} I_k.$$

Интервалы E_i служат эталонами для классификации данных и играют ту же самую роль, что и дизъюнктивные классы, которые используются для построения гистограммы. Каждый результат эксперимента I_k единственным образом связывается с самым малым эталоном E_i, который может его содержать. Пусть $p(I_k)$— относительное число результатов, равных I_k. Определим частоты:

$$\forall i,\ m^*(E_i) = \Sigma\{p(I_k) \mid I_k \text{ связан с } E_i\}.$$

Очевидно, что функция *m** находит значения вероятностей для вложенных фокальных элементов и, следовательно, определяет через формулы (26) и (27) меры возможности и необходимости, которые дают нижнее и верхнее приближения тех оценок значений вероятности, которые были бы получены по точно определенным данным.

Эта идея требует, однако, разработки метода определения эталонов E_i В ряде работ показано, что наилучший выбор эталонов E_i — это множество α-срезов нечеткого множества F_*, построенного на основе данных $\{J_k, k = 1, \ldots, q\}$ в виде

$$\forall \omega, \mu_{F_*}(\omega) = \sum_{k=1,\ldots,q} p(I_k)\mu_{I_k}(\omega),$$

где μ_{I_k} - характеристическая функция I_k. Отметим, что функция μ_{F_*} является нормированной при выполнении условия (54). В дальнейшем предполагается, что эталоны E_i суть α-срезы F_*. Обозначим Π_* и N_* меры возможности и необходимости, получаемые на основе функции распределения возможностей μ_{F_*}, которая определяется по частоте $m^*(E_i)$ с помощью формулы (42), а Π^* и N^* — меры возможности и необходимости, определяемые на базе функции μ_{F^*}. Доказываются следующие результаты:

1) $F_* \subseteq F^*$, т. е. множество F^* является более неточным, чем множество F_*. Равенство здесь выполняется тогда, и только тогда, когда I_k образуют последовательность вложенных множеств.

2) Пусть P_* и P^* - нижние и верхние вероятности, определяемые формулами (26) и (27), где I_k— фокальные элементы, а $m(I_k) = p(I_k), \forall k,$ т.е.

$$P_*(A) = \sum_{k=1}^{q} p(I_k) \cdot N_{I_k}(A) \text{ и } P^*(A) = \sum_{k=1}^{q} p(I_k) \cdot \Pi_{I_k}(A).$$

Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\forall A,\ [N_*(A), \Pi_*(A)] \subseteq [P_*(A), P^*(A)] \subseteq [N^*(A), \Pi^*(A)]. \quad (55)$$

Более того, F_* и F^* являются соответственно самым большим и самым малым нечеткими множествами по отношению вложенности, такими, что выполняются отношения вложенности (55), и такими, что порядки, определенные функциями μ_{F_*}, μ_{F^*} и P^* на элементах множества Ω, идентичны. Кроме того, отметим, что $\forall\omega \in \Omega,\ P^*(\{\omega\}) = \mu_F(\omega)$. Этот результат показывает, что множества F_* и F^* составляют наилучшие нижние и верхние возможностные приближения множества данных $I_k,\ k = 1, \ldots, q$, в смысле отношений вложенности вышеуказанных интервалов. Таким образом, видно, что множество интервалов можно аппроксимировать функциями распределения возможностей. Результаты, относящиеся к F^*, не требуют выполнения условия (54); к тому же функция принадлежности μ_F всегда нормирована.

Гистограмма и функция распределения возможностей. Когда задана мера возможности, представленная в виде вложенных фокальных элементов и вероятностных весов, ее можно аппроксимировать вероятностной мерой, введя для каждого фокального элемента E_i условное равномерное распределение вероятностей $P(\cdot\,|E_i)$. Тогда вероятность появления элемента $\omega \in \Omega$ (Ω — конечное множество) определяется в виде

$$\forall\omega \in \Omega,\ p(\omega) = \sum_{i=1}^{r} P(\omega|E_i)\cdot m(E_i) = \sum_{\omega \in E_i} \frac{m(E_i)}{|E_i|}, \quad (56)$$

где $|E_i|$ — мощность множества E_i.

Таким образом, вероятностная мера P (которую можно считать до некоторой степени произвольной) выбирается в классе мер, которые удовлетворяют неравенствам

$$\forall A,\ N(A) \leqslant P(A) \leqslant \Pi(A). \quad (57)$$

Значения вероятностей $\{p(\omega_i)\,|\,i = 1, \ldots, n\}$ вычисляются непосредственно по функции распределения возможностей $\{\pi(\omega_i)\,|\,i = 1, \ldots, n\}$:

$$p(\omega_i) = \sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j}\left(\pi(\omega_j) - \pi(\omega_{j+1})\right), \quad (58)$$

где

$$\pi(\omega_1) = 1 \geq \pi(\omega_2) \geq \ldots \geq \pi(\omega_{n+1}) = 0 \text{ и } \omega_{n+1}$$

— фиктивный элемент (множество Ω состоит из n элементов).

Легко заметить, что формула (58) определяет взаимно однозначное отображение между функциями распределения p и π. В ряде работ получено обратное соотношение

$$\pi(\omega_i) = \sum_{j=1}^{n} \min(p(\omega_i), p(\omega_j)). \tag{59}$$

Это последнее соотношение позволяет определить нечеткое множество по гистограмме с учетом условия связности (57). К тому же данное преобразование легче обосновать, поскольку здесь вместо сложения степеней неопределенности можно ограничиться их сравнением друг с другом. Такой образ действий оправдывает себя на практике лишь тогда, когда в рамках поставленной задачи вероятностная модель оказывается трудно реализуемой, а возможностная модель обеспечивает удовлетворительные результаты.

Легко видеть, что неравенства (57) по форме совпадают с правой частью выражения (55), где P*= P* = P. Однако функция распределения возможностей π, определяемая формулой (59), не является наилучшим верхним приближением функции распределения вероятностей p, в отличие от функции μ_{F*}. Используя процедуру аппроксимации,

изложенную в данном разделе применительно к случаю функции распределения вероятностей (множества I_k являются одноточечными, а $\mu_{F_*}(\omega) = p(\omega))$,, получаем

$$\mu_{F*}(\omega) = \sum_{\omega': p(\omega') \leq p(\omega)} p(\omega').$$

Легко проверить, что функция распределения возможностей π, определяемая формулой (59), является менее точной, чем функция распределения μ_{F*} в том смысле, что $\pi \geq \mu_{F*}$. Множества α-уровня

нечеткого множества F* естественным образом интерпретируются как "доверительные множества" (подобно доверительным итервалам в статистике), связанные с функцией распределения вероятностей p. В частности, можно убедиться, что если $\alpha = \mu_{F*}(\omega)$, то имеем

$$1 - \alpha = \bar{P}(F^*_{\alpha}),$$

т. е. с вероятностью 1 — α можно быть уверенным в том, что значение случайной переменной, описываемое функцией p, находится среди элементов множества строгого α-уровня нечеткого множества F*. В статистике часто предполагается, что α = 5 %. Использование функции распределения возможностей μ_{F^*} позволяет избежать такого произвольного назначения порога.

7.6.3. Замечания относительно множества значений функции принадлежности

Задача оценки функции принадлежности связана с выбором множества значений принадлежности; ранее везде предполагалось, что $\mu_F(\omega) \in [0, 1]$, т. е. что элементы множества Ω всегда можно линейно упорядочить (в широком смысле) по их отношению к категории F. Некоторые авторы опирались на более слабые предположения. Так, Гоген заменил интервал [0, 1] решеткой L, Заде предложил для выражения неопределенности на множестве оценок $\mu_F(\omega)$ рассматривать сами значения принадлежности как нечеткие множества со значениями в интервале [0, 1]. В этом случае получаются так называемые нечеткие множества типа 2, когда функция принадлежности μ_F принимает свои значения в решетке вида $[0, 1]^{[0,1]}$). Наоборот, если неточным оказывается аргумент функции принадлежности $\mu_F(\omega)$, то Ω в действительности является множеством нечетких подмножеств другого универсума — $V(\Omega = [0, 1]^V)$, а F — нечетким множеством уровня 2 на универсуме. Это понятие позволяет представлять все более и более абстрактные категории (например, категорию "цвет", рассматриваемую как нечеткое множество на универсуме *черный, серый, красный, синий.* . .).

7.7. Меры неопределенности в нечетком событии

Нечеткое (плохо определенное) событие может быть описано нечетким множеством. Следовательно, можно попытаться расширить меры неопределенности, введенные выше, для оценки информации о наступлении нечеткого события.

Если тройка $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ описывает вероятностное пространство, где $\mathcal{A}$ — σ-алгебра подмножеств множества элементарных событий Ω, а P — вероятностная мера, то нечеткое событие F характеризуется функцией принадлежности μ_F, измеримой по Борелю $(\forall\alpha, F_\alpha \in \mathcal{A})$, причем вероятность нечеткого события определяется формулой

$$P(F) = \int_\Omega \mu_F(x)\,dP(x). \tag{60}$$

Это выражение — математическое ожидание функции принадлежности. Можно проверить, что

$$P(\bar{F}) = 1 - P(F) \tag{61}$$

и, более того, что

$$P(F \cap G) + P(F \cup G) = P(F) + P(G) \tag{62}$$

В ряде работ систематически исследуется понятие нечеткой σ-алгебры и установлены условия, при которых функции P, удовлетворяющие равенству (62), выражаются формулой (60). Наряду с вероятностями нечетких событий можно определить понятия возможности и необходимости нечеткого события.

Если придерживаться семантики понятия возможности, то, как и Заде, придем к использованию в измерениях возможности нечеткого события F показателя частичного перекрытия между нечетким множеством F и нечетким множеством F_π, которое задает функцию распределения возможностей π:

$$\Pi(F) = \sup_{\omega \in \Omega} \min(\mu_F(\omega), \pi(\omega)). \tag{63}$$

Можно убедиться в том, что $\Pi(F) = 0 \Leftrightarrow S(F) \cap S(F_\pi) = \varnothing$, а $\Pi(F) = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists\omega \in \mathring{F} \cap \mathring{F}_\pi$ (для конечного случая), что обобщает выражение (7). Праданом формула (63) обосновывается в терминах α-срезов, поскольку это определение эквивалентно формуле

$$\Pi(F) = \sup\{\alpha \mid F_\alpha \cap (F_\pi)_\alpha \neq \varnothing\}. \tag{64}$$

Утверждается, что аксиома (6) для возможностей четких событий остается справедливой и для нечетких событий:

$$\Pi(F \cup G) = \max(\Pi(F), \Pi(G)). \tag{65}$$

Из выражение (65) немедленно следует, что П остается мерой неопределенности в нечетких событиях

$$F \subseteq G, \text{ т. е. } \mu_F \leqslant \mu_G \Rightarrow \Pi(F) \leqslant \Pi(G).$$

В силу двойственности необходимость нечеткого события будет определяться в виде $N(F) = 1 - \Pi(\bar{F})$, т. е.

$$N(F) = \inf_{\omega \in \Omega} \max(\mu_F(\omega), 1 - \pi(\omega)). \tag{66}$$

Эту величину можно рассматривать как степень вложенности нечеткого множества F_π в нечеткое множество F, поскольку

$$N(F) > 0 \Longleftrightarrow \mathring{F}_\pi \subseteq S(F),$$
$$N(F) = 1 \Longleftrightarrow S(F_\pi) \subseteq \mathring{F}.$$

Отсюда видно, что понятию необходимости нечеткого события соответствует более сильное определение вложенности, чем определение (43): нечеткое множество F включает в себя нечеткое множество G, если ядро нечеткого множества F содержит носитель нечеткого множества G.

Легко убедиться, что если $F_\pi \subseteq F$ (в смысле определения (43)), то $N(F) \geqslant 0{,}5$. При этом остается справедливой аксиома (11) для мер необходимости

$$N(F \cap G) = \min(N(F), N(G)) \tag{67}$$

и функция N — мера неопределенности в нечетких событиях. Отметим, что $\max(\Pi(F), \Pi(F)) \leqslant 1$, если F — нечеткое подмножество множества Ω. Однако в силу условий (49), (50) всегда имеем

$$\max(\Pi(F), \Pi(\bar{F})) \geqslant 0{,}5; \quad \min(N(F), N(\bar{F})) \leqslant 0{,}5. \tag{68}$$

При этом, если нечеткое множество F_{π} нормально, всегда выполняется соотношение (16), т.е.

$$\forall F, \Pi(F) \geqslant N(F), \tag{69}$$

в то время как выражения (17), (18) не выполняются, если F - нечеткое множество.

7.8. Нечеткие отношения и декартово произведение нечетких множеств

Нечетким отношением называется нечеткое множество (или функция распределения возможностей) на декартовом произведении базовых множеств. Пусть Ω_1 и Ω_2— два базовых множества. Нечеткое отношение **R** описывается функцией принадлежности $\mu_R = \pi$ с аргументами $\omega_1 \in \Omega$ и $\omega_2 \in \Omega_2$.

Проекция нечеткого отношения **R** на Ω_1 описывается распределением возможностей π_1 вида

$$\pi_1(\omega_1) = \Pi(\{\omega_1\} \times \Omega_2) = \sup_{\omega_2} \pi(\omega_1, \omega_2). \tag{70}$$

Если рассматривать π как возможностный аналог плотности совместного распределения вероятностей, то выражение (70) напоминает плотность одномерного распределения.

Если F_1 — нечеткое множество в универсуме Ω_1, то μ_{F_1} можно расширить на случай $\Omega_1 \times \Omega_2$ следующим образом:

$$\forall \omega_1, \omega_2, \mu_{C_2(F_1)}(\omega_1, \omega_2) = \mu_{F_1}(\omega_1). \tag{71}$$

Тогда множество $C_2(F_1)$ называется цилиндрическим продолжением множества F_1 на Ω_2.

Пусть F_1 и F_2 — два нечетких множества в универсальных множествах Ω_1 и Ω_2 соответственно. Понятия декартова произведения и декартова копроизведения можно расширить на случай нечетких множеств F_1 и F_2. В случае обычных множеств декартово произведение есть множество $A_1 \times A_2 = \{(\omega_1, \omega_2) | \omega_1 \in A_1, \omega_2 \in A_2\}$, а декартово копроизведение определяется в виде

$$A_1 + A_2 = \{(\omega_1, \omega_2 | \omega_1 \in A_1\} \cup \{(\omega_1, \omega_2) | \omega_2 \in A_2\},$$

т. е. в терминах цилиндрических продолжений

$$A_1 \times A_2 = C_2(A_1) \cap C_1(A_2),\ A_1 + A_2 = C_2(A_1) \cup C_1(A_2) = \overline{A}_1 \times \overline{A}_2 .$$

Очевидно, что декартово произведение нечетких множеств можно определить как пересечение, а копроизведение — как объединение их цилиндрических продолжений, т. е.

$$\mu_{F_1 \times F_2}(\omega_1, \omega_2) = \min(\mu_{F_1}(\omega_1), \mu_{F_2}(\omega_2)), \tag{72}$$

$$\mu_{F_1+F_2}(\omega_1,\omega_2)=\max(\mu_{F_1}(\omega_1),\mu_{F_2}(\omega_2)). \tag{73}$$

Здесь существенно следующее замечание: если $\mathrm{Proj}_i(R)$, — проекция нечеткого отношения **R** на Ω_i, то всегда имеем

$$R\subseteq \mathrm{Proj}_1(R)\times \mathrm{Proj}_2(R), \tag{74}$$

где × обозначается операция взятия минимума, а $\subseteq$ — отношение вложенности в смысле определения (43). Обратно, если F_1 и F_2 — два нормальных нечетких множества в универсумах Ω_1 и Ω_2 соответственно, то наибольшее нечеткое отношение **R**, такое, что $F_i=\mathrm{Proj}_i(R)$, равно декартову произведению $F_1\times F_2$. Нечеткое отношение **R** называется сепарабельным, если

$$R=\mathrm{Proj}_1(R)\times \mathrm{Proj}_2(R). \tag{75}$$

Показатель неточности Хигаши и Клира, введенный выше, удовлетворяет неравенству:

$$H(R)\leqslant H(\mathrm{Proj}_1(R))+H(\mathrm{Proj}_2(R)),$$

Которое согласуется с выражением (74); в частности, если нечеткое отношение **R** сепарабельно, то здесь выполняется строгое равенство. Зато когда **R** — сепарабельное нечеткое отношение, равенство $|R|=|\mathrm{Proj}_1(R)|\cdot|\mathrm{Proj}_2(R)|$ несправедливо.

Переменные X_1 и X_2, для которых область изменения (X_1, X_2) ограничена нечетким отношением **R**, называются невзаимодействующими (несвязанными). Если F_i — нечеткое множество возможных значений X_i на Ω_i, то переменные X_1 и X_2 являются невзаимодействующими тогда, когда совместная функция распределения возможностей для (X_1, X_2) имеет вид

$$\pi_{X_1,X_2}=\min(\mu_{F_1},\mu_{F_2}). \tag{76}$$

Тогда и нечеткие множества F_1 и F_2 назьюаются невзаимодействующими. Это означает, что область изменения переменной X_1 не зависит от значений, принимаемых переменной X_2, и наоборот. Формула (76) определяет наибольшее (в смысле включения) нечеткое отношение или эквивалентным образом функцию распределения возможностей, наименее связанную с проекциями F_1 и F_2. Иными словами, если F_1 и F_2 — единственные нечеткие ограничения на (X_1, X_2), то выражение (76) наиболее естественно определяет распределение π_{X_1,X_2}. Эта формула становится несправедливой, как только переменные X_1 и X_2 связываются каким-либо другим отношением (например, если $\exists f : X_2 = f(X_1)$).

Пусть Π_{12} — мера возможности, определенная по функции распределения возможностей π_{12} в универсуме $\Omega_1 \times \Omega_2$. Если функция распределения π_{12} сепарабельна и нормальна, то

$$\forall A_1 \times A_2 \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2,\ \Pi_{12}(A_1 \times A_2) = \min(\Pi_1(A_1), \Pi_2(A_2)) \quad (77)$$

и

$$N_{12}(A_1 + A_2) = \max(N_1(A_1), N_2(A_2)), \quad (78)$$

где N_{12}, N_1, N_2 — меры необходимости, двойственные мерам возможности Π_{12}, Π_1, Π_2 соответственно. Если функция π_{12} сепарабельна и нормальна, то формулы (77) и (78) распространяются на нечеткие события F_1 и F_2 в универсумах Ω_1 и Ω_2 соответственно, т. е.

$$\forall (F_1, F_2) \in [0,1]^{\Omega_1} \times [0,1]^{\Omega_2}, \Pi_{12}(F_1 \times F_2) = \min(\Pi_1(F_1), \Pi_2(F_2)), \quad (79)$$

$$N_{12}(F_1 + F_2) = \max(N_1(F_1), N_2(F_2)). \quad (80)$$

Заметим, что, даже если функция π_{12} не является сепарабельной, и независимо от того, являются ли F_1, F_2 нечеткими или обычными множествами,

$$\Pi_{12}(F_1 + F_2) = \max(\Pi_1(F_1), \Pi_2(F_2)), \quad (81)$$

$$N_{12}(F_1 \times F_2) = \min(N_1(F_1), N_2(F_2)), \quad (82)$$

в то время как при указанных предпосылках выражения (79) и (80) превращаются в неравенства (со знаками $\leq$ и $\geq$ соответственно).

Отметим определенную аналогию между независимыми случайными событиями и невзаимодействующими нечеткими переменными, характеризуемыми мерами возможности. Если P_{12} — совместная вероятностная мера в $\Omega_1 \times \Omega_2$, а P_1 и P_2 — вероятностные меры для переменных X_1 и X_2 соответственно, причем X1 и X_2 — две независимые случайные переменные, то

$$\forall A_1 \subseteq \Omega_1,\ \forall A_2 \subseteq \Omega_2,\ P_{12}(A_1 \times A_2) = P_1(A_1) \cdot P_2(A_2). \quad (83)$$

С точки зрения частотной интерпретации вероятности это означает, что событие A_1 появляется с одной и той же частотой как в экспериментах, где возникает событие A_2, так и в экспериментах, где A_2 не имеет места (и наоборот). С другой стороны, выражение (76) означает, что область изменения переменной X_1 не зависит от области изменения переменной X_2 (и наоборот). Зато если для двух событий A_1 и A_2 выполняется соотношение

$$P_{12}(A_1 \times A_2) = \min(P_1(A_1), P_2(A_2)), \qquad (84)$$

то из него следует, что A_1 влечет за собой A_2 (при $P_1(A_1) \leqslant P_2(A_2)$) или с частотной точки зрения событие A_1 происходит лишь в экспериментах, где реализуется и событие A_2. В самом деле, поскольку $P_1(A_1) = P_{12}(A_1 \times A_2) + P_{12}(A_1 \times \bar{A}_2)$ и $P_2(A_2) = P_{12}(A_1 \times A_2) + P_{12}(\bar{A}_1 \times A_2)$, то из формулы (84) следует, что $P_{12}(A_1 \times \bar{A}_2) = 0$ или $P_{12}(\bar{A}_1 \times A_2) = 0.$ Таким образом, равенство (84) далеко не означает независимости событий A_1 и A_2.

8. Использование нечетких множеств для оценивания и классификации объектов

В своей ставшей уже классической статье Беллман и Заде предложили теорию нечетких множеств в качестве концептуальной основы для решения задач многокритериального выбора. Основной вклад этой статьи в решение задач выбора состоит в демонстрации возможности представления целей и ограничений посредством нечетких множеств, которые объединяют элементы субъективных предпочтений. При этом задача свертывания критериев может рассматриваться как задача комбинирования нечетких множеств с помощью теоретико-множественных операций над ними. Ряд работ посвящен аксиоматическому или эмпирическому определению таких операций агрегирования; среди них можно отметить статьи Фанга и Фю, Ягера, Циммермана и Цисно, Дюбуа и Прада. Данный вопрос является основным предметом первого раздела этой главы, в котором отражено содержание этой работы. Также обсуждается случай построения неточных частных оценок по критериям в виде нечетких величин типа рассмотренных ранее. Эта неточность отражается и в обобщенной оценке объектов. Второй раздел настоящей главы посвящен вопросам классификации неточно оцениваемых объектов.

8.1. Количественный подход к задаче многокритериального выбора

Пусть Ω — множество объектов, которые требуется классифицировать с учетом множества критериев C. Число объектов предполагается конечным и достаточно малым, так что их можно перечислить непосредственно. Частные оценки объектов по каждому критерию принимают свои значения в легко идентифицируемых множествах. Отдельная целевая функция будет рассматриваться как некоторое нечеткое множество, ограничивающее допустимые значения соответствующего критерия. Следовательно, неявно предполагается, что каждая целевая функция определяет отношение полного порядка на множестве Ω. В частности, здесь не рассматривается случай, когда по каждому критерию задано лишь некоторое отношение нечеткого предпочтения на множестве объектов. Наконец, еще одно принимаемое здесь предположение касается независимости выбора от состояния среды.

В настоящем разделе предлагается обзор возможных операций свертки целевых функций, а также способы определения в конкретной ситуации, какая из операций свертки целевых функций наилучшим образом соответствует характеру реальной обобщенной оценки лицом, принимающим решение (ЛПР), своих потенциальных действий.

8.1.1. Основа подхода

Пусть X_i — область, в которой оцениваются объекты по критерию $C_i \in C$. Оценки объектов по каждому критерию C_i могут быть представлены посредством отображений m_i из множества Ω в множество X_i.

Целевая функция, связываемая с критерием C_i, будет описываться нечетким множеством G_i, определенным на X_i, причем для $\forall x \in X_i$ величина $\mu_{G_i}(x)$ есть степень совместимости между значением оценки x, характеризующей некоторый объект, и желанием ЛПР. В ряде случаев его желание может быть описано в лингвистической форме и представлено с помощью функции принадлежности μ_{G_i}. Ядро нечеткого множества G_i соответствует оценкам, полностью совместимым с целью. В свою очередь, оценки, расположенные вне носителя нечеткого множества G_i, оказываются полностью несовместимыми с целью. При этом оценки, попадающие в ядро нечеткого множества, совершенно неразличимы между собой, как впрочем и те оценки, которые находятся за пределами носителя. Например, если Ω — множество автомобилей, а X — шкала цен, то, когда ЛПР предпочитает выбрать "средний по цене" автомобиль, график целевой функции "средняя цена" можно представить в виде, изображенном на рис. 1.

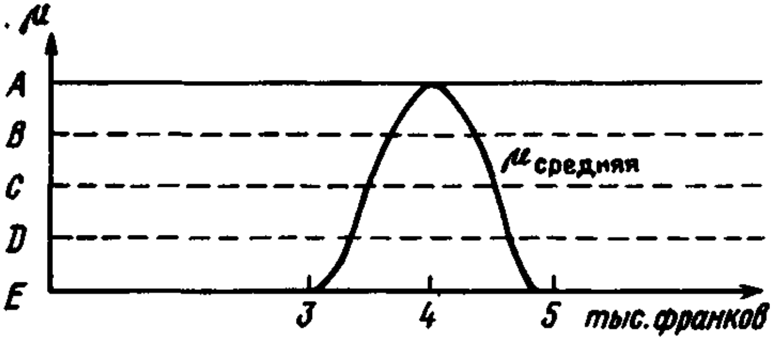


Рис. 1

Оценка μ_{G_i} не может быть точной. Тем не менее форма кривой позволяет выразить индивидуальные особенности предпочтений ЛПР. Чтобы выявить эти индивидуальные особенности, не следует требовать от него выражения своих предпочтений в интервале [0, 1] (выбор которого весьма произволен). Удобнее построить дискретную шкалу предпочтений, содержащую 5 — 7 уровней в зависимости от порога восприятия ЛПР. Самый простой способ состоит в лингвистическом выражении уровней совместимости между оценкой и целью и отображении этих уровней на [0, 1], как в табл. 1 (см. также рис. 1).

Таблица 1

	Уровень совместимости между последствием и целью	Числовое значение	Лингвистическая оценка
A	Полная совместимость	1	Очень хорошо
B	Большая совместимость	0,75	Хорошо
C	Средняя совместимость	0,5	Достаточно хорошо
D	Малая совместимость	0,25	Посредственно
E	Несовместимость	0	Очень плохо

Лингвистические оценки из третьего столбца табл. 1 используются в разд. 8.1.5.

Известны три метода для определения величины μ_G :

дискретизация множества X, построение конечного множества X' и оценка ЛПР каждого исхода $\mathbf{x}' \in \mathbf{X}'$ по шкале $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}\}$, а затем сглаживание полученного результата;

представление нечеткой цели C в виде нечеткого числа (L-R)-типа : ЛПР непосредственно задает параметры и форму нечеткого числа, фиксируя границы ядра и носителя цели G, а также выбирая одну из стандартных функций L и R; , использование графического дисплея, что позволяет ЛПР начертить кривую μ_{G_i} , наглядно представив свою цель.

Зная целевую функцию G_i икритерий C_i, можно судить о совместимости каждого объекта $\omega \in \Omega$ с целью G_i с помощью функции принадлежности μ_i, определяемой в виде

$$\mu_i(\omega) = \mu_{G_i}(m_i(\omega)). \tag{1}$$

Очевидно, что понятие полезности как численного представления предпочтений очень близко к понятию нечеткого множества, описываемого формулой (1), а функция принадлежности нечеткого множества играет в этом случае роль (нормированной) функции полезности. Однако функция полезности всегда предполагает денежное выражение, а функция принадлежности ввиду ее абстрактного характера в этом смысле нейтральна. Более того, важный исходный момент заключается в том, что в теории полезности при определении аксиом, характеризующих функцию полезности, широко используются результаты теории вероятностей. Зато определение функции принадлежности основывается отнюдь не на существовании вероятностей, а, скорее, на наличии отношения предпочтения между элементами базового множества.

Предпрложим, что общая цель выражается в виде иерархии подцелей, на нижнем уровне которой находятся q частных целей, связываемых с q элементарными критериями C_i, которые позволяют оценивать объекты из множества Ω. Эта цель в ряде случаев может выражаться в виде сложной лингвистической категории, базовым множеством для которой будет декартово произведение $X_1 \times \ldots \times X_q$. Тогда нечеткое множество D объектов, совместимых с общей целью, можно получить путем свертывания нечетких множеств с функциями принадлежности μ_i, определяемыми формулой (1). Таким образом, предполагается существование отображения h из $[0, 1]^q$ в [0, 1], такого,что

$$\forall\omega \in \Omega,\ \mu_D(\omega) = h(\mu_1(\omega), \ldots, \mu_q(\omega)). \tag{2}$$

Следовательно, для оценки объектов необходим поиск некоторой операции над нечеткими множествами, объединяющей частные цели. Естественно потребовать, чтобы такая операция удовлетворяла следующим аксиомам:

А1. Граничные условия: $h(0, 0, \ldots, 0) = 0;\ h(1, 1, \ldots, 1) = 1;$

A2. Для любых пар $(s_i, t_i) \in [0, 1]^2$, если $\forall i, s_i \geqslant t_i$, то $h(s_1, \ldots, s_q) \geqslant h(t_1, \ldots, t_q)$.

Условие A1 означает, что действие, полностью совместимое (несовместимое) с каждой из альтернатив, будет в целом приемлемым (совершенно неприемлемым) решением. Условие A2 показывает, что операция h не должна противоречить определению частичного порядка для векторов $(\mu_1(\omega), \ldots, \mu_q(\omega))$ на множестве Ω. Если $\mathring{D} = \{\omega | \mu_D(\omega) = \sup \mu_D\}$, т. е. является множеством наилучших объектов, индуцируемых сверткой h, и если M — множество максимальных элементов отношения частичного порядка на множестве Ω, то $\mathring{D} \cap M \neq \emptyset$. Когда функция h является строго возрастающей по каждому аргументу, то $\mathring{D} \subseteq M$.

В дальнейшем мы обратим особое внимание на симметрические операции свертки, т. е. удовлетворяющие условию

A3. h — симметрическая функция своих аргументов. (Симметрической называется функция, которая не изменяется при любой перестановке своих аргументов.)

Заметим, что симметричность функции h еще не означает, что полученная свертка будет симметрической функцией. В самом деле, свертываются нечеткие множества G_i и можно легко ввести некоторую форму асимметрии между критериями с помощью изменения вида функций принадлежности μ_{G_i}. Аксиома A3 справедлива, когда все

цели имеют одинаковую важность и, следовательно, взаимозаменяемы в процессе свертьюания. Утверждение, что все цели равноважны, не означает, что все критерии (т. е. гг^) имеют один и тот же вид, и это выражается с помощью нечетких множеств G-. Наконец, предполагается, что

A4. h — непрерывная функция.

Беллман и Заде используют в качеств h главным образом операцию взятия минимума, что соответствует пересечению целей. На практике экспериментальные исследования показали, что эта операция не всегда правильно отражает поведение ЛПР, даже когда лингвистические категории свертываются им конъюнктивным образом. Это приводит к необходимости поиска других способов свертывания нечетких множеств.

8.1.2. Операции над нечеткими множествами

В данном разделе аксиоматически вводятся расширения обычных теоретико-множественных операций на случай нечетких множеств. Эти расширения не единственны, даже когда операции можно классифицировать по сохраняемым ими свойствам. Более того, имеются такие операции над нечеткими множествами, которым нельзя поставить в соответствие никакую операцию над обычными множествами, хотя некоторые из них (например, нахождение средних значений) нам уже известны.

Дополнение. Поточечный оператор дополнения есть функция $c\colon [0,1] \to [0,1]$, такая, что дополнение нечеткого множества F, обозначаемое $\overline{F}$, определяется в виде

$$\forall\omega \in \Omega,\ \mu_{\overline{F}}(\omega) = c(\mu_F(\omega)). \tag{3}$$

Чтобы сохранялись интуитивные представления о дополнении, на операцию с накладьюаются следующие ограничения:

С1) c(0) =1; c(1) =0 (совпадение с классическим случаем);

С2) с - строго убывающая функция (если при переходе от элемента ω к элементу ω' увеличивается степень принадлежности к нечеткому множеству F, то соответственно уменьшается степень принадлежности к его отрицанию $\overline{F}$);

С3) с - инволюция (двойное отрицание эквивалентно утверждению) .

Если к тому же с - непрерывная функция, то существует единственное пороговое значение $s \in (0,1)$, такое, что s = c(s), которое зависит от с и фиксирует в некотором роде порог принадлежности нечеткому множеству F при известном с. Трильяс получил решение функциональных уравнений, описывающих дополнение с в виде

$$c(x) = \varphi^{-1}(1-\varphi(x)), \tag{4}$$

где φ — действительная, непрерывная, строго возрастающая функция, такая, что $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1;$ легко видеть, что $s = \varphi^{-1}(1/2)$. Функция φ единственна, когда с — фиксированная операция. Для $\varphi(x) = x$ получаем классическую операцию дополнения нечеткого множества c(x) = 1-x, уже введенную ранее.

Объединение и пересечение. Операции объединения и пересечения нечетких множеств можно определить поточечно с помощью отображений из $[0, 1]^2$ в [0, 1], обозначаемых u и i соответственно, таких, что

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mu_{F \cup G}(\omega) = u(\mu_F(\omega), \mu_G(\omega)); \tag{5}$$

$$\mu_{F \cap G}(\omega) = i(\mu_F(\omega), \mu_G(\omega)). \tag{6}$$

Будем стремиться по возможности сохранить свойства обычных операций объединения и пересечения множеств, т. е. оставаться в рамках алгебраической структуры, как можно более близкой к структуре булевой решетки 2^{Ω} . Ранее говорилось, что булеву решетку невозможно сохранить на множестве $[0, 1]^{\Omega}$ всех нечетких подмножеств универсального множества Ω. На практике мы имеем выбор из следующих двух вариантов: либо определить операции i и u так, чтобы сохранить законы исключенного третьего и непротиворечивости (тогда не выполняются свойства идемпотентности и, следовательно, взаимной дистрибутивности для операций пересечения $\cap$ и объединения $\cup$, либо сохранить свойство идемпотентности и отбросить законы исключенного третьего и непротиворечивости. Таким образом, приходим к следующим аксиомам для определения операций пересечения и объединения нечетких множеств.

Совпадение с операциями пересечения и объединения обычных множеств:

$$\text{U0)}\ u(0, 1) = u(1, 1) = u(1, 0) = 1; \ u(0, 0) = 0;$$
$$\text{I0)}\ i(0, 1) = i(0, 0) = i(1, 0) = 0; \ i(1, 1) = 1.$$

Коммутативность:

$$\text{U1)}\ u(x, y) = u(y, x);$$

$$\text{I1)}\ i(x, y) = i(y, x).$$

Ассоциативность:

$$\text{U2)}\ u(x, u(y, z)) = u(u(x, y), z);$$
$$\text{I2)}\ i(x, i(y, z)) = i(i(x, y), z).$$

Выполнение законов де Моргана: существует дополнение c, удовлетворяющее условиям C1 — C3, такое, что

$$\text{U3)}\ c(u(x, y)) = i(c(x), c(y));$$
$$\text{I3)}\ c(i(x, y)) = u(c(x), c(y)).$$

Существование нейтрального элемента:

$$\text{U4)}\ u(x, 0) = x \quad (F \cup \varnothing = F);$$
$$\text{I4)}\ i(x, 1) = x \quad (F \cap \Omega = F).$$

Монотонность: U5 — I5) u, i — неубывающие функции по каждому аргументу.

Непрерывность: U6 - I6) u, i — непрерывные функции.
Условия U1 — U4 и I1 — I4 выполняются для операций в классической теории множеств, а требования монотонности U5 и I5 являются естественными, так как если элемент ω принадлежит нечетким множествам F и G в меньшей степени, чем элемент ω', то ω не может принадлежать их объединению $F \cup G$ или пересечению $F \cap G$ в большей степени, чем ω'. Требование непрерывности представляет собой условие технического характера, когда универсальное множество Ω бесконечно.
Аксиомы 10 — I5 позволяют определить пару ([0, 1], i) как полугруппу с нейтральным элементом 1. В стохастической геометрии операции пересечения i носят название треугольных норм ввиду их роли в выражении неравенств треугольника. Преобразование де Моргана, выражаемое аксиомами U3 — I3, позволяет заменять операции i и u между собой. Тогда пара ([0, 1], u) образует полугруппу с нейтральным элементом 0. Благодаря результатам, полученным в теории функциональных уравнений, основные классы операторов пересечения и объединения могут характеризоваться следующим образом.
Идемпотентные операции. $i(x, y) = \min(x, y)$; $u(x, y) = \max(x, y)$. Эти операции взаимно дистрибутивны. Операции max и min — единственные операторы объединения и пересечения, удовлетворяющие условиям I0 — I5 и U0 — U5, которые идемпотентны и взаимно дистрибутивны. Кроме того, операция взятия минимума — самая большая операция пересечения в том смысле, что $\forall x, \forall y, i(x, y) \leqslant \min(x, y)$. Двойственная ей операция взятия максимума будет самой малой из операций объединения $\forall x, \forall y, u(x, y) \geqslant \max(x, y)$.
Строго монотонные архимедовы операции. Это операции, которые удовлетворяют условиям

$$\forall x \in (0, 1),\ i(x, x) < x, u(x, x) > x,$$
$$\forall y' > y, i(x, y') > i(x, y), u(x, y') > u(x, y).$$

Их типичным примером служат операция произведения $(x \cdot y)$ для пересечения и вероятностная сумма $(x + y - x \cdot y)$ для объединения нечетких множеств. Эти две операции удовлетворяют законам де Моргана для c(x) = 1 — x. Они записываются в общем виде как

$$i(x, y) = f^{-1}(f(x) + f(y)), \qquad (7)$$

где f — биективное отображение из [0, 1] в $[0, +\infty]$, представляющее собой непрерывную убывающую функцию, такую, что $f(0) = +\infty$, $f(1) = 0$, и как

$$u(x, y) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(y)), \tag{8}$$

где φ — биективное отображение из [0, 1] в $[0, +\infty]$, представляющее собой непрерывную возрастающую функцию, такую, что $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = +\infty.$

Эти классы операций называются строгими пересечениями и объединениями по названиям соответствующих треугольных норм и конорм. Все они недистрибутивны и неидемпотентны, а также никогда не удовлетворяют законам исключенного третьего и непротиворечивости.

Параметризованные семейства строгих операций пересечения и объединения были предложены в ряде работ. Изучалось одно семейство операций строгого пересечения, которые являются рациональными функциями своих аргументов:

$$i(x, y) = \frac{xy}{\gamma + (1 - \gamma)(x + y - xy)}, \ \gamma \geqslant 0.$$

Соответствующее семейство объединений получается по принципу двойственности на основе дополнения c(x)= 1-x. При $\gamma = 1$ из формулы для i(x, y) получаем произведение. Иисследовались операции, которые удовлетворяют условию $u(x, y) + i(x, y) = x + y$ и определяются выражением

$$i(x, y) = \log_s [1 + \frac{(s^x - 1)(s^y - 1)}{s - 1}], s > 0.$$

При s = 0 получаем $i(x, y) = \min(x, y)$, а при s = 1 имеем операцию произведения. Наконец,

$$\lim_{s \to \infty} i(x, y) = \max(0, x + y - 1),$$

причем эта операция не является строгой.

Нильютентные операции. Типичные представители — операции: пересечения $i(x, y) = \max(0, x + y - 1)$ и объединения $u(x, y) = \min(1, x + y)$ (ограниченная сумма).

Эти операции удовлетворяют законам де Моргана для дополнения c(x) = 1 — x. В обобщенном виде они характеризуются выражением

$$i(x, y) = f^*(f(x) + f(y)),$$

где f — убывающая функция из [0,1] в [0, f (0)], такая, что

$$f(0) = 1, f(1) = 0 \text{ и } f^*(x) = \begin{cases} f^{-1}(x), \text{если } x \in [0, 1], \\ 0, \text{если } x \geqslant 1; \end{cases}$$

$$u(x, y) = \varphi^*(\varphi(x) + \varphi(y)),$$

где функция φ — генератор дополнения, а функция

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} \varphi^{-1}(x), \text{ если } x \in [0, 1]; \\ 1, \text{ если } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Нильпотентные операции удовлетворяют следующим свойствам: отсутствие взаимной дистрибутивности и идемпотентности; всякая операция дополнения с порождает операции пересечения и объединения, которые двойственны в смысле правил де Моргана и удовлетворяют законам исключенного третьего и непротиворечивости, причем для указанного дополнения операции u и с порождаются функцией φ, а операция пересечения i порождается функцией $f = \varphi(1) - \varphi$.

Параметризованные свойства нильпотентных операций были предложены в ряде работ: класс операций пересечения T_p Швейцера и Скляра, а также Ягера, порожденные соответственно функциями $f(x) = 1 - x^p$ при p>0 и $f(x) = (1 - x)^q$ при q>0. Для $p = q = +1$ $i(x, y) = \max(0, x + y - 1)$, а для $p = 0$ $i(x, y) = x \cdot y$. При $q = +\infty$ $i(x, y) = \min(x, y)$.

Можно ввести и такие операторы пересечения и объединения, которые не являются ни идемпотентными, ни архимедовыми, ни нильпотентными. К числу подобных операторов относится семейство операторов пересечения

$$i(x, y) = \frac{x \cdot y}{\max(x, y, \alpha)}, \quad \alpha \in (0, 1).$$

При $\alpha = 0$ $i(x, y) = \min(x, y)$, а при $\alpha = 1$ $i(x, y) = x \cdot y$.

Операторы, характерные для теории нечетких множеств. В классической теории множеств имеются только два способа комбинировать множества симметричным образом, так, чтобы выполнялась аксиома A1, т. е.

$$\omega \in A, \omega \in B \Rightarrow \omega \in A * B,$$

$$\omega \in \bar{A}, \omega \in \bar{B} \Rightarrow \omega \in A * B.$$

Операция * должна быть либо пересечением, либо объединением. В рамках теории нечетких множеств это не так. Мы видели, что операции пересечения нечетких множеств не больше операции взятия минимума, а операции их объединения — не меньше операции взятия максимума. Следовательно, рассмотренные классы операторов охватывают лишь некоторую часть возможных операторов свертки. В настоящем разделе исследуются операции нахождения среднего (расположенные между операциями max и min), а также взаимодвойственные операции в смысле де Моргана. Эти два типа операций над нечеткими множествами не имеют аналогов в классической теории множеств, но тем не менее хорошо известны. Вся оригинальность подхода заключается здесь в том, чтобы поместить их в контекст теории множеств.

Операции осреднения. Среднее для двух нечетких множеств определяется с помощью отображения m из $[0, 1]^2$ в [0, 1], такого, что:

M1) $\min(x, y) \leqslant m(x, y) \leqslant \max(x, y), \ \forall x, y;$

M2) $m(x, y) = m(y, x);$

M3) m — неубывающая функция каждого из аргументов.

Легко показать, что выполняются следующие свойства:

функция m идемпотентна (обратно: из свойства идемпотентности и условия M3 следует справедливость условия Ml);

если m — строго возрастающая функция, то она не может быть ассоциативной;

единственными ассоциативными средними являются медианы, определяемые для некоторого порога $\alpha \in (0, 1)$, т. е.

$$\mathrm{med}(x, y, \alpha) = \begin{cases} y, \text{ если } x \leqslant y \leqslant \alpha; \\ \alpha, \text{ если } x \leqslant \alpha \leqslant y; \\ x, \text{ если } \alpha \leqslant x \leqslant y. \end{cases}$$

Таким образом, ассоциативность — это свойство, несовместимое с понятием среднего. Оно заменяется свойством бисимметричности, которое записывается в виде

M4) $\forall x, y, z, t, \ m[m(x, y), m(z, t)] = m[m(x, z), m(y, t)].$

Отметим, что выполнение свойства ассоциативности влечет выполнение свойства бисимметричности. В предположении о непрерывности и строгом возрастании функции m функциональные уравнения Ml — M4 решены. Общее решение имеет вид

$$m(x, y) = k^{-1}\left(\frac{k(x) + k(y)}{2}\right), \tag{9}$$

где k - непрерывная и строго монотонная функция. Например, функция $k(x) = x^{\alpha}, \alpha \in R,$ дает семейство операторов m_{α}, частными случаями которых являются следующие операторы:

α	$m(x, y)$	α	$m(x, y)$
$-\infty$	$\min(x, y)$	$+1$	$\frac{x+y}{2}$ (среднее арифметическое)
-1	$\frac{2xy}{x+y}$ (среднее гармоническое)	$+\infty$	$\max(x, y)$
0	$\sqrt{xy}$ (среднее геометрическое)		

причем если $\alpha_1 < \alpha_2$, то

$$m_{\alpha_1} < m_{\alpha_2}.$$

Заметим, что медиана $\operatorname{med}(x, y, \alpha)$ бисимметрична, хотя ее нельзя представить в виде (9).

Симметрические суммы. Силверт предложил исследовать один класс операторов свертки нечетких множеств, интересный в семантическом плане: взаимодейственные в смысле де Моргана операторы, т. е. функции вида $\sigma\colon [0, 1]^2 \to [0, 1]$, которые удовлетворяют следующим свойствам:

S1) $\sigma(0,0) = 0, \sigma(1, 1) = 1$;

S2) σ — коммутативная функция;

S3) σ — неубывающая функция по каждому аргументу;

S4) σ— непрерывная функция;

S5) $1 - \sigma(x, y) = \sigma(1 - x, 1 - y)$.

Аксиому S5 можно обобщить для какой угодно операции дополнения. Любая симметрическая в смысле аксиомы S5 сумма, удовлетворяющая аксиомам S1 — S4, может быть представлена в виде

$$\sigma(x, y) = \frac{g(x, y)}{g(x, y) + g(1 - x, 1 - y)}, \tag{10}$$

где g — произвольная неубывающая, неотрицательная и непрерывная функция, такая, что g (0,0) = 0.

Можно показать, что:

а) $\sigma(x, 1 - x) = {}^1\!/_2$ для любого $x \in (0, 1)$;

б) σ(0, 1) не определена, если $g(0, x) = 0, \forall x$, в противном случае

$$\sigma(0, 1) = {}^1\!/_2;$$

в) $\operatorname{med}(x, y, {}^1\!/_2)$ есть единственная ассоциативная симметрическая сумма, которая является средним в смысле условия Ml.

Таким образом, при использовании операторов вида симметрических сумм необходимо выбирать между свойствами ассоциативности и идемпотентности.

Используя классические результаты из теории функциональных уравнений, Домби и Дюбуа показали, что ассоциативные, строго возрастающие симметрические суммы выражаются в виде

$$\sigma(x, y) = \psi^{-1}(\psi(x) + \psi(y)), \tag{11}$$

где ψ — строго монотонная функция, такая, что $\forall x,\ \psi(1 - x) + \psi(x) = 0,$ причем значения $\psi(0)$ и $\psi(1)$ не ограничены. Тогда пара ([0, 1], σ) образует полугруппу с нейтральным элементом $^1/_2$, причем 0 и 1 — поглощающие элементы. Более того, при этом имеем для $x < {}^1/_2 < y\ \ \sigma(x, x) < x, \sigma(y, y) > y, x < \sigma(x, y) < y.$ Наконец, свойство ассоциативности должно быть ограничено областью (0, 1), поскольку для ассоциативных симметрических сумм значение σ (0, 1) не определено.

Примером ассоциативной симметрической суммы, порожденной генератором $g(x, y) = x \cdot y,$ является операция

$$\sigma_0(x, y) = \frac{xy}{1 - x - y + 2xy}\ .$$

А операция $\sigma_{\hat{+}}(x, y)$, которая порождается генератором $g(x, y) = x + y - x \cdot y$ и имеет вид

$$\sigma_{\hat{+}}(x, y) = \frac{x + y - x \cdot y}{1 + x + y - 2xy}\ ,$$

не ассоциативна, потому что $g(0, x) \neq 0,$ т.е. здесь 0 не будет поглощающим элементом.

Рассмотрим теперь идемпотентные симметрические суммы. Будучи неубывающими, они представляют собой операторы осреднения в смысле условий Ml — M3. Если сюда добавить свойство бисимметричности М4 и условие строгого возрастания функции σ, то можно проверить, что имеется только одна идемпотентная симметрическая сумма, которая одновременно бисимметрична и строго возрастает — это среднее арифметическое, которое также порождается функцией $g(x, y) = x + y.$

Например, в качестве генератора g можно выбрать некоторую операцию пересечения или объединения. Когда g = min или g = max, соответственно получаем

$$\sigma_{\min}(x, y) = \frac{\min(x, y)}{1 - |x - y|}; \quad \sigma_{\max}(x, y) = \frac{\max(x, y)}{1 + |x - y|}.$$

Обе это операции представляют собой средние, но не являются бисимметричными. При $x + y \leqslant 1$ имеем следующие неравенства:

$$\frac{xy}{1 - x - y + 2xy} \leqslant \frac{\min(x, y)}{1 - |x - y|} \leqslant \frac{x + y}{2} \leqslant \frac{\max(x, y)}{1 + |x - y|} \leqslant \frac{x + y - xy}{1 + x + y - 2xy},$$

а при $x + y \geqslant 1$ знаки этих неравенств меняются на противоположные.

На рис. 2 —13 изображены некоторые из операций над нечеткими множествами, введенные в этом разделе.

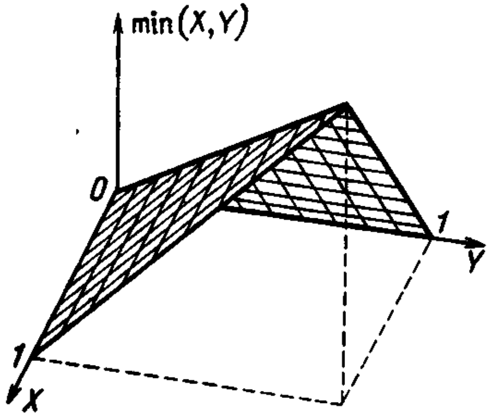


Рис. 2

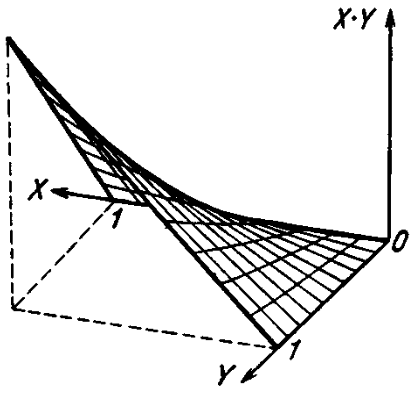


Рис. 3

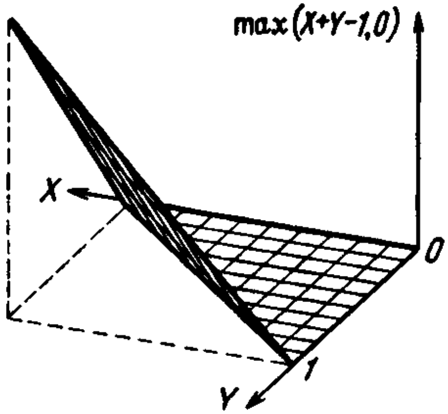


Рис. 4

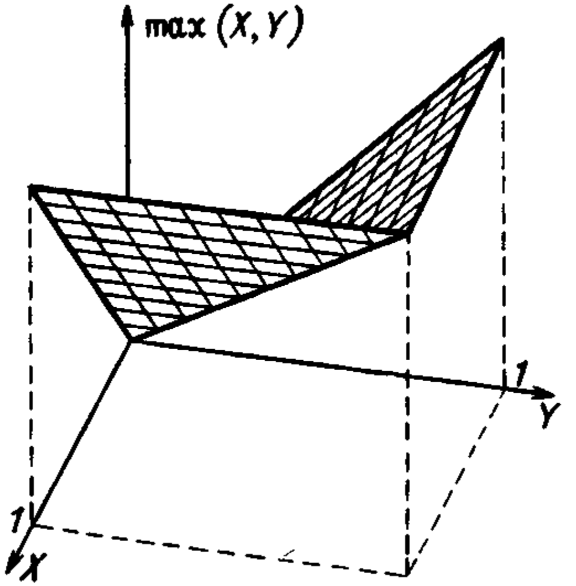


Рис. 5

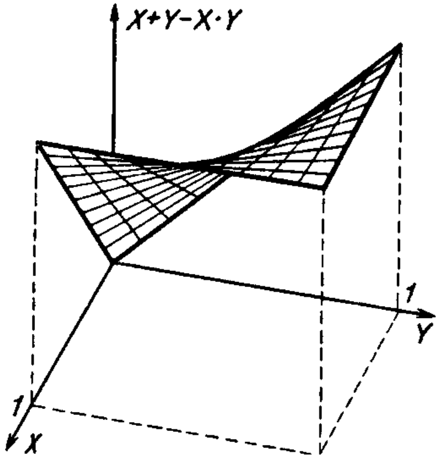


Рис. 6

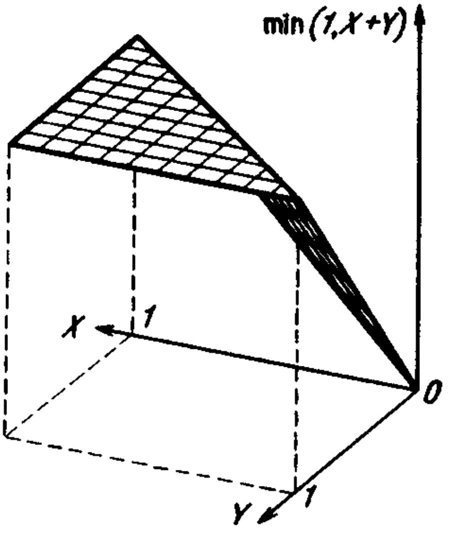


Рис. 7

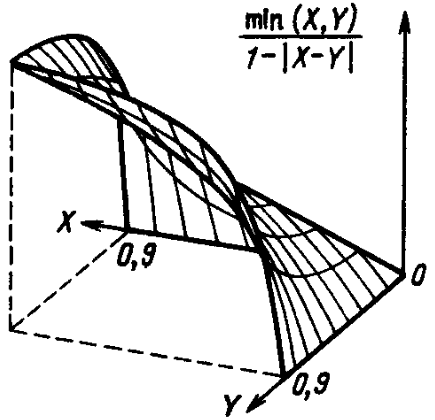


Рис. 8

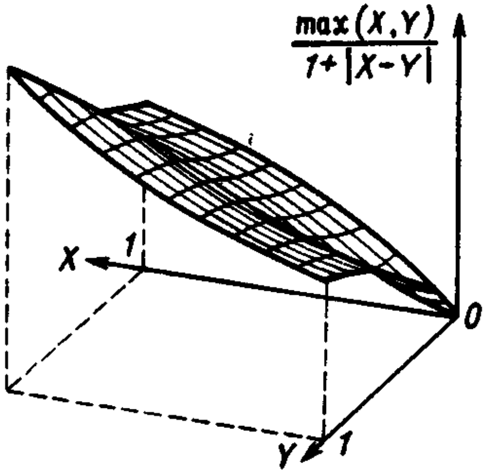


Рис. 9

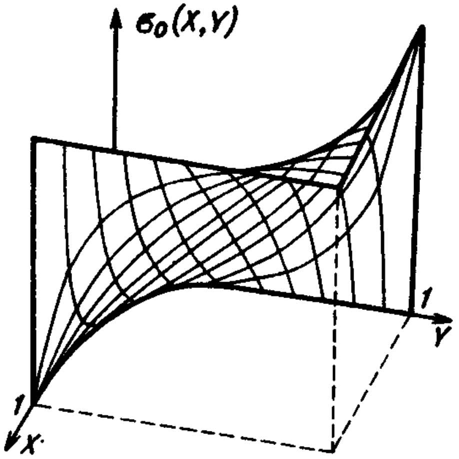


Рис. 10

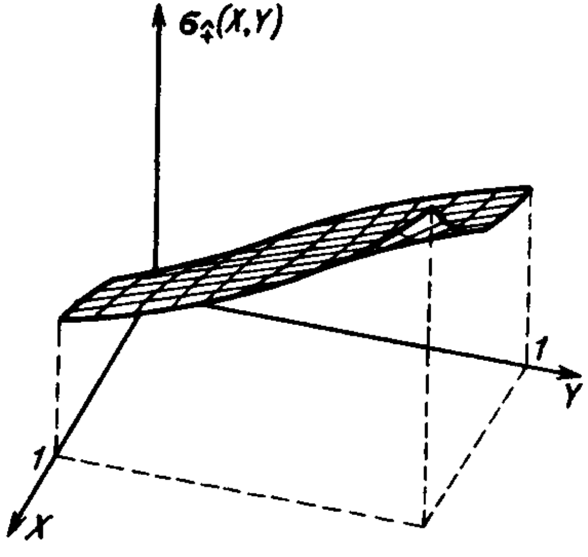


Рис. 11

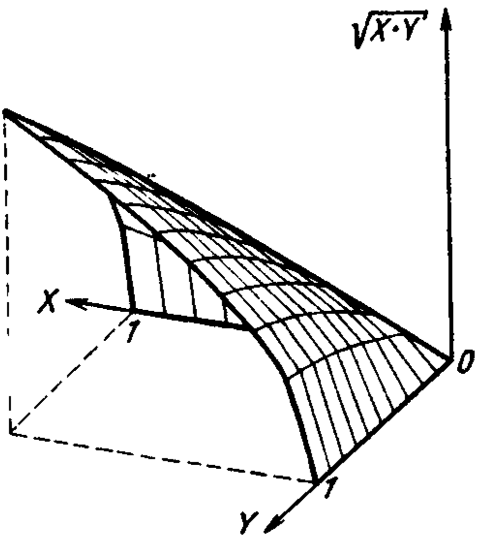


Рис. 12

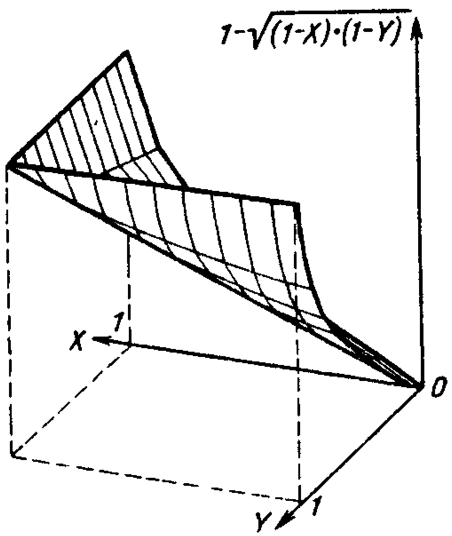


Рис. 13

8.1.3. Применение к свертыванию критериев

Случай двух равнозначных целей. Когда цели определены в соответствии с двузначной логикой "все или ничего", т е. когда G — обычное подмножество множества X_i (выражающее некоторое ограничение), то двумя единственно возможными видами свертки оказываются пересечение целей $D = G_1 \cap G_2$ или их объединение $D = G_1 \cup G_2$ (если они взаимозаменяемы).

В данном случае исключается любой компромисс между двумя критериями. Когда же цели приобретают некоторые градации, связанные со степенью их достижения, стремление к компромиссу становится одной из естественных линий поведения ЛПР. Тем не менее обе другие стратегии поведения (одновременное достижение обеих целей или выполнение одной из них) также весьма естественны. Таким образом, можно выделить *три* основные стратегии ЛПР при свертывании отдельных критериев.

Для стратегии, выражающей стремление к одновременному удовлетворению обеих целей, естественным будет выполнение аксиомы:

А5. $\forall s, t, h(s, t) \leqslant \min(s, t)$, т. е. обобщенная оценка некоторого действия не может быть лучше наихудшей из частных оценок. Такие операции будем называть "конъюнкциями". Здесь важным подклассом оказывается множество ассоциативных конъюнкций, которые служат моделями операций пересечения нечетких множеств.

Операция, выражающая избыточность двух целей, удовлетворяет аксиоме, двойственной аксиоме А5:

А6. $\forall s, t, h(s, t) \geqslant \max(s, t)$, т. е. обобщенная оценка обусловлена наилучшей из частных оценок. Будем называть такие операции "дизъюнкциями". Их важный подкласс — ассоциативные дизъюнкции, которые служат моделями операций объединения нечетких множеств.

Операция, выражающая компромисс между отмеченными выше стратегиями, удовлетворяет следующей аксиоме, дополняющей условия А5 и А6:

А7. $\min < h < \max$, т. е. обобщенная оценка находится на некотором уровне, промежуточном между частными оценками. Приходим к использованию операций осреднения.

Помимо этих трех "чистых" стратегий можно представить себе и гибридные стратегии, рассматриваемые в следующем примере. Пусть ω — некоторый объект. Если он плохо определен в смысле соответствия двум критериям, то обобщенная оценка окажется относительно мягкой и снисходительной (дизъюнкция). Если же объект ω четко определен двумя критериями, то обобщенная оценка будет более строгой и жесткой (конъюнкция). Этот тип свертки хорошо учитывается оператором симметрической суммы, таким как медиана $\mathrm{med}(s,\ t,\ {}^1/_2)$. Зато все ассоциативные симметрические суммы (исключая медиану) выражают другой вариант гибридной свертки, а именно:

$$\text{если } \max(s, t) < {}^1/_2,\ h(s, t) \leqslant \min(s, t);$$
$$\text{если } \min(s, t) > {}^1/_2,\ h(s, t) \geqslant \max(s, t);$$
$$\text{если } s \leqslant {}^1/_2 \leqslant t,\ s \leqslant h(s, t) \leqslant t,$$

который соответствует стратегии, двойственной стратегии, описанной выше. Значение функциональных представлений указанных операций состоит в возможности использования параметризованных семейств, типа рассмотренных выше, что облегчает нахождение адекватных операций свертьюания критериев. С их помощью можно покрыть все множество стратегий между конъюнктивной и дизъюнктивной стратегиями, выбрав в качестве исходных некоторую операцию пересечения i и некоторую операцию объединения u и задавая новое параметризованное семейство операций в виде

$$h(s, t) = i(s, t)^{\gamma} \cdot u(s, t)^{(1-\gamma)},\ \gamma \in [0, 1],$$

где показатель γ представляет собой степень компенсации целей. Несмотря на внешнее богатство и разнообразие перечня операций, изложенных в настоящей главе, надо отдавать себе отчет в том, что они позволили учесть лишь некоторую (хотя и значительную) часть возможных стратегий в ситуации выбора. В этом можно убедиться на примере, помещенном в конце этой главы. Для построения действительно полной картины стратегий выбора необходимы дополнительные исследования.

Свертывание q критериев с помощью симметричной свертки целевых функций. Операции, упомянутые выше, можно расширить на случай q > 2 равнозначных целей при условии, что они обладают структурой, которая допускает "естественное" увеличение числа их аргументов и сохраняет аксиому коммутативности A3. Определим операцию h(q) с q аргументами рекурсивно:

$$h^{(2)} = h,$$
$$h^{(q)}(s_1, s_2, \ldots, s_q) = h(h^{(q-1)}(s_1, s_2, \ldots, s_{q-1}), s_q).$$

Если h — коммутативная и ассоциативная функция, то h(q) удовлетворяет аксиоме А3 и представляет собой естественное расширение h для случая агрегирования q критериев. Этот прием может использоваться при расширении ассоциативных конъюнкций, дизъюнкций и симметрических сумм, а также параметризованных медиан.

При расширении других операций осреднения, не являющихся медианами, полезно свойство бисимметричности. В общем случае имеем

$$h(s_1, \ldots, s_q) = k^{-1}\left(\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} k(s_i)\right).$$

Некоторые симметрические суммы (в частности, неассоциативные) также допускают естественное расширение, которое можно определить благодаря каноническому представлению, описанному в разд. 8.1.2. Если функция q ассоциативна, то имеем

$$h(s_1, \ldots, s_q) = \frac{g^{(q)}(s_1, s_2, \ldots, s_q)}{g^{(q)}(s_1, s_2, \ldots, s_q) + g^{(q)}(1-s_1, 1-s_2, \ldots, 1-s_q)},$$

где функция g(q) определяется подобно функции h(q) на основе генератора g симметрической суммы с двумя аргументами. Этот прием позволяет генерировать многоместные расширения всех симметрических сумм, описанных в настоящей главе.

Следует отметить, что возможны и другие варианты, симметричного агрегирования целей с использованием операций нескольких типов. Например, заданию достигнуть двух из трех целей G_1, G_2, G_3 соответствует свертка вида

$$H(G_1, G_2, G_3) = (G_1 \cap G_2) \cup (G_2 \cap G_3) \cup (G_1 \cap G_3).$$

Неравнозначные по важности критерии. До сих пор понятию *важности* одного критерия по отношению к другому уделялось очень мало внимания. В зависимости от ЛПР или от ситуаций принятия решений этому понятию придается совершенно различный смысл. Не претендуя на полноту освещения этой чрезвычайно острой проблемы многокритериального выбора, мы попытаемся сопоставить несколько возможных интерпретаций понятия важности.

Использование порогов удовлетворения целей. Первая интерпретация важности критериев может связываться с наличием некоторого минимального порога x^0_i по каждому критерию C_i; достижение этого порога определяет приемлемость оценки $m_i(\omega)$ объекта ω. Здесь неявно предполагается, что объект ω тем предпочтительнее в смысле критерия C_i, чем больше величина $m_i(\omega)$. Очевидно, что такой подход есть частный случай принятого здесь подхода с использованием нечетких целей, поскольку знание порога x^0_i эквивалентно. заданию некоторой целевой функции G_i такой, что $\mu_{G_i}(\bar{x}) = 1, \quad \forall x \geqslant x_i^0$ и $\mu_{G_i}(x) = 0$ в противном случае.

Отсюда мы видим, что *симметричная свертка* нечетких целевых функций позволяет охватить одну из возможных интерпретаций важности критериев: чем важнее критерий, тем более заостренную форму имеет соответствующая целевая функция.

Взвешивание критериев. Очень распространенным методом выражения различий критериев по важности является назначение каждому из них некоторого веса с последующим суммированием этих весов в рамках операции свертки. При этом наиболее распространена формула выпуклой комбинации критериев

$$m_{\vec{P}}(\omega) = \sum_{i=1}^{q} p_i m_i(\omega); \quad \sum_{i=1}^{q} p_i = 1. \qquad (12)$$

Ее главное обоснование заключается в том, что за счет варьирования весовых коэффициентов из набора $\vec{P}$ и оптимизации критерия $m_{\vec{P}}(\omega)$ для каждого $\vec{P}$ можно пробежать все множество элементов из Ω, максимальных в смысле удовлетворения q критериям. Однако возможность априорной оценки весов весьма проблематична, причем она тем проблематичнее, чем в большей степени значения m_i ОТНОСЯТСЯ К величинам, которые не имеют ничего общего между собой (например, скорость и стоимость в случае выбора автомобиля). Когда $m_i(\omega)$ не является числом, формула (12) не применима.

Если считать вполне естественным введение нечетких целевых функций $G_i, \ i = 1, \ldots, q,$ для каждого критерия, то при взвешивании критериев формула

$$\sum_{i=1}^{q} p_i \cdot \mu_{G_i}(m_i(\omega)) = \mu_D(\omega); \quad \sum_{i=1}^{q} p_i = 1 \qquad (13)$$

оказывается более удовлетворительной, чем формула (12), поскольку здесь свертываются величины одной природы. Весовой коэффициент p_i характеризует значимость частной целевой функции G_i по отношению к обобщенной целевой функции. Отметим, что описываемые формулы (13), определяют несимметричные операторы осреднения. Рассмотренное понятие взвешивания хотелось бы расширить и на другие типы сверток. Это возможно в тех случаях, когда существует аддитивное представление данных операций. Так, каждая операция осреднения вида

$$k^{-1}\left(\frac{k(a)+k(b)}{2}\right)$$

легко обобщается с использованием формулы

$$h_{\vec{P}}(s_1,\ldots,s_q)=k^{-1}\left(\sum_{i=1}^{q}p_i k(s_i)\right),\text{ где }\sum_{i=1}^{q}p_i=1. \tag{14}$$

Когда операция h представима в виде $\psi^{-1}(\psi(a)+\psi(b))$,будем придерживаться следующей точки зрения. В обычной симметричной свертке q целевых функций каждый критерий считается один раз. При взвешивании же вес каждого отдельного критерия может быть произвольным при условии, что общий вес равен q (т. е. "эквивалентное" число критериев всегда равно q). Тогда можно положить, что

$$h_{\vec{P}}(s_1,\ldots,s_q)=\psi^{-1}\left(q\cdot\sum_{i=1}^{q}p_i\psi(s_i)\right),\text{ где }\sum_{i=1}^{q}p_i=1. \tag{15}$$

Формула (15) может непосредственно применяться к большинству операций пересечения и объединения, а также ко многим симметрическим суммам. В последнем случае формула (3.15) применяется с использованием функции g, которая (будучи ассоциативной) порождает симметрические суммы. Если операция свертки представляет собой произведение, то приходим к использованию эмпирического метода, предложенного Ягером. Этот метод состоит в неявном взвешивании целевых функций посредством придания функции принадлежности μ_{G_i} веса $q\cdot p_i$, что в конечном счете сводится к такому же изменению целевыхфункций G_i, что и при введении порогов удовлетворения целей. Важным случаем, выходящим за рамки проведенных выше рассуждений, оказывается вариант использования операций min и max; здесь он анализируется на основе понятия возможности нечеткого события. Пусть F_ω — нечеткое множество целей, соответствующих объекту ω:

$$\forall\omega,\forall i,\mu_{F_\omega}(G_i)=\mu_{G_i}(m_i(\omega))\triangleq s_i. \tag{16}$$

Пусть

$$\pi=(\pi_1,\ldots,\pi_q)$$

— распределение возможностей на множестве целевых функции, представляющее, собой нечеткое множество значимых критериев. Один из способов взвешивания критериев с помощью операций min или max состоит в следующем: полагаем

$$h_{\vec{\Pi}}(s_1, \ldots, s_q) = \min_{i=1,\ldots,q} \max(s_i, 1-\pi_i), \text{ где } \max_{i=1,\ldots,q} \pi_i = 1 \tag{17}$$

при операции min, и

$$h_{\vec{\Pi}}(s_1, \ldots, s_q) = \max_{i=1,\ldots,q} \min(s_i, \pi_i), \text{ где } \max_{i=1,\ldots,q} \pi_i = 1 \tag{18}$$

при операции max соответственно. Тогда в зависимости от того, берется ли h = min или h = max, степень совместимости с обобщенной целью $\mu_D(\omega)$ выражается необходимостью или возможностью нечеткого события F_ω соответственно. Когда все цели имеют одинакокую важность (т. е. $\forall i, \pi_i = 1)$, формулы (17) и (18) сводятся к операциям min и max соответственно. Схему свертывания по формуле (17) впервые предложил Ягер, но с другим обоснованием. Так, формулу (17) можно также понимать и как степень истинности высказывания: "Если цель i важна, то она достигается, причем это выполняется для любого i", где каждое правило вида:" Если..., то .. ." имеет степень истинности, оцениваемую с помощью многозначной импликации max(1 — x, y). Формулы (17) и (18) представляют собой частные случаи так называемых нечетких интегралов в смысле Сугено и интерпретируются как медианы. Это интерпретация оказывается особенно удобной, поскольку в порядковой шкале понятие медианы есть аналог понятия среднего, предполагающего выполнение условия аддитивности. Это означает, что формулы (17), (18) в известном смысле эквивалентны формуле (13). Более того, формула (13) легко интерпретируется на языке вероятностей, поскольку величина $\mu_D(\omega)$ может рассматриваться как вероятность нечеткого события F_ω).

Асимметричное задание обобщенной целевой функции. Встречаются ситуации, когда обобщенная целевая функция строится сложным образом из частных целевых функций. Последние образуют нижний уровень некой иерархии, которую можно неформально описать в терминах искусственного интеллекта как "И-ИЛИ" дерево. Например, если при покупке автомобиля должны выполняться требования типа: "Автомобиль должен быть с мощным двигателем или автомобиль должен быть с маломощным двигателем, но недорогим", то соответствующий оператор свертки имеет вид

$D = G_1 \cup (G_2 \cap G_3)$,

где G_1 и G_2 определены в одной и той же шкале. Примером такого оператора свертки служит оператор

$$h(s_1, s_2, s_3) = \max(s_1, s_2, s_3).$$

Мы видим, что этот тип асимметрии критериев, во-первых, глубоко отличен от упомянутых ранее; а во-вторых, существует лишь тогда, когда число элементарных целевых функций больше двух.

В качестве вывода, принципиального для построения иерархий с помощью группировки элементарных целевых функций, заметим, что здесь в полной мере проявляется различие между тремя основными типами свертки: конъюнктивной, компромиссной и дизъюнктивной. Отметим, что большинство ранее встречавшихся операций (в большей или меньшей степени) гомоморфны сложению; операции конъюнкции имеют аналоги, выражающие компромиссную стратегию, и т. д. Поэтому есть сомнения относительно целесообразности использования сверток типа $\min(a + b, 1)$ или $\max(0, a + b - 1)$, а не $\frac{a + b}{2}$, усугубляющиеся еще и тем, что первая свертка не позволяет выделить наилучшие, а вторая — наихудшие решения. В действительности важность выбора "хорошей" свертки становится более очевидной, когда некоторую обобщенную оценку, составленную из частных, в свою очередь, комбинируют с другими обобщенными оценками.

Использование нечетких квантификаторов в свертке. Теория нечетких множеств позволяет определить квантификаторы, промежуточные между кванторами общности $\forall$ и существования $\exists$ классической логики. Эти квантификаторы представляют собой математические модели лингвистических термов, таких как "большинство", "мало", включая и чисто числовые квантификаторы типа "по меньшей мере половина". Один из способов выражения промежуточной стратегии между конъюнкцией (все цели должны быть достигнуты) и дизъюнкцией критериев (достижение по крайней мере одной цели) заключается как раз в использовании промежуточных квантификаторов ("большинство целей должно быть достигнуто").

Нечеткий квантификатор Q на множестве из q элементов (здесь критериев) есть нечеткое множество целых чисел с носителем в $\{0, 1, \ldots, q\}$. Квантификатор Q может быть нечетким кардинальным числом $\|F\|$ нечеткого множества F с конечным носителем. В этом случае имеем $\mu_{\|F\|}(0) = 1$ и $\mu_{\|F\|}(i) \geqslant \mu_{\|F\|}(i + 1), \forall i \geqslant 0$. Если, наоборот, Q — число, большее или равное р, то $\mu_Q(i) = 0, \forall i < p$ и $\mu_Q(i) = 1, \forall i \geqslant p$.

Если величина р известна неточно и определена как нечеткое кардинальное число $\|F\|$ нечеткого множества F, то $\mu_Q(i)$ представляет собой степень необходимости того, что $i \geqslant p$:

$$\mu_Q(i) = \inf_{i < j} \{1 - \mu_{\|F\|}(j)\} = 1 - \mu_{\|F\|}(i+1).$$

Пусть F_ω - нечеткое множество целей, соответствующих объекту ω, которое определяется формулой (16). В этом случае степень истинности утверждения: "по меньшей мере q критериев удовлетворяются" - задается формулой

$$h_Q(s_1, \ldots, s_q) = \mu_Q(|F_\omega|) = \mu_Q(s_1 + s_2 + \ldots + s_q),$$

где $|F_\omega|$ - мощность нечеткого множества F_ω. Если Q - нечеткая пропорция вида "по меньшей мере х %", где х - неточно определенная величина, то Q есть нечеткое число из интервала [0, 1], такое, что

$$\forall x \leqslant y, \mu_Q(x) \leqslant \mu_Q(y); \quad \mu_Q(1) = 1,$$

и тогда вычислявем

$$\mu_Q\left(\frac{|F_\omega|}{q}\right).$$

Данный подход предложен Заде в духеоператоров осреднения, потому что в рамках этого подхода множество частично достигнутых целей эквивалентно одной полностью достигнутой цели.

Другой подход на основе операторов min и max предложил Ягер. Он относится к чисто порядковым подходам и не предполагает достижения компромисса между критериями. Величина $h'(s_1, \ldots, s_q)$ определяется как степень существования нечеткого подмножества С множества $\{1, \ldots, q\}$ с мощностью, соответствующей нечеткому числу Q, так чтобы цели, включенные в множество С, достигались одновременно. Для описания конъюнкции целевых функций можно пользоваться произвольной t-нормой *:

$$h'_Q(s_1, \ldots, s_q) = \max_{C \subseteq \{1,2,\ldots,q\}} \mu_Q(|C|) * (\ast_{i \in C} s_i),$$

причем в случае, когда $* = \min$, эта формула принимает вид

$$h'_Q(s_1, \ldots, s_q) = \max_{i = 1,\ldots,q} \min(\mu_Q(i), s_{\sigma(i)}),$$

где σ — некоторая перестановка $\{1, 2, \ldots, q\}$, такая, что

$$s_{\sigma(1)} \geqslant s_{\sigma(2)} \geqslant \ldots \geqslant s_{\sigma(q)}.$$

Замечая, что

$$\forall i, \mu_{\|F_\omega\|}(i) = \sup\{\alpha \| \|(F_\omega)_\alpha\| \geqslant i\} = s_{\sigma(i)}$$

будем интерпретировать величину $h'_Q(s_1, \ldots, s_q)$ как степень возможности того, что число удовлетворяемых критериев $(\|F_\omega\|)$ соответствует Q.

Третий подход к вычислению степени истинности утверждения об удовлетворении критериев был дан в ряде работ, а именно было предложено выражение

$$h''_Q(s_1, \ldots, s_q) = \min_{i=1,\ldots,q} \max(1 - \mu_{\|F\|}(i), s_{\sigma(i)}),$$

которое интерпретировалось как степень необходимости того, что F_ω — нечеткое множество с мощностью $\|F\|$. Можно показать, что когда $* = \min$, то $h''_Q(s_1, \ldots, s_q) = h'_Q(s_1, \ldots, s_q)$, если величины Q и $\|\bar{F}\|$ связаны между собой вышеприведенным уравнением. Если $\mu_Q(i) = 1, \ \forall i \geqslant 1$ и $\mu_Q(0) = 0$ (тогда нечеткое число Q означает "по крайней мере один"), то справедливо равенство $h'_Q = h''_Q = \max$, а если $\mu_Q(i) = 0, \forall i < q$ и $\mu_Q(q) = 1$ (тогда нечеткое число Q означает "для любого"), то $h'_Q = h''_Q = \min$.

Мы вновь получаем интерпретацию кванторов $\exists$ и $\forall$ в терминах дизъюнкции и конъюнкции, что, вообще говоря, ложно при использовании подхода, основанного на скалярной мощности.

Наконец, может потребоваться оценить "насколько достигнуто большинство целей". В данном случае известны нечеткий квантификатор Q и распределение весов $\{\pi_i, i = 1, \ldots, q\}$, определяющее нечеткое множество I важных целей. Тогда можно вычислить оценку величины $\mu_Q(|I \cap F_\omega|)$, если Q - абсолютный квантификатор, и величины $\mu_Q(|I \cap F_\omega|/|I|)$, если Q - нечеткая пропорция. Когда стремятся выбрать некомпенсационный показатель, можно использовать выражение для h'_Q, в котором вместо s_i подставляется член $\pi_i | s_i$, где черта | означает, что если цель важна, то она удовлетворяется (что требует выполнения условий 1|1 = 1 и 1|0 = 0, или, например,

$$x | y = \min(x, y), \ \max(1 - x, y) \ldots).$$

8.1.4. Идентификация операций

Имея широкий спектр операций, выражающих различные возможные стратегии поведения ЛПР, можно рассмотреть варианты идентификации некоторой операции с помощью вопросника, предъявляемого ЛПР, а также поиска наиболее достоверной операции в некотором заданном списке.

Для простоты возьмем случай свертки двух целевых функций равной важности G_1, и G2. При этом метод идентификации операции будет основываться на задании ограниченного подмножества Т типовых объектов, для которых известна степень их соответствия каждой частичной цели. Эти объекты обладают взаимно противоречивыми характеристиками, т. е., например, один из них несовместим с функцией G_1, но полностью совместим с функцией G_2, а другой со средней степенью совместим с обеими целями.

Можно рассмотреть задачу идентификации, состоящую из двух этапов.

1. Задается ограниченный, но все же достаточно представительный список типовых операций. От ЛПР требуется с помощью лингвистической шкалы суждений типа предложенной в разд. 8.1.1, сформулировать общее суждение относительно объектов, содержащихся в множестве Т. Как мы увидим в разбираемом ниже примере, в данной процедуре может оказаться достаточным очень малое число правильно выбранных объектов.

2. На первом этапе определилась одна или несколько допустимых операций. Теперь, если стремиться к более точному определению нужной операции, можно выбрать параметризованное семейство операций, семантика которых соответствует тому типу стратегии поведения ЛПР, который наблюдался на первом этапе. Вновь проводится опрос ЛПР с использованием уже более содержательной выборки объектов. Затем можно провести оптимизацию параметра, характеризующего операцию, например, по методу наименьших квадратов.

Если суждения ЛПР последовательны и непротиворечивы, то элементы множества Ω можно упорядочить по предпочтению, и эта классификация должна в полной мере отражать тот порядок, который существует, когда множество Ω содержит мало объектов.

8.1.5. Пример

Рассмотрим задачу выбора автомобиля по каталогу моделей, содержащему точные сведения о цене, расходе топлива, максимальной скорости и приемистости (оцениваемой по времени разгона до 100 км/ч с места).

Предполагается, что при покупке автомобиля его требуемые характеристики (обобщенная цель) выражаются в упрощенной лингвистической форме, например, в виде

<обобщенная цель> = (<цель> /(<цель> <ор> <цель>)),

<цель> = (< элементарная цель> / < цель> <ор> < цель>)),

где косая черта / означает ИЛИ, а элементарная цель представляет собой нечеткое множество на одной из четырех рассмотренных шкал (цена, расход топлива, скорость, приемистость). Символом <ор> обозначен оператор лингвистической свертки. Таким образом, обобщенная цель представима с помощью бинарной древовидной структуры, листьями которой служат элементарные цели, а каждое ветвление соответствует некоторой операции свертки. Примером такой обобщенной цели служит

((довольно быстроходный и приемистый), но не очень дорогой) автомобиль.

Идентификация каждой элементарной цели осуществляется через диалог с заинтересованным лицом, которое определяет область предпочтительных (и, на его взгляд, эквивалентных) значений, а также множество совершенно неприемлемых значений, задавая соответственно ядро и носитель нечеткого множества, описывающего элементарную цель. Дополнительный диалог с покупателем позволит несколько уточнить форму функции принадлежности.

Выбор операции свертки целей может производиться с помощью следующей процедуры. Покупателю предлагаются три типовые модели V_1, V_2, V_3 для выяснения его стратегии комбинирования двух целей G_1 и G_2, связанных между собой искомым оператором. Оценка каждого типового автомобиля является элементом множества уровней совместимости A, B, C, D, E, описанных в табл. 1 (см. разд. 8.1.1). Типовые автомобили выбираются так, чтобы обеспечить различение операций свертки из фиксированного списка. Предполагается, что известна совместимость каждого типового автомобиля с каждой из целей. В частности, типовые автомобили могут выбираться так, чтобы выполнялись следующие условия:

автомобиль V_1 несовместим (обозначается E) с целью G_1 но полностью совместим (обозначается A) с целью G_2 ;

автомобиль V_2 имеет среднюю степень совместимости (обозначается C) с каждой из целей G_1 и G_2;

автомобиль V_3 имеет среднюю степень совместимости (обозначается C) с целью G_1, но полностью совместим (обозначается A) с целью G_2. Тогда будем выражать оператор свертки h функций принадлежности μ_{G_1} и μ_{G_2} с помощью функции $\hat{h}$ из $\{A, C, E\}^2$ в $\{A, B, C, D, E\}$, удовлетворяющей аксиомам A1 — A3, сформулированным в разд. 8.1.1. Таким образом покупатель задает три значения: $\hat{h}(\bar{E}, A)$, $\hat{h}(C, \bar{C})$ и $\hat{h}(C, A)$. Каждая тройка ответов соответствует некоторой стандартной операции свертки, как это указано в табл. 2.

Таблица 2

Типовые автомобили	V_1	V_2	V_3	Вид обобщенного критерия
Цель G_1	E	C	C	Выбираемые операции
Цель G_2	A	C	A	
	E	E	C	$\max(0, u + v - 1)$
Примеры	E	D	C	$u \cdot v$
	E	C	C	$\min(u, v)$
возможных	E	C	B	$\sqrt{u \cdot v}$, $\dfrac{2uv}{u + v}$
	D	C	C	$\mathrm{med}(u, v, {}^1/_4)$,
ответов	C	C	C	$\mathrm{med}(u, v, {}^1/_2)$; $\dfrac{\min(u, v)}{1 - \lvert u - v\rvert}$
	C	C	B	$\dfrac{u + v}{2}$; $\sigma_{+}^{\wedge}$; $\dfrac{\max(u, v)}{1 + \lvert u - v\rvert}$
ЛПР	C	C	A	σ_0
	B	C	B	$\mathrm{med}(u, v, {}^3/_4)$
	A	C	A	$\max(u, v)$; $1 - \sqrt{(1 - u)(1 - v)}$
	A	B	A	$u + v - u; v$
	A	A	A	$\min(1, u + v)$

Отметим, что существует определенная аналогия между этим подходом и так называемыми таблицами Карно, используемыми при синтезе логических цепей. Здесь строится логический фильтр в смысле многозначной, а не двузначной логики. Предполагается, что функция, реализуемая фильтром, представляет поведение человека по отношению к различным объектам, описание которых есть в информационной системе. Класс имеющихся операций свертки рассматривается как множество стандартных функций, таких же, как и функции, помещенные в списке логических цепей.

Таблица 2 далеко не полна и касается лишь некоторой части возможных ответов ЛПР. Множество возможных ответов содержит 50 троек, которые могут порождаться при условии соблюдения следующих ограничений:

1) $\hat{h}(C, A) \geqslant \max(\hat{h}(E, A), \hat{h}(C, C))$;

2) функция h симметрична;

3) $\hat{h}(C, A) \geqslant$ C (при полном удовлетворении цели G_2 обобщенная оценка не может быть ниже уровня удовлетворения цели G_1). К тому же заметим, что когда используются лишь три типовых автомобиля, функция $\hat{h}$ является не полностью определенной. Для полного задания функции с учетом аксиом A_1 - A_3 требуется знание величины $\hat{h}(E, C)$ более чем по трем значениям, полученным от ЛПР. Такая дополнительная информация позволит более точно различать операции свертки, но при этом число возможных ответов дойдет до 93.

Отметим, что четыре класса операций, указанные в настоящей главе, а именно классы операций пересечения, объединения, осреднения и симметричного суммирования, покрывают лишь часть из 50 возможных троек. При этом многие тройки соответствуют минимальным изменениям по отношению к стандартным операциям (например, тройка (D, C, C) очень близка к тройке (E, C, C), которая хорошо представляется операцией взятия минимума) . Однако некоторые (немногочисленные) тройки, например (C, E, C), явно выходят за рамки четырех разобранных выше классов. Пока еще не развит аксиоматический подход к определению операций, соответствующих таким тройкам.

Представляется очевидным, что очень точная идентификация некоторой операции свертки, которая соответствует второму этапу процедуры, описанной в разд. 8.1.4, порой (быть может, часто) невозможна. Однако это ни в коей мере не снижает ценность самого подхода и прежде всего по следующим двум причинам:

очень точная идентификация может быть бесполезной, желательно иметь представление лишь об определенном характере операции, что позволяет отразить произвольный характер значений принадлежности и других численных описаний субъективных суждений;

если несколько операций оказываются возможными моделями, то можно допустить и неточность результата свертки. Например, когда нет субъективных различий между операциями $h_1, \ldots, h_2$, то можно полагать

$$\forall (u, v), h(u, v) \in [\min_{i=1,\ldots,k} h_i(u, v), \max_{i=1,\ldots,k} h_i(u, v)].$$

В результате свертьюания можно получить даже нечеткое число. Это произойдет в том случае, когда среди выбранных операций одни будут более вероятны (заслуживать большего доверия), чем другие. Тогда получим нечеткое множество операций, которое при использовании принципа обобщения обеспечит нечеткие оценки объектов.

Отметим, что выбор целей (т. е. определение функций принадлежности μ_{G_j}) и выбор вида свертки зависят друг от друга: так, конъюнктивная свертка малозначащих целей может быть эквивалентной компромиссной свертке между двумя очень избирательными целями. Это интуитивно понятное явление четко прослеживается в данной модели. Например, тройка — (μ_{G_1}, μ_{G_2}, h среднее геометрическое) эквивалентна тройке — $(\sqrt{\mu_{G_1}}, \sqrt{\mu_{G_2}}, h$ произведение). Систематический поиск таких эквивалентностей представляет определенный интерес. Во всяком случае, они подчеркивают, что способ комбинирования целей зависит от способа их предварительного задания.

8.2. Сравнение неточных оценок

В практике редко бывают случаи, когда обобщенная оценка некоторого объекта, связанная с процессом свертывания отдельных критериев или интегрирования неопределенных факторов, описывается точным числом. Вообще говоря, она будет естественным образом представлена в виде нечеткого интервала, выражающего неточность и/или неопределенность информации, обеспечивающей процесс оценивания: неточность измерений, словесных данных, не полностью определенный способ свертывания критериев, неопределенность, относящуюся к учитываемым качествам объектов.

Процедуры свертывания критериев, обсуждавшиеся в первой части этой главы, остаются справедливыми и тогда, когда рассматриваемые объекты характеризуются неточными частными оценками, которые можно естественным образом представить с помощью нечетких величин, определенных в базовом множестве X_1, связанном с частной целью G_1. Тогда обобщенная оценка получается за счет применения принципа обобщения к операции свертывания $h(\mu_{G_1}(\cdot), \ldots, \mu_{G_q}(\cdot))$.

Пусть — $F_1, \ldots F_q$ нечеткие оценки объекта ω по q критериям, степень совместимости цели G_1 с нечеткой оценкой $m_i(\omega) = F_i$ есть величина $\tau_i = \mu_{G_i}(F_i)$, определяемая выражением

$$\forall t \in [0, 1], \mu_{\tau_i}(t) = \begin{cases} \sup \{\mu_{F_i}(u) \mid t = \mu_{G_i}(u)\}, \\ 0, \text{если } \nexists u, t = \mu_{G_i}(u). \end{cases} \tag{19}$$

Таким образом, обобщенная оценка объекта ω будет иметь вид

$$\mu_D(\omega) = h(\tau_1, \ldots, \tau_q), \tag{20}$$

где $\mu_D(\omega)$ - нечеткая величина из интервала [0, 1], получаемая за счет применения результатов исчисления нечетких величин к изотонной функции h. Например, если h — операция взятия минимума, то получаем

$$\mu_D(\omega) = \widetilde{\min}(\tau_1, \ldots, \tau_q).$$

Когда обобщенные оценки оказываются неточными, упорядочение объектов по этим оценкам становится уже нетривиальной задачей, поскольку множество нечетких величин не обладает естественной структурой полного порядка. Эта задача составляет предмет второй части настоящей главы.

8.2.1. Сравнение действительного числа и нечеткого интервала

Прежде чем заниматься сравнением нечетких интервалов, следует уточнить, как действительное число соотносится с нечетким интервалом. Исчисление возможностей позволяет нам определить множества чисел, которые, *возможно* (с *необходимостью)*, больше или равны значениям некоторой переменной, связываемой с нечетким интервалом Р. Обозначим их соответственно через $[P, +\infty)$ и $(P, +\infty)$ и положим, что

$$\forall w, \mu_{[P,+\infty)}(w) = \Pi_P((-\infty, w]) = \sup_{u \leq w} \mu_P(u), \quad (21)$$

$$\mu_{(P,+\infty)}(w) = N_P((-\infty, w)) = \inf_{u \geq w} 1 - \mu_P(u), \quad (22)$$

где Π_p и N_p — меры возможности и необходимости, определяемые по распределению μ_p. Заметим, что множества $[P, +\infty)$ и $(P, +\infty)$ выпуклые, а их функции принадлежности есть верхние и нижние функции распределения P, кроме точек разрыва (см. рис. 8.14).

Подобным же образом можно определить интервалы $(-\infty, P]$ и $(-\infty, P)$, которые будут нечеткими множествами чисел, возможно (с необходимостью) , меньшими, чем P, причем

$$(-\infty, P] = \overline{(P, +\infty)}, \quad (3.23)$$

$$(-\infty, P) = \overline{[P, +\infty)}, \quad (3.24)$$

где горизонтальная черта $\overline{}$ означает операцию дополнения в теории нечетких множеств.

Использование такой символики оправдывается тем, что если нечеткий интервал P вырождается в действительное число и, то нечеткое множество чисел $[P, +\infty)$ превращается в полупрямую $[u, +\infty)$, а $(P, +\infty)$ — полупрямую (u, +∞). Можно убедиться, что

$$(-\infty, P] \cap [P, +\infty) = P,$$
$$(-\infty, P) \cap (P, +\infty) = \varnothing,$$

где операцией пересечения П служит операция min.

Заметим, что, когда P — нечеткий интервал, в общем случае имеем условие $P \cup (P, +\infty) \subset [P, +\infty)$ (строгое включение, кроме тех случаев, когда, например, операция объединения $\cup$ определяется с помощью ограниченной суммы).

Аналогично можно определить (возможно, пустую) область, ограниченную двумя нечеткими интервалами P и Q. Если P рассматривается как нижняя граница области, а Q — как ее верхняя граница, то "замыкание" и нечеткая "внутренность" этой области будут обозначаться $[P, Q]$ и (P, Q) и выражаться в виде

$$[P, Q] = (-\infty, Q] \cap [P, +\infty),$$
$$(P, Q) = (-\infty, Q) \cap (P, +\infty),$$

где пересечение нечетких интервалов определяется с помощью операции min.

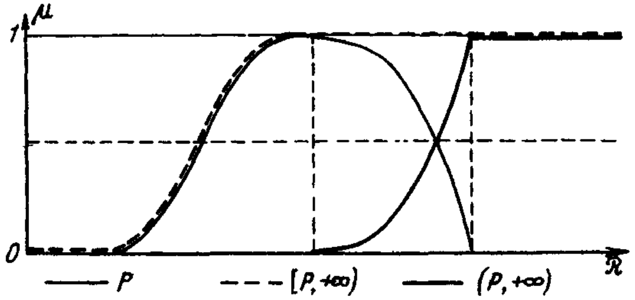


Рис. 14

8.2.2. Сравнение двух нечетких интервалов

Далеко не всегда имеется возможность найти больший из двух нечетких интервалов, поскольку они могут в значительной мере перекрываться. Первое естественное побуждение заключается в том, чтобы воспользоваться для различения нечетких интервалов расширенными операциями $\widetilde{\max}$ и $\widetilde{\min}$. Тем более легко видеть, что, даже когда два нечетких интервала очень близки между собой, заметным образом накладываясь друг на друга, они различимы с помощью операций $\widetilde{\max}$ и $\widetilde{\min}$. Например, $\widetilde{\max}(\bar{P}, \bar{Q}) = \bar{Q}$, если P — нечеткий интервал и $\exists\epsilon > 0, \mu_Q(w) = \mu_P(w - \epsilon), \forall w.$

Как только возрастающие или убьюающие части функций принадлежности пересекаются, операция $\widetilde{\max}$ уже не позволяет различать нечеткие интервалы, как бы не были удалены друг от друга ядра P и Q. Здесь необходима коли-лественнаяоценка возможных различий, чего нельзя достичь с операциями

$$\widetilde{\max} \text{ и } \widetilde{\min}.$$

В рамках теории возможностей, чтобы узнать, что больше: P или Q, можно сравнивать, с одной стороны, множества P и $[Q, +\infty)$, а с другой стороны, множества P и $(Q, +\infty)$ с помощью некоторого показателя типа "возможность — необходимость нечетких событий", т. е. вычислять по функции распределения μ_P возможность и необходимость нечетких событий $[Q, +\infty)$ и $(Q, +\infty)$. Тогда получаем четыре основных показателя сравнения:

(25)

1) $\Pi_P([Q,+\infty)) = \sup_u \min(\mu_P(u), \sup_{v \leqslant u} \mu_Q(v)) = \sup_{u \geqslant v} \min(\mu_P(u), \mu_Q(v))$.

Если X и Y — переменные, области определения которых ограничены нечеткими множествами μ_p и μ_Q соответственно, величина $\Pi_P([Q,+\infty))$ интерпретируется как возможность $Pos(\overline{X} \geqslant \underline{Y})$ присвоить X значение, по крайней мере не меньшее, чем Y, т. е. наибольшие значения, которые может принимать переменная X по меньшей мере равны наименьшим значениям, которые может принимать переменная Y. Если μ_p и μ_Q — две непрерывные функции, то имеем $Pos(\overline{X} \geqslant \underline{Y}) = Pos(\overline{X} > \underline{Y})$, где $Pos(\overline{X} > \underline{Y})$ определяется заменой нестрогого неравенства u≥v на строгое неравенство u>v в выражении для $\Pi_P([Q,+\infty))$;

2) $\Pi_P((Q,+\infty)) = \sup_u \min(\mu_P(u), \inf(1-\mu_Q(v)) = \sup_u \inf_{v \geqslant u} \min(\mu_P(u), 1-\mu_Q(v))$.

Эта величина интерпретируется как возможность того, что наибольшие значения, которые может принимать переменная X, будут больше наибольших значений, принимаемых переменной Y (рис. 15); эту возможность можно обозначить символом $Pos(\overline{X} > \overline{Y})$;

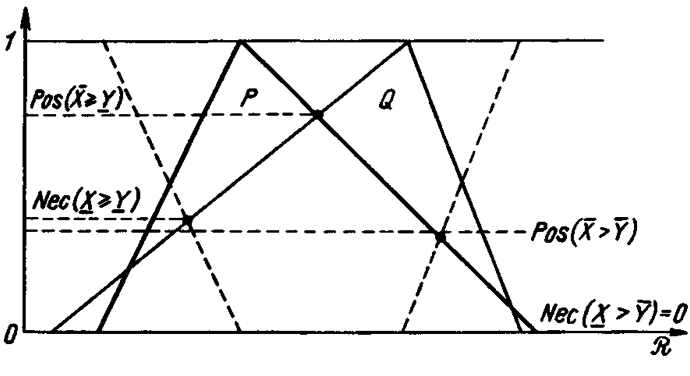


Рис. 15

3) $N_P([Q,+\infty)) = \inf_u \max(1-\mu_P(u), \sup_{v \leqslant u} \mu_Q(v)) = \inf_u \sup_{v \leqslant u} \max(1-\mu_P(u), \mu_Q(v))$.

Эта величина интерпретируется как необходимость того, что наименьшие значения, принимаемые переменной X, будут по крайней мере равны наименьшим значениям, принимаемым переменной Y (см.

рис. 15); она будет обозначаться

$\mathrm{Nec}(\underline{X} \geqslant \underline{Y})$;

$$4)\ N_P((Q,+\infty)) = \inf_{u} \max(1-\mu_P(u),\ \inf(1-\mu_Q(v)) = 1 - \sup_{u<v} \min(\mu_P(u),\mu_Q(v)). \tag{28}$$

Эта величина интерпретируется как необходимость $\mathrm{Nec}(\underline{X} > \overline{Y})$ того, что переменной X могут присваиваться только большие значения по сравнению с переменной Y, т. е. как необходимость того, что наименьшие значения, принимаемые X, будут больше наибольших значений, принимаемых Y. Если μ_P и μ_Q — непрерывные функции, то $\mathrm{Nec}(\underline{X} > \overline{Y}) = \mathrm{Nec}(\underline{X} \geqslant \overline{Y})$, где $\mathrm{Nec}(\underline{X} \geqslant \overline{Y})$ определяется заменой в выражении для $N_P((Q,+\infty))$нестрогого неравенства

$u \leq v$ на строгое неравенство $u < v$.

Фактически возможностями подход позволяет построить шестнадцать характеристик, описьюающих относительные положения P и Q. Для их получения достаточно заменить P на Q или $[P,+\infty)$ на $(-\infty, P)$ и т. п. в формулах (25) - (28).

Исследование этих характеристик показывает, что в общем случае лишь шесть из них взаимно независимы. Это отражено в табл. 3, где P и Q — симметричны.

Таблица 3

$$\Pi_P([Q,+\infty)) = 1 - N_P((-\infty,Q)) = 1 - N_Q((P,+\infty)) = \Pi_Q((-\infty,P]);$$
$$\Pi_P((Q,+\infty)) = 1 - N_P((-\infty,Q]) \leqslant 1 - \Pi_Q((P,+\infty)) = N_Q((-\infty,P]);$$
$$N_P([Q,+\infty)) = 1 - \Pi_P((-\infty,Q)) \geqslant 1 - N_Q([P,+\infty)) = \Pi_Q((-\infty,P));$$
$$N_P((Q,+\infty)) = 1 - \Pi_P((-\infty,Q]) = 1 - \Pi_Q([P,+\infty)) = N_Q((-\infty,P)).$$

Эти шесть значений являются необходимыми и достаточными для характеризации относительного положения двух произвольных четких интервалов. Однако можно показать, что в большинстве случаев для нечетких интервалов имеем равенства

$$\Pi_P((Q,+\infty)) = 1 - \Pi_Q((P,+\infty)) \tag{29}$$

и

$$N_P([Q,+\infty)) = 1 - N_Q([P,+\infty)). \tag{30}$$

Когда равенство (29) нарушается, два входящих в него показателя позволяют различать относительные положения интервалов вида

P = [a_1 b] и Q = [a_2, b] (Π_P((Q, +∞)) = 0 = Π_Q ((P, +∞))) и интервалов вида P = [a_1, b] и Q[a_2, b] (Π_Q((P,+∞))=1).

Аналогичное замечание справедливо для показателей, входящих в равенство (30). Практически для обсуждения относительных положений двух нечетких интервалов достаточно четырех показателей: $\mathrm{Pos}(\bar{X} \geqslant \underline{Y})$, $\mathrm{Pos}(\bar{X} > \bar{Y})$, $\mathrm{Nec}(\underline{X} \geqslant \underline{Y})$, $\mathrm{Nec}(\underline{X} > \bar{Y})$. Эти показатели удовлетворяют следующим свойствам:

$$\mathrm{Pos}(\bar{X} \geqslant \underline{Y}) \geqslant \max(\mathrm{Pos}(\bar{X} > \bar{Y}), \mathrm{Nec}(\underline{X} \geqslant \underline{Y}));$$
$$\min(\mathrm{Pos}(\bar{X} > \bar{Y}), \mathrm{Nec}(\underline{X} \geqslant \underline{Y})) \geqslant \mathrm{Nec}(\underline{X} > \bar{Y});$$
$$\mathrm{Pos}(\bar{X} \geqslant \underline{Y}) = 1 - \mathrm{Nec}(\underline{Y} > \bar{X});$$
$$\max(\mathrm{Pos}(\bar{X} \geqslant \underline{Y}), \mathrm{Pos}(\bar{Y} \geqslant \underline{X})) = 1;$$
$$\mathrm{Pos}(\bar{X} > \bar{Y}) + \mathrm{Pos}(\bar{Y} > \bar{X}) = 1;$$
$$\mathrm{Nec}(\underline{X} \geqslant \underline{Y}) + \mathrm{Nec}(\underline{Y} \geqslant \underline{X}) = 1.$$

Первые четыре свойства представляют собой не что иное, как переведенные в контекст задачи сравнения нечетких интервалов характеристические свойства мер возможности и необходимости. Два последних свойства по сути являются другой формой записи равенств (29) и (30) и выполняются при тех же условиях.

Аналогично можно ввести и показатели равенства между нечеткими интервалами P и Q. Естественным образом вводятся три показателя:

1) Π_Q(P) = Π_P(<2), т. е. возможность нечеткого события P, вычисляемая по функции распределения μ_Q (соответственно возможность нечеткого события Q, вычисляемая по функции распределения μ_P) . Эту величину можно также обозначить Pos(X = Y), считая, что переменные X и Y ограничены нечеткими множествами с функциями принадлежности μ_P и μ_Q соответственно, т. е. ее можно рассматривать как возможность присвоения общего значения переменным X и Y.

2) N_Q(P) , т. е. необходимость нечеткого события P, вычисляемая по функции распределения μ_Q. Речь идет о показателе включения интервала Q в интервал P, который понимается как оценка достоверности того, что при некотором заданном значении переменной Y можно присвоить это же значение переменной X.

3) N_p(Q) - показатель включения интервала P в интервал Q, который имеет аналогичную интерпретацию.

Несимметричность двух последних показателей приводит к стремлению построить их симметричную комбинацию конъюнктивного типа

$$\mathrm{Nec}(X = Y) = \min(N_P(Q), N_Q(P)).$$

Использование min в качестве операции пересечения оправдывается свойством идемпотентности; при P = Q, т. е. $\mu_P=\mu_Q$ можно потребовать выполнения равенства $\mathrm{Nec}(X = Y) = N_Q(Q)$. Величина Nec(X=Y) характеризует достоверность того, что переменным X и Y можно присвоить одно и то же значение, совместимое с нечеткими интервалами P и Q (каким бы оно ни было). Эти показатели равенства можно легко переформулировать за счет привлечения показателей неравенства, введенных выше так, чтобы выполнялись условия

$$\mathrm{Pos}(X = Y) = \min(\mathrm{Pos}(\overline{X} \geqslant Y), 1 - \mathrm{Nec}(\underline{X} > \overline{Y}));$$

$$N_Q(P) = \min(\mathrm{Nec}(\underline{Y} \geqslant \underline{X}), 1 - \mathrm{Pos}(\overline{Y} > \overline{X}));$$

$$\mathrm{Nec}(X - Y) = \min(\mathrm{Nec}(\underline{X} \geqslant \underline{Y}), 1 - \mathrm{Pos}(\overline{X} > \overline{Y}), 1 - \mathrm{Pos}(\overline{Y} > \overline{X}), \mathrm{Nec}(\underline{Y} \geqslant \underline{X})).$$

Таким образом, четыре вновь рассмотренных показателя неравенства нечетких величин содержат всю информацию, необходимую для обсуждения свойства равенства нечетких интервалов.

Замечание. В показатель сравнения двух нечетких величин можно ввести градации, заменяя четкое отношение нестрогого порядка ≥ в формулах (25) - (28) некоторым нечетким отношением, отражающим субъективную оценку того, насколько желательно, чтобы одна величина была больше некоторой другой. Еще один способ действий состоит в направленном изменении нечетких интервалов P и Q, нечетких множеств чисел $[P, +\infty)$ и $(P, +\infty)$ и т. д. с помощью нечеткого отношения близости, так, чтобы сделать менее ограничительными функции распределения возможностей, связанные с этими нечеткими множествами.

8.2.3. Упорядочение n нечетких интервалов

Существуют два возможных подхода к упорядочению множества, состоящего из n нечетких интервалов $\{M_1, \ldots, M_n\}$ с использованием введенных выше показателей:

определение обобщенных показателей превосходства, которые оценивают, насколько величина M_i доминирует над всеми остальными нечеткими числами;

обработка нечетких отношений, полученных попарным сравнением нечетких интервалов M_i.

Здесь обсуждается только первый подход;

Можно достаточно естественно определить обобщенный показатель превосходства, интерпретируя доминирование нечеткого интервала M_i

над другими нечеткими интервалами как тот факт, что нечеткий интервал M_i превосходит "самый большой из интервалов M_j", $j \neq i$. Здесь вполне естественно вводится расширенный оператор $\widetilde{\max}$: по формулам (25) — (28) можно построить четыре показателя превосходства, сравнивая Mj с $\widetilde{\max}_{j \neq i} M_j$:

$$PSE(M_i) = \Pi_{M_i}([\widetilde{\max}_{j \neq i} M_j, +\infty)) \quad \text{(возможность превосходства);}$$

$$PS(M_i) = \Pi_{M_i}((\widetilde{\max}_{j \neq i} M_j, +\infty)) \quad \text{(возможность строгого превосходства);}$$

$$NSE(M_i) = N_{M_i}([\widetilde{\max}_{j \neq i} M_j, +\infty)) \quad \text{(необходимость превосходства);}$$

$$NS(M_i) = N_{M_i}((\widetilde{\max}_{j \neq i} M_j, +\infty)) \quad \text{(необходимость строгого превосходства).}$$

Тогда множество M_1, .., M_n можно упорядочить по значениям каждого показателя. Таким образом можно получить четыре отношения линейного порядка, которые при условии их согласованности позволяют определить результирующее упорядочение. Однако в силу неточности данных эти четыре показателя необязательно дадут одно и то же упорядочение (см. пример далее). Отметим, что выражение для первого показателя можно упростить, приводя его к виду $PSE(M_i) = \min_{j \neq i} \Pi_{M_i}([M_j, +\infty))$.

Точно так же можно определять, насколько все другие нечеткие интервалы доминируют над нечетким интервалом M_i с помощью операции min, заменяя в выражениях для показателей $PSE(M_i)$, $PS(M_i)$, $NSE(M_i)$, $NS(M_i)$ величину M_i на $\widetilde{\min}_{j \neq i} M_j$ и величину $\widetilde{\max}_{j = i} M_j$ на M_i.

8.2.4. Применение в информатике

Задача непосредственного вычисления значений четырех показателей сравнения сводится к отысканию координат точек пересечения соответствующих функций принадлежности. Когда имеются нечеткие интервалы (L-R)-типа, т. е. $P = (\underline{p}, \overline{p}, \alpha, \beta)_{LR}$, а $Q = (\underline{q}, \overline{q}, \gamma, \delta)_{LR}$, то должны решаться следующие уравнения:

найти значение u_1, такое, что

$$R(\frac{u_1 - \overline{p}}{\beta}) = L(\frac{\underline{q} - u_1}{\gamma}) = Pos(\overline{X} \geqslant \underline{Y})$$

(пересечение правой части функциипринадлежности μ_p и левой части функции принадлежности μ_Q) ;
найти значение u_2, такое, что

$$L(\frac{\underline{p} - u_2}{\alpha}) = 1 - L(\frac{\underline{q} - u_2}{\gamma}) = Nec(\underline{X} \geqslant \underline{Y})$$

(пересечение левых частей,функцийпринадлежности μ_p и μ_Q) ;
найти значение u_3, такое, что

$$1 - R(\frac{u_3 - \overline{p}}{\beta}) = R(\frac{u_3 - \overline{q}}{\delta}) = Pos(\overline{X} > \overline{Y})$$

(пересечение правых частей функций принадлежности μ_p и μ_Q) ;
найти значение u_4, такое, что

$$L(\frac{\underline{p} - u_4}{\alpha}) = R(\frac{u_4 - \overline{q}}{\delta}) = Nec(\underline{X} > \overline{Y})$$

(пересечение левой части функции принадлежности μ_p и правой части функции принадлежности μ_Q) .
Программа позволяет вычислять вышеперечисленные показатели для случая нечетких трапециевидных интервалов $(L(u) = R(u) = \max(0, 1 - u))$. Легко получить следующие выражения для показателей сравнения, рассматриваемых какфункции от модальных значений и крэффициентов нечеткости двух нечетких интервалов:

$$Pos(\overline{X} \geqslant \underline{Y}) = \max(0, \min(1, 1 + (\overline{p} - \underline{q})/(\beta + \gamma))) \qquad (PSE);$$

$$Nec(\underline{X} \geqslant \underline{Y}) = \max(0, \min(1, (\underline{p} - \underline{q} + \gamma)/(\alpha + \gamma))) \qquad (NSE);$$

$$Pos(\overline{X} > \overline{Y}) = \max(0, \min(1, (\overline{p} - \overline{q} + \beta)/(\beta + \delta))) \qquad (PS);$$

$$Nec(\underline{X} > \overline{Y}) = \max(0, \min(1, (\underline{p} - \overline{q})/(\alpha + \delta))) \qquad (NS).$$

Эти формулы не справедливы тогда, когда суммы коэффициентов нечеткости в знаменателях вышеприведенных выражений равны нулю (случай, когда P и Q - обычные замкнутые интервалы). Если один из этих знаменателей обращается в нуль, то рассчитываются фиктивные коэффициенты нечеткости, которые заменяют нулевые коэффициенты нечеткости, чтобы обеспечить существование искомых точек пересечения. Во избежание искажений результатов требуется, чтобы эти точки пересечения имели ординату, расположенную вне интервала [0, 1] (теоретически точки пересекаются в бесконечности). Для этого фиктивные коэффициенты нечеткости должны иметь такое значение ϵ, что $\epsilon > \epsilon_0 = {}^1\!/_2 \min(|\underline{p} - \underline{q}|, |\underline{p} - \overline{q}|, |\overline{p} - \underline{q}|, |\overline{p} - \overline{q}|)$.

При $\epsilon_0 = 0$:

если $\overline{p} = \underline{q}, \beta + \gamma = 0$, то при вычислении величины $\mathrm{Pos}(\overline{X} \geqslant \underline{Y})$ коэффициенты β и γ можно заменить любыми положительными числами;

если $\underline{p} = \overline{q}, \alpha + \delta = 0$, то при вычислении величины $\mathrm{Nec}(\underline{X} > \overline{Y})$ коэффициенты α и δ можно заменить любыми положительными числами;

если $\underline{p} = \underline{q}, \alpha + \gamma = 0$, то, как это проверяется по теоретическим формулам, $\mathrm{Nec}(\underline{X} \geqslant \underline{Y}) = 0$;

если $\overline{p} = \overline{q}, \beta + \delta = 0$, то, как это проверяется по теоретическим формулам, $\mathrm{Pos}(\overline{X} > \overline{Y}) = 0$.

8.2.5. Иллюстративный пример

Рассмотрим три нечетких интервала, изображенных на рис. 16, которые ограничивают области определения трех переменных x_1, x_2, x_3 соответственно.

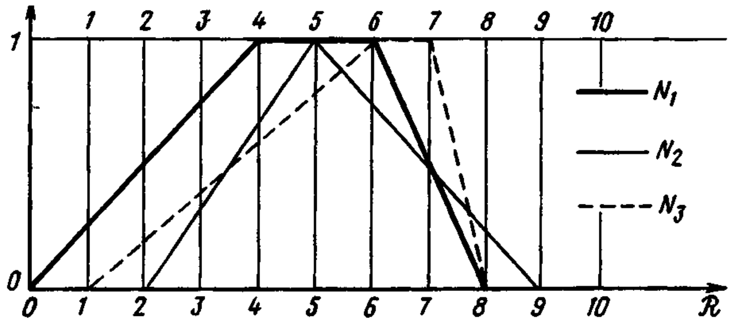


Рис. 16

Задача состоит в определении того, насколько каждый нечеткий интервал больше других. Вычисление четырех вышеназванных показателей дает следующие результаты.

Таблица 4

Интервалы	PSE	PS	NSE	NS
N_1	1	$^1/_3$	$^2/_7$	0
N_2	$^8/_9$	$^2/_5$	$^1/_2$	0
N_3	1	$^3/_5$	$^1/_2$	0

Ввиду наложения этих интервалов друг на друга ни один из них строго не доминирует другой необходимым образом (NS = 0). Упорядочение по показателю PS четко отражает тот факт, что максимальные значения, которые можно присвоить переменной x_3 в общем случае, больше тех, которые можно присвоить другим переменным. Упорядочение по показателю NSE выделяет в качестве наибольшего интервал N_1, а упорядочение по показателю PSE — нечеткий интервал N_2. В итоге, как это видно из рис. 16, получаем, что N_3 может считаться самым большим из рассматриваемых нечетких интервалов.

8.2.6. Применение к задачам планирования работ с кумулятивными ограничениями

Рассмотрим вновь пример, приведенный ранее, в котором производится расчет самого раннего и самого позднего сроков начала работ. Эти работы образуют частично упорядоченное множество, а их выполнение сопряжено с задержками. Предположим, что при выполнении каждой работы требуется использовать некоторый ресурс заданного типа, например некоторую машину, имеющуюся в единственном экземпляре. Пусть $\mathcal{M}$ — множество машин, а m_k — конкретная машина, предназначенная для выполнения работы k. Предполагается, что данная работа выполняется непрерывно и что на одной машине может одновременно выполняться только одна работа. Пусть k и 1 — две такие работы, что $m_k = m_l$ и они не могут выполняться одновременно, даже если нет никакого априорного ограничения на порядок их выполнения. Пусть t_k — самый ранний, а I_k — самый поздний сроки начала k-й работы, обусловленные возможностью задержек. Пусть d_k — продолжительность выполнений k-й работы. Таким образом, работа k неявно характеризуется интервалом ("окном") времени $I_k = [t_k, F_k]$, в течение которого она должна быть выполнена, где $F_k = T_k + d_k$. По относительному положению нтервалов $[t_k, F_k]$ и $[t_l, F_l]$, характеризующих работы k и 1, а также по продолжительности этих работ можно вывести ограничение на порядок следования k и 1 или установить факт невозможности их выполнения, когда соответствующие "окна" слишком узки или чересчур сильно перекрываются. Этот анализ проводится следующим образом:

1. Если $d_k + d_l > \max(F_k - t_l, F_l - t_k)$, то "окно" времени $I_k \cup I_l$ слишком узко для выполнения двух задач. Налицо полная противоречивость исходных требований, и в этом случае следует пересмотреть ограничения по отсрочке работ.

2. Если $\min(F_k - t_l, F_l - t_k) < d_k + d_l \leqslant \max(F_k - t_l, F_l - t_k)$, то вводится ограничение на порядок выполнения работ k и 1. При $F_k - t_1 \geq F_1 - t_k$ получаем, что работа 1 должна выполняться перед работой k (рис. 17).

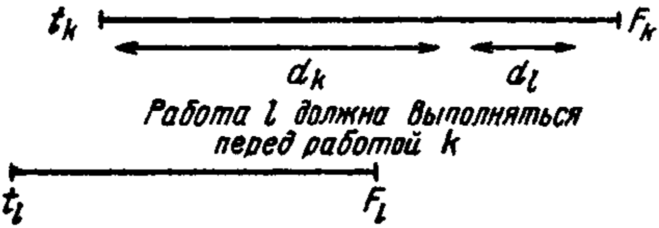


Рис. 17

Этот результат тривиален, если $F_l \leqslant t_k$, поскольку тогда $I_k \cap I_l = \varnothing$ и интервал времени I_1 целиком предшествует интервалу I_k.

3. Если $d_k + d_l \leqslant \min(F_k - t_l, F_l - t_k)$, то работы могут выполняться в любом порядке. Однако при $F_k - t_1 > F_1 - t_k$ выполнение этих работ в порядке: сначала 1, затем k — позволяет сохранить больший резерв времени.

Когда установлено, что работа 1 должна предшествовать работе k, можно уменьшить ширину "окон"; тогда интервал I_k принимает вид $[\max(t_k, t_l + d_l), F_k]$, а интервал I_1 — вид $[t_l, \min(F_l, F_k - d_k)]$.

Эти условия использованы в системе планирования OPAL в качестве основного принципа построения временных ограничений.

Их можно обобщить на случай, когда самый ранний срок начала работ t_k и величина F_k — нечеткие интервалы, а d_k — нечеткие продолжительности работ.

Приходим к задаче определения положения нечеткого числа $S = d_k \oplus d_l$ по отношению к двум нечетким интервалам $L_{kl} = F_k \ominus t_l$ и $L_{lk} = F_l \ominus t_k$, изображенным на рис. 18.

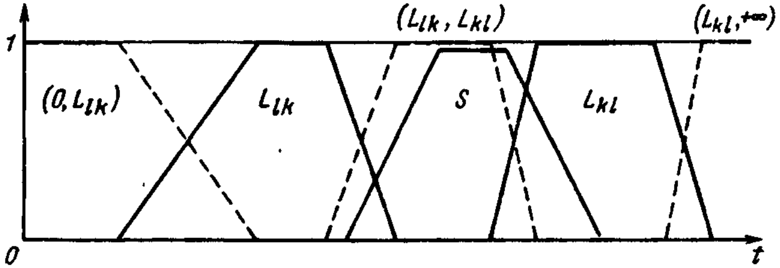


Рис. 18

Сначала рассмотрим те случаи, когда с определенностью можно заключить, что, невзирая на неточность данных, рассматриваемая задача сводится к одному из случаев 1, 2 или 3. Пусть $s = d_l + d_k, x_{kl} = F_k - t_l, x_{lk} = F_l - t_k$. Требуетсяо ценить величины $N_S((\widetilde{\max}(L_{kl}, L_{lk}), +\infty)), N_S((\widetilde{\min}(L_{kl}, L_{lk}),$

$$\widetilde{\max}(L_{lk}, L_{kl}))), N_S([0, \widetilde{\min}(L_{kl}, L_{lk})).$$

Для упрощения изложения положим, что $\widetilde{\max}(L_{kl}, L_{lk}) = L_{kl}$. Тогда ищутся значения

$$N_S((L_{kl}, +\infty)),\ N_S((L_{lk}, L_{kl})), N_S([0, L_{lk})).$$

В этих трех показателях содержится вся информация о нечетких интервалах L_{kl} и L_{lk}. Более того, хотя бы один из них не равен нулю, так как три множества $(L_{kl}, +\infty)$, (L_{lk}, L_{kl}) и $[0, L_{lk})$ попарно не пересекаются. Следовательно, либо приходим к одному из случаев 1, 2, 3, либо различение нечетких интервалов невозможно.

В последней ситуации можно вычислить показатели наложения S на границы нечетких интервалов L_{lk} и L_{kl}, т. е.

$$\Pi_S((L_{kl}, +\infty)), \Pi_S((L_{lk}, L_{kl})), \Pi_S([0, L_{lk})).$$

Неравенство $\Pi_S((L_{kl}, +\infty)) > 0$ означает, что остается возможность существования полного противоречия между требованиями, а неравенство $\Pi_s([0, L_{1k})) > 0$ означает, что нельзя с определенностью наложить какое-то ограничение на порядок выполнения работ.

В табл. 5 анализируются различные крайние случаи.

Таблица 5.

Случай ненулевых показателей

	$\Pi_S((L_{kl}, +\infty))$	$\Pi_S((L_{lk}, L_{kl}))$	$\Pi_S([0, L_{lk}))$	Описание
1	1	1	1	Нечеткое число S слишком неточно, для того чтобы сделать определенное заключение
2	1	1	0	Предшествование или противоречие
3	1	0	1	Невозможная ситуация
4	1	0	0	Потенциальное противоречие
5	0	1	1	Противоречия нет
6	0	1	0	Потенциальное предшествование
7	0	0	1	Любой порядок
8	0	0	0	Нечеткое число S вложено в ядро $(L_{kl} \cup L_{lk})$

Практически можно выражать 1 термином "сильный", а 0 — термином "слабый".

В случае, когда получаем тройку показателей (0, 0,0), мы должны найти значения $\Pi_s(L_{kl})$ и $\Pi_s(L_{lk})$. Если $\Pi_s(L_{lk}) > 0$, то существует равновесие между порядком выполнения работ во времени и его отсутствием. Если же $\Pi_s(L_{kl}) > 0$, то существует равновесие между порядком выполнения работ и противоречивостью соответствующих требований, невзирая на степень точности значений продолжительности работ. Эти случаи резко отличаются от представленных в табл. 5 случаев 1, 2 и 5, где неопределенность решения обусловлена плохим знанием величины $d_k + d_l$.

Представляет особый интерес случай, когда продолжительности работ точно известны, а отсрочки определены неточно. Такой случай часто встречается на практике в задачах планирования работы предприятий, когда задержки определяются весьма приближенно с помощью программного обеспечения управления производством. В данном случае истинные ограничения по времени задержки работы будут выражаться следующим образом:

самый *ранний срок* начала работ t_0: множество работ нельзя начать раньше момента времени t_0^-, но определенно можно начать после момента $\bar{t}_0$;

самый *поздний срок* окончания работ T_w: множество работ предпочтительнее окончить к моменту времени $\bar{T}_w$, но никак не позже T^+_w. Величины t_0 и T_w - нечеткие числа вида $(\bar{t}_0, \bar{t}_0 - t_0^-, 0)_{LR}$ и $(\bar{T}_w, 0, T^+_w - \bar{T}_w)_{LR}$, где для простоты считается, что L и R -

линейные функции. Учитываяэти величины задержек по методу, описанному ранее, получаем для каждой работы к трапециевидное временное "окно", ограниченное двумя нечеткими числами (рис. 19) t_k и F_k, индуцируемыми величинами t_0 и T_w соответственно.

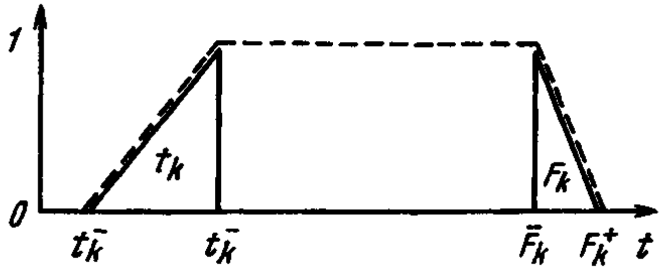


Рис. 19. "Окно", назначаемое для задачи k

Здесь $[t_k, F_k]$ - нечеткий интервал $(\bar{t}_k, \bar{F}_k, \bar{t}_k - t_k^-, F_k^+ - \bar{F}_k)$, а (t_k, F_k) - нечеткий интервал $(\bar{t}_k, \bar{F}_k)$.Легко вычислить

$$L_{lk} = (\bar{F}_l, 0, F_l^+ - \bar{F}_l) \ominus (\bar{t}_k, \bar{t}_k - t_k^-, 0) = (\bar{F}_l - \bar{t}_k, 0, F_l^+ - F_l + \bar{t}_k - t_k^-),$$

$$L_{kl} = (\bar{F}_k - \bar{t}_l, 0, F_k^+ - \bar{F}_k + \bar{t}_l - t_l^-).$$

Это позволяет перейти от рис. 18 к рис. 20.

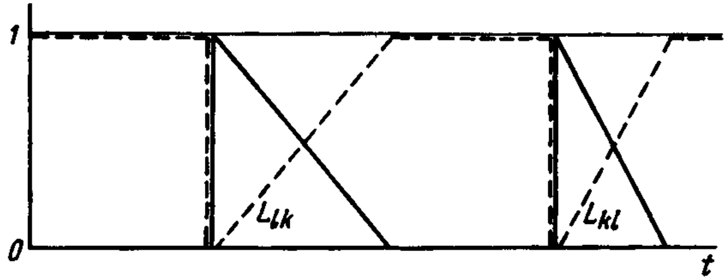


Рис. 20

Когда $S = d_k + d_l$ — точное число, можно убедиться в том, что три показателя определенности (необходимости) $N_S([0, L_{lk}))$, $N_S((L_{lk}, L_{kl}))$ и $N_S([L_{kl}, +\infty))$ совпадают с тремя соответствующими показателями возможности. Они равны соответственно степеням принадлежности

$\mu_{[0,\,L_{lk})}(S)$, $\mu_{(L_{lk},\,L_{kl})}(S)$ и $\mu_{(L_{kl},\,+\infty)}(S)$.

Обозначим

$\mu_{lk} = \mu_{[0,\,L_{lk}]}(S)$; $\mu_{kl} = \mu_{[0,\,L_{kl}]}(S)$.

Очевидно, что три показателя вычисляются по функциям принадлежности μ_{lk} и μ_{kl}:

$$\mu_{[0,\,L_{lk})}(S) = \begin{cases} 1, \text{ если } \mu_{lk} = 1 \text{ (кроме случая, когда } S = \overline{\overline{F}}_l - \overline{t}_k); \\ 0 \text{ в противном случае;} \end{cases} \quad (31)$$

$$\mu_{(L_{lk},\,L_{kl})}(S) = \begin{cases} 1 - \mu_{lk}, \text{ если } \mu_{kl} = 1 \text{ (кроме случая, когда } S = \overline{\overline{F}}_k - \overline{t}_l); \\ 0 \text{ в противном случае;} \end{cases}$$

(32)

$$\mu_{(L_{kl},\,+\infty)}(S) = 1 - \mu_{kl}.$$

Тогда удобнее рассматривать относительное положение нечетких величин S, L_{1k} и L_{kl} как функцию лишь μ_{lk} и μ_{kl}. Замечая, что величина μ_{lk} есть степень, с которой S меньше или равно L_{lk}, можно ввести следующие оценки:

1) степень уверенности в том, что исходные требования полностью противоречивы, т. е. $S > L_{kl}$ и $S > L_{lk}$; ее выражают с помощью показателя $C = \min(1 - \mu_{kl},\, 1 - \mu_{lk})$;

2) степень уверенности в том, что работа 1 должна выполняться перед работой к, т. е. $L_{kl} \geqslant S \geqslant L_{lk}$, соответствующий показатель имеет вид $P(l < k) = \min(\mu_{kl},\, 1 - \mu_{lk})$ или аналогично $P(k < l) = \min(\mu_{lk},\, 1 - \mu_{kl})$, причем величина max(P(1<k), P(k<1)) характеризует степень уверенности в существовании ограничения на порядок следования работ k и 1;

3) степень уверенности в том, что порядок следования работ k и 1 не имеет значения; ее выражают показателем

$$P(l \sim k) = 1 - \max(P(l < k),\, P(k < l)).$$

Спорная ситуация может возникнуть при анализе местонахождения точки с координатами $(\mu_{kl},\, \mu_{lk})$ в единичном квадрате (рис. 21).

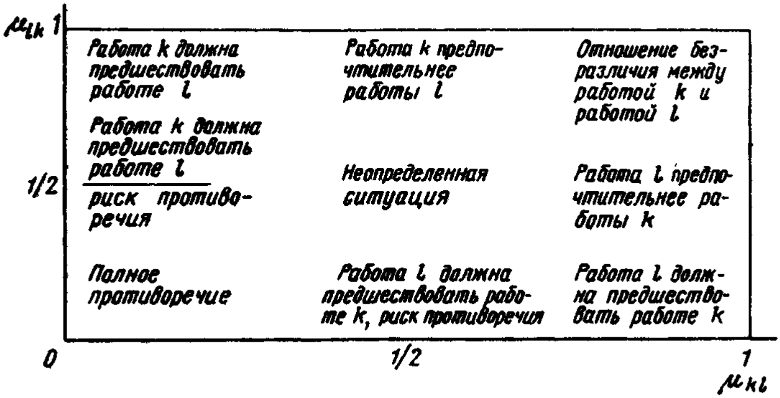


Рис. 21

Отметим, что в соответствии с формулами (31) - (33) три стороны этого квадрата соответствуют трем строкам табл. 5, т. е. парам (0, 0) из четвертой строки, (0, 1) из шестой строки и (1, 1) из седьмой строки, в то время как наличие пары (1,0) предполагает, что мы поменяли местами L_{kl} и L_{lk} по отношению к рис. 18 и 20.

Если $\mu_{lk} = \mu_{lk} = 0,5$,то это указывает на то, что нечеткие числа L_{kl} и L_{lk} накладываются друг на друга, а величина S находится внутри носителя их пересечения. Тогда ничего нельзя предсказать ввиду неточности значений времени задержки. Этот способ анализа наложения друг на друга временных "окон" может оказаться полезным для представления реальной информации о задержках в изготовлении продукции при построении систем программного обеспечения предварительного планирования работ, подобных системе OPAL.

9. Модели приближенных рассуждений для экспертных систем

В экспертных системах, разрабатываемых специалистами в области искусственного интеллекта, факты и/или правила часто могут содержать неопределенность или неточность.

Долгое время байесовская модель была единственным количественным подходом к решению задачи логического вывода в условиях неопределенности. Предложен ряд математических моделей анализа неопределенности, которые существенно отличаются от вероятностных моделей, в частности теория функций доверия Шейфера и теория возможностей. В то же время исследователи и разработчики в области искусственного интеллекта, испытывая необходимость в альтернативе стандартной байесовской модели, предложили модели более эмпирического характера, в частности применяемые в экспертных системах MYCIN и PROSPECTOR. В этой главе делается попытка дать общий обзор ряда дедуктивных подходов, которые теоретически обоснованы и не являются вероятностными в чистом виде. Первая часть данной главы дополняет тему, посвященную различным моделям неточности и неопределенности, обобщающими понятия вероятности и возможности. Затем в двух последующих разделах рассматриваются два основных механизма вывода в экспертных системах, а именно механизмы дедуктивного вывода и комбинирования информации, поступающей от различных источников, ири наличии неопределенных или неточных посылок.

9.1. Замечания о моделировании неточности и неопределенности

В данной главе информация представлена в виде логических высказываний, обозначаемых p, q или r. Теоретико-множественные обозначения используются лишь в том случае, когда стремятся представить содержание высказываний, которое во многих случаях является неточным. Таким образом, будем рассматривать множество высказываний $\wp$, таких, что:

1) если $p \in \wp$, то $\neg p \in \wp$ (где $\neg$— логическое отрицание);

2) если $p \in \wp, q \in \wp$, то $p \wedge q \in \wp$ (где $\wedge$ - символ конъюнкции). Будем обозначать всегда ложное высказывание символом $0 = p \wedge \neg p$, а всегда истинное высказывание — символом $1 = \neg(p \wedge \neg p)$. Очевидно, что $0 \in \wp$, $1 \in \wp$. Тогда множество $\wp$ вместе с операциями $\neg, \wedge, \vee$ (где $\vee$— операция дизъюнкции, определяемая в виде $p \vee q = \neg(\neg p \wedge \neg q)$ образует булеву решетку *классической логики* высказываний. Импликация обозначается → и как обычно определяется в виде $p \to q = \neg p \vee q$. Говорят, что p влечет за собой q, если $p \to q = 1$. Когда $p \wedge q = 0$, то высказывания p и q называются несовместимыми, поскольку если одно из них истинно, то другое ложно; более того,

условие $p \wedge q = 0$ эквивалентно условию $p \to \neg q = 1$, т. е. "р влечёт за собой $\neg q$".

9.1.1. Доверие и правдоподобность

Здесь предполагается, что $\mathcal{P}$— конечное множество.
В вероятностной логике **Р**(р) — вероятность того, что высказывание р истинно, и $P(\neg p)$— вероятность того, что высказывание р ложно, связаны между собой условием $P(p) + P(\neg p) = 1$. Так, если $P(p) = 0$, то $P(\neg p) = 1$; если априори ничего не известно об истинности или ложности высказывания р, то естественно принять $P(p) = P(\neg p) = 0{,}5$. Однако, как только мы имеем дело более чем с двумя альтернативами (попарно несовместимыми), становится трудно представить "полное незнание", поскольку, какое бы ни было распределение вероятностей, некоторые высказывания (отличные от всегда истинного высказывания 1) будут более вероятными, чем другие (отличные от всегда ложного высказывания 0), что выглядит парадоксальным с позиции полного незнания.
Ряд исследований привел к построению невероятностных мер неопределенности (квазимер), причем все из них обладают следующими интуитивно обоснованными минимальными свойствами.
Пусть g — отображение из $\mathcal{P}$ в [0,1], удовлетворяющее следующим аксиомам:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ g(0) = 0; \\ 2)\ g(1) = 1; \\ 3)\ \text{если высказывание p влечет высказывание q, то } g(p) \leqslant g(g). \end{array}\right\} \quad (1)$$

Эти аксиомы определяют класс *мер неопределенности,* рассмотренных ранее.
Однако аксиомы (1) характеризуют слишком широкое семейство мер неопределенности, вычисления в котором проводить затруднительно.
В раде работ введен более узкий класс мер доверия (удовлетворяющих аксиомам (1)), которые могут выражаться на основе функции m^1 из $\mathcal{P}$ в [0, 1], такой, что

$$m(0) = 0,$$
$$\sum_{p \in \mathcal{P}} m(p) = 1. \quad (2)$$

Тогда мера доверия Cr, определяемая на основе функции m, выражается в виде

$$\forall q \in \mathcal{P},\ Cr(q) = \sum_{p \text{ влечет } q} m(p). \tag{3}$$

Значение m(p) характеризует степень доверия, связанную с высказыванием p, и только с ним. Мера доверия Cr(q) к высказыванию q получается как сумма степеней доверия к высказываниям, из которых следует q. Здесь m — не мера неопределенности (так как она не удовлетворяет аксиомам (1)), а относительный вес. Высказывания p, для которых m(p) > 0, называются *фокальными высказываниями.*

Тогда по принципу двойственности можно определить меру правдоподобности P1 на основе меры Cr:

$$\forall p \in \mathcal{P},\ Pl(p) = 1 - Cr(\neg p), \tag{4}$$

которую также можно выразить через функцию m:

$$\forall q \in \mathcal{P}, Pl(q) = \sum_{p \text{ не влечет } q} m(p). \tag{5}$$

В ряде работ показано, что функции Cr и P1 удовлетворяют соответственно условиям (3) и (5) для весовой функции m, определяемой аксиомами (2), тогда, и только тогда, когда они являются соответственно супераддитивными и субаддитивными порядка n, где n — целое положительное число. При n = 2 эти свойства записываются в виде

$$Cr(p \vee q) \geqslant Cr(p) + Cr(q) - Cr(p \wedge q) \text{ (супераддитивность)};$$
$$Pl(p \wedge q) \leqslant Pl(p) + Pl(q) - Pl(p \vee q) \text{ (субаддитивность)}.$$

Тогда выполняются условия

$$\forall p \in \mathcal{P}, Cr(p) + Cr(\neg p) \leqslant 1; \quad (6),$$
$$\forall p \in \mathcal{P}, Pl(p) + Pl(\neg p) \geqslant 1. \quad (7)$$

Таким образом, в случае полного незнания будем иметь значения $Cr(p) = Cr(\neg p) = 0$ и $Pl(p) = Pl(\neg p) = 1;$ два противоположных высказывания могут показаться правдоподобными, хотя ни одно из них не внушает доверия. Более того, из формул (3) и (5) ясно, что

$$\forall p \in \mathcal{P}, Cr(p) \leqslant Pl(p). \tag{8}$$

Правдоподобность некоторого высказывания всегда больше, чем доверие к нему, что, видимо, удовлетворяет нашим интуитивным представлениям, чему также удовлетворяет и выражение (4), которое

показывает, что всякое высказывание вызывает тем большее доверие, чем менее правдоподобным выглядит противоположное высказывание.
Следует заметить, что если каждое фокальное высказывание несовместимо с любым не следующим из него высказыванием, то меры доверия и правдоподобности, определяемые формулами (3) и (5), совпадают. Это условие несовместимости формально записывается в виде

$$\forall p \in \{P1m(p) > 0\}, \quad \forall q, \text{ если } p \to q \neq 1, \text{ то } p \wedge q = 0. \qquad (9)$$

С учетом свойств субаддитивности мер правдоподобности Р1 и супераддитивности мер доверия Cr равенство Р1 и Cr означает, что полученная мера неопределенности есть вероятностная мера Р.
Если назвать "элементарным высказыванием" высказывание р, которое не следует ни из какого другого высказывания, кроме самого себя, и всегда ложного высказывания, то, обозначая логическую эквивалентность ↔, имеем

$$\forall q \neq 0, \text{ если } q \leftrightarrow p \neq 1, \text{ то } q \to p \neq 1. \qquad (10)$$

Условие (9) эквивалентно тому, что всякое фокальное высказывание элементарно. Следовательно, свойство $Pl = Cr = P$ эквивалентно тому, что все фокальные высказывания элементарны (а значит, несовместимы). Этот результат представляет собой изложение на языке логики свойства специфичности вероятностных мер, обсуждавшегося ранее.
Помимо вероятностей существует другой важный частный случай мер доверия и правдоподобности: меры необходимости и возможности.
Если n фокальных высказываний p_i согласованы между собой, т. е. их можно упорядочить таким образом, что р влечет $p_{n-1}, \dots,$ а p_2 влечет p_1, то можно показать, что

$$\forall p \in \mathcal{P}, \forall q \in \mathcal{P}, Cr(p \wedge q) = \min(Cr(p), Cr(q)); \qquad (11)$$

$$\forall p \in \mathcal{P}, \forall q \in \mathcal{P}, Pl(p \vee q) = \max(Pl(p), Pl(q)). \qquad (12)$$

Здесь мы вновь узнаем уже встречавшиеся в этой работе меры необходимости и возможности как частные случаи мер доверия и правдоподобности соответственно, причем их аксиомы выражены здесь скорее в логических терминах, чем с позиции частоты появления событий. Напомним свойство

$$\begin{aligned} &\forall p \in \mathcal{P}, \Pi(p) < 1 \Rightarrow N(p) = 0, \\ &N(p) > 0 \Rightarrow \Pi(p) = 1, \end{aligned} \qquad (13)$$

которое означает, что произвольное высказывание классической логики (т.е. такое высказывание, для которого справедливы условия

$p \wedge \neg p = 0$ и $p \vee \neg p = 1$) может быть необходимым (достоверным), лишь когда оно вполне возможно.

Замечание 1. В вероятностной логике событие, которое происходит с вероятностью, равной 1, считается достоверным. Это отнюдь не так для события, возможность появления которого равна 1, поскольку возможность противоположного события также может быть равной 1. Напротив, если необходимость некоторого события равна 1, то оно может рассматриваться как достоверное, причем необходимость противоположного события, а также его возможность равны 0.

Замечание 2. Предположим, что задана весовая функция m на $\mathcal{P}$, определяемая аксиомами (2) и относящаяся к фокальным высказываниям. Пусть σ — функция, которая ставит в соответствие каждому фокальному высказыванию p некоторое элементарное высказывание σ(p), такое, что $\sigma(p) \to p = 1$, а P_σ — вероятностная мера, порожденная функцией распределения m_σ:

$$\forall q, m_\sigma(q) = \begin{cases} m(p), \text{ если } q = \sigma(p), \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда можно убедиться в том, что $\forall \sigma, \forall p \in \mathcal{P}, Cr(p) \leqslant P_\sigma(p) \leqslant Pl(p)$. Это согласуется с интуитивным представлением о том, что высказывание, заслуживающее доверия, должно быть вероятным, а вероятное высказывание — правдоподобным.

9.1.2. Разложимые меры неопределенности

Имеется еще один вид вероятностных мер, мер возможности и необходимости - так называемые разложимые (декомпозируемые) меры неопределенности, которые удовлетворяют следующим аксиомам (здесь множество высказываний $\mathcal{P}$ предполагается конечным):

$$g(0) = 0; \quad g(1) = 1;$$
$$\exists \perp, p \wedge q = 0 \Rightarrow g(p \vee q) = g(p) \perp g(q), \tag{14}$$

где $\perp$ - некоторая внутренняя операция на [0,1]. Аксиомы (14) выражают естественное предположение о том, что степень доверия к высказыванию: "p или q" — зависит лишь от соответствующих степеней доверия к высказываниям p и q в отдельности, когда p и q несовместимы. Поскольку множество высказываний $\mathcal{P}$ наделено структурой булевой решетки, а функция множества g монотонна, то это приводит к выбору операции $\perp$ в классе треугольных конорм, уже рассмотренных в гл. 8. В частности, если выбирается треугольная конорма $\perp = \max$, то g оказывается мерой возможности, а если $\perp$ — ограниченная сумма $(u * v = \min(1, u + v)$ и выполняется условие нормировки

$$\Sigma \{g(p) \mid p - \text{элементарное высказывание}\} = 1,$$

то g — вероятностная мера. Общим свойством разложимых мер неопределенности является возможность их исчерпывающего описания на основе некоторой треугольной конормы $\perp$ и их значений на элементарных высказываниях, так как любое высказывание может рассматриваться как дизъюнкция элементарных высказываний, из которых оно следует.

Всякая разложимая мера неопределенности g имеет двойственную ей меру неопределенности g_c, определяемую условием $\forall p,\ g_c(p) = c(g(\neg p))$, где c — операция дополнения (см. разд. 8.1.2). Тогда мера g_c строится на основе треугольной нормы *, такой, что $u * v = c(c(u) \perp c(v))$, и выполняется аксиома, двойственная аксиомам (14):

$$\forall p, q, p \vee q = 1 \Rightarrow g_c(p \wedge q) = g_c(p) * g_c(q), \quad (15)$$

которая напоминает аксиому, определяющую меры необходимости, получаемую из аксиомы (15) при * = min. Замечая, что из аксиом (14) следует свойство $g(p) \perp g(\neg p) = 1$, класс разложимых мер неопределенности можно разделить на два подкласса.

1. Разложимые меры неопределенности, для которых знание величины g(p) полностью определяет значение $g(\neg p)$. Такие меры неопределенности являются двойственными самим себе $(\exists c,\ g_c = g)$ и одновременно удовлетворяют аксиомам (14) и (15). Их типичный представитель — вероятностная мера.

2. Разложимые меры неопределенности, для которых $g(\neg p)$ не всегда выводимо из g(p). В частности, это меры неопределенности, полученные с помощью операции взятия максимума или строгой конормы $u \perp v = u + v - u \cdot v$ (см. разд. 8.1.2); они удовлетворяют требованию $\max(g(p), g(\neg p)) =1$, что роднит их с мерами возможности. В общем случае такие меры отличаются от двойственных им мер, которые сродни мерам необходимости.

9.1.3. Расплывчатые высказывания

Содержание высказывания p вида: "X принимает свои значения на множестве A" или кратко: "X есть A" — задает точное или неточное определение значения переменной X на множестве рассуждений S с помощью предиката A, который соответствует некоторому подмножеству множества S. В частности, каждое элементарное высказывание $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ можно представить в виде: "X принимает значение s", где $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$, и обозначить p_1. Такое высказывание называется точным по отношению к базовому множеству S. Следовательно, любое неэлементарное высказывание p, отличное от всегда ложного высказывания **0**, является неточным по отношению к множеству S. Поэтому здесь рассматривается логическая система $(\mathcal{P}, \neg, \wedge, \vee)$ или в теоретико-множественных обозначениях $(\mathcal{P}(\mathbf{S}), {}^{-}, \cap, \cup)$, где $\mathcal{P}(\mathbf{S})$ — множество всех подмножеств S. В таком случае запись $\mathbf{0} = \text{"X есть } \varnothing\text{"}$ означает, что "X не принимает свои значения из множества рассуждений S", что, конечно, всегда ложно, так как противоречит исходному определению, а **1** соответствует тривиальному утверждению: "Переменная X принимает свое значение на множестве S".

Если задана мера возможности П, оценивающая степень еопределенности высказываний из $\mathcal{P}$, то можно записать

$$\forall \mathbf{p},\ \Pi(\mathbf{p}) = \sup\{\Pi(\mathbf{p_s}) \perp \mathbf{p_s} \to \mathbf{p} = \mathbf{1}\}. \qquad (16)$$

Функция распределения возможностей $\{\Pi(\mathbf{p_s}),\ \mathbf{s} \in \mathbf{S}\}$, характеризующая меру возможности П, может интерпретироваться как расплывчатое высказывание вида: "X есть A", где A — нормальное нечеткое подмножество множества S, определяемое как

$$\mu_A(s) = \Pi(p_s) \triangleq \pi_X(s).$$

Обозначение π_X подчеркивает, что переменная связана с высказываниями. В частности, если $\forall \mathbf{p},\ \Pi(\mathbf{p}) \in \{0, 1\}$, то мера возможности П эквивалентна высказыванию классической логики $q = \vee\{p_s \mid s \in A\}$ с $A = \{s \mid \pi_X(s) = 1\}$.

На практике задание функции распределения возможностей π_X на множестве рассуждений S соответствует как представлению смысла некоторого расплывчатого предиката ("большой", "молодой", "тяжелый"), так и указанию множества взаимно исключающих альтернатив, взвешенных по предпочтительности с помощью их относительных степеней возможности (без определения самого предиката в явном виде). Кроме того, мы видели выше, что задание распределения возможностей π_X эквивалентно заданию множества согласованных между собой альтернатив, которые взвешены по степеням вероятности.

9.1.4. Оценка степени истинности произвольного высказывания

Степень истинности высказывания можно рассматривать как меру соответствия содержания этого высказывания содержанию наших знаний о реальной действительности (которые в некоторых случаях могут быть неполными). Содержание высказывания: "X есть F", - которое требуется оценить, и содержание базового высказывания: "X есть A" — представлены соответствующими функциями распределения возможностей μ_F и μ_A, которые выражают ограничения, наложенные этими высказываниями на значения переменной X. Возможность и необходимость того, что при условии: "X есть A"— высказывание: "X есть F" — истинно, можно оценить по формулам

$$\Pi(F, A) = \sup_{s \in S} \min(\mu_F(s), \mu_A(s)) = \Pi(A, F), \tag{17}$$

$$N(F, A) = \inf_{s \in S} \max(\mu_F(s), 1 - \mu_A(s)), \tag{18}$$

которые характеризуют соответственно возможность и необходимость нечеткого события F, вычисленные по функции распределения возможностей $\pi_X = \mu_A$

Отметим, что, когда наши знания являются точными, т. е. полными (а следовательно, множество A — одноточечное подмножество $\{s_0\}$ множества S), из формул (17) и (18) следует, что

$$\Pi(F, A) = N(F, A) = \mu_F(s_0). \tag{19}$$

В то же время, если F — обычное множество, т. е. "X есть F" — четкое, а не расплывчатое высказывание, то независимо от природы A

$$\Pi(F, A) = 1 \text{ или } N(F, A) = 0. \tag{20}$$

Когда наше знание соответствует одноточечному подмножеству $\{s_0\}$ множества S, а оцениваемые высказывания не содержат расплывчатости, мы вновь получаем четкую оценку степени истинности v в смысле классической логики. Тогда, если p = "X есть A", то

$$v(p) = \Pi(F, \{s_0\}) = N(F, \{s_0\}) = \mu_F(s_0) \in \{0, 1\}.$$

Когда множество рассуждений представляет собой декартово произведение базовых множеств S×T, а переменные X и Y, принимающие свои значения на S и T соответственно, являются невзаимодействующими, базовые знания можно представить декартовым произведением нечетких множеств, а степени возможности и необходимости расплывчатых высказываний, соответствующие нечетким событиям F × G и F + G (где + означает декартово копроизведение), будут удовлетворять следующим равенствам, уже указанным ранее:

$$\Pi(F \times G, A \times B) = \min(\Pi(F, A), \Pi(G, B)); \quad (21)$$

$$N(F \times G, A \times B) = \min(N(F, A), N(G, B)); \quad (22)$$

$$\Pi(F + G, A \times B) = \max(\Pi(F, A), \Pi(G, B)); \quad (23)$$

$$N(F + G, A \times B) = \max(N(F, A), N(G, B)). \quad (24)$$

Замечание. Для того чтобы меры возможности П(F, A) и необходимости N(F, A) могли рассматриваться как степени истинности в смысле экстенсиональной логики, было бы желательно располагать следующими равенствами, выполняющимися в классической логике:

$$v(F, A) + v(F, A) = 1; \quad (25)$$

$$v(F \cap G, A) = F(v(F, A), v(G, A)); \quad (26)$$

$$v(F \cup G, A) = g(V(F, A), v(G, A)). \quad (27)$$

Очевидно, что в общем случае ни мера П(F, A), ни мера N(F, A) не удовлетворяют формуле (25), Тем не менее, если A - одноточечное множество, то для указанных мер возможности и необходимости экстенсиональность сохраняется при $f = \min$ и $g = \max$, когда эти меры совпадают. Более того, равенство (25) выполняется и в общем случае, если, следуя Гэйнсу, положить

$$v(F, A) = \frac{\Pi(F, A) + N(F, A)}{2}. \quad (28)$$

Однако если F и G - обычные множества, определенные на двух различных базовых множествах S и T, а истинность v, задаваемая формулой (28), удовлетворяет условиям (26) и (27), то множество A заменяется декартовым произведением $A \times B$ на $S \times T$, а объединение множеств F и G заменяется декартовым копроизведением F+G (пересечение множеств $F \cap G$ - декартовым произведением

$F \times G)$; этот результат справедлив в силу выполнения равенств (21) - (24).

Соответствие высказывания: "X есть F" — по отношению к высказыванию: "X есть A" — с большей полнотой оценивается величиной совместимости CP(F, A), которая представляет собой нечеткое подмножество интервала [0, 1], определяемое с помощью принципа обобщения в виде

$$\mu_{CP(F,A)}(v) = \begin{cases} \sup \mu_A(s), \text{ если } \mu_F^{-1}(v) \neq \varnothing; \\ 0, \text{ если } \mu_F^{-1}(v) = \varnothing. \end{cases} \quad (29)$$

Нечеткое подмножество CP(F, A) интервала [0, 1], уже встречавшееся в разд. 8.2, есть не что иное, как нечеткое подмножество возможных значений принадлежности множеству F некоторого элемента, у которого множество априори возможных значений на множестве рассуждений S ограничено областью A. Другими словами, если известно, что s — более или менее представительный элемент множества A, то CP(F, A) есть функция распределения возможностей переменной $\mu_F(s)$. Отметим, что если F — обычное множество, то CP (F, A) есть нечеткое подмножество множества {0, 1}, такое, что

$$\mu_{CP(F,A)}(0) = \Pi(\bar{F}, A); \; \mu_{CP(F,A)}(1) = \Pi(F, A). \quad (30)$$

Если A — одноточечное множество {s}, то $CP(F, A) = \mu_F(s)$.

Если A — обычное подмножество, то CP (F, A) есть подмножество интервала [0, 1], ограниченное сверху величиной П (F, A), а снизу N(F, A).

В данном общем случае можно показать, что

$$\Pi(F, A) = \sup_{v \in [0,1]} \min(v, \mu_{CP(F,A)}(v)); \quad (31)$$

$$N(F, A) = \inf_{v \in [0,1]} \max(v, 1 - \mu_{CP(F,A)}(v)). \quad (32)$$

Таким образом, величина CP(F, A) содержит информацию о величинах П(F, A) и N(F, A). Когда переменная X, связанная с нечеткими множествами F и A, и переменная Y, связанная с нечеткими множествами C и B, считаются невзаимодействующими, то, воспользовавшись формулами для операций над нечеткими интервалами, можно легко выразить $CP(\bar{F}, A)$ на основе CP(F, A), а $CP(F \times G, A \times B)$ или в $CP(F + G, A \times B)$ терминах CP(F, A) или CP(G, B)'; тогда получаем равенства, аналогичные равенствам (21) - (24).

Итак, истинность некоторого высказывания была вычислена в форме совместимости функции распределения возможностей, представляющей это высказывание, с функцией распределения возможностей, отражающей базовое состояние знаний. Теперь рассмотрим обратную задачу: на основе некоторого высказывания p, характеризующегося степенью истинности τ, найти такое состояние знаний, степень совместимости которого с высказыванием будет равна τ. Другими словами, задано высказывание вида: "p есть τ", где p — само высказывание, а τ — его (возможно, нечеткая) степень истинности, и надо представить это высказывание в виде функции распределения возможностей, которая будет иметь уровень совместимости τ с аналогичной функцией распределения, связанной с p.

При заданных функции распределения возможности μ_F, представляющей высказывание p = "X есть F", и характеристической функции μ_τ нечеткого подмножества интервала [0, 1], представляющего значение истинности τ, наибольшее решение (в смысле отношения вложенности нечетких множеств) μ_A^+ уравнения $\tau = CP(F, A)$, где CP(F, A) определяется по формуле (29), находится как

$$\forall s \in S, \quad \mu_A^+(s) = \mu_\tau(\mu_F(s)). \tag{33}$$

Здесь величина μ_A^+ выражает то заключение о реальной действительности, которое можно сделать, зная, что высказывание: "X есть F" τ-истинно.

Замечание. Меры доверия и недоверия в экспертной системе MYCIN. В предположении, что высказывание h оценивается при наличии свидетельства e, мера доверия (belief) MB (h, e) и мера недоверия (disbelief) MD(h, e) были эмпирически введены в экспертную систему MYCIN. Они удовлетворяют следующим свойствам:

$$MB(\neg h, e) = MD(h, e); \tag{34}$$

$$1 - MD(h, e) < 1 \Rightarrow MB(h, e) = 0; \tag{35}$$

$$MB(h, e) > 0 \Rightarrow MD(h, e) = 0,$$

где h - оцениваемое высказывание, а e - опорное базовое высказывание. Формулы (34) и (35) аналогичны условиям (4) и (13) соответственно, где MB(h, e) играет роль меры необходимости, а MD(h, e) —

дополнения меры возможности до **1**. Кроме того, применяемые в системе MYCIN формулы

$$MD(h_1 \wedge h_2, e) = \max(MD(h_1, e), MD(h_2, e)); \quad (36)$$

$$MB(h_1 \wedge h_2, e) = \min(MB(h_1, e), MB(h_2, e)); \quad (37)$$

$$MD(h_1 \wedge h_2, e) = \min(MD(h_1, e), MD(h_2, e)); \quad (38)$$

$$MB(h_1 \vee h_2, e) = \max(MB(h_1, e), MB(h_2, e)), \quad (39)$$

являются точными "двойниками" ранее приведенных формул (21) - (24).

Показатель уверенности (certitude) $CF(h, e) = MB(h, e) - MD(h, e) \in [-1, +1]$, используемый в экспертной системе MYCIN, может рассматриваться как степень истинностис точностью до аффинного преобразования, поскольку величина $\frac{1 + CF(h, e)}{2}$ аналогична величине, определяемой формулой (28), и, кроме того, имеем $CF(h, e) + CF(\neg h, e) = 0$, что аналогично равенству (25).

9.1.5. Расплывчатые и неопределенные высказывания

Важной чертой теории возможностей является ее способность единообразного представления неопределенной и расплывчатой информации. В частности, одновременно расплывчатое и неопределенное высказывание можно представить с помощью распределения возможностей, соответствующего менее точному, но достоверному высказыванию. Рассмотрим четкое высказывание вида p = "X есть A" (где A соответствует обычному подмножеству), которое содержит неопределенность, т. е. $N(p) = \alpha < 1$. Это неопределенное высказывание рассматривается как эквивалентное другому, в общем случае расплывчатому высказыванию p* ="X есть A*", где μ_{A^*}— самая неточная в смысле вложенности нечетких множеств функция распределения возможностей, такая, что

$$N(p) = \inf_{s \in A} 1 - \mu_{A^*}(s) = \alpha.$$

Легко убедиться, что μ_{A^*}=1, если

$$s \in A, \text{и } \mu_{A^*} = 1 - \alpha,$$

если $s \notin A$. Это можно записать в виде

$$\forall s \in S, \mu_{A*}(s) = \max(\mu_A(s), 1 - \alpha).$$

Совершенно неопределенное высказывание (при α = 0) эквивалентно тривиальному утверждению 1 = "X есть S". Когда α = 1, то получаем p* =p. Если p - расплывчатое и неопределенное высказывание, то соответствующую информацию следует представлять в виде расплывчатого высказывания p*, где A* определяется так, как указано выше. Это проиллюстрировано на рис. 1.

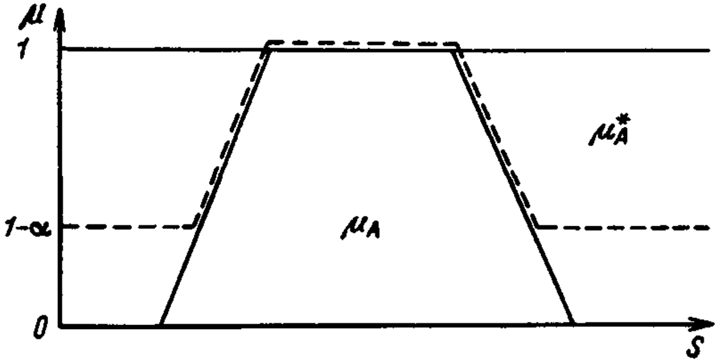


Рис. 1

9.2. Логический вывод с неопределенными посылками

В рамках проблемы автоматизации процедур вывода можно рассмотреть две точки зрения на представление знаний: а) логическую, когда правило вывода типа: "если p, то q" — выражается с помощью материальной импликации $p \to q \overset{\Delta}{=} \neg p \vee q$, и б) "функциональную", когда правило вывода частично описывается функцией из $\{p, \neg p\}$ в $\{q, \neg q\}$, связывающей q с p. Последняя точка зрения ближе к идеологии систем продукционных правил в искусственном интеллекте.

В рамках логического подхода знания — факты и правила - представлены в виде логических утверждений, а процесс вывода основан на использовании правил отделения. В классической логике двумя наиболее употребительными правилами отделения являются: правило "модус поненс" (modus ponens) $\dfrac{p \to q, \quad p}{q}$ которое соответствует

первой строке инвертированной таблицы истинности (см. табл. 1), где v(p) — значение истинности высказывания p;
правило "модус толленс" (modus toDens) $\frac{p \to q \quad \neg q}{\neg p}$ которое соответствует второй строке инвертированной таблицы истинности (см. табл. 2).

Таблица 1.

Правило "модус поненс"

$v(p \to q)$	$v(p)$	$v(q)$	
1	1	1	←–– Правило "модус поненс"
1	0	$\{0, 1\}$	←–– "Опровержение q", хотя его значение истинности остается неопределенным
0	1	0	
0	0	$\varnothing$	←–– Невозможная ситуация

Таблица 2.

Правило "модус толленс"

$v(p \to q)$	$v(q)$	$v(p)$	
1	1	$\{0,1\}$	←–– "Подтверждение p", хотя его значение истинности остается неопределенным
1	0	0	←–– Правило "модус толленс"
0	1	$\varnothing$	←–– Невозможная ситуация
0	0	1	

Замечание. В табл. 2 показано: если известно, что условие p→q истинно, то истинность высказывания q делает высказывание: "p истинно" заслуживающим большего доверия в том смысле, что выражение: "q истинно" - необходимое условие истинности высказывания p, откуда создается впечатление подтверждения истинности высказывания p. Точно так же, если известно, что условие p→q истинно, то ложность высказывания p делает высказывание: "q истинно*' - менее правдоподобным, поскольку ложность p - необходимое условие ложности q (или, если хотите, когда известно, что p→q истинно, то истинность высказывания p есть достаточное условие истинности высказывания q), откуда создается впечатление опровержения высказывания q. Однако в рамках классической логики невозможно количественно определить этот прирост доверия или это уменьшение правдоподобности.

Наличие невозможных ситуаций в табл.1 и 2 показывает, что значения истинности для p и p →*q* нельзя выбирать независимыми друг от друга. В рамках функционального подхода значение истинности правила вывода: "если p, то q" — определено лишь в том случае, когда, само высказывание p истинно. Тогда это правило интерпретируется в терминах условной истинности, т. е. значение истинности высказывания назначается, когда известно, что высказывание p истинно. Это значение истинности записывается в виде v(q|p); соответствующая сводка значений приведена в табл. 3.

Таблица 3.

Условная истинность

v(p)	v(q)	v(q|p)	
1	1	1	
1	0	0	
0	1	{0, 1}	←-- **Неопределенность**
0	0	{0,1}	←-- **Неопределенность**

Легко видеть, что имеются всего четыре способа заполнения таблицы истинности v(q|p), т.е. q|p может, соответствовать одной из следующих логических формул: $p \wedge q,\ p \leftrightarrow q,\ q,\ p \rightarrow q$. Символ | не является обычной логической связкой, поскольку он соответствует множеству логических связок; его нельзя путать со штрихом Шеффера, который обычно имеет похожее обозначение. Этот способ интерпретации правила вывода: "если p, то q" — представляется вполне удовлетворительным, так как здесь заранее не выносится суждение о значении правила вывода, помимо того факта, что когда p истинного q истинно.

Можно проверить, что табл. 3 эквивалентна неявному определению v(q|p) как множества решений уравнения

$$v(p \wedge q) = \min(v(q \mid p), v(p)). \tag{40}$$

В уравнении (40) операцию min можно заменить произвольной операцией *, такой, что $1 * 1 = 1,\ 0 * 0 = 0 * 1 = 1 * 0 = 0.$ Меняя порядок столбцов в табл. 3 так, чтобы проводить рассуждения по правилу "модус поненс", получаем копию табл. 1 в терминах условной истинности, т. е. табл.4.

Таблица 4

v(p)	v(q)	v(q|p)	
1	1	1	←--**Аналог правила "модус поненс"**
1	0	{0, 1}	
0	1	0	
0	0	{0, 1}	

Заметим, что, поскольку $v(q) \geqslant v(p \wedge q)$, всегда имеем

$$v(q) \geqslant \min(v(q \mid p), v(p)), \tag{41}$$

что обобщает правило "модус поненс", но не учитывает всю информацию из табл. 4. Интересно отметить, что в табл. 3 можно поменять порядок столбцов так, чтобы получить обобщение правила "модус толленс" (см. табл. 5). Преимущество функционального подхода заключается в исчезновении в табл. 4 и 5 невозможных случаев, описанных в табл. 1 и 2, что позволяет независимо определить значения истинности $v(p)$ и $v(q|p)$ (или v(q) и v (р)), тогда как $v(p)$ и $v(p \to q)$ (или $v(q)$ и $v(p \to q)$) связаны неравенствами.

Таблица 5

v(q|p)	v(q)	v(p)	
1	1	{0, 1}	
1	0	0	← – – Аналог правила "модус толленс"
0	1	0	
0	0	{0, 1}	

В дальнейшем будем обсуждать проблему вывода с нечеткими посылками вначале в рамках логического подхода, а затем в рамках функционального подхода, получая в обоих случаях похожие результаты. Потом будет предложен метод вывода с неточными посылками.

9.2.1. Дедуктивный вывод с неопределенными посылками

В данном разделе предполагается, что мы имеем дело с четкими высказываниями, но наши базовые знания, позволяющие установить их истинность, неполны. В соответствии с разд. 9.1.4 неопределенность, относящаяся к истинности высказывания р, оценивается с помощью квазимеры, которая будет выражаться мерой возможности или необходимости. Согласно данной точке зрения неопределенность, относящаяся к посылке: "если р, то q", будет оцениваться через неопределенность, содержащуюся в высказывании $p \to q = \neg p \vee q$ или как неопределенность обусловливания высказывания q высказыванием р.

Правила "модус поненс" и "модус толленс" с неопределенными посылками. Пусть П — мера возможности на булевой решетке высказываний (Р, а N — двойственная ей мера необходимости. Предлагаются следующие расширения правил "модус поненс" и "модус толленс":

	Правило "модус поненс"		Правило "модус толленс"
(I)	$\dfrac{N(p \to q) \geqslant a \quad N(p) \geqslant b}{N(q) \geqslant \min(a, b)}$;	(IV)	$\dfrac{N(p \to q) \geqslant a \quad N(q) \leqslant b}{N(p) \leqslant \begin{cases} 1, \text{ если } a \leqslant b \\ b, \text{ если } a > b \end{cases}}$;

Окончание табл.

	Правило "модус поненс"		Правило "модус толленс"
(II)	$\dfrac{N(p \to q) \geqslant a \quad \Pi(p) \geqslant b}{\Pi(q) \geqslant b \cdot v(a+b > 1)}$;	(V)	$\dfrac{N(p \to q) \geqslant a \quad \Pi(q) \leqslant b}{\Pi(p) \leqslant \max(1 - a, b)}$;
(III)	$\dfrac{\Pi(p \to q) \geqslant a \quad N(p) \geqslant b}{\Pi(q) \geqslant a \cdot v(a+b > 1)}$;		$v(a+b > 1) = \begin{cases} 1, \text{ если } a+b > 1 \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$

Правила (I) и (IV) получаются с учетом того, что $p \wedge q = p \wedge (\neg p \vee q)$, и это приводит к выражению $N(q) \geqslant N(p \wedge q) = \min(N(p \to q), N(p))$. Правила (II) и (V) получаются с учетом того, что $\neg p \wedge \neg q = \neg q \wedge (\neg p \vee q)$, откуда $N(\neg p) \geqslant N(\neg p \wedge \neg q) = \min(N(\neg q), N(p \to q))$, что в итоге дает $\Pi(p) \leqslant \max(\Pi(q), 1 - N(p \to q))$. Правило (III) легко проверить, поскольку $\Pi(p \to q) = \max(1 - N(p), \Pi(q))$. Однако если известно только, что $\Pi(p \to q) \geqslant \alpha$, то нельзя сделать никаких заключений относительно П(р) ни на основе Il(q) $\leq$ b, ни на основе $N(q) \leqslant b$.

Комбинируя вместе схемы "модус поненс" вида (I), (II), (III), получаем

$$(VI)\quad \frac{\begin{array}{c} N(p \to q) \geqslant a, \Pi(p \to q) \geqslant A(\max(1 - a, A) = 1) \\ N(p) \geqslant b, \Pi(p) \geqslant B(\max(1 - b, B) = 1) \end{array}}{N(q) \geqslant \min(a, b), \Pi(q) \geqslant \max(A \cdot v(A + B), B \cdot v(a + b)),}$$

причем во всех случаях $\max(\Pi(q), 1 - N(q)) = 1$. Для вероятностных мер уже были известны правила вьюода, аналогичные правилам (VI) и (IV - V):

$$(VII)\quad \frac{\begin{array}{l} P(p \to q) \geqslant a \\ P(p) \geqslant b \end{array}}{P(q) \geqslant \max(0, a + b - 1)} \qquad (VIII)\quad \frac{\begin{array}{l} P(p \to q) \geqslant a \\ P(q) \leqslant b \end{array}}{P(p) \leqslant \min(1, 1 - a + b)}.$$

Они остаются справедливыми, если вероятности заменить на меры доверия.

Точно так же можно было бы сгруппировать схемы вывода (IV) и (V) по правилу "модус толленс". Другую схему вывода можно построить, сгруппировав правила (I), (II), (IV), (V) в виде

$$\text{(IX)}\quad \frac{\begin{array}{l} N(p \to q) \geqslant a \\ N(q \to p) \geqslant a' \\ N(p) \in [b, b'],\ \Pi(p) \in [c, c'] \text{ и } \max(1-b, c') = 1 \end{array}}{\begin{array}{l} N(q) \in [\min(a, b),\ 1], \text{ если } a' \leqslant b' \\ N(q) \in [\min(a, b),\ b'], \text{ если } a' > b' \\ \Pi(q) \in [c \cdot v(a + c > 1),\ \max(1 - a', c')]. \end{array}}$$

Согласно последнему правилу рассуждения ведутся на основе взвешиваний по эквивалентности между высказываниями р и q. Число а показывает, в какой степени высказывание р является достаточным для того, чтобы из него следовало q, а число а' — в какой степени высказывание р является необходимым для этого. Отметим, что во всех предложенных правилах, если ограничить коэффициенты a, b, a', b', c, c' значениями 0 или 1, то нижние границы оценки высказывания р совпадут с операциями конъюнкции, в то время как верхние границы будут операциями импликации. В правиле (IX) интервалы, содержащие N(q) и П (q), включают и интервалы, ограничивающие значения N(p) и П(p) соответственно. Эти интервалы не расширяются, если данная процедура применяется повторно с использованием для величин N(p) иП(p) интервалов, полученных для N(q) Hll(q) соответственно.

Условные меры истинности на неопределенных высказываниях. Правило: "если р, то q" — частично определяет функцию из $\mathcal{P}$ в $\mathcal{P}$ в виде условной меры возможности $\Pi(\cdot \mid p)$, где $\Pi(q \mid p)$ характеризует возможность того, что высказывание q можно дедуктивно вывести из высказывания р. Мера возможности $\Pi(\cdot \mid \bar{p})$ неявно задается следующим тождеством, получаемым из уравнения (40):

$$\Pi(p \wedge x) = \Pi(x \mid p) * \Pi(p),\ x = q, \neg q, \qquad (42)$$

когда известна мера возможности П на множестве высказываний $\mathcal{P}$, которая выражает наши знания об истинности высказываний. Здесь * — операция конъюнкции, например операция взятия минимума, которая предполагается непрерывной и удовлетворяющей условиям:

1) если $r \leqslant s$, $t \leqslant u$, то $r * t \leqslant s * u$ (монотонность);

2) $\forall s \in [0, 1]$, $s * 0 = 0 * s = 0$;

3) $\forall s \in [0, 1]$, $s * 1 = 1 * s = s$.

Операция * есть треугольная норма, примерами которой являются min, произведение, а также $s * t = \max(0, s + t - 1)$. Наименее специфичная условная мера возможности представляет собой наибольшее решение уравнения (42). Следовательно (всегда существующую), условную меру возможности $\Pi(\cdot \mid p)$ можно определить выражением

$$\Pi(x \mid p) = \sup\{r \mid \Pi(p \wedge x) = r * \Pi(p)\},\ x = q, \neg q. \quad (43)$$

Поскольку здесь p и q — четкие высказывания, $q \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) = 1$, то из формулы (42) можно вывести

$$\Pi(q) = \max(\Pi(q \mid p) * \Pi(p), \Pi(q \mid \neg p) * \Pi(\neg p)); \quad (44)$$

$$\Pi(\neg q) = \max(\Pi(\neg q \mid p) * \Pi(p), \Pi(\neg q \mid \neg p) * \Pi(\neg p)). \quad (45)$$

Формулы (44) и (45) обобщают правило "модус поненс", поскольку из того, что $\Pi(q \mid p) = 1$, $\Pi(\neg q \mid p) = 0$ и $\Pi(p) = 1$, $\Pi(\neg p) = 0$, следует $\Pi(q) = 1$, $\Pi(\neg q) = 0$. Формула (42) индуцирует неравенство $\Pi(q) \geqslant \Pi(q \mid p) * \Pi(p)$, откуда получаются следующие правила вывода типа "модус поненс" и "модус толленс" соответственно:

$$\text{(X)}\ \ \frac{\begin{array}{l}\Pi(q \mid p) \geqslant a\\ \Pi(p) \geqslant b\end{array}}{\Pi(q) \geqslant a * b} \quad \text{и (XI)}\ \ \frac{\begin{array}{l}\Pi(q \mid p) \geqslant a\\ \Pi(q) \leqslant b\end{array}}{\Pi(p) \leqslant \sup\{s \in [0, 1], a * s \leqslant b\} \triangleq a * \!\to b}.$$

Их можно объединить в одно общее правило, подобное правилу IX:

$$\text{(XII)}\ \ \frac{\begin{array}{l}\Pi(q \mid p) \geqslant a\\ \Pi(p \mid q) \geqslant a'\\ \Pi(p) \in [b, b']\end{array}}{\Pi(q) \in [a * b, a' * \!\to b']}.$$

Формулу (45) можно переписать в терминах меры необходимости, полагая $N(q \mid p) = 1 - \Pi(\neg q \mid p)$, откуда

$$N(q) = \min(N(q \mid p) \perp N(\neg p), N(q \mid \neg p) \perp N(p)), \quad (46)$$

где $s \perp t = 1 - (1 - s) * (1 - t)$, т.е. если $* = \min$, то $\perp = \max$. В более общем случае $\perp$ — операция дизъюнкции, удовлетворяющая свойствам:

1) если $r \leqslant s, t \leqslant u$, то $r \perp t \leqslant s \perp u$ (монотонность);
2) $\forall s \in [0, 1], s \perp 1 = 1 \perp s = 1$;
3) $\forall s \in [0, 1], 0 \perp s = s \perp 0 = s$.

Из выражения (46) получаем неравенство

$N(q) \geqslant \min(N(q \mid p), N(p))$, что дает схемы рассуждений типа "модус понենс" и "модус толленс" соответственно :

$$\text{(XIII)} \quad \frac{\begin{array}{l} N(q \mid p) \geqslant a \\ N(p) \geqslant b \end{array}}{N(q) \geqslant \min(a, b)} \qquad \text{и} \qquad \text{(XIV)} \quad \frac{\begin{array}{l} N(q \mid p) \geqslant a \\ N(q) \leqslant b \end{array}}{N(p) \leqslant \begin{cases} 1, \text{ если } a \leqslant b, \\ b, \text{ если } a > b. \end{cases}}$$

Они объединяются в схему рассуждений по эквивалентности

$$\text{(XV)} \quad \frac{\begin{array}{l} N(q \mid p) \geqslant a \\ N(p \mid q) \geqslant a' \\ N(p) \in [b, b'] \end{array}}{\begin{array}{l} N(q) \in [\min(a, b), 1], \text{ если } a' \leqslant b' \\ N(q) \in [\min(a, b), b'], \text{ если } a' > b' \end{array}}$$

Заметим, что правила вывода (XIII) — (XV) не зависят от вида операции *, которая определяет условную меру. Известны вероятностные схемы вывода, основанные на понятии условной вероятности и аналогичные правилам (XIII) – (XIV) [43]:

$$\text{(XVI)} \quad \frac{\begin{array}{l} P(q \mid p) \geqslant a \\ P(p) \geqslant b \end{array}}{P(q) \geqslant a \cdot b} \qquad \text{и} \qquad \text{(XVII)} \quad \frac{\begin{array}{l} P(q \mid p) \geqslant a \\ P(q) \leqslant b \end{array}}{P(p) \leqslant \begin{cases} 1, \text{ если } a = 0, \\ \min(1, b/a), \text{ если } a \neq 0. \end{cases}}$$

Замечание. Условные меры необходимости $N(q \mid p)$ и $N(p \mid q)$, которые одновременно присутствуют в схеме (XV), можно интерпретировать соответственно как степени "достаточности" и "необходимости" того, что высказывание q истинно, когда высказывание p истинно. Эта идея введения мер достаточности и необходимости, связанных с правилом вывода, лежит в основе системы приближенных рассуждений экспертной системы PROSPECTOR; там она разрабатывалась в рамках вероятностного байесовского подхода.

Синтез. Отметим, что в обоих подходах, как в логическом, так и в функциональном, интервалы значений необходимости, возможности или вероятности всегда имеют вид $[a * b,\ a' * \!\!\rightarrow b']$, где * — операция конъюнкции, а $* \!\!\rightarrow$ — операция импликации, которая определяется на основе операции конъюнкции * в виде

$$a * \to b = \sup\{s \mid a * s \leqslant b\} \qquad (47)$$

Этот результат пригоден как для схем вывода на основе материальной импликации, так и для схем вывода с условный мерами. Вероятностные схемы вывода обеспечивают большую точность результатов, когда используется подход с применением условных мер истинности. В случае возможностных схем это не так, поскольку схемы (IX), (XII) и (XV) дают точно такие же результаты в терминах значений необходимости, не сравнимые с прежними результатами в терминах возможностей (за исключением того случая, когда $a * b = \max(0, a + b - 1)$ в схеме (XII) (что порождает интервал, содержащий все другие интервалы). Кроме того, ряд схем не позволяет получать нетривиальный вывод; эти схемы — не одни и те же в рамках отмеченных двух подходов.

Схемы вывода, основанные на операции импликации, и схемы вывода по условной мере истинности становятся очень близкими друг к другу, когда треугольная норма, характеризующая условную меру возможности, определяется операцией взятия минимума. В этом случае из формулы (43) следует, что

$$\Pi(q \mid p) = \begin{cases} 1, \text{ если } \Pi(p) = \Pi(p \wedge q), \\ \Pi(p \wedge q) \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Видно, что условная мера возможности $\Pi(q \mid p)$ очень близка к мере $\Pi(p \wedge q) = 1 - N(p \to \neg q)$, точнее, условная мера необходимости $N(q \mid p)$ близка к мере необходимости импликации $N(p \to q)$, поскольку

$$N(q \mid p) = \begin{cases} 0, \text{ если } N(\neg p) = N(p \to q), \\ N(p \to q), \text{ если } N(\neg p) < N(p \to q). \end{cases}$$

Этот результат поясняет, почему схемы вывода (IX) и (XV) тождественны (если только нет ограничений на П(p) в схеме (IX)). Тогда при $* = \min$ можно показать, что схема вывода, описываемая формулами (44), (45) и основанная на условной мере возможности, согласуется с противоположной схемой, основанной на мерах необходимости и логической импликации, а именно

$$N(x) \geqslant \max(\min(N(p \to x), N(p)), \min(N(\neg p \to x), N(\neg p))), x = q, \neg q.$$

Эта схема вывода слабее той, что определяется формулами (44), (45). Она включает схемы (I) и (V) и может записываться в матричной форме, где произведение матриц определяется с помощью операций max и min (вместооперамций сложения и умножения в обычном произведении матриц):

$$\begin{bmatrix} N(q) \\ N(\neg q) \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} N(p \to q) & N(\neg p \to q) \\ N(p \to \neg q) & N(\neg p \to \neg q) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N(p) \\ N(\neg p) \end{bmatrix}.$$

О взаимосвязи между $N(q \mid p)$ и $N(p \to q)$ можно узнать из ряда работ.

В частности, вес $\Pi(q \mid p)$ относится к правилу: "если р, то $\neg q$", как это видно из вышеизложенных результатов. Более систематически формулы (44), (45), представленные в матричной форме, используются применительно к задаче автоматизации приближенных рассуждений. Отметим, что в рамках вероятностного подхода логическая импликация и вывод по условной вероятности не столь близки друг к другу (это показано в работе.

В заключение следует обратить внимание на то, что в целом эти два подхода совпадают, поскольку они приводят к очень похожим расчетам со степенями неопределенности. Все это наводит на мысль о том, что данные расчеты имеют общее основание, хотя исследования такого типа все еще находятся на начальной стадии. Кроме того, на практике далеко не всегда можно уточнить у эксперта сведения о конкретном математическом характере (вероятность, возможность, необходимость) предлагаемого им распределения, а также узнать, следует ли понимать правило: "если р, то q" — как материальную или как условную импликацию. Такая неопределенность компенсируется малой чувствительностью получаемых результатов по отношению к этим' двум факторам.

Замечание. Третий подход состоит в непосредственном использовании интерпретаций импликации р→q в многозначных логиках для представления правила: "если р, то q". Получаемые при этом результаты подобны изложенным выше (подробнее см. работы [34, 36]). Этот подход лежит в основе схемы рассуждений, используемых в системе логического вывода PROTIS [42]; данная схема соответствует правилу (XII), где П(q|p) заменяется степенью истинности импликации р→q (построенной по правилу импликации Лукасевича, т. е. с использованием операций $a * b = \max(0, a + b - 1)$ и $a' * \to b' = \min(1, 1 - a' + b')$, , а П(р) - степенью истинности высказывания р. Однако здесь возникает проблема интерпретации в интервале [0, l] значений степеней истинности, связываемых с четкими высказываниями.

9.2.2. Сложные посылки

Пусть p — некоторое высказывание, представляющее собой конъюнкцию двух более элементарных высказываний p_1 и p_2. В предположении, что переменные, фигурирующие в высказываниях p_1 и p_2 соответственно, различны и не взаимодействуют друг с другом, можно записать, используя формулу (21),

$$\Pi(p_1 \wedge p_2) = \min(\Pi(p_1), \Pi(p_2)). \qquad (48)$$

Кроме того, всегда имеем

$$N(p_1 \wedge p_2) = \min(N(p_1), N(p_2)). \qquad (49)$$

Аналогичные результаты получаются при использовании формул (23), (24), если p — дизъюнкция двух высказываний. Заметим, что формулы, аналогичные формулам (48) и (49), применяются эмпирически и без предварительного обоснования в экспертной системе MYCIN. В случае взаимодействующих переменных формула (48) несправедлива, и необходимо в явном виде учитывать это взаимодействие в проводимых вычислениях.

9.2.3. Комбинирование степеней неопределенности, относящихся к одному и тому же высказыванию

Подход с позиций теории возможностей. Предположим, что степень неопределенности, относящаяся к высказыванию p, выражается в виде степени возможности $\Pi_i|(p)$ того, что высказывание p истинно, а также в виде соответствующей степени необходимости $N_i(p)$, задаваемых источником информации (в качестве которого может, например, служить правило типа: "если q_i, то p"). Когда располагают *n* различными источниками, то может потребоваться агрегирование пар оценок $(\Pi_i(p), N_i(p))$ в единый блок информации $(\Pi(p), N(p))$.

Отметим, что всегда справедливо условие

$$\max(\Pi_i(p), 1 - N_i(p)) = 1. \qquad (50)$$

Естественная мысль заключается в объединении информации, поступающей от отдельных источников. Для этого информация, получаемая от источника i, может рассматриваться как нечеткое множество F_i, определенное на базовом множестве $\{p, \neg p\}$ следующим образом:

$$\mu_{F_i}(p) = \Pi_i(p),\ \mu_{F_i}(\neg p) = 1 - N_i(p) = \Pi_i(\neg p).$$

В силу условия (50) это нечеткое множество всегда нормально. Тогда нечеткое множество F, соответствующее паре (П(p), N(p)), можно определить в виде пересечения $F = \bigcap_{i=1,\dots,n} F_i$, которое выражается с помощью операции взятия минимума. Это позволяет положить $\Pi(p) = \min_i \Pi_i(p), N(p) = \max_i N_i(p)$. Однако при этом вовсе не обеспечивается сохранение условия $\max(\Pi(p), 1 - N(p)) = 1$. Оно не выполняется, если источники противоречивы, т. е. когда согласно одному из них высказывание p более возможно, чем высказывание $\neg p$, а согласно другому - высказывание p менее возможно, чем $\neg p$. В подобном случае можно отказаться от свертывания информации и исследовать вопрос надежности источников. Если источники надежны, а поступающая от них информация относится к одной проблеме, приходим к нормировке нечеткого множества F путем деления его функции принадлежности на величину $\max(\Pi(p), 1 - N(p))$. В результате получаем следующие формулы:

$$\Pi(p) = \frac{\min_i \Pi_i(p)}{\max(\min_i \Pi_i(p), \min_i(1 - N_i(p)))}; \tag{51}$$

$$N_p = 1 - \frac{\min_i(1 - N_i(p))}{\max(\min_i \Pi_i(p), \min(1 - N_i(p)))}. \tag{52}$$

Важная задача состоит в том, чтобы определить, может ли информация, получаемая от различных источников, подкрепляться, что не допускается в формулах (51) и (52)). В частности, эта задача встречается, когда стремятся синтезировать два правила типа: "если p_1, то q" и "если p_2, то q" в виде "если r, то q", где r представляет собой некоторую комбинацию p_1 и p_2. Например, без привлечения дополнительной гипотезы трудно выразить $\Pi(q \mid p_1 \wedge p_2)$ как функцию $\Pi(q \mid p_1)$ и $\Pi(q \mid p_1)$, в ряде случаев можно иметь либо $\Pi(q \mid p_1 \wedge p_2) \geqslant \max(\Pi(q \mid p_1), \Pi(q \mid p_2))$, либо $\Pi(q \mid p_1 \wedge p_2) \leqslant \min(\Pi(q \mid p_1), \Pi(q \mid p_2))$. В частности, надо знать, можно ли сформулировать правило: "если p_1, то q" — независимо от истинности p_2 или нет. Эта проблема, тесно связанная с проблемой выбора невзаимодействующих переменных, входит в число открытых вопросов теории приближенных рассуждений.

Подход с использованием правила Демпстера. Положим теперь, что имеющаяся информация выражена в виде мер правдоподобности и доверия, определенных на множестве высказываний $\mathcal{P}$ (см. разд. 9.1.1). Предполагается, что каждый источник i доставляет информацию в виде весовой функции m_i, определяемой аксиомами (2). Пусть m_1 и m_2 — две такие весовые функции, соответствующие информации, получаемой от двух независимых источников. Правило Демпстера, которое обобщает формулу Байеса для условных вероятностей (см. также работу Шейфера, позволяет провести комбинирование весовых функций m_1 и m_2 и получить новую весовую функцию m_{12}, удовлетворяющую аксиомам (2) и определяемую следующим образом:

при любом $p \in \mathcal{P}$ находим величину

$$m(p) = \Sigma\{m_1(q)\ m_2(r)\, p = q \wedge r\}, \tag{53}$$

далее для всех $p \neq 0$ полагаем

$$m_{12}(p) = \frac{m(p)}{1 - m(\mathbf{0})}. \tag{54}$$

Правило Демпстера ассоциативно и коммутативно, что позволяет без потери общности довольствоваться изучением случая с двумя источниками информации. Если функция m_1 задает вероятностную меру на $\mathcal{P}$, то функция m_{12} также определяет вероятностную меру. Более того, если весовая функция m_2 сосредоточена на высказывании p, т. е. $m_2(p) = 1$, то приходим к формуле Байеса.

Отметим, что условие (54) сводится к нормировке весовой функции m, получаемой по формуле (53). В случае совсем не согласованных между собой источников информации оно может оказаться весьма спорным. Величина $m(\mathbf{0})$ как раз и отражает противоречивость информации от двух разных источников. Условие нормировки дает эффект маскировки этой противоречивости, как и в формулах (51), (52).

Возьмем в качестве исходного случай, когда $\mathcal{P} = \{\mathbf{0}, p, \neg p, \mathbf{1}\}$. Предположим, что информация от источника i поступает в виде степеней правдоподобности $Pl_i(p) = a_i$ и доверия $Cr_i(p) = b_i$, где $a_i \geqslant b_i$ (см. условие (8)). Воспользовавшись формулами (3) и (5), легко видеть, что при этом неявно задаваемая весовая функция m_i удет принимать следующие значения:

$$m_i(p) = b_i, \ m_i(\neg p) = 1 - a_i, \ m_i(1) = a_i \div b_i,$$

где $m_i(\mathbf{1})$ — вес, приписываемый полному незнанию. Мера правдоподобности Pl_i ревращается в меру возможности, как только $a_i=1$ (предпочтение отдается высказыванию p) или $b_i = 0$ (предпочтение отдается противоположному высказыванию $\neg p$). При $a_i = b_i$ получаем вероятностную меру. Если имеются две пары коэффициентов (a_1b_1) и (a_2b_2), то применение правила Демпстера дает следующие результаты:

$$\begin{aligned} m(\mathbf{0}) &= b_1(1 - a_2) + b_2(1 - a_1); \\ m(p) &= a_1b_2 + a_2b_1 - b_1b_2; \\ m(p) &= 1 - b_1 - b_2 + b_1a_2 + b_2a_1 - a_1a_2; \\ m(1) &= (a_1 - b_1)(a_2 - b_2). \end{aligned} \tag{55}$$

Эти формулы позволяют получить и систематизировать ряд правил комбинирования степеней неопределенности, введенных без ссылок на применение подхода Шейфера — Демпстера.

Весовые функции m_1 и m_2 определяют вероятностные меры. Тогда $a_1 = b_1 = P_1(p)$ и $a_2 = b_2 = P_2(p)$ и получаем $m_{12}(1) = 0$ (следовательно, функция m_{12} определяет вероятностную меру). В итоге

$$m_{12}(p) = P_{12}(p) = \frac{a_1a_2}{1 - a_1 - a_2 + 2a_1a_2} = \sigma_0(a_1, a_2). \tag{56}$$

Таким образом получаем симметрическую функцию Силверта σ_0. Весовые функции m_1 и m_2 определяют согласованные меры возможности $(m_1(p) > 0 \text{ и } m_2(p) > 0)$. Тогда имеем $a_1 = a_2 = 1, N_i(p) = b_i$, $i = 1, 2, \dots,$ и находим

$$m_{12}(p) = b_1 + b_2 - b_1b_2 = N_{12}(p); \quad m_{12}(1) = (1 - b_1)(1 - b_2). \tag{57}$$

Отметим, что правила (57) используются в экспертной системе MYCIN для комбинирования, с одной стороны, мер доверия MB(h, e_1) и MB(h, e_2), а с другой стороны, мер недоверия MD(h, e_1 и MD(h, e_2) (см. замечание в разд. 9.1.4). Очевидно, что полученная мера доверия будет мерой необходимости. Следовательно, результаты, полученные в рамках подхода с использованием правила Демпстера, легко сравнить с результатами, полученными при использовании подхода с позиций теории возможностей, согласно которому

$$N_{12}(p) = \max(b_1, b_2) = m_{12}(p)$$

и

$$m_{12}(1) = \min(1 - b_1, 1 - b_2).$$

Иными словами, применение правила Демпстера влечет за собой подкрепление информации, получаемой от нескольких источников. Можно проанализировать и другие частные случаи, охватываемые условиями (55).

Мера возможности характеризует информацию, поступающую от источника 1, а вероятностная мера — информацию от источника 2 (a_t = 1, b_2 = a_2). Тогда в результате комбинирования получаем вероятностную меру.

Имеются две несогласованные, противоречащие друг другу меры возможности (a_2 = 1, b_2 = 0). Тогда получаем такую меру неопределенности, которая не является ни вероятностной мерой, ни мерой возможности. Можно убедиться в том, что

$$Pl_{12}(p) = \frac{a_2}{1 - b_1(1 - a_2)}; \quad Cr_{12}(p) = \frac{a_2 b_1}{1 - b_1(1 - a_2)}, \tag{58}$$

в то время как формулы (51), (52) дают

$$\Pi_{12}(p) = \frac{a_2}{1 - \min(b_1, 1 - a_2)}; \; N_{12}(p) = \frac{\max(0, a_2 + b_1 - 1)}{1 - \min(b_1, 1 - a_2)}. \tag{59}$$

Отметим наличие очевидного структурного подобия между формулами (58) и (59), причем вся разница между ними заключается лишь в характере используемых треугольных норм.

В терминах показателей уверенности правило комбинирования степеней неопределенности, употребляемое в экспертной системе MYCIN, выражается следующим образом:

$$CF_{12}(p) = \begin{cases} CF_1(p) + CF_2(p) - CF_1(p) \cdot CF_2(p), \text{ если } CF_1(p) \geqslant 0, CF_2(p) \geqslant 0, \\ \dfrac{CF_1(p) + CF_2(p)}{1 - \min(|CF_1(p)|, |CF_2(p)|)}, \text{ если } CF_1(p) \cdot CF_2(p) \leqslant 0, \\ CF_1(p) + CF_2(p) + CF_1(p)CF_2(p), \text{ если } CF_1(p) \leqslant 0, CF_2(p) \leqslant 0. \end{cases}$$

Если заменить показатель уверенности $CF_i(p)$ разностью $\Pi_i(p) - \Pi_i(\neg p)$, что предполагается при интерпретации мер доверия MB и недоверия MD в терминах степеней необходимости и невозможности (см. замечание в разд. 9.1.4), то легко проверить, что во всех случаях это правило комбинирования информации в точности соответствует возможностному правилу комбинирования, выражаемому формулами (51), (52), где операция min заменяется умножением. Правило комбинирования степеней неопределенности в экспертной системе MYCIN ассоциативно, тогда как для выражений (51), (52), представленных в нормальной форме, условие ассоциативности в случае противоречивой информации не выполняется. Когда $CF_1(p) \cdot CF_2(p) > 0,$ правило, используемое в экспертной системе MYCIN, эквивалентно правилу (57).

При комбинировании информации в условиях неопределенности могут встретиться трудности нескольких типов. Прежде всего, результаты, получаемые по правилу Демпстера, очень чувствительны к вариациям числовых значений операндов, особенно в случае противоречащих друг другу источников информации. В качестве примера рассмотрим случай трех взаимно исключающих альтернатив a, b, c и применим формулы (53), (54) для анализа информации, выражаемой следующими значениями двух вероятностных весовых функций:

$$m_1(a) = 0; \quad m_1(b) = 0{,}1; \quad m_1(c) = 0{,}9;$$
$$m_2(a) = 0{,}9; \quad m_2(b) = 0{,}1; \quad m_2(c) = 0,$$

которые соответствуют двум очень противоречивым источникам информации. Тогда получим очень "жесткий" результат, не зависящий от положительных значений весов:

$$m(a) = 0; \quad m(b) = 1; \quad m(c) = 0.$$

Зато если слегка изменить значения m_1 и m_2, например следующим образом:

$$m_1'(a) = 0{,}01; \quad m_1'(b) = 0{,}1; \quad m_1'(c) = 0{,}89;$$
$$m_2'(a) = 0{,}89; \quad m_2'(b) = 0{,}1; \quad m_2'(c) = 0{,}01,$$

то из формул (53), (54) получим очень неопределенный результат:

$$m'(a) \simeq 0{,}32; \quad m'(b) \simeq 0{,}36; \quad m'(c) \simeq 0{,}32.$$

Первоначальный результат вполне можно обосновать, интерпретируя нулевое значение весовой функции как *полную уверенность* в том, что альтернативы a и c невозможны, а значит, и невероятны; поэтому единственно возможной остается альтернатива. Это рассуждение несправедливо, если вместо нуля берется очень малое значение вероятности, и в данном случае как по первому, так и по второму источнику информации альтернативы a и c не могут быть окончательно отброшены. Но в таком случае тот факт, что при очень малом изменении значения вероятности (всего от 0 до 0,01) самой маловероятной альтернативы результат комбинирования информации от двух источников резко меняется от полной определенности в выборе альтернативы b до почти полной неопределенности, противоречит здравому смыслу. Такое не отвечающее простым интуитивным представлениям поведение правила Демпстера может привести к недоразумениям, если слепо применять это правило в экспертных системах, где коэффициенты неопределенности оцениваются субъективно. В работах можно найти ряд других примеров, а также более подробное обсуждение этой темы. Когда применяется возможностное правило комбинирования степеней неопределенности (51), (52), то проблема чувствительности становится менее острой, хотя вопрос интерпретации нулевого значения весовой функции остается.

Вообще говоря, правила комбинирования информации с помощью операции конъюнкции с последующей нормировкой результата имеют разрывы в окрестностях тех значений, которые соответствуют полной противоречивости данных. Это показывает, что при наличии серьезных противоречий между различными источниками информации необходимо искать другие варианты ее комбинирования (неконъюнктивного характера).

Наконец, жесткое комбинирование исходной информации представляется нецелесообразным, когда стремятся свертывать результаты, полученные с использованием правил, обладающих различной степенью общности. Так, при поступлении новой информации может потребоваться, чтобы старый вывод был забыт. Эта возможность обусловливает необходимость обращения к так называемым "интеллектуальным" методам комбинирования при разработке проблем объединения неопределенных данных (особенно в случае противоречивой информации). Например, если известно, что Тити — птица, то отсюда следует вывод: "С большой достоверностью Тити летает". Но если вдобавок мы узнаем, что Тити — очень крупная птица, то можно заключить: "Вероятно, Тити не летает". Здесь мы, скорее, отказываемся от первого вывода, чем комбинируем два заключения.

9.2.4. Принцип резолюции с неопределенными условиями

Еще на очень раннем этапе развития теории нечетких множеств Ли предложил расширить принцип резолюции Робинсона на случай расплывчатых высказываний, не содержащих переменные. Значение истинности конъюнкции (дизъюнкции) двух расплывчатых высказываний p и q определяется как минимум (максимум) значений истинности p и q, а значение истинности высказывания $\neg p$— как дополнение к 1 значения истинности p. Это соответствует случаю рассмотрения расплывчатых высказываний при наличии точных баз знаний. В сущности, Ли доказал, что любое условие (дизъюнкт) (в данном контексте их можно понимать как *дизъюнкты,* т. е. дизъюнкции, в которые могут входить как предикаты, так и их отрицания), полученное путем применения принципа резолюции из множества условий со значениями истинности, строго большими 0,5, имеет значение истинности, расположённое между минимумом и максимумом значений истинности для условий из исходного множества. Однако отсутствие закона противоречия (исключенного третьего) для нечетких высказываний затрудняет разработку метода рассуждений посредством опровержения.

Зато в случае обычных неопределенных высказываний, рассматриваемых в настоящем разделе, метод опровержения как метод автоматического доказательства может быть вновь взят на вооружение. (Название "метод опровержения" вызвано тем, что здесь вместо поиска вывода некоторого утверждения ищется доказательство невыводимости его отрицания. Эквивалентность этих задач следует из замкнутости исчисления предикатов первого порядка и непосредственно связана с законом исключенного третьего.) В самом деле, в ряде работ принцип резолюции был расширен с позиций теории возможности для условий, не содержащих переменные, и для формул исчисления предикатов первого порядка. Так, для случая условий (дизъюнктов), не содержащих переменные, можно показать, что

$$N(q \vee r) \geqslant \min(N(p \vee Q), N(\neg p \vee r)).$$

Когда правая часть неравенства равна 1, эта формула вновь дает принцип резолюции. Более того, имеем для $\forall a, N(P(a)) \geqslant N(P(x)), \forall x,$ где буквой P обозначен предикат. С целью обеспечить применимость метода опровержения каждому неопределенному условию ставится в соответствие некоторая строго положительная степень, необходимости или строго положительная нижняя граница этой степени необходимости. Показано, что степень необходимости пустого условия **0** есть нижняя граница степени необходимости оцениваемого высказывания; эта нижняя граница получается за счет повторного применения расширенного принципа резолюции к множеству неопределенных условий, дополненному отрицанием оцениваемого высказывания (которому ставится в соответствие степень необходимости, равная 1). Кроме того, множество неопределенных условий, не содержащих переменные, называется несогласованным, когда для нижних границ степеней необходимости этих условий нарушаются аксиомы, определяющие меры необходимости, например если $\min(N(p), N(\neg p)) > 0.$

Можно показать, что такое понимание несогласованности эквивалентно случаю несогласованности множества условий с неопределенными степенями необходимости. На основе этих результатов можно разработать методы автоматического вывода с использованием выбора некоторой стратегии максимизации нижней границы необходимости, связываемой с пустым условием (дизъюнктом).

9.2.5. Рассуждения с нечеткими квантификаторами

Такое неопределенное высказывание, как р = "Все птицы летают", которому ставится в соответствие степень необходимости $N(p) = \alpha < 1$, плохо выражает специфику правила: "в основном птицы летают"; здесь степень необходимости, скорее, указывает, что с уровнем достоверности α все птицы летают. Неопределенное высказывание соответствует, скорее, догадке, предположению, чем общему правилу, т. е. в вышеприведенном примере — высказыванию, которое либо истинно для всех птиц, либо ложно (поскольку оно не выполняется хотя бы для одной птицы), но какой конкретно — неизвестно.

Зато при рассмотрении общего закона именно квантификаторы больше не считаются четкими, как обычные кванторы общности или существования, а интерпретируются как промежуточные. Так, в ряде работ описаны специальные логики, выходящие за рамки классической логики, в которых работают с подобными общими законами без определения промежуточных квантификаторов в явном виде. В работах Заде предложен подход к этой проблеме, согласно которому промежуточные квантификаторы рассматриваются как нечетко определенные относительные величины, представляющие термины естественного языка, такие как "большинство", "несколько" и др. Рассмотрим силлогизмы, в которых присутствуют высказывания с нечеткими квантификаторами, моделируемыми нечеткими подынтервалами интервала [0, 1]. Например, силлогизм типа "пересечение — произведение" имеет вид

$$\frac{\begin{array}{l} Q_1 A \text{ есть } B \\ Q_2(A \cap B) \text{ есть } C \end{array}}{(Q_1 \odot Q_2) A \text{ есть } (B \cap C),}$$

где А, В и С — обычные множества; $\odot$— произведение нечетких величин, а Q_1 — нечеткое множество возможных значений, характеризующих относительное число элементов А в В или в более общем случае условную вероятность P(B|A). Аналогично определяется и нечеткое множество Q_2. Более того, предполагается, что Q_1 и Q_2 — нечеткие интервалы, удовлетворяющие условию

$\mu_{Q_i}(1) = 1,\ i = 1,2$ (см. рис. 2), и характеризующие такие квантификаторы, как "большинство", "не менее 70%" и др.

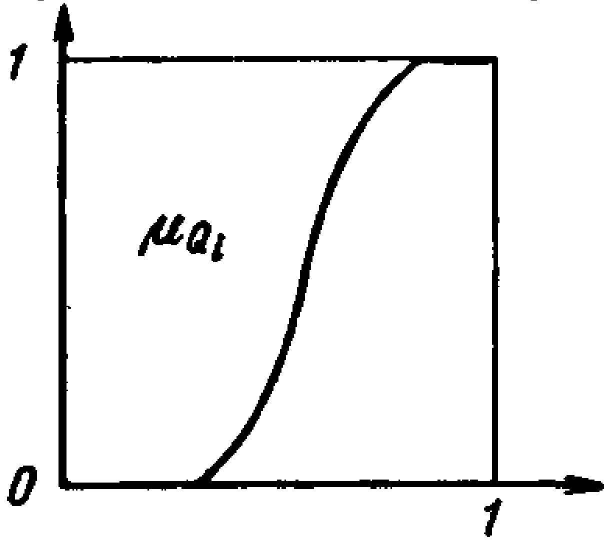


Рис.2

Результирующий квантификатор $Q_1 \odot Q_2$ должен удовлетворять тождеству $P(B \cap C \mid A) =$

$$= P(B \mid A) \cdot P(C \mid A \cap B).$$

Важно отметить, что схемы рассуждений, справедливые с кванторами общности, становятся некорректными, когда эти кванторы несколько ослаблены. Например, силлогизм

$$\frac{\begin{array}{l}\forall A \text{ есть } B\\ Q_1 B \text{ есть } C\end{array}}{QA \text{ есть } C},$$

где $\forall$ означает "все", выполняется при $Q_1 = Q = \forall$, но как только $Q_1 \neq \forall$, то уже нельзя ничего определенного сказать о доле A в C, т. е. эта доля может принимать какое угодно значение в интервале [0, 1], что можно символически записать в виде Q = [0,1]. Если еще известно, что $Q_2 B$ есть A, то можно показать, что когда Q_1 и Q_2 — нечеткие интервалы, такие, что $\mu_{Q_i}(1) = 1, i = 1, 2, \ldots,$ то

$$Q = \widetilde{\max}\,(0, 1 \ominus [(1 \ominus Q_1) \odot Q_2]),$$

где $\widetilde{\max}, \ominus$ и $\odot$ — расширенные на случай нечетких величин операции взятия максимума, вычитания и деления. Этот результат позволяет расширить следующее утверждение на случай нечетких величин: если $A \subseteq B$, $P(A|B) \geqslant q_2$, $P(C|B) \geqslant q_1$, то с помощью вероятностных законов можно показатьсправедливость неравенства

$$P(C|A) \geqslant \max(0, 1 - (1 - q_1) | q_2).$$

Из вышеприведенных примеров можно видеть, что трактовка нечетких силлогизмов, предложенная Заде, - не что иное, как вариант вероятностной логики, выраженной в терминах условных вероятностей, в предположении, что значения вероятностей известны лишь в форме нечетких интервалов, а не точных чисел или обычных интервалов.

Замечание. Степень истинности высказывания р вида "QA есть В" вычисляется следующим образом:

$$v(p) = \mu_Q\left(\frac{|A \cap B|}{|A|}\right) = \mu_Q\left(\frac{\sum_{\omega \in \Omega} \min(\mu_A(\omega), \mu_B(\omega))}{\sum_{\omega \in \Omega} \mu_A(\omega)}\right)$$

при условии, что известно множество пар $(\mu_A(\omega), \mu_B(\omega))$, $\omega \in \Omega$.

Ягер предложил другую трактовку анализа высказываний с нечеткими квантификаторами, не связанную с условными вероятностями.

Хотя высказывание р, характеризуемое некоторой степенью субъективной уверенности (вероятности, необходимости, доверия), выражает, скорее, предположение, чем общий закон с исключениями, мы заметим, что применительно к частному случаю общий закон порождает некоторое особое предположение, справедливое при отсутствии другой информации. Это предположение может выражаться в виде неопределенного высказывания в смысле, раскрытом в разд. 9.2.1.

9.3. Вывод с нечеткии посылками

В этом разделе предполагается, что анализируемые высказывания имеют вид р = "X есть А", где А — нечеткое множество в базовом множестве S. В этом случае решетка рассматриваемых высказываний уже не является булевой и в явном виде вводится интерпретация высказываний, поскольку два различных высказывания р и р′ могут оказаться гораздо ближе друг к другу, когда они — нечеткие высказывания, чем когда они представляют собой четкие высказывания классической логики. В частности, будет существовать расширенная форма правила "модус поненс", согласно которому на основе правила: "если p, то q" и некоторого высказывания: $p' \neq p$ — иногда можно вывести нетривиальное заключение $q' \neq q$.

9.3.1. Представление правила: "ЕСЛИ X ЕСТЬ A, ТО Y ЕСТЬ B"

Предположим, что высказывание p выражает некоторое ограничение на возможные значения переменной X, а высказывание q — некоторое ограничение на возможные значения переменной Y. Причинно-следственную связь от X к Y можно представить условным распределением возможностей $\pi_{Y|X}$ (или словным вероятностным распределением $p_{Y|X}$), которое ограничивает возможные значения Y при заданном значении X. Тогда, зная функцию распределения возможностей, характеризующую высказывание p, можно вычислить функцию распределения возможностей, выражающую ограничение на Y, по формуле

$$\forall t \in T,\ \pi_Y(t) = \sup_{s \in S} \pi_{Y|X}(t, s) * \pi_X(s), \qquad (60)$$

где * — треугольная норма. Формула (60) из теории возможностей аналогична формуле

$$\forall t \in T, p_Y(t) = \sum_{s \in S} p_{Y|X}(t, s) \cdot p_X(s) \qquad (61)$$

из теории вероятностей.

Отметим,

что $\pi_{Y|X}(t, s) = \Pi(q \mid p)$, если $q =$ "$Y = t$" и $p =$ "$X = s$", а π_Y — проекция двумерного распределения возможностей $\pi_{X,Y} = \pi_{Y|X} * \pi_X$ на базовое множество T переменной Y, определяемая в соответствии с выражением (43).

Тогда правило: "если X есть A, то Y есть B" — будет выражаться следующим неравенством, индуцируемым условием (42):

$$\forall t \in T,\ \mu_B(t) \geqslant \sup_{s \in S} \pi_{Y|X}(t, s) * \mu_A(s), \qquad (62)$$

где μ_A и μ_B — функции распределений возможностей для переменных X и Yсоответственно, а функция $\pi_{Y|X}$ неизвестна.

Неравенство получается вследствие того, что, когда "Y есть B", мы должны иметь "Y есть B' ", если B' соответствует распределению возможностей, которое содержит аналогичное распределение, связываемое с B. Для непрерывной треугольной нормы наибольшее решение уравнения (62) имеет вид

$$\pi_{Y|X}(t, s) = \mu_A(s) * \rightarrow \mu_B(t), \tag{63}$$

гдеоперация импликации *→ определяется выражением (47). В частности,

$$a * b = \min(a, b) \Rightarrow a * \rightarrow b = \begin{cases} 1, \text{ если } a \leqslant b, \\ b, \text{ если } a > b \end{cases} \qquad \text{(импликация Гёделя}$$

$$a * b = a \cdot b \Rightarrow a * \rightarrow b = \begin{cases} 1, \text{ если } a = 0, \\ \min(1, b/a) \text{ в противном случае;} \end{cases}$$

$$\text{(импликация Гогена)}$$

$$a * b = \max(0, a + b - 1) \Rightarrow a * \rightarrow b = \min(1, 1 - a + b), \qquad \text{(Лукасевич)}$$

Аналогично определяется конъюнкция * на основе операции импликации $* \rightarrow$.

9.3.2. Обобщенное правило "модус поненс"

Теперь мы можем рассмотреть обобщенное правило "модус поненс", предложенное Заде:

(XVIII) **если X есть A, то Y есть B**
X есть A'
———————————————
то Y есть B' ,

где $\mu_{B'} = \pi_Y$ можно легко вычислить по формулам (60) и (63), откуда получаем

$$\forall t \in T,\ \mu_{B'}(t) = \sup_{s \in S} (\mu_A(s) * \rightarrow \mu_B(t)) * \mu'_A(s), \tag{64}$$

что записывается в виде

$$B' = A' \circ (A * \rightarrow B).$$

В ряде работ показано, что $A \circ (A * \to B) = B$ и что для любого нормального множества

$$A', A' \subseteq A \Rightarrow B' = B, \forall A', B' \supseteq B$$

$$\forall A', \ \mu_{B'}(t) = 1 \Longleftrightarrow \mu_B(t) \geqslant \inf\{\mu_A(s) \mid \mu_{A'}(s) = 1\} \triangleq \lambda_1;$$
$$\forall A', \ \mu_{B'}(t) \geqslant \sup_{s \in S} \{\mu_{A'}(s) \mid \mu_A(s) = 0\} = \mu_{CP(A,A')}(0) \triangleq \lambda_0. \qquad (65)$$

Неравенство (65) означает, что как только значительная часть множества A' не включается в множество A, то возникает постоянный уровень неопределенности (что интуитивно ясно). В частности, если $\exists s \in A, \mu_{A'}(s) = 1$ и $\mu_A(s) = 0,$ то B′=T (полная неопределенность). Таким ооразом, если известно, что нечеткое множество A "близко" к нечеткому множеству A (но все же заметно отличается от него) в некоторой метрике, то обобщенное правило "модус поненс", представленное в виде (XVIII), оказывается недостаточной моделью для дедуктивного вывода из посылок "X есть A' " и "если X есть A, то Y есть B" заключения "Y есть B' ", где B' - "близко" к B. Это заключение можно сделать лишь при наличии дополнительной информации о поведении функции $X \to Y,$ раскрывающей причинную связь между X и Y в окрестности (A,B), а именно информации о непрерывности и монотонности этой функции. Например, из правила типа: "если помидор красный, то он спелый" и факта "помидор ярко-красный" по обобщенному правилу "модус поненс" нельзя сделать заключение: "помидор очень спелый"; это заключение можно сделать лишь тогда, когда известно, что степень зрелости возрастает с увеличением красноты помидора.

С другой стороны, легко убедиться в том, что исходя из нечетких правил вида: "если X есть A, то Y есть B" и "если Y есть B', то Z есть C" можно построить нечеткое правило: "если X есть A, то Z есть C" — при условии, что $B \subseteq B'$. Обобщение правила "модус поненс" приведет к тому же результату Z, что и последовательное применение двух правил.

Схему вывода (XVIII) можно сформулировать в терминах степеней истинности с помощью понятия совместимости двух нечетких высказываний, введенного в разд. 9.1.4 в виде

$$\mu_{CP(B,B')}(v) = \sup_{u \in [0,1]} (u * \to v) * \mu_{CP(A,A')}(u); \qquad (66)$$

$$\mu_{B'}(t) = \mu_{CP(B,B')}(\mu_B(t)). \qquad (67)$$

Формулы (66) и (67) эквивалентны формуле (64).

Отметим, что ряд авторов положили, что $B = A' \circ (A \times B)$, где $A \times B$ — декартово произведение нечетких множеств А и В. Величина $A \times B$ получается из неравенства (62) для * = min, но не является наибольшим решением, что придает некоторую произвольность результату В'. Вообще говоря, когда посылка "если X есть А, то Y есть В" взвешена некоторым значением нечеткой истинности τ, представляемой характеристической функцией μ_τ на интервале [0, 1], что можно интерпретировать как

$$\tau = CP(A * \to B, X \to Y), \tag{68}$$

где

$$\mu_{A* \to B} = \mu_A * \to \mu_B \text{ и } \mu_{X \to Y} = \pi_{Y|X},$$

то в результате получаем

$$\pi_{Y|X}(t, s) = \mu_\tau(\mu_A(s) * \to \mu_B(t)) \tag{69}$$

И

$$\forall t \in T, \mu_{B'}(t) = \sup_{s \in S} \mu_\tau(\mu_A(s) * \to \mu_B(t)) * \mu_{A'}(s). \tag{70}$$

Замечание. Очевидно, что это преобразование не имеет смысла, когда импликация $A * \to B$ - обычное множество, в то время как значение τ не выражает ни истинность, ни ложность $(\mu_\tau(0) = \mu_\tau(1) = 0)$.

Подобным же образом можно рассмотреть и правило "модус толленс" с нечеткими посылками. Обобщенное правило "модус толленс" выражается с помощью уравнения

$$\forall s \in S, \mu_{A'}(s) = \sup_t (\mu_A(s) * \to \mu_B(t)) * \mu_{B'}(t), \tag{71}$$

если импликация $* \to$ удовлетворяет закону контрапозиции, т. е. выполняется условие $x * \to y = (1 - y) * \to (1 - x)$. Это необходимо для обеспечения эквивалентности правил: "если X есть А, то Y есть В" и "если Y есть не В, то X есть не А" (т. е. $A * \to B = B * \to A$). Таким образом, можно убедиться, что, например, для

$$x * y = \max(0, x + y - 1), x * \to y = \min(1, 1 - x + y), A' = \overline{A},$$

как только $B' = \overline{B}$, где $\mu_{\overline{A}} = 1 - \mu_A, \mu_{\overline{B}} = 1 - \mu_B$. Зато, когда * = min, импликация *→ не является контрапозицией, но именно последнюю надо использовать при определении правила "модус толленс".

9.3.3. Интерпретация нечетких правил, основанных на импликации Геделя

Если * =min, то выражение (63) записывается в виде

$$\forall s, \forall t, \pi_{Y|X}(t, s) = \begin{cases} 1, \text{ если } \mu_A(s) \leqslant \mu_B(t), \\ \mu_B(t) \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Когда А — обычное множество, правило: "если X есть А, то Y есть В" — выражает, что значение Y ограничено функцией принадлежности μ_B, если переменная X принимает свои значения из множества А. Нам ничего не известно

об Y (т. е. $\pi_{Y|X}(t, s) = 1$, если $s \in A$). Когда А — нечеткое множество, но А' вырождается в одноточечное подмножество $A' = \{s_0\}$, легко проверить, что по формуле (64) имеем

$$B' = \begin{cases} T, \text{ если } s_0 \in S(A) \text{ (неопределенность),} \\ B, \text{ если } s_0 \in \mathring{A} \ (\mathring{A} - \text{ядро нечеткого множества } A) \end{cases}$$

и $\mathring{B} \subseteq B' \subseteq S(B)$ в других случаях.

Все это позволяет выразить смысл правила: "если X есть А, то Y есть В" следующей схемой: если переменная X принимает свои значения на носителе S(A) нечеткого множества А, то переменная Y принимает свои значения на носителе S(B) нечеткого множества В, причем нечеткость множеств А и В позволяет уточнить, что чем дальше значение переменной А отстоит от ядра нечеткого множества А, тем возможнее, что и соответствующее значение переменной Y удалено от ядра нечеткого множества В. Вследствие этого если В — четкое множество, то заключение правила не меняется, когда $A' = \{s_0\}$ выходит за пределы ядра нечеткого множества А, но остается внутри его носителя. Такое поведение противоречит интуитивным представлениям; во всяком случае, эта модель делает бесполезным учет нечеткости условия: "X есть А", когда В — четкое множество.

В ряде практических случаев, когда А — нечеткое множество, смысл правила может выражаться в виде: "чем в большей степени X есть А, тем достовернее, что Y есть В". Это означает, что по мере удаления X от ядра нечеткого множества А заключение: "Y есть В" — становится все более и более неопределенным. Условное распределение возможностей, определенное выше, не отражает постепенности этого нарушения заключения, так как при выходе s_0 за пределы носителя

S(A) происходит резкий переход от заключения $"Y \in S(B)"$ к полной неопределенности.

Для представления неточных правил вида: "чем в большей степени X есть A, тем больше уверенность, что Y есть B" — можно использовать контрапозицию импликации Геделя при * = min, т. е. условное распределение

$$\pi'_{Y|X}(t, s) = \begin{cases} 1, \text{если } \mu_A(s) \leqslant \mu_B(t), \\ 1 - \mu_A(s) \text{ в противном случае}, \end{cases}$$

что приводит к выражению

$$\pi'_{Y|X}(t, s) = (1 - \mu_B(t)) * \to (1 - \mu_A(s)),$$

где *→ задается формулой (47) при * = min. Тогда правило: "Если Y не есть B, то X не есть A" — моделируется с помощью выражения (63) и используется как правило "модус толленс". Легко убедиться, что при $A' = \{s_0\}$ имеем

$$B' = \begin{cases} T, \text{если } s_0 \notin S(A) \text{ (неопределенность)}, \\ B, \text{если } s_0 \in \mathring{A} \end{cases}$$

и $\mu_{B'}(t) \geqslant 1 - \mu_A(s_0) > 0$ в остальных случаях.

Итак, правило интерпретируется здесь следующим образом: "Если переменная X принимает свое значение в ядре $\mathring{A}$ нечеткого множества A, то переменная Y принимает свое значение в ядре $\mathring{B}$ нечеткого множества B", однако данное заключение становится все более неопределенным по мере удаления s_0 от ядра нечеткого множества A вплоть до полной неопределенности при достижении границ носителя нечеткого множества A. Указанный ранее эффект разрыва, наблюдаемый при использовании непосредственно импликации Геделя, здесь исчезает.

Когда B — четкое множество, интерпретация правила: "если X есть A, то Y есть B" — с помощью условного распределения возможностей $\pi'_{Y|X}$ более удовлетворительна, чем с помощью условного распределения $\pi_{Y|X}$, поскольку заключение меняется при удалении $A' = \{s_0\}$ за пределы ядра нечеткого множества A. С другой стороны, его представление непосредственно в виде (63) кажется более подходящим, если множество A — четкое (по соображениям симметрии). Когда A и B — нечеткие множества, то, если стремиться к сохранению свойства B' = B при A' = A, в качестве правила "модус поненс" предпочтительнее использовать непосредственно импликацию Геделя.

Нечеткие правила с неопределенными заключениями. Правило вида: "если X есть A, то Y есть B" с весовым коэффициентом α, характеризующим неопределенность и рассматриваемым как нижняя граница степени необходимости, может пониматься двояко:

либо считается, что весовой коэффициент α относится к заключению: "Y есть B" (когда известно, что условие: "X есть A" - вполне справедливо); в этом случае неопределенное правило эквивалентно нечеткому правилу вида: "если X есть A, то Y есть B*", где $\mu_{B*} = \max(\mu_B, 1 - \alpha)$, в соответствии со способом моделирования неточных и неопределенных фактов, предложенным в разд. 9.1;

либо считается, что весовой коэффициент α относится ко *всему* правилу; в этом случае если $\pi_{Y|X}$ - условное распределение, выражающее правило без учета неопределенности, то условное распределение для правила, учитывающего неопределенность, имеет вид

$$\pi^*_{Y|X} = \max(\pi_{Y|X}, 1 - \alpha).$$

Отметим, что если $\pi_{Y|X}$ выражается с помощью формулы (63), то

$$\mu_A(s) * \to \max(\mu_B(t), 1 - \alpha) \neq \max(\mu_A(s) * \to \mu_B(t), 1 - \alpha).$$

Эти два подхода не эквивалентны друг другу, кроме того случая, когда A — четкое множество. В этом случае всегда можно записать

$$\pi^*_{Y|X}(t, s) = \max(1 - \mu_A(s), \mu_B(t), (1 - \alpha)),$$

что и показывает эквивалентность этих двух подходов.

Если правило: "если X есть A, то Y есть B" - является неопределенным правилом, т. е. когда A и B - обычные множества, и если a и a' - оценки соответственно степени необходимости и степени достаточности того, чтобы из правила: "X есть A" - следовало бы правило: "Y есть B", то примем

$$\pi_{Y|X}(t,\ s) = \begin{cases} 1, \text{если } s \in A \text{ и } t \in B, \\ 1 - a, \text{если } s \in A \text{ и } t \notin B, \\ 1 - a', \text{если } s \notin A \text{ и } t \in B, \\ 1, \text{если } s \notin A \text{ и } t \notin B, \end{cases}$$

что фактически эквивалентно двум правилам: "если X есть A, то Y есть B достоверно со степенью a", т. е. "Y не есть B возможно со степенью 1 — a", и "если X не есть A, то Y не есть B достоверно со степенью a' ".

Полагая p ="X есть A" и q = "Y есть B" и учитывая, что условное распределение $\pi_{Y|X}$ характеризуется четырьмя значениями $\Pi(q \mid p) = 1, \Pi(\neg q \mid p) = 1 - a, \Pi(q \mid \neg p) = 1 - a', \Pi(\neg q \mid \neg p) = 1,$ можно убедиться, что формула для обобщенного правила "модус поненс" (64) сводится к формулам (44), (45), когда *A*' имеет вид "X есть A достоверно со степенью b и возможно со степенью b' " (где max(1 - b, b') = 1), если положить $\Pi(p) = b', \Pi(\neg p) = 1 - b.$

9.3.4. Сложные посылки

Сложные нечеткие высказывания вида: "X_1 есть A_1, и X_2 есть A_2" — естественным образом представляются с помощью декартова произведения множеств (см. разд. 9.1.4), когда переменные X_1 и X_2 являются невзаимодействующими. В этом случае получаем высказывание: "(X_1, X_2) есть $A_1 \times A_2$". Аналогично сложное нечеткое высказывание вида: "X_1 есть A_2 или X_2 есть A_2" — с учетом того же предположения о невзаимодействующих переменных выражается с помощью декартова копроизведения + в виде: "(X_1, X_2) есть $A_1 + A_2$". Наличие взаимодействия (компенсации) между переменными должно в явном или неявном виде учитываться при свертывании нечетких множеств в рамках подхода, подобного подходу из гл. 8. Обобщенное правило "модус поненс" тривиальным образом расширяется на случай сложных посылок, если воспользоваться результатами анализа условных распределений возможностей вида $\pi_{Y|(X_1, X_2)}$, проведенного в разд. 9.3.2, и т. п.

9.3.5. Комбинирование функций распределения возможностей

Рассмотрим случай, когда один источник информации утверждает, что "X есть A_1", в то время как второй источник информации утверждает, что "X есть A_2", где каждое из утверждений представлено функцией распределения возможностей $\pi_i = \mu_{A_i}, i = 1, 2.$

Первый способ комбинирования этой информации состоит в построении пересечения функций распределения возможностей с последующей нормировкой полученного результата, т. е.

$$\forall s \in S, \pi_{12}(s) = \frac{\pi_1(s) * \pi_2(s)}{\sup\limits_{s \in S} \pi_1(s) * \pi_2(s)}, \tag{72}$$

где операция * есть некоторая операция пересечения нечетких множеств. Формула (72) составлена аналогично формулам (51), (52), которые получаются из нее как частный случай при * = min и $S = \{p, \neg p\}$. Этот метод предполагает, что оба источника информации надежны, и информацию можно уточнить посредством сопоставления сведений от каждого из них, причем надежность источников оправдывает использование нормировки полученной функции распределения возможностей. Выбор операции $* \neq \min$ означает подкрепление согласующихся между собой данных в том смысле, что получаемый результат будет более специфичным. Например, если $A_1 = A_2 = A$, то $\pi_{12} = \mu_A * \mu_A < \mu_A$.

При наличии серьезного противоречия между двумя источниками предположение об их обоюдной надежности становится сомнительным, и тогда следует брать объединение нечетких множеств, соответствующих двум различным сообщениям:

$$\forall s \in S, \pi_{12}(s) = \pi_1(s) \perp \pi_2(s), \tag{73}$$

где $\perp$— операция объединения нечетких множеств, обычно операция max. Отметим, что если функция распределения возможностей π_1 и π_2 нормированы, то и функция распределения π_{12} всегда будет нормированной. Однако использование формулы (73) может привести к ощутимой потере точности имеющейся информации.

Заметим, что применение правила Демпстера (см. формулы (53), (54)) с использованием весовых функций m_1 и m_2, построенных по функциям π_1 и π_2 (при обращении формулы (1.29)) для сопоставления информации, поступающей от двух источников, не дает весовую функцию, эквивалентную функции распределения возможностей.

Другая типичная ситуация, в которой приходится комбинировать информацию возможностного характера, — это ситуация, когда для описания причинно-следственной связи X с Y имеются n правил вида: "если X есть A_i, то Y есть B_i". Каждое правило i представлено нечетким множеством $A_i * \to B$ (см. формулу (63)), а все множество правил можно представить в виде пересечения $\bigcap_i A_i * \to B_i$, где символ $\cap$

означает операцию min. Тогда в случае нескольких правил обобщенное правило "модус поненс" выражается в виде

$$\forall t,\quad \mu_{B'}(t) = \sup_{s} \{ \min_{i=1,\dots,n} (\mu_{A_i}(s) * \to \mu_{B_i}(t)) * \mu_{A'}(s)\}. \tag{74}$$

Можно показать, что если применить обобщенный вариант "модус поненс" к каждому правилу и найти пересечение отдельных полученных результатов, то построенная таким образом функция распределения возможностей будет гораздо менее точной, чем полученная по формуле (74).

9.3.6. Нечеткая фильтрация и продукционные правила

Здесь рассматриваются правила вида: "если X есть A, то (действие)", где A — нечеткое множество. Применение таких нечетких правил требует изменения обычной процедуры доступа к продукционным правилам. В классических экспертных системах некоторое правило начинает работать за счет фильтрации базы фактов, т. е. установления соответствия между условной частью правила и фактами, описывающими текущую ситуацию. В общем случае это соответствие носит символьный характер (даже когда можно воспользоваться понятием синонимии или при наличии несвязанных переменных в правилах) и дает результаты в рамках двузначной логики "все или ничего" (правило работает или нет). В случае же нечеткого правила это не так: фильтрация становится семантической, т. е. рассматривается соответствие между нечеткими множествами, выражающими смысл факта и смысл условной части правила. При этом оценка соответствия будет градуированной. С нечетким фактом A' можно сопоставить описываемую правилом стандартную ситуацию A, не требуя, чтобы A = A', лишь бы A и A' имели совместимые, относительно близкие значения.

Тогда действенность правила оценивается с помощью двух показателей соответствия факта A' ситуации A:

меры возможности П(A, A'), оценивающей, насколько совместимы друг с другом A и A', и определяемой формулой (17); меры необходимости N(A, A') оценивающей, насколько факт A является частным случаем ситуации A, и определяемой формулой (18).

Более подробно процедура нечеткой фильтрации обсуждается дальше.

Практически экстремальные значения показателей П(A, A') и N(A, A') интерпретируются следующим образом:

N(A, A') =П(A, A') = 1 — ситуация, описываемая фактом: "X есть A' " — частный случай ситуации, предусматриваемой условием: "X есть

А". Это — частный случай и в прямом смысле, поскольку здесь из $\mu_{A'}(s) > 0$ следует, что $\mu_A(s) = 1$. Таким образом, правило определенно работает.

$\Pi(A, A') = N(A, A') = 0$ - правило не работает, поскольку факт "Х есть А'" вовсе не соответствует ситуации, предусмотренной правилом.

$\Pi(A, A') = 1, N(A, A') = 0$ — неизвестно, работает правило или нет, поскольку описание, содержащееся в факте: "Х есть А′ ", не противоречит условной части правила, но в то же время и не мешает согласованности этого факта с прочими ситуациями, предусматриваемыми другими правилами. В самом деле, описание реальной ситуации ("Х есть А' ") слишком неточно, чтобы определить, соответствует ли она условию: "Х есть А".

Обработка на ЭВМ систем нечетких правил занимает больше времени, чем обработка систем обычных правил. Несмотря на это, применение систем нечетких правил (особенно когда обрабатывается информация с использованием различных шкал числовых значений) дает ряд преимуществ:

можно моделировать неточную, например лингвистическую, информацию за счет представления различных смысловых оттенков и с помощью ограниченного числа правил (описывается лишь малое число стандартных ситуаций);

удается избежать дискретности функционирования обычных систем продукционных правил, где полученные результаты могут сильно искажаться при переходе от одной стандартной ситуации к другой; правила могут работать даже тогда, когда реальная ситуация точно не соответствует предусмотренной, что часто бывает во многих практических случаях;

нечеткая фильтрация позволяет провести классификацию числовых (возможно, и неточных) данных, когда соответствующие классы описываются именами нечетких множеств.

До недавнего времени имелось мало систем приближенного вывода на основе теории возможности, причем в большинстве из них использовалась лишь незначительная часть результатов, изложенных в настоящей главе. Впервые одна из форм обобщенного правила "модус поненс", опирающаяся на идею Заде, применялась при выполнении нечетких правил в работе Мамдани, который применил ее к задаче управления непрерывными процессами в промышленном производстве. В других формах нечеткие правила использовались в медицинской диагностике, а также в системах поддержки принятия управленческих решений. Различные формы построения обобщенного правила "модус поненс", применяемые авторами, отличаются по виду эмпирически выбираемой операции импликации *→ в формуле (64), причем этот выбор производится независимо от вида операции *, в качестве которой обычно берется операция * →. Мицумото и др. провели сравнение многочисленных форм обобщенного правила "модус поненс" при различных операциях импликации *→.

Схемы рассуждений с неопределенными правилами нашли применение в медицинских экспертных системах SPHINX и PROTIS, в информационно-поисковой системе, а также в общей машине вывода ARIES. Все эти схемы находятся в рамках многозначной логики. Таким же образом исследовались правила отделения на основе нечетких значений истинности. Похожий подход применял Цукамото в задачах управления технологическими процессами. Этот метод в вычислительном плане эквивалентен обобщенному правилу "модус поненс" в виде (66), (67). Машина вывода TAIGER основана на матричной обработке информации, содержащей неопределенность, с помощью степеней возможности: она опробована в задачах анализа финансирования. Работы, где одновременно рассматривались бы нечеткие и неопределенные правила, все еще очень редки. Так, в в ряде работ анализируется задача обработки нечеткой и неопределенной информации в экспертной системе с продукционными правилами, используемой в строительстве (система SPERIL); авторы оценивают неопределенность с помощью функций доверия в смысле Шейфера, рассматриваемых применительно к нечетким событиям. В ряде работ предлагается единый подход к анализу неточности и неопределенности в рамках теории возможностей, ориентированный на применение к экспертным системам в геологии; этот подход иллюстрируется на небольшом примере оценки кандидатур в следующем разделе.

Среди общих подходов, которые могут использоваться при разработке экспертных систем, содержащих нечеткие правила, следует отметить метод нечеткой фильтрации, который позволяет решать задачу выбора продукционных правил с неточной или нечеткой условной частью, а также метод нечетких запросов при обращении к базе неточных или нечетких данных.

ПРИМЕР

Общие методы, описанные в настоящей главе, нашли свое применение при разработке простой машины вывода (обратная цепочка вывода по высказываниям). В этом разделе дается простой пример ее применения и представлены основные результаты, касающиеся построения эффективной процедуры выполнения обобщенного правила "модус поненс" (в формулах (47) и (64) при * =min).

Предлагаемая иллюстрация относится к задаче оценки кандидатов при профессиональном отборе. Эта оценка основывается на:
результатах различных тестов: теста на интеллектуальность IQ, а также теста на владение иностранным (английским) языком, где возможно неточное (т. е. качественное) описание характеристистик кандидата; различных критериях, которые оцениваются на основе анализа досье (например, оценка соответствия профиля образования) и после беседы с кандидатом (например, приспособленность к переменам по службе, область интересов, специальные способности.

В программе приняты следующие условия. Любой факт — это атом (например, f_3), который характеризуется тройкой (объект, признак, значение), причем значение в тройке может быть как точной, так и неточной (нечеткой) величиной. Когда эта составляющая неточна, она представляет собой атом (обозначаемый тильдой), значение которого есть функция распределения возможностей. Эта функция либо непрерывна и имеет вид трапеции на $\mathfrak{R}$ (тогда ее можно представить четверкой чисел), либо дискретна (представлена как список пар). Неопределенность, содержащаяся в точном факте, связана в машинной памяти со свойством cert; эта неопределенность выражается с помощью двух чисел b, b', таких, что b < b' и b = 0 или b'= 1, которые интерпретируются как степени необходимости и возможности того, что рассматриваемый факт является истинным в соответствии с условием (13). Правило — это атом (например, r_7), значением которого служит некоторый список, составленный из двух исходных списков: первый из них образован из троек — посылок, которые предполагаются связанными с помощью конъюнкции, а второй содержит тройки — заключения. В нашем примере каждое правило содержит только одно заключение. В случае неопределенного правила, т. е. правила, дающего точное, но неопределенное заключение, к указанной тройке добавляются два коэффициента a и a', которые понимаются соответственно как степень "достаточности" и степень "необходимости" того, что посылки удовлетворяются и вывод справедлив. Эти два коэффициента представляют собой нижние границы величин $N(p \to q)$ и $N(q \to p)$ соответственно, введенных в разд. 9.2.1. Механизм вывода основан на схеме рассуждений, объединяющих (I) и (V), т. е.

$$(\mathrm{XIX})\quad \frac{\begin{array}{l} N(p\to q)\geqslant a \\ N(q\to p)\geqslant a' \\ N(p)\geqslant b,\ \Pi(p)\leqslant b',\ \max(1-b,b')=1 \end{array}}{N(q)\geqslant \min(a,b),\ \Pi(q)\leqslant \max(1-a',b')}.$$

Эту схему также можно обосновать в рамках многозначных логик. Заметим, что если max(1 — b, b') = 1, то всегда имеем

$$\max(1-\min(a,b),\max(1-a',b'))=1,\ \forall a, \forall a'.$$

Замечание. При необходимости операции min(a, b) и max(l-a', b ') можно ослабить, заменив их соответственно на операции $a\cdot b$ и $1-a'+a'\cdot b'$ или на операции max (0, a + b - 1) и min (1, 1 - a' + b'). Пригодность тех или иных вариантов можно обосновать лишь в рамках подхода на базе многозначных логик; тем не менее полученные результаты ни в коем случае не являются ложными, поскольку они аппроксимируют интервал [min(a,b),max(l -a',b')].

В нашем примере некоторые неопределенные правила имеют нечеткие посылки. Неточными называются такие правила, у которых составляющие (значения посылок и заключения) представляют собой функции распределения возможностей. В программе, написанной на языке Лисп, предполагается, что все функции распределения, задаваемые правилами, являются непрерывными трапециевидными функциями. Каждая функция распределения, составляющая "значение" заключения из нечеткого правила, определяется пятеркой действительных чисел, одно из которых отражает степень неопределенности заключения.

Полученные правила позволяют имитировать ход рассуждений, представленных ниже в виде дерева, которое описывает множество возможных цепочек правил.

Рассматриваемый пример по своей природе аналогичен примеру из гл. 3, относящемуся к выбору автомобиля, однако здесь показан совершенно другой способ представления процесса свертывания частных оценок в обобщенную.

Правила с неточными посылками и заключением описываются с помощью обобщенного правила "модус поненс" (см. формулу (64), когда * = min). Примером таких правил служит набор r_2, r_3, r_4, r_5. Неопределенные же правила, в которые функции распределения возможностей не входят, анализируются с помощью схемы (XIX), где b и b' получаются в виде $b=\min\limits_{i=1,\ldots,n} b_i$ и

$$b' = \min_{i=1,\dots,n} b'_i ,$$

n — число посьшок, а $[b_i, b'_i]$ — интервал достоверности факта, объединенного с i-й посылкой, причем этот факт либо принадлежит базе исходных фактов, либо получается в результате предварительного вывода.

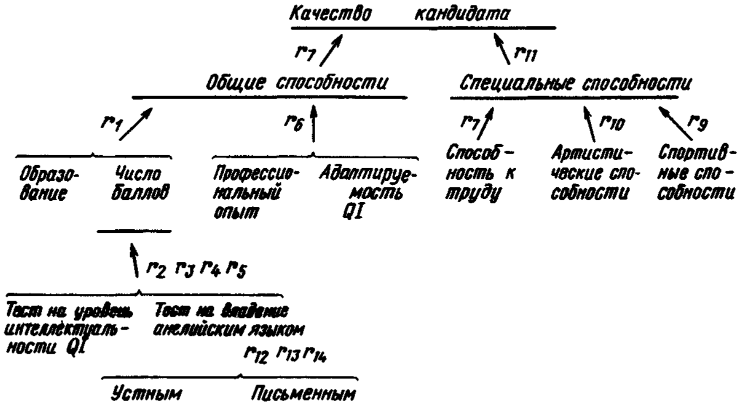


Рис. 3.

В случае неопределенных правил, у которых некоторые посылки содержат фукции распределения возможностей, значения b_i и b_i' вычисляются как необходимость и возможность удовлетворения данной посылки (см. формулы (17), (18)). Величины b_i и b_i', рассчитанные по этим формулам, не всегда таковы, что соблюдается условие

$$\max(1 - b_i, b'_i) = 1.$$

Их последующая нормировка

$$b_i^* = 1 - \frac{1 - b_i}{\max(1 - b_i, b'_i)}, \quad b_i'^* = \frac{b'_i}{\max(1 - b_i, b'_i)}$$

в соответствии с формулами (51) и (52) позволяет перейти к паре (b_i^*, $b_i'^*$), которая удовлетворяет указанному ограничению и, следовательно, легче интерпретируется. Эта нормировка позволяет выявить степень удовлетворения посылки: посылка, скорее, удовлетворяется (случай $b_i'^* = 1$) или посылка, скорее, неудовлетворяется (случай $b_i^* = 0$). *

Наконец, комбинирование результатов нескольких неопределенных правил осуществляется с помощью формул (51) и (52).
Имеется программа на языке Лисп, в которой реализованы пример и описанные выше процедуры. Она содержит:
машину вывода, которая работает с неопределенными и нечеткими правилами или с правилами вместе;
базу знаний, которая включает правила r_1 - r_{14}, определение нечетких термов и восемь фактов, известных для каждого кандидата; отметим, что система не требует в обязательном порядке явной информации о девяти характеристиках, образующих листья дерева; пример экспертизы, где оценивается качество кандидата, описываемое восемью фактами, и где система выдает по требованию промежуточные оценки.

10. Эвристический поиск в неточной среде и нечеткое программирование

Специалисты в области искусственного интеллекта занимаются проблемами воспроизведения функций человеческого разума посредством машин, причем далеко не всегда точно известно, каким образом обеспечиваются эти функции у человека. Например, это такие функции, как понимание сообщений, приобретение знаний, порождение планов действий, диагностика ситуаций, приспособление общей линии поведения к конкретной среде.
Во всех этих видах деятельности человек обладает возможностью учета неточной и неопределенной информации. Но до настоящего времени этот аспект человеческого интеллекта сравнительно редко рассматривался в исследованиях по искусственному интеллекту.
Поэтому в общем случае в рамках искусственного интеллекта не ставится задача моделирования психических процессов, и в частности внутренних представлений человека при разработке прикладных систем, способных выполнять функции человеческого. В предыдущей главе были изложены механизмы вывода, позволяющие использовать такую неточную и неопределенную информацию. В первой части настоящей главы рассматривается ряд методов, применяемых, когда решение задачи понимается как поиск последовательности элементарных действий с применением оценочных функций.
Наоборот, во второй части главы уже предполагается, что имеется последовательность элементарных действий, и речь идет об их выполнении в реальной ситуации.

В первом случае неточность связывается с операндами оценочной функции, которая направляет поиск. (Обычно под оценочной функцией понимается выражение вида $\mathbf{f(n) = g(n) + h(n)}$, где g(n) - стоимость уже пройденного пути до текущего состояния n, а h(n) - оценка минимальной стоимости еще оставшегося пути от n до некоторого конечного состояния.) Во втором случае неточность может появляться как при определении плана действий, так и в восприятии среды по мере выполнения этого плана.

Однако эта глава не претендует на подробный охват и отражение всех исследований, направленных на применение теории возможностей в искусственном интеллекте.

10.1. Эвристический поиск в неточной среде

Методы поиска на графах, и в частности, на древовидных структурах, широко используются как в исследовании операций, так и в искусственном интеллекте.

В настоящем разделе основное внимание уделяется семейству алгоритмов А*, принцип построения которых мы напомним ниже. В качестве иллюстрации берется один метод из этого семейства, который применяется для решения задачи о коммивояжере: сначала с точными оценками стоимости, затем с интервальными оценками и, наконец, с оценками, представленными в виде нечетких интервалов.

10.1.1. Алгоритмы А и А*

Решение произвольной задачи рассматривается как поиск пути на графе от некоторой фиксированной вершины, называемой начальным состоянием, к одной из вершин, принадлежащих некоторому заранее выбранному подмножеству, называемому ***множеством конечных состояний***. Этот граф, характеризующий пространство состояний, лишь потенциально известен в том смысле, что помимо начального и конечных состояний имеется множество операторов, позволяющих порождать новые состояния из заданного.

Применение произвольного оператора к некоторому выделенному состоянию ("родительскому" состоянию) представляется в виде дуги, направленной от этого родительского состояния к вершине — потомку, называемой "дочерним" состоянием. Каждой дуге приписывается некоторая стоимость, характеризуемая положительным числом. Цель поиска заключается в построении пути между начальным состоянием и одним из конечных состояний, имеющего минимальную стоимость, причем стоимость пути рассчитывается как сумма стоимостей составляющих его дуг. Методология поиска состоит в последовательном спуске по дереву от начального состояния до тех пор, пока не будет достигнуто некоторое конечное состояние. Граф, соответствующий заданному этапу поиска, называется *графом поиска.* Когда не удается достичь конечного состояния в графе поиска, возникает задача выбора некоторого состояния, на которое будут действовать операторы с целью порождения новых состояний ("раскрытие" состояния). Этот выбор направляется оценочной функцией, которая каждому способному к раскрытию состоянию n ставит в соответствие положительное число f (n), определяемое в виде суммы

$$\mathbf{f(n) = g(n) + h(n)}. \tag{1}$$

Функция g характеризует стоимость кратчайшего пути между начальным состоянием и состоянием n, известную на текущем этапе выполнения алгоритма, а функция h - стоимость, которая зависит только от состояния n; ее обычно интерпретируют как оценку минимальной стоимости пути между состоянием n и каким-либо из конечных состояний. Состояние для дальнейшего раскрытия выбирается из числа тех, у которых оценочная функция минимальна.

В алгоритме производится проверка на принадлежность некоторого состояния к множеству конечных состояний, причем она делается не при возникновении этого состояния на графе поиска, а лишь тогда, когда указанное состояние берется для раскрытия.

Если граф поиска конечный, а эвристический член h(n) в равенстве (1) есть нижняя оценка минимальной стоимости пути между состоянием n и каким-либо из конечных состояний, то имеем алгоритм поиска типа A* и тогда обеспечивается выполнение следующих условий:
а) происходит останов программы, реализующей данный алгоритм;
б) такой останов позволяет либо найти некоторый путь к конечному состоянию (если такой путь существует), либо удостовериться, что такого пути не существует;

в) когда такой путь к конечному состоянию найден, он имеет минимальную стоимость.

В более общем случае если не обеспечивается существование такой нижней оценки h(n), алгоритм имеет всего лишь тип A (а не A*) и выполняются только свойства а) и б). При использовании ряда дополнительных предположений эти свойства сохраняются и для бесконечных графов поиска. Далее описывается пример использования алгоритма типа A* в так называемой задаче о коммивояжере. Затем он адаптируется к случаям, когда стоимости дуг известны лишь приближенно в виде обычных или нечетких интервалов.

10.1.2. Классическая задача о коммивояжере

Пусть $G = (S, \mathcal{A})$ — некоторый граф. Множество его дуг $\mathcal{A}$ отображает транспортные пути между множеством городов, представляемых вершинами из множества S. Каждой дуге (S_i, S_j) приписывается положительная стоимость C_{ij}. Задача состоит в построении такого маршрута, который проходит один, и только один раз через каждый город и имеет минимальную стоимость (если подобный маршрут существует).

Эту задачу можно решить с помощью алгоритма A*, описываемого ниже. Начальное состояние задается некоторой вершиной S_0 из множества S. Промежуточные, не конечные состояния представляют собой последовательности различных вершин, начинающиеся с вершины S_0. Конечные состояния являются последовательностями вершин, первая из которых S_0, а другие образуют перестановку всех вершин множества S, оканчивающуюся вершиной S_0.

Пространство состояний, которое не следует смешивать с графом G, образуется следующим способом: если в $\mathcal{A}$ существует дуга (S_i, S_k), причем вершина S_k не принадлежит подпоследовательности $(S_i, \ldots, S_j)$, то имеется дуга, направленная из состояния $n = (S_0, S_i, \ldots, S_j)$ в состояние $n' = (S_0, S_i, \ldots, S_j, S_k)$. Слагаемое g(n') при $n' = (S_0, S_i, \ldots, S_i, S_k)$ есть сумма стоимостей $C_{0,i} + \ldots + C_{j,k}$. Слагаемое h(n') вычисляется следующим способом:

для каждой вершины, не принадлежащей подпоследовательности $S_i, \ldots, S_j$, S_k, берется наименьшая стоимость для всех дуг, входящих в эту вершину, тогда величина h(n') является суммой таких наименьших стоимостей. Данный член h(n'), конечно, является нижней оценкой в смысле определения алгоритмов A*. В результате такого расчета оценочной функции получаем маршрут с минимальной стоимостью.

Рассмотрим пример, изображенный на рис. 1,*а*.

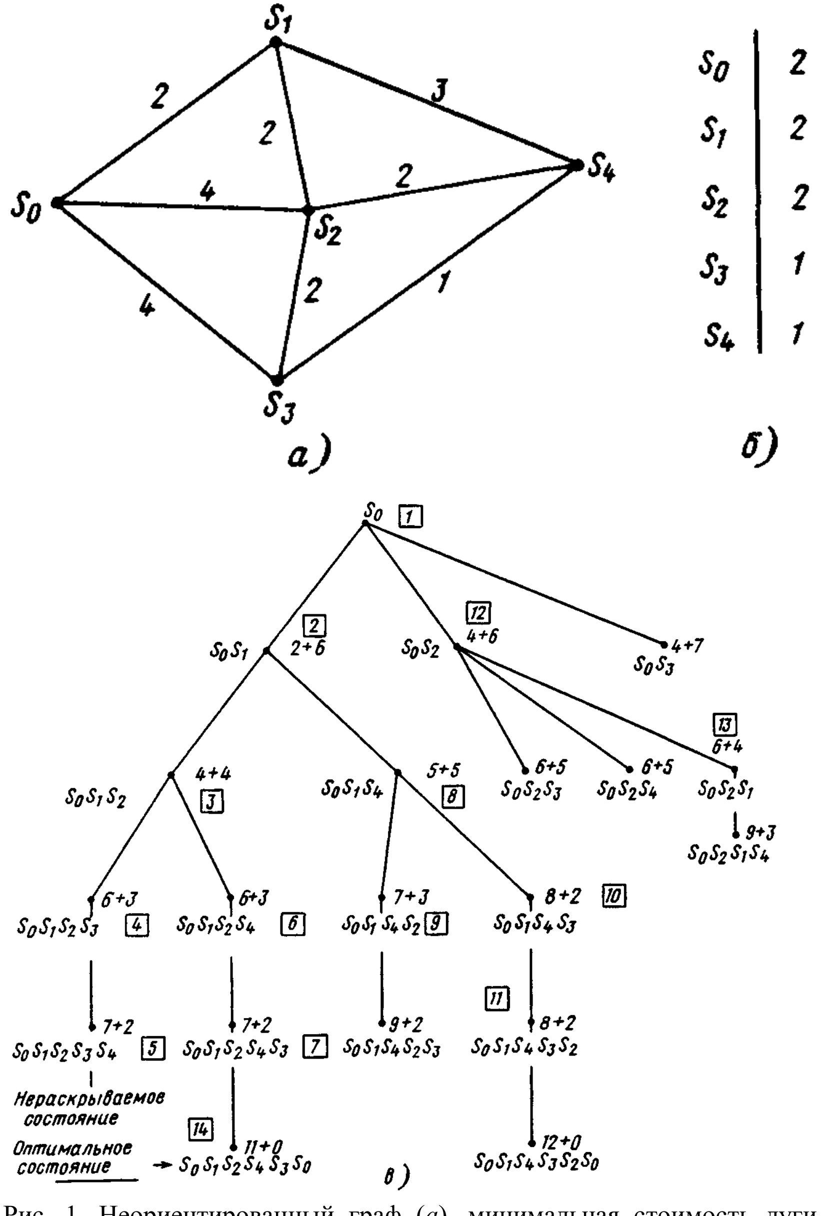


Рис. 1. Неориентированный граф (*а*), минимальная стоимость дуги, входящей в каждую вершину *(б)*, граф поиска (*в*)

На рис. 1,*б* показаны результаты расчета минимальной стоимости дуг, входящих в каждую вершину, а на рис. 1, *в* изображен граф поиска, полученный на момент останова программы, реализующей вышеупомянутый алгоритм. Определенное таким образом конечное состояние имеет вид $S_0 S_1 S_2 S_4 S_3 S_0$, а его стоимость равна 11. Отметим, что в случае равенства оценок среди всех состояний с наименьшей оценкой выбирается для раскрытия самое глубинное состояние в графе поиска, т. е. принятое правило работает по принципу "больше влево".

На рис. 1, *в* для каждого состояния n отмечено значение оценочной функции $f(n) = g(n) + h(n)$.

Кроме того, в рамке отмечен порядковый номер раскрытия различных состояний. Таким образом, раскрытию $S_0 S_1 S_2 S_3 S_4$ был присвоен ранг 5 (но в этом случае нельзя было достичь никакого состояния-потомка). Раскрытие состояний $S_0 S_2 S_3$, $S_0 S_2 S_4$ или $S_0 S_3$ могло бы обеспечить другие оптимальные решения. Читатель может убедиться, что в данном примере этого не происходит.

10.1.3. Эвристический поиск с неточными оценками

Теперь предположим, что в силу неполного знания данных по решаемой задаче стоимости, входящие в оценочную функцию f, можно определить лишь в виде интервалов. Тогда оценки f (n) получаются по правилам интервального анализа. Чтобы приспособить алгоритмы типа А или А* к случаю оценивания состояний, описываемых в виде интервалов, надо ответить на три вопроса.

Какова стратегия выбора состояния для раскрытия?

Каков критерий останова процедуры?

Каков результат, полученный при таком останове?

Выбор раскрываемого состояния сводится к задаче сравнения интервалов

$[\underline{f}(n_j), \overline{f}(nj)], j = 1, \ldots, p,$ где $n_1, \ldots, n_p$ — состояния, пригодные для раскрытия в текущий момент времени. Ищется состояние, которое имеет наименьшую оценку. При p = 2 приходим к сравнению относительного положения двух рассматриваемых интервалов. Тогда естественным образом получаем четыре возможных критерия классификации, которые позволяют установить, будет ли состояние n_1 более пригодно для раскрытия, чем состояние n_2:

$$C1: \underline{f}(n_2) \geqslant \overline{f}(n_1);$$

$$C2: \underline{f}(n_2) \geqslant \underline{f}(n_1);$$

$$C3: \overline{f}(n_2) \geqslant \overline{f}(n_1);$$

$$C4: \overline{f}(n_2) \geqslant \underline{f}(n_1).$$

При выполнении критерия C1 оценка n_1, невзирая на неточность, определенно лучше оценки n_2. Зато если удовлетворяется критерий C4, то остается возможность того, что состояние n_1 имеет наименьшую оценку. Когда одновременно удовлетворяются критерии C2 и C3, можно записать

$$C23: \widetilde{\min}([\underline{f}(n_1), \overline{f}(n_1)], [\underline{f}(n_2), \overline{f}(n_2)]) = [\underline{f}(n_1), \overline{f}(n_1)],$$

где $\widetilde{\min}$ - операция взятия минимума, расширенная на случай нечетких интервалов по принципу обобщения. Операция min позволяет определить интуитивно достаточный и менее сильный, чем C1, критерий выбора C23. Критерии выбора естественным образом упорядочиваются по их силе:

$$C1 \Rightarrow C23 \begin{array}{l} \Rightarrow C2 \Rightarrow C4 \\ \Rightarrow C3 \Rightarrow C4 \end{array}$$

На практике предлагается выбирать узел для раскрытия, применяя эти критерии в том порядке, который указьюают вышеприведенные импликации. Одни лишь критерии C2 и C3 не обеспечивают естественного упорядочивания. Если считать, что наименьшие значения $f(n_1)$ и $f(n_2)$ более правдоподобны, чем их большие значения, то приоритет будет отдан критерию C2. В общем случае, когда имеется p > 2 состояний, подлежащих раскрытию, приходим к сравнению оценки каждого состояния n_j с величиной $\widetilde{\min}_{k \neq j} [\underline{f}(n_k), \overline{f}(n_k)] = [\min_{k \neq j} \underline{f}(n_k), \min \overline{f}(n_k)]$, т. е. с наименьшей из всех других оценок при использовании пяти критериев в вышеуказанном порядке.

Когда некоторое состояние признается за конечное в соответствии с алгоритмом типа A, может потребоваться продолжить поиск, если критерий, позволивший выбрать это конечное состояние, оценивается как слишком слабый для различения состояний. Однако следует заметить, что, когда оценки становятся неточными, вовсе не обязательно существует конечное состояние, оптимальное в смысле критериев C1 или C23, даже если ранее такое оптимальное состояние было обнаружено при использовании алгоритма А* для решения указанной задачи с точными оценками.

Следовательно, мы далеко не уверены в возможности прекращения поиска, когда требуется лишь, чтобы полученное конечное состояние удовлетворяло одному из этих двух критериев (за исключением того очевидного случая, когда полный граф поиска содержит конечное число достижимых состояний) .

Пример. Рассмотрим нашу задачу о коммивояжере при неточных значениях стоимостей, т. е. когда, к примеру, неточно известны протяженности маршрутов между городами. Соответствующие данные приведены на рис. 2, *а*.

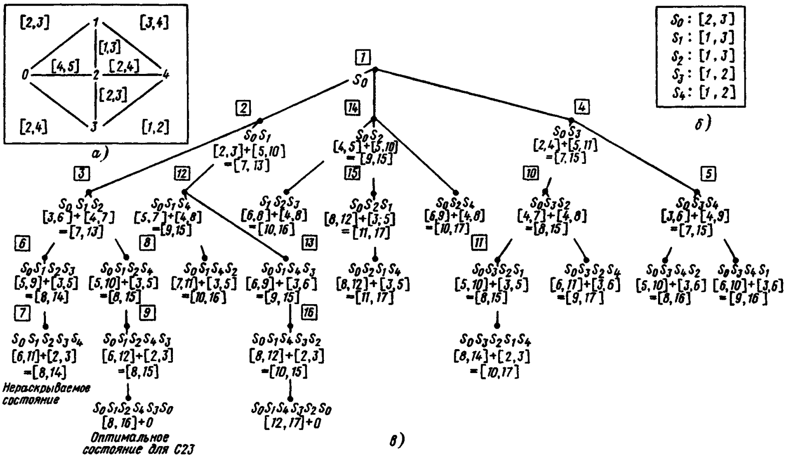


Рис. 2. Представление данных в задаче о коммивояжере

Функция g(n) получается простым сложением соответственно нижних и верхних границ неточных оценок стоимости $[\underline{C}_{ij}, \overline{C}_{ij}]$ по всему пути из начального состояния в состояние n. Функция h(n) представляет собой сумму интервалов, предварительно вычисленных для каждой вершины графа городов $(S, \mathcal{A})$. Для вершины i имеем

$$[\underline{h}_i, \overline{h}_i] = \widetilde{\min_{(i,j)\in\mathcal{A}}} [\underline{C}_{ij}, \overline{C}_{ij}], \qquad (2)$$

а для $n = S_0, S_1, \ldots, S_j, S_k$

$$\underline{h}(n) = \sum_{l \notin \{S_1,\ldots,S_j,S_k\}} \underline{h}(l); \; \overline{h}(n) = \sum_{l \notin \{S_1,\ldots,S_j,S_k\}} \overline{h}_l. \qquad (3)$$

Интервалы $[\underline{h}_i, \overline{h}_i]$ приведены на рис. 2, *б*. На рис. 2, *в* изображена древовидная структура, раскрываемая с помощью последовательности из пяти критериев выбора состояний — C1, C23, C2, C3, C4. В остальном берутся те же условия, что и на рис. 1, *в*. Отметим, что за критерий останова выбирается С23. Алгоритм строит такой же гамильтонов путь, что и ранее (потомок состояния 9), несмотря на неточность. Это конечное состояние, безусловно, удовлетворяет критерию С23 по стоимости, что получается в результате выполнения расширенной операции $\widetilde{\min}$ над десятью состояниями, пригодными к раскрытию. Отметим, что если для прекращения поиска воспользоваться критерием С2, то будут раскрыты девять вершин. В случае анализа задачи о коммивояжере выбор по критерию С2 (соответственно С3), очевидно, сводится к выполнению алгоритма с коэффициентами $\underline{c}_{ij}$ (соответственно $\overline{c}_{ij}$), т. е. приводится к случаю точных данных. В частности, если полученные для каждого из указанных критериев выбора оптимальные решения соответствуют (по меньшей мере) одному и тому же гамильтонову пути, то этот гамильтонов путь оптимален в смысле критерия С23 и строится с помощью алгоритма А*, расширенного на случай неточных данных, если только критерий С23 принимается за критерий останова. Это и происходит в нашем примере. Отметим, что в данном примере решения, оптимального в смысле удовлетворения критерия С1, не существует (дочерние состояния для вершин 16 и 9 - конечные состояния, не сравнимые по критерию С1).

10.1.4. Эвристический поиск с нечеткими оценками

Рассмотрим, наконец, случай, когда стоимости, составляющие оценочную функцию f, представлены в виде нечетких интервалов, введенных ранее. В текущий момент раскрытия графа поиска имеется р пригодных вершин $n_1, \ldots, n_p$, причем каждому состоянию n_i ставится в соответствие нечеткий интервал $\tilde{f}(n_i)$, ограничивающий возможные значения оценочной функции $f(n_i)$. Предлагается при выборе раскрываемого состояния взять такое состояние n_i, для которого выполняется условие

$$\tilde{f}(n_i) = \widetilde{\min_{j=1,\ldots,p}}\, \tilde{f}(n_j). \tag{4}$$

Понятно, что такое состояние не всегда существует, и в этом случае можно выбрать какое угодно состояние. Очевидно, условие (4) довольно сильное, поскольку оно сводится к применению критерия С23 ко всем α-срезам нечетких интервалов $\tilde{f}(n_j)$, $j = 1, \ldots, p$.

Другой подход заключается в определении, насколько одна оценка меньше другой в соответствии с критериями С1 — С4. Применение расширенной операции $\widetilde{\min}$ не дает никакой возможности для успешного проведения такого количественного измерения. Его можно получить естественным образом, воспользовавшись четырьмя показателями сравнения нечетких интервалов, введенными в разд. 8.2. Эти четыре показателя перекликаются с четырьмя критериями С1 - С4, употребляемыми для сравнения неточных, но четких оценок в предыдущем параграфе. В случае обычных интервалов каждый из этих критериев либо удовлетворяется, либо нет. В случае нечетких оценок эти критерии будут удовлетворяться в большей или меньшей степени. Тогда степень удовлетворения:

С1 будет оцениваться величиной $\mathrm{Nec}(\underline{f}(n_2) > \overline{f}(n_1))$;

С2 будет оцениваться величиной $\mathrm{Nec}(\underline{f}(n_2) \geqslant \underline{f}(n_1))$;

С3 будет оцениваться величиной $\mathrm{Pos}(\overline{f}(n_2) > \overline{f}(n_1))$;

С4 будет оцениваться величиной $\mathrm{Pos}(\overline{f}(n_2) \geqslant \underline{f}(n_1))$.

Здесь используются обозначения из разд. 8.2.1. В критериях С1 и С3 берутся строгие неравенства со знаком > вместо нестрогих со знаком ≥, чтобы обеспечить согласованность с результатами этого раздела. Отметим, что если функции принадлежности непрерывны, то эта модификация ничего не меняет. Когда имеется р состояний, пригодных к раскрытию, для каждого состояния вычисляются следующие четыре показателя (см. разд. 8.2.3): $\mathrm{NS}(\tilde{f}(n_i))$, $\mathrm{NSE}(\tilde{f}(n_i))$, $\mathrm{PS}(\tilde{f}(n_i))$, $\mathrm{PSE}(\tilde{f}(Q_i))$, которые выражают, насколько величина $f(n_i)$ меньше всех других оценок в смысле критериев С1, С2, С3, С4 соответственно. Затем выбираются те состояния, которые доставляют максимум показателю $\mathrm{NS}(\tilde{f}(n_i))$.

Если число таких состояний больше одного, среди них ищутся те состояния, которые максимизируют показатель $\mathrm{NSE}(\tilde{f}(n_i))$ и т. д., где показатели следуют в указанном порядке, так как выполняются условия (см. разд. 8.2.2)

$$\mathrm{NS}(\tilde{f}(n_i)) \leqslant \mathrm{NSE}(\tilde{f}(n_i)) \leqslant \mathrm{PSE}(\tilde{f}(n_i));$$

$$\mathrm{NS}(\tilde{f}(n_i)) \leqslant \mathrm{PS}(\tilde{f}(n_i)) \leqslant \mathrm{PSE}(\tilde{f}(n_i)).$$

Отметим, что порядок приоритетности между показателями NSE и PS может становиться обратным. Когда в данной процедуре работают с

обычными интервалами, она приводится к процедуре, описанной в предыдущем параграфе, если к тому же пренебречь критерием С23. Как и ранее, критерий останова программы можно выбрать двумя способами:
либо останов происходит, как только выбрано конечное состояние; либо останов происходит лишь тогда, когда выбрано конечное состояние, удовлетворяющее условию, накладываемому на один из показателей $\mathbf{E \in \{NS, NSE, PS, PSE\}}$ в виде

$$\mathbf{E(\tilde{f}(n_i)) \geqslant \theta,}$$

где θ — фиксированный порог.
Замечание. Другой вариант обобщения методов поиска на древовидных структурах получается, если видоизменить формулу построения оценочной функции (1). Характеристики алгоритмов А и А* опираются наряду с другими положениями на предположение об аддитивности оценочных функций. Однако при этом используются отнюдь не все свойства операции сложения, а лишь монотонность, ассоциативность и существование нейтрального элемента. Таким образом, свойства данных алгоритмов можно сохранить за счет сохранения требуемой алгебраической структуры при построении обобщенной оценочной функции. Так, например алгебраическая структура сохранится, если заменить формулу (1) на $\mathbf{f(n) = min(g(n), h(n)),}$ или в более общем случае, если заменить операцию сложения в формуле (1) любой треугольной нормой или конормой (см. гл. 8). Такие обобщенные алгоритмы А* исследованы. Они приобретают особый интерес, когда оценочная функция характеризует степень неопределенности, относящуюся к достижимости некоторого состояния в графе поиска, причем правила комбинирования таких степеней неопределенности не обязательно аддитивны.

10.2. Пример нечеткого программирования.

Данные и процедуры, используемые человеческим разумом, не всегда можно точно описать. Неточность не есть нечто присущее естественному (например, русскому) языку, используемому для представления данных и процедур: в общем случае и те, и другие можно точно выразить средствами естественного языка. (Это высказывание кажется весьма спорным. Истоки неточности и нечеткости информации лежат не вовне, а внутри самого взаимодействия субъекта с объектом или субъекта с другими объектами, т. е. обусловлены природой психического отражения объективной реальности. Неточность и нечеткость присутствуют на всех уровнях психического отражения, в том числе и на речемыслительном.) Тем более неточность отнюдь не обусловлена неспособностью разума извлекать наибольшую пользу из возможностей естественного языка. Нужно искать другие источники неточности. Так, иногда в принципе невозможно получить точные данные. Например, время выполнения некоторой планируемой операции можно оценить лишь приближенно в зависимости от прогнозируемых обстоятельств ее выполнения. В других случаях большая точность не имеет особого значения; такое положение повсеместно встречается в научных дисциплинах, связанных с оценкой поведения и черт характера человека. Например, при описании профиля предлагаемой работы часто употребляются неточные термины.

Во многих случаях без большего или меньшего произвола невозможно заменить точные определения расплывчатыми указаниями: расплывчатый характер и неточность присущи некоторым типам информации, перерабатываемой человеком. Поэтому представляется более естественным и эффективным принять неточные данные как они есть. С полным основанием еще в 1973 г. Заде подчеркивал, что человек в своих рассуждениях часто пользуется нечеткими метками: "Таким образом, способность работать с нечеткими множествами и вытекающая из нее способность синтезировать информацию представляет собой одну из важнейших характеристик человеческого разума, а также основную черту, отличающую интеллект человека от искусственного интеллекта в той его форме, которая может реалиэовываться в современных ЭВМ". Неточно определенные процедуры (иногда называемые нечеткими алгоритмами) ввиду их большей целостности обладают преимуществом перед традиционными четкими алгоритмами, которое заключается в их лучшей приспособленности к ситуациям, подверженным небольшим возмущениям. Нечеткие инструкции различного рода рассмотрены в ряде работе.

Инструкция может быть нечеткой потому, что в ней используются нечеткие аргументы (например, она определяет некоторую операцию над нечеткими числами), или нечеткие функции (например, функция СЛЕГКА УВЕЛИЧИТЬ, которая некоторому значению х ставит в соответствие нечеткую величину $\mathbf{x} \oplus \mathbf{M}$, где М — нечеткое число, возможные значения которого "малы"), или, наконец, нечеткие предикаты (т. е. предикаты, которые кроме значений "истинно" и "ложно" могут принимать и другие, промежуточные значения истинности, если речь идет об инструкции условного ветвящегося типа. Простым примером программы, содержащей такие инструкции, служит программа определения общего уровня знаний ученика как среднего арифметического уровней его подготовки по естественным наукам и по литературе (причем каждый из этих уровней представлен в виде функции распределения возможностей на множестве оценок), в случае, когда нужно, например, слегка увеличить показатель уровня подготовки по естественным наукам, используемый в среднем арифметическом, если ученик молод. Проблемы, возникающие при выполнении таких условных инструкций, будут вкратце затронуты в разд. 10.2.3. Подобная программа выдает конечный результат, здесь — общий уровень знаний ученика, в виде функции распределения возможностей.

Инструкция может быть нечеткой и из-за того, что, хотя ее аргументы могут принимать только точные значения, описаны они расплывчато, тогда как в рассмотренной ранее программе соответствующие нечеткие величины были охарактеризованы четко. Рассмотрим теперь два примера:

ПЕРЕСЧИТАТЬ ПОЛНОСТЬЮ (ТЯЖЕЛЫЕ ПРЕДМЕТЫ)

ПРИБАВИТЬ (БОЛЬШОЙ ПО ВЕСУ ЯЩИК) (МАЛЫЙ ПО ВЕСУ ЯЩИК)

В первом случае программа организует поиск в базе данных всех известных более или менее тяжелых предметов. Во втором случае программа осуществляет поиск некоторого ЯЩИКА, который с достаточной правдоподобностью может охарактеризовать как БОЛЬШОЙ, потом — поиск некоторого ЯЩИКА, который столь же правдоподобно можно охарактеризовать как МАЛЫЙ, а затем производит сложение их весов (которые, возможно, известны нечетко). При наличии двусмысленности, проявляющейся в описании ящиков, программа может ее обнаружить, и произойдет останов программы с выдачей соответствующего сообщения. Из обоих примеров видна необходимость в системе фильтрации, позволяющей оценить совместимость предложенной интерпретации с рассматриваемым понятием.

В ряде областей, например в робототехнике, нечеткие инструкции могут выполняться лишь при условии, что они интерпретируются четко: этот переход от нечеткого описания к четкому обусловлен, например, необходимостью сопоставления нечетких внутренних моделей с реальным внешним миром Сюда относятся такие инструкции, как:

СДЕЛАТЬ *НЕСКОЛЬКО* ШАГОВ ВЛЕВО

УВЕЛИЧИТЬ ДАВЛЕНИЕ НА ВЕЛИЧИНУ X

(X — точный идентификатор неточной величины, оцениваемой в другом месте)

ПОЙТИ ИСКАТЬ *БОЛЬШОЙ ЗЕЛЕНОВАТЫЙ* ПРЕДМЕТ КУБИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Чтобы перейти от некоторой нечеткой инструкции к выполнимой четкой инструкции, поступают следующим образом: для каждой функции распределения возможностей, полученной в результате оценивания нечеткого элемента инструкции, из всех реально существующих случаев будут отобраны лишь те, которые соответствуют достаточной степени возможности, затем среди них будет выбрана подходящая интерпретация, причем впоследствии этот выбор можно пересмотреть.

Хорошим примером последовательностей нечетких инструкций, которые должны четко выполняться, служат указания по управлению перемещением человека (или робота) к определенной цели. Так, следующий маршрут является весьма типичным отображением плана действий, который передается и часто используется людьми:

"Пройти расстояние примерно 100 м до перекрестка".

"Повернуть направо".

"Дойти до азиатского ресторана, расположенного примерно в 50 м".

"Повернуть налево".

"Добраться до почтового ящика, расположенного в 20 или 30 м слева".

Такой план действий имеет некоторую аналогию с программой вычислительной машины. Однако обычный язык программирования допускает использование лишь точных операторов, обеспечивающих обработку точной информации. К тому же каждая инструкция из некоторой последовательности имеет единственную интерпретацию, а выполнение этой последовательности инструкций непреложно и обязательно. Зато при использовании последовательности инструкций, задаваемых неточными терминами, те инструкции, которые уже встречались ранее, могут пересматриваться (возврат назад), если выполнение последующих инструкций оказывается невозможным. Тогда инструкции, подлежащие пересмотру, интерпретируются некоторым способом, отличным от прежнего, но всегда совместимым с заданием.

В дальнейшем проблемы, возникающие при выполнении таких "нечетких программ", будут обсуждаться и иллюстрироваться на конкретном примере.

10.2.1. Выполнение и объединение инструкций

Любая инструкция, заданная неточными терминами, может давать основания для ее различных интерпретаций. В ряде случаев эти интерпретации считаются возможными в большей или меньшей степени; тогда они образуют нечеткое множество интерпретаций. Например, в инструкции: "Пройти расстояние до перекрестка примерно 100 м" — указание "примерно 100 м" приводит к рассмотрению нечеткого множества интерпретаций относительно заданной среды. Нечеткое множество значений расстояния, совместимых с указанием "примерно 100 м", индуцирует нечеткое множество "допустимых перекрестков". В более общем плане будем говорить о нечетком множестве возможных интерпретаций.

Чтобы выполнить некоторую инструкцию, следует выбрать одну из ее интерпретаций. Для простоты здесь мы ограничимся рассмотрением последовательно выполняемых инструкций, т. е. условных или безусловных инструкций, выполняемых без нарушения заданной последовательности. В случае, когда не существует или не остается никакой интерпретации для некоторой инструкции с рангом n, надо воспользоваться интерпретацией, выбранной для выполнения инструкции ранга n — 1. Если новая интерпретация сохраняется для инструкции с рангом n — 1, тогда вновь берется инструкция n. В противном случае следует взять последнюю интерпретацию, выбранную для выполнения инструкции с рангом n — 2, и т. д. В этих условиях либо можно увязать воедино множество инструкций рассматриваемой последовательности (тогда окажется возможным интерпретировать всю последовательность полностью), либо будет исчерпанным множество интерпретаций, связанных с каждой инструкцией. Таким образом, данная последовательность не интерпретируема в целом.

Определение множества интерпретаций для некоторой инструкции. Каждая инструкция в зависимости от ее типа может содержать неточные операнды различного рода. Так, в примере, изложенном выше, находим неточные операнды, относящиеся к расстояниям и направлениям. Инструкции содержат ссылки на составляющие среды, которые требуется идентифицировать. Так, инструкция: "Дойти до азиатского ресторана, расположенного примерно в 50 м" — обязывает провести поиск всех "точек", которые одновременно с достаточной степенью совместимы с расстоянием "примерно 50 м" и характеристикой "азиатский ресторан". Условие "одновременно" означает, что должны свертываться степени совместимости, соответствующие каждой составляющей задания, причем для этого будет использоваться оператор min. В данном примере степень соответствия характеризует возможность того, что рассматриваемая "точка" соответствует определению, заданному в инструкции. Степень совместимости считается достаточной, если она превышает некоторый установленный порог.

Для некоторого задания в данной среде существует (возможно, и пустое) множество интерпретаций, имеющих степень совместимости с этим заданием выше пороговой. Бывает, что в процессе выполнения инструкции имеющаяся информация о среде составляет лишь некоторую часть этого множества интерпретации, что мы увидим из примера в разд. 10.2.2.

Задача выбора интерпретации для некоторой инструкции. Когда требуется выбрать одну интерпретацию из известного множества возможных интерпретаций, естественно учитывать степень совместимости, связываемую с каждой из них. Кроме того, конкретному приложению может ставиться в соответствие своя стоимость выбора интерпретации. Эффективный выбор конкретной интерпретации осуществляется в результате совместного учета степеней совместимости и стоимостей с помощью некоторой эвристики, подходящей к данной предметной области.

Проблема временного прерывания выполнения инструкции. Когда известное множество 1(n) возможных интерпретаций рассматриваемой инструкции с рангом n либо пусто, либо исчерпано (т. е. не удалось выполнить инструкцию с рангом n + 1 на базе какой-то одной из интерпретаций, содержащихся в множестве 1(n), следует пересмотреть сам процесс определения 1(n):

либо таким образом, чтобы, не отказываясь от выполнения предыдущих инструкций, получить новые, пока еще неизвестные возможные интерпретации инструкции с рангом n;

либо пересмотреть предыдущие инструкции: случай возврата назад.

10.2.2. Иллюстративный пример

На рис. 3 представлена среда, в которой робот, первоначально находившийся в точке (0, 0) (и ориентированный по стрелке), должен пройти маршрут, описываемый следующей инструкцией:

(ДОСТИЧЬ (ЦЕЛЬ -ПЕРЕКРЕСТОК) (РАССТОЯНИЕ ОКОЛО 100 М))
(ПОВЕРНУТЬ НАПРАВО)
(ДОСТИЧЬ (ЦЕЛЬ - АЗИАТСКИЙ РЕСТОРАН) (РАССТОЯНИЕ ОКОЛО 50 М)) (ПОВЕРНУТЬ НЕМНОГО ВЛЕВО)
(ДОСТИЧЬ (ЦЕЛЬ - ПОЧТОВЫЙ ЯЩИК СЛЕВА) (РАССТОЯНИЕ ОТ 10 ДО 20 М))

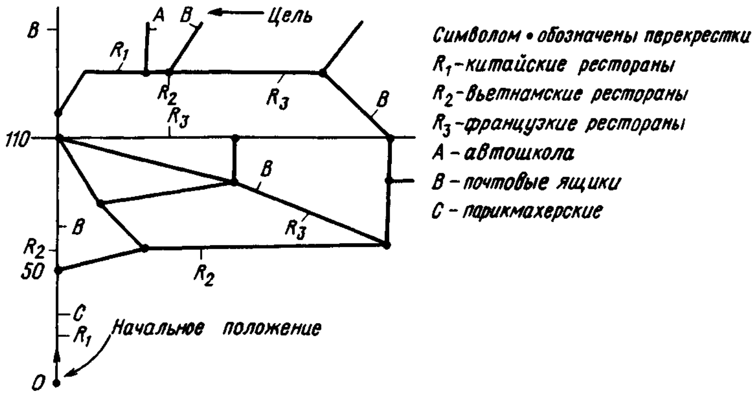


Рис. 3. Маршрут робота в неопределенной среде. Общие характеристики.

Программа, порядок выполнения которой представлен ниже, отражает поведение робота в следующих условиях. По мере продвижения робот наблюдает среду и при необходимости пользуется двумя "датчиками". Один из них обеспечивает интерпретации инструкций типа "ДОСТИЧЬ": характер ориентиров (перекрестки, рестораны, возможно, относящиеся к тому или иному разряду), а также расстояние от этих ориентиров до робота, а другой обеспечивает интерпретации инструкций типа "ПОВЕРНУТЬ": направление достижимых путей, а также расстояния, отделяющие робот от подходов к этим путям. Применение таких датчиков в среде можно имитировать: человек-оператор выдает требуемую информацию (при работе системы в режиме консультаций, представленном ниже, оператор отвечает на вопросы, задаваемые системой). Каждый из датчиков имеет ограниченный радиус действия, фиксируемый до начала функционирования программы робота. Робот учитывает эту ограниченность радиуса действия датчиков. Робот прибегает к использованию первого датчика, лишь имея на то достаточное основание, т. е. когда он достиг области, совместимой с теми расстояниями, которые указываются в инструкциях типа "ПРОЙТИ", причем учитывается радиус действия датчика. Более того, исходя из требований задания робот сам ограничивает полезную зону исследований с учетом радиуса действия первого датчика (так как за этими пределами мы не получим никакой в достаточной степени совместимости интерпретации). **Представление неточной информации.** На рис. 4, *а, б, в* изображены нечеткие множества, соответствующие определениям расстояний, ориентации и типов ресторанов, использованных в ранее приведенном маршруте.

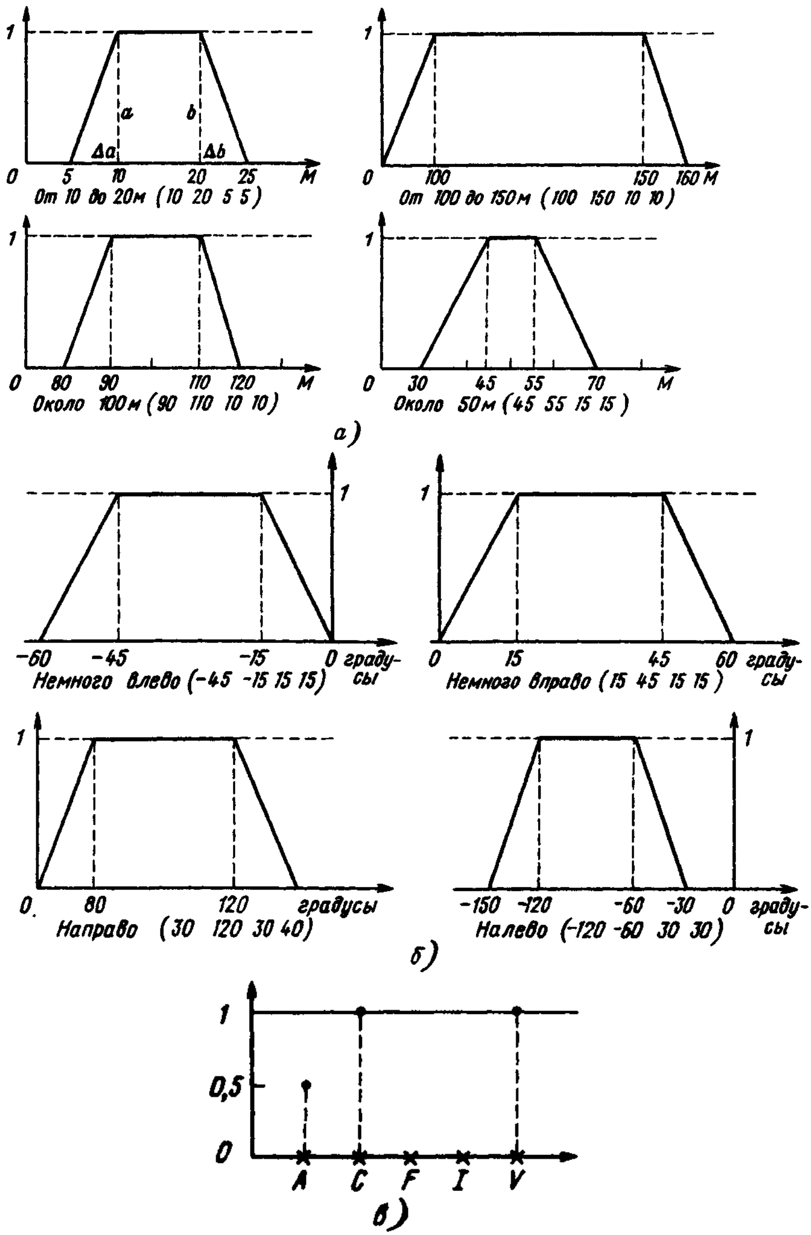


Рис. 4. Приближенные представления расстояния *(а),* направления (б), представление понятия "азиатский ресторан" (*в*)

Значения расстояний или ориентации, полученные с помощью датчиков, полагаются точными. Что касается встречаемых ресторанов, то они считаются точно соответствующими одному из характерных типов ресторанов, а множества таких характерных типов образует базовое множество, на котором и формулируется задание. На рис.4, *а, б* под каждым нечетким множеством, определенном в непрерывном универсальном множестве, приводится его принятое в программе представление в виде четверок $(a, b, \Delta a, \Delta b)$. Аналогичное представление в виде набора степеней возможности, соответствующих n альтернативам и выраженных в процентах, дается под нечетким множеством, определенным на рис. 4, *в* в дискретном универсальном множестве характерных типов ресторанов: А — арабский, К — китайский, Ф — французский, И — итальянский, В — вьетнамский.

Примеры. В рассматриваемых сообщениях, каждая из пяти инструкций, образующих заданный маршрут, называется ИНСТРУКЦИЯ 1, ИНСТРУКЦИЯ 2 и т. д.

Первый маршрут для прохождения (приведен ранее)

1 ? (СТАРТ) (ПРОМАР)

*Я ПРИСТУПАЮ К ВЫПОЛНЕНИЮ ИНСТРУКЦИИ 1

2 Я ПРОДВИГАЮСЬ ВПЕРЕД НА 85 М

3 Я ОСМАТРИВАЮ ОКРЕСТНОСТИ ДО 30 М

4 (ПЕРЕКРЕСТОК)?

5 ? ((ПЕРЕКРЕСТОК (РАССТОЯНИЕ 25 М)))

6 ОЦЕНКА ((100 (РАССТОЯНИЕ ПО))

7 Я ПРОДВИГАЮСЬ ВПЕРЕД НА 25 М (ВОЗМОЖН: 100)

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ УСПЕХ ИНСТРУКЦИЯ 1 ТАК КАК:

8 (Я ДОСТИГ ПЕРЕКРЕСТКА РАССТОЯНИЕ 110 М)

* Я ПРИСТУПАЮ К ВЫПОЛНЕНИЮ ИНСТРУКЦИИ 2*

9 Я ОСМАТРИВАЮ ОКРЕСТНОСТЬ В РАДИУСЕ ДО 20 М

10 ПУТИ ДЛЯ ПОВОРОТА?

11 ? ((150 (РАССТОЯНИЕ 0)) (130 (РАССТОЯНИЕ 0)) ? (90 (РАССТОЯНИЕ 0)) (-90 (РАССТОЯНИЕ 0))

? (30 (РАССТОЯНИЕ 10)))

12 ОЦЕНКА ((110 90 (РАССТОЯНИЕ 0)) (75 130 (РАССТОЯНИЕ 0)) (100 30 (РАССТОЯНИЕ 10)))

13 Я ПОВОРАЧИВАЮ НА 90 ГРАД (ВОЗМОЖН: 100)

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ УСПЕХ ИНСТРУКЦИЯ 2 ТАК КАК:

(Я ПОВЕРНУЛ НА 90 ГРАД)

Я ПРИСТУПАЮ К ВЫПОЛНЕНИЮ ИНСТРУКЦИИ 3

14 Я ПРОДВИГАЮСЬ ВПЕРЕД НА 37 М

15 Я ОСМАТРИВАЮ ОКРЕСТНОСТЬ В РАДИУСЕ 26 М

16 (АЗИАТСКИЙ РЕСТОРАН) ?
17 ((ФРАНЦУЗСКИЙ РЕСТОРАН (РАССТОЯНИЕ 13)))
18 НУЛЕВАЯ ОЦЕНКА
ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ НЕУДАЧА ИНСТРУКЦИЯ 3
Я ОТСТУПАЮ НАЗАД НА 37 М
Я ПЕРЕСМАТРИВАЮ ИНСТРУКЦИЮ 2
19 Я ПОВОРАЧИВАЮ НА 40 ГРАД (ВОЗМОЖН: 75)
ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ УСПЕХ ИНСТРУКЦИЯ 2 ТАК КАК:
(Я ПОВЕРНУЛ НА 130 ГРАД)
Я ПЕРЕСМАТРИВАЮ ИНСТРУКЦИЮ 3
Я ПРОДВИГАЮСЬ ВПЕРЕД НА 37 М
Я ОСМАТРИВАЮ ОКРЕСТНОСТЬ В РАДИУСЕ 26 М
(АЗИАТСКИЙ РЕСТОРАН) ?
? НЕТ
НУЛЕВАЯ ОЦЕНКА
ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ НЕУДАЧА ИНСТРУКЦИЯ 3
Я ОТСТУПАЮ НАЗАД НА 37 М
Я ПЕРЕСМАТРИВАЮ ИНСТРУКЦИЮ 2
20 Я ПОВОРАЧИВАЮ НА 130 ГРАД
Я ПРОДВИГАЮСЬ ВПЕРЕД НА 10 М
Я ПОВОРАЧИВАЮ НА 30 ГРАД (ВОЗМОЖН: 100)
ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ УСПЕХ ИНСТРУКЦИЯ 2 ТАК КАК:
(Я ПОВЕРНУЛ НА 30 ГРАД)
Я ПЕРЕСМАТРИВАЮ ИНСТРУКЦИЮ 3
Я ПРОДВИГАЮСЬ ВПЕРЕД НА 37 М
Я ОСМАТРИВАЮ ОКРЕСТНОСТЬ В РАДИУСЕ 26 М
(АЗИАТСКИЙ РЕСТОРАН) ?
21 ? ((КИТАЙСКИЙ РЕСТОРАН (РАССТОЯНИЕ 8))
(ВЬЕТНАМСКИЙ РЕСТОРАН (РАССТОЯНИЕ 18)))
ОЦЕНКА ((100 КИТАЙСКИЙ (РАССТОЯНИЕ 45)) (100
ВЬЕТНАМСКИЙ (РАССТОЯНИЕ 55)))
Я ПРОДВИГАЮСЬ ВПЕРЕД НА 8 М (ВОЗМОЖН: 100)
ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ УСПЕХ ИНСТРУКЦИЯ 3 ТАК КАК:
(Я ДОСТИГ КИТАЙСКОГО РЕСТОРАНА РАССТОЯНИЕ 45 М)
Я ПРИСТУПАЮ К ВЫПОЛНЕНИЮ ИНСТРУКЦИИ 4
Я ОСМАТРИВАЮ ОКРЕСТНОСТЬ В РАДИУСЕ 20 М ПУТИ ДЛЯ
ПОВОРОТА?
? ((-90 (РАССТОЯНИЕ 10))
?(-45 (РАССТОЯНИЕМ)))
ОЦЕНКА ((100 - 45 (РАССТОЯНИЕ 18)))
Я ПРОДВИГАЮСЬ ВПЕРЕД НА 18 М
Я ПОВОРАЧИВАЮ НА -45 ГРАД (ВОЗМОЖН: 100)

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ УСПЕХ ИНСТРУКЦИЯ 4 ТАК КАК:
(Я ПОВЕРНУЛ НА -45 ГРАД)
Я ПРИСТУПАЮ К ВЫПОЛНЕНИЮ ИНСТРУКЦИИ 5
Я ПРОДВИГАЮСЬ ВПЕРЕД НА 8 М
Я ОСМАТРИВАЮ ОКРЕСТНОСТЬ В РАДИУСЕ 14 М
22 (ПОЧТОВЫЙ ЯЩИК СЛЕВА) ?
23 ? (ПОЧТОВЫЙ ЯЩИК -90 (РАССТОЯНИЕ 13))
ОЦЕНКА ((100 - 90 (РАССТОЯНИЕ 21)))
Я ПРОДВИГАЮСЬ ВПЕРЕД НА 13 М (ВОЗМОЖН: 80)
ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ УСПЕХ ИНСТРУКЦИЯ 5 ТАК КАК:
(Я ДОСТИГ ПОЧТОВОГО ЯЩИКА -90 РАССТОЯНИЕ 21 М)
МАРШРУТ ПОЛНОСТЬЮ ПРОЙДЕН
=T
?
Второй маршрут для прохождения
24 (ДОСТИЧЬ (ЦЕЛЬ ПЕРЕКРЕСТОК) (РАССТОЯНИЕ ОТ 100 ДО 150 М)) (ПОВЕРНУТЬ НЕМНОГО ВПРАВО)
(ДОСТИЧЬ (ЦЕЛЬ АЗИАТСКИЙ РЕСТОРАН) (РАССТОЯНИЕ ОКОЛО 50М)) (ПОВЕРНУТЬ НАЛЕВО)
(ДОСТИЧЬ (ЦЕЛЬ ПОЧТОВЫЙ ЯЩИК СЛЕВА) (РАССТОЯНИЕ ОТ 10 ДО 20 М))
? (EXITIN)
Я ПРИСТУПАЮ К ВЫПОЛНЕНИЮ ИНСТРУКЦИИ 1
25 Я ПРОДВИГАЮСЬ ВПЕРЕД НА 95 М
26 Я ОСМАТРИВАЮ ОКРЕСТНОСТИ ДО 40 М
(ПЕРЕКРЕСТОК) ?
27 ? ((ПЕРЕКРЕСТОК (РАССТОЯНИЕ 15)) (ПЕРЕКРЕСТОК (РАССТОЯНИЕ 25)))
28 ОЦЕНКА (100 (РАССТОЯНИЕ ПО)) (100 (РАССТОЯНИЕ 120))
29 Я ПРОДВИГАЮСЬ ВПЕРЕД НА 15 М (ВОЗМОЖН: 100)
ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ УСПЕХ ИНСТРУКЦИЯ 1 ТАК КАК:
(Я ДОСТИГ ПЕРЕКРЕСТКА РАССТОЯНИЕ ПО М)
Я ПРИСТУПАЮ К ВЫПОЛНЕНИЮ ИНСТРУКЦИИ 2
Я ОСМАТРИВАЮ ОКРЕСТНОСТИ ДО 20 М ПУТИ ДЛЯ ПОВОРОТА?
? ((150 (РАССТОЯНИЕ 0)) (130 (РАССТОЯНИЕ 0))
? (90 (РАССТОЯНИЕ 0)) (-90 (РАССТОЯНИЕ 0))
? (30 (РАССТОЯНИЕ 10))
30 ОЦЕНКА ((100 30 (РАССТОЯНИЕ 10)))
31 Я ПРОДВИГАЮСЬ ВПЕРЕД НА 10 М
Я ПОВОРАЧИВАЮ НА 30 ГРАД (ВОЗМОЖН: 100)
ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ УСПЕХ ИНСТРУКЦИЯ 2 ТАК КАК:

(Я ПОВЕРНУЛ НА 30 ГРАД)
Я ПРИСТУПАЮ К ВЫПОЛНЕНИЮ ИНСТРУКЦИИ 3
Я ПРОДВИГАЮСЬ ВПЕРЕД НА 37 М
Я ОСМАТРИВАЮ ОКРЕСТНОСТЬ В РАДИУСЕ 26 М
(АЗИАТСКИЙ РЕСТОРАН)?
? ((КИТАЙСКИЙ РЕСТОРАН (РАССТОЯНИЕ 8))
? (ВЬЕТНАМСКИЙ РЕСТОРАН (РАССТОЯНИЕ 18)))
ОЦЕНКА ((100 КИТАЙСКИЙ (РАССТОЯНИЕ 45))
(100 ВЬЕТНАМСКИЙ (РАССТОЯНИЕ 55)))
Я ПРОДВИГАЮСЬ ВПЕРЕД НА 8 М (ВОЗМОЖН: 100)
ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ УСПЕХ ИНСТРУКЦИЯ 3 ТАК КАК:
(Я ДОСТИГ КИТАЙСКОГО РЕСТОРАНА РАССТОЯНИЕ 45 М)
Я ПРИСТУПАЮ К ВЫПОЛНЕНИЮ ИНСТРУКЦИИ 4
Я ОСМАТРИВАЮ ОКРЕСТНОСТЬ В РАДИУСЕ 20 М ПУТИ ДЛЯ ПОВОРОТА?
?((-90 (РАССТОЯНИЕ 10)) (-45 (РАССТОЯНИЕ 18)))
ОЦЕНКА ((100 - 90 (РАССТОЯНИЕ 10)) (50 - 45 (РАССТОЯНИЕ 18)))
Я ПРОДВИГАЮСЬ ВПЕРЕД НА 10 М
32 Я ПОВОРАЧИВАЮ НА -90 ГРАД (ВОЗМОЖН: 100)
ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ УСПЕХ ИНСТРУКЦИЯ 4 ТАК КАК:
(Я ПОВЕРНУЛ НА -90 ГРАД)
Я ПРИСТУПАЮ К ВЫПОЛНЕНИЮ ИНСТРУКЦИИ 5
Я ПРОДВИГАЮСЬ ВПЕРЕД НА 8 М
Я ОСМАТРИВАЮ ОКРЕСТНОСТИ ДО 14 М (ПОЧТОВЫЙ ЯЩИК СЛЕВА) ?
?НЕТ
НУЛЕВАЯ ОЦЕНКА
ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ НЕУДАЧА ИНСТРУКЦИЯ 5
Я ОТСТУПАЮ НАЗАД НА 8 М
Я ПЕРЕСМАТРИВАЮ ИНСТРУКЦИЮ 4
Я ПОВОРАЧИВАЮ НА 90 ГРАД
Я ПРОДВИГАЮСЬ ВПЕРЕД НА 8 М
33 Я ПОВОРАЧИВАЮ НА -45 ГРАД (ВОЗМОЖН: 50)
ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ УСПЕХ ИНСТРУКЦИЯ 4 ТАК КАК:
(Я ПОВЕРНУЛ НА -45 ГРАД)
Я ПЕРЕСМАТРИВАЮ ИНСТРУКЦИЮ 5
Я ПРОДВИГАЮСЬ ВПЕРЕД НА 8 М
Я ОСМАТРИВАЮ ОКРЕСТНОСТЬ В РАДИУСЕ 14 М
(ПОЧТОВЫЙ ЯЩИК СЛЕВА) ?
?((ПОЧТОВЫЙ ЯЩИК -90 (РАССТОЯНИЕ 13)))
ОЦЕНКА ((100-90 (РАССТОЯНИЕ 21)))

Я ПРОДВИГАЮСЬ ВПЕРЕД НА 13 М (ВОЗМОЖН: 80)
ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ УСПЕХ ИНСТРУКЦИЯ 5 ТАК КАК:
(Я ДОСТИГ ПОЧТОВОГО ЯЩИКА 90 РАССТОЯНИЕ 21 М)
МАРШРУТ ПОЛНОСТЬЮ ПРОЙДЕН
=T
?

Комментарии. 1. Запуск программы Прохождение МАРшрута (ПРОМАР; в оригинале Execution d'lTINe'raire).

2. В самом деле до перемещения на 85 м бесполезно "смотреть", имеется ли ЦЕЛЬ ПЕРЕКРЕСТОК, поскольку в этом случае мы не получим достаточно высокую степень возможности (т.е. степень, превышающую порог ПОРОГ в программе, фиксированный от 0,4 до 1 или от 40 до 100 в приведенной реализации) для совместимости между пройденным расстоянием и заданием РАССТОЯНИЕ ОКОЛО 100 М.

3. Глубина поля зрения датчика, связанного с инструкциями ДОСТИЧЬ..., ограничена в данной реализации 40 м. Робот не смотрит далее чем на 30 м, поскольку сверх этого значения полное пройденное расстояние (свыше 85 + 30) не будет совместимым с РАССТОЯНИЕМ ОКОЛО 100 М (см. определение ОКОЛО 100 М и значение ПОРОГ).

4. 5. Для имитации датчика, связанного с инструкциями ДОСТИЧЬ, робот запрашивает, имеется ли перекресток (на удалении до 30 м согласно предыдущему пункту), а оператор отвечает списком (здесь одноэлементным) отмеченных перекрестков. Каждый элемент имеет вид (ПЕРЕСЕЧЕНИЕ (РАССТОЯНИЕ < значение в м>)).

6. Робот оценивает отмеченные перекрестки (здесь единственный) в первую очередь по самым близким расстояниям, а затем по степени совместимости с заданием (здесь ОКОЛО 100 М). Для каждого перекрестка сначала приводится степень совместимости, потом расстояние.

7. Робот совершает перемещение к перекрестку с лучшей оценкой (здесь единственная возможность). После "ВОЗМОЖН:" находится результат свертывания (с помощью операции min) степеней совместимости каждого элемента задания (здесь цель типа ПЕРЕКРЕСТОК и РАССТОЯНИЕ) с соответствующим элементом выполненного действия.

8. Робот прошел 85 + 25 = 110 м (см. достигнутое положение на схеме).

9. Глубина поля зрения датчика, связанного с инструкциями ПОВЕРНУТЬ, который служит для определения ближайших путей, куда может повернуть робот, ограничена в данной реализации 20 (см. ПУТИ в программе).

10, 11. Для имитации датчика, связанного с инструкциями "ПОВЕРНУТЬ" робот запрашивает, имеются ли пути для поворота (менее чем в 20 м спереди согласно предыдущему пункту). Оператор отвечает, приводя список, в котором каждый элемент имеет вид (< угол поворота в градусах > (РАССТОЯНИЕ < значение в м >)). Здесь, например, пути 150°, 130°, 90°, 30° (вправо) и -90° (влево); путь с поворотом на 30° связан с продвижением вперед на 10 м.

12. Робот оценивает доступные пути (здесь их пять) в первую очередь по расстоянию, а затем по степени совместимости с инструкцией (сравнение углов поворота с заданием ВПРАВО; исключение тех путей, значения которых ниже ПОРОГА, т. е. 40). Для каждого оцениваемого пути приводятся степень совместимости, угол поворота, а затем расстояние.

13. Робот поворачивает на путь с наилучшей оценкой. После ВОЗМОЖН: находится степень совместимости между заданным и выбранным направлениями.

14. 15. Те же основания, что и в пп. 2 и 3 соответственно.

16, 17. Подобно пп. 4 и 5. Оператор, как и в п. 5, указьюает тип цели (здесь РЕСТОРАН) вместе с одним или несколькими атрибутами (здесь один атрибут — ФРАНЦУЗСКИЙ), аналогичными атрибутам, содержащимся в запросе, а также с информацией о расстоянии.

18. Подобно п. 6, но единственный найденный РЕСТОРАН не подходит.

19. Чтобы отправиться по второму пути, описанному в п. 11, достаточно (после возвращения к перекрестку) повернуть на 40°. После метки ВОЗМОЖН стоит степень 75, указываемая при оценке направлений.

20. Чтобы отправиться по третьему пути, описанному в п. 11, надо (после отступления назад) снова попасть на исходный путь (под углом в —130° от того пути, по которому робот вернулся) и продвинуться по нему на 10 м.

21. Подобно п. 17. Здесь два ресторана находятся на удалении менее 26 м.

22. 23. Подобно пп. 16 и 17. Типовая цель: ПОЧТОВЫЙ ЯЩИК; атрибут: —90 (здесь не рассматриваются другие варианты ответа, кроме —90 или 90: не учитывается угол зрения, под которым виден ориентир).

24. Второй маршрут для прохождения (те же отправной пункт и среда). Отметим, что по отношению к первому маршрут слегка изменены требования в инструкциях 1, 2 и 4.

25 - 29. Представляют собой варианты 2, 3, 5, 6 и 7 соответственно.

30, 31. На этот раз ввиду задания НЕМНОГО ВПРАВО (вместо НАПРАВО) пути, ведущие к первому перекрестку, отбрасываются: робот сразу двигается до второго перекрестка (во избежание возврата назад).

32, 33. На этот раз происходит возвращение назад (см. п. 32), которого удалось избежать при прохождении первого маршрута, потому что он был точнее задан: "ПОВЕРНУТЬ НЕМНОГО ВЛЕВО" вместо "ПОВЕРНУТЬ НАЛЕВО".

10.2.3. Задачи, относящиеся к нечеткому программированию

В разд. 10.2.1 и 10.2.2 были изложены основные принципы составления и выполнения нечетких инструкций, а также приведены соответствующие иллюстрации. В этом разделе кратко рассмотрены задачи, связанные с использованием переменных или нечетких порогов, с наличием неточной информации о среде, с исчислением нечеткозначных аргументов, которые присутствуют в нечетких инструкциях, требующих четкого выполнения, или, наконец, с наличием условных нечетких инструкций в нечеткой программе.

Использование "изменяемых" или нечетких порогов. В предыдущем иллюстративном примере в качестве возможных рассматривались лишь те интерпретации, у которых степень совместимости с заданием была выше некоторого предварительно установленного порога, а все другие интерпретации отбрасывались. Затем различные степени совместимости оставшихся интерпретаций использовались при проведении выбора единственной интерпретации. Можно было бы рассмотреть вариант использования "изменяемых" порогов. Идея заключается в том, чтобы сначала взять повышенный порог в интересах сужения множества рассматриваемых интерпретаций, например, вести поиск "перекрестка, расположенного примерно в 100 м", прежде всего в зоне малого отличия расстояния от значения 100 м, а затем в случае отказа от первоначально выбранной интерпретации при необходимости снизить этот порог с целью расширения множества рассматриваемых интерпретаций.

Недостаток использования порогов состоит в появлении разрывов функций совместимости для интерпретации нечетких инструкций, в то время как введение понятия нечеткого множества служит как раз для преодоления таких разрывов. Исправить этот недостаток можно, применяя нечеткие пороги. Нечеткий порог $\tilde{s}$ можно определить как нечеткий интервал (L-R)-типа в виде четверки

$\tilde{s} = (s, 1, \epsilon, 0)_{LR}$, которая интерпретируется следующим образом.

Пусть F — нечеткое множество, соответствующее заданию, а ω — одна из интерпретаций этого задания. Нечеткий порог сводится к преобразованию μ_F в $\mu_{F'}$ такому, что $\mu_{F'} = \mu_{\tilde{s}} \circ \mu_F$. Легко убедиться в том, что:

если $\mu_F(\omega) \geqslant s$, то $\mu_{F'}(\omega) = 1$ (интерпретации, имеющие уровень совместимости с заданием F, по меньшей мере равный s, считаются эквивалентными) ;

если $\mu_F(\omega) \leqslant s - \epsilon$, то $\mu_{F'}(\omega) = 0$ (интерпретации, имеющие уровень совместимости с заданием F меньше $s - \epsilon$, отбрасываются) ;

промежуточные уровни совместимости изменяются в большей или меньшей степени в зависимости от вида функции L.

Пороговый уровень λ, понимаемый в обычном смысле, выражается посредством $\tilde{s} = (1, 1, 1 - \lambda, 0)$ с $L(u) = 1 - (1 - \lambda)u, 0 < \lambda \leqslant 1$, если u ≥ 1, и L(u) = 0, если u > 1. Эффект разрывности обычных порогов можно свести на нет, выбирая в качестве L непрерывную функцию, удовлетворяющую условию $\lim\limits_{u \to 1} L(u) = 0$.

Неточное восприятие среды. В разд. 10.2.1 и 10.2.2 неявно предполагалось, что человек или робот имеет правильное и точное представление о своей среде, т. е. для вышеприведенного примера он способен точно определить значения расстояний и ориентации в различных направлениях, а встречающиеся рестораны также считаются принадлежащими к одному из характерных типов ресторанов. И только лишь указанные в инструкции расстояния, направления и ориентиры (в данном случае рестораны) полагались неточными.

Теперь предположим, что расстояния и направления могут оцениваться неточно или нечетко, причем эти оценки представляются с помощью функции распределения возможностей. Точно так же рестораны могут на вид не полностью соответствовать одному из выделенных характерных типов, а, скорее, с разной степенью удовлетворять нескольким из них. Тогда восприятие конкретного рассматриваемого ресторана можно представить функцией распределения возможностей на множестве характерных типов. Например, ресторан, который можно отнести к "европейскому", и ресторан, воспринимаемый как "повидимому, китайский", соответствуют функциям распределения возможностей типа изображенных на рис. 5.

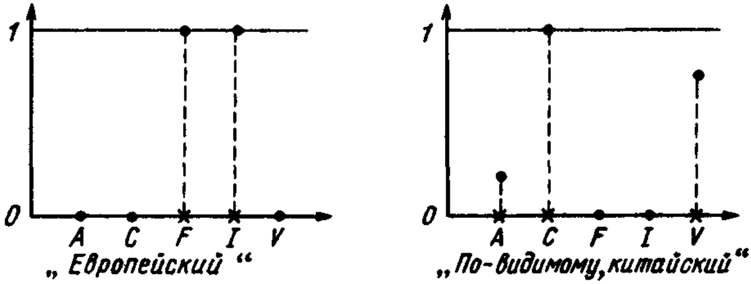


Рис. 5

Степень совместимости неточной оценки, представленной функцией распределения возможностей μ_E, с неточным заданием, представленным функцией распределения возможностей μ_S (причем μ_E и μ_S определены в одном и том же базовом множестве U), можно оценить с помощью двух скалярных мер:

степени возможности того, что оценка соответствует заданию, определяемой в виде

$$\Pi(S, E) = \sup_{u \in U} \min(\mu_S(u), \mu_E(u)). \tag{5}$$

степени необходимости того (или степени уверенности в том), что оценка соответствует заданию, определяемой в виде

$$N(S, E) = \inf_{u \in U} \max(\mu_S(u), 1 - \mu_E(u)). \tag{6}$$

Эти две величины выражают оценку соответственно возможности и необходимости нечеткого события. Мера возможности П(S, E) оценивает величину общей части функций распределения возможностей μ_S и μ_E, а мера необходимости N(S, E) оценивает степень "полного перекрытия" распределения μ_E распределением μ_S. Имеем $N(S, E) \leqslant \Pi(S, E)$. Когда оценка Е является точной, т. е. соответствует одноточечному множеству $\{u_0\}$ в U, тогда получаем $N(S, E) = \Pi(S, E) = \mu_S(u_0)$, что сводится к случаю, рассмотренному в разд. 10.2.1 и 10.2.2.

Мера возможности П(S, E) и мера необходимости N(S, E) играют важную роль в "фильтрации" базы данных, содержащей неточную или нечеткую информацию, которая осуществляется посредством некоторого фильтра, представляющего собой процедуру опроса и в случае необходимости содержащего неточность и нечеткость.

В случае неточного восприятия среды для оценки совместимости рассматриваемой интерпретации с заданием у нас имеются два числа П (S, E) и N(S, E) вместо одного при точном восприятии среды. Различные рассматриваемые интерпретации можно классифицировать по степени их возможности, причем для разделения интерпретаций, имеющих равные степени возможности, используется показатель уверенности. В частности, когда задание является неточным, но четким (т. е. когда S — обычное подмножество базового множества U), мера необходимости N(S, E) не равна 0 лишь тогда, когда мера возможности П(S, E) равна 1. Следует также отметить, что степень необходимости оценивает уверенность в том, что рассматриваемая интерпретация удовлетворяет заданию, а отнюдь не уверенность в том, что эта интерпретация "хороша", т. е. позволяет успешно выполнить последующие инструкции. В самом деле может существовать несколько различных интерпретаций, вполне совместимых с одним и тем же заданием.

Процедуру выполнения инструкций, изложенную в разд. 10.2.1 и проиллюстрированную на примере в разд. 10.2.2, можно расширить на случай неточного восприятия среды, воспользовавшись в качестве основного критерия для упорядочения интерпретаций мерой возможности П(S, E), причем здесь мера необходимости N(S, E) берется лишь как второстепенный критерий для уточнения этого порядка. В данном примере если оценки расстояний неточны, то это может привести к необходимости рассмотрения большего числа перекрестков, которые с учетом имеющейся информации можно считать находящимися на заданном расстоянии. Вообще говоря, неточность оценки среды может только увеличивать общее число интерпретаций некоторой инструкции.

Неточные задания, полученные расчетным путем. В рассмотренном в разд. 10.2.2 примере неточные задания, представленные с помощью функций распределения возможностей, в явном виде присутствовали в инструкциях. Вообще говоря, эти задания можно получить и расчетным путем в виде инструкций, включающих нечеткие операнды или функции, а в результате дающих функцию распределения возможностей. В частности, благодаря результатам, полученным в разделе 2 и позволяющим без труда совершать операции над нечеткими числами, машинное выполнение инструкций, включая расчеты с неточными заданиями, не представляет особых сложностей, кроме, быть может, правил условного ветвления. Этот вопрос кратко изучим ниже.

Например, рассмотрим случай проверки следующего условия: если X >Y, то принимается подход 1;

в противном случае принимается подход 2, где X и Y — две нечеткие величины. Возможность $\mathrm{Pos}(\overline{X} \geqslant \underline{Y})$ того, что величина X больше или равна величине Y, можно вычислить, как, впрочем, и возможность противоположного события $\mathrm{Pos}(\overline{Y} > \underline{X})$. Имеем

$$\mathrm{Pos}(\overline{X} \geqslant \underline{Y}) = \sup_{u,v\,:\,u \geqslant v} \min(\pi_X(u), \pi_Y(v)), \tag{7}$$

И

$$\mathrm{Pos}(\overline{Y} > \underline{X}) = \sup_{u,v\,:\,u < v} \min(\pi_X(u), \pi_Y(v)), \tag{8}$$

где $\pi_X = \mu_F$ и $\pi_Y = \mu_G$ — функции распределения возможностей, представляющие нечеткие множества F и G, которые характеризуют более или менее возможные значения переменных X и Y соответственно (см. разд. 8.2.2). Отметим, что либо $\mathrm{Pos}(\overline{X} \geqslant \underline{Y}) = 1$, либо $\mathrm{Pos}(\overline{Y} > \underline{X}) = 1$, поскольку из двух противоположных альтернатив по крайней мере одна должна быть вполне возможной. Предположим, что подход 1 состоит в вычислении величины Z, результирующее значение которой представляется в виде функции распределения возможностей π_Z^1, а подход 2 соответствует другому способу вычисления величины Z, дающему функцию распределения возможностей π_Z^2. Тогда функция распределения возможностей, ограничивающая множество более или менее возможных значений величины Z, в случае подхода 1 задается формулой

$$\pi_Z(\omega) = \min(\mathrm{Pos}(\overline{X} \geqslant \underline{Y}), \pi_Z^1(\omega)), \tag{9}$$

а в случае подхода 2 — формулой

$$\pi_Z(\omega) = \min(\mathrm{Pos}(\overline{Y} > \underline{X}), \pi_Z^2(\omega)). \tag{10}$$

Более того, если в подходах 1 или 2 берутся значения переменных X или Y, то необходимо, чтобы функции распределения возможностей, используемые при вычислении π_Z^1 и π_Z^2, были согласованными с ограничением $\mathbf{X} \geqslant \mathbf{Y}$ (подход 1) или с ограничением X < Y (подход 2). В случае подхода 1 воспользуемся формулой

$$\pi_X^{\text{измененная}} = \mu_{F \cap [G, +\infty]}; \quad \pi_Y^{\text{измененная}} = \mu_{G \cap (-\infty, F)}, \tag{11}$$

а в случае подхода 2 - формулой

$$\pi_X^{\text{измененная}} = \mu_{F \cap (-\infty, G)}; \quad \pi_Y^{\text{измененная}} = \mu_{G \cap (F, +\infty)}, \tag{12}$$

где нечеткие интервалы $[G, +\infty)$, $(-\infty, F)$, $(-\infty, G)$, $(F, +\infty)$ определены в разд. 8.2.1, а операция пересечения определяется операцией min. Если в дальнейшем возникает необходимость в комбинировании результатов, полученных в рамках подходов 1 и 2, следует воспользоваться операцией объединения нечетких множеств (в смысле max), которыми выражаются эти результаты.

Завершим разд. 10.2.2, посвященный различным вопросам нечеткого программирования, кратким обсуждением правил нечеткого условного ветвления впрограмме, которая не только вычисляет функции распределения возможностей, но и осуществляет неточное задание выполняемых действий.

Условная инструкция в неточно заданной процедуре. В примере из разд. 10.2.2 в маршруте, задаваемом как последовательность нечетких инструкций, не имеется ни одной инструкции типа условного ветвления. В общем случае неточно определенная процедура такого типа может содержать проверки выполнения правил вида

если < условие>, то < действие 1 >;

в противном случае < действие 2 >.

Здесь само условие, а также действия 1 и 2 могут задаваться неточно или нечетко. В этом случае следует поставить в соответствие действию 1 степень возможности удовлетворения данного условия, а действию 2 — степень возможности неудовлетворения того же условия. Если это условие имеет вид: "X есть S", где μ_S - функция распределения возможностей на множестве U, а μ_E — текущая оценка значения переменной X, то две указанные степени возможности определяются соответственно как П(8, E) и 1 - N(S, E) (см. формулы (5) и (6)). В итоге выберем инструкцию, которая соответствует действию с большей степенью возможности. В случае неудачи при выполнении этой или последующих инструкций (после анализа их различных возможных интерпретаций) можно осуществить возврат назад к действию, которое первоначально было отброшено, несмотря на достаточную степень его возможности.

Как мы уже видели, выполнение неточно заданной процедуры осуществляется на основе оценки совместимости восприятия текущей ситуации с заданием. Помимо задачи выполнения программ оценка такой совместимости играет важную роль при рассмотрении многих других задач искусственного интеллекта, таких как:

а) поиск правила или правил, применимых при анализе данной ситуации в экспертной системе (когда правила могут быть неточно заданными, а ситуации — неточно известными), а также вычисление возможности или необходимости эффективного удовлетворения условий, входящих в правило: "если. . . , то.. ." (см. гл. 9);

б) поиск в базе данных таких объектов, которые с требуемой степенью возможности или необходимости удовлетворяют условиям, содержащимся в запросе (см. гл. 11);

в) идентификация в сценарии неточно описанных объектов.

Кроме того, следует отметить, что в искусственном интеллекте различные задачи связаны с разработкой вопросов составления маршрутов: помимо задачи выполнения последовательности нечетких инструкций в реальной среде можно рассмотреть задачу нахождения неточно заданного маршрута на карте (здесь вновь встречается проблема оценки совместимости) или задачу генерирования последовательности инструкций для достижения некоторой цели при наличии неточной карты.

11. Обработка неполной или неопределенной информации

Довольно часто данные, подлежащие обработке, характеризуются неточностью и неопределенностью. В самом деле, значение некоторого признака (атрибута) (в реляционных моделях данных под атрибутами понимаются элементарные информационные единицы), характеризующего данный объект, может быть полностью неизвестным, не полностью известным (т. е. известно лишь некоторое подмножество области определения признака) или неопределенным (например, когда известна функция распределения вероятностей или функция распределения возможностей, заданная на множестве значений признака). Кроме того, бывает, что выбранный атрибут оказывается неприменимым к некоторым из рассматриваемых объектов; в ряде случаев мы даже можем и не знать, существует ли реально данное значение атрибута или оно просто неизвестно.

Для анализа нулевых значений (в частности, случаев "полной неизвестности" и "неприменимости" атрибута было предложено несколько подходов. Так, в ряде работ рассмотрен случай не полностью известных значений и разработана специальная модель для исследования проблемы неполноты информации (не полностью известные или полностью неизвестные значения атрибута). Предложен статистический подход к моделированию неопределенной информации в базе данных. Развит метод работы с расплывчатыми запросами (представленными с помощью нечетких множеств), обращенными к точным данным. С целью обеспечить учет неопределенностей невероятностного характера были введены различного рода нечеткие варианты реляционной алгебры.

Ниже будет изложена общая модель (построенная на основе теории возможностей Заде), которая позволяет анализировать случаи полностью неизвестных значений атрибута, неполноты информации, неопределенной информации, а также случаи неприменимых атрибутов. Более того, с помощью этой модели можно рассматривать вопросы, содержащие нечеткие предикаты. Предложенная расширенная модель данных развивается в рамках реляционного подхода к базам данных. Отметим, что большинство из вышеупомянутых подходов к обработке неполной или неопределенной информации явно вписывается в рамки реляционной модели. Несколько особняком стоит логический подход, развиваемый с целью учета информации, представленной в виде логической дизъюнкции или логического отрицания.

Следующий раздел посвящен вопросам представления неполной и неопределенной информации с помощью распределений возможности, причем показано сходство и отличие предлагаемого подхода от других подходов с использованием нечетких множеств. Кроме того, вкратце затрагиваются вопросы определения функциональной зависимости. Затем излагаются основы расширенной реляционной алгебры и связанного с ней языка запроса. В заключительном параграфе приводится пример, иллюстрирующий различные особенности подхода, а также обсуждаются некоторые задачи его практической реализации.

11.1. Представление неполной или неопределенной информации

11.1.1. Представление данных с помощью распределений возможности

Пусть А - некоторый атрибут с областью значений (доменом) D, т. е. D — множество всех возможных значений, принимаемых атрибутом А. Вся имеющаяся у нас информация о значении атрибута А объекта x будет представляться с помощью функции распределения возможностей $\pi_{A(x)}$ на множестве $D \cup \{e\}$, где e — внешний по отношению к области D элемент, характеризующий случай, когда данный атрибут не применим к объекту x. Другими словами, $\pi_{A(x)}$— отображение из $D \cup \{e\}$ в [0, 1].

Рассмотрим пример, когда мы должны высказать наше суждение относительно года выпуска ("возраста") автомобиля Поля. Можно выделить следующие случаи.

Неизвестно, есть ли у Поля автомобиль или нет, а если есть, то мы не знаем год его выпуска:

$$\pi_{\text{год выпуска автомобиля (Поль)}}(d) = 1, \ \forall d \in D \cup \{e\}.$$

Вполне возможно, что у Поля нет атомобиля, и тем не менее имеется возможность λ > 0 того, что у него есть автомобиль, "возраст" которого более пяти лет:

$$\pi_{\text{год выпуска автомобиля (Поль)}}(d) = \begin{cases} \lambda, \text{ если } d \geqslant 5; \\ 0, \text{ если } d < 5, \end{cases}$$

$$\pi_{\text{год выпуска автомобиля (Поль)}}(e) = 1$$

(вышеприведенное распределение возможностей наименее ограничительно из всех распределений, совместимых с имеющейся информацией).

Имеется полная уверенность в том, что у Поля нет автомобиля:

$$\pi_{\text{год выпуска автомобиля (Поль)}}(e) = 1 \text{ и } \pi = 0$$

всюду на множестве D; это случай неприменимости атрибута.

Вполне возможно, что у Поля есть автомобиль и совсем новый, но имеется и ненулевая возможность X, что у него нет автомобиля:

$$\pi_{\text{год выпуска автомобиля (Поль)}}(e) = \lambda,\ \lambda > 0,$$

$$\pi_{\text{год выпуска автомобиля (Поль)}}(d) = \mu_{\text{новый}}(d),\ \forall d \in D,$$

где $\mu_{\text{новый}}$ — функция принадлежности, представляющая нечеткий предикат "новый".

Имеется полная уверенность в том, что у Поля есть автомобиль, но нет никакой информации о годе его выпуска:

$$\pi_{\text{год выпуска автомобиля (Поль)}}(e) = 0,$$

$$\pi_{\text{год выпуска автомобиля (Поль)}}(d) = 1.$$

Это соответствует случаю "полной неизвестности". Имеется полная уверенность в том, что у Поля есть автомобиль и имеется неполная четкая информация о годе его выпуска — автомобилю Поя от 2 до 4 лет:

$$\pi_{\text{год выпуска автомобиля (Поль)}}(e) = 0,$$

$$\pi_{\text{год выпуска автомобиля (Поль)}}(d) = \begin{cases} 1, \text{если } d \in [2, 4] \subseteq D, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Имеется полная уверенность в том, что у Поля есть автомобиль, и имеется нечеткая информация о том, что автомобиль Поля — новый:

$$\pi_{\text{год выпуска автомобиля (Поль)}}(e) = 0,$$

$$\pi_{\text{год выпуска автомобиля (Поль)}}(d) = \mu_{\text{новый}}(d),\ \forall d \in D.$$

Имеется полная уверенность в том, что у Поля есть автомобиль, и точно известно, что ему 2 года:

$$\pi_{\text{год выпуска автомобиля (Поль)}}(e) = 0.$$

$\pi_{\text{год выпуска автомобиля (Поль)}}(2) = 1$ и π равно нулю всюду на других элементах множества D.

Отметим, что во всех случаях функция распределения возможностей нормирована на $D \cup \{e\}$. Это естественно, поскольку расширенное множество $D \cup \{e\}$ обеспечивает исчерпывающее описание всех возможных альтернатив. Таким образом, проводится единый подход к представлению точных значений атрибута, неопределенных значений, неполной или нечеткой информации о значении атрибута, а также к описанию ситуации, клгда существует ненулевая возможность неприменимости рассматриваемого атрибута. За исключением специально оговоренных случаев, в дальнейшем предполагается, что имеем $\pi(e)=0$ или $\pi(e)=1$, а $\pi(d)=0$.

В реляционных базах данных объекты и связи представляются посредством отношений, определяемых на декартовых произведениях областей значений атрибутов. Вообще говоря, n-арное отношение можно изобразить в виде таблицы, состоящей из n строк и n столбцов, каждая строка соответствует некоторой информации об объекте, а каждый столбец соответствует некоторому атрибуту. В обычных базах данных клетки такой таблицы заполняются точными значениями, представляющими собой одни лишь элементы соответствующих областей значений атрибутов. В предлагаемом подходе любая функция распределения возможностей, нормальная на множестве $D\cup\{e\}$, может появляться в столбце, связанном с областью значений D. Таким образом, расширенное отношение — это, скорее, обычное отношение, определяемое на декартовом произведении множеств, все элементы которых суть функции распределения возможностей (или нечеткие множества), чем нечеткое отношение.

Например, объект ЛИЧНОСТЬ может характеризоваться в базе данных следующей таблицей:

ЛИЧНОСТЬ	ИМЯ	ВОЗРАСТ, годы	СЕМЕЙНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ	ЗАРАБОТНАЯ ПЛАТА, франки
1	Поль	30	Неизвестно	Около 5000
2	Жан	[30, 35]	$\{1/X, 0{,}7/P\}$	Около 5000
3	Мартина	Молодая	З	[1000, 3000]
4	Давид	15	X	"Неприменимо"
5	Франсуаза	Около 40	$\{1/B, 1/P\}$	[5000, 6000]

где X означает холост; Ж(З) - женат (замужем); Р — разведен (разведена); В — вдовец (вдова).

В вышеприведенном примере некоторые значения представлены функциями распределения возможностей, определенными на непрерывных универсумах, а другие — аналогичными функциями, определенными в дискретных универсальных множествах (так, запись $\{1/X, 0{,}7/P\}$ означает, что со степенью возможности 1 Жан холост, а со степенью возможности 0,7 он разведен, тогда как возможность других альтернатив равна 0). Значения "молодой", "около 40 лет", "около 5000 франков" являются метками соответствующих нечетких множеств.

Если значение а некоторого однозначно выражаемого атрибута А объекта x точно известно, то можно логически вывести, что атрибут А не может принимать на x никаких других значений, отличных от а. Совсем другая ситуация в случае, когда известны только функции распределения возможностей (не сводимые к одноточечным множествам), которые ограничивают возможные значения некоторого атрибута для объекта x; тогда нельзя считать, что некоторое утверждение относительно значения этого объекта определено истинно или ложно. Вся имеющаяся на этот счет информация выражена функциями распределения возможностей.

В настоящей главе рассматриваются только однозначные атрибуты; поэтому когда значение атрибута в клетке матрицы отношения представляет собой некоторое (нечеткое или четкое) подмножество его области значений, характеризуемое распределением возможностей, то элементы этого подмножества являются возможными значениями связанного с ними атрибута, причем они взаимно исключают друг друга. Здесь степень принадлежности элемента множеству характеризует возможность того, что этот элемент есть точное значение атрибута. В этой главе не рассматриваются взаимосвязанные значения атрибутов. Например, когда известно, что два лица имеют один и тот же возраст, что они молоды, но сколько им лет в точности неизвестно, то недостаточно отразить в базе данных факт молодости каждого из этих лиц в отдельности, поскольку, если в дальнейшем ищутся пары людей одного и того же возраста, эти два лица будут рассматриваться как возможно, но не обязательно (с необходимостью) имеющие один возраст (см. разд. 11.2). Для представления такой связи можно использовать какой-либо метод наподобие метода индексации.

11.1.2. Сходство и отличие подходов к представлению нечеткой информации в базе данных

Идея использования функций распределения возможностей или родственных им построений при моделировании неполноты или нечеткости информации в базах данных рассматривалась в ряде работ. Так, Тахани использует нечеткие термы исключительно с целью формулирования нечетких запросов с точных данных, при этом ответ на вопрос состоит из нечеткого множества данных. В свою очередь, Баклс и Петри ввели нечеткое отношение подобия, связанное с каждой областью значений атрибута, имея в виду описание степени взаимозаменяемости элементов этой области. Таким образом, возможные значения атрибута представляются с помощью (обычных) множеств элементов, которые считаются взаимозаменяемыми по отношению подобия и фиксированному порогу, зависящему от области значений. Умано предлагает модель, в явном виде основанную на понятии функции распределения возможностей. В настоящей работе предлагается вариант обобщения этого способа представления информации за счет введения дополнительного элемента, который позволяет учитывать ситуации, когда имеется ненулевая вероятность неприменимости данного атрибута. Однако сам метод, разработанный для оценки вопросов (см. разд. 11.2), отличается от метода Умано: он основан на двойственных понятиях мер возможности и необходимости, тогда как подход Умано опирается, скорее, на специальную логику, разработанную для этой цели.

Другой способ представления нечеткой информации состоит в связывании с каждой гранулой информации о некотором объекте нечеткого значения истинности (т. е. числа, принадлежащего интервалу [0,1]). Фрекса использует лингвистические значения истинности, характеризуемые функциями распределения возможностей на интервале [0, 1] (так же как и Умано). В реляционной базе данных этот способ представления нечеткой информации приводит к использованию наборов из n значений атрибутов, причем каждый набор характеризуется функцией распределения возможностей на [0, 1] (в известных случаях сводящейся к числу, заключенному между 0 и 1). Такой способ представления информации соответствует нечеткому отношению и отличается от подхода, основанного на функциях распределения возможностей, где каждый набор из элементов упорядочен и содержит, возможно, и нечеткие значения атрибута, а значение истинности не рассматривается.

Отметим, что Умано в своей более поздней работе комбинирует оба этих представления и получает наборы в виде упорядоченных семейств нечетких множеств, которые к тому же характеризуются и некоторой "степенью истинности" (в случае необходимости определяемой некоторой функцией распределения возможностей на интервале [0, 1]). Однако при этом не дается никакого указания относительно интерпретации этих степеней истинности в рамках теории возможностей, следовательно, и определение их значений, и способ их учета в оценке запросов остаются сугубо эмпирическими. Заде предложил свой подход к оценке высказывания, частично определяющего значение атрибута, с помощью лингвистического значения истинности. Этот подход позволяет перейти к простому распределению возможностей, заданному на возможных значениях атрибута; видимо, это в корне отличается от подхода, избранного Умано. Тем не менее интересно заметить, что в том случае, когда все наборы из n элементов характеризуются значением 1, метод оценки запросов, предложенный Умано, дает в результате нечеткое множество, степени принадлежности которого, в свою очередь, являются функциями распределения возможностей на интервале [0,1]. На основе этого нечеткого множества можно получить такой же результат при ответе на тот же запрос, что и в рамках рассматриваемого подхода, однако представляется более предпочтительным прямо и в явном виде работать с функциями распределения возможностей и необходимости.

Болдуин также использует смешанный подход: представление объектов на основе функций распределения возможностей с нечеткими множествами, ограничивающими возможные значения атрибутов и представление нечетких взаимосвязей между объектами на основе значений истинности. Однако он достигает однородности своего описания, придавая каждой строке из n элементов отношения, определяющего объект, значение истинности, равное 1. С другой стороны, представляется возможным преобразовать нечеткое отношение R, характеризующее некоторую взаимосвязь, в обычное отношение, все строки которого будут наборами нечетких множеств, как это видно из следующего примера. Нечеткое отношение

ЛЮБИТ	ИМЯ 1	ИМЯ 2	μ_R
	Жан	Франсуаза	0,8
	Жан	Мари	1
	Жак	Фредерик	0,5
	Фредерик	Давид	0,5
	Давид	Мари	0,2
	Мари	Жан	0,8

преобразуется в отношение

ЧУВСТВО	ИМЯ 1	ИМЯ 2	ТИП
	Жан	Франсуаза	h
	Жан	Мари	i
	Жак	Фредерик	g
	Фредерик	Давид	g
	Давид	Мари	f
	Мари	Жан	h

где область значений атрибута ТИП задается в виде $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$, причем каждая буква соответствует характерному проявлению взаимных чувств двух лиц, причем элемент a — соответствует "крайней ненависти", а i — "большой любви". Здесь сказуемое "любит" рассматривается как нечеткое подмножество области значений атрибута ТИП, функция принадлежности которого задается на примерах, т. е. для набора x: $\mu_R(x) = \mu_{ЛЮБИТ}(ТИП(x))$. Очевидно, что в общем случае любое нечеткое подмножество, определенное на области значений атрибута ТИП, допускается в качестве значения атрибута в столбце ТИП. Это позволяет отразить неполноту информации относительно взаимных чувств двух лиц, что довольно-таки сложно сделать в модели с использованием единственного значения истинности.

Примечание. В ряде случаев может оказаться естественным использовать плотности распределения вероятностей при моделировании неопределенной информации. Как уже упоминалось, можно определить взаимно однозначное соответствие между распределением вероятностей $p = (p_1, \ldots, p_n)$ и распределением возможностей $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$. Так, помимо обычной вероятностной интерпретации можно дать возможностную интерпретацию частотных гистограмм. Другими словами, статистические данные можно также представлять с помощью распределений возможностей.

11.1.3. Функциональные зависимости и возможностная информация

В базах данных, содержащих точную и определенную информацию, задание функциональной зависимости $A \rightarrow B$ между атрибутами А и В для каждой пары строк (х, у) выражается в виде следующей импликации:

если $A(x) = A(y)$, то $B(x) = B(y)$, (1)

где А (х) — значение атрибута А для объекта, характеризуемого строкой х. Функциональная зависимость соответствует заданию некоторой функции между областями А и В. Представление функциональных зависимостей позволяет моделировать ограничения, накладываемые на реальные данные, которые следует принимать во внимание во избежание противоречий при изменении данных.

Когда база данных содержит неполную (и неточную) информацию, нельзя непосредственно расширить условие (1). В самом деле, из равенства функций распределения возможностей, ограничивающих возможные значения атрибута А для строк х и у, отнюдь не следует равенства функций распределения возможностей, ограничивающих возможные значения атрибута В для х и у, за исключением того случая, когда распределение, связываемое со значениями А (х) и А (у), вырождается в точку или когда имеется дополнительная информация о равенстве значений А для строк х и у. Лишь в этих двух случаях можно сделать заключение о равенстве значений В для строк х и у, т. е. о равенстве функций распределения возможностей, связываемых со значениями В (х) и В (у).

С другой стороны, представляет интерес "размывание" самого понятия зависимости для учета таких ситуаций, как "возраст приближенно определяет заработную плату". Вообще говоря, при этом хотят выразить, что если значения атрибута А для строк x и y равны, то и значения атрибута В для этих строк не могут быть слишком далеки друг от друга. Эту идею можно моделировать с использованием нечеткого отношения близости Р (т. е. рефлексивного: $\forall d, \mu_P(d, d) = 1$ и симметричного: $\forall d, \forall d', \mu_P(d, d') = \mu_P(d', d)$ нечеткого отношения), определенного на области значений D_B атрибута В. Тогда получаем нечеткий вариант импликации (1) в виде

если $A(x) = A(y)$, то $\mu_P(B(x), B(y)) \geqslant \theta$, (2)

где θ— предварительно заданный порог.

Затем, полагая, что В(x) и В(y) известны лишь в терминах функций распределения возможностей, получаем

если А (x) = А (y), то $\Pi(B(x) \simeq_P B(y)) \geqslant \theta$, (3)

где $\Pi(B(x) \simeq_P B(y))$ — возможность того, что значения атрибута В для строк x и y будут примерно равны в смысле нечеткого отношения Р. Эта возможность

$$\Pi(B(x)\tilde{P}B(y)) = \sup_{(v, w) \in D_B \times D_B} \min(\mu_P(v, w), \pi_{B(x)}(v), \pi_{B(y)}(w)), \tag{4}$$

где $\pi_{B(x)}$ - функция распределения возможностей, ограничивающая возможные значения атрибута В для строки x, а μ_P — функция принадлежности нечеткого отношения близости Р.

11.2. Расширенная реляционная алгебра

11.2.1. Обобщение операции θ-отбора

Основные характеристики. Операция θ-отбора состоит в нахождении строк некоторого отношения, составляющие которого удовлетворяют заданному условию (простому или составному). Следовательно, эта операция играет большую роль в построении языка запроса. Операция θ-отбора, применяемая к отношению R при условии С, обозначается через σ(R, С). Составное условие С строится на основе простых условий с помощью логических связок (отрицания, конъюнкции, дизъюнкции). При этом различают два типа простых условий: условия вида АθВ, содержащие два атрибута А и В и отношение сравнения θ, а также условия вида $A\theta a$, включающие один атрибут A и одну константу a, которая может быть четкой или нечеткой. В обычной реляционной алгебре в качестве отношения сравнения выступают равенство = и неравенства $\neq, >, \geqslant, <, \leqslant$. В рамках рассматриваемого подхода можно представить вариант (четкого или нечеткого) сравнения с помощью функции принадлежности μ_θ, определенной на декартовом произведении двух областей и принимающей свои значения в интервале [0, 1]; таким образом можно моделировать такие отношения сравнения, как "примерно равен", "значительно больше, чем" и т. д.

Использование функций распределения возможностей с целью ограничения возможных значений каждого атрибута индуцирует меру возможности и меру необходимости, служащих для оценки удовлетворения заданного условия некоторой строкой. Напомним, что меры возможности и необходимости, построенные по некоторой функции распределения возможностей π, определяются для нечеткого отношения соотношениями

$$\Pi(F) = \sup_{\omega \in \Omega} \min(\mu_F(\omega), \pi(\omega)) \tag{5}$$

и

$$N(F) = \inf_{\omega \in \Omega} \max(\mu_F(\omega), 1 - \pi(\omega)). \tag{6}$$

Таким образом, в результате θ-отбора $\sigma(R, C)$ получаем два нечетких множества: множество строк отношения R, которые, возможно, удовлетворяют условию C, и множество строк, которые с необходимостью удовлетворяют условию C, где степень принадлежности соответствует мере возможности и мере необходимости.

Мы запишем

$$\sigma(R, C) = (\sigma\Pi(R, C), \sigma N(R, C)) \tag{7}$$

с целью выразить, что результат θ-отбора есть пара нечетких множеств. Когда функция распределения возможностей нормальна, возможность (четкого или нечеткого) события всегда больше или равна его необходимости и для каждой строки x отношения R получаем

$$\mu_{\sigma\Pi(R, C)}(x) \geqslant \mu_{\sigma N(R, C)}(x), \tag{8}$$

где через μ обозначается функция принадлежности. Формула (8) выражает условие вложенности нечетких множеств $\sigma N(R,C) \subseteq \sigma\Pi(R,C)$.

Составные условия. Оценка некоторого составного условия сводится к оценке простых условий благодаря следующим результатам:

$$\sigma(R, \neg C) = (\overline{\sigma N(R,C)}, \overline{\sigma\Pi(R,C)}), \tag{9}$$

$$\sigma(R, C_1 \vee C_2) = (\sigma\Pi(R,C_1) \cup \sigma\Pi(R,C_2), \sigma N(R,C_1) \cup \sigma N(R,C_2)), \tag{10}$$

$$\sigma(R, C_1 \wedge C_2) = (\sigma\Pi(R,C_1) \cap \sigma\Pi(R,C_2), \sigma N(R,C_1) \cap \sigma N(R,C_2)), \tag{11}$$

где $\overline{\sigma N(R,C)}$ (соответственно $\overline{\sigma\Pi(R,C)}$) означает дополнение к $\sigma N(R,C)$ (соответственно к $\sigma\Pi(R,C)$), причем определяется дополнением степени принадлежности к 1, а объединение и пересечение нечетких множеств определяются соответственно операторами max и min. Формула (9) непосредственно получается из условия $N(F) = 1 - \Pi(F)$. Формулы (10) и (11) применимы лишь тогда, когда атрибуты, входящие в условия C_1 и C_2, являются невзаимодействующими (два атрибута называются невзаимодействующими, если для каждой n-ки значение одного из них не зависит от значения другого.

Простые условия, включающие единственный атрибут и константу. Сначала рассмотрим простые условия вида Aθa, где A — атрибут, θ — отношение сравнения, представленное с помощью своей функции принадлежности, a — константа, представленная с помощью своей функции принадлежности μ_a. Примерами таких условий являются: "Возраст значительно больше тридцати лет" или "Возраст, приравниваемый к молодому", соответствующее запросу "найти всех молодых людей".

Возможность того, что значение атрибута A для объекта x принадлежит множеству элементов, которые находятся в отношении θ хотя бы с одним элементом a, задается в виде (в настоящей главе символ | не означает "условный", а служит просто для разделения запроса и оцениваемых данных)

$$\Pi(a \circ \theta \mid A(x)) = \sup_{d \in D} \min(\mu_{a \circ \theta}(d), \pi_{A(x)}(d)), \tag{12}$$

причем

$$\mu_{a \circ \theta}(d) = \sup_{d' \in D} \min(\mu_\theta(d, d'), \mu_a(d')), \tag{13}$$

где D - область значений атрибута A; μ_θ - функция принадлежности (четкого или нечеткого) отношения, определенного на декартовом произведении D×D, а $\pi_{A(x)}$ — функция распределения возможностей, ограничивающая возможные значения атрибута A для объекта x при дополнительном условии, что $\pi_{A(x)}(e) = 0$ (e — дополнительный элемент, введенный ранее).

Необходимость этого же события задается в виде

$$N(a \circ \theta \mid A(x)) = \inf_{d \in D} \max(\mu_{a \circ \theta}(d), 1 - \pi_{A(x)}(d)). \quad (14)$$

В формулах (12), (14) $\Pi(a \circ \theta \mid A(x))$ (соответственно $N(a \circ \theta \mid A(x))$) определяет степень принадлежности объекта x к множеству наборов, которые возможно (соответственно с необходимостью) удовлетворяют условию $A\theta a$, т.е.

$$\mu_{\sigma\Pi(R;\,A\theta a)}(x) = \Pi(a \circ \theta \mid A(x)), \quad (15)$$

$$\mu_{\theta N(R;\,A\theta a)}(x) = N(a \circ \theta \mid A(x)). \quad (16)$$

Формула (13) показывает, что $a \circ \theta$ есть нечеткое множество элементов области D, которые находятся в отношении θ хотя бы с одним элементом a. Формула (13) расширяет на случай нечетких множеств следующее выражение, справедливое для обычных множеств:

$$a \circ \theta = \{d \in D \mid a \cap \theta_d \neq \varnothing\}, \quad (17)$$

где θ_d - множество элементов области D, находящихся в отношении θ с d. Отметим, что если отношение θ рефлексивно (т. е. $\forall d \in D \mu_\theta(d, d) = 1$), то $\mu_{a \circ \theta} \geqslant \mu_a$, т.е. $a \circ \theta \supseteq a$.

Формулы (12) и (14) непосредственно следуют из выражений (5) и (6). Если a можно представить в виде объединения двух нечетких отношений b и c, где объединение определяется оператором max, то имеем

$$a \circ \theta = (b \cup c) \circ \theta = (b \circ \theta) \cup (c \circ \theta). \quad (18)$$

Аналогичной формулы для пересечения не существует. Можно убедиться, что

$$\Pi((b \cup c) \circ \theta \mid A(x)) = \max(\Pi(b \circ \theta \mid A(x)), \Pi(c \circ \theta \mid A(x))). \quad (19)$$

С другой стороны, имеем лишь

$$N((b \cup c) \circ \theta \mid A(x)) \geqslant \max(N(b \circ \theta \mid A(x)), N(c \circ \theta \mid A(x))). \quad (20)$$

Таким образом, при проведении вычислений по формуле (14) а нельзя представить в виде объединения двух подмножеств. К тому же бывают ситуации, когда дизъюнкция двух расплывчатых предикатов нельзя удовлетворительным образом представить объединением нечетких множеств, а более адекватное представление дает выпуклая оболочка объединений. Выпуклая оболочка а нечеткого множества, определяемая на вполне упорядоченном универсальном множестве D, задается выражением

$$\mu\hat{a}(d) = \sup_{d' \leq d \leq d''} \min(\mu_a(d'), \mu_a(d'')). \qquad (21)$$

Отметим, что $\mu_{\hat{a}} \geqslant \mu_a$, т. е. $\hat{a} \supseteq a$; выпуклая оболочка объединения двух нечетких множеств b и c представлена на рис. 1.

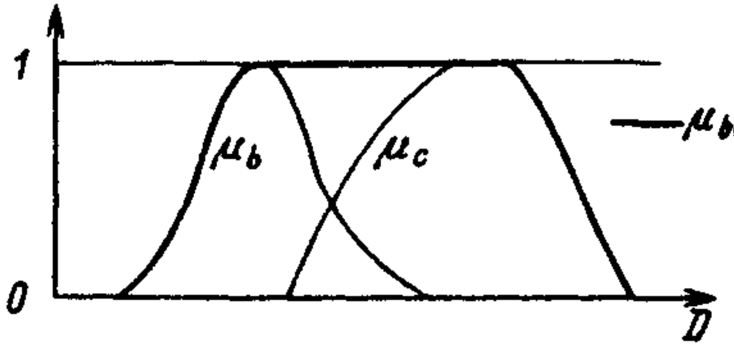


Рис. 1

Так, выпуклая оболочка нечеткого множества, выражающего характеристику "средней или большой", включает все элементы, расположенные между "средним" и "большим" со степенью принадлежности, равной 1.

Замечание. Когда $\pi_{A(x)}(e) \neq 0$, т. е. когда имеется ненулевая возможность того, что атрибут A не применим к объекту x, формулы (15) и (16) заменяются формулами

$$\mu_{\sigma\Pi(R,\, A\theta a)}(x) = \Pi(a \circ \theta \mid A^*(x)), \qquad (22)$$

$$\mu_{\sigma N(R,\, A\theta a)}(x) = 1 - \Pi(a \circ \theta \cup \{e\} \mid A(x)), \qquad (23)$$

где символ * означает, что формуле (12) используется сужение функции $\pi_{A(x)}$ на множество D, а не $\pi_{A(x)}$, определенное на множестве $D \cup \{e\}$, как в формуле (23). С целью обоснования формулы (23) заметим, что необходимость в том, чтобы объект x удовлетворял условию $A\theta a$ соответствует невозможности события "А не применим к x" или "Значение A(x) не удовлетворяет условию $A\theta a$". Мера возможности, появляющаяся в формуле (23), вычисляется заменой $a \circ \theta$ на $\overline{a \circ \theta} \cup \{e\}$ и D на $D \cup \{e\}$ в формуле (12).

Наконец, рассмотрим случай, когда θ — равенство, т. е. $a \circ \theta = a$, и формулы (12) и (14) выражают соответственно возможность и необходимость того, что значение A(x) принадлежит a. Вообще говоря, следует заметить, что если a — одноточечное множество $\{d_0\}$, то условие "A(x) находится в отношении θ с a" имеет смысл "A (x) находится в отношении θ с d_0", тогда как в противном случае условие "A(x) находится в отношении θ с a" означает в рамках нашего подхода, что "$\exists d \in a$ и A (x) находится в отношении θ с d".

Простые условия, включающие два атрибута. Теперь мы рассмотрим простые условия вида "$A\theta B$", где A и B — различные атрибуты с одной и той же областью значений, а θ — четкое или нечеткое отношение сравнения, выраженное с помощью своей функции принадлежности μ_θ. В дальнейшем мы будем предполагать, что атрибуты всегда применимы. Такие условия содержатся в следующих примерах: "Найти всех студентов, у котррых уровень подготовки по математике примерно равен уровню подготовки по физике" или "Найти всех студентов, у которых уровень подготовки по математике выше, чем уровень подготовки по физике".

Возможность того, что значение атрибута A для объекта x будет в отношении θ со значением атрибута B для того же объекта x, задается выражением

$$\Pi(\theta \mid (A(x), B(x))) = \sup_{(d, d') \in D \times D} \min(\mu_\theta(d, d'), \pi_{(A(x), B(x))}(d, d')), \tag{24}$$

где

$$\pi_{(A(x), B(x))}$$

- функция распределения возможностей, ограничивающая возможные значения пары (A, B) для x. Когда атрибуты A и B являются невзаимодействующими, функцию распределения

$$\pi_{(A(x), B(x))}$$

можно разложить следующим образом:

$$\forall (d, d') \in D \times D, \pi_{(A(x), B(x))}(d, d') = \min(\pi_{A(x)}(d), \pi_{B(x)}(d')) \tag{25}$$

Тогда выражение (24) принимает вид

$$\Pi(\theta \mid (A(x), B(x))) = \sup_{(d, d') \in D \times D} \min(\mu_\theta(d, d'), \pi_{A(x)}(d), \pi_{B(x)}(d')). \tag{26}$$

Необходимость того, что значение атрибута A для объекта x будет в отношении θ со значением атрибута B для объекта x, задается выражением

$$N(\theta \mid (A(x), B(x))) = \inf_{(d, d') \in D \times D} \max(\mu_\theta(d, d'), 1 - \pi_{(A(x), B(x))}(d, d')), \tag{27}$$

которое в случае невзаимодействующих атрибутов принимает вид

$$N(\theta \mid (A(x), B(x))) = \inf_{(d, d') \in D \times D} \max(\mu_\theta(d, d'), 1 - \pi_{A(x)}(d), 1 - \pi_{B(x)}(d')). \tag{28}$$

Отметим, что формулы (24) и (27) непосредственно выводятся из соотношений (5) и (6).

Величина $\Pi(\theta \mid A(x), B(x))$ (соответственно $N(\theta \mid A(x), B(x))$ определяет степень принадлежности объекта x к множеству таких наборов, которые возможно (соответственно с необходимостью) удовлетворяют условию $A\theta B$, т. е.

$$\mu_{\sigma\Pi(R, A\theta B)}(x) = \Pi(\theta \mid A(x), B(x)), \tag{29}$$

$$\mu_{\sigma N(R, A\theta B)}(x) = N(\theta \mid A(x), B(x)). \tag{30}$$

В случае симметричных отношений сравнения (равенство, приближенное равенство) можно убедиться, что выражения (26) и (28) симметричны по A и B. Точнее, в случае равенства A = B формула (28) оценивает необходимость того, чтобы значения атрибутов A и B для объекта x были равны, однако не оценивает, насколько равны функции распределения возможностей $\pi_{A(x)}$ и $\pi_{B(x)}$. В самом деле, величина N в формуле (28) принимает ненулевое значение тогда, и только тогда, когда $\exists d_0 \in D$ такое, что

$$\pi_{A(x)} = (d_0) = \pi_{B(x)}(d_0) = 1$$

и

$$\exists \alpha \forall d \neq d_0, \pi_{A(x)}(d) < \alpha, \pi_{B(x)}(d) < \alpha,$$

где a < 1; значение необходимости, полученное по формуле (28), равно 1 тогда, и только тогда, когда значения атрибутов точно известны и равны.

Замечания. Отметим, что вопрос: "Найти людей, возраст которых примерно равен возрасту Поля" - рассматривается в рамках подхода, используемого для условий вида $A\theta B$, хотя связанное с ним условие может быть типа $A\theta a$, где a - информация о возрасте Поля. Фактически мы должны сравнить возраст x и возраст Поля, а не оценивать, насколько возраст x принадлежит нечеткому множеству значений, примерно равных возможному возрасту Поля. В более общем случае можно убедиться, что

$$N(a \circ \theta \mid A(x)) \geqslant N(\theta \mid (A(x), a)), \tag{31}$$

но

$$\Pi(a \circ \theta \mid A(x)) = \Pi(\theta \mid (A(x), a)), \tag{32}$$

где $a = A(x_0)$; выражение (31) является строгим неравенством, за исключением нескольких особых случаев; в частности, равенство выполняется тогда, когда a - одноточечное множество.

Толерантность. Содержание этого параграфа охватывает две проблемы: вначале рассматриваются последствия возможной неточности задания функций принадлежности, определяющих распределения возможностей, затем изучаются способы учета изменений в ограничении C и их влияние на результат θ-отбора σ(R, C).

Если ϵ— максимальная амплитуда возможной абсолютной ошибки в каждой точке области определения функции распределения возможностей, то эта возможная ошибка не может изменить значения мер возможности и необходимости, вычисляемые по этим функциям распределения, больше чем на ϵ. Наоборот, в теории вероятностей ошибки при задании функции распределения могут привести к более серьезным нарушениям.

Условие C при θ-отборе σ(R, C) включает одно или несколько отношений сравнения, в зависимости от того, является ли оно простым или составным. Это условие можно сделать более или менее ограничительным, изменяя отношения сравнения. Отношение сравнения θ можно смягчить (например, заменяя строгое равенство на приближенное равенство) за счет его композиции с некоторым четким или нечетким отношением толерантности T:

$$\mu_{\theta \circ T}(d, d') = \sup_{d'' \in D} \min(\mu_\theta(d, d''), \mu_T(d'', d')), \tag{33}$$

где μ_T— функция принадлежности отношения толерантности, которая должна быть рефлексивной и симметричной (т. е. $\forall d \in D, \mu_T(d, d) = 1, \forall (d'', d') \in$ $\in D \times D, \mu_T(d'', d') = \mu_T(d', d'')$. Отметим, что при наличии условия Aθa введение отношения толерантности T приводит также к расширению множества элементов, находящихся в отношении θ хотя бы с одним элементом a, поскольку имеем

$$\mathbf{a} \circ (\theta \circ \mathbf{T}) = (\mathbf{a} \circ \theta) \circ \mathbf{T}, \qquad (34)$$

где $\circ$ означает (sup-min)-композицию. Практически вычисление (sup-min)-композиции по формуле (33) сводится к сложению нечетких чисел.

11.2.2. Декартово произведение, θ-соединение и проекция

Декартово произведение двух расширенных отношений R и S (элементы которых — упорядоченные наборы функций распределения возможностей) определяется обычным образом, поскольку R и S - обычные отношения на декартовом произведении множеств нечетких подмножеств соответствующих областей значений атрибутов.
Рассмотрим два расширенных отношения

R	A1	A2	A3
	u_1	u_2	u_3
	v_1	v_2	v_3
	w_1	w_2	w_3

и

S	A3	A4
	x_3	x_4
	y_3	y_4
	z_3	z_4
	t_3	t_4

Их декартово произведение задается в виде

R × S	A1	A2	A3	A3	A4
	u_1	u_2	u_3	x_3	x_4
	...	...	...	...	...
	u_1	u_2	u_3	t_3	t_4
	v_1	v_2	v_3	x_3	x_4
	...	...	...	...	...
	w_1	w_2	w_3	t_3	t_4

В базах данных, содержащих только точные значения и четкие отношения сравнения, операция θ-соединения отношений R и S соответствует конкатенации и отбору пар строк, таких, что справедливо отношение сравнения θ между некоторыми из их компонентов. Фактически это θ-отбор на декартовом произведении.
Расширенное θ-соединение определяется как расширенный θ-отбор на декартовом произведении. В рассмотренном выше примере расширенное эквисоединение (θ-равенство) соответствует конкатенации пар строк возможно и с необходимостью имеющих одно и то же значение R и S для атрибута A_3, и задается выражением

$$\sigma(\mathbf{R}\times\mathbf{S},\ \mathbf{A}_3^{(\mathbf{R})} = \mathbf{A}_3^{(\mathbf{S})}) = (\sigma\Pi(\mathbf{R}\times\mathbf{S},\ \mathbf{A}_3^{(\mathbf{R})} = \mathbf{A}_3^{(\mathbf{S})}),\ \sigma\mathbf{N}(\mathbf{R}\times\mathbf{S},\ \mathbf{A}_3^{(\mathbf{R})} = \mathbf{A}_3^{(\mathbf{S})})).$$

В более явном виде получаем следующие нечеткие отношения для

$\sigma\Pi(R \times S, A_3^{(R)} = A_3^{(S)})$:

A1	A2	A3	A3	A4	П
u_1	u_2	u_3	x_3	x_4	$\Pi(= \mid (u_3, x_3))$
...	...	...	...	...	...
u_1	u_2	u_3	t_3	t_4	$\Pi(= \mid (u_3, t_3))$
v_1	v_2	v_3	x_3	x_4	$\Pi(= \mid (v_3, x_3))$
...	...	...	...	...	...
w_1	w_2	w_3	t_3	t_4	$\Pi(= \mid (w_3, t_3))$

и аналогичным образом для $\sigma N(R \times S, A_3^{(R)} = A_3^{(S)})$. Взяв проекцию отношения $\sigma\Pi(R \times S, A_3^{(R)} = A_3^{(S)})$, например на атрибут A_1 и специальный столбец П, получаем

A_1	П	A_1	П
u_1	$\Pi = (= \mid (u_3, x_3))$	v_1	$\Pi(= \mid (v_3, x_3))$
...	...	...	...
u_1	$\Pi(= \mid (u_3, t_3))$	w_1	$\Pi(= \mid (w_3, t_3))$

Заметим, что может существовать несколько ненулевых степеней возможности для одного и того же атрибута A_1; в результате взятия проекции сохраняется лишь максимальная из степеней возможности для каждого атрибута A_1. В сущности, мы вычислили проекцию нечеткого отношения $\sigma\Pi(R \times S, A_3^{(R)} = A_3^{(S)})$

Предположим, что в вышеописанном примере A_1, A_2, A_3, A_4 характеризуют соответственно ИМЯ, РОСТ, ВОЗРАСТ и ЗАРАБОТНУЮ ПЛАТУ; тогда получаем фамилии лиц, имеющих "хорошую" зарплату, как результат следующей операции:

$$\text{PROJ}_{\text{ИМЯ}}(\sigma(R \times S, \text{ВОЗРАСТ}^{(R)} = \text{ВОЗРАСТ}^{(S)} \wedge \text{ЗАРАБОТНАЯ ПЛАТА} = \\ = \text{"хорошая"})),$$

где проекция берется отдельно на отношения $\sigma\Pi$ и σN способом, указанным выше. Цель нижеследующего комментария - точное объяснение смысла выражения (A).

По строке $i, (n(i), t(i), a_R(i))$ отношения R и строке $j(a_S(j), s(j))$ отношения S строится строка декартова произведения R × S; эта строка принадлежит части σП-отношения, определяемого выражением (A) со степенью

$$\min(\Pi(= \mid (a_R(i), a_S(j))), \Pi(\text{"хорошая"} \mid s(j))), \quad \text{(B)}$$

и принадлежит части σ*N* указанного отношения со степенью

$$\min(N(= \mid (a_R(i), a_S(j))), N(\text{"хорошая"}) \mid s(j))). \quad \text{(C)}$$

Как следствие этого, значение атрибута ФАМИЛИЯ n(i) принадлежит проекции части σП выражения (А) со степенью

$$\sup \min(\Pi(= | (a_R(i), a_S(j))), \Pi\ (\text{"хорошая"})\ | s(j))) \quad \text{(D)}$$

и принадлежит проекции части σ*N* выражения (А) со степенью

$$\sup_j \min(N(= | (a_R(i), a_S(j))), N\ (\text{"хорошая"}\ | s(j))). \quad \text{(E)}$$

С помощью выражения (С) вычисляется необходимость того, что две переменные — возраст (i) и возраст (j) — равны, причем возможные значения этих переменных ограничены величинами $\mu_{a_R(i)}$ и $\mu_{a_S(j)}$; эта оценка находится в полном соответствии с нижеследующей интерпретацией отношения S. Строка отношения S соответствует неточному описанию с помощью функций распределения возможностей пары *однозначных* атрибутов, т. е. в нашем примере определяем функцию, которая ставит в соответствие единственному значению возраста, в большей или меньшей степени принадлежащему множеству $a_S(j)$, некоторое значение заработной платы, ограниченное величиной s(j). Можно дать и другую интерпретацию произвольной строке отношения S.

Каждому значению возраста, принадлежащему множеству $a_S(j)$, ставится в соответствие величина заработной платы, ограниченная s(j). Отметим, что эта интерпретация не согласуется с общим подходом, излагаемым в настоящем разделе, поскольку $a_S(j)$ рассматривается как (в известных случаях нечеткое) множество значений, но не как нечеткое множество возможных значений, исключающих друг друга. Тем не менее этой интерпретацией можно воспользоваться и в рамках нашего подхода, заменяя $N(= | (a_R(i), a_S(j)))$ на $N(a_S(i) | a_R(j))$ в выражениях (С) и (Е). (Напомним, что $\Pi(= | (a_R(i),$

$$a_S(j))) = \Pi(a_S(i) | a_R(j))).$$

Кроме того, отметим, что, раскрывая выражение (D), получаем

$$\sup_v \min \times (\sup_u \min(\mu_{a_R(i)}(u), \sup_j \mu_{a_S(j) \times s(j)}(u, \quad v);$$

$$\mu_{\text{"хорошая"}}(v) = \quad \Pi(\text{"хорошая"} | a_R(i) \circ \bigcup_i [a_S(j) \times s(j)]),$$

т.е. возможность того, что заработная плата лица с фамилией в строке i отношения R будет "хорошей". Вычисление функции распределения возможностей, ограничивающей возможные значения этой заработной платы, производится в соответствии с обычной схемой приближенных рассуждений (см. разд. 8.3).

11.2.3. Объединение и пересечение

Как и в случае обычных отношений, два расширенных отношения называются согласованными, если существует взаимно однозначное соответствие между их множествами атрибутов, такое, что эти атрибуты имеют одну и ту же область значений. Объединение двух согласованных расширенных отношений R и S соответствует обычной операции объединения, определенной для подмножества декартовых произведений множеств. После осуществления объединения необходимо исключить все те строки, которые рассматриваются как избыточные. В обычной реляционной алгебре две строки отношения называются избыточными, если они тождественны. Это требование строгого равенства может оказаться слишком сильным для сравнения функций распределения возможностей, поскольку в общем случае они получаются посредством приближенной идентификации. Аналогичная проблема возникает и при определении пересечения: некоторая строка принадлежит множеству $\mathbf{R} \cap \mathbf{S}$, если она характеризуется избыточностью по отношению к некоторой строке отношения R и некоторой строке отношения S.

Приближенное равенство двух функций распределения возможностей π и π' можно определить в виде

$$\sup_{d \in D} | \pi(d) - \pi'(d) | \leqslant \epsilon_D, \tag{35}$$

где ϵ_D — некоторый порог, зависящий от конкретной области D. Как и всякое отношение приближенного равенства, отношение (35) не транзитивно. Расширенное отношение неизбыточно, если в ней не найдется ни одной пары строк, приближенно равных по каждому компоненту в смысле формулы (35); но поскольку выражение (35) не определяет отношение эквивалентности, то не существует единого способа исключения избыточности в заданном отношении. Тем не менее различные неизбыточные отношения, которые можно отсюда вывести, остаются подобными друг другу и использование одного из них вместо другого практически не влияет на оценку вопросов (по отношению к ϵ_D).

11.2.4. Вопросы, использующие другие операции

Вопросы, требующие ответа типа "да — нет". К базе данных можно адресовать главным образом два типа запросов: запросы, связанные с поиском определенного множества объектов, и вопросы, требующие ответа типа "да — нет". В предыдущих разделах обсуждались запросы первого типа. Теперь вкратце рассмотрим вопросы второго типа при наличии неполной информации. В этих случаях недостаточно ответов "да" или "нет", а следует оценить возможность и необходимость ответа "да", причем возможность ответа "нет" будет дополнением к необходимости ответа "да", а необходимость ответа "нет" — дополнением к возможности ответа "да". Таким образом, результаты предыдущих параграфов непосредственно применимы к таким вопросам, как: "Правда ли, что значение атрибута А для x_0 находится в отношении θ с a?" или "Правда ли, что значение атрибута А для x_0 находится в отношении θ со значением атрибута В для x_0?", а также к аналогичным вопросам, содержащим составные условия. Более того, этот подход позволит анализировать вопросы с некоторыми (четкими или нечеткими) квантификаторами, такие как: "Правда ли, что *большинство* объектов, для которых значение атрибута А находится в отношении θ с a, имеют значение атрибута В, состоящее в отношении θ' с B?".

Вопросы мощности множества. Когда значения атрибута известны лишь в виде функций распределения возможностей, можно вычислить такую функцию распределения, которая ограничивает возможные значения мощности множества наборов, в которых значение атрибута А находится в отношении θ с a. Можно показать, что эта функция распределения возможностей

$$\forall n \in \mathcal{N}, \pi_{\mathrm{card}(A\theta a)}(\Pi) = \min\Big(\max_{\substack{S \subseteq T \\ |S| = n}} \min_{x \in S} \Pi(a \circ \theta \mid A(x)), \min_{\substack{S \subseteq T \\ |S| = n+1}} \max_{x \in S} \Pi(a \circ \theta \mid A(x)), \qquad (36)$$

где Т — множество строк рассмотренного отношения. Это и может быть ответом на вопрос относительно мощности множества, представленного в виде распределения возможностей. Кроме того, результаты, касающиеся определения отношений нечеткого порядка между нечеткими числами, позволят анализировать вопросы, связанные со сравнением мощностей множеств в данном случае (см. разд. 8.2).

Взвешенные расплывчатые запросы. Анализ нечеткого запроса, моделируемого с помощью некоторого фильтра, представляющего собой конъюнкцию элементарных фильтров, проводится сравнением возможных значений атрибутов для каждого объекта с соответствующими нечеткими множествами в элементарных фильтрах. Элементарные меры возможности и необходимости комбинируются отдельно друг от друга, чтобы получить две общие меры согласованности между полным фильтром и описанием объекта. Свертка элементарных мер основана на применении оператора min и сохраняет семантику мер возможности и необходимости. В самом деле, имеем следующие результаты:

$$\Pi(R_1 \times \ldots \times R_n \mid D_1 \times \ldots \times D_n) = \min_{i=1,\ldots,n} \Pi(R_i, D_i), \tag{37}$$

$$N(R_1 \times \ldots \times R_n \mid D_1 \times \ldots \times D_n) = \min_{j=1,\ldots,n} N(R_i, D_i), \tag{38}$$

где символом × обозначается декартово произведение нечетких множеств R_i и D_i, которые относятся к части запроса и данных соответственно и предполагаются заданными на одной и той же области U_i, а атрибуты считаются логически независимыми (т. е. нечеткое множество значений, совместимых с одним из атрибутов, не зависит от значений, придаваемых другому атрибуту, и наоборот). В случае, когда фильтр соответствует дизъюнкции элементарных фильтров, вместо операции min в формулах (37) и (38) берется операция max. Безусловно, можно рассматривать и фильтры, структурированные в виде И/ИЛИ дерева. Следует отметить, что в формулах (37) и (38) предполагается, что все части фильтра, выражающего запрос, имеют одинаковую важность с точки зрения пользователя. Таким образом, формулы (37) и (38) не отражают древовидную структуру.

В разд. 8.1.3 был предложен канонический метод введения весов в свертки, основанные на операции min.

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$— весовые коэффициенты, выражающие относительную важность фильтров $R_1, R_2, \ldots, R_n$. Эти коэффициенты удовлетворяют следующим допущениям: 1) $\forall i, p_i \in [0, 1]$; 2) чем важнее фильтр R_i, тем больше его вес p_i; 3) max P_i = 1 (условие нормировки); запросы (или цели) , которые считаются самыми важными, имеют значения весовых коэффициентов 1.

Пусть s_i — степень фильтрации некоторого объекта с помощью элементарного фильтра F_i; здесь имеем либо $s_i = \Pi(R_i, D_i)$, либо $s_i = N(R_i, D_i)$. Степень фильтрации s этого объекта с помощью полного фильтра $(R_1 \times \ldots \times R_n)$ с учетом относительной важности различных целей задается выражением

$$s = \min_{j=1,\ldots,n} \max(1 - p_i, s_i), \tag{39}$$

где величина s может рассматриваться как степень необходимости. Здесь она выражает, насколько мы уверены в том, что нечеткое множество важных запросов (где степени важности определяются весами p_i) вложено в нечеткое множество запросов, возможно (с необходимостью), удовлетворяемых объектом и определенных в виде $s_i = \Pi(R_i D_i), i = 1, \ldots, n$ (соответственно $s_i = N(R_i, D_i), i = 1, \ldots, n)$. Отметим, что если все весовые коэффициенты равны 1 (все запросы равноважны), то получаем $s = \min_{i=1,\ldots,n} s_i$; при $p_i = 0$ фильтр R_i не учитывается. В итоге в случае неравнозначности различных целей при составном фильтре вместо формулы (37) применяется формула (39) с величиной $s_i = \Pi(R_i, D_i)$, а вместо формулы (38) — формула (39) с величиной $s_i = \Pi(R_i, D_i)$. Аналогичным образом взвешивание операции max при дизъюнкции задается формулой

$$s = \max_{i=1,\ldots,n} \min(p_i, s_i).$$

Введение весового коэффициента в свертку, например как в выражении (39), приводит к превращению фильтров R_i в фильтры R^*_i, такие, что

$$\mu_{R^*_i}(u) = \max(\mu_{R_i}(u), 1 - p_i),$$

и комбинированию различных степеней фильтрации (относительно R^*_i) с использованием вновь симметрической свертки типа min. Действительно, именем следующие равенства :

$$\min_{i=1,\ldots,n} \max(1 - p_i, \Pi(R_i, D_i)) = \min \Pi(R^*_i, D_i),$$

$$\min_{i=1,\ldots,n} \max(1 - p_i, N(R_i, D_i)) = \min N(R^*_i, D_i).$$

Следовательно, если аппроксимировать этими равенствами формулы (37) и (38), то можно утверждать, что схема свертывания целей по формуле (39) дает соответственно степени возможности того, являются ли сами степени s_i степенями возможности или степенями необходимости. Тогда становится возможной обработка запросов типа "выбрать автомобиль с очень малым расходом топлива (основное), новый (важно), с умеренной ценой (желательно) и с высокой максимальной скоростью (неплохо бы)", где слова в скобках неявно упорядочивают рассматриваемые элементарные запросы. Именно этот порядок выражается с помощью весовых коэффициентов p_i. Отметим, что, например, цена может иметь ограниченную значимость лишь внутри некоторого диапазона приемлемых цен. Если цена становится чересчур высокой, то в конце концов она оказывается непреодолимым ограничением, запретом сама по себе. Использование постоянных весовых коэффициентов не позволяет учесть это обстоятельство. Для этого необходимо прибегнуть к переменным весовым коэффициентам, зависящим от значений рассматриваемого атрибута.

11.2.5. Упорядочение результатов

Одно из преимуществ учета расплывчатого характера запросов — возможность упорядочения результатов по их значимости. После оценивания запроса в нашем распоряжении имеется множество объектов, каждый из которых характеризуется парой чисел (степеней). Следующие замечания позволяют провести упорядочение множества нескольких объектов по отношению к одному и тому же запросу:

степень необходимости важнее, чем степень возможности; если для каждого объекта получаем степень необходимости, равную 0, а степень возможности, равную 1, это значит, что запрос, выражаемый в виде фильтра, слишком точен по отношению к имеющимся данным; тогда можно либо изменить фильтр (используя, например, отношение толерантности), либо взять меру перекрытия для различения двух объектов, таких, что $\Pi=1$, $N=0$, причем эта мера может основываться на вероятности нечеткого события или на мере неточности Хигаши и Клира;

в общем случае принцип Парето используется для упорядочения пар оценок следующим образом: пара (Π_1, N_1) больше пары (Π_2, N_2) тогда, и только тогда, когда $\Pi_1>\Pi_2$ и $N_1\geq N_2$ или $\Pi_1 \geqslant \Pi_2$ и $N_1 > N_2$; однако существуют ситуации, когда $\Pi(R, D_1) > \Pi(R, D_2)$, но $N(R, D_1)<N(R, D_2)$, и по принципу Парето получаем отношение частичного порядка; так можно получить *несколько* объектов, наилучшим образом удовлетворяющих запросу, выраженному в фильтре, и тогда, как уже указывалось, рассмотреть меру перекрытия, если только не условиться, что степень необходимости более показательная для различения объектов;

когда степень возможности, связанная с объектом, близка к 1, а соответствующая степень необходимости близка к 0, то можно попытаться выразить условие того, что объект станет с необходимостью значимым для некоторого запроса, т. е. задать диапазоны значений $R_i \cap D_i$ для атрибутов i так, чтобы величина $N(R_i \mid D_i)$ была близка к 0.

11.3. Пример

11.3.1. Представление данных

Рассмотрим пример, в котором анализируются уровень подготовки студентов по различным предметам, возраст и взаимоотношения. База данных включает следующих два отношения:

ЛИЧНОСТЬ	ИМЯ	ВОЗРАСТ	M1	M2	P1	P2
	Том	молодой	15	Достаточно хороший	Неизвестно	[14, 16]
	Дэвид	20	Довольно плохой	Хороший	Достаточно хороший	Неприменимо
	Боб	22	Плохой, и даже очень	[10, 12]	[13, 20]	Хороший
	Джейн	Около 21	Достаточно хороший	Очень хороший	14	[10, 12]
	Джилл	Молодой	Около 10	Достаточно хороший	Хороший	Около 12
	Джо	Около 24	[14, 16]	Очень хороший	Хороший	15
	Джек	[22, 25]	Неизвестно	Плохой	Около 13	Достаточно хороший

где Ml — уровень подготовки по математике; P1 — уровень подготовки по физике в первом семестре; M2 — уровень подготовки по математике; P2 — уровень подготовки по физике во втором семестре, и

ЧУВСТВО	ИМЯ 1	ИМЯ 2	ТИП
	Дэвид	Том	Товарищество
	Джилл	Джейн	Дружба
	Джек	Джо	Большая дружба
	Джейн	Боб	Дружба

где для каждой заданной тройки в первом столбце содержится имя лица, отношение которого к лицу, названному во втором столбце, выражено в третьем столбце.

В первом отношении область значений атрибутов Ml, PI, M2, P2 есть интервал [0, 20], а область значений атрибута ВОЗРАСТ — интервал

[15, 25] (оба указанных универсума непрерывны). В данном отношении присутствуют несколько типов значений атрибута: точные значения (например, 15), интервальные значения (например, [14, 16], [13, 20]), нечеткие значения (например, "хороший", "около 10", "плохой, и даже очень") и неопределенные значения ("неизвестно" и "неприменимо"). Когда уровень определен (т. е. студент прошел некоторый курс), неточные значения атрибута соответствуют либо частичному (неполному или нечеткому) знанию студентом предмета данного курса, либо огрубленной оценке этого уровня, либо возможностному представлению гистограммы (точных) оценок, полученных студентом по рассматриваемому предмету в течение семестра (тогда соответствующая функция распределения возможностей характеризует множество оценок, в большей или меньшей степени совместимых с уровнем подготовки студента).

Во втором отношении, которое выражает чувства студентов друг к другу, область значений атрибута ТИП дискретна: $D_{ТИП} = \{a, b, c, d, e\}$, где каждое число соответствует некоторому характерному уровню взаимоотношений людей, например a соответствует глубокой антипатии, c — безразличию, а e — глубокой симпатии.

Тот факт, что здесь имеются области двух типов (непрерывные и дискретные), влечет за собой два способа представления функций распределения возможностей. Графики функций принадлежности нечетких множеств, используемых в качестве значений уровня в первом отношении, приведены на рис. 2.

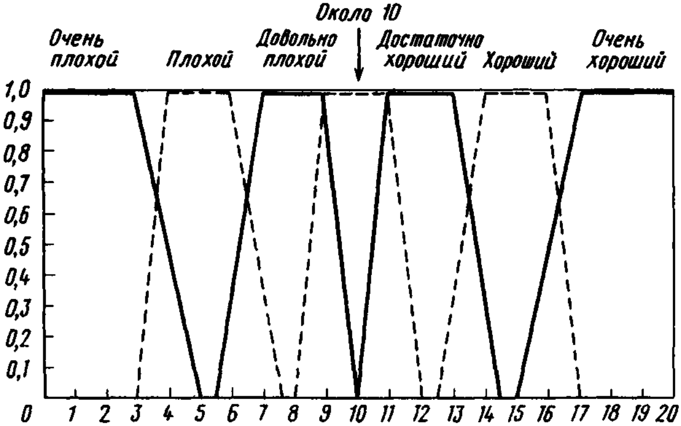


Рис. 2

В общем случае трапециевидные функции принадлежности вполне достаточны для практических приложений; в самом деле, небольшие изменения формы функции принадлежности, которые к тому же далеко не всегда можно задать с большой точностью, заметно не влияют на оценку вопросов. В виде четверок можно представить и нечеткие, и точные значения: первые два элемента в четверке ограничивают множество значений, характеризующихся степенью возможности 1, а два других элемента определяют "размывание" распределения по обеим сторонам этого множества значений. Например, понятие "хороший" представляется в виде (14, 16, 1,5, 1); интервал [10, 12] - в виде (10, 12, 0, 0); число 15 - в виде (15, 15, 0,0). Точно так же понятия "молодой", "около 21" представляются в виде трапециевидных функций распределения и, следовательно, в виде четверок. Например, понятие "молодой" выражается четверкой (18, 23, 2, 2), "около 21" - четверкой (20, 22, 1, 1), а "около 24" - четверкой (23, 25, 1, 1). Наконец, значение "неизвестно" описывается особым распределением возможностей $\mu_1(d) = 1, \forall d \in D,$ а значение "неприменимо" — нулевым распределением $\mu_0(d) = 1, \forall d \in D,$.

Кроме того, такая нечеткая метка, как "плохой, и даже очень" интерпретируется как выпуклая оболочка объединения (определяемого операцией max) двух нечетких множеств, характеризующих понятия "плохой" и "очень плохой" (см. разд. 11.2.1). Отметим, что выпуклая оболочка остается трапециевидной и поэтому выражение "плохой, и даже очень" представляется четверкой (0, 6, 0,. 1,5). Когда функция распределения возможностей полимодальна (например, $[10, 12] \cup [15, 18])$, чего не наблюдается в нашем примере, она разбивается на унимодальные участки, представляемые в виде четверок.

Напротив, в случае дискретной области, такой как область значения атрибута ТИП, для описания функции распределения возможностей поступают следующим образом. Пусть μ — функция распределения возможностей, определенная на области $D = \{d_1, \ldots, d_n\}$, такая, что $\mu(d_1) = a_i, \forall i;$ μ будет храниться в памяти в виде множества $\{a_{i_1}/d_{i_1}, \ldots, a_{i_k}/d_{i_k}\}$, где $d_{i_1}, \ldots, d_{i_k}$ — элементы области D, на которых функция распределения принимает ненулевые значения. Например, представим значение "дружба" отношения ЧУВСТВО в виде $\{0,2/c, 1/d, 1/e\}$ (это означает: имеется возможность 0,2, что проявляется чувство безразличия, возможность 1, что проявляется чувство симпатии, и возможность 1, что это чувство глубокой симпатии), значение "большая дружба" - в виде $\{0{,}8/d,\ 1/e\}$, и т. д.

Отметим, что в данном описаний значение "неизвестно" будет выражаться как $D = \{1/d_1, \ldots, 1/d_n\}$, а значение "неприменимо" - как Ø.

11.3.2. Примеры вопросов

Теперь рассмотрим следующие вопросы: "Найти всех тех студентов, у кого:

1) оценки уровня подготовки по математике в первом семестре между 14 и 16";
2) оценки уровня подготовки по математике в первом семестре больше или равны 12";
3) оценки уровня подготовки по математике в первом семестре значительно больше 10";
4) по крайней мере "хорошие" оценки уровня подготовки по математике в первом семестре";
5) оценки уровня подготовки по математике в первом семестре значительно лучше, чем "хорошие";
6) по меньшей мере достаточно хорошие оценки по математике и к тому же достаточно хорошие оценки по физике в первом семестре";
7) хорошие оценки по математике или по физике в первом семестре";
8) уровень подготовки по физике во втором семестре значительно лучше, чем в первом";

или кто:

9) друзья Джейн";
10) друзья одного студента возрастом более 22 лет";
11) имеет хорошие оценки по естественным наукам в первом семестре".

Отметим, что вопросы 1—9 обращаются к одному-единственному отношению, тогда как вопрос 10 затрагивает два отношения: ЛИЧНОСТЬ и ЧУВСТВО. Последний вопрос более сложен: для ответа на него мы должны определить связь между общим уровнем подготовки в области естественных наук и уровнями подготовки по математике и физике.

Сначала рассмотрим обработку вопросов, характеризуемых одним отношением. Ответ на каждый из этих вопросов получается посредством проведения операции θ-отбора над одним из отношений (ЛИЧНОСТЬ или ЧУВСТВО) с последующим построением проекции. Так, можно выразить:

вопрос 1 через проекцию σ (ЛИЧНОСТЬ; Ml = [14,16]) на атрибут ИМЯ;
вопрос 5 через проекцию σ (ЛИЧНОСТЬ; Ml= "значительно выше,чем" "хорошо") на атрибут ИМЯ;
вопрос 8 через проекцию σ (ЛИЧНОСТЬ; P2 = "значительно лучше, чем" P1) на атрибут ИМЯ;
вопрос 9 через проекцию σ (ЧУВСТВО; ИМЯ 2 = "Джейн" ∧ ТИП = = "друг") на атрибут ИМЯ 1.
Заметим, что вопросы 1 — 5 содержат простые условия вида Aθa, вопросы 6, 7 и 9 содержат составные условия вида Aθa, а вопрос 8 содержит простое условие вида AθB. Также используются нечеткие отношения сравнения, такие как "значительно больше, чем". Это отношение сравнения выражено с помощью нечеткого отношения

$$\mu_{\text{"значительно больше, чем"}}(u,v) = \begin{cases} 0, \text{ если } v-u \leqslant 2, \\ \dfrac{v-u}{2} - 1, \text{ если } 2 \leqslant v-u \leqslant 4, \\ 1, \text{ если } v-u \geqslant 4 \end{cases}$$

и изображено на рис. 3.

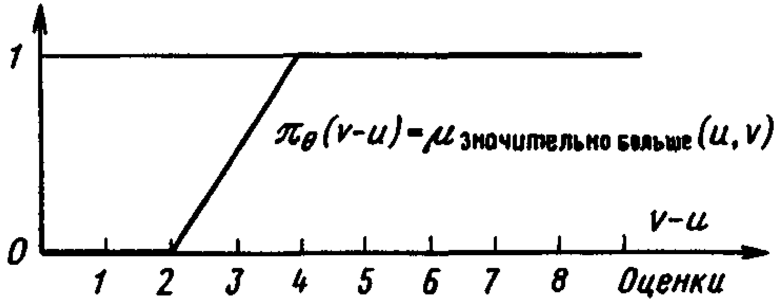


Рис. 3

Множество элементов некоторого отношения ЛИЧНОСТЬ или ЧУВСТВО, которые возможно (с необходимостью) удовлетворяют условию Aθa было определено формулой (15) соответственно (16) (см. разд. 11.2.1), а множество элементов, которые возможно (с необходимостью) удовлетворяют условию AθB было определено формулой (6.29) соответственно (6.30) (см. разд. 11.2.1). Следовательно, можно вычислить результат операции θ-отбора в вопросе. Окончательный ответ, получаемый путем построения проекции каждого из нечетких множеств, представляющих собой результат операции θ-отбора, будет характеризоваться парой нечетких множеств (R — П, R — N), Например, ответ на первый вопрос обозначается (R1 — П, R1 — N), где R1 —П — множество имен тех студентов, кто возможно удовлетворяет вопросу "оценка уровня подготовки по математике в первом семестре между 14 и 16".

Таким образом мы получаем следующие ответы:

вопрос 1: R1 - П = {1/Том, 0,3/Джейн, 1/Джо, 1/Джек},
Rl -N= {1/Том, 1/Джо};

вопрос 2: R2 - П = {1/Том, 1/Джейн, 1/Джо, 1/Джек},
R2-N= {1/Том, 1/Джо];

вопрос 3: R3 - П = (l/Том, 0,7/Джейн, 1/Джо, 1/Джек},
R3-N= {1/Том, 1/Джо};

вопрос 4: R4 - П = {1/Том, 0,6/Джейн, 1/Джо, 1/Джек},
R4-~N = {1/Том, 1/Джо};

вопрос5: R5 - П = {0,1/Том, 0,4/Джо, 1/Джек},
R5-N = {0,1 Том};

вопрос 6: R6-П={1/Дэвид, 1/Боб, 1/Джейн, 1/Джилл, 1/Джек, 0,3/Джо},
R6 - N = {0,5/Дэвид, 1/Боб, 0,5/Джейн, 1/Джилл};

вопрос 7: R7 - П = {l/Том, 0,6/Дэвид, 1/Боб, 1/Джейн, 1/Джилл, 1/Джо, 1/Джек},
R7 - N = {1/Том, 1/Джейн, 0,5/Джилл, 1/Джо};

вопрос 8: R8 - П = {1/Том, 0,6/Боб, 0,1 /Джо, 0,3/Джек},
R8-N= Ø;

вопрос 9: R9 - П = {1/Джилл},
R9 — N = {0,8/Джилл }.

Вопрос 10 касается двух отношений: ЛИЧНОСТЬ и ЧУВСТВО, поэтому ответ на него получаем с помощью θ-соединения (см. разд. 11.2.2). Таким образом, мы должны вычислить проекцию σ (ЛИЧНОСТЬ, ЧУВСТВО, ИМЯ = ИМЯ 2 $\wedge$ ТИП = "друг" $\wedge$ ВОЗРАСТ $\geq$ 22) на атрибут ИМЯ 1.

Получаем следующий ответ:

R10 — П = {0,2/Дэвид, 1/Джейн, 1/Джилл, 1/Джек} и R10 - N = {0,8/Джейн, 1/Джек}.

Наконец, рассмотрим последний вопрос, который представляется более сложным, так как в нем вводится составное множество рассуждений — "естественные науки", причем связь между уровнем подготовки в области естественных наук и уровнями подготовки по математике и по физике может определяться с помощью такого отношения, как

М (математика)	Ф (физика)	Е (естественные науки)
...	...	...
Хороший	От достаточно хорошего до хорошего	Хороший
От достаточно хорошего до хорошего	Хороший	Хороший
...	...	...
От достаточно хорошего до хорошего	Около 10	Достаточно хороший
Достаточно хороший	Достаточно хороший	Достаточно хороший
...	...	...

Таким образом, вопрос: "Найти всех тех студентов, кто имеет хорошие оценки по естественным наукам в первом семестре" превращается в вопрос: "Найти всех тех студентов, кто имеет хорошие оценки по математике и достаточно хорошие или хорошие оценки по физике или достаточно хорошие или хорошие оценки по математике и хорошие оценки по физике в первом семестре". Получаем ответ: R11 - П = {l/Том, 1/Джейн, 1/Джилл, 1/Джек} и R11-К = {0,5/Джилл}.

Все вышеуказанные вопросы обрабатываются автоматически с помощью специальных процедур, включенных в язык программирования. Эти процедуры основаны на нечеткой фильтрации. Нечеткая фильтрация обобщает системы фильтрации, развиваемые в рамках искусственного интеллекта, например, тем, что при вычислении мер фильтрации между двумя выражениями используются меры возможности и необходимости, принимающие значения на интервале [0, 1]; учитывается семантическое представление информации (в терминах функций распределения возможностей), связываемое с каждым атомом. Меры возможности и необходимости вычисляются непосредственно по практически определяемым значениям атрибута (представляемым в виде четверок в случае непрерывной области и в виде $\{a_i/d_{i_1}, \ldots, a_{i_k}, d_{i_k}\}$ в случае дискретной области).

Мы привели описание расширенной реляционной алгебры, которая позволяет проводить обработку неполной, нечеткой или неопределенной информации и учитывать расплывчатость запросов. Теория возможностей оказывается удобным средством для анализа этой проблемы. Соответствующий язык запроса реализован в языке программирования MACLISP; первые эксперименты дают результаты, согласующиеся с интуитивными представлениями. Когда имеющаяся информация неполна, представляется вполне естественным дать ответ на запрос посредством определения элементов, которые, возможно, ему удовлетворяют и элементов, которые с необходимостью (или, если угодно, с определенностью, наверняка) ему удовлетворяют. Тот факт, что модальности "возможно" и "с необходимостью" можно выразить количественно, придает дополнительную привлекательность этому подходу, который, несмотря на внешную сложность, довольно просто реализовать на практике. К тому же расплывчатые запросы могут обрабатьюаться вне зависимости от того, является ли информация полной или частичной.

Язык запроса можно развивать и дальше, например так, чтобы обеспечивался учет понятия мощности. Другая важная проблема в связи с нечеткостью информации — это краткое описание содержания базы данных независимо от ее полноты или неполноты.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В ряде программ используется эффективный алгоритм применения обобщенного правила "модус поненс" на основе операции конъюнкции min. В ней предполагается, что функции распределения возможностей на непрерывных универсальных множествах имеют форму трапеции. В настоящем приложении излагаются результаты, которые помогут читателю понять, как проводить математическую обработку этих распределений.

При заданном правиле: "если X есть A, то Y есть B" — и известном факте: "X есть A' " стремятся определить нечеткое множество B, соответствующее выведенному факту "Y есть B' ". Функция принадлежности $\mu_{B'}$ задается формулой (9.64), где * = min, т. е.

$$\forall t, \mu_{B'}(t) = \sup_{s \in S} \min(\mu_{A'}(s), \mu_A(s) \to \mu_B(t)),$$

где импликация → определяется в виде

$$a \to b = \begin{cases} 1, \text{если } a \leqslant b, \\ b \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Разобьем процедуру вычисления функции принадлежности $\mu_{B'}$ на два этапа, полагая $\lambda = \mu_B(t)$.

1. Вычислить функцию $f: [0, 1] \to [0, 1]$, определяемую в виде

$$\forall \lambda, f(\lambda) = \sup_{s \in S} \min(\mu_{A'}(s), \mu_A(s) \to \lambda).$$

2. Вычислить функцию принадлежности $\mu_{B'}$ по формуле

$$\forall t, \mu_{B'}(t) = f(\mu_B(t)).$$

Остановимся на этапе 1. Из определения импликации → следует

$$f(\lambda) = \max(\sup_{s \notin \bar{A}_{\bar{\lambda}}} \mu_{A'}(s), \sup_{s \in A_{\bar{\lambda}}} \min(\lambda, \mu_{A'}(s)) = \max(\Pi'(\bar{A}_{\bar{\lambda}}), \min(\lambda, \Pi'(A_{\bar{\lambda}})), \qquad (П.75)$$

где A_{λ}- — множество строгого λ-уровня нечеткого множества A, а П'- мера возможности, индуцируемая функцией распределения $\mu_{A'}$. Отметим, что если $\Pi'(\bar{A}_{\bar{\lambda}}) \geqslant \lambda$, то $f(\lambda) = \Pi'(\bar{A}_{\bar{\lambda}}) \geqslant \lambda$. Если $\Pi'(\bar{A}_{\bar{\lambda}}) < \lambda$, то $\Pi'(A_{\bar{\lambda}}) = 1$ и f (λ) = λ. Следовательно, в общем случае формула (П.75) упрощается и приводится к виду

$$f(\lambda) = \max(\Pi'(\bar{A}_{\bar{\lambda}}), \lambda) \geqslant \lambda.$$

Примечание. При необходимости этот результат позволяет показать, что $B' \supseteq B, \forall A,$ как это оговаривалось в разд. 8.2.

Теперь положим, что A и A' — трапециевидные нечеткие интервалы на интервалеS. Обозначая $A_{\bar{\lambda}} = (\underline{a}_\lambda, \bar{a}_\lambda)$, легко увидеть, что

$$\Pi'(\bar{A}_{\bar{\lambda}}) = \max(\mu_{[A', +\infty)}(\underline{a}_\lambda), \mu_{(-\infty, A']}(\bar{a}_\lambda)),$$

где $[A, +\infty)$ и $(-\infty, A']$— нечеткие интервалы, определенные в разд. 8.2. Введем вспомогательные функции f^+ и f^-, определяемые следующим образом:

$$f^+(\lambda) = \max(\mu_{[A', +\infty)}(\underline{a}_\lambda), \lambda),$$

$$f^-(\lambda) = \max(\mu_{(-\infty, A']}(\bar{a}_\lambda), \lambda),$$

и примем $f = \max(f^-, f^+)$. Форма функции f^+ зависит от относительного положения нечетких интервалов $[A', +\infty)$ и $[A, +\infty)$, т. е. практически от взаимного положения $(\underline{a}, \underline{a} - \alpha)$ и $(\underline{a}', \underline{a}' - \alpha')$, если $A = (\underline{a}, \bar{a}, \alpha, \beta)_{LL}$ и $A' = (\underline{a}', \bar{a}', \alpha', \beta')_{LL}$, где L(x) = max(0,1 - — x) (рис.П. 1).

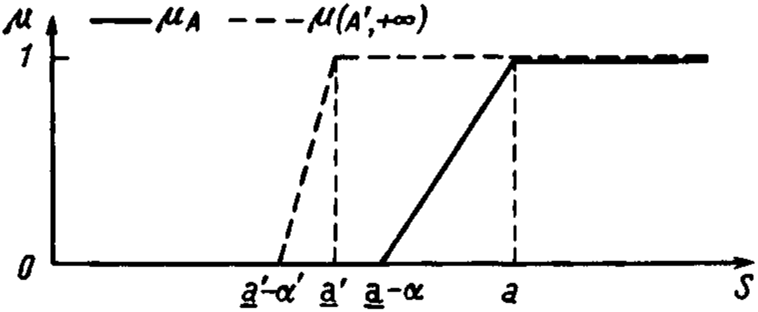


Рис. П. 1

Случай 1.

$S([A, +\infty)) \subseteq$ Ядро $([A, +\infty))$, т. е. $([A', +\infty))$. Тогда легко видеть, что $f^+(\lambda) = 1, \forall \lambda \in [0, 1]$.

Случай 2.

$\mathbf{S([A, +\infty)) \subseteq S(A', +\infty))}$. Ядро $\mathbf{([A, +\infty)) \subseteq}$ **Ядро** $\mathbf{([A', +\infty))}$,

т. е. $\underline{a}' - \alpha' \leqslant \underline{a} - \alpha < \underline{a}' \leqslant \underline{a}$. Пусть

$\lambda_0^+ = \mu_{[A', +\infty)}(\underline{a} - \alpha)$, $\lambda_1^+ = \mu_{[A, +\infty)}(a')$,

тогда

$$f^+(\lambda) = \begin{cases} 1, \text{ если } \lambda \geqslant \lambda_1^+, \\ \lambda_0^+ + \lambda(1 - \lambda_0)/\lambda_1^+ \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Случай 3. $\mathbf{S([A', +\infty)) \subset S([A, +\infty))}$. Ядро $([A, +\infty)) \subseteq$ Ядро $([A', +\infty))$, т.е. $\underline{a} - \alpha \leqslant \underline{a}' - \alpha'$; $\underline{a}' < \underline{a}$.

Обозначая $\overline{\lambda}^+$ степень приближенности, такую, что

$\mu_A(s) = \mu_A(s') = \overline{\lambda}^+ < 1$, имеем

$$f^+(\lambda) = \begin{cases} 1, \text{ если } \lambda \geqslant \lambda_1^+, \\ \overline{\lambda}^+ + \dfrac{(\lambda - \overline{\lambda}^+)}{(\lambda_1^+ - \overline{\lambda}^+)}(1 - \overline{\lambda}^+), \text{ если } \overline{\lambda}^+ < \lambda \leqslant \lambda_1^+, \\ \lambda, \text{ если } \lambda \leqslant \overline{\lambda}^+. \end{cases}$$

Случай 4. $\mathbf{S([A, +\infty)) \subseteq S([A', +\infty))}$. Ядро $([A', +\infty)) \subseteq$ Ядро $([A, +\infty))$, т.е. $\underline{a}' - \alpha < \underline{a} - \alpha$; $\underline{a}' \geqslant \underline{a}$. Тогда

$$f_\lambda^+(\lambda) = \begin{cases} \lambda, \text{ если } \lambda \geqslant \overline{\lambda}^+, \\ \lambda_0^+ + \lambda(\overline{\lambda}^+ - \lambda_0^+)/\overline{\lambda}^+ \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Случай 5. $\mathbf{[A', +\infty) \subseteq [A, +\infty)}$. В этом случае

$$f^+(\lambda) = \lambda.$$

$\underline{a} - \alpha \leqslant \underline{a}' - \alpha'$; $\underline{a} \leqslant a'$ и

Вычисление функции f^- производится аналогичным образом с заменой а на $\underline{a}'$ и $\overline{a}'$, α на β и α′ на β'. Знаки неравенства также меняются на противоположные . Величины λ_0^-, λ_1^-, $\overline{\lambda}^-$ являются обратными к величинам λ_0^+, λ_1^+, $\overline{\lambda}^+$ (рис. П. 2, П.3).

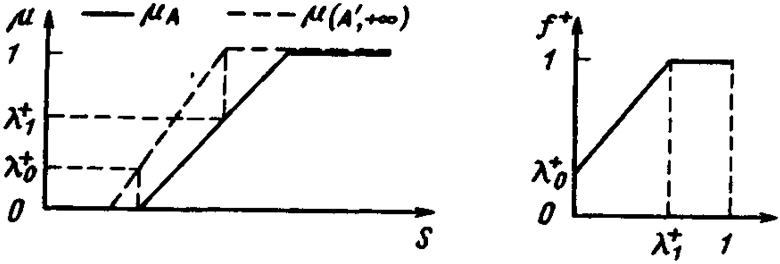


Рис. П. 2

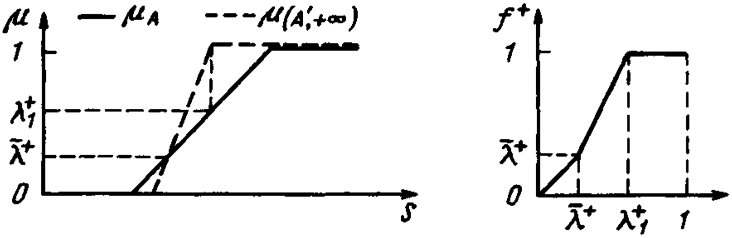


Рис. П.3

Поскольку функции ζ^{+} и f^{-} являются кусочно-линейными, функция f также является кусочно-линейной с, возможно, и большим числом точек разрыва.

Для упрощения расчетов довольствуются некоторой аппроксимацией $f^{\#}$ функции f, такой, что $f^{\#} \geqslant f$, и $f^{\#}$ задана в стандартной форме. Прежде всего отметим, что величины $\lambda_0^{\epsilon}, \lambda_1^{\epsilon}, \bar\lambda^{\epsilon}$ всегда определены для $\forall\epsilon \in \{+, -\}$, как это показано ниже в таблице для случая $\epsilon = +$.

Случай	λ_0^+	λ_1^+	$\bar\lambda^+$
1	1	0	$\notin (0, 1)$
2	$\in [0, 1)$	$\in (0, 1]$	$\notin (0, 1)$
3	0	$\geqslant \bar\lambda^+$	$\in (0, 1)$
4	$< \bar\lambda^+$	1	$\in (0, 1)$
5	0	1	$\notin (0, 1)$

Пусть $\lambda_0 = \max(\lambda_0^+, \lambda_0^-)$, $\lambda_1 = \max(\lambda_1^+, \lambda_1^-)$. Отметим, что

$\lambda_0 = \max\{\mu_{A'}(s) \mid \mu_A(s) = 0\}$, $\lambda_1 = \min\{\mu_A(s) \mid \mu_{A'}(s)=1\}$; эти величины введены в разд. 9.3.2. Формула для $f^{\#}$ определяется следующими условиями:

1. Если $\lambda_0 = 1$ или $\lambda_1 = 0$, то $f^{\#}(\lambda) = f(\lambda) = 1, \forall\lambda$. Это случай 1.

2. Если $0 < \lambda_0 < 1$ и $0 < \lambda_1 < 1$, то $f^{\#}$ определяется, как и в случае 2 (убирается знак + в λ^{+}_{0} и λ^{+}_{1}).

3. Если $\lambda_0 = 0$ и $0 < \lambda_1 < 1$, то положим $\bar{\lambda} = \min(\bar{\lambda}^{+}, \bar{\lambda}^{-})$ и $f^{\#}$– определяется, как и f^{+} в случае 3 (убирается знак +). Можно положить $\bar{\lambda}^{-} = 0$, что дает фигуру, ограниченную штрихпунктирными линиями на рис. П. 4.

4. Если $\lambda_1 = 0$ и $0 < \lambda_0 < 1$, то положим $\bar{\lambda} = \max(\bar{\lambda}^{+}, \bar{\lambda}^{-})$ и $f^{\#}$ определяется, как и f^{+} в случае 4 (убирается знак +). Можно положить $\bar{\lambda}^{-} = 1$, что дает фигуру, ограниченную штрихпунктирными линиями на рис. П.4.

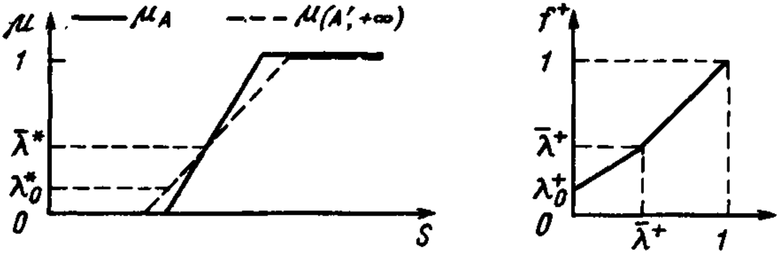


Рис. П. 4

5. Если $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_0 = 0$, то $f(\lambda) = f^{\#}(\lambda) = \lambda$, как и в случае 5.

В итоге аппроксимация $f^{\#}$ полностью характеризуется двумя значениями λ_0 и λ_1; это соответствует одному и тому же во всех случаях преобразованию B и $B^{\#}$. Итак, $\mu^{\#}_{B} = f^{\#}(\mu_B)$, причем $B^{\#}$ имеет трапециевидную форму и уровень неопределенности θ.

$f^{\#}$ можно выразить с помощью пятерки $(\underline{b}^{\#}, \bar{b}^{\#}, \underline{c}^{\#}, \bar{c}^{\#}, \theta)$, что изображено на рис. П. 5.

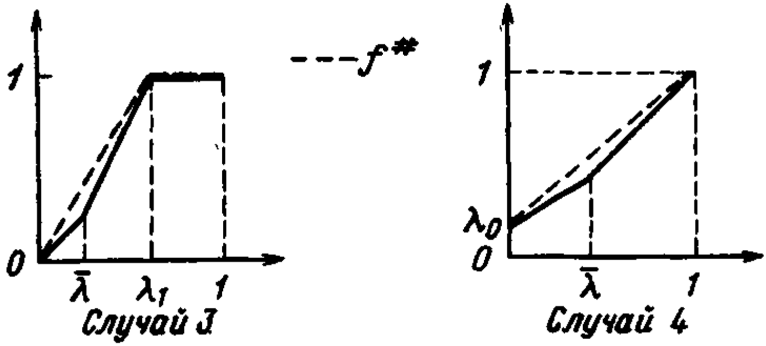


Рис. П. 5

Имеем $\mathring{B}^{\#} = [\underline{b}^{\#}, b^{\#}]$ и $S(B^{\#}) = (\underline{c}^{\#}, \bar{c}^{\#})$. Величину $B^{\#}$ легко сравнивать с величиной $B' = A' \circ (A \to B)$ следующим образом:

$B^{\#} \supseteq B'$, поскольку $f^{\#} \geqslant f$; следовательно, имеется логическое обоснование для вывода $B^{\#}$.

$\mathring{B}^{\#} = B'$, вследствие этого ядро нечеткого множества B' легко вычисляется на основе значений λ, таких, что f (λ) = 1, причем их нижняя граница $\lambda_1 \doteq \inf\{\lambda \mid f^{\#}(\lambda) = 1\}$.

$\mathrm{mf}\,\mu_{B'} = \inf \mu^{\#}_{B} = \lambda_0$, поскольку

$$\inf\{f(\lambda) \mid \lambda \in [0, 1]\} = \inf\{f^{\#}(\lambda) \mid \lambda \in [0, 1]\}.$$

Следовательно, $\theta = \lambda_0$ есть уровень неопределенности нечеткого множества B'.

$B^{\#}_{\underline{\theta}} = B'_{\underline{\theta}}$ (строгий λ-уровень) = S (B).

Таким образом, аппроксимация $B^{\#}$ отличается от аппроксимации B' в основном по величине $B^{\#}_{\bar{\theta}} - \mathring{B}^{\#}$, что на практике оказывается неважным. Если $B = (B, b, \gamma, \delta)_{LL}$, где $L(x) = \max(0, 1 - x)$, то аппроксимация $B^{\#}$ такова, что

$$\theta = \lambda_0;\ \underline{c}' = b - \gamma;\ \bar{c}' = b + \delta;\ \underline{b}' = \underline{b} - \gamma(1 - \lambda_1);\ \bar{b}' = \bar{b} + \delta(1 - \lambda_1).$$

Вывод по обобщенному правилу "модус поненс" сводится тогда к очень простым вычислениям.

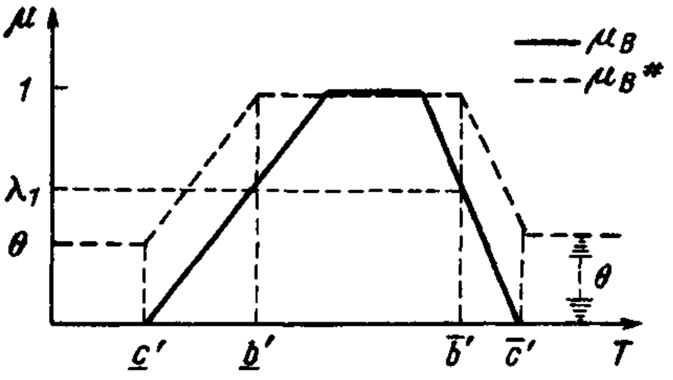


Рис. П.6

Предположим, что условная часть правила (А) образована из элементарных невзаимодействующих условий, а именно $A = A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ при $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$.

Пусть $\Pi'_1, \ldots, \Pi'_n$ меры возможности, соответствующие нечетким интервалам $A'_1, \ldots, A'_n$, такие, что $A' = A'_1 \times A'_2 \times \ldots \times A'_n$.

Легко убедиться, что

$$\Pi'(\bar{A}_{\bar{\lambda}}) = \Pi'(\overline{A_{1_\lambda} \times A_{2_\lambda} \times \ldots \times A_{n_\lambda}}) = \max_{i=1,\ldots,n} \Pi'_i(\bar{A}_{i_{\bar{\lambda}}}).$$

Таким образом, если f_i есть модификатор функции принадлежности $\mu_в$ для правила $A_i \to B$ и факта A'_i, то

$$\forall\lambda,\ f(\lambda) = \max_{i=1,\ldots,n} f_i(\lambda)$$

и аппроксимация $f^\#$ легко вычисляется по $f^\#_i,\ i = 1, \ldots, n.$

Пара (λ_0, λ_1),

определяющая $f^\#$, получается из пар $(\lambda_0, \lambda_{1i})$, определяющих $f^\#_i$, по формулам

$$\lambda_0 = \max_{i=1,\ldots,n} \lambda_{0i} \text{ и } \lambda_1 = \min_{i=1,\ldots,n} \lambda_{1i}.$$

Если факт A'_ω уже выражен в виде $\mu_{A'_\omega} = \max(\mu_{A'}, \omega)$, то для правила $A \to B$ модификатор f_ω нечеткого множества B определяется как $f_\omega = \max(f, \omega)$. Следовательно, $\mu_{B_\omega} = f^\#_\omega \circ \mu_B$ определяется той же пятеркой, что и μ_{B_ω}, за исключением того, что $\theta = \max(\omega, \lambda_0)$,

где λ_0 вычисляется на основе A'.

Это замечание позволяет облегчить выполнение цепочки нечетких правил. Когда стремятся параллельно обрабатьюать множества нечетких правил вида: {"если X есть A_i, то Y есть B_i | i = 1, . . . , *n*"}, имеется возможность:

либо применять каждое из правил к факту A' и комбинировать получаемые частичные результаты $B_i^{\#}$, полагая

$$B^{\#} = \bigcap_i B_i^{\#}.$$

В данном случае процедура вывода начинает давать неопределенные результаты, как только множество A' становится слишком неточно заданным, например в виде $A' = A_i \cup A_j$,

либо комбинировать правила по формуле 74 из р. 8). Тогда получают более точные результаты, причем при вычислениях не обязательно комбинировать все правила в явном виде. На практике берутся правила, у которых условная часть находится во множестве A'; строятся правила, полученные в результате вывода из начальной базы правил, причем эти правила характеризуются большей неточностью. Тогда вполне может использоваться методика приближенных рассуждений, изложенная в настоящем приложении.

Литература

1. Айвазян С. А. Енюков И. С, Мешалкин Л. Д. Основы моделирования и первичная обработка данных. -М.: Финансы и статистика, 1983.-471с.
2. Кайберг Г. Вероятность и индуктивная логика. - М.: Прогресс, 1978. - 378 с.
3.Модели принятия решений на основе лингвистической переменной/ А. Н. Борисов, А. В. Алексеев, О. А. Крумберг и др. - Рига: Зинатне, 1982. - 256 с.
4. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта/А. Н. Аверкин, И. 3. Батыршин, А. Ф. Блишун и др. - М.: Наука, 1986. - 312 с.
5. Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. - М.: Наука, 1981.-208 с.
6. Теория моделей в процессах упраяления/Б. Н. Петров, Г. М. Уланов, И. И. Гольденблат, С. В. Ульянов. - М.: Наука, 1978. - 216 с.
7. Трухаев Р. И. Модели принятия решений в условиях неопределенности. - М.: Наука, 1981.- 258 с.
8. Горбатов В. А. Основы дискретной математики. – М.: Высшая школа, 1986.
9. Коршунов Ю. М. Математические основы кибернетики. – М.: Энергия, 1980.
10. Кузнецов О. П., Адельсон-Вельский Г. М. Дискретная математика для инженера. – М.: Энергия, 1980.
11. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. – М.: Наука, 1990.
12. Сигорский В. П. Математический аппарат инженера. – К.: Техніка, 1977.
13. Кузичев А. С. Диаграммы Венна. – М.: Наука, 1968.
7. Кононюк А. Ю. Вища математика. У 2 ч. Ч.1, – К: Кольори, 2007.
14. Аверкин А. Н., Батыршин И.З. и др. Нечеткие множества в моделях управления и икусственного интелекта. – М.: Наука, 1986.
15. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. – М.: Радио и связь, 1982.
16. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику. – М.: Наука, 1975.
17. Згуровский М. З. Интегрированные системы оптимального управления и проектирования. – К: Вища школа, 1990.
18. Минский М. Фреймы для представления знаний. –М.: Энергия, 1979.
19. Вильсон А. Дж. Энтропийные методы моделирования сложных систем. – М.: Наука, 1978.

20. Юрков В. Ю., Лукина О. В. /Прикладная геометрия, вып. 8, N 18 (2006), стр. 9-36
21. Борисов А.Н., Крумберг О. А. Задачи оценки и выбора альтернатив с учетом возможностей событий// Методы и модели анализа решений. - Рига: РПИ, 1981. - С. 31 - 43.
22. Жуковин В.Е. Многокритериальные модели принятия решений с неопределенностью. - Тбилиси: Мецниереба, 1983. - 105 с.
23. Козелецкий Ю. Психологическая теория решений. - М.: Прогресс, 1979. - 504 с.
24. Кузьмин В. Б. Построение групповых решений в пространствах четких и нечетких бинарных отношений. - М.: Наука, 1982. - 168 с.
25. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта/А.Н. Авер-кин, И.З. Батыршин, А.Ф. Блишун и др. - М.: Наука, 1986. - Гл. 9, разд. 1.5. - С. 236- 258.
26. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений/А.Н. Борисов, А.В. Алексеев, Г.В. Меркурьева и др. - М.: Радио и связь, 1989. - 424 с.
27. Ежкова И. В., Поспелов Д. А. Принятие решений при нечетких основаниях. Универсальная шкала//Изв. АН СССР: Техническая кибернетика. - 1977. - №6. - С. 3 - И.
28. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта/А. Н. Авер-кин, И.З. Батыршин, А.Ф. Блишун и др. - М.: Наука, 1986. - Гл. 6. - С. 139 - 169.
29. Попов Э.В. Экспертные системы: Решение неформализованных задач в диалоге с ЭВМ. - М.: Наука, 1987. - 288 с.
30. Поспелов Г.С. Искусственный интеллект - основа новой информационной технологии. - М.: Наука, 1988. - 280 с.
31. Поспелов Д. А. Логико-лингвистические модули в системах управления. - М.: Энер-гоиздат, 1981. - 232 с.
32.Поспелов Д.А. Ситуационное управление: теория и практика. - М.: Наука, 1986. -288 с.
33. Представление знаний в человеко-машинных и робототехнических системах. - Т. С. -М.: ВИНИТИ, 1984. - 380 с.
34. Approximate Reasoning in Expert Systems/Ed, by M. M. Gupta et al. - Amsterdam: North-Holland Publ. Сотр., 1985.
35. O'Higgins H.L., Kandel A. Designing Fussy Expert Systems. - Koln: Verlag TUV Rheinland, 1986.
36. Zimmermann H.-J. Fussy Sets, Decision-Making and Expert Systems. Dordrecht: Kluver Academic Publ., 1987. - 352 p.
37. Алиев Р. А., Ульянов СВ. Нечеткие алгоритмы и системы управления. - М.: Знание, 1989. -64 с.

38. Липский В. Комбинаторика для программистов. - М.: Мир, 1988. - 213 с.
39. Мелихов А.Н., Берн штейн Л. С, Коровин С. Я. Расплывчатые ситуационные модели принятия решений. - Таганрог: ТРТИ, 1986.- 93с.
40. Налимов В. В. Вероятностная модель языка. - М.:Наука, 1979.-304с.
41. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы: теория и практика. - М.: Мир, 1980. - 476 с.
41. Тарасов В. Б., Чернышев А. П. О применении нечеткой математики в инженерной пси-хологии//Психологический журнал, 1981. - Т. 2, №4. - С. ПО - 122.
43. Industrial Applications of Fuzzy Control/Ed, by M. Sugeno. Amsterdam: North-Holland Publ.Comp., 1985.-270 p.
44. Диго СМ. Проектирование баз данных. - М.: Финансы и статистика, 1988. - 216 с.
45. Дрибас В. П. Реляционные модели баз данных. - Минск: БГУ, 1982. - 192 с.
46. Калиниченко Л. А. Методы и средства интеграции неоднородных баз данных. - М.: Наука, 1984. - 423 с.
47. Тиори Т., Фрай Дж. Проектирование структур баз данных. В 2 кн.: Пер. с англ. -М.: Мир, 1985. - Кн. 1. - 287 с; Кн. 2. - 320 с.
48. Ханенко В. Н. Информационные системы. - Л.: Машиностроение, 1988. - 127 с.
49. Цаленко М. Щ. Моделирование семантики в базах данных. - М.: Наука, 1989.
50. Gaines B. R. Logical Foundations fon Database Systems//Fussy Reasoning and its Applications/Ed, by E.H. Mamdani and B. R. Gaines. - London: Academic Press, 1981. - P. 289 - 306.

Науково-навчальне видання

Кононюк Анатолій Юхимович

Дискретна математика

Книга 3

Множини

(нечіткі)

(Російська мова)

Керівник видавничих проектів Кривенко О. А.
Оригінал-макет виготовлено видавництвом «КНТ»
Редагування авторське
Відповідальний за випуск Кривенко О. А.

Підписано до друку 10.11.2011 г.
Формат 60х84/16.
Умов. друк. арк. 16,5.
Тираж 300 пр. Замовлення №

Видавництво «КНТ»
Тел./факс (044) 581-21-38.
E-mail: knt2012@ukr.net
Свідоцтво: ДК № 581 від 03.08.2001

распре- распределения распре- распре-