Парадигма развития науки

Методологическое обеспечение

А.Е. Кононюк

ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНАЯ МАТЕМАТИКА

Книга 5

Матрицы

Часть 2

Киев

Освіта України

2011


Структурная схема развивающейся панмедийной системы наук
I. Группа междисциплинарных наук
ПН Теория понятий
ЛГ Теория лингвистики
ПЗ Теория познания
СЗ Теория созидания
ПТ Общая теория понятоведения
II. Группа наук познания (фундаментальных наук)
ИН Теория информации
СТ Теория систем
РС Теория распознавания
КС Теория консалтинга (консультирования)
ПР Теория принятия решения
РР Теория реализации принятых решений
III. Группа наук созидания (прикладных наук)
СС Теория социальных систем
ЖО Теория жизнеобеспечения
КМ Теория коммуникаций и транспортирования
ОБ Теория образования (обучения)
СР Теория сохранения (защиты и охраны)
РЗ Теория развития
IV. Группа общедисциплинарных наук (обеспечивающих наук)
ДМ Теория дискретно-непрерывной математики (четкая и нечеткая)
НИ Теория научных исследований
ММ Теория моделей и моделирования
ОМ Теория оптимизации

УДК 51 (075.8)
ББК В161.я7
К 213

Рецензент: *М.К.Печурин* - д-р техн. наук, проф. (Национальный авиационный университет).

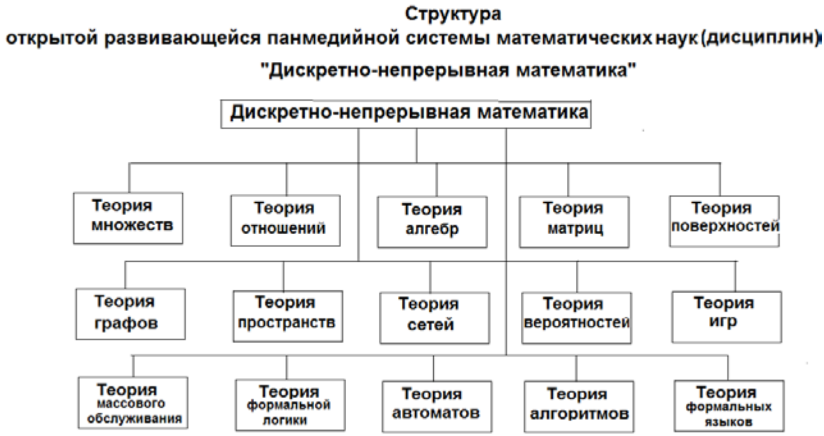
Кононюк А.Е.
К65 Дискретно-непрерывная математика. Матрицы. К.5.Ч.2.
К.4:"Освіта України", 2011. - 500 с.
ISBN 978-966-7599-50-8

Многотомная работа содержит систематическое изложение математических дисциплин, исспользуемых при моделировании и исследованиях математических моделей систем.

В работе излагаются основы теории множеств, отношений, поверхностей, пространств, алгебраических систем, матриц, графов, математической логики, теории формальных грамматик и автоматов, теории алгоритмов, которые в совокупности образуют единную методолгически взамосвязанную математическую систему «Дискретно-непрерывная математика».

Для бакалавров, специалистов, магистров, аспирантов, докторантов и просто ученых и специалистов всех специальностей.

УДК 51 (075.8)
ББК В161.я7



Оглавление

Модуль 7. Линейное пространство и матрицы ...…………………… 4
Микромодуль 17. Линейное пространство ...………………………… 4
Микромодуль 18. Полилинейные формы и тензоры...……………… 44
Микромодуль 19.Линейные преобразования векторного пространства ………………………………………………………………. 72
Микромодуль 20. Приведение к простейшему виду матрицы линейного преобразования...…………………………………………… 120
Модуль 8. Поверхности второго порядка и эрмитвы формы. Матрицы с неотрицателными элементами ..…………………………161
Микромодуль 21.Общая теория поверхностей второго порядка…. 161
Микромодуль 22. Приведение квадратичных форм. Другие виды форм ….. 195
Модуль 9. Комплексные матрицы и матрицы с неотрицательными элементами………………………………………………………………251
Микромодуль 23. Комплексные матрицы……………………… 251
Микромодуль 24. Матрицы с неотрицателными элементами......... 273
Модуль 10. Введение в стохастические матрицы…………………..310
Микромодуль 25. Стохастические матрицы………………………310
Микромодуль 26. Основы тензорного анализа ...…………….......... 396
Приложение………………………………………………………… 452
Литература ...…………………………………….......................... 497

Модуль 7.
Линейное пространство и матрицы

Микромодуль 17.
Линейное пространство

7.1. Понятие линейного пространства

В курсе аналитической геометрии читатель уже встречался с понятием *свободного вектора* — направленного отрезка, который можно переносить в просрансттве параллельно его первоначальному положению. Обычно такие векторы обозначают жирными буквами латинского алфавита: ***a, b, ..., x, y***,... Для простоты можно считать, что все эти векторы имеют общую начальную точку, которую мы обозначим буквой *O* и назовем *началом координат.*

В аналитической геометрии для векторов были определены две операции:

а) сложение векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, обозначаемое $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$,

б) умножение вектора $\boldsymbol{x}$ на действительное число λ, обозначаемое $\lambda\boldsymbol{x}$.

Совокупность всех векторов пространства является *замкнутой* относительно этих двух операций в том смысле, что при умножении вектора на число снова получается некоторый вектор и при сложении двух векторов — получаем некоторый третий вектор из этой же совокупности.

Сложение векторов и умножение вектора на число обладают следующиими свойствами:

1. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$.
2. $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$.
3. Существует *нулевой* вектор $\mathbf{0}$ такой, что $\boldsymbol{x}+\mathbf{0} = \boldsymbol{x}$.
4. Для каждого вектора $\boldsymbol{x}$ существует *противоположный* вектор $\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{x}$ такой, что $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \mathbf{0}$.
5. $1\cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.
6. $\lambda(\mu\boldsymbol{x}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{x}$.
7. $(\lambda+\mu)\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{x}$.
8. $\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}$.

Однако не только для совокупности векторов пространства могут быть определены операции сложения и умножения на действительное число, обладающими указанными выше свойствами. Как мы увидим далее, существуют и другие множества элементов, на которых определены аналогичные операции. Такие множества называются *линейными* (или *векторными) пространствами.* Будем обозначать их буквой *L*. Элементы таких пространств будем также называть *векторами.*

Рассмотрим несколько примеров.

а) Совокупность векторов, которые лежат на одной прямой, образует линейное пространство, так как сложение и умножение таких векторов на действительное число приводит нас снова к векторам, которые лежат на этой прямой, и свойства 1—8 легко проверяются. Обозначим такое линейное пространство через L_1 (содержание нижних индексов выяснится в п. 7.3.).

б) Совокупность векторов, которые лежат в одной плоскости, также оказывается замкнутой по отношению к сложению и умножению на действительное число; свойства 1—8 для них выполняются, и поэтому эта совокупность образует линейное пространство, которое мы обозначим через L_2.

в) Совокупность всех векторов пространства также является линейным пространством. Обозначим его через L_3.

г) Совокупность векторов, которые лежат в плоскости *XOY*, начала которых совпадают с началом координат, а концы лежат в первом квадранте, не образует линейного пространства, так как оказывается незамкнутой относительно умножения на число: при $\lambda < 0$ вектор $\lambda \boldsymbol{x}$ не принадлежит первому квадранту.

д) Рассмотрим множество, элементом которого является упорядоченная совокупность *n* действительных чисел: $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Определим сложение элементов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ и умножение элемента $\boldsymbol{x}$ на действительное число λ с помощью равенств

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \{x_1+y_1, x_1+y_2, \ldots, x_n+y_n\},$$

$$\lambda\boldsymbol{x} = \{\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n\}$$

Такое множество элементов образует линейное пространство, так как определенные в нем операции сложения и умножение на число обладают, как легко видеть, всеми восемью указанными выше свойствами этих операций. Например, нулевым вектором в этом пространстве будет вектор $\mathbf{0} = \{0, 0, \ldots, 0\}$, а вектором $-\boldsymbol{x}$— вектор $\{-x_1, -x_2, \ldots, -x_n\}$. Будем обозначать это пространство через L_n.

е) Совокупность всех многочленов степени не выше *n* $P(t)=a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n$, для которых обычным образом определены сложения и умножения на действительное число, как легко проверить, также образует линейное пространство.

ж) Множество непрерывных на отрезке [a, b] функций $\varphi(t)$ также образует линейное пространство, если для этих функций естественным образом определить операции сложения и умножения на число. Это пространство мы будем обозначать C [a, b].

7.2. Линейная зависимость векторов

1. Пусть ***a*, *b*,..., *e*** - векторы линейного векторного просторную L и $\alpha, \beta, ..., \varepsilon$ -действительные числа. Вектор

$$\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b} +... + \varepsilon\boldsymbol{e}$$

называется *линейной комбинацией* векторов ***a*, *b*, ..., *e*,** а числа $\alpha, \beta, ..., \varepsilon$ - коэффициентами этой линейной комбинации.

Если $\alpha= \beta= \ldots =\varepsilon = 0$, то $\boldsymbol{x} =0$. Но может быть и так, что существует линейная комбинация векторов ***a*, *b*, ..., *e*,** у которой не все коэффициенты равны нулю, но которая тем не менее равна нулю. В этом случае векторы ***a*, *b*, ..., *e*** называются *линейно зависимыми.* Иначе говоря, эти векторы будут линейно зависимыми, если найдутся такие действительные числа $\alpha, \beta, \ldots,\varepsilon$, не все равные нулю, что

$$\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b} +... + \varepsilon\boldsymbol{e} = 0.$$

Если же это равенство выполняется только тогда, когда все числа $\alpha, \beta, \ldots,\varepsilon$ равны нулю, то векторы ***a*, *b*, ..., *e*** называются *линейно независимыми.*

Отметим три простых свойства линейно зависимых векторов.

а) *Если векторы линейно зависимы, то один из них может быть представлен в виде линейной комбинации других, и, обратно, если один из векторов есть линейная комбинация других, то векторы линейно зависимы.*

В самом деле, пусть ***a*, *b*, ..., *e*** — линейно зависимые векторы. Тогда

$$\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b} +... + \varepsilon\boldsymbol{e} = 0,$$

где не все коэффициенты равны нулю. Пусть, например, $\alpha\neq0$.
Тогда

$$\boldsymbol{a}=-\frac{\beta}{\alpha}\,\boldsymbol{b}-\ldots-\frac{\varepsilon}{\alpha}\,\boldsymbol{e},$$

что и доказывает теорему.

Обратно, если

$$\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{b}+\ldots+p\boldsymbol{e},$$

то

$$1\cdot\boldsymbol{a} + (-m)\,\boldsymbol{b} + ... + (-p)\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0},$$

т.е. векторы ***a*, *b*, ..., *e*** линейно зависимы.

б) *Если некоторые из векторов* ***a**, **b**, ..., **e** линейно зависимы, то и вся эта система векторов линейно зависима.*

Пусть линейно зависимы векторы ***a**, **b***. Тогда

$$\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b} = \mathbf{0},$$

где хотя бы один из коэффициентов α, β отличен от нуля. Но тогда и

$$\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b} + 0\cdot\boldsymbol{c} + \ldots + 0\cdot\boldsymbol{e} = \mathbf{0}.$$

Это равенство показывает линейную зависимость векторов ***a**, **b**, ..., **e***, так как среди коэффициентов линейной комбинации, стоящей в ее левой части, имеются отличные от нуля.

в) *Если среди векторов* ***a**, **b**, ..., **e*** *имеется хотя бы один нулевой, то эти векторы линейно зависимы.*

Пусть, например, $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$. Тогда

$$\alpha\boldsymbol{a}+0\cdot\boldsymbol{b} + \ldots + 0\cdot\boldsymbol{e} = \mathbf{0}, \quad \alpha\neq 0.$$

2. Приведем примеры линейно зависимых и линейно независимых векторов пространства L_3.

а) Нулевой вектор **0** является линейно зависимым, так как $\alpha\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0}$ при любом $\alpha\neq 0$ (это следует также из свойства в)).

б) Любой вектор $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$ будет линейно независимым, так как $\alpha\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ только при $\alpha = 0$.

в) Два коллиниарных (напомним, что *коллиниарными* называются векторы, которые лежат на одной прямой) векторы ***a*** и ***b*** линейно зависимы. Действительно, если $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, то $\boldsymbol{b} =\lambda\boldsymbol{a}$ или $\lambda\boldsymbol{a} +(-1)\,\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$. Если же $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$, то эти векторы, линейно зависимы в силу свойства в).

г) Два коллиниарных вектора линейно независимы. В самом деле, предположим противное: пусть $\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b} =\mathbf{0}$, где $\beta\neq 0$. Тогда $\boldsymbol{b} = -\dfrac{\alpha}{\beta}\,\boldsymbol{a}$

А это означает, что векторы ***a*** и ***b*** коллинеарны.

д) Три компланарных (напомним, что *компланарными* называются векторы, которые лежат в одной плоскости) векторы линейно зависимы. Пусть векторы ***a**, **b**, **c*** компланарны, причем векторы ***a**, **b*** не коллиниарны. Тогда вектор ***c*** можно представить (рис. 5.1) в виде

$$\boldsymbol{c} = \overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b},$$

что в силу свойства а) означает линейную зависимость векторов ***a**, **b**, **c**.* Если же векторы ***a*** и ***b*** коллиниарны, то они линейно зависимы, а потому в силу свойства б) и векторы ***a**, **b**, c* линейно зависимы.

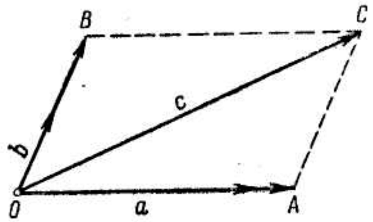


Рис. 7.1.

е) Три некомпланарных вектора всегда линейно независимы. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству примера *г)*.

ж) Любые четыре вектора пространства всегда линейно зависимы. Действительно, если любые три вектора линейно зависимы, то согласно свойству б) и все четыре векторы будут линейно зависимы. Если же имеются три линейно независимых векторы ***a, b, c***, то любой четвертый вектор ***d*** может быть представлен в виде линейной комбинации векторов ***a, b, c*** (рис. 7.2):

$$\boldsymbol{d} = \overline{OD} = \overline{OP} + \overline{PD} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} + \gamma \boldsymbol{c},$$

откуда в силу свойства а) следует линейная зависимость векторов ***a, b, c , d***.

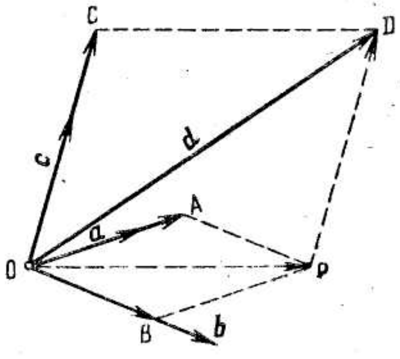


Рис. 7.2.

з) В пространстве L_n линейно независимыми будут векторы $\boldsymbol{e_1}=\{1,0, ..., 0\}$, $\boldsymbol{e}_2 = \{0, 1, ..., 0\}$, ..., $\boldsymbol{e}_n=\{0, 0, ..., 1\}$.

В самом деле, рассмотрим их линейную комбинацию

$$\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{e}_n = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}.$$

Эта комбинация будет равна нулю только тогда, когда

$$\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0.$$

Система векторов пространства L_n, состоящая из векторов $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и произвольного вектора $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, будет линейно зависимой, так как вектор $\boldsymbol{x}$ может быть представлен в виде

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e_2} + \ldots + x_n\boldsymbol{e_n}.$$

7.3. Размерность и базис линейного пространства

Размерностью линейного пространства называется наибольшее число имеющихся в нем линейно независимых векторов.

Например, на прямой существует один линейно независимый вектор, а любые два вектора линейно зависимы. Следовательно, прямая представляет собой одномерное линейное пространство. Выше мы обозначили его L_1. Здесь нижний индекс как раз означает размерность пространства.

На плоскости существуют два линейно независимых вектора, но любые три вектора линейно зависимы. Поэтому плоскость является двумерным пространством и обозначается через L_2.

В пространстве существуют три линейно независимых вектора, а любые четыре вектора линейно зависимы. Поэтому размерность пространства равна трем, и мы обозначим его через L_3.

В линейном пространстве, элементами которого являются векторы $\boldsymbol{x}=\{x_1, x_2,\ldots,x_n\}$, мы нашли n линейно независимых векторов $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. С другой стороны, можно показать, что любые $n+1$ векторов этого пространства будут линейно зависимыми. Следовательно, размерность этого пространства равна n, и мы обозначим его поэтому через L_n.

Рассмотрим теперь произвольный n-мерное линейное пространство (здесь, в частности, n может быть равно 1, 2 или 3) и выберем в нем любые n линейно независимых векторов $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Пусть $\boldsymbol{x}$ — произвольный вектор пространства. Тогда векторы $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ будут линейно зависимыми, так как их число превышает размерность пространства. Поэтому найдутся такие числа $\alpha, \alpha_{1\ldots}, \alpha_n$, что

$$\alpha\boldsymbol{x} + \alpha_1\boldsymbol{e_1} + \alpha_2\boldsymbol{e_2} + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{e_n} = \boldsymbol{0}.$$

При этом $\alpha \neq 0$, так как в противном случае векторы $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ были бы линейно зависимыми. Следовательно, вектор $\boldsymbol{x}$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$:

$$\boldsymbol{x} = -\frac{\alpha_1}{\alpha}\boldsymbol{e_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha}\boldsymbol{e_2} - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha}\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0}$$

Положим теперь

$$-\frac{\alpha_1}{\alpha} = x_1 \ldots, \ -\frac{\alpha_n}{\alpha} x_n.$$

Тогда вектор $\boldsymbol{x}$ представится в виде

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots+x_n\boldsymbol{e}_n. \tag{7.1}$$

Докажем единственность такого разложения. Предположим, что возможно другое разложение вектора $\boldsymbol{x}$ по векторам $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$:

$$\boldsymbol{x} = x'_1\boldsymbol{e}_1+ x'_2\boldsymbol{e}_2+\ldots + x'_n\boldsymbol{e}_n.$$

Тогда

$$x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_i + \ldots+x_n\boldsymbol{e}_n = x'_1\boldsymbol{e}_1+ x'_2\boldsymbol{e}_2+\ldots + x'_n\boldsymbol{e}_n$$

и

$$(x_1 — x'_1) \boldsymbol{e}_2 + (x_2 — x'_2) \boldsymbol{e}_2 +\ldots + (x_n — x'_n) \boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0}.$$

Но так как векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ линейно независимы, то

$$x_1= x'_1, \quad x_2= x'_2, \ldots, \quad x_n = x'_n.$$

Мы доказали тем самым, что *любой вектор х может быть, и притом единственным образом, представлен в виде линейной комбинации линейно независимых векторов* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Совокупность этих векторов называется *базисом п*-мерного линейного пространства, а числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — *координатами* вектора $\boldsymbol{x}$ в этом базисе. Мы доказали также, что *любые п линейно независимых векторов могут быть приняты за базис пространства.*

В частности, на прямой L_1 любой вектор $\boldsymbol{x}$ может быть представлен в виде

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1,$$

где $\boldsymbol{e}_1$ — произвольный отличный от нуля вектор этой прямой.

На плоскости L_2 вектор $\boldsymbol{x}$ может быть представлен в виде

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1+ x_2\boldsymbol{e}_2,$$

где $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ — любые два неколлинеарных вектора этой плоскости.

И, наконец, в просторные L_3 любой вектор $\boldsymbol{x}$ может быть представлен в виде

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3,$$

где $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ — любые три некомпланарных вектора пространства.

Разложение (7.1) более кратко может быть записано в виде

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k\boldsymbol{e}_k.$$

Однако и такая запись часто оказывается не очень удобной и ее упрощают, отбрасывая знак суммы, т.е. пишут

$$\boldsymbol{x} = x_k\boldsymbol{e}_k, \tag{7.2}$$

полагая, что *по индексу k, повторяющемуся дважды, производится суммирование от* 1 *до п*. Это правило называется «соглашением о суммировании»; оно было предложено А. Эйнштейном. Индекс k называется *индексом суммирования.* Он может быть заменен любой другой буквой, так что

$$x_k\boldsymbol{e}_k = x_i\boldsymbol{e}_i = x_n\boldsymbol{e}_n$$

Теперь ясно, что при заданном базисе векторы пространств L_1, L_2 и L_3 вполне определяются своими координатами. Следовательно, эти пространства могут быть рассмотрены как частые виды пространства L_n при n=1, 2, 3.

Все последующее изложение будем вести, ограничиваясь для наглядности лишь случаем плоскости или обычного трехмерного пространства. Поэтому во всех дальнейших формулах n = 2 или 3 и индексы суммирования пробегают соответственно значения 1 и 2 или 1, 2 и 3. Однако большая часть содержания рассматриваемого материала остается справедливой и для общего линейного просторную n измерений.

Напомним еще следующие хорошо известные свойства координат векторов:

а) Если два вектора равные, то равны и их соответствующие координаты.

б) При сложении векторов их соответствующие координаты складываются.

в) При умножении вектора на число каждая его координата умножается на это число.

7.4. Прямоугольный базис в трехмерном пространстве. Скалярное произведение векторов

Рассмотрим в трехмерном пространстве L_3 базис, который состоит из трех попарно ортогональных единичных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. Такой базис называется *ортонормированным (прямоугольным),* а составляющие его векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ — *ортами.* Разложение произвольного вектора $\boldsymbol{x}$ по ортонормированному базису ничем не отличается от его разложения по произвольному базису и записывается в виде

$$\boldsymbol{x} = x_i\boldsymbol{e}_i$$

Числа x_i теперь называются *прямоугольными* координатами вектора $\boldsymbol{x}$.

Базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ называется *правым,* если из конца вектора $\boldsymbol{e}_3$ поворот на 90° от вектора $\boldsymbol{e}_1$ к вектору $\boldsymbol{e}_2$ виден против часовой стрелки. Если же этот поворот от вектора $\boldsymbol{e}_1$ к вектору $\boldsymbol{e}_2$ из конца вектора $\boldsymbol{e}_3$ виден по часовой стрелке, то базис называется *левым.*

Рассмотрим, как запишется в наших обозначениях хорошо известное из аналитической геометрии скалярное произведение векторов.

Скалярное произведение векторов обычно определяется формулой

$$\boldsymbol{xy} = |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}| \cos \varphi,$$

где $|\boldsymbol{x}|$ и $|\boldsymbol{y}|$ - длины заданных векторов, а φ — угол между ними.

Как известно, скалярное произведение векторов имеет следующие свойства:

1) $\boldsymbol{xy}=\boldsymbol{yx}$,
2) $(\lambda \boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$,
3) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{xz}+\boldsymbol{yz}$,
4) $\boldsymbol{xx} > 0$ при $\boldsymbol{x} \neq 0$.

Скалярные произведения базисных векторов ортонормированного базиса определяются из следующей таблицы умножения:

	e_1	e_2	e_3
e_1	1	0	0
e_2	0	1	0
e_3	0	0	1

Введем величины δ_{ij}, определяемые равенствами

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Тогда скалярные произведения базисных векторов могут быть записаны в виде

$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$.

Величины δ_{ij} называются *симметричными символами Кронекера.*

Пусть $\boldsymbol{x} = x_i\boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{y}=y_j\boldsymbol{e}_j$ — два произвольных вектора пространства. Тогда

$$\boldsymbol{xy}=(x_i\boldsymbol{e}_i)(y_j\boldsymbol{e}_j),$$

и так как скалярное произведение обладает свойствами 2) и 3), то в правой части этого равенства можно раскрыть скобки (читателю эту выкладку рекомендуется проделать подробно):

$$\boldsymbol{xy}=x_iy_j\,(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j).$$

Теперь здесь стоит сумма, состоящая из девяти слагаемых, так как индексы *i* и *j* независимо друг от друга пробегают значение от 1 до 3. Но отличными от нуля будут лишь три из этих слагаемых, так как

$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = 0$ при $i \neq j$. Поскольку в не равных нулю слагаемых $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i=1$, мы получим

$$\boldsymbol{xy} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

- хорошо знакомое из аналитической геометрии выражение для скалярного произведения векторов. Если применить здесь снова соглашение о суммировании, то это выражение можно переписать в виде

$$\boldsymbol{xy} = x_ky_k$$

Найдем скалярное произведение произвольного вектора $\boldsymbol{x}=x_i\boldsymbol{e}_i$ на базисный вектор $\boldsymbol{e}_k$:

$$\boldsymbol{xe}_k = x_i(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_k) = x_i\delta_{ik}.$$

Выражение $x_i\delta_{ik}$ есть сумма трех слагаемых, два из которых при $i \neq k$ равны нулю, так как $\delta_{ik}= 0$ при $i \neq k$; не равным нулю будет лишь одно слагаемое, получающееся при $i=k$. Поскольку $\delta_{kk}=1$, то $x_i\delta_{ik}=x_k$. Следовательно,

$$\boldsymbol{xe}_k = x_k.$$

Это означает, что *прямоугольные координаты вектора* $\boldsymbol{x}$ *представляют ортогональные проекции этого вектора на соответствующую ось.*

Запишем в новых обозначениях некоторые хорошо известные из аналитической геометрии геометрические факты, которые вытекают из определение скалярного произведения векторов:

а) *Длина вектора* $\boldsymbol{x} = x_i\boldsymbol{e}_i$ вычисляется по следующей формуле:

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\boldsymbol{x}^2} = \sqrt{\delta_{ij}x_ix_j},$$

или

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_ix_i}.$$

б) *Косинус угла* φ *между векторами* $\boldsymbol{x} = x_i\boldsymbol{e}_i$ *и* $\boldsymbol{y} = y_i\boldsymbol{e}_i$ вычисляется так:

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{xy}}{|\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|} = \frac{x_iy_i}{\sqrt{x_ix_i}\sqrt{y_iy_i}}.$$

Поэтому условием ортогональности векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ служит равенство

$$x_iy_i = 0.$$

в) Если $\boldsymbol{a}$ — единичный вектор, то его координаты a_k будут равны косинусам углов, которые этот вектор образуют с базисными векторами $\boldsymbol{e}_k$.

$$A_k = \boldsymbol{ae}_k = \cos\alpha_k.$$

При этом, так как $\boldsymbol{a}^2=1$, то

$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1.$$

г) *Проекция вектора* $\boldsymbol{x} = x_i\boldsymbol{e}_i$ *на вектор* $\boldsymbol{a}=a_i\boldsymbol{e}_i$ определяется формулой

$$\text{Пр}_{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_i x_i}{\sqrt{a_i a_i}}.$$

7.5. Векторное и смешанное произведения векторов

1. *Векторным произведением* векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ называется третий вектор $\boldsymbol{z}$, удовлетворяющий следующим требованиям:

1) длина вектора $\boldsymbol{z}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, т.е. $|\boldsymbol{z}| = |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|\sin\varphi$, где φ — угол между векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$;

2) вектор $\boldsymbol{z}$ ортогонален каждому из векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$;

3) вектор $\boldsymbol{z}$ образует с векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ правую тройку векторов.

Векторное произведение векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ обычно обозначается через $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$.

Он обладает следующими свойства: .

1) $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y} = -(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{x})$;

2) $(\lambda\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{y} = \lambda(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})$;

3) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{z}+\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z}$.

Найдем теперь таблицу векторных произведений векторов ортонормированного базиса пространства L_3. Эта таблица будет по-разному записываться для правого и левого базисов:

	e_1	e_2	e_3
e_1	0	e_3	$-e_2$
e_2	$-e_2$	0	e_1
e_3	e_2	$-e_1$	0

	e_1	e_2	e_3
e_1	0	$-e_3$	e_2
e_2	e_3	0	$-e_1$
e_3	$-e_2$	e_1	0

В этих таблицах векторы, стоящие слева, считаются первыми, а векторы, стоящие сверху, - вторыми сомножителями векторного произведения.

Чтобы записать векторные произведения базисных векторов в одной форме для любого ортонормированного базиса, введем величину ε, которая равна +1, если базис $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ правый, и — 1, если этот базис левый; таким образом, эта величина зависит от выбора базиса. Затем введем величины ε_{ijk}, определяемые равенствами

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = \varepsilon,$$
$$\varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = -\varepsilon$$

и равны нулю, если какие-нибудь два из индексов i, j, k равны между собой. Эти величины также зависят от выбора базиса. Их называют *кососиметричными символами Кронекера.*

При помощи величин ε_{ijk} векторные произведения базисных векторов всегда, при любой ориентации базиса, могут быть записаны в виде

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k,$$

где в правой части, как обычно, выполняется суммирование по индексу k. Эти формулы легко доказываются простой проверкой, например:

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \varepsilon_{12k}\boldsymbol{e}_k = \varepsilon_{121}\boldsymbol{e}_1 + \varepsilon_{122}\boldsymbol{e}_2 + \varepsilon_{123}\boldsymbol{e}_3.$$

Но первые два члена этой суммы равны нулю, а $\varepsilon_{123} = \varepsilon$, поэтому

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \varepsilon \boldsymbol{e}_3.$$

Отсюда для правой системы мы получим

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3,$$

а для левой

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_3,$$

что соответствует нашим таблицам.

Пусть $\boldsymbol{x} = x_i\boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{y} = y_j\boldsymbol{e}_j$ - два произвольных вектора. Тогда

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = (x_i\boldsymbol{e}_i) \times (y_j\boldsymbol{e}_j).$$

Пользуясь вторым и третьим свойствами векторного произведения, мы получим отсюда

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = x_i y_j (\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) = \varepsilon_{ijk} x_i y_j \boldsymbol{e}_k,$$

где в правой части суммирование происходит по всему трем индексах i, j, k. Подробно правая часть этого равенства, если отбросить равные нулю слагаемые, может быть записана в виде

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \varepsilon \left\{(x_2y_3 - x_3y_2)\,\boldsymbol{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\,\boldsymbol{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\,\boldsymbol{e}_3\right\}$$

или, как обычно, в виде определителя третьего порядка:

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \varepsilon \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Если обозначить векторное произведение $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ через $\boldsymbol{z}$, то координаты z_k вектора $\boldsymbol{z}$ запишутся следующим образом:

$$z_k = \varepsilon_{kij} x_i y_j$$

(так как $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij}$), или более подробно:

$$z_1 = \varepsilon (x_2 y_3 - x_3 y_2),$$
$$z_2 = \varepsilon (x_3 y_1 - x_1 y_3),$$
$$z_3 = \varepsilon (x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

При $\varepsilon=1$ эти формулы совпадают с хорошо известными из аналитической геометрии (где рассматривались лишь правые базисы) формулами для координат векторного произведения.

Заметим, что введенное нами определение векторного произведения немного отличается от определения этого понятия, принятого во многих книгах по аналитической геометрии и векторному исчислению. Это отличие состоит в том, что в нашем определении векторное произведение не зависит от ориентации системы координат, а в некоторых книгах оно меняет знак при изменении этой ориентации. Поэтому там векторное произведение не является обычным вектором, а является так называемым *аксиальным* вектором. У нас же векторное произведение определено однозначно, независимо от выбора базиса, и потому оно является *обычным* вектором. Тем самым мы избавляемся от необходимости рассмотрения аксиальных векторов.

2. *Смешанное произведение векторов* определяется формулой

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y})\boldsymbol{z}$$

и равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$, взятому со знаком плюс, если векторы $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ образуют правую тройку, и со знаком минус в противном случае.

Смешанное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = -(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z});$
2) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y});$
3) $(\lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z});$
4) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}).$

Легко проверить, что для смешанных произведений базисных векторов имеют место формулы

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k) = \varepsilon_{ijk}.$$

В самом деле,

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k) = (\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j)\, \boldsymbol{e}_k = \varepsilon_{ijl}\, (\boldsymbol{e}_l \boldsymbol{e}_k).$$

В правой части этого равенства выполняется суммирование по индексу l. Но скалярное произведение $\boldsymbol{e}_l \boldsymbol{e}_k$ будет отлично от нуля только тогда, когда $l=k$. Поэтому в рассматриваемой сумме останется только один отличный от нуля член $\varepsilon_{ijk}(\boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_k)$. И так как $\boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_k = 1$, то мы и получим доказываемую формулу.

Пусть теперь даны три произвольных вектора $\boldsymbol{x} = x_i \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{y} = y_j \boldsymbol{e}_j$ и $\boldsymbol{z} = z_k \boldsymbol{e}_k$. Их смешанное произведение запишется в виде

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (x_i\boldsymbol{e}_i, y_j\boldsymbol{e}_j, z_k\boldsymbol{e}_k).$$

Пользуясь третьим и четвертым свойствами смешанного произведения, мы можем раскрыть скобки, которые стоят в правой части этого равенства. Тогда мы получим

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = x_iy_jz_k (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k)= \varepsilon_{ijk}\, x_iy_jz_k.$$

где индексы i, j, k - независимо друг от друга принимают значение 1, 2, 3 и по ним производится суммирование. Следовательно, в правой части этого равенства стоит сумма, которая содержит $3^3 = 27$ слагаемых. Но из этих слагаемых только 6 будут отличными от нуля, так как в остальных слагаемых у величин ε_{ijk} будут повторяющиеся индексы. Поэтому в подробной записи предыдущая сумма примет вид

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \varepsilon(x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1 - x_1y_3z_2).$$

Это выражение может быть обычным образом записано в виде определителя третьего порядка:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \varepsilon \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

3. Рассмотрим двойное векторное произведение $\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z})$ трех векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ и докажем, что имеет место соотношения

$$\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{y}\times \boldsymbol{z})=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}\boldsymbol{z}) - \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}). \qquad (7.3)$$

Если векторы $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ коллинеарны, то легко проверить, что как левая, так и правая часть равенства (7.3) будут равны нулю. Предположим теперь, что $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ не коллинеарны, и пусть $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z})$. Вектор $\boldsymbol{u}$ ортогонален вектору $\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z}$ и поэтому лежит в плоскости π, определяемой векторами $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$,т.е.

$$\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{y} + \mu\boldsymbol{z}. \qquad (7.4)$$

Обозначим через $\boldsymbol{z}^*$ вектор, который лежит в плоскости π и получающийся из $\boldsymbol{z}$ поворотом на 90° за часовой стрелкой, если смотреть из конца вектора $\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z}$. Векторы $\boldsymbol{z}^*$, $\boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z}$ образуют правую ортогональную тройку векторов. Теперь

$$\boldsymbol{u}\boldsymbol{z}^* = \lambda (\boldsymbol{y}\boldsymbol{z}^*). \qquad (7.5)$$

С другой стороны,

$$\boldsymbol{u}\boldsymbol{z}^* = [\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z})]\, \boldsymbol{z}^* = [(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z}) \times \boldsymbol{z}^*]\, \boldsymbol{x}.$$

Положим $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z}) \times \boldsymbol{z}^*$. Тогда вектор $\boldsymbol{v}$ имеет то же направление, что и вектор $\boldsymbol{z}$, и, так как векторы $\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{z}^*$ ортогональны, $|\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z}|\,|\boldsymbol{z}^*|$, откуда

$$|\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{y}|\,|\boldsymbol{z}|^2 \sin(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = |\boldsymbol{y}|\,|\boldsymbol{z}|^2 \cos(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}^*) = |\boldsymbol{z}|\,(\boldsymbol{y}\boldsymbol{z}^*)$$

(здесь $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ обозначает угол между $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$). Поэтому

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{y}\boldsymbol{z}^*)\boldsymbol{z}.$$

Теперь

$$\boldsymbol{uz}^* = (\boldsymbol{yz}^*)(\boldsymbol{xz}),$$

и, сравнивая это соотношение с равенством (7.5), мы получаем $\lambda = \boldsymbol{xz}$.

Но если умножить соотношение (7.4) скалярно на вектор $\boldsymbol{x}$, то мы получим, что

$$\lambda(\boldsymbol{xy}) + \mu(\boldsymbol{xz}) = 0$$

откуда $\mu = -\boldsymbol{xy}$. Это завершает доказательство формулы (7.3).

7.6. Преобразование ортонормированного базиса. Основная задача тензорного исчисления

1. Пусть в пространстве L_3, наряду с ортонормированным базисом $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ с началом в O, задан другой ортонормированный базис $\{\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}\}$ с тем же началом O (рис. 7.3).

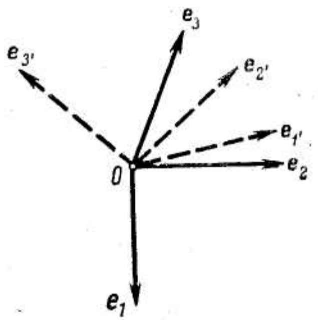


Рис. 7.3.

Векторы нового базиса $\boldsymbol{e}_{i'}$ сами могут быть разложены по векторам старого базиса. Будем обозначать через $\gamma_{i'i}$ коэффициент при $\boldsymbol{e}_i$ в разложении вектора $\boldsymbol{e}_{i'}$ по векторам старого базиса. Тогда разложения векторов $\boldsymbol{e}_{i'}$ будут иметь вид

$$\boldsymbol{e}_{1'} = \gamma_{1'1}\boldsymbol{e}_1 + \gamma_{1'2}\boldsymbol{e}_2 + \gamma_{1'3}\boldsymbol{e}_3,$$
$$\boldsymbol{e}_{2'} = \gamma_{2'1}\boldsymbol{e}_1 + \gamma_{2'2}\boldsymbol{e}_2 + \gamma_{2'3}\boldsymbol{e}_3,$$
$$\boldsymbol{e}_{3'} = \gamma_{3'1}\boldsymbol{e}_1 + \gamma_{3'2}\boldsymbol{e}_2 + \gamma_{3'3}\boldsymbol{e}_3.$$

Короче эти три равенств можно записать так:

$$\boldsymbol{e}_{i'} = \gamma_{i'i}\boldsymbol{e}_i. \tag{7.6}$$

Умножим скалярно каждое из равенств (7.6) на каждый из векторов $\boldsymbol{e}_i$. Тогда, учитывая то, что $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$, получим

$$\boldsymbol{e}_{i'}\boldsymbol{e}_i = \gamma_{i'i}$$

Но так как векторы $\boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{e}_{i'}$ единичные, то

$$\boldsymbol{e}_{i'}\boldsymbol{e}_i = \cos(\boldsymbol{e}_{i'},\boldsymbol{e}_i),$$

где через $(\boldsymbol{e}_{i'},\boldsymbol{e}_i)$ обозначен угол между векторами $\boldsymbol{e}_{i'}$ и $\boldsymbol{e}_i$.
Поэтому

$$\gamma_{i'i} = \cos(\boldsymbol{e}_{i'},\boldsymbol{e}_i). \qquad (7.7)$$

С другой стороны, мы можем записать разложение векторов старого базиса по векторам $\boldsymbol{e}_{i'}$ нового. Если обозначить через $\gamma_{ii'}$ коэффициент при $\boldsymbol{e}_{i'}$ в разложении векторов $\boldsymbol{e}_i$ по векторам нового базиса, то эти разложения будут иметь вид

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= \gamma_{11'}\boldsymbol{e}_{1'} + \gamma_{12'}\boldsymbol{e}_{2'} + \gamma_{13'}\boldsymbol{e}_{3'}, \\ \boldsymbol{e}_2 &= \gamma_{21'}\boldsymbol{e}_{1'} + \gamma_{22'}\boldsymbol{e}_{2'} + \gamma_{23'}\boldsymbol{e}_{3'}, \\ \boldsymbol{e}_3 &= \gamma_{31'}\boldsymbol{e}_{1'} + \gamma_{32'}\boldsymbol{e}_{2'} + \gamma_{33'}\boldsymbol{e}_{3'} \end{aligned}$$

или, в сокращенной записи,

$$\boldsymbol{e}_i = \gamma_{ii'}\boldsymbol{e}_{i'} \qquad (u,i' = 1,2,3). \qquad (7.8)$$

Теперь, если каждое из равенств (5.8) скалярно умножить на каждый из векторов $\boldsymbol{e}_{i'}$, то получим

$$\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_{i'} = \cos\,(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_{i'}) = \gamma_{ii'}. \qquad (7.9)$$

Равенства (7.7) и (7.9) означают, что

$$\gamma_{ii'} = \gamma_{i'i}. \qquad (7.10)$$

Числа $\gamma_{i'i}$ можно записать в виде таблицы

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{1'1} & \gamma_{1'2} & \gamma_{1'3} \\ \gamma_{2'1} & \gamma_{2'2} & \gamma_{2'3} \\ \gamma_{3'1} & \gamma_{3'2} & \gamma_{3'3} \end{pmatrix}.$$

Таблица с одинаковым количеством строк и столбцов, как мы знаем, называется *квадратной матрицей.* Число строк (столбцов) называется *порядком* матрицы. Таким образом, таблица Г представляет собой квадратную матрицу третьего порядка и называется *матрицей перехода от старого базиса к новому.* Аналогично числа $\gamma_{ii'}$ образуют матрицу

$$\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma_{11'} & \gamma_{12'} & \gamma_{13'} \\ \gamma_{21'} & \gamma_{22'} & \gamma_{23'} \\ \gamma_{31'} & \gamma_{32'} & \gamma_{33'} \end{pmatrix}$$

— *матрицу перехода от нового базиса к старому* (обозначение Γ^{-1} показывает, что эта матрица обратного перехода). Более коротко матрицы Γ и Γ^{-1} будем записывать в виде

$$\Gamma=(\gamma_{i'i}), \quad \Gamma^{-1}=(\gamma_{ii'}).$$

Равенство (7.10) означает, что матрица Γ^{-1} получается из матрицы Γ, если в последней строки заменить столбцами. Кроме того, для элементов этих двух матриц имеем

$$\begin{gathered}\gamma_{i'k}\gamma_{j'k}=\gamma_{ki'}\gamma_{kj'}=\delta_{i'j'},\\ \gamma_{ik'}\gamma_{jk'}=\gamma_{k'i}\gamma_{k'j}=\delta_{ij}.\end{gathered} \tag{7.11}$$

Действительно,

$$\gamma_{i'k}\gamma_{j'k}=\gamma_{i'1}\gamma_{j'1}+\gamma_{i'2}\gamma_{j'2}+\gamma_{i'3}\gamma_{j'3}=\boldsymbol{e}_{i'}\boldsymbol{e}_{j'}=\delta_{i'j'}.$$

Второе равенство доказывается аналогично.

Равенства (7.11) означают, что для матриц Γ и Γ^{-1} *сумма произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) на соответствующие элементы другой строки (другого столбца) равна нулю, а сумма квадратов элементов любой строки (столбца) равна единице.*

Матрицы, элементы которых имеют указанное свойство, называются *ортогональными.*

Мы доказали тем самым, что *переход от одного ортонормированного базиса к другому в L_3 задается ортогональной матрицей.*

Пусть теперь нам дана произвольная ортогональная матрица $\Gamma=(\gamma_{i'i})$. Векторы $\boldsymbol{e}_{i'}$, определяемые формулами (7.6), будут тогда, в силу свойств (7.11) ортогональной матрицы, попарно ортогональными и единичными. Поэтому *всякая ортогональная матрица служит матрицей перехода от одного ортонормированного базиса к другому.*

Рассмотрим определитель ортогональной матрицы Γ:

$$|\Gamma|=|\gamma_{i'i}|=\begin{vmatrix}\gamma_{1'1} & \gamma_{1'2} & \gamma_{1'3}\\ \gamma_{2'1} & \gamma_{2'2} & \gamma_{2'3}\\ \gamma_{3'1} & \gamma_{3'2} & \gamma_{3'3}\end{vmatrix}.$$

Поскольку строки определителя $|\Gamma|$ составленные из координат векторов $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$ относительно базиса $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, то $|\Gamma|$ равен смешанному произведению векторов $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$ (см. формулу в конце п. 7.5):

$$|\Gamma|=(\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}).$$

Абсолютная величина этого смешанного произведения равна единице, так как она равна объему куба, построенного на векторах $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$.

Следовательно, определитель любой ортогональной матрицы равен ± 1, причем из рассмотрений п. 7.5 следует, что знак плюс или минус будет в зависимости от того, имеют ли базисы $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ и $\{\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}\}$ одинаковую или противоположную ориентацию. В первом случае базис $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$может быть совмещен с базисом $\{\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}\}$ путем поворота вокруг точки *O,* во втором случае одного поворота оказывается недостаточно — к нему следует добавить еще отражение базиса $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ относительно некоторой плоскости, которая проходит через точку *O*.

Запишем еще формулы преобразования ортонормированного базиса для плоскости. Это преобразование представляет собой или чистый поворот на некоторый угол α вокруг начала координат *O,* или поворот на угол α с последующим отражением относительно некоторой прямой, которая проходит через начало координат. В первом случае формулы преобразования базиса запишутся в виде

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_{1'} &= \boldsymbol{e}_1\cos\alpha + \boldsymbol{e}_2\sin\alpha, \\ \boldsymbol{e}_{2'} &= -\boldsymbol{e}_1\sin\alpha + \boldsymbol{e}_2\cos\alpha \end{aligned}$$

и матрица Г запишется так:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы будет равен единице. Во втором случае формулы преобразования базиса будут выглядеть так:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_{1'} &= \boldsymbol{e}_1\cos\alpha + \boldsymbol{e}_2\sin\alpha, \\ \boldsymbol{e}_{2'} &= \boldsymbol{e}_1\sin\alpha - \boldsymbol{e}_2\cos\alpha, \end{aligned}$$

и определитель матрицы

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

будет равен - 1.

2. Пусть теперь в пространстве задан вектор $\boldsymbol{x}$. Он представляет собой некоторый геометрический или физический объект, заданный как по величине, так и по направлению (например, силу, скорость, ускорение, напряженность электрического поля и т.п.). Этот реально существующий объект не зависит от того, в какой системе координат мы его рассматриваем. Любые действия или вычисления,

проводимые непосредственно над векторами, можно, таким образом, всегда физически истолковать.

Наряду с исчислением, связанным непосредственно с векторами, большую роль в геометрии и ее приложениях играет координатный метод, применение которого позволяет изучать геометрические образы не непосредственно, а достаточно хорошо развитыми методами алгебры (в аналитической геометрии) и анализа (в дифференциальной геометрии). На этом пути удается довольно легко получить много результатов, непосредственное доказательство которых иногда вообще невозможно, а иногда очень громоздкое.

Однако при применении координатного метода мы с каждым вектором $\boldsymbol{x}$ связываем его координаты x_1, x_2, x_3, которые зависят уже не только от самого вектора $\boldsymbol{x}$, но и от рассматриваемой координатной системы (ортонормированного базиса). Такие оортонормированные базисы можно выбирать различными способами: например, выбрав один базис и поворячивая его вокруг начала, можно получить из него другие. Тем самым при применении координатного метода мы получаем данные отображающие не только геометрическую картину, но и произвол выбора координатной системы. Например, сами координаты вектора, конечно, зависят от координатной системы, но сумма их квадратов (которая, как мы знаем, дает квадрат длины вектора) уже не должна зависеть от выбора координатной системы. (Немного ниже мы увидим, что эта величина оказывается одинаковой во всех ортонормированных базисах.)

Свойства геометрических или физических объектов, которые не зависят от выбора системы координат, в которой эти объекты рассматриваются, называются их *инвариантными* свойствами. Только такие свойства и представляют интерес для изучения.

Основная задача тензорного исчисления именно и заключается в том, чтобы *научиться отделять результаты, относящиеся к самим геометрическим объектам, от того, что привнесено случайным выбором координатной системы.*

Для этой цели прежде всего выясним, как преобразуются координаты вектора $\boldsymbol{x}$ при переходе от ортонормированного базиса $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ с началом в O к другому ортонормированному базису $\{\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}\}$ с тем же началом O. Запишем разложение вектора $\boldsymbol{x}$ в каждом из этих двух базисов:

$$\boldsymbol{x} = x_i\boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{x} = x_{i'}\boldsymbol{e}_{i'}.$$

Поскольку это - разложение одного и того же вектора, мы можем приравнять правые части этих равенств:

$$x_i\boldsymbol{e}_i = x_{i'}\boldsymbol{e}_{i'}.$$

Заменяя векторы $\boldsymbol{e}_i$ по формулам (7.8), получим

$$x_i \gamma_{ii'} \boldsymbol{e}_{i'} = x_{i'} \boldsymbol{e}_{i'},$$

откуда, в силу линейной независимости векторов $\boldsymbol{e}_{i'}$, следует, что

$$x_{i'} = x_i \gamma_{ii'};$$

учитывая, что $\gamma_{ii'} = \gamma_{i'i}$, запишем полученное равенство в виде

$$x_{i'} = \gamma_{i'i} x_i. \qquad (7.12)$$

Эти формулы дают выражение новых координат вектора $\boldsymbol{x}$ через старые.

Если бы в равенстве $x_i \boldsymbol{e}_i = x_{i'} \boldsymbol{e}_{i'}$ мы заменяли векторы $\boldsymbol{e}_{i'}$ по формулам (7.6), то получили бы выражение старых координат вектора $\boldsymbol{x}$ через новые:

$$x_i = \gamma_{ii'} x_{i'}. \qquad (7.13)$$

Отметим, что формулы (7.13) можно получить из формул (7.12), если умножить обе части (7.12) на $\gamma_{ii'}$, просуммировать по i' и воспользоваться равенствами (7.11).

Теперь мы можем выяснить, какие из проведенных нами в этом пункте рассмотрений имеют инвариантный характер, т.е. не зависят от выбора системы координат.

Начнем со скалярного произведения векторов. В пространстве L_3 оно было определено геометрически, и поэтому инвариантность его не вызывает сомнений. Убедимся в этом еще раз, показав, что полученное в п. 7.4 выражение скалярного произведения через координаты перемножаемых векторов в некоторому ортонормированном базисе обладает свойством инвариантности. Это важно потому, что в L_n скалярное произведение векторов в ортонормированном базисе определяется как сумма произведений одноименных координат, и там доказательство его инвариантности уже не может носить геометрического характера и должно быть обязательно проведено аналитически, например так, как мы сейчас будем это делать в L_3.

В п. 7.4 доказано, что скалярное произведение векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, имеющих в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ координаты x_i и y_i, а в базисе $\{\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}\}$ — координаты $x_{i'}$, $y_{i'}$, можно записать в виде $x_i y_i$ в первом базисе и, $x_{i'} y_{i'}$ — во втором.

Покажем тождественность этих выражений. Действительно, пользуясь формулами (7.12) и (7.11), получим

$$x_{i'} y_{i'} = \gamma_{i'i} x_i \gamma_{i'j} y_j = \delta_{ij} x_i y_j = x_i y_i.$$

Из инвариантности формулы для вычисления скалярного произведения немедленно следует инвариантность формул для вычисления длины вектора и косинуса угла между двумя векторами, так как эти величины выражаются через скалярное произведение векторов.

Прежде чем доказывать инвариантность формул, по которым исчисляются векторное и смешанное произведения векторов через координаты сомножителей, посмотрим, как изменяются компоненты кососимметричного символа Кронекера при переходе к новому базису. В новом базисе мы получим

$$\varepsilon_{i'j'k'} = (\boldsymbol{e}_{i'}, \boldsymbol{e}_{j'}, \boldsymbol{e}_{k'}),$$

и так как

$$\boldsymbol{e}_{i'} = \gamma_{i'i}\boldsymbol{e}_i \quad \boldsymbol{e}_{j'} = \gamma_{j'j}\boldsymbol{e}_j \quad \boldsymbol{e}_{k'} = \gamma_{k'k}\, \boldsymbol{e}_{k'},$$

то

$$\varepsilon_{i'j'k'} = \gamma_{i'i}\gamma_{j'j}\,\gamma_{k'k}\,\varepsilon_{ijk.}$$

В частности,

$$\varepsilon_{1'2'3'} = \gamma_{1'i}\gamma_{2'j}\,\gamma_{3'k}\,\varepsilon_{ijk}$$

Но в этой сумме отличными от нуля будут только шесть членов, которые можно переписать так:

$$\varepsilon_{1'2'3'} = (\gamma_{1'1}\gamma_{2'2}\gamma_{3'3} + \gamma_{1'2}\gamma_{2'3}\gamma_{3'1} + \gamma_{1'3}\gamma_{2'1}\gamma_{3'2} - \\ - \gamma_{1'2}\gamma_{2'1}\gamma_{3'3} - \gamma_{1'3}\gamma_{2'2}\gamma_{3'1} - \gamma_{1'1}\gamma_{2'3}\gamma_{3'2})\,\varepsilon_{123}.$$

Стоящее в скобках выражение представляет собой определитель матрицы Г, так что

$$\varepsilon_{1'2'3'} = |\Gamma|\varepsilon_{123}$$

или, если обозначить через ε' значение величины ε в новом базисе,

$$\varepsilon' = |\Gamma|\,\varepsilon.$$

Эта формула показывает, что если ориентация базиса не меняется, то не меняется и величина ε, если же ориентация базиса меняется на противоположную, то величина ε меняет знак, т.е. эта формула согласуется с определением величины ε.

Пусть теперь $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$. Тогда в старом базисе

$$z_k = \varepsilon_{ijk}\, x_i y_{j,} \tag{7.14}$$

а в новом базисе

$$z_{k'} = \varepsilon_{i'j'k'}\, x_{i'}\, y_{j'}. \tag{7.15}$$

Покажем инвариантность этой формулы, т.е. покажем, что формула (7.14) переходит в (7.15) при преобразовании базиса. В самом деле, подставляя выражения

$$x_i = \gamma_{ii'}\, x_{i'}, \quad y_j = \gamma_{jj'}\, y_{j'}, \quad z_k = \gamma_{kk'} z_{k'}$$

в первую формулу, получим

$$\gamma_{kk'} z_{k'} = \varepsilon_{ijk}\gamma_{ii'}\gamma_{jj'} x_{i'} y_{j'}.$$

Умножим эти соотношения на $\gamma_{kl'}$ и просуммируем по индексу *k*. Так как

$$\gamma_{kk'}\,\gamma_{kl'} = \delta_{k'l'},$$

то

$$z_{l'} = \varepsilon_{ijk}\gamma_{ii'}\gamma_{jj'}\gamma_{kl'} x_{i'} y_{j'},$$

а поскольку

$$\varepsilon_{ijk}\gamma_{ii'}\gamma_{jj'}\gamma_{kl'}=\gamma_{i'i}\gamma_{j'j}\gamma_{l'k}\varepsilon_{ijk}=\varepsilon_{i'j'l'},$$

полученная формула совпадает с формулой (7.15).

Аналогично можно доказать, что вычислительная формула смешанного произведения, которая получена в п. 7.5, также остается инвариантной при преобразовании базиса, т.е.

$$\varepsilon_{ijk}x_i y_j z_k=\varepsilon_{i'j'k'}x_{i'}y_{j'}z_{k'}.$$

Заметим, что инвариантность формулы для смешанного произведения следует из того, что

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\boldsymbol{z},$$

а векторное и скалярное произведения векторов, как мы только что доказали, выражаются инвариантными формулами.

7.7. Некоторые вопросы аналитической геометрии в пространстве

В этом пункте мы рассмотрим некоторые вопросы аналитической геометрии в пространстве, чтобы, во-первых, напомнить ряд необходимых для дальнейшего сведений и, во-вторых, чтобы записать получающиеся уравнения в сокращенных обозначениях (так как именно в таком виде мы будем пользоваться этими формулами в дальнейшем).

Пусть O — фиксированная точка евклидова пространства. Тогда каждой точке M этого пространства может быть поставлен в соответствие вектор $\overline{OM}=\boldsymbol{x}$ — радиус-вектор этой точки. Положение точки M вполне определяется, если задан ее радиус-вектор $\boldsymbol{x}$ (при заданном начале отсчета O).

Таким образом, если задано начало отсчета O, то *между векторами линейного пространства L_3 и точками евклидова пространства устанавливается взаимно однозначное соответствие.* Координаты x_i вектора $\boldsymbol{x}$ по отношению к ортонормованному базису $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ будут координатами точки M по отношению к прямоугольной декартовой системы координат, начало которой расположено в точке O и оси которой направлены по векторам $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$.

Однако указанное соответствие между точками пространства и векторами сохраняется только в том случае, если остается неподвижной начальная точка O. Если же мы перейдем от нее к новой начальной точке O', то радиусы-векторы всех точек M изменятся. Пусть $\overline{O'M}$ =$\boldsymbol{x}'$ — новый радиус-вектор точки M и $\overline{O'O}$ =$\boldsymbol{p}$. Тогда соотношение, связывающее новый и старый радиусы-векторы точки M, будет иметь вид (см. рис. 7.4)

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{p}. \qquad (7.16)$$

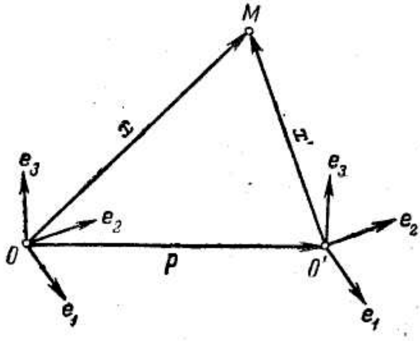


Рис. 7.4.

Рассмотрим две прямоугольные декартовы системы координат, начала которых расположены соответственно в точках O и O', оси которых параллельны и определяются единичными взаимно ортогональными векторами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. Тогда по отношению к первой системе координаты точки M будут совпадать с координатами вектора $\boldsymbol{x}$, а по отношению ко второй — с координатами вектора $\boldsymbol{x}'$. Запишем разложение векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{p}$ по базису $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ в виде

$$\boldsymbol{x} = x_i\boldsymbol{e}_i, \qquad \boldsymbol{x}' = x'_i\boldsymbol{e}_i, \qquad \boldsymbol{p}= p_i\boldsymbol{e}_i.$$

Тогда в силу формулы (5.16), координаты этих векторов будут связаны соотношениями

$$x_i = x'_i+p_i. \qquad (7.17)$$

Полученные формулы показывают, как преобразуются координаты точки M при параллельном переносе системы координат.

Заметим, что *при параллельном переносе системы координат координаты вектора не меняются,* так как в этом случае не меняются базисные векторы.

Как мы уже говорили в предыдущем пункте, все величины и уравнения, которые имеют какой-либо геометрический смысл, должны оставаться инвариантными (неизменными) при любых преобразованиях прямоугольной системы координат. Так как координаты векторов меняются только при изменениях ортогонального базиса и не меняются при параллельном переносе осей координат, то при параллельном переносе остаются инвариантными любые величины, которые зависят от координат векторов. Поэтому инвариантность таких величин следует проверять только относительно вращений системы координат. В противоположность этому величины, которые зависят от координат точек, будут меняться не только при вращениях системы координат, но и при ее параллельных переносах. Поэтому инвариантность величин, которые зависят от координат точек, следует проверять относительно обеих типов преобразований.

Рассмотрим теперь некоторые конкретные вопросы аналитической геометрии в пространстве.

1. ***Расстояние между двумя точками и деление отрезка в данном отношении***. Пусть M и N — две точки пространства и $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ — их радиусы-векторы. Тогда $\overline{MN}$ = $\boldsymbol{y}$-$\boldsymbol{x}$ и длина отрезка MN выразится следующим образом:

$$MN=|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|=\sqrt{\delta_{ij}(y_i-x_i)(y_j-x_j)}=$$
$$=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2}. \qquad (7.18)$$

Инвариантность этого выражения по отношению к любым преобразованиям координат следует из того, что расстояние между точками M и N равно длине вектора $\overline{MN}$, которая, как мы видели, является неизменной при таких преобразованиях.

Точка P, которая делит отрезок MN в отношении λ, так что $\dfrac{MP}{PN}=\lambda$,

определяется радиусом-вектором z таким, что

$$\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}=\lambda(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}),$$

откуда

$$\boldsymbol{z}=\frac{\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}}{1+\lambda}. \qquad (7.19)$$

Координаты этого вектора связаны с координатами векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ соотношениями

$$z_i=\frac{x_i+\lambda y_i}{1+\lambda}. \qquad (7.20)$$

При параллельном переносе системы координат, определяемом вектором $\boldsymbol{p}$, соотношение (7.19) принимает вид

$$\boldsymbol{z}'=\frac{\boldsymbol{x}'+\lambda\boldsymbol{y}'}{1+\lambda},$$

где

$$x=x'+p, \quad в=y'+p, \; z = z'+p,$$

т.е. остается инвариантным.

2. ***Уравнение плоскости в пространстве***. Пусть в пространстве задан оргонормированный базис из векторов e_1, e_2, e_3 и произвольная плоскость π. Координаты вектора нормали n к этой плоскости обозначим через a_i:

$$u = a_i e_i, \quad i = 1, 2, 3. \qquad (7.21)$$

Радиус-вектор x_0 точки M_0 плоскости π с координатами x^0_i можно записать в виде

$$x_0 = x^0_i e_i,$$

а радиус-вектор x произвольной точки M плоскости π с координатами x_i — в виде

$$x = x_i e_i.$$

Тогда для вектора $\overline{M_0M}$ получим

$$\overline{M_0M} = x—x_0=(x_i— x^0_i)e_i. \qquad (7.22)$$

Поскольку векторы $\overline{M_0M}$ и n перпендикулярны, имеем

$$\overline{M_0M} \cdot n=0,$$

или

$$(x—x_0)\cdot n = 0. \qquad (7.23)$$

Полученное уравнение (7.23) является *уравнением плоскости в векторной форме.*

Используя (7.21), (7.22) и выражение скалярного произведения векторов через координаты векторов, получим отсюда

$$a_i (x_i— x^0_i) = 0$$

или, обозначая $-a_i x^0_i$ через b,

$$a_i x_i + b = 0. \qquad (7.24)$$

Последнее уравнение может быть записано в виде

$$nx + b = 0.$$

Если плоскость π проходит через начало координат, то $b = 0$ и ее уравнение имеет вид

$$a_i x_i = 0.$$

Пусть теперь плоскость π не проходит через начало координат. Тогда $b \neq 0$. Разделим все члены уравнения (7.24) на b и обозначим —(a_i/ b) через u_i. Уравнение (7.23) примет вид

$$u_i x_i =1.$$

Числа u_i называются *тангенциальными координатами плоскости.*

3. ***Расстояние от точки до плоскости***. Пусть плоскость π в некотором ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ задана уравнением

$$a_i x_i + b = 0.$$

Единичный вектор нормали $\boldsymbol{n}_0$ к плоскости π можно записать в виде

$$\boldsymbol{n}_0 = \frac{a_i \boldsymbol{e}_i}{\sqrt{a_i a_i}}.$$

Рассмотрим произвольную точку пространства A_0 с координатами x^0_i и точку M с координатами x_i, которая лежит в плоскости π. Расстояние d от точки A_0 до плоскости π можно записать в виде

$$d = \left|\text{Пр}_{\boldsymbol{n}_0} \overline{MA_0}\right| = \left|\text{Пр}_{\boldsymbol{n}_0} (x_i^0 - x_i)\boldsymbol{e}_i\right| = \\ = \frac{|(x_i^0 - x_i)a_i|}{\sqrt{a_i a_i}} = \frac{|a_i x_i^0 + b|}{\sqrt{a_i a_i}}.$$

В частности, расстояние d_0 начала координат $O(0, 0, 0)$ от плоскости π равно

$$d_0 = \frac{|b|}{\sqrt{a_i a_i}}.$$

4. ***Уравнение прямой в пространстве***. Пусть прямая в пространстве задана точкой M_0, *радиус*-вектор $\boldsymbol{r}_0$ которой имеет в ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ координаты x^0_i, и направляющим вектором $\boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{e}_i$. Пусть

$$\boldsymbol{r} = x_i \boldsymbol{e}_i$$

радиус-вектор произвольной точки M прямой. Поскольку векторы $\overline{M_0 M}$ и $\boldsymbol{a}$ колинеарны и

$$\overline{M_0 M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = (x_i - x^0_i)\boldsymbol{e}_i,$$

имеем

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = \lambda \boldsymbol{a} \qquad (7.25)$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \lambda \boldsymbol{a}$$

или, в координатной форме,

$$x_i = x^0_i + \lambda a_i. \qquad (7.26)$$

В этих уравнениях λ - параметр, который может принимать любые действительные значения. Уравнение (7.25) представляет собой векторное уравнение прямой в пространстве, а уравнение (7.26) - ее параметрические уравнения.

5. ***Прямая как пересечение двух плоскостей***. Пусть прямая задана как пересечение двух плоскостей π_1 и π_2. Тогда она определяется системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_i^{(1)}x_s + b^{(1)} &= 0, \\ a_i^{(2)}x_s + b^{(2)} &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad (7.27)$$

здесь $a_i^{(1)}$ и $a_i^{(2)}$ — координаты нормальных векторов $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ плоскостей π_1 и π_2. Чтобы от уравнений (7.27) перейти к уравнениям (7.26), надо найти какую-нибудь точку, которая лежит на прямой, и направляющий вектор $\boldsymbol{a}$ этой прямой. Вектор $\boldsymbol{a}$ перпендикулярен векторам $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$; поэтому в качестве вектора $\boldsymbol{a}$ можно взять векторное произведение $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \varepsilon_{ijk}\, a_i^{(1)} a_j^{(2)} \boldsymbol{e}_k.$$

Для нахождения точки надо зафиксировать одну из координат x_i и затем решить систему (7.27) относительно двух других координат (фиксировать надо такую координату, чтобы после этого система (7.27) имела решение).

Пусть x^0_u — найденные указанным выше способом координаты точки прямой. Тогда уравнение прямой можно записать в виде

$$x_k = x^0_k + \lambda \varepsilon_{ijk}\, a_i^{(1)} a_j^{(2)}.$$

6. ***Общее уравнение кривой второго порядка на плоскости***. В аналитической геометрии общее уравнение кривой второго порядка в декартовой системе координат на плоскости записывалось в виде

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (7.28)$$

Будем теперь обозначать координаты x и y буквами x_1 и x_2 и условимся считать, что коэффициент при произведении x_ix_j равен a_{ij}, коэффициент при x_i - равен a_i, а свободный член равен a. Тогда уравнение (7.28) перепишется в виде

$$a_{ij}\, x_ix_j + 2a_ix_i + a = 0 \qquad (i, j = 1, 2), \qquad (7.29)$$

причем $a_{ij} = a_{ji}$. Здесь в первом слагаемом суммирование происходит по двум индексам i и j. Если первое слагаемое записать подробно, то получим

$$a_{ij}x_ix_j = a_{11}(x_1)^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}(x_2)^2 = \\ = a_{11}(x_1)^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}(x_2)^2.$$

поэтому в полной записи уравнение (7.29) примет вид

$$a_{11}(x_1)^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}(x_2)^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0, \qquad (7.30)$$

т.е. мы видим, что оно идентично уравнению (7.28). Напомним, что условия

$$a_i = 0$$

означают, что кривая второго порядка - центральная и начало координаты помещенов ее центре симметрии, а условия

$$a = 0, \quad a_i = 0$$

означают, что кривая второго порядка распадается на две пересекающиеся прямые, проходящие через начало координат.

7. ***Уравнение поверхности второго порядка в пространстве***. Общее уравнение поверхности второго порядка относительно декартовоой системы координат записывается в виде

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + \\ + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0.$$

Если воспользоваться обозначениями, аналогичными тем, которые мы только что ввели для кривой второго порядка, то это уравнение в сокращенных обозначениях примет вид

$$a_{ij}\, x_i x_j + 2a_i x_i + a = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \qquad (7.31)$$

где $a_{ij} = a_{ji}$. Мы видим, что уравнение (7.29) и (7.31) записані совершенно одинаково, разница между ними состоит только в том, что индексы суммирования в (7.29) принимают значения 1, 2, а в (7.31) - значения 1, 2, 3.

Снова условия

$$a_i = 0$$

означают, что поверхность второго порядка - центральная и начало координаты размещены в ее центре симметрии, а условия

$$a = 0, \quad a_i = 0$$

означают, что поверхность второго порядка представляет собой конус второго порядка с вершиной в начале координат, который, в частности, может распадаться на две пересекающиеся или совпадающие плоскости.

8. ***Определение центра кривой и поверхности второго порядка***. Поскольку уравнения кривой поверхности второго порядка в сокращенных обозначениях выглядят одинаково, многие вопросы для них можно изложить совместно, надо лишь твердо помнить, что для кривой индексы суммирования принимают два, а для поверхности - три значения.

Рассмотрим в качестве примера вопрос об определении центра кривой и поверхности второго порядка.

Пусть нам дано уравнение

$$a_{ij} x_i x_j + 2a_i x_i + a = 0.$$

Предположим, что это уравнение определяет центральную кривую или поверхность второго порядка с центром O. Сделаем параллельный перенос прямоугольной системы координат, соединив новое начало O' с центром; пусть $\boldsymbol{p}$ — радиус-вектор, который определяет положение начала O' новой системы координат, $\overline{OO'} = \mathbf{p}=p_i\mathbf{e}_i$. Тогда старые координаты x_i и новые координаты x'_i точки M будут связаны соотношениями (7.17):

$$x_i=x'_i+p_i.$$

Подставляя эти значения x_i в уравнение (7.31), мы получим, что в новой системе координат уравнение (7.31) примет вид

$$a_{ij}(x'_i+p_i)(x'_j+p_j)+2a_i(x'_i+p_i)+a=0$$

или

$$a_{ij}x'_ix'_j+a_{ij}x'_ip_j+a_{ij}x'_jp_i+a_{ij}p_ip_j+2a_ix'_i+2a_ip_i+a=0.$$

Если в третьем слагаемом заменить индекс суммирования i на j, а j на i и учесть, что $a_{ij} = a_{ji}$, то получим

$$a_{ij}x'_ix'_j+2(a_{ij}p_j+a_i)x'_i+a_{ij}p_ip_j+2a_ip_i+a=0.$$

Поскольку новое начало - центр, мы должны иметь

$$a_{ij}p_j = -a_i. \qquad (7.32)$$

Координаты центра p_j обязаны удовлетворять системе (7.32). Для того чтобы центр существовал, необходимо и достаточно, чтобы эта система имела решение, т.е. чтобы ее определитель (он будет второго порядка для кривой и третьего - для поверхности) был отличен от нуля.

Микромодуль 17.
Индивидуальные тестовые задачи

1. Выяснить, образует ли линейное пространство

а) совокупность всех векторов (напомним, что в начале пункта мы условились считать все векторы выходящими из начала координат) пространства L_2 (см. пример *б)*), за исключением векторов, параллельных некоторой заданной прямой;

б) совокупность всех векторов пространства L_2, концы которых лежат на заданной прямой;

в) совокупность всех векторов пространства L_3 (см. пример *в)*), концы которых не лежат на данной прямой.

2. Выяснить, образует ли линейное пространство совокупность векторов пространства L_n (см. пример *д)),* для которых

а) $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$;

б) $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$;

в) $x_1 = x_3$;

г) $x_2 = x_4=...$;

д) первая компонента - целое число;
е) x_1 или x_2 равен нулю;
3. Образует ли линейное пространство совокупность многочленов, степень которых равна *п* (ср. с примером *е)*)?
4. Пусть R^+ совокупность додатних действительных чисел. Под «сложением» двух чисел будем понимать их обычное умножение, а под «умножением» элемента $p \in R^+$ на действительное число λ будем понимать обычное возведение числа p в степень λ. Образует ли множество R^+ с таким образом введенными на нем операциями линейное пространство? Чему равен «противоположный» элемент для $p\in R^+$? Какой элемент служит «нулем» этого пространства?
5. Доказать что совокупность решений линейного однородного дифференциального уравнения

$$y^{(n)}+ p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y' +p_n(x)y=0$$

образует линейное пространство.

Линейным подпространством линейного пространства называется непустое (т.е. содержащее хотя бы один вектор) подмножество L' векторов из L, которые сами образуют линейное пространство относительно уже введенных в L операций сложения и умножения на число, т.е. такое подмножество L', для которого из того, что $\boldsymbol{x} \in L'$, $\boldsymbol{y}\in L'$, следует, что $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in L'$, $\lambda\boldsymbol{x}\in L'$. Простейшими подпространствами пространства L является подпространство, которое состоит из одного нулевого элемента (нулевое подпространство), и все пространство L. Эти подпространства называются *несобственными.*

Суммой двух линейных подпространств L' и L'' линейного пространства L называется совокупность $M=L'+L''$ всех векторов из L, каждый из которых представляется в виде $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'+\boldsymbol{x}''$, где $\boldsymbol{x}'\in L'$, $\boldsymbol{x}''\in L''$.

Пересечением двух линейных подпространств L' и L'' линейного пространства L называется совокупность $N = L'\cap L''$ всех векторов из L, каждый из которых принадлежит как L', так и L''.
6. Доказать, что сумма и пересечение двух линейных подпространств линейного пространства L сами являются линейными подпространствами L.
7. Перечислить все типы подпространств пространства L_3.
8. Какие из совокупностей векторов задачи 2 образуют подпространство L_n?
9. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — два линейно независимых вектора пространства L_2 (см. пример б) п. 5.1).
1) Определить, при каком значении α следующие пары векторов линейно зависимы, (колинеарны):

а) $\alpha\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$;
б) $(\alpha+1)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $2\boldsymbol{b}$;
в) $\alpha\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$.
2) Найти α и β, если
а) $3\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}=\alpha\boldsymbol{a}+(2\beta+1)\boldsymbol{b}$;
б) $(2\alpha-\beta-1)\boldsymbol{a}-(3\alpha+\beta+10)\boldsymbol{b}=0$.

10. Пусть ***a***, ***b***, ***c*** - три линейно независимых вектора пространства L_3 (см. пример в) п. 7.1).
а) При каком значении α векторы
$\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}+\alpha b-\boldsymbol{c}$,
линейно зависимы (колинеарны)?
б) При каком значении α векторы
$\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{y}=\alpha\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$
линейно зависимы (компланарные)?

11. Доказать, что в пространстве $C[a, b]$ (см. пример же) п. 7.1) следующие функции линейно зависимы:
а) $\varphi_1(t)=\sin^2 t$, $\varphi_2(t)=\cos^2 t$, $\varphi_3(t)=1$;
б) $\varphi_1(t)=\sin^2 t$, $\varphi_2(t)=\cos^2 t$, $\varphi_3(t)=t$, $\varphi_4(t)=3$, $\varphi_5(t)=e^t$
в) $\varphi_1(t)=\sqrt{t}$, $\varphi_2(t)=1/t^2$, $\varphi_3(t)=0$, $\varphi_4(t)=t^5$.

12. Доказать, что в пространстве $C\,[0, 2]$ функции

$$\varphi_1(t)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad 0\le t<1,\\ (t-1)^4, & \text{если} \quad 1\le t\le 2;\end{cases}$$

$$\varphi_2(t)=\begin{cases}(t-1)^4, & \text{если} \quad 0\le t<1,\\ 0, & \text{если} \quad 1\le t\le 2,\end{cases}$$

линейно независимы.

13. Доказать, что в пространстве многочленов степени, не большей n (см. пример *е)* п. 7.1), многочлены линейно независимы.

14. Доказать, что в пространстве $C[a, b]$ (см. пример *ж)* п. 7.1), существует любое число линейно независимых векторов.

15. Доказать линейную зависимость векторов $\boldsymbol{a}_1=\{0, 1, 1\}$, $\boldsymbol{a}_2=\{1, 1, 2\}$, $\boldsymbol{a}_3=\{1, 2, 3\}$ пространства L_3.

16. Доказать, что совокупность векторов будет линейно зависимой, если она содержит
а) два равных вектора,
б) два коллинеарных вектора.

17. Доказать, что если векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ линейно независимы, то и векторы $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_1$ линейно независимы.

18. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a}_1=\{1, 1, 1\}$, $\boldsymbol{a}_2=\{1, 1, 2\}$ и

$\boldsymbol{a}_2=\{1,\ 2,\ 3\}$ образуют базис пространства L_3, и записать в этом базисе вектор $\boldsymbol{x}=\{6, 9, 14\}$.

19. Найти размерность и базис пространства многочленов степени, не превосходящие n (см. пример *е)* п. 7.1 и упр. 5 п. 7.2). Чему равны координаты произвольного многочлена в найденном базисе?

20. Какая размерность пространства $C\,[a,\ b]$ (см. пример *ж)* п. 7.1 и упр. 6 п. 7.2)?

21. Найти размерность и базис пространства, рассмотренного в задаче 4 п. 7.1.

22. Доказать, что если размерность подпространства L'_n совпадает с размерностью пространства L_n, то $L_n \equiv L'_n$.

23. Доказать, что сумма размерностей двух линейных подпространств L' и L'' пространства L_n равна размерности суммы этих подпространств, сложенной с размерностью их пересечения.

24. Доказать, что если размерность суммы двух линейных подпространств L' и L'' на единицу больше размерности их пересечения, то сумма совпадает с одним из этих подпространств, а пересечение - с другим.

25. Доказать, что если два подпространств L' и L'' пространства L имеют общим лишь нулевой вектор, то сумма их розмерностей не превосходит размерности L.

26. Что представляет собой пересечение и сумма двух двумерных подпространств пространства L_3?

Линейным подпространством L' пространства L_n, *определенным векторами* $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_m$, называется подпространство наименьшей размерности, содержащее эти векторы.

27. *а)* Найти размерность s суммы и размерность d пересечения линейных подпространств L' и L'' пространства L_4, определяемых векторами

L': $\boldsymbol{a}_1=\{1, 1, 1, 1\}$, $\boldsymbol{a}_2=\{1, -1, 1, -1\}$, $\boldsymbol{a}_3=\{1, 3, 1, 3\}$;
L'': $\boldsymbol{b}_1=\{1, 2, 0, 2\}$, $\boldsymbol{b}_2=\{1, 2, 1, 2\}$, $\boldsymbol{b}_3=\{3, 1, 3, 1\}$.

б) Найти базисы суммы и пересечение линейных подпространств L' и L'' пространства L_4 определяемых векторами

L': $\boldsymbol{a}_1=\{1, 2, 1, -2\}$, $\boldsymbol{a}_2=\{2, 3, 1, 0\}$, $\boldsymbol{a}_3=\{1, 2, 2, -3\}$;
L'': $\boldsymbol{b}_1=\{1, 1, 1, 1\}$, $\boldsymbol{b}_2=\{1, 0, 1, -1\}$, $\boldsymbol{b}_3=\{1, 3, 0, -4\}$.

28. Найти какой-нибудь базис и определить размерность следующих подпространств пространства L_n:

а) совокупность n-мерных векторов, в которых первая и вторая координаты равны;

б) совокупности n-мерных векторов, в которых координаты с четными номерами равны между собой;

в) совокупности n-мерных векторов вида $\{\alpha, \beta, \alpha, \beta, ...\}$;

г) совокупности n-мерных векторов $\{x_1 ..., x_n\}$, для которых $x_1+x_2 + ...+x_n =0$.

29. Какие решения линейного однородного дифференциального уравнения образуют базис линейного пространства решений этого уравнения (см. упр. 5 п. 7.1)? Какова размерность этого пространства? Какие числа служат координатами произвольного решения этого уравнения в найденном базисе?

30. Доказать, что система уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right\}$$

эквивалентна одному векторному уравнению

$$\boldsymbol{a}_1 x_1 + \boldsymbol{a}_2 x_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_n x_n = \boldsymbol{b},$$

где $\boldsymbol{a}_i = \{a_{1i}, ..., a_{mi}\}$ (i=l..... n), $\boldsymbol{b} = \{b_1, ..., b_m\}$— векторы пространства L_m.

31. Используя скалярное произведение, доказать следующие теоремы элементарной геометрии:

а) теорему косинусов для треугольника;

б) теорему о сумме квадратов диагоналей параллелограмма;

в) теорему о перпендикулярности диагоналей ромба;

г) теорему о равенстве диагоналей прямоугольника;

д) теорему Пифагора;

е) длина медианы m_a треугольника со сторонами a, b, c равна

$$m_a=\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}};$$

ж) если две медианы треугольника равны, то треугольник - равнобедренный;

з) что сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов боковых сторон, сложенной с удвоенным произведением оснований;

и) что противоположные ребра правильного тетраэдра ортогональны.

32. Доказать неравенство Коши-Буняковського

$$(\boldsymbol{xy})^2 \leq (\boldsymbol{xx})(\boldsymbol{yy})$$

и записать его в координатной форме.

33. Для трех векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ доказать неравенства треугольника

$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|,$$
$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| \geqslant ||\boldsymbol{x}|-|\boldsymbol{y}||.$$

Скалярное произведение можно определить для любого линейного пространства. Будем говорить, что *в L задано скалярное произведение, если каждой паре векторов* ***x, y*** $\in L$ *поставлено в соответствие действительное число* ***xy****, так что*

1) ***xy*** =***yx***;
2) *(λ**x**)**y*** = λ *(**xy**), где* λ *-любое действительное число;*
3) *$(x_1 + x_2)$**y**=x_1**y**+x_2**y**,*
4) ***xx*** ≥**0**, *причем равенство нулю имеет место лишь для* ***x*** = **0**.

Линейное пространство *L,* в котором определено скалярное произведение, будем называть *евклидовым пространством* и обозначать *E*. Дадим теперь определение длины вектора, угла между двумя векторами и ортогональности векторов в евклидовом пространстве *E,* которые аналогичны соответствующим понятием в трехмерном евклидовом пространстве E_3, рассмотренным в п. 7.4.

Длиной вектора ***x*** ∈ *E* называется величина

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\boldsymbol{xx}}.$$

Углом между векторами ***x, y*** $\in E$ называется угол φ (0°≤φ≤180), косинус которого равен

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{xy}}{|\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|}.$$

Векторы ***x*** и ***y****,* для которых

$$\boldsymbol{xy} = \boldsymbol{0},$$

называются *ортогональными.*

34. Можно ли в L_3 определить скалярное произведение двух векторов как

а) произведение их длин?

б) произведение их длин на квадрат косинуса угла между ними?

в) утроенное обычное скалярное произведение?

35. Доказать, что в пространстве L_n (см. пример *д)* п. 7.1) скалярное произведение двух векторов ***x*** = $\{x_1, ..., x_n\}$ и ***y*** = $\{y_1, ..., y_n\}$ можно определить формулой

$$\boldsymbol{xy} = x_1y_1 + ... + x_ny_n.$$

36. Доказать, что в пространстве $C[a, b]$ (см. пример *же)* п. 7.1) скалярное произведение функций $f(t)$ и $g(t)$ можно определить формулой

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt.$$

Как будет выражаться длина вектора $f(t)$?

37. Доказать, что скалярное произведение любых двух векторов $\boldsymbol{x} = \{x_1, ..., x_n\}$ и $\boldsymbol{y} = \{y_1, ..., y_n\}$ n-мерного евклидова пространства E_n тогда и только тогда выражается равенством

$$\boldsymbol{xy} = x_1y_1 + ... + x_ny_n,$$

когда базис, в котором задані векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, является ортонормированным.

38. Доказать, что в пространстве E, равно как и в E_3, имеет место неравенство Коши-Буняковського

$$(\boldsymbol{xy})^2 \le (\boldsymbol{xx})(\boldsymbol{yy}).$$

Показать, что равенство справедливая только для колинеарных векторов (см. задачу 2).

39. Записать неравенство Коши-Буняковського для векторов пространства E_n в координатной форме и для векторов пространства $C[a, b]$, в котором скалярное произведение определено, как в задаче 6.

40. Найти углы в треугольнике, образованном в пространстве $C[—1, 1]$ векторами $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t$, $x_3(t) = 1 - t$.

41. Доказать, что любые два вектора тригонометрической системы функций

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, ..., \cos nt, \sin nt, ...$$

пространства $C[-\pi, \pi]$ ортогональны.

42. Доказать, что попарно ортогональные ненулевые векторы $\boldsymbol{x_1}, ..., \boldsymbol{x_n}$ пространства E_n линейно независимы.

43. Если в пространстве E вектор $\boldsymbol{x}$ ортогонален векторам $\boldsymbol{y_1}, ..., \boldsymbol{y_k}$, то он ортогонален и к любой их линейной комбинации $c_1\boldsymbol{y_1} + ... + c_k\boldsymbol{y_k}$.

44. Доказать, что если векторы $\boldsymbol{x_1}, ..., \boldsymbol{x_n}$ пространства E_n попарно ортогональны, то

$$|\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} + ... + \boldsymbol{x_k}|^2 = |\boldsymbol{x}_1|^2 + |\boldsymbol{x}_2|^2 + ... + |\boldsymbol{x}_k|^2$$

(обобщенная теорема Пифагора, см. задачу 1д)).

45. Доказать, что для любых двух векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ пространства E

$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}| \le |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|,$$
$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \ge ||\boldsymbol{x}| - |\boldsymbol{y}||$$

(обобщенные неравенства треугольника, см. задачу 3).

46. Записать неравенства треугольника, которые получены в предыдущей задаче, для пространства $C\,[a,\ b]$, в котором скалярное произведение определено так, как указано в задаче 6.
47. Доказать, что для вектора $x \in E_n$ имеет место неравенство Бесселя

$$\sum_{i=1}^{k} (\text{Пр}_{e_i} x)^2 \leq xx,$$

где $k \leq n$ и $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис E_n. Доказать, что неравенство обращается в равенство (равенство Парсеваля) тогда и только тогда, когда $k = n$.
48. Пусть E_{n+1} — евклидово пространство, элементами которого служат многочлены степени, не превосходящей n, с действительными коэффициентами, и скалярное произведение многочленив $P(t)$ и $Q(t)$ определено формулой

$$(P,\ Q) = \int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\,dt.$$

а) Доказать, что, многочлены

$$P_0(t) = 1, \quad P_k(t) = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dt^k}[(t^2-1)^k], \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

(полиномы Лежандра) образуют ортогональный базис этого пространства.
б) Написать полиномы Лежандра для $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Убедиться, что степень $P_k(t)$ равна k, и написать разложение $P_k(t)$ по степеням t.
в) Вычислить длину $P_k(t)$.
г) Найти $P_k(1)$.
49. Параллелепипед построен на векторах $a,\ b,\ c$. Найти площади его диагональных сечений.
50. Выразить синус двугранного угла при ребре AB тетраэдра $OABC$ через векторы $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$.
51. Выразить высоты треугольника через радиусы-векторы r_1, r_2, r_3 его вершин.
52. Доказать, что сумма нормальных векторов к граням тетраэдра $OABC$, направленных вне тетраэдра и равных по модулю площадям соответствующих граней, равна нулю, а для площадей этих граней имеет место формула

$$S_4^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - 2S_1S_2\cos(S_1,\ S_2) - 2S_2S_3\cos(S_2,\ S_3) - 2S_3S_1\cos(S_3,\ S_1),$$

где (S_i, S_j) обозначает угол между гранями S_i и S_j . \
53. Пусть

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

— определитель третьего порядка и A_{ij}— алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в этом определителе. Доказать, что имеют место следующие соотношения:

а) $a = \frac{1}{3!} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} a_{ip} a_{jq} a_{kr}$;

б) $A_{ij} = \frac{1}{2!} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jpq} a_{kp} a_{lq}$;

в) $A_{ik} a_{kj} = \delta_{ij} a$.

54. Доказать тождество Лагранжа

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{ac} & \boldsymbol{ad} \\ \boldsymbol{bc} & \boldsymbol{bd} \end{vmatrix}.$$

55. Используя результат задачи 6, найти $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2$ и записать полученную формулу в координатной форме.

56. Доказать, что из равенства

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$$

следует колинеарность векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$, если $\boldsymbol{ab} \neq 0$, $\boldsymbol{bc} \neq 0$.

57. Доказать тождество Якоби

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}.$$

58. Через вершину трехгранного угла в каждой грани проворится прямая, перпендикулярная противоположному ребру. Доказать, что построенные три прямые компланарны. Ребра трехгранного угла предполагаются не перпендикулярными противоположным граням.

59. Дан четырехгранный угол $OABCD$ с прямыми плоскими углами AOB и COD. Доказать, что прямые $p = OBC\times OAD$ и $q = OAC\times OBD$ перпендикулярны.

60. Найти площадь основания треугольной пирамиды, зная длины ее боковых ребер a, b, c и плоские углы α, β, γ при вершине (α лежит против a и т.д.).

61. Вычислить смешанное произведение

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$$

и выяснить геометрическое смысл полученного результата.

62. Пусть $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ — три некомпланарных вектора. Как связаны между собой числа λ, μ, ν, если векторы $\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} + \mu\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}+\nu\boldsymbol{a}$ компланарны? Вывести из полученного результата прямую теорему Менелая

(произведение трех отношений, в которых произвольная прямая делит стороны треугольника, равна -1) и обратную теорему Менелая (если три точки, которые лежат на сторонах треугольника, делят их в отношениях, произведение которых равно -1, то эти три точки лежат на одной прямой).

63. Пользуясь смешанным произведением векторов, вывести формулы Крамера для решения системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными, записанной в векторной форме (см. задачу 31).

64. Используя формулу для двойного векторного произведения, доказать формулы:

а) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$;

б) $((\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}), (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}), (\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{f})) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$.

65. Доказать, что

а) $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$;

б) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2$,

и выяснить геометрический смысл этих формул.

66. Доказать формулу

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{ax} & \boldsymbol{ay} & \boldsymbol{az} \\ \boldsymbol{bx} & \boldsymbol{by} & \boldsymbol{bz} \\ \boldsymbol{cx} & \boldsymbol{cy} & \boldsymbol{cz} \end{vmatrix}.$$

67. Три векторы образуют попарно углы α, β, γ. Доказать, что необходимое и достаточное условие их компланарности выражается равенством

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\beta & 1 & \cos\alpha \\ \cos\gamma & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

68. Пусть в пространстве L_2 дано два ортонормированных базиса $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ и $\{\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}\}$. Написать выражение векторов одного базиса через векторы другого и формулы преобразования координат произвольного вектора при переходе от первого базиса ко второму, если

а) векторы второго базиса получены из векторов первого поворотом на угол α и перенумерацией базисных векторов;

б) $\boldsymbol{e}_{1'} = -\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_{2'} = \boldsymbol{e}_2$.

69. Написать матрицу Г перехода от ортонормированного базиса $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ пространства L_3 к другому ортонормированному базиса $\{\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}\}$, если

а) $\boldsymbol{e}_{1'}=\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_{2'}=\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_{3'}=\boldsymbol{e}_3$; б) $\boldsymbol{e}_{1'}=\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_{2'}=\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_{3'}=\boldsymbol{e}_2$.

70. Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если

а) поменять местами два вектора первого базиса?

б) поменять местами два вектора второго базиса?

в) записать векторы обеих базисов в обратном порядке?

71. Пусть в пространстве L_3 даны два правых ортонормированных базиса $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ и $\{\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}\}$. Расположение второго базиса относительно первого можно определить с помощью трех углов Ейлера, заданных следующим образом:

а) *Угол наклонения* θ - угол между векторами $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_{3'}$; он определяется по формуле

$$\cos\theta = \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_{3'}.$$

б) Угол φ — угол между векторами $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{u}$, где $\boldsymbol{u}$ — единичный вектор, который лежит на *линии узлов* — линии пересечения плоскостей $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ и $(\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'})$, причем $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_{3'}$ образуют правую тройку. Этот вектор $\boldsymbol{u}$ определяется формулой

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_{3'}}{\sin\theta} = \boldsymbol{e}_1\cos\varphi + \boldsymbol{e}_2\sin\varphi.$$

в) Угол ψ — угол между векторами $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{e}_{1'}$.

Найти выражение векторов второго базиса через векторы первого с помощью углов θ, φ, ψ.

72. Доказать, что матрицы

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

являются ортогональными.

Все сказанное в п. 7.3 о замене базиса в пространстве L_3 верно и для любого линейного пространства L_n. Соответствующие формулы для L_n получаются, если считать, что индексы i, j, k, i', j', k' принимают значение не 1, 2, 3., а 1, 2, ..., n.

73. Вектор $\boldsymbol{x}$ пространства L_n относительно ортонормированного базиса $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ имеет координаты $x_1, \dots, x_n$. Как выбрать в L_n новый базис, чтобы относительно него координатами вектора $\boldsymbol{x}$ стали числа 0, ..., 0, $|x|$?

74. Пусть $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ — базис пространства L_n и L_k — некоторое подпространство L_n размерности k. Доказать, что L_k может быть

задано как совокупность всех векторов $x \in L_n$, координаты x_i которых относительно базиса $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$ удовлетворяют системе уравнений вида

$$a_{ij}\, x_j = 0, \quad i, j = 1, ..., n.$$

75. В пространстве многочленов степени, не превосходящей n (см. пример *е)* п. 7.1), написать матрицу перехода от базиса $1, t, \dots, t^n$ к базису $1, (t-a), \dots, (t-a)^n$. Записать формулы преобразования координат произвольного многочлена при такой замене базиса.

76. Составить векторное и координатные уравнения плоскости,

а) которая проходит через две данные пересекающиеся прямые

$$r = r_1 + \lambda \boldsymbol{a}, \qquad r = r_1 + \mu \boldsymbol{b};$$

б) которая проходит через прямую $r = r_1 + \lambda \boldsymbol{a}$ и точку A_0 с радиусом-вектором $\boldsymbol{r}_0$.

77. Записать необходимые и достаточные условия параллельности и пересечение двух плоскостей

$$a_i^{(1)} x_i + b^{(1)} = 0,$$
$$a_i^{(2)} x_i + b^{(2)} = 0.$$

78. Найти расстояние между двумя параллельными плоскостями

$$a_i x_i + b = 0,$$
$$a_i x_i + b' = 0.$$

79. Записать уравнение плоскости, которая параллельна плоскостям

$$a_i x_i + b = 0,$$
$$a_i x_i + b' = 0.$$

и которая проходит посредине между ними.

80. Написать уравнение пучка плоскостей, определяемого плоскостями

$$a_i^{(1)} x_i + b^{(1)} = 0,$$
$$a_i^{(2)} x_i + b^{(2)} = 0. \tag{7.33}$$

81. В пучке плоскостей, определяемом плоскостями (7.33), найти плоскость,

а) которая проходит через точку A_0 с координатами x^0_i;

б) перпендикулярную плоскости

$$a_i^{(3)} x_i + b^{(3)} = 0.$$

82. Найти угол между плоскостями (7.33). В каком случае плоскости ортогональны?

83. Написать уравнение плоскостей, которые принадлежат пучку (7.33) и делят пополам угол между определяющими этот пучок плоскостями.

84. Найти координаты основания перпендикуляра, опущенного из точки A_0 (x^0_u) на плоскость

$$a_i x_i + b = 0.$$

85. Найти площадь треугольника с вершинами в точках A (x_i), B (y_i), C(z_i).

90. Найти объем тетраэдра с вершинами в точках A (x_i), B (y_i), C(z_i), D(u_i).

86. Найти расстояние от точки M, определяемой радиусом-вектором $\boldsymbol{y}$, до прямой

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{a}.$$

87. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \lambda \boldsymbol{a},$$
$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2 + \mu \boldsymbol{a}.$$

88. Даны две скрещивающиеся прямые

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \lambda \boldsymbol{a}_1,$$
$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2 + \mu \boldsymbol{a}_2.$$

Найти

а) угол между этими прямыми;

б) кратчайшее расстояние между ними.

Микромодуль 18.
Полилинейные формы и тензоры

7.8. Монолинейные формы

1. В предыдущем микромодуле мы рассмотрели основные операции векторной алгебры. Теперь мы будем изучать простейшие скалярные функции одного или нескольких векторных аргументов.

Говорят, что *в линейному пространстве L задана скалярная функция* $\varphi = \varphi(\boldsymbol{x})$ *векторного аргумента* $\boldsymbol{x}$, *если каждому вектору* $\boldsymbol{x}$ *пространства L поставлено в соответствие некоторое число* φ. Эта функция называется *монолинейной (линейной) функцией,* или *монолинейной (линейной) формой,* если она обладает следующими двумя свойствами:

1) $\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{y})$;

2) $\varphi(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda\varphi(\boldsymbol{x})$.

Рассмотрим некоторые примеры монолинейных функций.

а) Обозначим через Пр$_l$***x*** величину проекции вектора ***x*** на ось *l*. Пр$_l$***x*** *является монолинейной формой вектора* ***x****,* так как из аналитической геометрии известно, что

$$Пр_l\,(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = Пр_l\boldsymbol{x} + Пр_l\boldsymbol{y},\;\; Пр_l\,(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda Пр_l\boldsymbol{x}.$$

б) Пусть ***a*** - постоянный, а ***x*** -переменный векторы пространства *L*. Тогда их скалярное произведение $\varphi=\boldsymbol{ax}$ является монолинейной формой вектора ***x***. В самом деле, в силу свойств скалярного произведения векторов (см. микромодуль 10, п. 7.4)

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{ax}+\boldsymbol{ay} \;\text{ и }\; \boldsymbol{a}(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda(\boldsymbol{ax}).$$

в) Так как координата x_i вектора ***x*** пространстве L_3 относительно ортонормированного базиса $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ может быть представлена в виде $x_i = \boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{x}$, то она также является монолинейной формой вектора ***x***.

г) Пусть ***a*** и ***b*** — два неколлинеарных вектора пространства L_3. Тогда смешанное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x})$ является монолинейной формой вектора ***x***, так как в силу свойств смешанного произведения

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) \;\text{ и }\; (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}).$$

Найдем теперь выражение монолинейной формы $\varphi=\varphi(\boldsymbol{x})$ в ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Так как

$$\boldsymbol{x} = x_i\,\boldsymbol{e}_i$$

и функция φ монолинейна, то

$$\varphi\,(\boldsymbol{x}) = \varphi\,(x_i\,\boldsymbol{e}_i) = x_i\,\varphi\,(\boldsymbol{e}_i).$$

Обозначим числа $\varphi(\boldsymbol{e}_i)$ буквами a_i:

$$\varphi(\boldsymbol{e}_i) = a_i,$$

тогда монолинейная форма φ запишется в виде

$$\varphi\,(\boldsymbol{x}) = a_i\,x_i. \qquad (7.34)$$

Это выражение представляет собой однородный многочлен первой степени от переменных x_i, поэтому монолинейная функция и называется монолинейной формой. Коэффициенты a_i в этом выражении зависят от выбора базиса.

2. Посмотрим, как преобразуются коэффициенты монолинейной формы $\varphi=\varphi(\boldsymbol{x})$ при переходе от ортонормированного базиса $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ к новому ортонормированному базису $\{\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}\}$. При таком преобразовании

$$\boldsymbol{e}_{i'}=\gamma_{i'i}\,\boldsymbol{e}_i,$$

где $\Gamma = (\gamma_{i'i})$ - матрица перехода от старого базиса к новому. В новом базисе форма φ запишется в виде

$$\varphi= a_{i'}\,x_{i'},$$

где $x_{i'}$ - новые координаты вектора ***x***, а коэффициенты $a_{i'}$ вычисляются по формулам

$$a_{i'} = \varphi(\boldsymbol{e}_{i'}) = \varphi(\gamma_{i'}{}^{i}\boldsymbol{e}_i) = \gamma_{i'}{}^{i}\varphi(\boldsymbol{e}_i) = \gamma_{i'}{}^{i}a_i.$$

Следовательно, коэффициенты монолинейной формы φ при переходе от старого базиса к новому изменяются по закону

$$a_{i'} = \gamma_{i'}{}^{i}a_i.$$

Но, сравнивая эти формулы с формулами (7.11), мы видим, что закон изменения коэффициентов монолинейной формы при переходе к новому базису в точности совпадает с законом изменения координат вектора. Теперь легко видеть, что

$$a_i\, \boldsymbol{e}_i = a_{i'}\, \boldsymbol{e}_{i'};$$

и поэтому коэффициенты a_i монолинейной формы φ являются координатами некоторого вектора

$$\boldsymbol{a} = a_i\, \boldsymbol{e}_i.$$

Формула (7.34) показывает, что сама *монолинейная форма* φ=φ (***x***) *всегда может быть записана в виде скалярного произведения векторов* ***a*** *и* ***x****:*

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ax}.$$

Выясним теперь геометрический смысл вектора ***a***. Для этого рассмотрим поверхности уровня монолинейной формы φ. Эти поверхности определяются уравнением φ = *c* или

$$\boldsymbol{ax} = c.$$

Но это уравнение есть уравнения семейства параллельных плоскостей, для которых вектор ***a*** является нормальным вектором. Следовательно, вектор ***a*** — это общий нормальный вектор к плоскостям, являющимся поверхностями уровня формы φ.

7.9. Билинейные формы

1. Скалярная функция = φ (***x, y***) двух векторных аргументов ***x*** и ***y*** называется *билинейной функцией,* или *билинейной формой,* если она линейна по каждому своему аргументу, т.е. если

1) $\varphi(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{y}) + \varphi(\boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{y});$
2) $\varphi(\lambda\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \lambda\varphi(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y});$
3) $\varphi(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = \varphi(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}_1) + \varphi(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}_2);$
4) $\varphi(\boldsymbol{x},\ \lambda\boldsymbol{y}) = \lambda\varphi(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}).$

Приведем три примера билинейных форм.

а) Скалярное произведение ***xy*** векторов ***x*** и ***y*** является билинейной формой, так как оно обладает всеми вышеперечисленными свойствами.

б) Пусть *а* — постоянный вектор, а ***x*** и ***y*** — переменные векторы. Смешанное произведение ***(a, x, y)****,* как легко проверить, также является билинейной формой.

в) Пусть φ(***x)*** и ψ(***y)***— линейные формы переменных векторов ***x*** и ***y*** . Их произведение ***f(x, y)*** = φ***(x)*** ψ***(y)*** является билинейной формой, так как

$$f(x_1+x_2, y)=\varphi(x_1+x_2)\psi(y)=\varphi(x_1)\psi(y)+\varphi(x_2)\psi(y)=$$
$$=f(x_1, y)+f(x_2, y),$$
$$f(\lambda x, y)=\varphi(\lambda x)\psi(y)=\lambda\varphi(x)\psi(y)=\lambda f(x, y),$$

и аналогично для второго аргумента.

2. Отнесем теперь линейное пространство L_3 к прямоугольной декартовой системе координат с базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$ и найдем выражение билинейной формы φ = φ***(x,y)*** в этой системе координат. Мы имеем в ней

$$x = x_i e_i \quad y=y_j e_j,$$

и так как функция φ линійна относительно обеих своих переменных, то

$$\varphi(x, y)=\varphi(x_i e_i, y_j e_j)=x_i y_j \varphi(e_i, e_j).$$

Обозначим значение билинейной формы φ от базисных векторов через a_{ij}.

$$\varphi(e_i, e_j) = a_{ij}.$$

Билинейная форма φ теперь запишется в виде

$$\varphi= a_{ij}x_i y_j$$

или, подробнее,

$$\varphi=a_{11}x_1y_1+a_{12}x_1y_2+a_{13}x_1y_3+$$
$$+a_{21}x_2y_1+a_{22}x_2y_2+a_{23}x_2y_3+a_{31}x_3y_1+a_{32}x_3y_2+a_{33}x_3y_3.$$

Это выражение линейно относительно двух рядов переменных (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3).

Коэффициенты билинейной формы могут быть записаны в виде таблицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

которая, как мы знаем, называется квадратной матрицей третьего порядка. Будем называть эту матрицу *матрицей билинейной формы* φ.

Таким образом, *в пространстве L_3 билинейной форме* φ *соответствует в каждом базисе определенная матрица третьего порядка.*

Посмотрим, как запишутся в координатной форме рассмотренные выше билинейные формы, и найдем их матрицы.

а) Билинейная форма $\boldsymbol{xy}$ в ортонормированном базисе записывается в виде

$$\boldsymbol{xy} = x_1y_1 + x_2y_2+x_3y_3.$$

Следовательно, ее матрица выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij}).$$

б) Рассмотрим билинейную форму $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Вспомнив, как выражается смешанное произведение векторов в координатной форме, получим

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \varepsilon_{kij}a_kx_iy_j$$

(здесь, по сравнению с п. 7.8, изменено обозначение индексов суммирования). Поэтому матрица коэффициентов этой формы имеет вид

$$(\varepsilon_{kij}a_k) = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

в) В ортонормированном базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ монолинейные формы $\varphi(\boldsymbol{x})$ и $\psi(\boldsymbol{y})$ можно (см. 7.8) записать в виде

$$\varphi = a_ix_i, \quad \psi = b_jy_j.$$

Билинейная форма $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\varphi(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{y})$ теперь имеет вид

$$f = (a_ix_i)(b_jy_j) = a_ib_jx_iy_j.$$

Матрица этой билинейной формы будет выглядеть так:

$$A = (a_ib_j) = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}.$$

3. Рассмотрим, как преобразуются коэффициенты билинейной формы $\varphi=\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ при преобразовании базиса. В новом базисе $(\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'})$ эта билинейная форма запишется в виде

$$\varphi = a_{i'j'}x_{i'}y_{j'},$$

где

$$a_{i'j'} = \varphi(\boldsymbol{e}_{i'}, \boldsymbol{e}_{j'}).$$

Но при переходе к новому базису

$$\boldsymbol{e}_{i'}=\gamma_{i'i}\,\boldsymbol{e}_i$$

Поэтому, используя основные свойства билинейной формы, получим

$$a_{i'j'}=\varphi(\gamma_{i'i}e_i,\ \gamma_{j'j}e_j)=\gamma_{i'i}\gamma_{j'j}\varphi(e_i,\ e_j)=\gamma_{i'i}\gamma_{j'j}a_{ij}.$$

Следовательно, при переходе к новому базису коэффициенты билинейной формы преобразубтся по закону

$$a_{i'j'}=\gamma_{i'i}\gamma_{j'j}a_{ij}.$$

Сравнивая эти формулы с формулами преобразования коэффициентов монолинейной формы, мы видим, что обе эти группы формул построены аналогичным образом.

Докажем теперь обратное: *если элементы a_{ij} матрицы А при преобразовании базиса пространства L_3 преобразуются по закону* (7.34)*, то этой матрице отвечает билинейная форма.*

Пусть $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ и $\{\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}\}$ - два базиса в пространстве L_3 и $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ — два его произвольных вектора. Тогда

$$\boldsymbol{x}=x_i\boldsymbol{e}_i=x_{i'}\boldsymbol{e}_{i'},\quad \boldsymbol{y}=y_j\boldsymbol{e}_j=y_{j'}\boldsymbol{e}_{j'}.$$

Рассмотрим билинейное выражение $\varphi=a_{ij}x_iy_j$. Чтобы доказать, что это выражение действительно является билинейной формой в пространстве L_3, следует доказать, что оно не меняется при преобразовании базиса, т.е. что его величина зависит только от выбора векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, но не зависит от выбора базиса. После преобразования базиса это выражение перейдет в выражение $\varphi'=a_{i'j'}x_{i'}y_{j'}$. Следовательно, мы должны доказать, что $\varphi=\varphi'$. В самом деле, из соотношений (7.6) и (7.12) п. 7.6 микромодуля 10 следует, что

$$\varphi'=a_{i'j'}x_{i'}y_{j'}=\gamma_{i'i}\gamma_{j'j}a_{ij}\gamma_{i'k}x_k\gamma_{j'l}y_l=\gamma_{i'i}\gamma_{i'k}\gamma_{j'j}\gamma_{j'l}a_{ij}x_ky_l.$$

Но в силу свойств ортогональной матрицы (см. формулы (7.11))

$$\gamma_{i'i}\gamma_{i'k}=\delta_{ik},\quad \gamma_{j'j}\gamma_{j'l}=\delta_{jl}.$$

Поэтому

$$\varphi'=\delta_{ik}\delta_{jl}a_{ij}x_ky_l.$$

Но

$$\delta_{ik}x_k=x_i,\quad \delta_{jl}y_l=y_j,$$

вследствие чего

$$\varphi'=a_{ij}x_iy_j=\varphi,$$

что и требовалось доказать.

7.10. Полилинейные формы. Общее определение тензора

1. Рассмотрим теперь в линейному пространстве L_3 скалярную функцию от *p* векторных аргументов — функцию $\varphi=\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \ldots, \boldsymbol{w})$. Эта функция называется *полилинейной функцией,* или *полилинейной формой,* если она линейна по каждому из своих аргументов, т.е. если для каждого из аргументов выполнены условия вида

$$1)\ \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}_1+\boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{w})= \\ =\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{w})+\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{w});$$

$$2)\ \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \lambda\boldsymbol{z}, \ldots, \boldsymbol{w})=\lambda\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \ldots, \boldsymbol{w}).$$

Число аргументов *p* называется *степенью* полилинейной формы φ. Форма φ называется также *p-линейной формой.*

Рассмотренные в п. 7.8 монолинейнйе формы являются частным случаем полилинейных форм. Они будут формами первой степени, 1-линейными формами. Билинейные формы, рассмотренные в предыдущем пункте, также является частным случаем полилинейных форм. Степень билинейных форм равна двум. Рассмотрим еще некоторые примеры полилинейных форм степени большей чем два.

а) Смешанное произведение векторов $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ является трехлинейной формой, так как для каждого из ее аргументов будут выполнены свойства 1) и 2).

б) Произведение трех линейных форм $\alpha(\boldsymbol{x})$, $\beta(\boldsymbol{y})$ и $\gamma(\boldsymbol{z})$ представляет собой трехлинейную форму. В самом деле, если

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})=\alpha(\boldsymbol{x})\beta(\boldsymbol{y})\gamma(\boldsymbol{z}),$$

это

$$\varphi(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})=\alpha(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)\beta(\boldsymbol{y})\gamma(\boldsymbol{z})= \\ =[\alpha(\boldsymbol{x}_1)+\alpha(\boldsymbol{x}_2)]\beta(\boldsymbol{y})\gamma(\boldsymbol{z})=\alpha(\boldsymbol{x}_1)\beta(\boldsymbol{y})\gamma(\boldsymbol{z})+ \\ +\alpha(\boldsymbol{x}_2)\beta(\boldsymbol{y})\gamma(\boldsymbol{z})=\varphi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})+\varphi(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}),$$

$$\varphi(\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})=\alpha(\lambda\boldsymbol{x})\beta(\boldsymbol{y})\gamma(\boldsymbol{z})=\lambda\alpha(\boldsymbol{x})\beta(\boldsymbol{y})\gamma(\boldsymbol{z})=\lambda\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}),$$

и аналогично для других аргументов.

2. Рассмотрим, как запишется полилинейная форма $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \ldots, \boldsymbol{w})$, зависящая от *p* векторных аргументов, в координатном виде. Для определенности рассмотрим трехлинейную форму $\varphi=\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$. Каждый из векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ может быть разложен по базису $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$:

$$\boldsymbol{x} = x_i\boldsymbol{e}_i \quad \boldsymbol{y}=y_j\boldsymbol{e}_j, \quad z= z_k\boldsymbol{e}_k;$$

здесь обозначения для индексов суммирования мы выбираем различными только для удобства дальнейших изложений. В силу линейности формы φ по всем аргументам, получим

$$\varphi\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \varphi\,(x_i\boldsymbol{e}_{ji,}\ y_j\boldsymbol{e}_j,\ z_k\boldsymbol{e}_k) = x_iy_jz_k\,\varphi\,(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_{j,}\ \boldsymbol{e}_k),$$

где $\varphi\,(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_{j,}\ \boldsymbol{e}_k)$ — значение формы φ от векторов базиса. Обозначим эти значения через a_{ijk}:

$$\varphi\,(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_{j,}\ \boldsymbol{e}_k)= a_{ijk}.$$

Тогда форма φ запишется в виде

$$\varphi\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = a_{ijk}x_iy_j\,z_k.$$

Таким образом, трилинейная форма записывается как однородный многочлен третьей степени, линейный относительно трех рядов переменных $(x_{1,}\ x_2,\ x_3)$, $(y_1,\ y_2,\ y_3)$ и $(z_{1,}\ z_2,\ z_3)$. Этот многочлен содержит $3^3 = 27$ слагаемых и столько же коэффициентов a_{ijk}. Совокупность этих коэффициентов можно вообразить себе в виде кубичной матрицы третьего порядка.

Точно также для 4-линейной формы $\varphi(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z},\ \boldsymbol{u})$, зависящей от четырех векторных аргументов, получим

$$\varphi = a_{ijkl}x_iy_j\,z_ku_l,$$

где

$$a_{ijkl} =\varphi(\ \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_{j,}\ \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l).$$

Многочлен, при помощи которого записывается эта форма, имеет 3^4 слагаемых и столько же коэффициентов a_{ijkl}.

Аналогично *р-линейная* форма $\varphi = \varphi\ (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z},\ ...,\ \boldsymbol{w})$, зависящая от p аргументов, запишется в базисе $\{\boldsymbol{e}_{1,}\ \boldsymbol{e}_{2,}\ \boldsymbol{e}_3\}$ в виде

$$\varphi = a_{ijk\ldots\ m}x_iy_jz_k \ldots w_m,$$

где

$$a_{ijk\ldots\ m}= \varphi\ (\boldsymbol{e}_{i,}\ \boldsymbol{e}_{j,}\ \boldsymbol{e}_k, ..., \boldsymbol{e}_m). \qquad (7.36)$$

Коэффициенты $a_{ijk\ldots m}$ этой формы имеют p индексов, каждый из которых может принимать 3 значения. Всего такая полилинейная форма имеет 3^p коэффициентов.

Рассмотренная в первом примере трехлинейная форма $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})$ в координатной форме записывается так:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})= \varepsilon_{ijk}x_iy_jz_k.$$

Совокупность коэффициентов этой трехлинейной формы представляет собой кососимметричный символ Кронекера.

Если линейные формы $\alpha(\boldsymbol{x})$, $\beta(\boldsymbol{y})$ и $\gamma(\boldsymbol{z})$ второго примера в базисе $\{\boldsymbol{e}_{1,}\ \boldsymbol{e}_{2,}\ \boldsymbol{e}_3\}$ записываются в виде

$$\alpha\ (\boldsymbol{x}) = a_ix_i \qquad \beta\ (\boldsymbol{y}) = b_jx_j \qquad \gamma\ (\boldsymbol{z}) = c_kx_k,$$

то трехлинейная форма $\varphi = \alpha(\boldsymbol{x})$, $\beta(\boldsymbol{y})$ и $\gamma(\boldsymbol{z})$ будет выражаться так:

$$\varphi = (a_ib_jc_k)\ x_iy_jz_k,$$

а ее коэффициенты представятся в форме

$$a_{ijk} = a_i b_j c_k.$$

3. Введенные нами полилинейные формы определены независимо от выбора системы координат. Значение этих форм зависят только от значений их векторных аргументов, например, для формы φ=φ (***x, y, z)*** — только от значений векторов ***x, y, z,*** но не зависят от того, в каком базисе рассматриваются эти векторы. Следуя терминологии, введенной нами в п. 7.6, можно сказать, что полилинейные формы определены инвариантным способом.

Так как при переходе к новому базису координаты векторов меняются, то при этом будут меняться также и коэффициенты полилинейных форм (поскольку сама форма должна оставаться инвариантной). Совокупность коэффициентов инвариантной полилинейной формы представляет собой очень важный геометрический объект.

Определение. Геометрический (или физический) объект, который определяется совокупностью коэффициентов $a_{ijk...m}$ полилинейной формы φ(***x, y, z, ..., w),*** записанной в некотором ортонормированном базисе, называется *ортогональным тензором.* Сами числа $a_{ijk...m}$ называются *компонентами,* или *координатами,* этого тензора.

Так как в данной работе никаких других тензоров, кроме ортогональных, не рассматривается, то всюду дальше они называются просто тензорами. Будем говорить, что тензор $a_{ijk...m}$ определяется полилинейной формой φ(***x, y, z, ..., w).***

Коэффициенты $a_{ijk...m}$ формы φ степени *p* вычисляются, как мы видели, по формулам (7.36) и имеют *p* индексов. Поэтому тензор, соответствующий полилинейной форме степени *p,* называют тензором *валентности п.*

Если форма φ задана в пространстве L_3, то каждый из индексов тензора может принимать независимо от других индексов значения 1, 2 и 3. Поэтому тензор валентности *p* в трехмерном пространстве будет иметь 3^p компонент. На плоскости такой тензор будет иметь 2^p компонент, в линейном пространстве L_n — n^p компонент.

Таким образом, совокупность коэффициентов a_i монолинейной формы φ = φ (***x)*** представляет собой тензор валентности 1. А так как скалярное произведение произвольного постоянного вектора ***a*** на переменный вектор ***x*** представляет собой монолинейную форму, то совокупность координат a_i произвольного вектора ***a*** также представляет собой тензор валентности 1.

Точно так же совокупность коэффициентов a_{ij} билинейной формы φ =φ(***x, y),*** образующая матрицу $A = (a_{ij})$, представляет собой тензор. Этот тензор валентности 2. В частности, таким тензором будет совокупность симметричных символов Кронекера δ_{ij}, так как они являются коэффициентами билинейной формы $\varphi=\boldsymbol{xy}$. Этот тензор называется *единичным тензором.*

Еще один пример тензора представляет совокупность кососимметричных символов Кронекера ε_{ijk} — они являются коэффициентами трехлинейной формы $\varphi=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$. Валентность этого тензора равна трем. Тензор ε_{ijk} называется *дискриминантным тензором.*

Отметим еще, что скалярную величину, которая не зависит от выбора ортонормированного базиса пространства, называют *тензором нулевой валентности.* Тензор нулевой валентности можно рассматривать как единственный коэффициент линейной формы нулевой степени. Тензор нулевой валентности называют также *инвариантом* (т.е. неизменным), так как его единственная компонента не меняет своего значения при преобразованиях базиса.

Два тензора называются *равными,* если тождественно равны определяющие их полилинейные формы. Равные тензоры имеют одинаковую валентность, и их соответствующие компоненты попарно равны в любой системе координат. В самом деле, тождество

$$\varphi\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, ..., \boldsymbol{w}) = \psi\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z},..., \boldsymbol{w})$$

в координатной форме может быть записано в виде

$$a_{ijk\,...\,m}x_iy_jz_k \ldots w_m = b_{ijk\,...\,m}x_iy_jz_k \ldots w_m.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$a_{ijk\,...\,m} = b_{ijk\,...\,m}.$$

Тензор называется *нулевым,* если определяющая его полилинейная форма $\varphi = \varphi\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, ..., \boldsymbol{w})$ тождественно равна нулю. Все компоненты нулевого тензора равны нулю.

4. При переходе к новому базису координаты векторов, которые являются аргументами полилинейной формы, меняются по определенному закону, установленному нами в п. 7.6 (см. формулы (7.12). Поэтому коэффициенты полилинейной формы также будут изменяться совершенно определенным образом. Этот закон преобразования компонент тензора устанавливается в следующей теореме:

Теорема. *Для того чтобы совокупность величин $a_{ijk\,...\,m}$, зависящая от выбора базиса, была тензором, необходимо и достаточно, чтобы при переходе от ортонормованного базиса $\{\boldsymbol{e}_i\}$ к такому же базису $\{\boldsymbol{e}_{i'}\}$ она изменялась по закону*

$$a_{i'\,j'\,k'\,...\,m'} = \gamma_{i'i}\ \gamma_{j'j}\ \gamma_{k'k} \cdots \gamma_{m'm}\ a_{i\,j\,k\,...\,m}. \qquad (7.37)$$

Докажем сначала ***необходимость*** условия теоремы. Пусть $a_{ijk\,...\,m}$ — тензор. Тогда величины $a_{ijk...m}$ представляют совокупность коэффициентов полилинейной формы φ = φ ***(x, y, z, ..., w):***

$$a_{ijk\,...\,m} = \varphi(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k.....\boldsymbol{e}_m).$$

В новом базисе коэффициенты этой формы вычисляются по аналогичным формулам:

$$a_{i'\,j'\,k'\,...\,m'} = \varphi(\boldsymbol{e}_{i'}, \boldsymbol{e}_{j'}, \boldsymbol{e}_{k'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{m'}).$$

Но векторы $\boldsymbol{e}_{i'}$ нового базиса выражаются через векторы $\boldsymbol{e}_i$ старого по формулам

$$\boldsymbol{e}_{i'} = \gamma_{i'i}\boldsymbol{e}_i.$$

Поэтому

$$a_{i'\,j'\,k'\,...\,m'} = \varphi(\gamma_{i'i}\boldsymbol{e}_i, \gamma_{j'j}\boldsymbol{e}_j, \gamma_{k'k}\boldsymbol{e}_k, \ldots, \gamma_{m'm}\boldsymbol{e}_m).$$

И так как форма φ полилинейная, то

$$a_{i'\,j'\,k'\,...\,m'} = \gamma_{i'i}\gamma_{j'j}\gamma_{k'k}\ldots\gamma_{m'm}\varphi(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k, \ldots, \boldsymbol{e}_m).$$

Но в силу (7.36) эти равенства совпадают с доказываемыми соотношениями (7.37).

Перейдем к доказательству ***достаточности***. Пусть величины $a_{ijk\,...\,m}$ при переходе к новому базису преобразуются по формулам (7.37). Рассмотрим *p* векторов ***x, y, z, ..., w***. Их разложения по старому и новому базисам могут быть записаны в виде

$$\boldsymbol{x} = x_i\boldsymbol{e}_i = x_{i'}\boldsymbol{e}_{i'}, \quad \boldsymbol{y} = y_j\boldsymbol{e}_j = y_{j'}\boldsymbol{e}_{j'},$$
$$\boldsymbol{z} = z_k\boldsymbol{e}_k = z_{k'}\boldsymbol{e}_{k'}, \ \ldots, \ \boldsymbol{w} = w_m\boldsymbol{e}_m = w_{m'}\boldsymbol{e}_{m'}.$$

Чтобы доказать, что система величин $a_{ijk\,...\,m}$ образует тензор, нужно доказать, что полилинейное выражение

$$\varphi = a_{ijk...m}x_iy_jz_k\ldots w_m$$

является полилинейной формой, т.е. что оно зависит только от выбора векторов ***x, y, z, ...,, w*** и не зависит от выбора базиса. После преобразования базиса это выражение перейдет в

$$\varphi' = a_{i'\,j'\,k'\,...\,m'}\,x_{i'}\,y_{j'}\,z_{k'}\ldots w_{m'}.$$

Подставляя сюда значения коэффициентов $a_{ijk...m}$ из соотношения (7.37) и $x_{i'}$ из соотношений (7.12), а $x_{i'}y_{j'}z_{k'}...w_{m'}$ из аналогичных соотношений, мы получим

$$\varphi' = \gamma_{i'i}\gamma_{j'j}\gamma_{k'k}\ldots\gamma_{m'm}\,a_{ijk...m}\,\gamma_{i'p}\,x_p\gamma_{j'q}\,y_q\gamma_{k'r}\,z_r\ldots\gamma_{m's}w_s =$$
$$= (\gamma_{i'i}\gamma_{i'p})(\gamma_{j'j}\gamma_{j'q})(\gamma_{k'k}\gamma_{k'r})\ldots(\gamma_{m'm}\gamma_{m's})\,a_{ijk...m}\,x_p\,y_q\,z_r\ldots w_s.$$

Но в силу свойств ортогональных матриц

$$\gamma_{i'i}\gamma_{i'p} = \delta_{ip}, \ \gamma_{j'j}\gamma_{j'q} = \delta_{jq}, \ \ldots, \ \gamma_{m'm}\gamma_{m's} = \delta_{ms}.$$

Поэтому

$$\varphi' = a_{ijk\ldots m}\delta_{ip}x_p\delta_{jq}y_q\ldots\delta_{ms}w_s = a_{ijk\ldots m}x_iy_jz_k\ldots w_m = \varphi,$$

что и требовалось доказать.

7.11. Алгебраические операции над тензорами

1. Сложение тензоров. Пусть $\varphi=\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z},..., \boldsymbol{w})$ и $\psi= \psi((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z},..., \boldsymbol{w})$ — две полилинейные формы от тех самых векторных аргументов одной и той же степени *р*. Их суммой $\varphi + \psi$, как легко видеть, будет полилинейная форма той же степени *р*. *Суммой тензоров* $a_{ijk\ldots m}$ и $b_{ijk\ldots m}$ валентности *р*, определяемых полилинейными формами φ и ψ, назовем тензор $c_{ijk\ldots m}$, определяемый формой $\varphi+\psi$. Так как

$$\varphi+\psi=(a_{ijk\ldots m}+b_{ijk\ldots m})\,x_iy_jz_k\ldots w_m,$$

то компоненты тензора $c_{ijk\ldots m}$ связаны с компонентами тензоров $a_{ijk\ldots m}$ и $b_{ijk\ldots m}$ соотношениями

$$c_{ijk\ldots m}=a_{ijk\ldots m}+b_{ijk\ldots m}$$

2. Умножение тензора на действительное число. Произведение $\lambda\varphi$ полилинейной формы φ степени *р* на действительное число λ является полилинейной формой той же степени *р*. *Произведением тензора* $a_{ijk\ldots m}$ валентности *р*, определяемого формой φ, *на число* λ назовем тензор $b_{ijk\ldots m}$ той же валентности, определяемого формой $\lambda\varphi$. Так как

$$\lambda\varphi=(\lambda a_{ijk\ldots m})\,x_iy_jz_k\ldots w_m,$$

то

$$b_{ijk\ldots m}=\lambda a_{ijk\ldots m}.$$

Из сказанного выше следует, что совокупность полилинейных форм степени *р*, так же как и совокупность тензоров валентности *р*, образует линейное пространство. Размерность этого пространства будет равна $3^{p.}$ Такое пространство называют *р*-кратным тензорным произведением линейного пространства $L_{3.}$ Базисом этого пространства могут служить, например, 3^p *р-линейных* форм вида

$$\varphi_{ijk\ldots m}=x_iy_jz_k\ldots w_m.$$

3. Умножение тензоров. Пусть φ и ψ — две полилинейные формы соответственно степеней *р* и *q* от различных векторных аргументов. Тогда их произведение $\varphi\cdot\psi$ будет полилинейной формой степеня $p+q$. Например, если $\varphi=\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\ \boldsymbol{z})$ — трилинейная, а $\psi=\psi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ — билинейная форма, то их произведение $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\ \boldsymbol{z}) \cdot \psi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ будет полилинейной формой степени 5.

Формы φ и ψ определяют тензоры соответственно валентностей p и q. Назовем *произведением тензоров,* определяемых формами φ и ψ, тензор, определяемый их произведением φ·ψ. Так как форма φ·ψ имеет степень $p+ q$, то произведением тензоров валентности p и q является тензор валентности $p+q$. Например, формы

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = a_{ijk}x_i y_j z_k \text{ и } \psi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = b_{lm}u_l v_m$$

определяют соответственно тензоры a_{ijk} и b_{lm} валентностей 3 и 2, их произведение

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\,\psi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (a_{ijk}b_{lm})x_i y_j z_k u_l v_m$$

— тензор $a_{ijk}b_{lm}$ валентности 5, который является произведением тензоров a_{ijk} и b_{lm}.

Таким образом, *компоненты произведения двух тензоров представляют собой произведения каждой компонентй первого тензора на каждую компоненту второго.*

В примере *б)* п. 7.9 мы, в сущности, построили тензор второй валентности, составляя произведение двух одновалентных тензоров a_i и b_j, точно так же в п. 7.20 в примере *б)* мы построили трехвалентный тензор, являющийся произведением трех одновалентных тензоров a_i, b_j и c_k.

4. Свертывание тензора. Пусть $\varphi=\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z},..., \boldsymbol{w})$ — полилинейная форма степени p. Подставим в нее вместо каких-нибудь двух аргументов, например $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ базисные векторы $\boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{e}_j$ и обозначим

$$\varphi(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{z},..., \boldsymbol{w}) = \varphi_{ij}.$$

Эти выражения являются линейными функциями векторных аргументов $\boldsymbol{z},..., \boldsymbol{w}$, но они не являются линейными формами, так как зависят еще от выбора базиса. Найдем, как выражения φ_{ij} изменяются при преобразованиях базиса пространства L_3. Если обозначить

$$\varphi_{i'j'} = \varphi(\boldsymbol{e}_{i'}, \boldsymbol{e}_{j'}, \boldsymbol{z}, \ldots, \boldsymbol{w}),$$

то, так как

$$\boldsymbol{e}_{i'} = \gamma_{i'i}\boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{e}_{j'} = \gamma_{j'j}\boldsymbol{e}_j,$$

мы будем иметь

$$\varphi_{i'j'} = \varphi(\gamma_{i'i}\boldsymbol{e}_i, \gamma_{j'j}\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{z}, \ldots, \boldsymbol{w}) = \\ = \gamma_{i'i}\gamma_{j'j}\varphi(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{z}, \ldots, \boldsymbol{w}) = \gamma_{i'i}\gamma_{j'j}\varphi_{ij}.$$

Положим теперь $i'=j'$ и сложим три получающихся равенства. Тогда

$$\varphi_{i'i'} = \gamma_{i'i}\gamma_{i'j}\varphi_{ij}.$$

Но по свойству ортогональных матриц (формула (7.11))

$$\gamma_{i'i}\gamma_{i'j} = \delta_{ij}$$

и

$$\varphi_{i'i'} = \delta_{ij}\varphi_{ij} = \varphi_{ii}.$$

Эти соотношения показывают, что выражение φ_{ii}, которое линейно зависит от векторных аргументов ***z, ..., w,*** не зависит от выбора базиса. Следовательно, оно является полилинейной формой от ***z, ..., w***. Степень этой полилинейной формы равна p — 2, так как число векторных аргументов, от которых она зависит, на две единицы меньше числа аргументов, от которых зависит форма φ.

Запишем теперь исходную форму φ в координатах:

$$\varphi = \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \ldots, \boldsymbol{w}) = a_{ijk\ldots m}x_i y_j z_k \ldots w_m.$$

Если положить здесь $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_j$ то будем иметь

$$x_i = 1,\ x_p = 0 \text{ при } p \neq i;\ y_j = 1,\ y_q = 0 \text{ при } q \neq j.$$

Поэтому выражения φ_{ij} примут вид

$$\varphi_{ij} = \varphi(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{z}, \ldots, \boldsymbol{w}) = a_{ijk\ldots m}z_k \ldots w_m.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi_{ii} = a_{iik\ldots m}z_k \ldots w_m.$$

Следовательно, компоненты тензора $b_{k\ldots m}$ валентности p — 2, определяемого формой φ_{ij}, выражаются через компоненты тензора $a_{ijk\ldots m}$ определяемого исходной формой φ, по формулам

$$b_{k\ldots m} = a_{iik\ldots m},$$

или, более подробно, по формулам

$$b_{k\ldots m} = a_{11k\ldots m} + a_{22k\ldots m} + a_{33k\ldots m}.$$

Операция получения тензора $b_{k\ldots m}$ из тензора $a_{ijk\ldots m}$ называется *свертыванием* тензора $a_{ijk\ldots m}$ по индексам i и j.

Точно так же можно определить свертывание тензора $a_{ijk..m}$ по любой другой паре индексов. Как мы видим, *при свертывании тензора его валентность понижается на две единицы.* Например, при свертывании двухвалентного тензора a_{ij} мы получим тензор a_{ii} нулевой валентности, т.е. инвариант. Этот инвариант называется *следом тензора* a_{ij} и обозначается так:

$$a_{ii} = \mathrm{Sp}(a_{ij}).$$

(Sp - две первый буквы от немецкого слова «Spur», что означает «след». В литературе след тензора a_{ij} обозначают также через tr a_{ij}. Здесь «trace» - английское слово, которое означает «след»).

5. Свертывание произведения тензоров. Рассмотрим два произвольных тензора, например, тензоры a_{ijk} и b_{lm} валентностей 3 и 2, и образуем их произведение $a_{ijk}b_{lm}$ — пятивалентный тензор. А теперь свернем полученный тензор, например, по индексам k и l. В результате получим тензор

$$a_{ijk}b_{km} = a_{ij1}b_{1m} + a_{ij2}b_{2m} + a_{ij3}b_{3m}$$

валентности 3. Такая операция называется *свертыванием тензоров* a_{ijk} и b_{lm} по индексам k и l.

Таким образом, *операция свертывания двух тензоров состоит в их умножении и свертывании полученного в результате умножения тензора по индексам, принадлежащим разным сомножителям. В результате свертывания тензоров валентности р и q получается тензор валентности р+q—2.*

В сущности, с операцией свертывания тензоров мы уже много раз встречались. Так, например, скалярное произведение векторов $\boldsymbol{x} = x_i\boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{y}=y_i\boldsymbol{e}_i$, которое вычисляется по формуле $\boldsymbol{xy} = \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{y}_i$, представляет собой результат свертывания одновалентных тензоров x_i и y_i, составленных из координат векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Монолинейная форма $\varphi(\boldsymbol{x}) = a_ix_i$ является результатом свертывания тензоров a_i и x_i; билинейная форма $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = a_{ij}x_iy_j$ является результатом свертывания тензора a_{ij} с тензором x_i и поледующего свертывания тензора $a_{ij}x_i$ с тензором y_j и т.д.

Особенно простой характер носит свертывание произвольного тензора с единичным тензором δ_{ij}. Например,

$$a_{ijk}\delta_{kl} = a_{ij1}\delta_{1l} + a_{ij2}\delta_{2l} + a_{ij3}\delta_{3l} = a_{ijl},$$

так как δ_{kl} отлично от нуля только при $k = l$.

Как уже видно из приведенных примеров, свертывание тензоров можно производить не только по одной паре индексов, а по любому количеству r таких пар. В результате этого свертывания получается новый тензор, валентность которого на $2r$ единиц меньше суммы валентностей исходных тензоров.

Докажем теперь важную теорему, которую обычно называют ***обратным тензорным признаком***.

Теорема. *Пусть в каждом ортонормированном базисе заданна совокупность* 3^{p+q} *чисел* $a_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q}$ *такая, что при свертывании ее с произвольным тензором* $t_{j_1 \dots j_q}$ *валентности q снова получается тензор валентности р. Тогда исходная система чисел является тензором валентности р+q.*

Докажем эту теорему для частного случая, когда $p = 3$, $q=2$ и заданная система чисел имеет вид a_{ijklm}. По условию теоремы величины

$$s_{ijk} = a_{ijklm}t_{lm}$$

образуют тензор, если только t_{lm} — тензор. Пусть $t_{lm}=u_l v_m$ — произведение векторов u_l и v_m. Тогда

$$s_{ijk}= a_{ijklm}u_l v_m.$$

Свернем это выражение с произвольными векторами x_i, y_j, z_k:

$$s_{ijk}\, x_i y_j z_k = a_{ijklm}\, x_i y_j z_k u_l v_m.$$

Так как s_{ijk} -тензор, то выражение, которое стоит в левой части этого равенства, представляет скалярную функцию. Но правая часть этого равенства линейно зависит от координат векторов ***x, y, z, u, v***. Поэтому эта скалярная функция является полилинейной формой степени пять. Следовательно, числа a_{ijklm}, являющиеся коэффициентами этой полилинейной формы, образуют тензор валентности пять. Точно так же эта теорема доказыается и в общем случае.

6. Перестановка индексов тензора. Пусть $\varphi=\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, ..., \boldsymbol{w})$ — полилинейная форма и $a_{ijk\ldots m}$ — определяемый ею тензор, так что

$$\varphi = a_{ijk\ldots m}\, x_i y_j z_k \ldots w_m\ldots$$

Рассмотрим форму ψ, которая получается из формы φ путем перестановки некоторых ее аргументов. Пусть, например,

$$\psi =(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, ..., \boldsymbol{w}) = \varphi\, (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}, ..., \boldsymbol{w}).$$

Если обозначить через $b_{ijk\ldots m}$ тензор, определяемый формой ψ, то это соотношение можно переписать в виде

$$b_{ijk\ldots m} x_i y_j z_k \ldots w_m = a_{ijk\ldots m} y_i z_j x_k \ldots w_m\ldots$$

Меняя индексы суммирования в правой части и учитывая, что это соотношение является тождеством, получим отсюда, что

$$b_{ijk\ldots m}=a_{jki\ldots m}$$

Тензор $b_{ijk\ldots m}$ отличается от тензора $a_{ijk\ldots m}$ только другой нумерацией своих компонент. Операция, состящая в перенумеровании компонент тензора $a_{ijk\ldots m}$, называется *перестановкой индексов тензора.* Заметим, что тензоры $a_{ijk\ldots m}$ и $b_{ijk\ldots m}$ — существенно различные тензоры, так как их соответствующие компоненты (компоненты с одинаковыми индексами), вообще говоря, не будут равны между собой.

7.12. Симметричные и кососимметричные тензоры

1. Пусть $\varphi = \varphi\, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — билинейная форма. Эта форма называется *симметричной,* если для любых векторов ***x*** и ***y***

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}).$$

Тензор валентности два, определяемый симметричной билинейной формой, называется *симметричным тензором.*

Компоненты симметричного тензора валентности два в любом ортонормированном базисе образуют *симметричную матрицу,* т.е. удовлетворяют условию

$$a_{ij}=a_{ji}.$$

Это непосредственно следует из того, что для симметричной билинейной формы в любом базисе

$$\varphi(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \varphi(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i)$$

и что $a_{ij} = \varphi(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$.

Симметричная матрица подробно может быть записана так:

$$(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что симметричный тензор второй валентности имеет шесть существенных компонент.

Например, скалярное произведение двух векторов является симметричной билинейной формой, так как $\boldsymbol{xy}=\boldsymbol{yx}$. Коэффициенты этой билинейной формы, как мы видели, образуют единичный тензор δ_{ij}, матрица которого является симметричной:

$$(\delta_{ij})=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь полилинейную форму $\varphi = \varphi\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, ..., \boldsymbol{w})$ степени p. Форма φ называется *симметричной по двум* каких-либо *аргументам,* если она не меняет своего значения при перестановке этих аргументов. Тензор, определяемый такой полилинейной формой, называется *симметричным по соответствующим индексам.*

Например, форма $\varphi = \varphi\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, ..., \boldsymbol{w})$ симметрична по аргументам $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{z}$, если

$$\varphi\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, ..., \boldsymbol{w}) = \varphi\ (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}, ..., \boldsymbol{w}).$$

Тензор $a_{ijk\ldots m}$, определяемый этой формой, будет симметричным по индексам i и k, и его компоненты в любой системе координат удовлетворяют соотношением

$$a_{ijk\ldots m}=a_{kji\ldots\ldots m}$$

Полилинейная форма φ степени p называется *симметричной,* если она не меняется при любой перестановке аргументов. Определяемый ею тензор называется *симметричным тензором валентности* p. Компоненты симметричного тензора, которые отличаются только порядком индексов, но не их значениями, равны между собой.

Например, трехлинейная форма φ (***x, y, z)*** будет симметрична, если для любых трех векторов ***x,y,z***

$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \varphi(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) = \varphi(z, x, y) = \varphi(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = \varphi(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$;
компоненты тензора a_{ijk}, определяемого этой формой, не меняются при любой перестановке индексов.

2. Билинейная форма $\varphi = \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ называется *кососимметричной*, если для любых векторов ***x*** и ***y***

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -\varphi(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}).$$

Тензор валентности два, определяемый кососимметричной билинейной формой, называется *кососимметричным тензором.*

Так как теперь $\varphi(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = -\varphi(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i)$, то компоненты кососимметричного тензора в любом базисе удовлетворяют условию

$$a_{ij} = -a_{ju}$$

тобто образуют кососимметричную матрицу. Эта матрица подробно может быть записана так:

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & -a_{31} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда ясно, что кососимметричный тензор валентности два имеет всего три существенные компоненты.

Аналогично определяется *кососимметричность полилинейной формы степени р* по двум каких-либо аргументам. Тензор валентности *р,* который определяется такой формой, будет *кососимметричным тензором по соответствующим индексам.*

Полилинейная форма степени *р* называется *кососимметричной*, если она меняет знак при перестановке любой пары ее аргументов. Тензор, который определяется этой формой, называется *кососимметричным тензором.* Такой тензор меняет знак при перестановке любой пары индексов.

Например, смешанное произведение ***(x, y, z)*** векторов ***x, y, z*** является кососимметричной трехлинейной формой. Тензор ε_{ijk}, который определяется этой формой, будет кососимметричным тензором. Он имеет только одну существенную компоненту $\varepsilon_{123} = \varepsilon$.

3. Пусть $\varphi = \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — произвольная билинейная форма. Построим при ее помощи билинейные формы

$$\varphi_1(x, y) = \frac{1}{2}[\varphi(x, y) + \varphi(y, x)],$$

$$\varphi_2(x, y) = \frac{1}{2}[\varphi(x, y) - \varphi(y, x)].$$

Легко видеть, что форма φ_1 будет симметричной, а φ_2— кососимметричной формой. В самом деле,

$$\varphi_1(x, y)=\frac{1}{2}[\varphi(x, y)+\varphi(y, x)]=$$
$$=\frac{1}{2}[\varphi(y, x)+\varphi(x, y)]=\varphi_1(y, x),$$

$$\varphi_2(x, y)=\frac{1}{2}[\varphi(x, y)-\varphi(y, x)]=$$
$$=-\frac{1}{2}[\varphi(y, x)-\varphi(x, y)]=-\varphi_2(y, x).$$

Операции, при помощи которых из билинейной формы φ получаются билинейные формы φ_1 и φ_2, называются соответственно *симметрированием* и *альтернированием формы* φ.

Форма φ может быть теперь представленная в виде суммы

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y).$$

Такое представление формы φ (x, y) называют ее *разложением на симметричную и кососимметричную части.*

Посмотрим теперь, как выразятся тензоры, которые определяются формами φ_1 и φ_2, через тензор, определяемый формой φ. Запишем форму φ в координатной форме:

$$\varphi(x, y) = a_{ij}x_iy_j$$

где x_i и y_j — координаты векторов x и y соответственно. Тогда формы φ_1 и φ_2 примут вид

$$\varphi_1(x, y)=\frac{1}{2}(a_{ij}x_iy_j+a_{ij}y_ix_j),$$

$$\varphi_2(x, y)=\frac{1}{2}(a_{ij}x_iy_j-a_{ij}y_ix_j).$$

Но, изменив обозначение индексов суммирования, вторые слагаемые этих выражений можно переписать в виде $a_{ji}x_iy_j$.

Поэтому после приведения подобных членов формы φ_1 и φ_2 запишутся так:

$$\varphi_1(x, y)=\frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji})\,x_iy_j,$$

$$\varphi_2(x, y)=\frac{1}{2}(a_{ij}-a_{ji})\,x_iy_j.$$

Тензоры, которые определяются этими формами, обозначают обычно символами $a_{(ij)}$ и $a_{[ij]}$. Первый из этих тензоров будет симметричным, а второй — кососимметричным. Таким образом,

$$a_{(ij)}=\frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji}),$$

$$a_{[ij]}=\frac{1}{2}(a_{ij}-a_{ji}).$$

Операции, при помощи которых тензоры $a_{(ij)}$ и $a_{[ij]}$ получаются из тензора a_{ij}, называются соответственно *симметрированием* и *альтернированием тензора* a_{ij}. Очевидно, что

$$a_{ij} = a_{(ij)} + a_{[ij]}$$

Подобным же образом определяются операции симметрирования и альтернирования полилинейных форм по какой-нибудь пари их аргументов и соответствующие операции с определяемыми ими тензорами.

Несколько более сложно определяется полное симметрирование и альтернирование полилинейных форм степени *p,* большей чем 2. Пусть, например, $\varphi=\varphi\ (x, y, z)$ — трехлинейная форма. Чтобы построить из нее форму, симметричную по всем индексам, следует произвести всевозможные перестановки ее аргументов. Число таких перестановок равно 3! = 6. Поэтому искомая симметричная форма имеет вид

$$\varphi_1(x, y, z)=\frac{1}{6}[\varphi(x, y, z)+\varphi(y, z, x)+\varphi(z, x, y)+\\+\varphi(y, x, z)+\varphi(z, y, x)+\varphi(x, z, y)].$$

Точно так же форма

$$\varphi_2(x, y, z)=\frac{1}{6}[\varphi(x, y, z)+\varphi(y, z, x)+\\+\varphi(z, x, y)-\varphi(y, x, z)-\varphi(z, y, x)-\varphi(x, z, y)]$$

является кососимметричной трехлинейной формой. Доказательство симметричности формы φ_1 и кососимметричности формы φ_2 предоставляется читателю.

Операции, при помощи которых формы φ_1 и φ_2 были получены из трехлинейной формы φ, называются *симметрированием* и *альтернированием формы* φ.

Обозначим через a_{ijk} тензор, определенный трехлинейной формой $\varphi\ (x, y, z)$. Тогда тензоры $a_{(ijk)}$ и $a_{[ijk]}$, соответствующие формам $\varphi_1\ (x, y, z)$ и $\varphi_2(x, y, z)$, будут вычисляться следующим образом:

$$a_{(ijk)}=\frac{1}{6}(a_{ijk}+a_{jki}+a_{kij}+a_{jik}+a_{kji}+a_{ikj}),$$

$$a_{[ijk]}=\frac{1}{6}(a_{ijk}+a_{jki}+a_{kij}-a_{jik}-a_{kji}-a_{ikj}).$$

Операции, при помощи которых тензоры $a_{(ijk)}$ и $a_{[ijk]}$ получаются из тензора a_{ijk}, называются *операциями симметрирования* и *альтернирования этого тензора.*

4. Если в билинейной форме φ=φ(***x, y***) считать ***y = x***, то получим скалярную функцию одного векторного аргумента φ(***x, x***). Такая функция называется *квадратичной формой.*

Таким образом, каждой билинейной форме φ(***x, y***) может быть поставлена в соответствие единственная квадратичная форма φ(***x, x***). Но разным билинейным формам может соответствовать одна и та же квадратичная форма. В самом деле, пусть φ=φ(***x, y***) - произвольная билинейя форма и

$$\varphi_1(x, y) = \frac{1}{2}[\varphi(x, y) + \varphi(y, x)]$$

- билинейя форма, полученная из нее путем операции симметрирования. Тогда легко видеть, что

$$\varphi_1(x, x) = \frac{1}{2}[\varphi(x, x) + \varphi(x, x)] = \varphi(x, x),$$

т.е. квадратичные формы, которые отвечают различным билинейным формам φ(***x, y***) и φ_1(***x, y***), оказываются одинаковыми.

Поэтому всегда можно считать, что квадратичная форма φ(***x, x***) получена из симметричной билинейной формы φ(***x, y***) при ***y***=***x***. Эта симметричная билинейная форма называется *полярной билинейной формой для заданной квадратичной формы* φ(***x, x***). Полярная форма φ(***x, y***) однозначно определяется своей квадратичной. В самом деле,

$$\varphi(x + y,\ x + y) = \varphi(x, x) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x) + \varphi(y, y).$$

Но так как φ ***(x, y)*** = φ ***(y, x)***, то

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}[\varphi(x + y,\ x + y) - \varphi(x, x) - \varphi(y, y)].$$

Найдем теперь, как запишется квадратичная форма φ(***x, x***) в ортонормированном базисе $\{e_i\}$. Пусть φ(***x, y***) — билинейная форма, полярная форме φ(***x, x***). Эта билинейная форма симметричная и, как уже известно, в координатной форме записывается так:

$$\varphi(x, y) = a_{ij}x_iy_j,$$

где $a_{ij} = a_{ji}$. Поэтому квадратичная форма φ(***x, x***) записывается в виде

$$\varphi(x, x) = a_{ij}\, x_ix_j.$$

Это выражение представляет собой однородный многочлен второй степени относительно координат вектора ***x***. Коэффициенты a_{ij} образуют симметричный тензор. Подробно квадратичная форма φ(***x, x***) записывается следующим образом:

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + \\ + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3.$$

Обратно, если дан симметричный тензор a_{ij}, то он определяет единственную квадратичную форму $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})=a_{ij}\ x_ix_j$. Поэтому *между симметричными тензорами валентности два и квадратичными формами устанавливается взаимно однозначное соответствие.*

Примером квадратичной формы может служить скалярный квадрат вектора $\boldsymbol{x}^2=x_ix_i=\delta_{ij}x_ix_j$. Полярной билинейной формой для нее служит скалярное произведение векторов $\boldsymbol{xy}=x_iy_i=\delta_{ij}x_iy_j$. Как мы уже видели, эта билинейная форма является симметричной.

Пусть теперь $\varphi = \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ — трехлинейная форма. Полагая в ней $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$, получим кубичную форму $\varphi=\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$. Так же как это было сделано выше, можно доказать, что между кубичными формами, симметричными трехлинейными формами и симметричными тензорами третьей валентности устанавливается взаимно однозначное соответствие. Всякая кубичная форма в координатах может быть записана в виде

$$\varphi = a_{ijk}x_ix_jx_k,$$

где a_{ijk} - симметричный тензор. Подробно кубичная форма может быть записана так:

$$\varphi = a_{111}x_1^3 + a_{222}x_2^3 + a_{333}x_3^3 + \\ + 3a_{112}x_1^2x_2 + 3a_{122}x_1x_2^2 + 3a_{113}x_1^2x_3 + \\ + 3a_{133}x_1x_3^2 + 3a_{223}x_2^2x_3 + 3a_{233}x_2x_3^2 + 6a_{123}x_1x_2x_3.$$

Десять коэффициентов этой формы совпадают с десятью существенными компонентами симметричного тензора a_{ijk}.

Точно так же строятся формы любой степени p, которые связаны с симметричными тензорами валентности p.

5. Симметричным тензорам можно дать геометрическую характеристику с помощью так называемой ***характеристической поверхности***.

Пусть a_{ij} — симметричный тензор валентности два. Образуем с его помощью квадратичную форму $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})=a_{ij}x_ix_j$ и рассмотрим совокупность векторов $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющих условию

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})=1. \tag{7.38}$$

Зафиксируем начало координат в точке O пространства E_3 и будем считать, что вектор $\boldsymbol{x}=\overline{OM}$ служит радиусом-вектором точки M. Тогда геометрическое место точек M, радиусы-векторы которых удовлетворяют уравнению (7.38), будет представлять собой некоторую поверхность S, которую называют ***характеристической поверхностью тензора a_{ij}.***

Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат, начало которой расположено в точке O и направления осей которой определяются векторами $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ ортонормированного базиса. В этой системе координат уравнение характеристической поверхности запишется так:

$$a_{ij}x_ix_j = 1. \qquad (7.39)$$

Уравнение (7.39) показывает, что *характеристической поверхностью симметричного тензора второй валентности служит центральная поверхность второго порядка, центр симметрии которой совпадает с началом координат O.*

Найдем, например, характеристическую поверхность единичного тензора δ_{ij}. Ее уравнение запишется в виде

$$\delta_{ij}x_ix_j = 1.$$

Расписывая подробно суммирование по индексам i и j в левой части этого уравнения, мы получим

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

Последнее уравнение показывает, что *характеристической поверхностью единичного тензора является сфера единичного радиуса.*

Пусть, далее, $a_{ij}=a_ia_j$. Тогда уравнение характеристической поверхности тензора a_{ij} запишется так:

$$a_ia_jx_ix_j = 1.$$

Легко проверить, что это уравнение может быть записано и виде

$$(a_ix_i)^2 = 1.$$

Но последнее уравнение распадается на два:

$$a_ix_i = \pm 1.$$

Итак, *характеристическая поверхность тензора a_ia_j представляет собой пары параллельных плоскостей, симметрично расположенных относительно начала координат.*

Рассмотрим снова характеристическую поверхность (7.38) произвольного симметричного тензора a_{ij}. Пусть $\mathbf{x} = \overline{OM}$ — радиус-вектор текущей точки этой поверхности и $\mathbf{p}$ — единичный вектор, который имеет то же направление, что и вектор $\mathbf{x}$, так что

$$\mathbf{x} = x\mathbf{p},$$

где $x = |\mathbf{x}|$ — длина вектора $\mathbf{x}$. Подставим это выражение для вектора $\mathbf{x}$ в уравнение характеристической поверхности (7.38). Тогда в силу линейности формы $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ по каждому аргументу получим

$$x^2\varphi(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = 1.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{p}) = \frac{1}{x^2},$$

т.е. *значение квадратичной формы* φ *от любого единичного вектора* ***p*** *равно единице, деленной на квадрат расстояния от точки О до той точки характеристической поверхности S, в которой ее пересекает луч, проходящий через точку О и имеющий направление вектора* ***p.***

В частности, если $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{e}_i$, M_i — точка, в которой луч $O\boldsymbol{e}_i$ пересекает характеристическую поверхность, и $\alpha_i = |\overline{OM_i}|$, то

$$\varphi(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_i) = \frac{1}{\alpha_i^2}.$$

Но $\varphi(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i) = a_{ii}$ (здесь по индексам *i, i* суммирования не производится). Поэтому

$$a_{ii} = \frac{1}{\alpha_i^2}.$$

Подобным же образом строится характеристическая поверхность симметричного тензора более высокой валентности. Например, для симметричного тензора a_{ijk} валентности три характеристическая поверхность имеет уравнение

$$a_{ijk}\, x_i x_j x_k = 1 \qquad (7.40)$$

и является поверхностью третьего порядка. Эта характеристическая поверхность дает возможность геометрически найти значение кубичной формы

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = a_{ijk} x_i x_j x_k$$

от единичного вектора ***p***, а именно

$$\varphi(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{p},\ \boldsymbol{p}) = \frac{1}{x^3},$$

где *x* — расстояние от начала координат *O* до той точки *M* характеристической поверхности, в которой ее пересекает луч, выходящий из точки *O* и имеющий направление вектора ***p.*** В частности,

$$a_{iii} = \varphi(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_i) = \frac{1}{\alpha_i^3},$$

где α_i -расстояние от точки *O* до точки *M,* в которой луч $O\boldsymbol{e}_i$ пересекает характеристическую поверхность.

Заметим, что уравнением типа (7.39) и (7.40) характеристическую поверхность можно определить не только для симметричных, но и для произвольных тензоров. Но описывать она будет только свойства симметричной части этих тензоров. В самом деле, если, например, a_{ij} - произвольный тензор второй валентности, то

$$a_{ij} = a_{(ij)} + a_{[ij]}$$

и уравнение (7.39) принимает вид

$$a_{(ij)}xx_j = 1.$$

Микромодуль 18.
Индивидуальные тестовые задачи.

1. Проверить, будут ли монолинейными формами следующие скалярные функции векторного аргумента:

а) Функция

$$\varphi\,(\boldsymbol{x}) = c_i\, x_i,$$

где x_i — координаты вектора $\boldsymbol{x}$ относительно некоторого базиса пространства L_n, c_i — фиксированные числа.

б) Функция

$$\varphi\,(\boldsymbol{x}) = x_1^2,$$

где x_1 - первая координата вектора $\boldsymbol{x}$ в некотором базисе пространства L_n.

в) Функция

$$\varphi\,(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}.$$

г) Функция

$$\varphi\,[g\,(t)] = g\,(t_0), \quad a < t_0 < b,$$

заданная в пространстве $C\,[a,\, b]$ (см. пример *ж)* микромодуля 17).

д) Функция

$$\varphi\,[g\,(t)] = \int_a^b c\,(t)\, g\,(t)\, dt,$$

заданная в том же пространстве $C\,[a,\, b]$, где $c(f)$ — произвольная непрерывная функция.

2. Записать в виде $\varphi\,(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ax}$ монолинейные формы примеров *а)* и *г)* микромодуля 17 п. 7.1.

3. Доказать, что коэффициенты билинейной формы на плоскости L_2 можно записать в виде квадратной матрицы второго порядка.

4. Записать смешанное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ (см. пример *б)*) в виде определителя третьего порядка и, вычисляя этот определитель, еще раз подсчитать коэффициенты билинейной формы

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

5. Доказать, что функция

$$\varphi\,[f\,(x),\, g\,(y)] = \int_a^b\!\!\int_a^b K\,(x,\, y)\, f\,(x)\, g\,(y)\, dx\, dy,$$

определенная в просторные $C[a, b]$ (см. пример *ж*), является билинейной формой; здесь $K(x, y)$ - фиксированная непрерывная функция переменных x и y.

6. Доказать, что функция

$$\varphi[f(x), g(y)] = f(x_0)\, g(y_0), \quad a < x_0 < b, \quad a < y_0 < b,$$

будет билинейной формой пространства $C[a, b]$.

7. Будет ли билинейной формой пространства L_n функция $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1^2 y_1$, где x_1, y_1— первые координаты векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в некотором базисе?

8. Будет ли билинейной формой в линейном пространстве функция $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = a$, где a - фиксированное действительное число?

9. В каком случае функция

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots\, \boldsymbol{z}) = a$$

является полилинейной формой?

10. Образует ли функция

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = x_1^2 y_1 z_1,$$

где x_1, y_1, z_1 — первые координаты векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ в некотором базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, полилинейную форму?

11. В пространстве $C[a, b]$ непрерывных на $[a, b]$ функций определена функция

$$\varphi[f_1(t), f_2(t), \ldots, f_k(t)] = f_1(t_1) \cdot f_2(t_2) \ldots f_k(t_k),$$
$$a < t_i < b, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Будет ли такая функция полилинейной формой?

12. В пространстве $C[a, b]$ определим функцию

$$\varphi[f(x), g(y), h(z)] = \int_a^b \int_a^b \int_a^b K(x, y, z)\, f(x)\, g(y)\, h(z)\, dx\, dy\, dz,$$

где $K(x, y, z)$ - фиксированная непрерывная функция от x, y, z. Будет ли эта функция полилинейной формой?

13. Фиксируем в пространстве L_3 некоторый базис $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, и пусть $\boldsymbol{x} = x_i \boldsymbol{e}_i$. Доказать, что числа $x_{ij} = x_i x_j$ образуют тензор валентности два.

14. Доказать, что компоненты единичного тензора δ_{ij} имеют одни и те же значения в любом ортонормированном базисе, т.е. $\delta_{i'j'} = \delta_{ij}$ при $i = i'$, $j = j'$.

15. Доказать, что компоненты дискриминантного тензора ε_{ijk} имеют одинаковые значения в ортонормированных базисах одинаковой ориентации и противоположные значения в базисах с различной ориентацией, т.е. $\varepsilon_{i'j'k'} = \pm\, \varepsilon_{ijk}$ при $i' = i$, $j' = j$, $k' = k$.

16. Показать, что совокупность величин α_{ijkl}, которая в любом базисе $\{\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3}\}$определяется равенствами

$$\alpha_{ijkl}=\begin{cases}1 \text{ при } i=k,\, j=l,\\ 0 \text{ в остальных случаях,}\end{cases}$$

образует тензор валентности четыре.

17. Написать закон преобразования компонент тензора пятой валентности при замене базиса.

18. Если $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — инвариантная функция прямоугольных координат x, то величины $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}$ образуют соответственно тензоры первой и второй валентности.

19. Пусть a_{ij} — тензор второй валентности. Доказать, что алгебраические дополнения A_{ij} определителя a, составленного из компонент этого тензора, также представляют тензор валентности два, который удовлетворяет соотношению

$$A_{ik}a_{kj}=a\delta_{ij}.$$

20. Пусть дан тензор третьей валентности a_{ijk} и тензор второй валентности b_{lm}. Получить из них путем умножения и свертывание тензор пятой валентности, тензоры третьей валентности, тензоры первой валентности.

21. Показать, что тензор второй валентности z_{ij} тогда и только тогда есть произведение двух тензоров первой валентности, когда его координаты удовлетворяют уравнениям

$$z_{ki}\, z_{lj} - z_{li}\, z_{kj}=0$$

21. Построить инвариант путем свертывания индексов у тензора a_{ij}, компоненты которого — элементы матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0\\ 3 & -5 & 6\\ -7 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

23. Дан тензор второй валентности a_{ij}, матрица которого в некотором базисе равна

$$(a_{ij})=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3\\ 5 & 1 & 2\\ 4 & 5 & 7\end{pmatrix},$$

и тензоры первой валентности x_i и y_i, которые в том же базисе имеют компоненты

$$(x_i) = (2, 1, 4),$$
$$(y_i)= (3,7,-1).$$

Найти:

а) $a_{ij}x_j$; б) $a_{ij}x_i$; в) $a_{ij}y_i$; г) $a_{ij}y_j$; д) $a_{ij}x_iy_j$; е) $a_{ij}y_ix_j$; ж) $a_{ij}\delta_{ij}$;
з) $a_{ij}-\frac{2}{5}\delta_{ij}a_{ll}$; и) $\left(a_{ij}-\frac{2}{5}\delta_{ij}a_{ll}\right)x_i$; к) $\left(a_{ij}-\frac{2}{5}\delta_{ij}a_{ll}\right)x_iy_j$.

24. Найти какой-нибудь базис линейного пространства тензоров второй валентности.

25. Доказать, что в пространстве L_3 любая трехлинейная кососимметричная форма $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ только скалярным множителем отличается от смешанного произведения $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$.

26. Доказать, что в пространстве L_3 любая кососимметричная форма степени $p > 3$ тождественно равна нулю.

27. Сформулировать и доказать теоремы, аналогичные утверждениям задач 25 и 26, для пространства L_n.

28. Доказать, что если тензор a_{ijk} симметричный по индексам i и j и кососимметричный по индексам j и k, то он равен нулю.

29. Доказать, что если a_{ij}— симметричный, а b_{ij} — кососимметричный тензор, то $a_{ij}b_{ij} = 0$.

30. Доказать, что если тензор a_{ijk} симметричный по первым двум индексах ($a_{ijk}=a_{jik}$) и для любого вектора $\boldsymbol{x}=x_i\boldsymbol{e}_i$ имеет место соотношения

$$a_{ijk}x_ix_jx_k = 0, \quad \text{то} \quad a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij} = 0.$$

31. Доказать, что если для тензора a_{ij} и для любого вектора $\boldsymbol{x}=x_i\boldsymbol{e}_i$

$$a_{ij}x_j = \alpha x_i$$

(причем α не зависит от x), то $\alpha_{ij} = \alpha\delta_{ij}$.

32. Доказать, что если для тензора a_{ijkl} и для любых векторов $\boldsymbol{x} = x_i\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{y} = y_j\boldsymbol{e}_j$ выполняются соотношения $a_{ijkl}x_iy_jx_ky_l = 0$, то

$$a_{ijkl} + a_{jkli} + a_{klij}+a_{lijk} = 0.$$

Если, кроме того,

$$a_{ijkl} + a_{jikl}=0,\ a_{ijkl} + a_{ijlk}=0,\ a_{(ijk)l}=0$$

то

$$a_{ijkl} = 0.$$

33. Доказать, что тензор третьей валентности можно записать в виде

$$a_{ijk}=a_{(ijk)}+a_{[ijk]}+\frac{2}{3}\left(a_{[ij]k}+a_{[kj]i}\right)+\frac{2}{3}\left(a_{(ij)k}-a_{k(ij)}\right).$$

34. Доказать, что если тензор a_{ijk} симметричный по индексам i и j, то

$$a_{(ijk)}=\frac{1}{3}\left(a_{ijk}+a_{jki}+a_{kij}\right).$$

35. Доказать, что если тензор a_{ijk} кососимметричен по индексам i и j, то

$$a_{[ijk]}=\frac{1}{3}(a_{ijk}+a_{jki}+a_{kij}).$$

36. Разложить тензор a_{ij}, матрица которого

$$(a_{ij})=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 5 & 7 & -2\\ 4 & -4 & 0\end{pmatrix},$$

на симметричный (b_{ij}) и кососимметричный (c_{ij}) тензоры. Найти:
а) $c_{ij}a_{ij}$; б) $b_{ij}c_{ij}$; в) $c_{ij}\delta_{ij}$; г) $c_{ij}x_i$, где x_i = (2, 3, —4); д) $c_{ij}x_i\,x_j$; е) $b_{ij}\delta_{ij}$; ж) $b_{ij}x_i$; з) $b_{ij}\,x_i\,x_j$.

37. Найти характеристические поверхности следующих симметричных тензоров второй валентности:

$$\text{а) } a_{ij}=\lambda\delta_{ij};$$

$$\text{б) } a_{ij}=\frac{1}{2}(a_ib_j+a_jb_i).$$

При n=2 вместо характеристических поверхностей естественно рассматривать характеристические кривые.

38. Найти уравнения и построить характеристические кривые симметричных тензоров третьей валентности со следующими компонентами:

$$\text{а) } a_{111}=a_{222}=1, \qquad a_{112}=a_{122}=0;$$

$$\text{б) } a_{111}=a_{222}=0, \qquad a_{112}=a_{122}=\frac{1}{3},$$

$$\text{в) } a_{111}=1, \quad a_{122}=-1, \qquad a_{112}=a_{222}=0.$$

Микромодуль 19.
Линейные преобразования векторного пространства

7.13. Линейные преобразования

1. До сих пор мы рассматривали в линейном пространстве L скалярные функции одного или нескольких векторных аргументов. В этом микромодуле будут рассматриваться ***векторные функции одного векторного аргумента***. Изучение таких функций оказывается важным для многих разделов геометрии, механики и физики. Как мы увидим дальше, важнейшие из таких функций - линейные - связаны с тензорами второй валентности, которые уже рассматривались в предыдущем микромодуле.

Говорят, что в линейном пространстве *L* задана *векторная функция* ***A*** *векторного аргумента* ***x***, если каждому вектору ***x*** этого пространства поставлено в соответствие некоторый вектор $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ того же пространства. Векторная функция ***A*** называется *линейной,* если она обладает следующими двумя свойствами:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{y}),$$
$$\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x});$$

где ***x*** и ***y*** — два любых вектора пространства *L* и α — любое действительное число. Линейную вектор-функцию ***A*** называют также *линейным преобразованием* пространства *L*, или *линейным оператором (линейным аффинором)* в этом пространстве. В дальнейшем при обозначении линейной вектор-функции мы будем опускать скобки всюду, где это не может привести к недоразумениям, и записывать ее в виде

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$$

Геометрически первое из свойств, которые определяют линейную вектор-функцию, означает, что диагональ параллелограмма, построенного на векторах ***x*** и ***y***, при линейном преобразовании ***A*** переходит в диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Ax}$ и $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{Ay}$ (рис. 7.5, *а*).

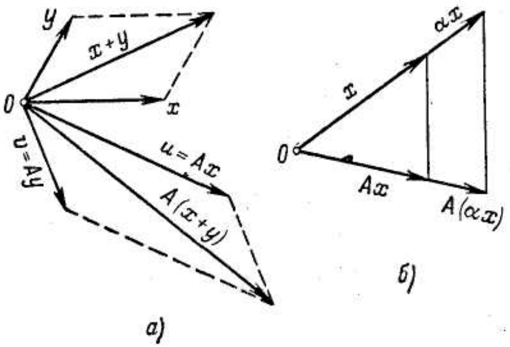


Рис. 7.5.

Второе же свойство означает, что если длину вектора ***x*** увеличить в несколько раз, то длина вектора $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Ax}$ увеличится в столько же раз (рис. 7.5, *б)*. Отсюда следует, что при линейном преобразовании колинеарные векторы переходят в колинеарные, а компланарные - в компланарные.

2. Рассмотрим некоторые примеры линейных преобразований.
а) Преобразование, которое ставит в соответствие вектору $\boldsymbol{x}$ сам этот вектор, очевидно, является линейным. Оно называется *тождественным* преобразованием и обозначается буквой $\boldsymbol{E}$, так что $\boldsymbol{Ex} = \boldsymbol{x}$.
б) Преобразование, которое ставит в соответствие вектору $\boldsymbol{x}$ вектор $\lambda\boldsymbol{x}$, также есть линейным. В самом деле, если $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$, то

$$A(x+y) = \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y = Ax + Ay,$$
$$A(\alpha x) = \lambda(\alpha x) = \alpha(\lambda x) = \alpha Ax.$$

Геометрически линейное преобразование $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$ представляет собой *однородное растяжение* (или *сжатие)* всех векторов пространства с одинаковым коэффициентом растяжения. Такое преобразование называется ***гомотетией***. (При $\lambda<0$ растяжение всех векторов пространства сопровождается отображением их от начала координат.)

б) При $\lambda=0$ линейное преобразование, рассмотренное в предыдущем примере, ставит в соответствие любому вектору $\boldsymbol{x}$ нулевой вектор $\boldsymbol{0}$. Это преобразование обозначают буквой $\boldsymbol{N}$ и называют *нулевым* преобразованием, так что

$$\boldsymbol{Nx}=\boldsymbol{0}$$

г) Преобразование $\boldsymbol{A(x)} = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}$ при $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ не является линейным, так как

$$\boldsymbol{A(y)}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{A(x+y)} = \boldsymbol{x+y+a} \text{ и } \boldsymbol{A(x+y)} \neq \boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Ay}.$$

Рассмотрим еще несколько примеров линейных преобразований в двумерном просторанстве L_2, в котором задан ортонормированный базис { $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$}

д) Преобразование $\boldsymbol{A}$, которое вектору $\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2$ ставит в соответствие вектор $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{Ax}=x_1\boldsymbol{e}_1+\lambda x_2\boldsymbol{e}_2$, представляет собой *геометрическое растяжение (сжатие) плоскости L_2 в направлении, параллельном вектору $\boldsymbol{e}_2$* (рис. 7.6).

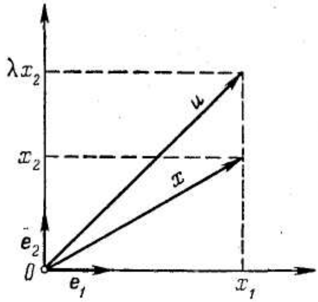


Рис. 7.6.

Докажем, что это преобразование будет линейным:

$$A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=(x_1+y_1)\,e_1+\lambda\,(x_2+y_2)\,e_2=$$
$$=(x_1e_1+\lambda x_2e_2)+(y_1e_1+\lambda y_2e_2)=A\boldsymbol{x}+A\boldsymbol{y},$$
$$A(\alpha\boldsymbol{x})=(\alpha x_1)\,e_1+\lambda\,(\alpha x_2)\,e_2=\alpha\,(x_1e_1+\lambda x_2e_2)=\alpha A\boldsymbol{x}.$$

с) При λ=0 рассмотренное высшее преобразование сжатия переходит у преобразование

$$\boldsymbol{A}(x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2)=x_1\boldsymbol{e}_1.$$

Это преобразование представляет собой *проектирование вектора* **x** *на ось* x_1, порождаемую вектором $\boldsymbol{e}_1$. Проектирование, следовательно, является линейным преобразованием.

ж) Преобразование, которое ставит в соответствие каждому вектору $\boldsymbol{x}$ плоскости L_2 вектор $\boldsymbol{u}$, получающийся из вектора $\boldsymbol{x}$ поворотом на угол α, будет, как легко проверить с помощью геометрического построения, линейным преобразованием (рис. 7.7). Его называют *преобразованием поворота.*

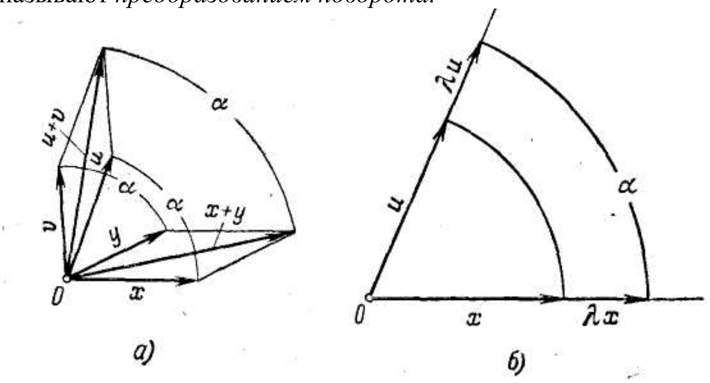


Рис. 7.7.

з) Преобразование, которое вектору $\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2$ ставит в соответствие вектор $\boldsymbol{u}=(x_1+kx_2)\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2$, носит название *преобразования сдвига;* линейность этого преобразования доказывается так же, как в примере *д).*

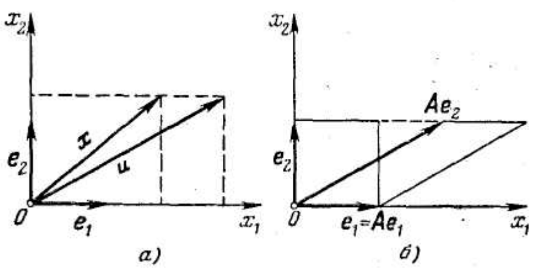


Рис. 7.8.

При этом преобразовании конец вектора $\boldsymbol{x}$ перемещается по прямой, параллельной оси $Ox_1,$ на величину kx_2 (рис. 7.8, *а);* квадрат, построенный на векторах $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, переходит в параллелограмм, построенный на векторах $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2+k\boldsymbol{e}_1$ (рис. 7.8,*б).*

7.14. Матрица линейного преобразования

1. Предположим, что в пространстве L_3 выбран некоторый ортонормированный базис $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Разложение произвольного вектора $\boldsymbol{x}$ по этому базису имеет вид

$$\boldsymbol{x} = x_i\boldsymbol{e}_i = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3.$$

Рассмотрим теперь в пространстве L_3 линейное преобразование

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Ax}.$$

Обозначим через u_i координаты вектора $\boldsymbol{a}$ относительно базиса $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Тогда

$$\boldsymbol{u} = u_i\boldsymbol{e}_i = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3.$$

Мы хотим найти зависимость координат вектора $\boldsymbol{u}$ от координат исходного вектора $\boldsymbol{x}$. Так как преобразование $\boldsymbol{A}$ линейное, то

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}\ \{ x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) = x_1\boldsymbol{Ae}_1 + x_2\boldsymbol{Ae}_2 + x_3\boldsymbol{Ae}_3.$$

Запишем разложение векторов $\boldsymbol{Ae}_1, \boldsymbol{Ae}_2, \boldsymbol{Ae}_3$ по исходному базису в виде

$$\boldsymbol{Ae}_1 = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + a_{31}\boldsymbol{e}_3.$$
$$\boldsymbol{Ae}_2 = a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + a_{32}\boldsymbol{e}_3,$$
$$\boldsymbol{Ae}_3 = a_{13}\boldsymbol{e}_1 + a_{23}\boldsymbol{e}_2 + a_{33}\boldsymbol{e}_3,$$

или в сокращенной форме:

$$\boldsymbol{Ae}_i = a_{ki}\boldsymbol{e}_k.$$

Подставляя эти разложения в выражение для вектора $\boldsymbol{Ax}$,найдем

$$\boldsymbol{Ax}\text{-}=(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\boldsymbol{e}_x +$$
$$+ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)\ \boldsymbol{e}_2 + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)\ \boldsymbol{e}_3,$$

или, сокращенно,

$$\boldsymbol{Ax} = a_{ik}x_k\boldsymbol{e}_i.$$

Но $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{u}$, поэтому координаты вектора $\boldsymbol{u}$ имеют вид

$$u_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$
$$u_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$
$$u_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3,$$

или, короче,

$$u_i = a_{ik}x_k. \tag{7.41}$$

Полученные формулы дают возможность определить координаты вектора $\boldsymbol{u}$, связанного с данным вектором $\boldsymbol{x}$ линейным преобразованием $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Ax}$. Они показывают, что координаты вектора $\boldsymbol{u}$ выражаются через координаты вектора $\boldsymbol{x}$ линейно и однородно.

Запишем коэффициенты формул, связывающих координаты векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{x}$, в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица называется *матрицей линейного преобразования* ***A*** и обозначается буквой *A*, так что

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Так как в матрице *A* число строк и столбцов одинаковое и равно трем, то она будет квадратной матрицей третьего порядка.

Таким образом, мы доказали, что *если в пространстве L_3 задан базис, то всякому линейному преобразованию* ***A*** *этого пространства соответствует определенная квадратная матрица третьего порядка.*

Обратно, *если дана квадратная матрица A третьего порядка, то при заданном базисе ей будет соответствать определенное линейное преобразование.* В самом деле, если дана матрица *A*, то с ее помощью можно построить векторную функцию $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{Ax}$, определяемую формулами (7.41). В силу линейности и однородности этих формул построенная вектор-функция будет линейной.

Итак, *если в пространстве* L_3 *задан некоторый базис* $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, *то между линейными преобразованиями этого пространства и* *квадратными матрицами третьего порядка устанавливается взаимно однозначное соответствие.*

Рассмотрим теперь линейное преобразование $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Ax}$ на плоскости L_2. Легко видеть, что если на этой плоскости задан базис $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}\}$, то ее линейное преобразование $\boldsymbol{A}$ может быть записано в виде

$$u_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2,$$
$$u_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2.$$

При этом

$$\boldsymbol{Ae_1} = a_{11}\boldsymbol{e_1}+a_{21}\boldsymbol{e_2},$$
$$\boldsymbol{Ae_2} = a_{12}\boldsymbol{e_1} + a_{22}\boldsymbol{e_2}.$$

Сдедовательно, в заданном базисе линейное преобразование плоскости L_2 описывается квадратной матрицей второго порядка

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Вообще, в n-мерном линейному пространстве L_n линейное преобразование $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Ax}$ при заданном базисе $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots, \boldsymbol{e_n}$ записывается в виде

$$u_i = a_{ik}\, x_k,$$

где индексы i и k принимают значение от 1 до n и по индексу k производится суммирование. Матрицей линейного преобразования в этом случае будет квадратная матрица A порядка n:

$$A=(a_{ik})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

2. Найдем теперь матрицы линейных преобразований, рассмотренных в пункте 7.13.

а) Так как при тождественном преобразовании $\boldsymbol{u}= \boldsymbol{Ex} = \boldsymbol{x}$, то $u_k=x_k$, и в любом базисе матрица тождественного преобразования имеет вид

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если использовать введенный в предыдущем микромодуле символ Кронекера

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{при } i=j,\\ 0 & \text{при } i\neq j,\end{cases}$$

то матрицу можно переписать в виде

$$E=(\delta_{ij}).$$

Матрица E называется *единичной.*

б) При подобном преобразовании $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$ координаты векторов $\boldsymbol{u}$ *и* $\boldsymbol{x}$ связаны соотношениями $u_i=\lambda x_i$. Поэтому матрица подобного преобразования в любом базисе имеет вид

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

или

$$A=(\lambda\delta_{ij}).$$

в) При нулевом преобразовании $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Nx} \equiv \boldsymbol{0}$ и $u_k = 0$.
Поэтому матрица нулевого преобразования состоит из одних нулей:

$$N=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Матрица N называется *нулевой.*

Заметим, что матрицы *тождественного, подобного и нулевого* преобразований имеют указанный выше вид не только в трехмерном пространстве, но и в пространстве любого числа измерений.

г) Геометрическое растяжение (сжатие) плоскости в направлении, параллельном вектору $\boldsymbol{e}_2$, ставит в соответствие вектору $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$ вектор $\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda x_2\boldsymbol{e}_2$.
Поэтому

$$u_1 = x_1,$$
$$u_2 = \lambda x_2,$$

и матрица этого преобразования имеет вид

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}.$$

д) При $\lambda = 0$ геометрическое сжатие становится проектированием на ось Ox_1 параллельно вектору $\boldsymbol{e}_2$. Матрица этого проектирования имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

е) Чтобы найти матрицу поворота плоскости L_2, рассмотрим на ней ортонормированный базис $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$. Если преобразование $\boldsymbol{A}$ — поворот на угол α, то

$$\boldsymbol{Ae_1} = \boldsymbol{e}_1 \cos\alpha + \boldsymbol{e}_2 \sin\alpha,$$
$$\boldsymbol{Ae_2} = -\boldsymbol{e}_1 \sin\alpha + \boldsymbol{e}_2 \cos\alpha$$

(рис. 7.9).

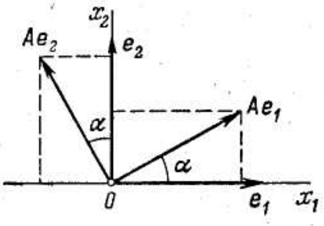


Рис. 7.9.

Поэтому

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) = x_1\boldsymbol{Ae}_1 + x_2\boldsymbol{Ae}_2 =$$
$$= (x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha)\,\boldsymbol{e}_1 + (x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha)\,\boldsymbol{e}_2$$

и

$$u_1 = x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha,$$
$$u_2 = x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha.$$

Сдедовательно, матрица поворота плоскости L_2 в прямоугольном базисе имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

ж) Сдвиг плоскости L_2 в направлении вектора $\boldsymbol{e}_1$ ставит в соответствие вектору $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$ вектор $\boldsymbol{u} = (x_1 + kx_2)\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$. Поэтому

$$u_1 = x_2 + kx_2,$$
$$u_2 = \qquad x_2$$

и матрица сдвига записывается так:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

з) Рассмотрим на плоскости L_2 еще преобразование, которое вектору $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$ ставит в соответствие вектор $\boldsymbol{u} = \lambda_1 x_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 x_2\boldsymbol{e}_2$. Это преобразование также будет линейным, и его матрица имеет вид

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}.$$

Геометрически это преобразование представляет собой совокупность двух геометрических растяжений (сжатий) плоскости относительно взаимно перпендикулярных осей $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ с коэффициентами, соответственно равными λ_1 и λ_2. Если какой-нибудь из коэффициентов растяжения отрицателен, например λ_1, то растяжение в $|\lambda_1|$ раз сопровождается отражением от прямой $\boldsymbol{e}_2$.

в) Точно так же в пространстве L_3 преобразование, представляющее собой совокупность трех геометрических растяжений (сжатий) относительно взаимно перпендикулярных осей $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, ставит в соответствие вектору $\boldsymbol{x} = x_i\boldsymbol{e}_i$ вектор

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 x_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 x_2\boldsymbol{e}_2 + \lambda_3 x_3\boldsymbol{e}_3.$$

Это преобразование будет линейным, и его матрица записывается так:

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}.$$

Матрицы такого вида, в которых все элементы вне главной диагонали равны нулю, называются *диагональными* матрицами. В частности, если $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$, рассматриваемое преобразование становится преобразованием гомотетии. Если $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$, то это преобразование будет преобразованием гомотетии только в плоскости векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$.

7.15. Определитель матрицы линейного преобразования. Ранг матрицы

Отнесем пространство L_3 к ортонормированному базису $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ и рассмотрим в нем линейное преобразование $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. Базисные векторы переходят при этом преобразовании в векторы

$$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = a_{1i}\,\boldsymbol{e}_1 + a_{2i}\boldsymbol{e}_2 + a_{3i}\boldsymbol{e}_3.$$

Координаты векторов $\boldsymbol{a}_i$ представляют столбцы матрицы линейного преобразования $\boldsymbol{A}$.

Вектор $\boldsymbol{x}=x_i\boldsymbol{e}_i$ при преобразовании $\boldsymbol{A}$ перейдет в вектор $\boldsymbol{u}$, где

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = x_i\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = x_i\boldsymbol{a}_i.$$

Следовательно, вектор $\boldsymbol{u}$ раскладывается по векторам $\boldsymbol{a}_i$ так же, как исходный вектор $\boldsymbol{x}$ по векторам $\boldsymbol{e}_i$.

Рассмотрим единичный куб, построенный на базисных векторах $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. Ориентированный объем V_e этого куба равен ±1 в зависимости от того, будет ли тройка векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ правой или левой. Если воспользоваться величиной ε, введенной в п. 5.5, то можно записать, что $V_e = \varepsilon$.

При преобразовании $\boldsymbol{A}$ куб, построенный на векторах $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, перейдет в наклонный параллелепипед, построенный на векторах $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$. Ориентированный объем этого параллелепипеда равен смешанному произведению векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$:

$$V_a = \{ \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \}.$$

Используя выражение для смешанного произведения в координатах (п. 7.5), получим

$$V_a = \varepsilon \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Определитель, который содержится в этом выражении, отличается от определителя матрицы линейного преобразования $\boldsymbol{A}$ только тем, что в нем строки заменены столбцами. Так как величина определителя при этом не меняется, то

$$V_a = \varepsilon | A |,$$

где через $| A |$ обозначен определитель матрицы A.

Рассмотрим теперь произвольный параллелепипед, построенный на векторах $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$. При линейном преобразовании $\boldsymbol{A}$ он перейдет в параллелепипед, построенный на векторах

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1, \quad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2, \quad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_3.$$

При этом векторы $\boldsymbol{u}_i$ раскладываются по векторам $\boldsymbol{a}_i$ таким же образом, как векторы $\boldsymbol{x}_i$ по векторам исходного базиса $\boldsymbol{e}_i$. Поэтому, если обозначить через V_x объем параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$, а через V_u — объем параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, то

$$\frac{V_u}{V_a} = \frac{V_x}{V_e},$$

откуда

$$\frac{V_u}{V_x} = | A |.$$

Таким образом, *определитель матрицы линейного преобразования представляет собой коэффициент искажения объема при линейном преобразовании.*

Если $|A| > 0$, то ориентированные объемы V_a и V_x имеют одинаковый знак и, следовательно, преобразование $\boldsymbol{A}$ сохраняет ориентацию векторов; если же $|A| < 0$, то преобразование $\boldsymbol{A}$ меняет ориентацию векторов на противоположную.

Если $|A|= 0$, то

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)=0,$$

и векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ будут линейно зависимые. Предположим, что они не коллинеарны, и обозначим через π плоскость, порожденную этими векторами. Тогда каждый вектор $\boldsymbol{x} = x_i\boldsymbol{e}_i$ перейдет в вектор $\boldsymbol{u}= x_i\boldsymbol{a}_i$, лежащий в этой плоскости π. Следовательно, линейное преобразование $\boldsymbol{A}$ переводит все векторы пространства в векторы, лежащие в плоскости π. Если же векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ коллинеарны, то преобразование $\boldsymbol{A}$ переводит все векторы пространства в векторы прямой l, на которой лежат векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$. Наконец, если $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2= \boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0}$, то преобразование $\boldsymbol{A}$ переводит любой вектор $\boldsymbol{x}$ пространства L_3 в нулевой вектор.

Если $|A| = 0$, то линейное преобразование $\boldsymbol{A}$ называется *выродженным.* Но, как мы только что видели, степень вырождения преобразования $\boldsymbol{A}$ может быть различной. Чтобы определить ее, введем новое понятие — понятие ранга матрицы.

Рангом матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется наибольший порядок отличного от нуля определителя, который содержится в этой матрице. Если $|A| \neq 0$, то ранг матрицы A равен трем. Если $|A| = 0$, но векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ не коллинеарны, то, как легко видеть, в этой матрице найдется отличный от нуля определитель второго порядка, поскольку по крайней мере два столбца ее не пропорциональные, и ранг матрицы будет равен двум. Если $|A|=0$ и векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ коллинеарны, то все определители второго порядка, которые содержатся в матрице, равны нулю, и ее ранг будет равен единице (конечно, при этом предполагается, что хотя бы один из векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ будет отличен от нуля!). Наконец, нулевой ранг имеет только нулевая матрица N.

Обратно, если ранг матрицы A равен двум, единице или нулю, то эта матрица будет содержать соответственно два линейно независимых столбца, один линейно независимый столбец или же все элементы матрицы A равны нулю. А это означает, что среди векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ будет два линейно независимых или один или все они равны нулевому вектору.

Теперь мы подытожим предыдущие рассуждения в виде следующей теоремы.

Теорема. *Если ранг матрицы линейного преобразования A пространства L_3 равен r ($0 \le r \le 3$), то оно отображает это пространство на линейное пространство L_r размерности r.*

Примером преобразования ранга два может служить проектирование векторов пространства на одну из координатных плоскостей параллельно третьему базисному вектору. Например, при проектировании на плоскость X_1OX_2 вектору $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$ ставится в соответствие вектор $\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$. При таком преобразовании

$$u_1 = x_1, \quad u_2 = x_2, \quad u_3 = 0,$$

и матрица этого преобразования имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Более общим преобразованием ранга два будет преобразование

$$\boldsymbol{u} = a_1(\boldsymbol{b}_1x) + a_2(\boldsymbol{b}_2x),$$

где векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ попарно не коллинеарны. Это преобразование отображает все векторы пространства на векторы плоскости, порожденной векторами $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$.

Примером преобразования ранга один является проектирование векторов пространства на какую-нибудь ось. Если направление этой оси определяется единичным вектором $\boldsymbol{l}_0$, то проектирование на нее задается формулой

$$y = \boldsymbol{l}_0 (\boldsymbol{l}_0 \boldsymbol{x}).$$

Более общим преобразованием ранга один будет преобразование

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{bx}).$$

7.16. Линейные преобразования и билинейные формы

1. Пусть $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$— два произвольных вектора линейного пространства L_3 и $\boldsymbol{A}$— линейное преобразование этого пространства. Пусть $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{Ay}$— вектор, получающийся в результате применения преобразования $\boldsymbol{A}$ к вектору $\boldsymbol{y}$. Образуем скалярное произведение векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{u}$. Тогда выражение

$$\varphi = \boldsymbol{xu} = \boldsymbol{xAy}$$

будет скалярной функцией векторных аргументов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Эта скалярная функция, как легко видеть, является билинейной формой. В самом деле,

$$\varphi(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{Ay} + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{Ay} = \varphi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + \varphi(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}),$$

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = \boldsymbol{xA}(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{Ay}_1 + \boldsymbol{Ay}_2) = \boldsymbol{xAy}_1 + \boldsymbol{xAy}_2 = \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) + \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2),$$

$$\varphi(\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{xAy} = \alpha\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{xA}(\alpha\boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{xAy} = \alpha\varphi(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}).$$

Докажем теперь, что компоненты тензора второй валентности, который определяется билинейной формой $\varphi=\boldsymbol{xAy}$, совпадают с элементами матрицы линейного преобразования $\boldsymbol{A}$. Действительно, если в пространстве L_3 задан ортонормированный базис $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$, то

$$\boldsymbol{x}=x_i\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{y}=y_i\boldsymbol{e}_i,\quad \boldsymbol{u} = u_i\boldsymbol{e}_i$$

и так как $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Ay}$, то

$$u_i= a_{ij}\, y_j,$$

где $A=(a_{ij})$ — матрица линейного преобразования $\boldsymbol{A}$. Билинейная форма φ записывается теперь в виде

$$\varphi = x_iu_i = a_{ij}\, x_iy_j.$$

Это выражение показывает, что матрица коэффициентов билинейной формы φ совпадает с матрицей $A=(a_{ij})$ линейного преобразования $\boldsymbol{A}$. Но матрица коэффициентов билинейной формы φ образует, как мы знаем, тензор валентности два. Следовательно, *матрица линейного преобразования* ***A*** *также представляет собой тензор валентности два.*

Но легко видеть, что и, обратно, *всякий тензор валентности два определяет в линейном просторанстве L_3 линейное преобразование.* В самом деле, пусть a_{ij} — такой тензор и x_i — координаты произвольного вектора $\boldsymbol{x}$ просторанства. Свернув тензор a_{ij} с вектором $\boldsymbol{x}$, получим координаты нового вектора $\boldsymbol{u}$:

$$u_i = a_{ij}x_j.$$

Определенная таким образом вектор-функция, как легко доказать, будет линейной. Следовательно, тензор a_{ij} определяет в просторанстве L_3 линейное преобразование $\boldsymbol{A}$, матрица которого совпадает с матрицей $A=(a_{ij})$, составленной из компонент этого тензора.

2. В п. 7.11 было доказано, что тензоры любой фиксированной валентности p образуют линейное пространство размерности $3^{p.}$ В частности, это относится и к тензорам второй валентности. Поставим в соответствие сумме тензоров a_{ij} и b_{ij} линейное преобразование $\boldsymbol{C}$, матрицей которого является тензор $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$. Это преобразование $\boldsymbol{C}$ называется *суммой преобразований* $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, матрицами которых служат тензоры a_{ij} и b_{ij}.

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}.$$

Точно так же произведению тензора a_{ij} на действительное число λ поставим в соответствие линейное преобразование $\boldsymbol{D}$, матрица которого является тензор $d_{ij}=\lambda a_{ij}$. Это преобразование называется *произведением преобразования* $\boldsymbol{A}$ *на число* λ:

$$\boldsymbol{D}=\lambda\boldsymbol{A}.$$

Геометрически преобразование $\boldsymbol{C}$ можно осуществить следующим образом. Пусть $\boldsymbol{x}$ — произвольный вектор пространства L_3 и $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax}$, $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{Bx}$, $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{Cx}$. Тогда (рис. 7.10, *а)*

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}.$$

Действительно, обозначая через x_i, y_i, z_i, u_i координаты соответствующих векторов относительно базиса $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, получим

$$u_i = c_{ij}x_j = (a_{ij}+b_{ij})\,x_j = a_{ij}x_j + b_{ij}x_j = y_i + z_i.$$

Точно так же доказывается, что

$$\boldsymbol{Dx} = (\lambda\,\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \lambda(\boldsymbol{Ax}) \text{ (рис. 7.10, } б).$$

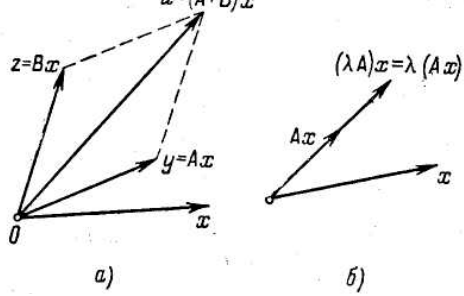


Рис. 7.10.

Так как тензоры валентности два образуют линейное пространство размерности 9, то и соответствующие им линейные преобразования также образуют линейное пространство той же размерности.

3. Кроме преобразования ***A***, с тензором a_{ij} можно связать еще одно линейное преобразование, которое вектору $\boldsymbol{x}=x_i\boldsymbol{e}_i$ ставит в соответствие вектор ***и*** с координатами

$$u_i = a_{ij}x_j;$$

здесь свертывание в правой части выполняется по первому индексу тензора a_{ij}. Это преобразование обозначают символом ***A**** и называют *соединенным преобразованием по отношению к преобразованию* ***A.*** Если положить $a^*_{ij} = a_{ji}$, то линейное преобразование ***A**** запишется в виде

$$u_i = a^*_{ij}\, x_j.$$

Следовательно, матрицей преобразования ***A**** служит матрица $A^*=(a^*_{ij})$, получающаяся из матрицы *A* путем замены ее строк столбцами; такая операция называется операцией *транспонирования* матрицы *A*.

Рассмотрим теперь произвольную билинейную форму $\varphi=\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. В ортонормированном базисе $\{e_i\}$ эта форма записывается в виде

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = a_{ij}x_iy_j.$$

Пусть ***A*** — линейное преобразование, матрица которого совпадает с матрицей $A = (a_{ij})$ этой билинейной формы. Тогда форма φ может быть записана в виде

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_i(a_{ij}y_j) = \boldsymbol{xAy}.$$

Но можно провести другую группировку членов в билинейной форме φ и записать ее так:

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = y_j\,(a_{ij}x_i).$$

Вектор ***и*** с координатами $u_j=a_{ij}x_i$ получается из вектора $\boldsymbol{x}=x_i\boldsymbol{e}_i$ при помощи преобразования ***A****. Поэтому билинейная форма φ может быть записана и так:

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) =\boldsymbol{yA^*x}.$$

Сравнивая два полученных выше выражения для формы $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, находим, что

$$\boldsymbol{xAy}=\boldsymbol{yA^*x}. \qquad (7.42)$$

4. Линейное преобразование ***A*** называется *симметричным,* если оно совпадает с преобразованием ***A****, сопряженным по отношению к ***A.***

Докажем, что *для того, чтобы линейное преобразование* ***A*** *было симметричным, необходимо и достаточно, чтобы связанная с ним билинейная форма* $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) =\boldsymbol{yAx}$ *была симметричной.*

Пусть ***A*** = ***A****. Тогда

$$\boldsymbol{xAy = yA^{*}x = yAx},$$

что и означает симметрию формы φ.

Пусть, обратно, форма φ симметрична. Это означает, что φ(***x, y)*** = φ(***y, x)***, т.е.

$$\boldsymbol{xAy=yAx}.$$

Сравнивая полученное равенство с соотношением (7.42), найдем, что

$$\boldsymbol{yAx=yA^{*}x}.$$

Так как это равенство должно выполняться для любого вектора ***y***, то

$$\boldsymbol{Ax = A^{*}x}.$$

А так как последнее равенство должно выполняться для любого вектора ***x***, то ***A* = *A****.

Из доказанного предложения следует, что матрица симметричного преобразования является симметричной, т.е. удовлетворяет условию $a_{ij}=a_{ji}$. В самом деле, ведь этим свойством обладает тензор, определяемый симметричной билинейной формой.

Далее, из того же предложения следует также, что *между симметричными линейными преобразованиями и квадратичными формами существует взаимно однозначное соответствие,* а именно: симметричному линейному преобразованию ***A*** с матрицей $A = (a_{ij})$ соответствует квадратичная форма

$$\varphi = a_{ij}x_ix_j,$$

которая теперь может быть записана, в виде

$$\varphi = \boldsymbol{xAx}.$$

Обратно, квадратичной форме $\varphi = a_{ij}x_ix_j$ соответствует симметричное линейное преобразование с матрицей $A = (a_{ij})$.

Рассмотрим характеристическую поверхность тензора, соответствующую симметричному линейному преобразованию ***A*.** Уравнение этой поверхности, записанное ранее в виде

$$a_{ij}x_ix_j = 1,$$

может быть переписано так:

$$\boldsymbol{xAx}=1.$$

Эту поверхность называют также *характеристической поверхностью симметричного линейного преобразования* ***A*.**

Докажем теперь, что *вектор* ***u=Ax*** *имеет направление нормали к характеристической поверхности симметричного линейного преобразования* ***A****, проведенной в той ее точке М, для которой вектор* $\overline{OM}$ *коллинеарен вектору* ***x*** (рис. 7.11).

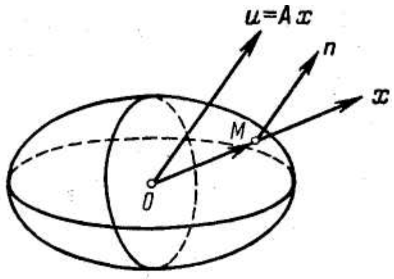


Рис. 7.11.

В самом деле, вектор нормали к поверхности, заданной в декартовой прямоугольной системе координат уравнением $\varphi=(x_1, x_2, x_3)=c$, имеет своими координатами величины $\partial\varphi/\partial x_i$, так что

$$\boldsymbol{n}=(\partial\varphi/\partial x_i)\boldsymbol{e}_i.$$

Но

$$\varphi = a_{ij}x_ix_j$$

и

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = 2a_{ij}x_j = 2u_i,$$

что и доказывает наше утверждение.

5. Линейное преобразование $\boldsymbol{A}$ называется *кососимметричным,* если

$$\boldsymbol{A}^* = -\boldsymbol{A}.$$

Аналогично тому, как это было сделано для симметричного преобразования, можно доказать, что билинейная форма, соответствующая кососимметричному преобразованию, будет кососимметричной, и обратно. Отсюда непосредственно следует, что матрица кососимметричного линейного преобразования кососимметрична, т.е. удовлетворяет условию

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

и, в частности, $a_{ii} = 0$.

Рассмотрим теперь вектор $\boldsymbol{a} = a_i\boldsymbol{e}_i$, где

$$a_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}a_{jk}.$$

Подставляя сюда значение компонент дискриминантного тензора, получим, что

$$a_1 = -\varepsilon a_{23}, \quad a_2 = -\varepsilon a_{31}, \quad a_3 = -\varepsilon a_{12},$$

где величина ε равна +1 в правой и — 1 в левой системе координат. Поэтому матрица кососимметричного преобразования может быть записана так:

$$(a_{ij}) = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Докажем теперь, что кососимметричное линейное преобразование ***A*** может быть представлено в виде

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}.$$

В самом деле, если $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, то

$$y_1 = a_{1j}x_j = \varepsilon(-a_3x_2 + a_2x_3),$$
$$y_2 = a_{2j}x_j = \varepsilon(\quad a_3x_1 - a_1x_3),$$
$$y_3 = a_{3j}x_j = \varepsilon(-a_2x_1 + a_1x_2).$$

Но выражения, которые стоят в правой части этих формул, в точности совпадают с координатами векторного произведения векторов ***a*** и ***x***.

6. Найдем билинейные формы, соответствующие некоторым из линейных преобразований рассмотренных в предыдущих пунктах этого микромодуля.

а) Тождественному преобразованию $\boldsymbol{E}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ будет соответствовать билинейная форма

$$\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{E}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y},$$

совпадающая со скалярным произведением векторов ***x*** и ***y***. Так как эта форма симметрична, то ***E*** - симметричное линейное преобразование. Соответствующая ему квадратичная форма имеет вид

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{E}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^2.$$

Поэтому его характеристической поверхностью будет единичная сфера $\boldsymbol{x}^2=1$.

б) Преобразованию гомотетии $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ соответствует билинейная форма

$$\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}(\lambda\boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}),$$

только множителем λ отличающаяся от предыдущей. Эта форма симметрична, так же как и преобразование гомотетии. Матрица билинейной формы φ и соответствующего ей преобразования гомотетии имеет вид $(\lambda\delta_{ij})$. Определяемый этой матрицей тензор иногда называют *шаровым.* Квадратичная форма, соответствующая преобразованию гомотетии, записывается в виде

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}^2.$$

Его характеристической поверхностью будет сфера $\lambda\boldsymbol{x}^2=1$ радиуса $R=1/\sqrt{\lambda}$. Заметим, что коэффициент гомотеии λ тожет быть и отрицательным. В этом случае характеристической поверхностью будет сфера «мнимого» радиуса.

в) Преобразованию $\boldsymbol{A}$, которое ставит в соответствие вектору $\boldsymbol{x} = x_i\boldsymbol{e}_i$ вектор

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 x_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 x_2 \boldsymbol{e}_2 + \lambda_3 x_3 \boldsymbol{e}_3$$

отвечает билинейная форма

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \lambda_3 x_3 y_3$$

Эта форма является симметричной. Таким же будет и преобразование $\boldsymbol{A}$. Его матрицей является диагональная матрица (пример *и)* п.7.14), которая, конечно, симметрична. Квадратичная форма, соответствующая этому преобразованию, записывается в виде

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2,$$

а ее характеристическая поверхность имеет уравнение

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 1.$$

Полученное уравнение определяет центральную поверхность второго порядка, для которой координатные оси являются осями симметрии. Если все коэффициенты растяжения λ_i положительны, то эта поверхность будет *эллипсоидом.* Если два из чисел λ_i положительны, а одно отрицательно, то характеристической поверхностью будет *однополостный гиперболоид.* Если одно из чисел λ_i положительно, а два отрицательны, то характеристическая поверхность является *двуполостным гиперболоидом.* И, наконец, если все числа λ_i отрицательны, то характеристическая поверхность будет *мнимым эллипсоидом.* Если два какие-либо значения λ_i одинаковы, то характеристическая поверхность становится *поверхностью вращения.* Если $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$, то характеристическая поверхность становится *сферой.*

г) Преобразование поворота плоскости L_2 вокруг точки O на угол α определяется тензором, матрица которого, как мы знаем, имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Билинейная форма, соответствующая этому преобразованию, запишется так:

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = x_1 y_1 \cos\alpha - x_1 y_2 \sin\alpha + x_2 y_1 \sin\alpha + x_2 y_2 \cos\alpha,$$

или

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1 y_1 + x_2 y_2)\cos\alpha - (x_1 y_2 - x_2 y_1)\sin\alpha.$$

Эта билинейная форма уже не является симметричной. Поэтому преобразование $\boldsymbol{A}^*$, сопряженное преобразованию $\boldsymbol{A}$, не совпадает с $\boldsymbol{A}$. Его матрица имеет вид

$$A^* = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Геометрически преобразование A^* означает поворот вокруг точки O на угол $-\alpha$.

д) Преобразование сдвига плоскости L_2 в направлении вектора $\boldsymbol{e}_1$ определяется тензором, матрица которого имеет вид (п. 7.14, пример *ж))*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это преобразование не является симметричным, как и соответствующая ему билинейная форма

$$\varphi\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{xAy} = x_1y_1 + kx_1y_2 + x_2y_2.$$

Преобразование $\boldsymbol{A}^*$, сопряженное преобразованию $\boldsymbol{A}$, будет иметь матрицу

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}.$$

Геометрически преобразование $\boldsymbol{A}^*$ также представляет собой сдвиг, но теперь уже в направлении вектора $\boldsymbol{e}_2$.

Так как преобразования, которые рассмотрены в двух последних примерах, не являются симметричными, то для них не имеет смысла строить характеристические поверхности.

7.17. Умножение линейных преобразований и умножение матриц

1. Пусть в пространстве L_3 заданы два линейных преобразования $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Возьмем произвольный вектор $\boldsymbol{x}$ пространства и подвергнем его преобразованию $\boldsymbol{A}$. Он перейдет при этом в вектор $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ax}$. Подвергнем вектор $\boldsymbol{y}$ преобразовании $\boldsymbol{B}$. Получим третий вектор $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{By}$. Вектор $\boldsymbol{z}$ можно рассматривать как вектор-функцию векторного аргумента $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{Ax}).$$

Легко видеть, что функция $\boldsymbol{C}$ будет линейным преобразованием, так как

$$C(x+y)=B[A(x+y)]=B(Ax+Ay)=$$
$$=B(Ax)+B(Ay)=Cx+Cy,$$
$$C(\lambda x)=B[A(\lambda x)]=B(\lambda Ax)=\lambda B(Ax)=\lambda Cx.$$

Линейное преобразование ***C*** называется *произведением* линейных преобразований ***A*** и ***B:***

$$C=BA.$$

В этом произведении сомножители пишутся справа налево в том порядке, в каком произволятся соответствующие преобразования.

Отметим основные свойства умножения линейных преобразований:

а) *Произведение линейных преобразований обладает сочетательным свойством:*

$$C(BA) = (CB)A.$$

В самом деле, пусть ***x*** — произвольный вектор. Тогда

$$[C(BA)]x=C[(BA)x] = C[B(Ax)],$$
$$[(CB)A]x = (CB)(Ax) = C[B(Ax)].$$

б) *Умножение любого преобразования на тождественное не меняет этого преобразования:*

$$AE = EA = A.$$

Действительно,

$$(AE)x = A(Ex) = Ax,$$
$$(EA)x = E(Ax) = Ax.$$

Таким образом, при умножении линейных преобразований тождественное преобразование играет роль единицы.

в) *Умножение линейных преобразований не коммутативно,* т.е., вообще говоря,

$$AB \neq BA.$$

Покажем на примере справедливость этого неравенства. Пусть преобразование ***A*** — поворот плоскости L_2 на 90° вокруг точки *O*, а преобразование ***B*** — проектирование векторов этой плоскости на ось Ox_1 и ***x*** — произвольный вектор. Тогда легко видеть (рис. 7.12), что вектор ***(BA)x*** направлен по оси Ox_2, а вектор ***(AB) x*** — по оси Ox_2.

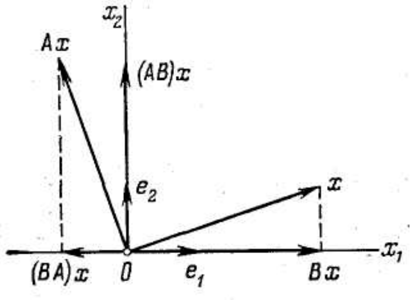


Рис. 7.12.

Поэтому

$$(BA)x \neq (AB)x,$$

и, следовательно,

$$BA \neq AB.$$

Преобразования, для которых выполняется равенство $AB = BA$, называются *перестановочными.* Например, мы уже видели, что

$$AE=EA.$$

Точно так же, если преобразование A представляет собой геометрическое растяжение плоскости вдоль осы Ox_1, а B— геометрическое растяжение вдоль оси Ox_2, то снова

$$AB = BA.$$

В самом деле, если $x = x_1e_1 + x_2e_2$, то

$$Ax = \lambda_1 x_1 e_1 + x_2 e_2,$$

$$Bx = x_1 e_1 + \lambda_2 x_2 e_2$$

и

$$(AB)\,x = (BA)\,x = \lambda_1 x_1 e_1 + \lambda_2 x_2 e_2.$$

Найдем линейное преобразование, сопряженное произведению линейных преобразований A и B. Это преобразование $(AB)^*$ определяется билинейной формой

$$x[(AB)y]=y[(AB)^*\ x].$$

Но

$$(AB)y = A\ (By).$$

Поэтому

$$x\,[(AB)\,y] = x\,[A\,(By)] = (By)\,(A^*x) = (A^*x)\,(By) = \\ = y\,[B^*\,(A^*x)] = y\,[(B^*A^*)\,x].$$

Отсюда следует, что

$$y[(AB)^*x]=y[(B^*A^*)x].$$

Так как это соотношение должно выполняться для любых $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, то

$$(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*.$$

2. Пусть теперь в пространстве L_3 задан базис $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$. Линейным преобразованием $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ в этом базисе соответствуют матрицы A и B, а преобразованию $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{BA}$ - *матрица* C. Эта матрица называется *произведением* матриц B и A: $C=BA$. Найдем, как выражаются элементы матрицы C через элементы матриц B и A.

Пусть $A=(a_{ik})$, $B=(b_{ik})$. Тогда в базисе $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ линейное преобразование $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ax}$ записывается в виде

$$y_k = a_{ki}x_i,$$

а линейное преобразование $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{By}$ — в виде

$$z_j = b_{jk}y_k.$$

Линейное преобразование $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{Cx}$ получим, исключая из этих соотношений y_k:

$$z_j = b_{jk}a_{ki}x_i.$$

Следовательно, элементами матрицы C будут величины

$$c_{ji} = b_{jk}a_{ki}.$$

Отсюда видно, что *величины c_{ji} представляют собой компоненты тензора второй валентности, который получается при свертывании тензоров b_{jk}* и *a_{ki} по индекса k.* Запишем подробнее элементы матрицы C:

$$c_{ji} = b_{j1}a_{1i} + b_{j2}a_{2i} + b_{j3}a_{3i}.$$

Так как

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

это можно заметить, что *элемент c_{ji} матрицы C получается путем умножения элементов j-й строки матрицы B на соответствующие элементы i-го столбца матрицы A и сложения полученных произведений.*

Подобным же путем можно определить умножение квадратных матриц любого порядка. Например, для матриц второго порядка оно будет выглядеть так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Отмеченные выше основные свойства умножения линейных преобразований автоматически переносятся на умножение матриц.

Матрица тождественного преобразования $E=(\delta_{ij})$ играет в этом умножении роль единицы, поэтому-то она и называется *единичной* матрицей. Умножение матриц, как и умножение преобразований, вообще говоря, не является перестановочным. Подтвердим этот факт следующим числовым примером:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 3+2(-1) & 1\cdot 0+2\cdot 1\\ 0\cdot 3+1\cdot(-1) & 0\cdot 0+1\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 1+0\cdot 0 & 3\cdot 2+0\cdot 1\\ (-1)\cdot 1+1\cdot 0 & (-1)\cdot 2+1\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6\\ -1 & -1\end{pmatrix}.$$

3. Докажем теперь следующее важное предложение:

При умножении матриц их определители перемножаются.

Пусть A и B — произвольные квадратные матрицы третьего порядка. В прямоугольном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ им будут соответствовать линейные преобразования $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Произведение $C=BA$ этих матриц соответствует линейному преобразованию $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{BA}$. Рассмотрим произвольный параллелепипед, образованный векторами $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$, и обозначим его ориентированный объем через V_x. При преобразовании $\boldsymbol{A}$ векторы $\boldsymbol{x}_i$ перейдут в векторы $\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i$, образующие параллелепипед, объем которого $V_y= |A|V_x$. А векторы $\boldsymbol{y}_i$ при преобразовании $\boldsymbol{B}$ перейдут в векторы $\boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_i$, образующие параллелепипед с объемом $V_z = |B|V_y$. Но, с другой стороны, $\boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_i$, и поэтому $V_z = |C|V_x$. Следовательно, $|C| = |B||A|$, т.е. $|BA|= |B||A|$, что и требовадось доказать.

Эта теорема может быть доказана и чисто алгебраически, если воспользоваться хорошо известными свойствами определителей. Проведем доказательство для матриц второго порядка. Пусть

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$C=BA=\begin{pmatrix}b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22}\\ b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}\end{pmatrix},$$

$$|C|=\begin{vmatrix}b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22}\\ b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}b_{11}a_{11} & b_{11}a_{12}\\ b_{21}a_{11} & b_{21}a_{12}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_{11}a_{11} & b_{12}a_{22}\\ b_{21}a_{11} & b_{22}a_{22}\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12}\\ b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_{12}a_{21} & b_{12}a_{22}\\ b_{22}a_{21} & b_{22}a_{22}\end{vmatrix}.$$

Первый и четвертый из этих определителей равен нулю, так как их столбцы пропорциональны. Следовательно,

$$|C| = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + a_{21}a_{12}\begin{vmatrix} b_{12} & b_{11} \\ b_{22} & b_{21} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = |B||A|.$$

Доказанное предложение называют также теоремой об умножении определителей. Из этой теоремы следует, что $|BA| = |AB|$. Кроме того, ясно, что если хотя бы одно из преобразований ***A*** или ***B*** вырожденное, то вырожденным будет и их произведение.

4. Умножение матриц, определенное в этом пункте, дает возможность записать в новом виде формулы преобразования компонент матрицы линейного оператора ***A*** при переходе к новому базису. Как мы уже видели, матрица $A=(a_{ij})$ линейного преобразования ***A*** представляет собой тензор второй валентности. При переходе от ортонормированного базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ к ортонормированному базису $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$, который определяется уравнениями

$$\mathbf{e}_{i'} = \gamma_{i'i}\mathbf{e}_i$$

компоненты такого тензора, как было показано ранее, преобразуются по формулам

$$a_{i'j'} = \gamma_{i'i}\gamma_{j'j}\, a_{ij}; \tag{7.43}$$

здесь $\gamma_{i'i}$ — компоненты ортогональной матрицы $\Gamma=(\gamma_{i'i})$, определяющей преобразование базиса. Но для ортогональной матрицы Γ справедливы соотношения

$$\gamma_{i'i} = \gamma_{ii'}$$

где $\gamma_{ii'}$ — элементы матрицы Γ^{-1}, определяющей переход от нового базиса к старому. В силу этих соотношений формулы (7.43) могут быть переписаны в виде

$$a_{i'j'} = \gamma_{i'i}\, a_{ij}\gamma_{jj'}.$$

Рассмотрим теперь правую часть последних формул. Легко видеть, что она представляет собой результат умножения матриц Γ, A и Γ^{-1}. Если через A' обозначить матрицу линейного преобразования A в новом базисе $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$, то можно переписать эти формулы в виде

$$A' = \Gamma A \Gamma^{-1} \tag{7.44}$$

Такая запись формулы преобразования матрицы линейного оператора при переходе к новому базису оказывается очень удобной.

Докажем, пользуясь этой записью, что определитель матрицы линейного преобразования не меняется при переходе к новому базису.

В самом деле, из теоремы об умножении определителей и равенства (7.44) следует, что

$$|A'| = |\Gamma| \cdot |A| \cdot |\Gamma^{-1}|.$$

Но

$$|\Gamma| = |\Gamma^{-1}| = \pm 1.$$

Поэтому

$$|A'| = |A|.$$

Это равенство показывает, что определитель линейного преобразования является инвариантом, и поэтому он должен иметь определенный геометрический смысл. И действительно, выше (п. 7.15) мы видели, что определитель линейного преобразования равен коэффициенту искажения объемов при этом преобразовании.

Заметим, что <u>*матрица*</u> $\Gamma=(\gamma_{i'i})$, определяющая переход от базиса $\{\boldsymbol{e}_i\}$ к новому базису $\{\boldsymbol{e}_{i'}\}$, <u>*не является тензором*</u>, так как ее индексы i и i' относятся к различным системам координат, и она не определяет билинейной формы в пространстве L_3.

7.18. Обратное линейное преобразование и обратная матрица

1. Рассмотрим некоторое линейное преобразование $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax}$. Преобразование $\boldsymbol{B}$ называется *обратным* для преобразования $\boldsymbol{A}$, если $\boldsymbol{By}=\boldsymbol{B(Ax)}=\boldsymbol{x}$, т.е. если оно возвращает вектор $\boldsymbol{y}$ в исходное положение $\boldsymbol{x}$. Таким образом, обратное преобразование $\boldsymbol{B}$ определяется равенством

$$\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E},$$

где $\boldsymbol{E}$ - тождественное преобразование. Легко видеть, что преобразование $\boldsymbol{B}$, обратное $\boldsymbol{A}$, будет линейным преобразованием. Не для всякого линейного преобразования $\boldsymbol{A}$ существует обратное. Пусть, например, преобразование $\boldsymbol{A}$ — проектирование пространства на плоскость x_1Ox_2. Тогда образы всех векторов пространства лежат на этой плоскости, и если мы возьмем вектор $\boldsymbol{y}$, который не лежит на ней, то он не будет иметь прообраза. Далее мы докажем, что каждое невырожденное преобразование имеет обратное.

Преобразование, обратное преобразованию $\boldsymbol{A}$, обозначают через $\boldsymbol{A}^{-1}$, так что

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}.$$

Очевидно, что $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{E}$.

Пусть преобразование $\boldsymbol{A}$ имеет обратное и A — матрица преобразования $\boldsymbol{A}$ в некотором базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Матрицу преобразования $\boldsymbol{A}^{-1}$ называют *обратной* матрицей для матрицы A и обозначают через A^{-1}. Так как при перемножении преобразований их матрицы перемножаются, то

$$A^{-1}A = E \quad \text{и} \quad AA^{-1} = E,$$

где E-единичная матрица.

Из последнего равенства следует, что

$$|A^{-1}||A|=1,$$

т.е. *произведение определителей взаимно обратных матриц равно единице.* Значит, если матрица A имеет обратную, то ее определитель отличен от нуля: $|A| \neq 0$.

2. Докажем теперь, что *если* $\boldsymbol{A}$ — *невырожденное линейное преобразование, то оно имеет обратное преобразование* $\boldsymbol{A}^{-1}$, *и притом только одно.*

Линейное преобразование $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ax}$ в произвольном базисе $\{\boldsymbol{e}_v\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}$ записывается в форме

$$y_i = a_{ik}x_k, \tag{7.45}$$

где $(a_{ik})=A$ — матрица преобразования $\boldsymbol{A}$. Найти обратное преобразование — это значит найти вектор $\boldsymbol{x}$ по заданному вектору $\boldsymbol{y}$. Эта задача будет решена, если выразить координаты вектора $\boldsymbol{x}$ через координаты вектора $\boldsymbol{y}$, т.е. если разрешить предыдущие уравнения относительно x_k. Но система, которая состоит из трех линейных уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2, x_3, имеет единственное решение при любых y_i тогда и только тогда, когда определитель этой системы отличен от нуля, т.е. когда $\boldsymbol{A}$ — невырожденное линейное преобразование,

Найдем теперь матрицу A^{-1} преобразования $\boldsymbol{A}^{-1}$, обратного к $\boldsymbol{A}$, полагая, что $|A| \neq 0$. Для этого перепишем уравнение (7.45) более подробно в виде

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = y_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = y_3. \end{aligned}\right\}$$

Так как определитель этой системы отличен от нуля, то для ее решения можно применить известные формулы Крамера. Например,

$$x_1 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} y_1 & a_{12} & a_{13} \\ y_2 & a_{22} & a_{23} \\ y_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Если обозначить через A_{ik} алгебраическое дополнение элемента a_{ik} в определителе $|A|$, то предыдущее выражение примет вид

$$x_1 = \frac{A_{11}}{|A|} y_1 + \frac{A_{21}}{|A|} y_2 + \frac{A_{31}}{|A|} y_3.$$

Аналогично для x_2 и x_3 получим

$$x_2 = \frac{A_{12}}{|A|} y_1 + \frac{A_{22}}{|A|} y_2 + \frac{A_{32}}{|A|} y_3,$$

$$x_3 = \frac{A_{13}}{|A|} y_1 + \frac{A_{23}}{|A|} y_2 + \frac{A_{33}}{|A|} y_3.$$

Коэффициенты при y_k, которые стоят в этих разложениях, и являются элементами искомой обратной матрицы. Если обозначить элементы обратной матрицы через $\tilde{a}_{ik}$, $A^{-1} = (\tilde{a}_{ik})$, то можно записать

$$\tilde{a}_{ik} = \frac{A_{ki}}{|A|},$$

т.е. *элемент* $\tilde{a}_{ik}$ *обратной матрицы равен алгебраическому дополнению элемента* a_{ki} *исходной матрицы, деленному на ее определитель.*

Матрица $\tilde{a}_{ik}$ линейного преобразования $\boldsymbol{A}^{-1}$ является тензором второй валентности. Этот тензор называется *обратным* для тензора a_{ik}, соответствующего линейному преобразованию $\boldsymbol{A}$.

Пусть теперь

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

- матрица второго порядка. Для нее обратная матрица найдется аналогичным образом. Но

$$A_{11} = a_{22}, \qquad A_{21} = -a_{12}, \qquad A_{12} = -a_{21}, \qquad A_{22} = a_{11}.$$

Поэтому

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{|A|} & -\frac{a_{12}}{|A|} \\ -\frac{a_{21}}{|A|} & \frac{a_{11}}{|A|} \end{pmatrix}.$$

Пусть, например,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $|A| = 1$ и

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Непосредственным умножением легко проверить, что $AA^{-1}=E$.

Найдем соотношение, которым удовлетворяют элементы взаимно обратных матриц. Пусть $A = (a_{ik})$, $A^{-1} = (\tilde{a}_{ik})$. Тогда $A^{-1}A = E$, $AA^{-1} = E$. Пользуясь правилом умножения матриц, мы получим отсюда

$$\tilde{a}_{ik}a_{kj}=\delta_{ij},$$
$$a_{ik}\tilde{a}_{kj}=\delta_{ij},$$

где в левой части по индексу k, как всегда, выполняется суммирование, а в правой - стоит симметричный символ Кронекера.

Отметим еще одно соотношение, которое связано с обращением произведения линейных преобразований:

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1},$$

которое приходится непосредственно:

$$(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{EB} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}.$$

Аналогичное соотношение имеет место и для матриц.

Обратим внимание еще на то, что матрица Γ^{-1} — матрица перехода от нового базиса $\boldsymbol{e}_{i'}$ к старому базису $\boldsymbol{e}_i$ — будет обратной матрицей по отношению к матрице Г перехода от старого базиса к новому. Поэтому $\Gamma\Gamma^{-1} = E$.

7.19. Группа линейных преобразований и ее подгруппы

1. Рассмотрим совокупность невырожденых линейных преобразований трехмерного линейного пространства. В этой совокупности определена *операция умножения преобразований,* обладающая следующими свойствами:

а) *Совокупность невырожденых преобразований замкнута относительно умножения,* так как $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ — невырожденное преобразование, если $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ невырождены.

б) *Операция умножения преобразований подчиняется сочетательному закону:* $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$.

в) *Совокупности невырожденых преобразований принадлежит тождественное преобразование* $\boldsymbol{E}$ *такое, что* $\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{EA} = \boldsymbol{A}$.

г) *Для каждого невырожденого преобразования* $\boldsymbol{A}$ *существует единственное обратное преобразование* $\boldsymbol{A}^{-1}$ *такое, что* $\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{E}$.

Этими свойствами обладает умножение не только линейных преобразований. Например, для совокупности всех положительных рациональных чисел обычное умножение также обладает перечисленными выше четырьмя свойства, то же самое можно сказать и об умножении в множестве отличных от нуля комплексных чисел. Число таких примеров легко увеличить.

Любое множество элементов, в котором определена операция умножения, которое обладает перечисленными выше свойствами, называется ***группой***.

Таким образом, совокупность *невырожденых* линейных преобразований трехмерного линейного пространства образуют группу. Эту группу называют *полной линейной группой третьего порядка* и обозначают через GL_3.

Так как каждому невырожденому линейному преобразованию пространства L_3 при заданном базисе соответствует квадратная матрица третьего порядка с определителем, отличным от нуля, и умножению преобразований соответствует умножение матриц, то ***эти матрицы также образуют группу***. В сущности, эта группа ничем не отличается от группы линейных преобразований, и ее мы тоже будем называть полной линейной группой и обозначать через GL_3.

Точно так же совокупность невырожденных линейных преобразований векторов плоскости образуют группу - полную *линейную группу второго порядка,* обозначаемую через GL_2. Матрицы второго порядка с определителями, отличными от нуля, образуют такую же группу. Вообще, совокупность невырожденных линейных преобразований пространства L_n, так же как и совокупность квадратных матриц n-го порядка с определителями, отличными от нуля, образуют группу GL_n — ***полную линейную группу порядка n.***

2. Но не только вся совокупность невырожденных линейных преобразований трехмерного пространства образует группу. В этой совокупности имеются подмножества, которые также замкнуты относительно умножения и вместе с каждым своим элементом содержат обратный ему элемент, а значит, образуют группу (что касается свойств б) и в), то они для подмножества выполняются автоматически: свойство сочетательности, справедливое для всего множества, выполняется и для подмножества, а тождественное преобразование принадлежит подмножеству, поскольку последнее вместе с каждым преобразованием $\boldsymbol{A}$ содержит обратное к нему преобразование $\boldsymbol{A}^{-1}$, а также их произведение $\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{E}$). Такие группы называются ***подгруппами*** полной линейной группы. Рассмотрим несколько примеров таких подгрупп.

а) Пусть преобразование $\boldsymbol{A}$ пространства L_3 не меняет ориентацию некомпланарных троек векторов. Определитель матрицы A такого преобразования будет положителен, $|A|>0$. Произведение двух преобразований, которые не меняют ориентации тройки векторов, очевидно, также не меняет их ориентации. Таким же свойством обладает и преобразование $\boldsymbol{A}^{-1}$, обратное преобразованию $\boldsymbol{A}$. Поэтому совокупность таких преобразований образует группу, которая является подгруппой группы GL_3. Этой группе соответствует группа матриц третьего порядка с положительными определителями. Заметим, что совокупность матриц с **отрицательными определителями** группы не образует, так как произведением двух матриц с отрицательными определителями будет матрица с положительным определителем.

б) Пусть преобразование $\boldsymbol{A}$ не меняет абсолютной величины объема параллелепипеда, натянутого на любые три вектора. Тогда абсолютная величина определителя матрицы этого преобразования равна единице, $|A|=\pm1$. Преобразования, которые обладают этим свойством, как и их матрицы, очевидно, образуют группу. Эта группа называется ***унимодулярной*** группой. Подгруппу унимодулярной группы образуют преобразования, которые сохраняют и **объем, и ориентацию тройки векторов**. Для таких преобразований $|A| = 1$.

в) Рассмотрим совокупность поворотов плоскости L_2 вокруг начала координат. Эта совокупность является группой, так как произведение двух поворотов, очевидно, также является поворотом, как и преобразование, обратное к повороту. Подтвердим это формальной вікладкой. В самом деле, если

$$A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$$

— матрицы поворота на угол α и угол β, то

$$AB=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$$

- матрица поворота на угол α+ β и

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

— матрица поворота на угол - α.

3. Рассмотрим еще одну важную подгруппу полной линейной группы — подгруппу ортогональных преобразований. Линейное преобразование $\boldsymbol{A}$ называется *ортогональным,* если оно не меняет величину скалярного произведения векторов. Это значит, что если $\boldsymbol{A}$ —

ортогональное преобразование, $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ — два произвольных вектора и $\boldsymbol{u}= \boldsymbol{Ax}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{Ay}$, то

$$\boldsymbol{uv} = \boldsymbol{xy}.$$

Докажем прежде всего, что ортогональные преобразования сохраняют длины векторов и углы между ними. В самом деле, если $\boldsymbol{A}$ — ортогональное преобразование и $\boldsymbol{u}= \boldsymbol{Ax}$, то $\boldsymbol{u}^2 = \boldsymbol{x}^2$, откуда следует, что $|\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{x}|$. Пусть, дальше, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{Ay}$, φ — угол между векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ и ψ— угол между векторами $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$. Так как

$$\cos\varphi = \frac{xy}{|x|\,|y|} \quad \text{и} \quad \cos\psi = \frac{uv}{|u|\,|v|},$$

то cos φ=cos ψ, и так как угол между векторами изменяется в пределах от 0 до π, то φ=ψ. Поэтому ортогональные преобразования пространства L_3 называют также *овращениями*.

Заметим, что если потребовать от преобразования $\boldsymbol{A}$ только сохранение длин векторов, то уже этого достаточно для того, чтобы оно было ортогональным. В самом деле, пусть преобразование $\boldsymbol{A}$ оставляет неизменными длины векторов и $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{Ax}$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{Ay}$. Тогда $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$, $|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|$ и $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})^2 = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^2$, откуда

$$\boldsymbol{u}^2 + 2\,\boldsymbol{uv} + \boldsymbol{v}^2 = \boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{xy} + \boldsymbol{y}^2.$$

Так как $\boldsymbol{u}^2 = \boldsymbol{x}^2$ и $\boldsymbol{v}^2=\boldsymbol{y}^2$, то

$$\boldsymbol{uv} = \boldsymbol{xy},$$

что и требовалось доказать.

Докажем следующую теорему.

Теорема. *Для того чтобы линейное преобразование* $\boldsymbol{A}$ *было ортогональным, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло соотношению*

$$\boldsymbol{A^*A} = \boldsymbol{E}. \qquad (7.46)$$

В самом деле, пусть $\boldsymbol{u}= \boldsymbol{Ax}$ и $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{Ay}$. Тогда, пользуясь свойствами билинейной формы, доказанными в п. 7.17, получим

$$\boldsymbol{uv} = (\boldsymbol{Ax})(\boldsymbol{Ay}) = \boldsymbol{x}[(\boldsymbol{A^*A})\boldsymbol{y}].$$

Если $\boldsymbol{A^*A} = \boldsymbol{E}$, то $\boldsymbol{uv} = \boldsymbol{xy}$ и $\boldsymbol{A}$ — ортогональное преобразование. Обратно, если $\boldsymbol{A}$ — ортогональное преобразование, то $\boldsymbol{uv}=\boldsymbol{xy}$ и $\boldsymbol{A^*A}= \boldsymbol{E}$.

Соотношение (7.46), которому удовлетворяет ортогональное преобразование, может быть записано в виде

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{-1}.$$

Докжем теперь, что ортогональные преобразования образуют группу. Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — ортогональные преобразования, тогда

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{-1}, \quad \boldsymbol{B}^* = \boldsymbol{B}^{-1}.$$

Если $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$, то

$$\boldsymbol{C}^* = (\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} = (\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{C}^{-1}.$$

Следовательно, $\boldsymbol{C}$ — ортогональное преобразование. А это означает, что совокупность ортогональных преобразований замкнута относительно операции умножения. Далее, если $\boldsymbol{A}$ — ортогональное преобразование, то этим же свойством обладает и преобразование $\boldsymbol{A}^{-1}$. В самом деле, из того, что $\boldsymbol{A}^*= \boldsymbol{A}^{-1}$, следует, что

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^* = (\boldsymbol{A}^*)^* = \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}.$$

А это означает ортогональность преобразования $\boldsymbol{A}^{-1}$. Следовательно, ортогональные преобразования образуют группу. Эту группу обозначают через O_3. Она, конечно, является подгруппой полной линейной группы GL_3.

Заметим, что доказать групповой характер совокупности ортогональных преобразований можно чисто геометрически. Действительно, если преобразование $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ не меняют длин векторов и углов между ними, то и их произведение $\boldsymbol{AB}$ обладает этим же свойство, так же как и преобразование $\boldsymbol{A}^{-1}$ и $\boldsymbol{B}^{-1}$.

Рассмотрим теперь матрицы ортогональных преобразований — так называемые *ортогональные матрицы*. С такими матрицами мы уже встречались, когда рассматривали преобразование ортогонального базиса. В силу соотношения (7.46) матрица $A=(a_{ij})$ ортогонального преобразования $\boldsymbol{A}$ удовлетворяет условию

$$A^*A=E$$

и равносильному условию

$$AA^* = E.$$

Если обозначить через a^*_{ij} элемент матрицы A^*, то $a^*_{ij} = a_{ji}$. Поэтому написанные выше условия в координатной форме запишутся так:

$$\begin{aligned} a^*_{ik}a_{kj} &= a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}, \\ a_{ik}a^*_{kj} &= a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}. \end{aligned} \qquad (7.47)$$

Первое из этих соотношений означает, что *сумма квадратов элементов какого-либо столбца ортогональной матрицы равна единице* (случай $i=j$), *а сумма произведений соответствующих элементов различных ее столбцов равна нулю* (случай $i\neq j$). Второе соотношение означает то же самое для строк ортогональной матрицы. Заметим, что соотношения (7.47) только обозначениями отличаются от формул (7.11).

Ранее было доказано геометрически, что определитель ортогональной матрицы равен ± 1. Теперь можно дать простое аналитическое доказательство этого утверждения. Из соотношения $A^*A = E$ и теоремы об умножении определителей следует, что

$$|A^*A| = |A^*||A| = |A|^2 = 1,$$

так как $|A^*|=|A|$ и $|E| = 1$. Отсюда непосредственно следует, что $|A| = \pm 1$.

Ортогональные преобразования, определитель матрицы которых равен +1, сохраняют ориентацию троек векторов и называются *собственными вращениями*. Собственные вращения, как легко видеть, образуют группу, являющейся подгруппой группы O_3. Ее обозначают через O^+_3 и называют *подгруппой собственных вращений.*

Ортогональные преобразования, определитель матрицы которых равен —1, меняют ориентацию троек векторов и называются *несобственными вращениями.* Несобственные вращениния, конечно, группы не образуют (почему?). К несобственным вращениниям относятся, например, преобразования, состоящие в отображении (отражении) просторанства относительно некоторой плоскости π, проходящей через начало координат *О.* В самом деле, при отражении пространства относительно плоскости π длины векторов и углы между ними сохраняются, а ориентация троек некторов меняется на противоположную. Легко доказать, что любое несобственное вращениние можно представить в виде произведения собственного вращениня и отражение относительно некоторой плоскости.

4. Все рассмотренные до сих пор подгруппы полной линейной группы, как и сама эта группа, состоят из бесконечного числа элементов. Но существуют такие подгруппы этой группы, которые состоят из конечного числа элементов, — так называемые *конечные подгруппы.* Особенно интересны конечные подгруппы ортогональной группы, которые назвают *группами симметрии.* Эти группы имеют важное значение для кристаллографии и других разделов физики.

Рассмотрим некоторые примеры групп симметрии на плоскости и в пространстве.

а) Пусть E — тождественное преобразование и $\boldsymbol{A}$=—$\boldsymbol{E}$ — преобразование, состоящее в отображении всех векторов пространства от начала координат. Для этих преобразований мы имеем

$$\boldsymbol{EE=E,\quad EA = AE = A,\quad AA=E,}$$
$$\boldsymbol{E^{-1} = E,\quad A^{-1} = A.}$$

Следовательно, совокупность преобразований, которая состоит из двух элементов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{A}$, замкнута относительно операции умножения и операции обращения, а значит, она представляет собой группу. Таблица умножения элементов этой группы может быть записана в виде

I \ II	E	A
E	E	A
A	A	E

Произведение любых двух сомножителей этой группы не зависит от их порядка. Такие группы называются *коммутативными.* Преобразования этой группы переводят в себя любую фигуру, для которой точка O является центром симметрии.

б) Пусть E — тождественное преобразование плоскости и $\boldsymbol{A}$ — поворот плоскости на угол $2\pi/n$. Тогда преобразование $\boldsymbol{A}^k$ представляет собой поворот плоскости на угол $2\pi k/n$, в частности, $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{E}$. Преобразование $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2, ..., \boldsymbol{A}^{-1}$ образуют группу, так как

$$\boldsymbol{A}^k \cdot \boldsymbol{A}^l = \boldsymbol{A}^{k+l} = \boldsymbol{A}^m,$$

где m — остаток от деления числа $k+l$ на n. Эта группа тоже будет коммутативной. Она называется *циклической* группой n-го *порядка.*

в) Пусть a, b, c — три взаимно перпендикулярные оси пространства L_3, проходящие через точку O, и $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ — преобразования, представляющие собой поворот на угол π вокруг соответствующей оси. Четыре преобразования $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ образуют группу с таблицей умножения

I \ II	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	E	C	B
B	B	C	E	A
C	C	B	A	E

Так как произведение любых элементов этой группы не зависит от порядка сомножителей, то эта группа будет коммутативной. Преобразования этой группы переводят в себя любую фигуру, для которой оси a, b, c являются осями симметрии.

г) Пусть a и b — две взаимно перпендикулярные оси, которые проходят через точку O, и $\boldsymbol{A}$ — поворот на угол $2\pi/3$ вокруг оси *a,* а ***B*** — поворот на угол π вокруг оси b. Рассмотрим преобразование

$$\boldsymbol{E, A, A^2, B, AB, A^2B.}$$

Докажем, что эти преобразования образуют группу. Заметим, что преобразование $\boldsymbol{B_1 = AB}$ представляет собой поворот на угол π вокруг оси b_1, получающейся из оси b при преобразовании $\boldsymbol{A^2}$. Точно так же преобразование $\boldsymbol{B_2 = A^2B}$ есть поворот на угол π вокруг оси b_2, получающейся из оси b при преобразовании ***A.*** Поэтому

$$\boldsymbol{B^2 = B^2_1 = B^2_2 = E.}$$

Кроме того, пользуясь тем, что $\boldsymbol{A^3 = E}$, найдем

$$\boldsymbol{B\,A = (BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1} = A^2B=B_2,}$$

$$\boldsymbol{BA^2 = (BA^2)^{-1} = A^{-2}B^{-1} = AB=B_1.}$$

Теперь таблица умножения этих преобразований может быть записана в виде

I \ II	E	A	A^2	B	B_1	B_2
E	E	A	A^2	B	B_1	B_2
A	A	A^2	E	B_1	B_2	B
A^2	A^2	E	A	B_2	B	B_1
B	B	B_2	B_1	E	A^2	A
B_1	B_1	B	B_2	A	E	A^2
B_2	B_2	B_1	B	A^2	A	E

В этой таблице слева стоит первый сомножитель произведения, а сверху - второй. Так как таблица не является симметричной, то рассматриваемая группа не будет коммутативной.

Микромодуль 19.
Идивидуальные тестовые задачи

1. Доказать, что любое линейное преобразование одномерного пространства сводится к умножению всех векторов на одно и то же число.
2. Пусть на плоскости L_2 дан базис $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ и x_1, x_2 — координаты произвольного вектора $\boldsymbol{x}$ относительно этого базиса. Установить, являются ли линейными следующие преобразования плоскости L_2:

а) $u = Ax = -x$;
б) $u = Ax = x_1e_1 + x_1e_2$;
в) $u = Ax = x_1e_1 - 2x_2e_2$;
г) $u = Ax = \lambda_1x_1e_1 + \lambda_2x_2e_2$;
д) $u = Ax = x_1^2e_1$.

Выяснить геометрический смысл этих преобразований.

3. Записать формулой и доказать линейность сжатия пространства L_2 к оси $\boldsymbol{e}_2$.

4. Преобразование, определенное так же, как в примере *д),* в случае, если базисные векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ не ортогональны, называется *косым сжатием.* Оно производится параллельно вектору $\boldsymbol{e}_2$ к вектору $\boldsymbol{e}_1$ — оси сжатия. Доказать линейность и выяснить геометрический смысл этого преобразования.

5. Установить, являются ли линейными, и выяснить геометрический смысл следующих преобразований пространства L_3:

а) $u = Ax = (ax)\,a$;
б) $u = Ax = (ax)\,x$, где $a \neq 0$;
в) $u = Ax = a$;
г) $u = Ax = a \times x$,

где $\boldsymbol{a}$ — фиксированный вектор;

д) $u = Ax = x_1e_1 + x_2e_2$;
е) $u = Ax = x_1e_1 - x_2e_2 - 2x_3e_3$;
ж) $u = Ax = x_1e_1 + x_2e_2 + \lambda x_3e_3$;
з) $u = Ax = \lambda_1x_1e_1 + \lambda_2x_2e_2 + \lambda_3x_3e_3$;
и) $u = Ax = x_2^3e_2 + x_3e_3$,

где через x_1, x_2, x_3 обозначены координаты произвольного вектора $\boldsymbol{x}$ относительно некоторого базиса $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$.

6. Доказать, что ортогональное проектирование векторов пространства L_3 на ось, образующую равные углы с осями прямоугольной системы координат, является линейным преобразованием.

7. Доказать, что поворот пространства L_3 на угол $2\pi/3$ вокруг прямой, уравнение которой относительно прямоугольного базиса $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ есть $x_1=x_2=x_3$, является линейным преобразованием.

8. Доказать, что в пространстве многочленов степени, не превосходящей n, операция дифференцирования многочленов линейна (заметим, что та же операция будет линейной и в пространстве $C\,[a, b]$, но определена она будет только для диференцируемых на $[a, b]$ функций).

9. Доказать линейность следующих преобразований, определенных в пространстве $C\,[a,\ b]$ всех непрерывных на $[a,\ b]$ функций:
а) $g(t) = \mathbf{A}f(t) = t \cdot f(t)$;
б) $g(t) = \mathbf{A}f(t) = f(t) \cdot \varphi(t)$.
где $\varphi\ (t)$ — фиксированная функция, непрерывная на $[a,\ b]$

в) $g(t) = Af(t) = \int\limits_a^b H(t,s)f(s)ds$,

где $H\ (t,\ s)$- фиксированная произвольная непрерывная функция двух аргументов.

Какие из указанных преобразований будут линейными и в пространстве многочленов степени, не превосходящей n?
10. Найти матрицы линейных преобразований плоскости L_2, рассмотренных в задачах 2 и 3, относительно базиса $\{\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\}$.
11. Доказать, что при преобразовании сжатия плоскости L_2 (пример *д)* п. 5.13) окружность с центром в начале координат переходит в эллипс, а равносторонняя гипербола, осями которой являются оси координат,— в гиперболу общего вида.
12. Найти матрицы линейных преобразований пространства L_3, рассмотренных в задачах 5, 6, 7 , относительно базиса $\{\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$.
13. Доказать, что при преобразовании сжатия пространства L_3 (упр. 5 *ж*)) сфера переходит в эллипсоид вращения, эллипсоид вращения

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_2^2} = 1$$

- в эллипсоид общего вида, однополостный и двуполостный гиперболоиды вращения

$$-\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_2^2} = \pm 1$$

- в однополостный и двуполостный гиперболоиды общего вида.
14. Найти матрицу преобразования дифференцирования пространства многочленов $P(t)$ степени, не превосходящей n, относительно следующих базисов:

а) $1,\ t,\ t^2,\ \ldots,\ t^n$;
б) $1,\ t-a,\ \dfrac{(t-a)^2}{2!},\ \ldots,\ \dfrac{(t-a)^n}{n!}$.

15. Доказать, что в пространстве L_3 существует единственное линейное преобразование, которое переводит линейно

независимые векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ в векторы $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ (не обязательно линейно независимые). Найти матрицу этого преобразования относительно некоторого прямоугольного базиса $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$.

16. В ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ составить матрицу линейного преобразования пространства L_3, переводящего векторы

$$\boldsymbol{a}_1 = \{2, 3, 5\}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \{0, 1, 2\}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \{1, 0, 0\}$$

соответственно в векторы

$$\boldsymbol{b}_1=\{1, 1, 1\}, \quad \boldsymbol{b}_2=\{1, 1, -1\}, \quad \boldsymbol{b}_3==\{2, 1, 2\}.$$

17. Охарактеризовать геометрически линейные преобразования пространства L_3, матрицы которых относительно некоторого прямоугольного базиса $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ имеют следующий вид:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

18. Доказать, что поворот пространства L_3 на угол α вокруг оси, определяемой единичным вектором $\boldsymbol{\omega}$, является линейным преобразованием, определяемым формулой

$$A\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega})\,\boldsymbol{\omega} + [\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega})\,\boldsymbol{\omega}]\cos\alpha + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}\sin\alpha.$$

Найти матрицу этого превращения в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, если $\boldsymbol{\omega} = \omega_i \boldsymbol{e}_i$.

19. Сформулировать и доказать для плоскости L_2 теорему, аналогичную доказанной для пространства L_3,

20. Выяснить, какие из линейных преобразований, рассмотренных в п. 7.13 и в упр. 2-8, являются невырожденными и какие - вырожденными; для последних найти ранг соответствующей им матрицы.

21. Доказать, что указанные в тексте преобразования

а) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{x})$,

б) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\boldsymbol{x})$

- линейные, найти соответствующие им матрицы, считая координаты векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1$ i, $\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ заданными, и убедиться, что ранг этих матриц равен соответственно двум и единицы.

22. Выяснить геометрический смысл преобразований плоскости L_2 и пространства L_3, которым в некотором ортонормированном базисе соответствуют матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Определить ранги этих матриц.

23. Доказать, что невырожденность линейного преобразования $\boldsymbol{A}$ эквивалентна дюбому из следующих свойств:

а) из $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ следует $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$;

б) $\boldsymbol{A}$ переводит три линейно независимых вектора линейного пространства L_3 в три таких же вектора;

в) $\boldsymbol{A}$ — взаимно однозначное преобразование, т.е. из $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ следует $\boldsymbol{Ax} \neq \boldsymbol{Ay}$;

г) $\boldsymbol{A}$ отображает пространство на все пространство, т.е. для любого вектора $\boldsymbol{y} \in L$ можно найти вектор $\boldsymbol{x} \in L$ такой, что $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{y}$.

24. Доказать, что образ и прообраз линейного подпространства пространства L_3 при линейном преобразовании $\boldsymbol{A}$ являются линейными подпространствами.

Ядром линейного преобразования $\boldsymbol{A}$ называется совокупность векторов L_3, которые $\boldsymbol{A}$ переводит в $\mathbf{0}$. Размерность ядра называется *дефектом преобразования* $\boldsymbol{A}$. *Областью значений* преобразования $\boldsymbol{A}$ называется множество образов всех векторов L_3 при преобразовании $\boldsymbol{A}$, а размерность области значений называется *рангом* $\boldsymbol{A}$.

25. Доказать, что

а) ранг преобразования $\boldsymbol{A}$ равен рангу матрицы A;

б) сумма ранга и дефекта линейного преобразования $\boldsymbol{A}$ равна размерности пространства;

в) дефект линейного преобразования равен дефекту его матрицы (*дефектом матрицы* называется разность между ее порядком и рангом).

26. Доказать, что невырожденность линейного преобразования $\boldsymbol{A}$ эквивалентна одному из следующих свойств:

а) ядро $\boldsymbol{A}$ — нулевое, т.е. дефект $\boldsymbol{A}$ равен нулю;

б) область значений совпадает со всем пространством, т.е. ранг $\boldsymbol{A}$ равен размерности пространства.

27. Найти ядро, область значений, ранг и дефект линейных преобразований пространств L_2 и L_3, которые в некотором прямоугольном базисе имеют матрицы:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

28. Найти ядро, область значений, ранг и дефект линейного преобразования $\boldsymbol{A}$ — дифференцирования в пространстве многочленов, степень которых не превосходит n.

29. Доказать симметричность следующих линейных преобразований плоскости L_2 (x_1 и x_2 — координаты произвольного вектора $\boldsymbol{x}$ плоскости L_2):

а) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Ax} = x_1\boldsymbol{e}_1$;

б) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Ax} = -\boldsymbol{x}$;

в) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Ax} = x_1\boldsymbol{e}_1 - x_2\boldsymbol{e}_2$;

г) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Ax} = x_1\boldsymbol{e}_1 + 3x_2\boldsymbol{e}_2$;

д) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Ax} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda x_2\boldsymbol{e}_2$;

е) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Ax} = \lambda_1 x_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 x_2\boldsymbol{e}_2$.

Найти соответствующие им квадратичные формы и характеристические кривые.

30. Проделать то же для следующих линейных преобразований пространства L_3 (x_1, x_2, x_3 — координаты произвольного вектора x пространства L_3, а $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — некоторые фиксированные векторы):

а) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Ax} = x_2\boldsymbol{e}_2$;

б) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Ax} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$;

в) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Ax} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 - x_3\boldsymbol{e}_3$;

г) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Ax} = -x_1\boldsymbol{e}_1 + 2x_2\boldsymbol{e}_2 - x_3\boldsymbol{e}_3$;

д) $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{ax})\boldsymbol{a}$;

е) $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{ax})\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{bx})\,\boldsymbol{b}$.

31. Найти сопряженные линейные преобразования для следующих линейных преобразований пространства L_3:

а) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Ax} = (x_1 + 2x_2)\,\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$;

б) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Ax} = -x_2\boldsymbol{e}_1 + x_1\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$;

в) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Ax} = (\boldsymbol{ax})\,\boldsymbol{b}$;

г) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Ax} = (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{b}_1 + (\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{b}_2$;

д) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}$.

Разложить эти преобразования на сумму их симметричной и кососимметричной частей.

32. Доказать следующие свойства сопряженных линейных преобразований (или транспонированных матриц):

а) $(\boldsymbol{A}^*)^* = \boldsymbol{A}$;

б) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{B}^*$;

в) $(\lambda\boldsymbol{A})^* = \lambda\boldsymbol{A}^*$;

г) $\boldsymbol{E}^* = \boldsymbol{E}$.

33. Матрица $\boldsymbol{B}$ линейного преобразования $\boldsymbol{B}$ в некотором базисе совпадает с матрицей A^* преобразования $\boldsymbol{A}^*$, сопряженного преобразованию $\boldsymbol{A}$. Будет ли то же свойство выполняться в других базисах?

34. Доказать непосредственно, что сложение линейных преобразований (и матриц) и умножение их на число обладают следующими свойства:

а) $A+B=B+A$;

б) $A+(B+C)=(A+B)+C$;

в) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$;

г) $(\alpha+\beta)\ A=\alpha A+\beta A$;

д) $(\alpha A+\beta B)^*=\alpha A^*+\beta B^*$.

35. Доказать, что преобразование отражения (отображения) от плоскости π в направлении прямой l будет симметричным линейным преобразованием в том и только в том случае, когда прямая l перпендикулярна плоскости π.

36. Пусть в пространстве $C\ [a,\ b]$ скалярное произведение определено формулой

$$(f,\ g)=\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt.$$

а) Доказать, что линейное преобразование, заключающееся в умножении на t всех элементов пространства $C\ [a,\ b]$, будет симметричным.

б) Доказать, что линейное преобразование

$$Af(t)=\int_a^b H(t,\ s)\,f(s)\,ds,$$

где $H(t,\ s)$— фиксированная непрерывная функция двух переменных, для которых $H(t,\ s)=H(s,\ t)$, будет симметричным.

в) Доказать, что линейное преобразование

$$A(f)=f'(t).$$

будет кососимметричным, если $f(a)=f(b)=0$.

г) Доказать, что линейное преобразование

$$A(f)=f''(t).$$

будет симметричным, если

$$f(a)=f(b),\qquad f'(a)=f'(b).$$

37. Проверить, что для линейных преобразований (и для матриц) имеют место следующие соотношения:

а) $\lambda(AB) = (\lambda A)B$;
б) $(A+B)C = AC+BC$;
в) $C(A+B) = CA+CB$;
г) $A^m \cdot A^n = A^{m+n}$;
д) $(A+B)^2 = A^2+AB+BA+B^2$;
е) $(A+B)^3 = A^3+A^2B+ABA+AB^2+BA^2+BAB+B^2A+B^3$;
ж) $(A+B)(A-B) = A^2+BA-AB-B^2$.

Как изменятся последние три формулы, если $\boldsymbol{AB = BA}$?

38. Доказать, что произведение двух сжатий к осям $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ прямоугольной декартовой системы координат с коэффициентами k и $1/k$ переводит семейство гипербол $x_1x_2=c$ в ебя. (Такое преобразование называется *гиперболическим поворотом* плоскости L_2.) Найти матрицу этого преобразования и доказать что оно не меняет площадей фигур.

39. Доказать, что преобразование, равное произведению сжатия к оси $\boldsymbol{e}_1$ с коэффициентом a_1/a_2, поворота на угол α и сжатия к оси $\boldsymbol{e}_2$ с коэффициентом a_2/a_1, переводит эллипс

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}=1$$

и гомотетичные ему эллипсы в себя. (Такое преобразование называется *эллиптическим поворотом* плоскости L_2.) Найти матрицу этого преобразования и доказать, что оно не меняет площадей фигур.

40. Доказать, что

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$,

в) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$,

и выяснить геометрический смысл этих равенств.

41. Найти A^n для матрицы

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

42. Доказать, что если две симметричные матрицы перестановочны, то их произведение есть симметричная матрица.

43. Доказать, что если A и B — кососимметричные матрицы и $AB = -BA$, то AB — симметричная матрица.

44. Доказать, что

$$(\boldsymbol{Ax})(\boldsymbol{By})=\boldsymbol{x}[(\boldsymbol{A^*B})\boldsymbol{y}]=\boldsymbol{y}[(\boldsymbol{B^*A})\boldsymbol{x}],$$

где $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — произвольные линейные преобразования, а $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ — произвольные векторы.

45. Доказать, что если $\boldsymbol{A}$ - линейное преобразование, то $\boldsymbol{AA}^*$ — симметричное преобразование.

46. Доказать, что произведение двух ортогональных матриц является ортогональной матрицей.

47. Доказать, что след матрицы AB равен следу матрицы BA (A и B — квадратные матрицы одного порядка).

48. Доказать, что ранг произведения произвольного преобразования $\boldsymbol{A}$ и невырожденного преобразования $\boldsymbol{B}$ равен рангу $\boldsymbol{A}$.

49. Доказать, что для произвольных линейных преобразований (или матриц) $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ линейного пространства L

а) ранг $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leq$ ранг $\boldsymbol{A}$ + ранг $\boldsymbol{B}$;

б) деф.$(\boldsymbol{AB}) \leq$ деф. $\boldsymbol{A}$ +деф. $\boldsymbol{B}$;

в) ранг $(\boldsymbol{AB}) \leq$ ранг $\boldsymbol{A}$;

ранг $(\boldsymbol{AB}) \leq$ ранг $\boldsymbol{B}$.

50. Доказать, что если матрица A обладает тем свойством, что для любой матрицы B

$$AB = BA,$$

то $A=\lambda E$.

51. Доказать, что если матрица A обладает тем свойством, что для любой диагональной матрицы B

$$AB = BA,$$

то A- также диагональная матрица.

52. Найти все матрицы, перестановочные с матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

53. Найти все матрицы A второго порядка, для которых $A^2 = N$.

Матрица A называется *инволютивной*, если $A^2 = E$.

Матрица B называется *идемпотентной*, если $B^2 = B$.

54. Найти все инволютивные матрицы второго порядка.

55. Доказать, что если матрица обладает двумя из свойств: симметричная, ортогональная, инволютивная, то она обладает и третьей.

56. Проверить, идемпотентны ли матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 25 & -20 \\ 30 & -24 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

57. Доказать, что если B — идемпотентная матрица, то матрица

$$A=2B-E$$

инволютивна, и, обратно, из инволютивности A вывести идемпотентность матрицы

$$B=\frac{1}{2}(A+E).$$

58. Пусть ***A*** - преобразование дифференцирования в просторанстве многочленов степени, не превосходящей *n*. В базисе 1, t, t^2, ...,t^n найти матрицы преобразований $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^2$, ... Доказать, что $\boldsymbol{A}^{n+1}=\boldsymbol{N}$. Найти ядро, область значений, ранг и дефект преобразований $\boldsymbol{A}^2$, $\boldsymbol{A}^3$, ..., $\boldsymbol{A}^{n+1}$ (ср. с задачей 28).

59. Пусть ***A*** -преобразование дифференцирования в просторанстве всех многочленов, а ***B*** — операция умножения на независимое переменное:

$\boldsymbol{A}[P(t)]=P'(t)$, $\boldsymbol{B}[P(t)] = tP(t)$.

Доказать, что

а) $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$;

б) $\boldsymbol{AB}^n-\boldsymbol{B}^n\boldsymbol{A}=n\boldsymbol{B}^{n-1}$.

Почему преобразование ***B*** нельзя рассматривать в просторанстве многочленов степени, не превосходящей *n*?

60. Найти обратную матрицу для каждой из следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 7 & 5\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 0\\ 0 & a & 1\end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -3 & 2 & 4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

61. Решить следующие уравнения, данные в матричной форме:

а) $\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ 8\end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -3 & 2 & 4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 4\end{pmatrix}$;

в) $AX=B$, где

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 5 & 6\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 7\end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{13} & x_{14}\end{pmatrix};$$

г) $XA=B$, где

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -3 & 2 & 4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 10 & 2 & 7\\ 10 & 7 & 8\end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{pmatrix}.$$

62. Доказать, что для невырожденных линейных преобразований (для невырожденных матриц) выполняются следующие соотношения:

а) $(\boldsymbol{A_1 A_i ... A_k})_{-1} = \boldsymbol{A^{-1}{}_k A^{-1}{}_{k-1} ... A^{-1}{}_2 A^{-1}{}_1}$;

б) $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$;

в) $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

63. Доказать, что для невырожденных матриц следующие четыре соотношения эквивалентны друг другу:

$$AB = BA; \quad AB^{-1} = B^{-1}A; \quad A^{-1}B = BA^{-1}, \quad A^{-1}B^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

64. Доказать, что

а) матрица, обратная к невырожденной симметричной, будет симметричной;

б) матрица, обратная к невырожденной кососимметричной, будет кососимметричной;

в) матрица, обратная к ортогональной, будет ортогональной.

65. Доказать, что матрица, которая обратная для невырожденной треугольной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix},$$

будет матрицей того же вида.

66. Указать, какие из приводимих ниже совокупностей преобразований плоскости L_2 образуют группу и какие ее не образуют:

а) совокупность всех вращений вокруг точки O;

б) совокупность симметрий относительно всевозможных прямых плоскости, проходящих через точку O;

в) совокупность преобразований гомотетии с центром в точке O и всевозможными коэффициентами;

г) совокупность всех преобразований гомотетии с центром в точке O и совокупность всех вращений вокруг этой точки;

д) симметрия относительно прямой, проходящей через точку O, и тождественное преобразование;

е) совокупность поворотов вокруг данной точки O на углы 120°, 240° и 360°;

ж) совокупность поворотов вокруг данной точки на углы 90^e, 180°, 270°, 360° и симметрии вокруг двух данных взаимно перпендикулярных прямых, пересекающихся в точке O.

67. Из каких преобразований состоят совокупности всех ортогональных преобразований плоскости L_2, переводящие у себя

а) ромб?

б) квадрат?
в) равносторонний треугольник?
г) правильный шестиугольник?
Составляют ли эти совокупности преобразований группу?
68. Определить, какие из следующих числовых множеств образуют группу относительно указанной операции и какик не образуют:
а) множество целых чисел относительно сложения;
б) множество рациональных чисел относительно сложения;
в) множество комплексных чисел относительно сложения;
г) множество неотрицательных целых чисел относительно сложения;
д) множество четных чисел относительно сложения;
е) множество чисел вида 2^k, где k — целое число, относительно умножения;
ж) множество отличных от нуля рациональных чисел относительно умножения;
з) множество отличных от нуля действительных чисел относительно умножения;
и) множество отличных от нуля комплексных чисел относительно умножения;
к) множество целых чисел, кратных данному натуральному числу n, относительно сложения.
69. Выяснить, образуют ли группу
а) матрицы третьего порядка с действительными элементами относительно сложения;
б) невырожденные матрицы третьего порядка с действительными элементами относительно умножения;
в) матрицы третьего порядка с целыми элементами относительно умножения;
г) матрицы третьего порядка с целыми элементами и определителем, равным ± 1, относительно умножения;
д) многочлены степени $\leq n$ от неизвестного x (включая нуль) относительно сложения;
е) многочлены степени n относительно сложения;
ж) многочлены любых степеней (включая нуль) относительно сложения.
70. Какие из групп задач 66 - 69 являются подгруппами других из этих групп?
71. Доказать, что матрица A ортогональна тогда и только тогда, когда ее определитель равен ± 1, а каждый элемент равен своему

алгебраическому дополнению, взятому со знаком плюс или минус в зависимости от того, $|A| = 1$ или $|A| = — 1$.

72. При каких условиях диагональная матрица будет ортогональной?

73. Найти матрицы преобразований, рассмотренных в примерах *а, б), в)* п. 4 п. 5.19, выбрав в каждом случае наиболее удобный базис. Непосредственной проверкой убедиться, что для каждого из этих примеров соответствующая совокупность матриц **образует** группу.

Микромодуль 20. Приведение к простейшему виду матрицы линейного преобразования

7.20. Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования

1. Пусть дано линейное преобразование $\boldsymbol{y = Ax}$.
Вектор $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ называется *собственным вектором* этого линейного преобразования, если

$$\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}, \qquad (7.48)$$

где λ - некоторое действительное число; число λ называется *собственным значением* преобразования $\boldsymbol{A}$.

Это определение означает, что собственный вектор $\boldsymbol{x}$ при преобразовании $\boldsymbol{A}$ переходит в коллинеарный вектор, причем собственное значение равно отношению этих коллинеарных векторов (коэффициенту «растяжение» собственного вектора в результате преобразования $\boldsymbol{A}$).

Очевидно, что если $\boldsymbol{x}$ - собственный вектор преобразования $\boldsymbol{A}$, то и любой коллинеарный ему вектор $\boldsymbol{x}' = \alpha\boldsymbol{x}$ (α - любое действительное число, отличное от нуля) также будет собственным вектором преобразования $\boldsymbol{A}$ с тем же собственным значением, что и $\boldsymbol{x}$. Действительно, в силу линейности преобразования $\boldsymbol{A}$ имеем

$$\boldsymbol{Ax}' = \boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha(\boldsymbol{Ax}) = \alpha(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda(\alpha\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}'.$$

Отметим, что равенство (7.48) может быть записано также в виде

$$(\boldsymbol{A} — \lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = 0.$$

Все сказанное в равной мере относится к пространствам L_2, L_3 и вообще к любому линейному пространству L.

Для иллюстрации введенных понятий собственного вектора и собственного значения рассмотрим линейные преобразования, которые фигурировали в примерах п. 7.17, 7.18.

а) Для гомотетии пространства L_3 (или L_2) любой вектор $\boldsymbol{x}$ будет собственным с собственным значением λ. Аналогичное утверждение, конечно, имеет место и для тождественного преобразования $\boldsymbol{E}$, являющегося частным случаем гомотетии (λ = 1), и для отражения от точки (λ = — 1).

б) Для геометрического растяжения плоскости L_2 в направлении вектора $\boldsymbol{e}_2$:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda\, x_2\boldsymbol{e}_2,$$

собственными векторами будут векторы, которые лежат на осях Ox_1 и Ox_2 (напомним, что рассматриваются векторы с началом в O). Очевидно, что для собственных векторов, которые лежат на оси Ox_1, собственное значение равно 1, а для собственных векторов, которые лежат на оси Ox_2, собственное значение равно λ. В частности, те же векторы будут собственными при проектировании плоскости L_2 на ось Ox_1 (λ=0), причем векторы, которые лежат на оси Ox_2, будут переходить при проектировании в нулевой вектор **0** (который коллинеарен любому вектору!).

в) Поворот плоскости L_2 на угол α, отличный от 0° и 180°, очевидно, действительных собственных векторов не имеет. Если же α=0° или α=180°, то получим тождественное преобразование или отражение от точки, для которых любой вектор — собственный. В отличие от этого поворот пространства L_3 имеет единственное действительное собственное направление, которое совпадает с направлением оси вращения.

г) Для сдвига

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (x_1 + kx_2)\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$$

плоскости L_2 в направлении вектора $\boldsymbol{e}_1$ собственными векторами, отвечающими собственному значению 1, очевидно, будут векторы, которые лежат на оси $Ox_г$.

д) Собственными векторами преобразования

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_1 x_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 x_2\boldsymbol{e}_2 + \lambda_3 x_3\boldsymbol{e}_3,$$

представляющего собой в пространстве L_3 совокупность трех растяжений вдоль взаимно перпендикулярных осей $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, служат векторы, которые лежат на этих осях, поскольку

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = \lambda_i \boldsymbol{e}_i \quad \text{(по } i \text{ нет суммирования).}$$

Им отвечают собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3.$

Аналогично на плоскости L_2 собственными векторами преобразования

$$\boldsymbol{Ax} = \lambda_1 x_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 x_2 \boldsymbol{e}_2$$

служат векторы, которые лежат на осях $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$. Соответствующими собственными значениями этих векторов являются числа λ_1 и λ_2.

2. Перейдем теперь к вопросу об отыскании собственных векторов и собственных значений данного линейного преобразования $\boldsymbol{A}$ в пространстве L_3. Мы знаем, что если задан какой-нибудь ортонормированный базис $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, то с преобразованием $\boldsymbol{A}$ связывается матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

— матрица преобразования $\boldsymbol{A}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Если вектор $\boldsymbol{x}$, координаты которого в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ равны x_1, x_2, x_3, есть собственный вектор преобразования $\boldsymbol{A}$ с собственным значением λ, то, записав равенство (7.48) в координатной форме, получим

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= \lambda x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= \lambda x_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= \lambda x_3, \end{aligned}\right\} \qquad (7.49)$$

или, в сокращенной записи,

$$a_{ij}x_j = \lambda x_i.$$

Перепишем равенство (7.49) в виде

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)\, x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)\, x_2 + a_{23}x_3 &= 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)\, x_3 &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (7.50)$$

или, в сокращенных обозначениях, в виде

$$(a_{ij} - \lambda\delta_{ij})x_j = 0.$$

Система (7.50) представляет собой систему трех линейных однородных уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2, x_3. Поскольку по предположению она имеет ненулевое решение, которое представляют координаты ненулевого собственного вектора $\boldsymbol{x}$, то определитель этой системы должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad (7.51)$$

или, коротко,

$$|A - \lambda E| = 0,$$

где E-единичная матрица.

Тем самым мы доказали, что всякое собственное значение линейного преобразования ***A*** удовлетворяет уравнению (7.51).

Обратно, пусть λ_0 — действительный корень уравнения (7.51). Тогда, если подставить λ_0 в систему (7.50) вместо λ, то полученная система будет иметь ненулевое решение (x^0_1, x^0_2, x^0_3), поскольку ее определитель равен нулю. Для вектора $\boldsymbol{x_0}$ с координатами (x^0_1, x^0_2, x^0_3) будут выполняться равенства (7.49), и, следовательно, для этого вектора $\boldsymbol{x}_0$ и числа λ_0 имеет место отношение

$$\boldsymbol{Ax_0} = \lambda_0\boldsymbol{x_0}.$$

Поэтому $\boldsymbol{x_0}$ будет собственным вектором преобразования ***A***, соответствующим собственному значению λ_0.

Итак, для нахождения собственных векторов преобразования ***A*** надо решить уравнение (7.51); каждый действительный корень этого уравнения является собственным значением преобразования ***A***, а координаты соответствующих этому значению собственных векторов определяются из системы (7.50).

Уравнение (7.51) называется *характеристическим* (или *вековым)* уравнением преобразования ***A.***

До сих пор мы рассматривали только действительные скалярные величины и векторы только с действительными координатами. Но в математике рассматривают также векторные пространства над множеством комплексных чисел, допуская в качестве скаляров и в качестве координат вектора комплексные числа. Если при изучении линейных преобразований встать на эту точку зрения, то можно допускать существование комплексных собственных значений и собственных векторов с комплексными координатами.

Предположим теперь, что матрица линейного преобразования имеет действительные компоненты. Тогда характеристическое уравнение (7.51) этого линейного преобразования является уравнением третьей степени с действительными коэффициентами. Из алгебры известно, что такое уравнение имеет или три действительных корня, или один действительный и два комплексно сопряженных корня. Легко видеть, что комплексно сопряженным собственным значением будут соответствовать комплексно сопряженные собственные векторы линейного преобразования ***A.***

3. Развернем определитель, который стоит в левой части характеристического уравнения. Тогда характеристическое уравнение примет вид

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 - I_2\lambda - I_3 = 0$$

где

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{23},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Многочлен, что стоит в левой части характеристического уравнения, называется *характеристическим многочленом* матрицы A. Как мы видим, для пространства L_3 этот многочлен имеет третью степень.

Поскольку собственные значения преобразования ***A*** определены независимо от выбора базиса, то действительные корни характеристического уравнения также не зависят от выбора базиса.

Покажем, что и сам характеристический многочлен не зависит от выбора базиса. В самом деле, характеристический многочлен есть определитель матрицы $A - \lambda E$. При преобразовании прямоугольного базиса матрица A переходит в матрицу A', которая определяется по формуле

$$A' = \Gamma A \Gamma^{-1}$$

где Γ — ортогональная матрица перехода от старого базиса к новому. Заметим также, что $\Gamma(\lambda E)\Gamma^{-1} = \lambda E$. Поэтому

$$A' - \lambda E = \Gamma A \Gamma^{-1} - \Gamma(\lambda E)\Gamma^{-1} = \Gamma(A - \lambda E)\Gamma^{-1}.$$

Отсюда на основании теоремы об определителе произведения матриц вытекает, что

$$|A' - \lambda E| = |\Gamma||A - \lambda E||\Gamma^{-1}|.$$

Но $|\Gamma^{-1}|\,|\Gamma| = 1$, как произведение определителей обратных матриц. Поэтому

$$|A - \lambda E| = |A' - \lambda E|.$$

Утверждение доказано. Поэтому можно теперь называть характеристический многочлен матрицы A характеристическим многочленом преобразования ***A***.

Из доказанной инвариантности характеристического многочлена следует инвариантность его коэффициентов I_1, I_2, I_3:

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}=a_{1'1'}+a_{2'2'}+a_{3'3'},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1'1'} & a_{1'2'} \\ a_{2'1'} & a_{2'2'} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1'1'} & a_{1'3'} \\ a_{3'1'} & a_{3'3'} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{2'2'} & a_{2'3'} \\ a_{3'2'} & a_{3'3'} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1'1'} & a_{1'2'} & a_{1'3'} \\ a_{2'1'} & a_{2'2'} & a_{2'3'} \\ a_{3'1'} & a_{3'2'} & a_{3'3'} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, матрица линейного преобразования в пространстве L_3 имеет три инварианта. Заметим, что инвариантность величин I_1 — следа матрицы A и I_3 — определителя матрицы A была доказана нами раньше

4. Пусть теперь

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Ax}$$

– линейное преобразование на плоскости L_2, а

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

— его матрица в некотором ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$. Аналогично предыдущему можно показать, что собственные значения преобразования $\boldsymbol{A}$ определяются из характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

а собственные векторы - из системы

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)\,x_1 + a_{22}x_2 = 0, \\ a_{12}x_1 + (a_{22}-\lambda)\,x_2 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (7.52)$$

куда вместо λ тнадо подставить решение λ_1 и λ_2 характеристического уравнения.

Многочлен

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\,\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}),$$

стоящий в левой части характеристического уравнения, называется *характеристическим многочленом* преобразование ***A***. Его коэффициенты

$$I_1 = a_{11} + a_{22},$$
$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

не зависят от выбора базиса.

Рассмотрим еще раз примеры *в)* и *г)* этого пункта и подтвердим аналитически указанные там результаты о собственных векторах.

б) Повороту плоскости L_2 на угол α соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Сложим характеристическое уравнение для этого преобразования:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1 = 0.$$

Дискриминант этого квадратного уравнения, равный $\cos^2\alpha - 1$, для значений α, заключенных от 0° до 180°, отрицателен. Поэтому поворот на угол α, отличный от 0° до 180°, не имеет действительных собственных значений, а следовательно, и действительных собственных векторов. Но легко видеть, что рассматриваемое преобразование имеет комплексно сопряженные собственные значения:

$$\lambda = \cos\alpha \pm i\sin\alpha.$$

Соответствующие им собственные векторы находим из систем

$$\left.\begin{aligned} \mp i\sin\alpha x_1 - \sin\alpha x_2 &= 0, \\ \sin\alpha x_1 \mp i\sin\alpha x_2 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Так как λ≠0, 180°, то получим

$x_2 =$ mix_1;

полагая здесь $x_1 = 1$, найдем собственные векторы $\boldsymbol{a}_1 = \{1, -i\}$, $\boldsymbol{a}_2 = \{1, +i\}$. Они имеют комплексно сопряженные координаты. Заметим, что $\boldsymbol{a}_1^2 = \boldsymbol{a}_2^2 = 0$, т.е. $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ имеют нулевую длину. Векторы, которые имеют нулевую длину, называются *изотропными* векторами. Таким образом, мы доказали, что собственными векторами поворота являются изотропные векторы.

г) Сдвигу плоскости L_2 в направлении вектора $\boldsymbol{e}_2$ отвечает матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение для сдвига имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & k \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(1-\lambda)^2=0,$$

откуда следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Соответствующий собственный вектор определяем из системы

$$\left.\begin{array}{l} (1-1)\,x_1 + kx_2 = 0, \\ 0x_1 + (1-1)\,x_2 = 0, \end{array}\right\}$$

которая дает $x_2 = 0$, т.е. собственными векторами, соответствующие единственному собственному значению 1, будут векторы, расположенные на оси Ox_1.

7.21. Приведение к простейшему виду матрицы линейного преобразования в случае различных собственных значений

Рассмотрим случай, когда все три корня характеристического уравнения действительны и различны, и покажем, как с помощью преобразования базиса можно упростить матрицу такого линейного преобразования.

Пусть λ_1, λ_2, λ_3 — три различных собственных значения преобразования $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ — соответствующие им собственные векторы, т.е.

$$\boldsymbol{Aa}_1 = \lambda_1\boldsymbol{a}_1, \quad \boldsymbol{Aa}_2 = \lambda_2\boldsymbol{a}_2, \quad \boldsymbol{Aa}_3 = \lambda_3\boldsymbol{a}_3.$$

Докажем, что эти три вектора линейно независимы. Рассмотрим сначала какие-нибудь два из векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, например, $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, и предположим, что они связаны соотношениям

$$\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0}, \qquad (7.53)$$

причем $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, как собственные векторы, отличны от нуля. Применим к обеим частям этого соотношения преобразование $\boldsymbol{A}$. Тогда получим

$$\alpha_1 \boldsymbol{Aa}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{Aa}_2 = \boldsymbol{0},$$

или

$$\alpha_1 \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \lambda_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0}. \qquad (7.54)$$

Умножив (7.53) на (- λ_1) и на (- λ_2) и сложив каждое из полученных равенств с равенством (7.54), будем иметь

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)\, \boldsymbol{a}_2 = \mathbf{0}, \quad \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{a}_1 = \mathbf{0},$$

откуда, поскольку $\lambda_2 \neq \lambda_1$ следует

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0,$$

что означает линейную независимость векторов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$. Рассмотрим теперь все три собственных вектора $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$. В силу только что доказанного каждая пара векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ линейно независима. Докажем, что все три вектора также линейно независимы. Допустим, что эти три вектора линейно зависимы, т.е.

$$\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \alpha_3\boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0}, \qquad (7.55)$$

где, например, $\alpha_1 \neq 0$. Применив к равенству (7.55) преобразование $\boldsymbol{A}$, будем иметь

$$\alpha_1 \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{a}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0}$$

или

$$\alpha_1 \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \alpha_3 \lambda_3\boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0}. \qquad (7.56)$$

Умножив равенство (7.55) на ($-\lambda_3$) и сложив полученное равенство с равенством (7.56), получим

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_3)\, \boldsymbol{a}_1 = \mathbf{0}, \quad \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_3)\boldsymbol{a}_2 = \mathbf{0},$$

откуда (поскольку $\alpha_1 \neq 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_3$) следует линейная зависимость векторов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$. Но такой зависимости, в силу первой части нашего доказательства, быть не может.

Линейно независимые векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ можно принять за базис. Заметим, что векторы этого базиса, вообще говоря, не будут ортогональными. Произвольный вектор $\boldsymbol{A}$ относительно базиса $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ имеет координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3, т.е.

$$\boldsymbol{x} = \xi_1\boldsymbol{a}_1 + \xi_2\boldsymbol{a}_2 + \xi_3\boldsymbol{a}_3.$$

а его образ $\boldsymbol{y}$ при преобразовании $\boldsymbol{A}$ — координаты η_1, η_2, η_3:

$$\boldsymbol{y} = \eta_1\boldsymbol{a}_1 + \eta_2\boldsymbol{a}_2 + \eta_3\boldsymbol{a}_3$$

Поскольку

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}(\xi_1\boldsymbol{a}_1 + \xi_2\boldsymbol{a}_2 + \xi_3\boldsymbol{a}_3) = \xi_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_1 + \xi_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_2 + \xi_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_3 = \xi_1\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \xi_2\lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \xi_3\lambda_3\boldsymbol{a}_3,$$

получаем следующее координатное представление преобразования $\boldsymbol{A}$ в базисе $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \lambda_1\xi_1, \\ \eta_2 &= \qquad \lambda_2\xi_2, \\ \eta_3 &= \qquad\qquad \lambda_3\xi_3. \end{aligned}$$

Следовательно, в *базисе, который состоит из собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям, матрица преобразования **A** имеет вид*

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix},$$

т.е. *является диагональной матрицей.*

Обратное утверждение: *если в некотором базисе* $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}\}$ *линейное преобразование имеет диагональную матрицу*

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix},$$

где λ_1, λ_2, λ_3 - *различные действительные числа, то все векторы базиса* $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}\}$ — *собственные.* Это утверждение доказано нами в примере *д)* п. 7.20.

Из доказанного видно, что собственные векторы играют важную роль в теории линейных преобразований: если существует базис из собственных векторов, то в этом базисе преобразование имеет наиболее простое координатное представление и может быть определено с помощью одних лишь собственных значений, соответствующих базисным векторам.

Очевидно, что в случае плоскости L_2 можно доказать аналогичное утверждение: *если линейное преобразование* $\boldsymbol{A}$ *на плоскости* L_2 *имеет два различных действительных собственных значения* λ_1 и λ_2, *то в базисе, который состоит из двух собственных векторов (они будут неколлинеарными, но не обязательно ортогональными), матрица* A *этого преобразования будет диагональной:*

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}.$$

7.22. Многочлены от матриц и теорема Гамильтона-Кэли

1. Раньше было показано, как складываются, умножаются на число и друг на друга линейные преобразования плоскости L_2 и пространства L_3 и соответствующие им квадратные матрицы второго и третьего порядка. В частности, там рассматривалась операция возведения в целую степень линейного преобразования $\boldsymbol{A}$ и соответствующей ему матрицы A.

Пусть теперь

$$P(\lambda)=a_0\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\ldots+a_{m-1}\lambda+a_m$$

— некоторый многочлен от величины λ. Выражение

$$P(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{A}^m+a_1\boldsymbol{A}^{m-1}+\ldots+a_{m-1}\boldsymbol{A}+a_m\boldsymbol{E},$$

где ***E*** — тождественное и ***A*** — произвольное линейное преобразование, называется *многочленом от преобразования **A**.* Многочлен *P(**A**)* будет некоторым новым линейным преобразованием, построенным с помощью преобразования ***A***. Если *А* — матрица линейного преобразования ***A*** в некотором базисе, то матрицей преобразования *P(**A**)* будет многочлен

$$P(A)=a_0A^m+a_1A^{m-1}+\ldots+a_{m-1}A+a_mE,$$

где *Е* — единичная матрица. Действительно, преобразование *P(**A**)* получается из ***A*** при помощи операций умножения на число и сложенияе. Но этим операциям над линейными преобразованиями соответствуют такие же операции над матрицами.

Все правила действий, которые имеют место для многочленов от одной переменной величины, остаются справедливыми и для многочленов от линейных преобразований. Например, остаются справедливыми формулы

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E},$$
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^3=\boldsymbol{A}^3+3\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E},$$
$$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$$

и т.д. Аналогичные формулы будут справедливы и для матриц. Линейные преобразования *P(**A**)* и *Q(**A**),* представляющие собой многочлены от одного и того же линейного преобразования ***A***, будут всегда перестановочны:

$$P(\boldsymbol{A})Q(\boldsymbol{A})=Q(\boldsymbol{A})P(\boldsymbol{A}).$$

2. Линейное преобразование ***A*** называется *корнем многочлена P(λ),* если при подстановке его в этот многочлен получается нулевое преобразование, т.е. если *P(**A**)* = ***N***.

Пусть теперь *P(λ)* — характеристический многочлен линейного преобразования ***A***, т.е.

$$P(\lambda)=\lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda-I_3,$$

где I_1, I_2, I_3 - инварианты этого линейного преобразования. Докажем следующую теорему, которая носит название теоремы Гамильтона — Кэли.

Теорема. *Линейное преобразование **A** является корнем своего характеристического многочлена, т.е.*

$$P(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{N}.$$

Мы докажем эту теорему только для случая, когда характеристический многочлен $P(\lambda)$ линейного преобразования $\boldsymbol{A}$ пространства L_3 имеет три различных действительных корня. Но теорема остается справедливой при любом строении характеристического многочлена $P(\lambda)$.

Итак, пусть λ_1, λ_2, λ_3 - три различных действительных корня многочлена $P(\lambda)$. Тогда этот многочлен может быть представлен в виде

$$P(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3).$$

В таком случае

$$P(\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{A} - \lambda_1\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A} - \lambda_2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A} - \lambda_3\boldsymbol{E}),$$

причем произведение, которое стоит в правой части, не зависит от порядка сомножителей.

Чтобы доказать, что $P(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{N}$, надо доказать, что линейное преобразование $P(\boldsymbol{A})$ любой вектор $\boldsymbol{x}$ переводит в нулевой вектор, т.е.

$$P(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

Пусть $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ — собственные векторы линейного преобразования $\boldsymbol{A}$, так что

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_1 = \lambda_1\boldsymbol{a}_1, \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_2 = \lambda_2\boldsymbol{a}_2, \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_3 = \lambda_3\boldsymbol{a}_3.$$

Поскольку

$$\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_2 \neq \lambda_3,\ \lambda_3 \neq \lambda_1,$$

это векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ линейно независимы, и любой вектор $\boldsymbol{x}$ пространства L_3 может быть представлен в виде их линейной комбинации:

$$\boldsymbol{x} = \xi_1\boldsymbol{a}_1 + \xi_2\boldsymbol{a}_2 + \xi_3\boldsymbol{a}_3.$$

Тогда

$$P(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x} = \xi_1 P(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{a}_1 + \xi_2 P(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{a}_2 + \xi_3 P(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{a}_3.$$

Но

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{a}_1 &= (\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\lambda_3\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{a}_1 = \\ &= (\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\lambda_3\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_1-\lambda_1\boldsymbol{E}\boldsymbol{a}_1) = \\ &= (\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\lambda_3\boldsymbol{E})(\lambda_1\boldsymbol{a}_1-\lambda_1\boldsymbol{a}_1) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Аналогично можно доказать, что

$$P(\boldsymbol{A})\boldsymbol{a}_2 = \mathbf{0}, \qquad P(\boldsymbol{A})\boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0}.$$

Поэтому

$$P(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \mathbf{0},$$

что и доказывает наше утверждение.

3. Из теоремы Гамильтона-Кэли следует, что матрицы E, A, A^2, A^3 линейно зависимы, так как

$$A^3 - I_1A_2 + I_2A - I_3E = N. \tag{7.57}$$

Отсюда следует также, что любые четыре подряд идущие матрицы A^k, A^{k+1}, A^{k+2}, A^{k+3} последовательности матриц $E, A, A^2, \ldots$ также линейно зависимы. Для доказателства надо равенство (7.57) умножить на A^k.

Теорема Гамильтона-Кэли позволяет дать новый способ для вычисления обратной матрицы A^{-1} невырожденной матрицы A. В самом деле, умножив равенство (7.53) на A^{-1}, получим

$$A^2 — I_1A+I_2E — I_3 A^{-1} \equiv N.$$

Но $I_3= |A|\neq 0$, поскольку мы рассматриваем невырожденную матрицу A. Поэтому

$$A^{-1}=\frac{1}{I_3}(A^2-I_1A+I_2E).$$

7.23. Свойства собственных векторов и собственных значений симметричного линейного преобразования

Рассмотрим симметричное линейное преобразование $\boldsymbol{A}$. Такое преобразование, как было показано, удовлетворяет соотношению

$$\boldsymbol{xAy} = \boldsymbol{yAx},$$

где $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ — любые векторы пространства. Было также доказано, что в любом ортонормированном базисе симметричное линейное преобразование, и только такое преобразование, имеет симметричную матрицу. Заметим, что аналогично дается определение симметричного линейного преобразования на плоскости L_2 и в пространстве L_n и доказывается, что только такие преобразования имеют в любом ортонормированном базисе симметричную матрицу.

Докажем теперь четыре теоремы о собственных векторах и собственных значениях симметричного линейного преобразования пространства L_3. Эти теоремы позволяют нам полностью разрешить вопрос о наиболее простом виде матрицы такого преобразования и выяснить его геометрический смысл.

Теорема 1. *Собственные векторы симметричного линейного преобразования, соответствующие разлияным собственным значениям, ортогональны между собой.*

Действительно, пусть λ_1 и λ_2 — два различных собственных значения симметричного линейного преобразования $\boldsymbol{A}$, а $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$— соответствующие им собственные векторы. Тогда

$$\boldsymbol{Aa}_1 = \lambda_1\boldsymbol{a}_1, \qquad \boldsymbol{Aa}_2 = \lambda_2\boldsymbol{a}_2.$$

Умножив первое из этих равенств скалярно на $\boldsymbol{a}_2$, а второе— на $\boldsymbol{a}_1$ получим

$$\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{a}_1 = \lambda_1(\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{a}_2),$$
$$\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{a}_2 = \lambda_2\,(\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{a}_2).$$

В силу симметричности преобразования $\boldsymbol{A}$ левые части этих равенств равны, поэтому равны и правые их части:

$$\lambda_1(\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{a}_2) = \lambda_2\,(\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{a}_2),$$

или

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2) = 0,$$

откуда, поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, имеем

$$\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 = 0,$$

что означает ортогональность векторов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$.

Теорема 2. *Если* $\boldsymbol{a}$ *- собственный вектор симметричного преобразования* $\boldsymbol{A}$ *и вектор* $\boldsymbol{x}$ *ортогонален вектору* $\boldsymbol{a}$*, то вектор* $\boldsymbol{Ax}$ *также ортогонален вектору* $\boldsymbol{a}$.

В самом деле, пусть вектор $\boldsymbol{x}$ ортогонален вектору $\boldsymbol{a}$. Тогда $\boldsymbol{ax} = 0$. Так как $\boldsymbol{a}$ — собственный вектор, то

$$\boldsymbol{Aa} = \lambda\boldsymbol{a}.$$

Поэтому

$$\boldsymbol{aAx} = \boldsymbol{xAa} = \boldsymbol{x}\lambda\boldsymbol{a} = \lambda(\boldsymbol{ax}) = 0.$$

А это и означает, что вектор $\boldsymbol{Ax}$ ортогонален вектору $\boldsymbol{a}$.

Заметим, что при доказательстве теорем 1 и 2 мы нигде не пользовались тем, что размерность пространства L_3 равна трем. Тем самым эти теоремы доказаны для любого пространства L_n, в частности и для плоскости L_2.

Теорема 2 для пространства L_2 означает, что если симметричное преобразование $\boldsymbol{A}$ имеет один собственный вектор, то любой ортогональный ему вектор тоже будет собственным. Для пространства L_3 эта теорема означает следующее. Если $\boldsymbol{a}$ — собственный вектор симметричного преобразования пространства L_3 и π— ортогональная вектору $\boldsymbol{a}$ плоскость, то векторы, которые лежат в плоскости π, при преобразовании $\boldsymbol{A}$ остаются в этой плоскости, т.е. плоскость π является инвариантной плоскостью преобразования $\boldsymbol{A}$.

Перейдем теперь к третьей теореме.

Теорема 3. *Корни характеристического уравнения симметричного линейного преобразования всегда действительны.*

Предположим противное: пусть $\lambda=\alpha+i\beta$ — комплексный корень характеристического уравнения $P(\lambda) = 0$. Так как это уравнение имеет действительные коэффициенты, то число $\lambda^*=\alpha-i\beta$, сопряженное λ, также является корнем уравнения $P(\lambda)=0$. Обозначим через $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}^*$ собственные векторы, отвечающие собственным значениям λ и λ^*, так что

$$\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{Ax}^* = \lambda^*\boldsymbol{x}^*.$$

Векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}^*$, как мы отмечали раньше, будут комплексно сопряженными векторами:

$$\boldsymbol{x} = x_k\boldsymbol{e}_k, \quad \boldsymbol{x}^* = x^*_k\boldsymbol{e}_k,$$

где x_k и x^*_k — комплексно сопряженные числа.

Если $\lambda \neq \lambda^*$, то по теореме 1, которая сохраняет свою силу и для комплексных значений λ, векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}^*$ будут ортогональными между собой и $\boldsymbol{xx}^* = 0$. Но, с другой стороны,

$$\boldsymbol{xx}^* = x_k x_k^* = \sum_{k=1}^{3} |x_k|^2 > 0.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Заметим, что теорема 3 также будет справедлива для любого n и, в частности, для n=2.

Теорема 4. *Симметричное линейное преобразование пространства L_3 имеет три взаимно ортогональных собственных вектора.*

Пусть λ_1 — собственное значение симметричного линейного преобразования $\boldsymbol{A}$ (действительное, как доказано выше) и $\boldsymbol{a}_1$ — соответствующий ему собственный вектор. Тогда плоскость π, ортогональная вектору $\boldsymbol{a}_1$, будет инвариантной плоскостью по отношению к преобразованию $\boldsymbol{A}$. В плоскости π преобразование $\boldsymbol{A}$ будет снова линейным симметричным преобразованием. Пусть λ_2 — некоторое его собственное значение и $\boldsymbol{a}_2$ - соответствующий этому собственному значению собственный вектор. Вектор $\boldsymbol{a}_2$ ортогонален вектору $\boldsymbol{a}_1$. Пусть теперь вектор $\boldsymbol{a}_3$ лежит в плоскости π и ортогонален вектору $\boldsymbol{a}_2$. Из теоремы 2 следует, что этот вектор также будет собственным вектором преобразования $\boldsymbol{A}$. Таким образом, мы нашли три взаимно ортогональных собственных вектора линейного преобразования $\boldsymbol{A}$, что и требовалось.

7.24. Приведение к диагональному виду матрицы симметричного линейного преобразования

1. Пусть $\boldsymbol{A}$ — симметричное линейное преобразование пространства L_3. По теореме 4 существуют три взаимно ортогональных собственных вектора $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ линейного преобразования $\boldsymbol{A}$. Пронормируем эти векторы, положив

$$\frac{\boldsymbol{a}_i}{|\boldsymbol{a}_i|} = \boldsymbol{e}_{i'},$$

где $i' = i$.

Тогда векторы $\boldsymbol{e}_{i'}$ также будут собственными векторами линейного преобразования $\boldsymbol{A}$, и, кроме того, они образуют ортонормированный базис. Так как

$$\boldsymbol{Ae}_{1'} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_{1'}; \quad \boldsymbol{Ae}_{2'} = \lambda_2 \boldsymbol{e}_{2'}, \quad \boldsymbol{Ae}_{3'} = \lambda_3 \boldsymbol{e}_{3'},$$

это в этом базисе линейное преобразование $\boldsymbol{A}$ будет описываться диагональной матрицей

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Поскольку исходный базис $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ и новый базис $\{\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}\}$ являются ортонормированными, переход от одного базиса к другому задается ортогональной матрицей $\Gamma=(\gamma_{i'i})$, так что

$$\boldsymbol{e}_{i'} = \gamma_{i'i}\, \boldsymbol{e}_i.$$

Поэтому матрицы преобразования $\boldsymbol{A}$ в старом и новом базисах связаны зависимостью

$$A' = \Gamma A \Gamma^{-1}.$$

Итак мы доказали следующую теорему.

Теорема. *Матрица симметричного линейного преобразования может быть приведена к диагональному виду путем ортогонального преобразования базиса.*

Геометрически эта теорема означает, что симметричное линейное преобразование представляет собой совокупность трех последовательных растяжений или сжатий относительно трех взаимно перпендикулярных осей, определяемых векторами $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$, так как именно такое линейное преобразование описывается диагональной матрицей.

2. Далее встает вопрос: единственным ли образом может быть выбран базис $\{\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}\}$, в котором матрица симметричного линейного преобразования $\boldsymbol{A}$ имеет диагональный вид? Здесь могут представиться три случая.

1) Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_2 \neq \lambda_3$, $\lambda_3 \neq \lambda_1$, то этим собственным значениям соответствует единственная система (с точностью до изменения направления и нумерации векторов), котрая состоит из трех взаимно ортогональных собственных векторов $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$. В самом деле, вектор $\boldsymbol{a}$, не коллинеарный одному из этих трех векторов, не может быть собственным вектором преобразования $\boldsymbol{A}$. Пусть, например,

$$\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{e}_{1'} + \beta \boldsymbol{e}_{2'},$$

в этом случае вектор

$$\boldsymbol{Aa} = \alpha\lambda_1 \boldsymbol{e}_{i'} + \beta\lambda_2 \boldsymbol{e}_{2'}$$

не не коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$, если $\alpha\neq0$, $\beta\neq0$, $\lambda_1\neq\lambda_2$ и, следовательно, вектор $\boldsymbol{a}$ не является собственным.

2) Пусть $\lambda_1\neq\lambda_2$, $\lambda_2=\lambda_3=\lambda$ и $\boldsymbol{e}_{1'}$, $\boldsymbol{e}_{2'}$, $\boldsymbol{e}_{3'}$ — единичные собственные векторы, отвечающие этим собственным значениям. Тогда любой вектор, который лежит в плоскости π, порожденной векторами $\boldsymbol{e}_{2'}$, $\boldsymbol{e}_{3'}$, будет собственным по отношению преобразования $\boldsymbol{A}$. В самом деле, если

$$\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{e}_{2'}+\beta\boldsymbol{e}_{3'},$$

то

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_{2'}+\beta\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_{3'}=\alpha\lambda\boldsymbol{e}_{2'}+\beta\lambda\boldsymbol{e}_{3'}=\lambda(\alpha\boldsymbol{e}_{2'}+\beta\boldsymbol{e}_{3'})=\lambda\boldsymbol{a}.$$

Поэтому любая взаимно ортогональная пара единичных векторов, лежащая в плоскости π, может быть принята за векторы $\boldsymbol{e}_{2'}$, $\boldsymbol{e}_{3'}$.

Симметричное линейное преобразование $\boldsymbol{A}$ представляет собой в этом случае произведение двух преобразований: подобия с коэффициентом λ в плоскости, перпендикулярной оси $O\boldsymbol{e}_1$, и растяжения с коэффициентом λ_1 вдоль этой оси.

Сделаем одно замечание, которое облегчает нахождение собственных векторов в этом случае. Поскольку в плоскости π любой вектор - собственный, то при подстановке в систему (7.49) собственного значения $\lambda=\lambda_2=\lambda_3$ мы получим только одно важное уравнение (два других будут ему пропорциональны):

$$(a_{11}-\lambda_2)\,x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0. \qquad (7.58)$$

Всякое ненулевое решение этого уравнения определит собственный вектор, который отвечает собственному значению $\lambda_2=\lambda_3$. Уравнение (7.58) означает, что все таким образом полученные собственные векторы перпендикулярне вектору $\boldsymbol{a}_1=\{a_{11}-\lambda_2,\ a_{12},\ a_{13}\}$. Заметим, что $\boldsymbol{a}_1\neq\boldsymbol{0}$, поскольку уравнение (7.58) не может иметь все коэффициенты равными нулю. Следовательно, вектор $\boldsymbol{a}_1$ — собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_1. Для построения искомого базиса остается пронормировать вектор $\boldsymbol{a}_1$, взять в качестве координат вектора $\boldsymbol{e}_{2'}$ любое нормированное решение уравнения (7.58) и найти $\boldsymbol{e}_{2'}$ как векторное произведение $\boldsymbol{e}_{1'}\times\boldsymbol{e}_{2'}$.

3) Пусть, наконец, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda$. В этом случае любой вектор пространства будет собственным.

Преобразование $\boldsymbol{A}$ *есть подобие во всем пространстве с коэффициентом* λ. В качестве базиса $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ можно взять любую тройку единичных и попарно ортогональных векторов.

3. При изучении симметричных линейных преобразований в плоскости L_2 могут представиться следующие два случая:

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$. В базисе, состоящем из собственных векторов, матрица преобразования ***A*** будет иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

а само преобразование ***A*** есть произведение двух растяжений вдоль двух перпендикулярных собственных направлений.

2) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. В этом случае любой вектор плоскости L_2 будет собственным. В любому ортонормированном базисе преобразованию ***A***, которое является подобием, соответствует матрица

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

7.25. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

1. Как было показано в п. 7.16, между квадратичными формами и симметричными линейными преобразованиями существует взаимно однозначное соответствие. Выясним, как, используя это соответствие и возможность приведения матрицы симметричного линейного преобразования к диагональному виду, можно упростить квадратичную форму φ.

Рассмотрим квадратичную форму $\varphi = \boldsymbol{xAx} = a_{ik}x_ix_k$. Приведем соответствующее ей симметричное линейное преобразование $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ax}$ к простейшему виду. Для этого перейдем к базису { $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$ }, который состоит из трех попарно ортогональных единичных собственных векторов. В таком базисе, как мы знаем, матрица преобразования станет диагональной:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix};$$

здесь λ_1, λ_2, λ_3 — собственные значения, соответствующие векторам базиса { $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$ }.

Что касается формы φ, то она в новом базисе примет вид

$$\varphi = \boldsymbol{xAx} = x_{i'}\, y_{i'} = \lambda\, x^2_{1'} + \lambda_2\, x^2_{2'} + \lambda\, x^2_{3'}; \tag{7.60}$$

здесь $x_{i'}, y_{i'}$ — координаты векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ax}$ в базисе { $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$ }.

Таким образом, *всякая квадратичная форма* φ *может быть приведена к сумме квадратов (или, как еще говорят, к каноническому* *виду) с помощью перехода к ортонормированному базису, состоящему из единичных собственных векторов симметричного линейного преобразования **A**, соответствующего форме* φ.

Направления $\boldsymbol{e}_{1'}$, $\boldsymbol{e}_{2'}$, $\boldsymbol{e}_{3'}$ называются *главными направлениями формы* φ, соответствующие собственным значениям λ_1, λ_2, λ_3.

Из результатов п. 7.23 получаем:

если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_2 \neq \lambda_3$, $\lambda_3 \neq \lambda_1$, то форма φ имеет точно три главных направления;

если $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$, то форма φ имеет одно главное направление, соответствующие λ_1, и бесчисленное множество главных направлений, ему перпендикулярных; наконец,

если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то любое направление в пространстве — главное для формы φ.

Аналогичные результаты можно получить для формы φ от двух переменных x_1 и x_2.

2. Квадратичная форма $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ называется *положительно (отрицательно) определенной,* если для любого вектора $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ она принимает только положительные (отрицательные) значения.

Поскольку указанное свойство должна иметь место в любом базисе, то оно, в частности, должно иметь место и в том базисе $\{\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}\}$, в котором эта форма имеет канонический вид (7.60). Но легко видеть, что для того, чтобы выражение (7.60) при любых $x_{1'}$, $x_{2'}$, $x_{3'}$ было положительным (отрицательным), необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения λ_1, λ_2, λ_3 были положительными (отрицательными).

Однако важно получить условие, которое даст нам возможность выяснить, будет ли положительно или отрицательно определенной квадратичная форма $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, заданная в произвольном ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Пусть (a_{ij})-матрица этой квадратичной формы в россматриваемом базисе. Назовем ее *главными минорами* величины

$$M_1 = a_{11}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Условие положительной определенности формы $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, называется *критерием Сильвестра,* может быть теперь сформулировано следующим образом.

Теорема. *Для того чтобы квадратичная форма $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все ее главные миноры в некотором базисе были положительными.*

Докажем сначала эту теорему для случая, когда квадратичная форма $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ задана на плоскости L_2. Форма φ записывается в виде

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = a_{11}x^2_1+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x^2_2.$$

Введем новую вспомогательную переменную

$$t=\frac{x_1}{x_2}.$$

Тогда форма φ может быть переписана так:

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = x^2_2\,(a_{11}t^2 + 2a_{12}t + a_{22}).$$

Главный минор M_2 квадратичной формы φ лишь знаком отличается от дискриминанта D квадратного трехчлена, который стоит в скобках. Если $M_2 > 0$, то $D < 0$ и этот квадратный трехчлен не меняет знака при изменении параметра t. Если $M_1 = a_{11} > 0$, то этот трехчлен будет положительным при любых значениях параметра t. Следлвательно, при $M_1>0$ и $M_2>0$ квадратичная форма $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ на плоскости L_2 будет положительно определенной формой. Легко видеть, что и, обратно, если $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$, то $M_1 > 0$ и $M_2 > 0$. В самом деле, положим $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{x}_2 = -a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{11}\boldsymbol{e}_2$. Тогда

$$\varphi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) = a_{11} = M_1,$$

$$\varphi(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2) = a_{11}(a_{11}a_{22} - a^2_{12}) = M_1M_2,$$

и так как $\varphi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) > 0$ и $\varphi(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2) > 0$, то $M_1 > 0$ и $M_2 > 0$.

Перейдем теперь к доказательству критерия Сильвестра в трехмерном случае. При этом форма $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ в базисе $\{ \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \}$ может быть подробно записана так:

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + \\ + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1.$$

Если же перейдем к базису $\{\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}\}$, составленному из векторов, направленных по главным направлениям этой формы, то она примет канонический вид:

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \lambda_1x^2_{1'} + \lambda_2x^2_{2'} + \lambda_3x^2_{3'}.$$

Так как главный минор M_3 совпадает с инвариантом I_3 этой формы, то $M_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

Предположим теперь, что форма $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ положительно определена. Тогда $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, $\lambda_3>0$, и потому $M_3 > 0$. Чтобы доказать положительсть миноров M_2 и M_1, достаточно рассмотреть форму $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ на плоскости $x_3=0$ и воспользоваться доказанным выше критерием Сильвестра для случая L_2.

Обратно, пусть все главные миноры формы $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ положительпы. Тогда

$$M_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 > 0,$$

и оказываются возможными два случая: либо все три собственных значения λ_i положительны, либо одно из них положительно, а два других отрицательны. В первом случае квадратичная форма $\varphi(x, x)$ будет положительно определенной, и обратное утверждение доказано.

Пусть теперь одно из чисел λ_i - положительно, а два других отрицательны, например: $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_3 < 0$. Тогда на плоскости $e_{1'}$, $e_{3'}$ форма $\varphi(x, x)$ отрицательно определена. Но, с другой стороны, на плоскости e_1, e_2 форма $\varphi(x, x)$ равна

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

и, в силу положительности первых двух главных миноров, она положительно определена на этой плоскости. Отсюда следует, что на прямой, по которой пересекаются плоскости e_1, e_2 и $e_{1'}$, $e_{3'}$, форма $\varphi(x, x)$ будет одновременно положительно и отрицательно определена. Полученное противоречие показывает, что все λ_i должны быть положительными. Тем самым обратное утверждение также доказано.

Замечая, что условие отрицательной определенности квадратичной формы $\varphi(x, x) = a_{ik}x_ix_k$ будет в тот же время условием положительной определенности формы

$$-\varphi(x, x) = -a_{ik}x_ix_k,$$

получаем необходимые и достаточные условия отрицательной определенности квадратичной формы $\varphi(x, x) = a_{ik}x_ix_k$ в виде

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0.$$

7.26. Представление невырожденного линейного преобразования в виде произведения симметричного и ортогонального преобразований

В предыдущем пункте было доказано, что симметричное линейное преобразование представляет собой три последовательных растяжения или сжатия относительно трех взаимно перпендикулярных осей. Если же преобразование A не является симметричным, то такое представление для него невозможно. Однако оказывается справедливой следующая теорема.

Теорема. *Всякое невырожденное линейное преобразование можно представить в виде произведения ортогонального и симметричного линейных преобразований.*

Пусть $\boldsymbol{A}$ — любое невыродженное линейное преобразование, заданное в некотором ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Тогда преобразование $\boldsymbol{A^*A}$, где $\boldsymbol{A^*}$ — преобразование, сопряженное $\boldsymbol{A}$, будет симметричным. В самом деле, поскольку для любых линейных преобразований $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$

$$(AB)^*=B^*A^*,$$

это для преобразований $\boldsymbol{A^*}$ и $\boldsymbol{A}$ имеем

$$(A^*A)^* = A^* (A^*)^* = A^*A$$

что и доказывает симметричность преобразования $\boldsymbol{A^*A}$. Симметричное преобразование $\boldsymbol{A^*A}$ всегда имеет три единичных взаимно перпендикулярных собственных вектора $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$, так что

$$\begin{aligned}(A^*A)\, e_{1'} &= \lambda_1 e_{1'},\\ (A^*A)\, e_{2'} &= \lambda_2 e_{2'},\\ (A^*A)\, e_{3'} &= \lambda_3 e_{3'}.\end{aligned} \tag{7.61}$$

Докажем теперь, что собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ этого преобразования будут положительными. Действительно, умножая обе части каждого из равенств (7.61) скалярно на вектор $\boldsymbol{e}_{i'}$, получим

$$\lambda_{i'} = e_{i'}\,[(A^*A)\, e_{i'}] = e_{i'}\,[A^*(Ae_{i'})] = Ae_{i'} Ae_{i'} = (Ae_{i'})^2 > 0;$$

мы воспользовались здесь результатом предыдущего рассмотрения, согласно которому для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ и любых линейных преобразований $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$

$$x[A^*(By)] = (Ax)(By).$$

Рассмотрим теперь линейное преобразование $\boldsymbol{H}$, которому в базисе $\{\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}\}$соответствует матрица

$$H' = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\boldsymbol{H'}$ — симметричное линейное преобразование, поскольку H' — симметричная матрица. Далее, преобразованию $\boldsymbol{H}^2$ в базисе $\{ \boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}\}$ будет соответствовать матрица

$$H^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

т.е. та же матрица, которая в этом базисе соответствует преобразованию $\boldsymbol{A^*A}$. Поэтому

$$\boldsymbol{A^*A = H^*}.$$

Отсюда следует, что

$$\boldsymbol{A = A^{*-1}H^2 = (A^{*-1}H)H}.$$

Осталось показать, что преобразование $\boldsymbol{A^{*-1}H}$ будет ортогональным. Пусть $\boldsymbol{S = A^{*-1}H}$. Рассмотрим преобразование S^*, сопряженное преобразованию $\boldsymbol{S}$:

$$\boldsymbol{S}^* = (\boldsymbol{A}^{*-1}\boldsymbol{H})^* = \boldsymbol{H}^* (\boldsymbol{A}^{*-1})^* = \boldsymbol{H}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $(\boldsymbol{A}^{*-1})^* = \boldsymbol{A}^{-1}$, и симметричностью преобразования $\boldsymbol{H}$. Отсюда вытекает, что

$$\boldsymbol{SS^* = A^{*-1}HHA^{-1} = A^{*-1}H^2A^{-1} = A^{*-1}A^*AA^{-1} = E\,E = E},$$

т.е. $\boldsymbol{S}$ — ортогональное преобразование. Таким образом, линейное преобразование $\boldsymbol{A}$ представлено в виде

$$\boldsymbol{A = SH},$$

где $\boldsymbol{H}$ - симметричное, а $\boldsymbol{S}$ - ортогональное линейные преобразования. Сформулированная теорема доказана.

Геометрический смысл доказанной теоремы заключается в том, что *произвольное невырожденное линейное преобразование можно осуществить, произведя последовательно три растяжения вдоль трех взаимно перпендикулярных осей* $\boldsymbol{e_{1'}}$, $\boldsymbol{e_{2'}}$, $\boldsymbol{e_{3'}}$ *и совершив потом поворот пространства вместе с этими осями.*

Заметим, что точно так же доказывается аналогичная теорема для плоскости L_2.

Отметим, наконец, что при доказательстве теоремы мы указали эффективный способ построения симметричного и ортогонального преобразований, в произведение которых раскладывается данное невырожденное линейное преобразование. Нужно только иметь в виду, что для получения матрицы, соответствующей ортогональному преобразованию $\boldsymbol{S = A^{-1}H}$, надо найти матрицу преобразования $\boldsymbol{H}$ в базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$ по формуле

$$H = \Gamma^{-1}H'\Gamma$$

где Г — матрица перехода от базиса $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$ к базису $\{\boldsymbol{e_{1'}}, \boldsymbol{e_{2'}}, \boldsymbol{e_{3'}}\}$.

Микромодуль 20.
Примеры решения типовых задач

1) Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, которое имеет в ортогональном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ вид

$$y_1 = 3x_1 + 4x_2,$$
$$y_2 = 5x_1 + 2x_2.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^{2-5}\lambda - 14 = 0,$$

откуда находим собственные значения

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_{2.} = 7.$$

Для значения $\lambda_1 = -2$ собственный вектор находим из системы

$$\left.\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 = 0, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$\frac{x_1}{x_2} = -\frac{4}{5}.$$

Аналогично для $\lambda_2 = 7$ имеем

$$\left.\begin{aligned} -4x_1 + 4x_2 = 0, \\ 5x_1 - 5x_2 = 0, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$\frac{x_1}{x_2} = 1.$$

Таким образом, собственными векторами будут векторы

$$\boldsymbol{a}_1 = \{4, \quad -5\},$$
$$\boldsymbol{a}_2 = \{1, \quad 1\}$$

и все коллинеарные им векторы.

2) Найти собственные векторы и собственные значения линейного преобразования, которое в ортогональном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ имеет вид

$$\begin{aligned} y_1 &= 4x_1 - 5x_2 + 7x_3, \\ y_2 &= x_1 - 4x_2 + 9x_3, \\ y_3 &= -4x_1 + 5x_3. \end{aligned}$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 7 \\ 1 & -4-\lambda & 9 \\ -4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

или

$$\lambda^{3-5}\lambda^2 + 17\lambda — 13 = 0.$$

Корни этого уравнения: $\lambda_1=1$, $\lambda_2 = 2 + 3i$, $\lambda_3 = 2 — 3i$. Собственный вектор, соответствующий единственному действительному значению $\lambda_1=1$, находим из системы

$$\left.\begin{aligned} 3x_1-5x_2+7x_3&=0,\\ x_1-5x_2+9x_3&=0,\\ -4x_1\qquad\quad+4x_3&=0. \end{aligned}\right\}$$

Последнее уравнение этой системы дает $x_1=x_3$, а из первых двух получаем

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, данное линейное преобразование имеет только один действительный собственный вектор $\boldsymbol{a} = \{1, 2, 1\}$.

3) Линейное преобразование $\boldsymbol{A}$ плоскости L_2 в некотором базисе имеет матрицу

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Путем перехода к новому базису привести эту матрицу к диагональному виду (если это возможно).

Решение. Мы уже видели (пример 1)), что рассмотренное линейное преобразование имеет собственные значения $\lambda_1=—2$, $\lambda_2=7$ и собственные векторы $\boldsymbol{a}_1 = \{4, —5\}$, $\boldsymbol{a}_2=\{1, 1\}$. Если векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ принять за базис, то в этом базисе матрица преобразования $\boldsymbol{A}$ будет иметь вид

$$A'=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

4) Линейному преобразованию $\boldsymbol{A}$ пространства L_3 в некотором базисе соответствует матрица

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Путем перехода к новому базису привести эту матрицу к диагональному виду (если это возможно).

Решение. Составляем характеристическое уравнение преобразования ***A***:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 & 2 \\ 6 & -4-\lambda & 4 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0.$$

Корни этого уравнения $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$ действительны и различны. Определим соответствующие им собственные векторы.

1) $\lambda_1=1$.

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Из последнего уравнения находим $x_2 = x_1 + x_3$, тогда первые два уравнения дают $x_1 = x_3$. Поэтому $\boldsymbol{a}_1=\{1, 2, 1\}$.

2) $\lambda_2=2$.

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 4x \;\; + 3x_3 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Из первого и третьего уравнений следует, что $x_1=x_2$. Тогда из системы следует, что $x_3 = 0$. Поэтому $\boldsymbol{a}_2=\{1, 1, 0\}$.

3) $\lambda_3 = 3$.

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Последнее уравнение дает $x_3 = -2x_1 + 2x_3$, и из первых двух получаем $x_2 = 2x_1$. Поэтому $\boldsymbol{a}_3 = \{1, 2, 2\}$.

Перейдя к базису $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$, мы приведем матрицу преобразования ***A*** к диагональному виду:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Теперь ясно, что линейное преобразование ***A*** переводит вектор $\boldsymbol{x} = \xi_1\boldsymbol{a}_1 + \xi_2\boldsymbol{a}_2 + \xi_3\boldsymbol{a}_3$ в вектор $\boldsymbol{u} = \xi_1\boldsymbol{a}_1 + 2\xi_2\boldsymbol{a}_2 + 3\xi_3\boldsymbol{a}_3$.

5) В ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ линейное преобразование ***A*** плоскости L_2 имеет матрицу

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Найти новый ортонормированный базис, в котором матрица преобразования ***A*** будет диагональной, и найти эту матрицу.

Решение. Матрица преобразования ***A*** симметрична, поэтому поставленная задача может быть решена. Составляем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 2\\ 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

Корни этого уравнения $\lambda_1=4$, $\lambda_2=—1$. Далее находим соответствующие этим собственным значением собственные векторы.

1) При $\lambda = 4$ система (7.52) принимает вид

$$\left.\begin{aligned}-4x_1+2x_2=0,\\ 2x_1-\ x_2=0.\end{aligned}\right\}$$

В качестве ее решения можно взять $x_2=1$, $x_2=2$. Нормируя это решение, находим единичный собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 4$:

$$e_{1'}=\left\{\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right\}.$$

2) При λ =-1 мы получим

$$\left.\begin{aligned}x_1+2x_2=0,\\ 2x_1+4x_2=0,\end{aligned}\right\}$$

откуда x_1 = —2, x_2=1 и

$$e_{2'}=\left\{-\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}.$$

При переходе к базису $\{e_{1'}, e_{2'}\}$ координаты всех векторов преобразуются по формулам

$$x_{i'}=\gamma_{i'i}\, x_{i},$$

где

$$\Gamma=(\gamma_{i'i})=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}.$$

В базисе $\{e_{1'}, e_{2'}\}$ матрица линейного преобразования ***A*** будет иметь вид

$$A' = \Gamma A \Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрицу A' можно было написать и не производя этой выкладки, так как ее диагональными элементами являются собственные значения матрицы A. Преобразование ***A*** сводится к растяжению вдоль вектора $\boldsymbol{e}_{1'}$ с коэффициентом 4 и следующему растяжению вдоль вектора $\boldsymbol{e}_{2'}$ с коэффициентом -1.

6) В ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ дано линейное преобразование ***A*** пространства L_3, имеющее матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти новый ортонормированный базис, в котором матрица преобразования ***A*** будет диагональной, и найти эту матрицу.

Решение. В силу симметричности матрицы A поставленная задача имеет решение. Находим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0.$$

Корни этого уравнения $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = -2$. Так как они различны, то преобразование ***A*** принадлежит первому типу. Выпишем систему уравнений, из которой определяются координаты собственных векторов для нашей задачи:

$$\left.\begin{aligned} (1-\lambda)\,x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0, \\ x_1 + (5-\lambda)\,x_2 + x_3 &= 0, \\ 3x_1 + x_2 + (1-\lambda)\,x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Подставляя в эту систему поочередно $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = -2$ и находя каждый раз ее нормированные решения, получим векторы $\boldsymbol{e}_{i'}$, нового ортонормированного базиса:

$$e_{1'}=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right\},$$

$$e_{2'}=\left\{\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right\},$$

$$e_{3'}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

Заметим, что вектор $\boldsymbol{e}_{3'}$ можно найти как векторное произведение $\boldsymbol{e}_{1'}\times \boldsymbol{e}_{2'}$. Матрица Г в данном случае имеет вид

$$\Gamma=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

В базисе $\{ \boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'} \}$ преобразование ***A*** будет иметь матрицу

$$A'=\Gamma A\Gamma^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Преобразование ***A*** геометрически представляет собой произведение трех растяжений вдоль осей $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$, коэффициенты этих растяжений равны соответственно 3, 6, —2.

7) В ортонормированном базисе $\{ \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \}$ матрица

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

задает линейное преобразование ***A*** пространства L_3. Найти новый ортонормированный базис, в котором преобразование ***A*** задавалось бы диагональной матрицей.

Решение. В силу симметричности матрицы *A* решение возможно. Найдем характеристическое уравнение преобразования ***A:***

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

или

$$\lambda^3-9\lambda^2+108=0.$$

Корни этого уравнения $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=\lambda_3=6$, и наша задача соответствует второму случаю; согласно сделанному при его рассмотрении замечанию запишем систему, соответствующую собственному значению $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$. В этой системе будет только одно существенное уравнение:

$$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0. \tag{7.59}$$

Отсюда следует, что вектор $\boldsymbol{a_1}$={—1, 2, 2} — собственный вектор с собственным значением λ_1= —3. Соответствующий вектору $\boldsymbol{a_1}$ единичный вектор будет

$$\boldsymbol{e}_{1'} = \left\{-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right\}.$$

Возьмем теперь любое решение уравнения (7.59), например $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$; пронормировав его, получим вектор $\boldsymbol{e}_{2'}$:

$$\boldsymbol{e}_{2'} = \left\{\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right\}.$$

Наконец, находим вектор $\boldsymbol{e}_{3'}$, как векторное произведение:

$$\boldsymbol{e}_{3'} = \boldsymbol{e}_{1'} \times \boldsymbol{e}_{2'} = \left\{\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right\}.$$

Матрица Г имеет в этом случае вид:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

В базисе $\{\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}\}$ преобразованию $\boldsymbol{A}$ соответствует матрица

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{\Gamma A \Gamma}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, преобразование $\boldsymbol{A}$ можно осуществить, выполняя последовательно растяжение вдоль оси $\boldsymbol{e}_{1'}$ с коэффициентом —3, а затем - гомотетию с коэффициентом 6 в плоскости векторов $\boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$.

8) Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$\varphi = 4\, x_1 x_2 + 3\, x_2^2.$$

Решение. Соответствующее этой форме симметричное линейное преобразование имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица совпадает с матрицей линейного преобразования, рассмотренного в примере 5. Там мы получили $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -1$. Поэтому, перейдя к базису $\{\boldsymbol{e_{1'}}, \boldsymbol{e_{2'}}\}$, найденному в указанном примере, мы приведем форму φ к сумме квадратов:

$$\varphi = 4x^2_{1'} - x^2_{2'}$$

9) Привести к каноническому виду форму

$$\varphi = x^2_1 + 5x^2_2 + x^2_3 + 2x_1x_3 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Решение. Матрица A линейного преобразования $\boldsymbol{A}$, соответствующая этой форме, имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

она совпадает с матрицей преобразования, рассмотренного нами в примере 6.

Поскольку мы имели $\lambda_1=3$, $\lambda_2= 6$, $\lambda_3= -2$, то, перейдя к найденному в указанном примере базису $\{\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}\}$, получим канонический вид формы φ:

$$\varphi = 3x^2_{1'} + 6x^2_{2'} - 2x^2_{3'}$$

10) Линейное преобразование $\boldsymbol{A}$ плоскости L_2, имеющее в некотором ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{36}{25} & \frac{2}{25} \\ -\frac{23}{25} & \frac{36}{25} \end{pmatrix},$$

разложить в произведение симметричного и ортогонального преобразований.

Решение. Найдем сначала симметричное преобразование $\boldsymbol{A^*A}$ и приведем его к простейшему виду. Это преобразование имеет матрицу

$$A^*A = \begin{pmatrix} -\frac{36}{25} & -\frac{23}{25} \\ \frac{2}{25} & \frac{36}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{36}{25} & \frac{2}{25} \\ -\frac{23}{25} & \frac{36}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{73}{25} & -\frac{36}{25} \\ -\frac{36}{25} & \frac{52}{25} \end{pmatrix}.$$

Его характеристическим уравнением будет

$$\begin{vmatrix} \frac{73}{25} - \lambda & -\frac{36}{25} \\ -\frac{36}{25} & \frac{52}{25} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0.$$

Собственные значения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$. Соответствующие единичные собственные векторы

$$\boldsymbol{e}_{1'} = \left\{\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\}, \quad \boldsymbol{e}_{2'} = \left\{\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right\}.$$

В базисе $\{e_{1'}, e_{2'}\}$ матрицей преобразования A^*A будет матрица

$$H^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Искомое симметричное преобразование H имеет в базисе $\{e_{1'}, e_{2'}\}$ матрицу

$$H' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

а в базисе $\{e_1, e_2\}$ — матрицу

$$H = \Gamma^{-1} H' \Gamma = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{41}{25} & -\frac{12}{25} \\ -\frac{12}{25} & \frac{34}{25} \end{pmatrix}.$$

Построим теперь ортогональное преобразование $S = A^{*-1}H$. Имеем.

$$A^* = \begin{pmatrix} -\frac{36}{25} & -\frac{23}{25} \\ \frac{2}{25} & \frac{36}{25} \end{pmatrix}, \quad A^{*-1} = \begin{pmatrix} -\frac{18}{25} & -\frac{23}{50} \\ \frac{1}{25} & \frac{18}{25} \end{pmatrix},$$

$$S = A^{*-1} H = \begin{pmatrix} -\frac{24}{25} & -\frac{7}{25} \\ -\frac{7}{25} & \frac{24}{25} \end{pmatrix}.$$

Заметим еще, что матрица S может быть представлена в виде

$$S = \begin{pmatrix} \frac{24}{25} & -\frac{7}{25} \\ \frac{7}{25} & \frac{24}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательное, линейное преобразование A можно осуществить, сделав сначала растяжение вдоль оси $e_{1'}$ с коэффициентом 1, потом растяжение вдоль оси $e_{2'}$ с коэффициентом 2, затем отражение плоскости относительно оси Oe_2, и, наконец, поворот плоскости вокруг точки O на угол

$$\alpha = \arccos(24/25) \approx 16^\circ.$$

11) Линейное преобразование A пространства L_3 имеет в некотором ортонормированном базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ матрицу

$$A=\begin{pmatrix} \frac{16}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{14}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{5}{9} & \frac{14}{9} & \frac{16}{9} \end{pmatrix}.$$

Разложить преобразование $\boldsymbol{A}$ в произведение симметричного и ортогонального преобразований.

Решение. Симметричное преобразование $\boldsymbol{A^*A}$ имеет в базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$ матрицу

$$A^*A=\begin{pmatrix} \frac{16}{9} & \frac{14}{9} & -\frac{5}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{14}{9} & \frac{14}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{16}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{16}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{14}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{5}{9} & \frac{14}{9} & \frac{16}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{53}{9} & -\frac{26}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{26}{9} & \frac{44}{9} & \frac{22}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{22}{9} & \frac{29}{9} \end{pmatrix}.$$

Характеристическим уравнением этого преобразования будет уравнение

$$\lambda^3-15\lambda^2 + 62\lambda - 72 = 0.$$

Его собственные значения $\lambda_1=1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 9$. Соответствующими единичными собственными векторами будут

$$e_{1'}=\left\{\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right\},\ e_{2'}=\left\{\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right\},\ e_{3'}=\left\{\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right\}.$$

Матрицей преобразования $\boldsymbol{A^*A}$ в базисе $\{\boldsymbol{e_{1'}}, \boldsymbol{e_{2'}}, \boldsymbol{e_{3'}}\}$ будет матрица

$$H^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Симметричное преобразование $\boldsymbol{H}$ - один из множителей, на которые мы раскладываем преобразование $\boldsymbol{A}$, - в базисе $\{\boldsymbol{e_{1'}}, \boldsymbol{e_{2'}}, \boldsymbol{e_{3'}}\}$ имеет матрицу

$$H'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

а в базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$ — матрицу

$$H=\Gamma^{-1}H'\Gamma=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

Вычисляем матрицу ортогонального преобразования $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{A}^{*-1}\boldsymbol{H}$ - второго из множителей, на которые мы раскладываем $\boldsymbol{A}$:

$$A^*=\begin{pmatrix} \frac{16}{9} & \frac{14}{9} & -\frac{5}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{14}{9} & \frac{14}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{16}{9} \end{pmatrix}, \quad A^{*-1}=\begin{pmatrix} \frac{14}{27} & \frac{13}{27} & -\frac{7}{27} \\ \frac{1}{27} & -\frac{29}{54} & \frac{13}{27} \\ -\frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{14}{27} \end{pmatrix},$$

$$S=A^{*-1}H=\begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{8}{9} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, линейное преобразование $\boldsymbol{A}$ раскладывается в совокупность трех последовательных растяжений вдоль осей $\boldsymbol{e}_{1'}$, $\boldsymbol{e}_{2'}$, $\boldsymbol{e}_{3'}$ с коэффициентами 1, 2, 3 соответственно и ортогональное преобразование пространства, определяемого матрицей S.

Микромодуль 20.
Индивидуальные тестовые задачи

1. Доказать, что любой вектор пространства L_1 является собственным при любом линейном преобразовании L_1.

2. Найти собственные векторы и собственные значения следующих линейных преобразований пространства L_3:

а) $\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{ax})\,\boldsymbol{b}$;
б) $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}$;
в) $\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega})\,\boldsymbol{\omega}+[\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega})\,\boldsymbol{\omega}]\cos\alpha+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}\sin\alpha$;
г) $\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{ax})\,\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{bx})\,\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$;
д) $\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{ax})\,\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{bx})\,\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{cx})\,\boldsymbol{c}$, где $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{c}^2$ и $\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{bc}=\boldsymbol{ac}$.

3. Найти собственные векторы и собственные значения линейных преобразований, которые переводят

а) векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ соответственно в векторы $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_1$,

б) векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ соответственно в векторы $\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$.

4. Найти собственные векторы и собственные значения линейных преобразований плоскости L_2 и пространства L_3, которым в некотором базисе соответствуют матрицы

$$\text{а)}\ \begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix};\quad \text{б)}\ \begin{pmatrix}2&-1&-1\\0&-1&0\\0&2&1\end{pmatrix};\quad \text{в)}\ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{pmatrix};$$

$$\text{г)}\ \begin{pmatrix}a&a^2&a^3\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix};\quad \text{д)}\ \begin{pmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{pmatrix};\quad \text{е)}\ \begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\0&b_2&c_2\\0&0&c_3\end{pmatrix}.$$

5. Доказать, что

а) характеристические уравнения линейного преобразования $\boldsymbol{A}$ и сопряженного к нему преобразования $\boldsymbol{A}^*$ одинаковы;

б) если $\boldsymbol{x}$ — собственный вектор преобразования $\boldsymbol{A}$ с собственным значением λ_1 и преобразование $\boldsymbol{A}^*$ с собственным значением λ_2, то $\lambda_1=\lambda_2$.

6. Пусть λ_1, λ_2, λ_3 — собственные значения линейного преобразования $\boldsymbol{A}$. Доказать, что

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=I_1,\quad \lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1=I_2,\quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3=I_3.$$

7. Используя результат задачи 6, доказать, что все собственные значения преобразования $\boldsymbol{A}$ отличны от нуля тогда и только тогда, когда преобразование $\boldsymbol{A}$ не вырождено.

8. Доказать, что собственные значения обратного линейного преобразования $\boldsymbol{A}^{-1}$ равны обратным величинам собственных значений преобразования $\boldsymbol{A}$.

9. Доказать, что характеристические многочлены преобразований $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{BA}$ совпадают.

10. Доказать, что собственное нетождественное вращение пространства $\boldsymbol{E}_3$, задаваемое в некотором прямоугольном базисе ортогональной матрицей

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad |A|=1,$$

может быть осуществлено поворотом на некоторый угол α вокруг неподвижной прямой.

Найти угол α и направляющий вектор такой прямой.

11. Найти угол α и направляющий вектор неподвижной прямой (о которых идет речь в задаче 10), если

$$A=\begin{pmatrix} \frac{11}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{15} & \frac{14}{15} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

12. Найти ортогональное преобразование, которое осуществляет поворот на угол - α вокруг той же оси, относительно которой собственное вращение с матрицей

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

определяет поворот на угол α.

13. Доказать, что если вектор $\boldsymbol{x}$ — собственный вектор линейного преобразования $\boldsymbol{A}$ с собственным значением λ_0, то он будет собственным вектором линейного преобразования $\boldsymbol{A}^2$ с собственным значением λ^2_0.

14. Показать, что если линейное преобразование $\boldsymbol{A}^2$ имеет собственный вектор с неотрицательным собственным значением μ^2, то линейное преобразование $\boldsymbol{A}$ имеет собственный вектор с собственным значением μ.

15. Доказать, что если характеристическое уравнение линейного преобразования $\boldsymbol{A}$ пространства L_3 имеет два комплексно сопряженных корня, то им соответствует плоскость L_2, переходящая в себя при преобразовании $\boldsymbol{A}$ (инвариантная плоскость). Найти эту плоскость для преобразования, рассмотренного в примере 2 микромодуля 20 «Примеры решения типовых задач»).

16. Показать, что линейное преобразование в пространстве *C* [*a*, *b*] непрерывных на отрезке [*a*, *b*] функций, состоящее в умножении функций на независимое переменное, не имеет собственных значений.
17. Доказать, что линейное преобразование пространства *C* [*a*, *b*], заключающееся в дифференцировании функций, имеет бесчисленное множество собственных значений.
18. Найти собственные векторы и собственные значения операции дифференцирования многочленов в пространстве многочленов степени, не превосходящей *n*.
19. Доказать сформулированное в тексте утверждения о возможности приведения к диагональному виду матрицы линейного преобразования плоскости L_2, имеющего различные действительные значения.
20. Доказать, что матрицы линейных преобразований в примерах *а*), *б)*, *д)* п. 7.20 и в задачах 2г), 4а) -в), е) можно привести путем перехода к новому базису к диагональному виду. Найти этот базис и указать, какой вид будут иметь в нем матрицы этих преобразований.
21. Матрица линейного преобразования ***A*** в некотором базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В каком случае это преобразование будет иметь три различных действительных собственных значения? Найти в этом случае его собственные векторы.
22. Доказать, что если $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ — собственные векторы линейного преобразования $\boldsymbol{A}$ с различными собственными значениями λ_1 и λ_2, то вектор $\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}$ ($\alpha\neq0$, $\beta\neq0$) не может быть собственным вектором преобразования ***A*.**
23. Используя результат задачи 4, доказать, что если каждый вектор пространства L_3 является собственным вектором линейного преобразования $\boldsymbol{A}$, то $\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}$ (т.е. $\boldsymbol{A}$ является гомотетией пространства L_3*)*.
24. Доказать, что матрица собственного ортогонального преобразования евклидовой плоскости E_2 может быть приведена в некотором ортонормированном базисе к виду

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

а несобственного - к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

25. Доказать, что в евклидовом просторанстве E_3 существует ортонормированный базис, в котором матрица произвольного ортогонального преобразования имеет один из следующих видов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

26. Найти φ(***A***), если

$$\varphi(\lambda) = -2 - 5\lambda + 3\lambda^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

27. Доказать непосредственной подстановкой, что матрица

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

удовлетворяет уравнению

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0.$$

28. Пусть $f(\boldsymbol{A})$ - многочлен от линейного преобразования ***A.*** Доказать, что

а) собственные векторы линейного преобразования $f(\boldsymbol{A})$ совпадают с собственными векторами преобразования ***A;***

б) если λ — собственное значение преобразования ***A,*** то $f(\lambda)$ будет собственным значением преобразования $f(\boldsymbol{A})$.

29. Пусть ***a*** - произвольный вектор пространства L_3, ***A***— некоторое линейное преобразование этого пространства и

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{a}.$$

Доказать, что

а) $\boldsymbol{a}_3 = I_1\boldsymbol{a}_2 - I_2\boldsymbol{a}_1 + I_3\boldsymbol{a}$;

б) если векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ линейно зависимы, но векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}_1$ не коллинеарны, то плоскость, определякмая этими векторами, переходит в себя при преобразовании ***A*** (является инвариантной плоскостью).

Предполагая, что векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ линейно независимы, принять их за базисные и найти матрицу линейного преобразования ***A*** в этом базисе.

30. Доказать, что равенство $AB - BA = E$ не выполняется ни для каких матриц A и B.

31. Найти обратные матрицы для матриц

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{д) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

с помощью приведенного в тексте способа отыскания обратной матрицы.

32. Доказать теорему 3 для плоскости L_2 путем непосредственного вычисления корней характеристического уравнения преобразования ***A***.

33. Доказать, что если линейное преобразование ***A*** в пространстве L_3 имеет три взаимно перпендикулярных собственных вектора, то оно является симметричным линейным преобразованием.

34. Доказать, что два симметричных линейных преобразования пространства L_3 перестановочны тогда и только тогда, когда они имеют три общих взаимно перпендикулярных собственных вектора.

35. Пусть ***A*** — кососимметричное линейное преобразование пространства L_3. Доказать, что

а) если ***a*** — собственный вектор преобразования ***A***, то ортогональная ему плоскость будет инвариантной относительно этого преобразования;

б) собственные значения преобразования ***A*** равны нулю или чисто мнимые;

в) собственные векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ преобразования ***A*** (быть может с комплексными координатами), отвечающие собственным значениям λ_1 и λ_2 таким, что $\lambda_1+\lambda_2\neq 0$, взаимно ортогональны.

36. Симметричное линейное преобразование плоскости L_2 или просторанства L_3 в некотором ортонормированном базисе имеет матрицу:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти новый ортонормированный базис, в котором матрица этого преобразования будет иметь диагональный вид, и указать его.

37. Возвести в тридцатою степень матрицы

$$а)\ \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad б)\ \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

38. Симметричное преобразование ***A*** называется *неотрицательным,* если ***xAx***≥0 для любого вектора ***x***. Доказать, что

а) все собственные значения такого и только такого преобразования неотрицательны;

б) найдется неотрицательное симметричное преобразование ***B*** такое, что $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{A}$;

в) если для некоторого преобразования ***C*** имеет место ***AC=CA,*** то и ***BC = CB*** (здесь $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{A}$);

г) сумма двух неотрицательных симметричных преобразований есть преобразования того же вида;

д) произведение двух перестановочних неотрицательных симметричных преобразований есть преобразования того же вида;

е) многочлени с действительными неотрицательными коэффициентами от таких преобразований будут преобразованиями того же вида;

ж) коэффициенты характеристического многочлена такого и только такого преобразования имеют знаки, которые чередуются.

39. Доказать, что симметричные преобразования, которые в некотором ортонормированном базисе имеют матрицы

$$а)\ A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad б)\ A = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 4 \\ 14 & 24 & 18 \\ 4 & 18 & 29 \end{pmatrix},$$

будут неотрицательными, и найти в том же базисе матрицу преобразования ***B*** такого, что $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{A}$.

40. Доказать, что если ***A*** - симметричное ортогональное линейное преобразование, то его матрица путем ортогонального преобразования базиса может быть приведена к одному из следующих четырех типов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

41. Найти канонический вид, к которому приводятся следующие квадратичные формы с помощью ортогонального преобразования, не находя самого преобразования:

а) $\varphi = x_1x_2$;
б) $\varphi = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$;
в) $\varphi = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$;
г) $\varphi = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$;
д) $\varphi = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

42. Найти ортогональные преобразования, приводящие следующие квадратичные формы к каноническому виду, и написать этот канонический вид:

а) $\varphi = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2$;
б) $\varphi = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$;
в) $\varphi = 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;
г) $\varphi = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;
д) $\varphi = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$.

43. Найти, при каком значении параметра *a* следующие квадратичные формы будут положительно определенными:

а) $\varphi = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 4ax_2^2$;
б) $\varphi = 5x_1^2 + x_2^2 + ax_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;
в) $\varphi = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3$.

44. Доказать, что если λ_1 и λ_2 — собственные значения симметричного линейного преобразования, соответствующего квадратичной форме $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, заданной на плоскости L_2, и $\lambda_1 \le \lambda_2$, то

$$\lambda_1 x^2 \le \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \le \lambda_2 x^2.$$

45. Доказать, что все собственные значения симметричной матрицы A тогда и только тогда лежат на отрезке $[a, b]$, когда квадратичная форма φ с матрицей A-xE аоложительно определена при любом $x < a$ и отрицательно определена при любом $x > b$.

46. Пусть $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 1$ — характеристическая поверхность симметричного линейного преобразования $\boldsymbol{A}$. Определить вид этой поверхности, если собственные значения линейного преобразования $\boldsymbol{A}$ удовлетворяют следующим условиям:

а) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0, \quad \lambda_3 < 0$;
б) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0, \quad \lambda_3 > 0$;
в) $\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad \lambda_3 > 0$;
г) $\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad \lambda_3 < 0$;
д) $\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 < 0, \quad \lambda_3 < 0$;
е) $\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0, \quad \lambda_3 < 0$.

47. Доказать теорему, аналогичную доказанной в п. 7.26, для плоскости L_2.

48. Как надо видоизменить приведенное в тексте (п. 7.26) доказательство, чтобы доказать, что всякое невирожденное линейное преобразование можно представить в виде произведения симметричного и ортогонального преобразований?

49. Представить в виде произведения ортогонального и симметричного линейных преобразований линейные преобразования, которые имеют в некотором прямоугольном базисе матрицы

а) $\begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 & -1 \\ 1 & \sqrt{3}-1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Модуль 8. Поверхности второго порядка и єрмитовы формы. Матрицы с неотрицательными элементами

Микромодуль 21. Общая теория поверхностей второго порядка

8.1. Общее уравнение поверхности второго порядка. Его инварианты

1. Как мы уже отмечали, общее уравнение поверхности второго порядка в ортогональной системе координат с началом в точке O имеет вид

$$a_{ij}x_ix_j+2a_ix_i + a = 0, \quad a_{ij}= a_{ji},\ i, j= 1, 2, 3. \qquad (8.1)$$

Здесь x_1, x_2, x_3 — координаты точки поверхности второго порядка или радиуса-вектора этой точки.

В этом микромодуле мы выясним, как выбрать новый ортонормированный базис, в котором уравнение (8.1) приняло бы наиболее простой (канонический) вид, и благодаря этому мы сумеем сделать классификацию поверхностей второго порядка.

Изучим, как преобразуются коэффициенты a_{ij}, a_i, a уравнения поверхности второго порядка при различных преобразованиях системы координат, и найдем функции от этих коэффициентов, которые не меняются при таких преобразованиях, т.е. являются инвариантами.

Поскольку поверхность второго порядка рассматривается как множество точек, координаты которых x_1, x_2, x_3 удовлетворяют уравнению (6.1), то нужно рассмотреть два возможных преобразования системы координат: поворот и параллельный перенос осей координат.

а) **Поворот осей координат**. Как было доказано раньше, при повороте осей координат старые координаты x_i точки M связаны с новыми координатами $x_{i'}$ этой точки соотношениями

$$x_i = \gamma_{ii'} x_{i'}$$

где $\gamma_{ii'}$ — элементы матрицы Γ^{-1}, обратной к ортогональной матрице $\Gamma = (\gamma_{i'i})$, которая определяет переход от старой системы координат к новой.

После поворота уравнение (6.1) перейдет в

$$a_{ij}\gamma_{ii'}\gamma_{jj'}x_{i'}x_{j'} + 2a_i\gamma_{ii'}x_{i'} + a = 0. \qquad (8.2)$$

Следовательно, вновь полученное уравнение (8.2) имеет тот же вид, что и (8.1):

$$a_{i'j'}x_{i'}x_{j'} + 2a_{i'}x_{i'} + a' = 0,$$

причем, учитывая то, что для ортогональной матрицы $\gamma_{ii'} = \gamma_{i'i}$ имеем

$$\begin{aligned} a_{i'j'} &= \gamma_{i'i}\gamma_{j'j}a_{ij}, \\ a_{i'} &= \gamma_{i'i}a_i, \\ a' &= a. \end{aligned} \qquad (8.3)$$

Эти равенства показывают, что коэффициенты a_{ij} образуют тензор второй валентности, коэффициенты a_i— тензор первой валентности, а свободный член a не меняется при повороте осей (является тензором нулевой валентности).

Отсюда следует, что уравнение (8.1) можно переписать в виде

$$\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) + 2l(\boldsymbol{x}) + a = 0, \qquad (8.4)$$

где $\boldsymbol{x} = x_i\boldsymbol{e}_i$ — радиус-вектор точки поверхности, $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ — квадратичная форма, а $l(\boldsymbol{x})$ — линейная форма от этого радиуса-вектора.

б) **Параллельный перенос осей координат**. Перейдем от прямоугольной системы координат с началом в точке O к новой системе координат с теми же базисными векторами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ и новым началом, расположенным в точке O'. Запишем разложение радиуса-вектора OO' точки O' по базису $\{ \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \}$ в виде

$$\overline{OO'} = \gamma_i\boldsymbol{e}_i.$$

Как известно, новые координаты x'_i и старые координаты x_i точки M связаны соотношениям $x_i = x'_i + \gamma_i$. Поэтому уравнение (8.1) в новой системе координат будет иметь вид

$$b_{ij}x'_ix'_j + 2b_ix'_i + b = 0,$$

где

$$b_{ij} = a_{ij}, \quad b_i = a_{ij}\gamma_j + a_i, \quad b = a_{ij}\gamma_i\gamma_j + 2a_i\gamma_i + a. \tag{8.5}$$

Таким образом, при параллельном переносе осей коэффициенты a_{ij} квадратичной формы $a_{ij}x_ix_j$ не меняются. Отсюда сразу следует, что составленные из коэффициентов a_{ij} величины

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

которые являются инвариантами тензора a_{ij} и, следовательно, не меняются при повороте осей координат, не будут изменяться и при параллельном переносе осей, т.е. являются инвариантами общего уравнения поверхности второго порядка относительно наиболее общего преобразования системы координат.

2. Уравнение (8.1) имеет еще один инвариант относительно общего преобразования системы координат. Этим инвариантом является определитель

$$I_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{vmatrix}.$$

Докажем инвариантность величины I_4. Для этого заметим прежде всего, что определитель I_4 путем разложения по последней строке и последнему столбцу может быть представленний в виде

$$I_4 = aI_3 — A_{ij}a_ia_j, \tag{8.7}$$

где A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в определителе I_3. (Эта формула легко проверяется непосредственным подсчетом). Как было доказано ранее, эти алгебраические дополнения образуют тензор, который удовлетворяет соотношению

$$A_{ij}a_{jk} = I_3\delta_{ik}. \tag{8.8}$$

В выражении (8.7) первое слагаемое инвариантно относительно поворота, а второе — представляет собой результат полного свертывания и, следовательно, тоже обладает этим свойством. Поэтому величина I_4 инвариантна относительно поворота.

Докажем теперь инвариантность величины I_4 относительно параллельного переноса. При параллельном переносе величины I_3 и A_{ij} не изменяются и, следовательно,

$$I'_4 = bI_3 - A_{ij}b_ib_j.$$

Используя соотношение (8.5) и равенства (8.8), непосредственно убеждаемся в том, что $I'_4 = I_4$. Таким образом, инвариантность величины I_4 полностью доказана.

3. Докажем теперь, что по отношению поворота осей координат уравнения (8.1) имеет еще два инварианта:

$$K_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{31} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & a \end{vmatrix},$$

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & a \end{vmatrix}.$$

Для этого рассмотрим уравнение

$$a_{ij}x_ix_j + 2a_ix_i + a - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0, \tag{8.9}$$

которое получено добавлениям к левой части уравнения поверхности второго порядка слагаемого, не меняющегося при повороте осей координат. Определитель I_4, составленный для этого уравнения, зависит от параметра λ, $I_4 = I_4(\lambda)$, и, по доказанному в предыдущем пункте, не меняется при повороте осей координат. Определитель $I_4(\lambda)$ будет многочленом третьей степени от λ, коэффициентами при λ и λ^2 в котором служат величины K_3 и K_2. Так как параметр λ произвольный, то эти коэффициенты также не меняются при повороте, т.е. являются инвариантами относительно поворота осей координат.

Заметим, что коэффициентом при λ^3 в правой части будет величина *a,* в инвариантности которой по отношению к повороту мы убедились ранее. Коэффициентом при нулевой степени λ будет величина I_4, также инвариантная при повороте.

Величины K_3 и K_2, вообще говоря, не будут инвариантны при параллельном переносе осей координат, так само уравнение (8.6) не сохраняет своего вида при таком преобразовании. Поэтому их называют *семиинвариантами (полуинвариантами).*

Найденные инварианты позволят нам в дальнейшем, после того как будет дана классификация поверхностей второго порядка по их каноническим уравнениям, распознавать тип поверхности без приведения ее уравнения к каноническому виду, определять характер множества центров симметрии и, наконей, дадут возможность указать простой способ приведения уравнения поверхности к каноническому виду.

4. Кривые второго порядка на плоскости L_2 определяются уравнением (8.1), в котором индексы i, j принимают только значение 1 и 2. Инвариантами уравнения кривой второго порядка будут выражения

$$I_1 = a_{11} + a_{22}, \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}.$$

Выражение

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix}$$

инвариантно только при повороте осей (т.е. является семиинвариантом). Доказательство этих утверждений, аналогичное доказательствам, содержащимся в этом пункте, предоставляется читателю.

8.2. Приведение к простейшему виду общего уравнения поверхности второго порядка

1. Пусть в некоторой прямоугольной системе координат с базисными векторами $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{e_3}$ и началом O общее уравнение поверхности второго порядка имеет вид

$$a_{ij}x_ix_j + 2a_ix_i + a = 0, \tag{8.10}$$

где $a_{ij} = a_{ji}$ и индексы i и j принимают значение 1, 2, 3. В предыдущем пункте было показано, что это уравнение может быть переписано в виде

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + 2l(\boldsymbol{x}) + a = 0, \tag{8.11}$$

где $\boldsymbol{x} = x_i\boldsymbol{e}_i$ — радиус-вектор точки поверхности, $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = a_{ij}x_ix_j$ — квадратичная форма, а $l(\boldsymbol{x}) = a_ix_i$ — линейная форма от $\boldsymbol{x}$.

С другой стороны, ранее мы показали, что, перейдя к другому ортонормированному базису $\{\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}\}$ с тем же началом O (т.е. совершая поворот осей координат), можно привести квадратичную форму $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ к сумме квадратов:

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \lambda_1 x_{1'}^2 + \lambda_2 x_{2'}^2 + \lambda_3 x_{3'}^2.$$

При этом векторы $\boldsymbol{e}_{i'}$ будут единичными собственными векторами симметричного линейного преобразования $y_i = a_{ij}x_j$, соответствующего квадратичной форме φ. Собственные значения этого преобразования определяются из уравнения

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0,$$

где величины I_1, I_2, I_3 задаются формулами (6.6). Координаты же самих векторов $\boldsymbol{e}_{i'}$ являются нормированными решениями системы (7.50) модуля 7.

Относительно прямоугольной системы координат с началом в точке O и базисом $\{\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}\}$ уравнение (8.10) будет иметь вид

$$\lambda_1 x_{1'}^2 + \lambda_2 x_{2'}^2 + \lambda_3 x_{3'}^2 + 2a_{i'}x_{i'} + a = 0; \tag{8.12}$$

здесь $a_{i'}$ - коэффициенты линейной формы $l(\boldsymbol{x})$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}\}$, a — свободный член, который не меняется при повороте осей.

2. Рассмотрим все возможные случаи, которые могут представиться в зависимости от того, сколько имеется нулевых собственных значений в матрице (a_{ij}).

I. Пусть

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_3 \neq 0.$$

В этом случае уравнения (8.12) можно записать в виде

$$\lambda_1\left(x_{1'} + \frac{a_{1'}}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(x_{2'} + \frac{a_{2'}}{\lambda_2}\right)^2 + \lambda_3\left(x_{3'} + \frac{a_{3'}}{\lambda_3}\right)^2 + R = 0, \tag{8.13}$$

где

$$R = a - \left(\frac{a_{1'}^2}{\lambda_1} + \frac{a_{2'}^2}{\lambda_2} + \frac{a_{3'}^2}{\lambda_3}\right).$$

Сделаем перенос начала кординат в точку

$$O'\left(-\frac{a_{1'}}{\lambda_1}, -\frac{a_{2'}}{\lambda_2}, -\frac{a_{3'}}{\lambda_3}\right);$$

при этом координаты $x_{i'}$ подвергнутся преобразованию

$$x_{1''} = x_{1'} + \frac{a_{1'}}{\lambda_1}, \quad x_{2''} = x_{2'} + \frac{a_{2'}}{\lambda_2}, \quad x_{3''} = x_{3'} + \frac{a_{3'}}{\lambda_3},$$

и уравнение (8.13) примет вид

$$\lambda_1 x_{1''}^2 + \lambda_2 x_{2''}^2 + \lambda_3 x_{3''}^2 + R = 0. \tag{I}$$

Новые оси координат $O'\boldsymbol{e}_{i'}$ будут осями симметрии поверхности второго порядка. Их называют *главными осями* этой поверхности. Точка O' будет центром симметрии поверхности.

II. Пусть в уравнении (8.12)

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad a_{3'} \neq 0.$$

Последнее условие означает, что вектор $l = a_{i'} \boldsymbol{e}_{i'}$ не перпендикулярен вектору $\boldsymbol{e}_{3'}$. Уравнение (8.12) в этом случае может быть записано в виде

$$\lambda_1 \left(x_{1'} + \frac{a_{1'}}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(x_{2'} + \frac{a_{2'}}{\lambda_2}\right)^2 + 2a_{3'} \left(x_{3'} + \frac{R}{2a_{3'}}\right) = 0,$$

где

$$R = a - \frac{a_{1'}^2}{\lambda_1} - \frac{a_{2'}^2}{\lambda_2}.$$

Приняв точку

$$O' \left(-\frac{a_{1'}}{\lambda_1}, -\frac{a_{2'}}{\lambda_2}, -\frac{R}{2a_{3'}}\right)$$

за новое начало координат, т.е. сделав параллельный перенос системы координат, определяемой формулами

$$x_{1''} = x_{1'} + \frac{a_{1'}}{\lambda_1}, \; x_{2''} = x_{2'} + \frac{a_{2'}}{\lambda_2}, \; x_{3''} = x_{3'} + \frac{R}{2a_{3'}},$$

мы приведем уравнение (8.12) к виду

$$\lambda_1 x_{1''}^2 + \lambda_2 x_{2''}^2 + 2a_{3'} x_{3''} = 0. \qquad \text{(II)}$$

Теперь только ось $O'\boldsymbol{e}_{3'}$ будет осью симметрии поверхности, а точка O' — расположена в ее вершине.

III. Пусть теперь в уравнении (8.12)

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad a_{3'} = 0.$$

Последнее условие означает перпендикулярность вектора l и $\boldsymbol{e}_{3'}$. Уравнение (8.12) имеет в этом случае вид

$$\lambda_1 \left(x_{1'} + \frac{a_{1'}}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(x_{2'} + \frac{a_{2'}}{\lambda_2}\right)^2 + R = 0,$$

где

$$R = a - \frac{a_{1'}^2}{\lambda_1} - \frac{a_{2'}^2}{\lambda_2}.$$

Выбирая за новое начало точку

$$O' \left(-\frac{a_{1'}}{\lambda_1}, -\frac{a_{2'}}{\lambda_2}, 0\right),$$

т.е. совершая преобразование координат по формулам

$$x_{1''} = x_{1'} + \frac{a_{1'}}{\lambda_1}, \quad x_{2''} = x_{2'} + \frac{a_{2'}}{\lambda_2}, \quad x_{3''} = x_{3'},$$

мы приведем уравнение (8.2) к виду

$$\lambda_1 x_{1''}^2 + \lambda_2 x_{2''}^2 + R = 0. \qquad \text{(III)}$$

Рассматриваемая поверхность является цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси $O'\boldsymbol{e}_{3'}$. Эта ось является осью симметрии поверхности.

IV. Пусть, далее, в уравнении (8.12)

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad a^2_{2'} + a^2_{3'} > 0.$$

последнее условие означает, что вектор l не коллиниарен вектору $\boldsymbol{e}_{1'}$. Если повернуть базис $\{\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}\}$ вокруг вектора $\boldsymbol{e}_{1'}$ на угол φ, который определяется равенствами

$$\cos\varphi = \frac{a_{2'}}{\sqrt{a_{2'}^2 + a_{3'}^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{a_{3'}}{\sqrt{a_{2'}^2 + a_{3'}^2}},$$

то уравнение (8.12) примет вид

$$\lambda_1 x_{1''}^2 + 2a_{1'}x_{1''} + 2\sqrt{a_{2'}^2 + a_{3'}^2}\, x_{2''} + a = 0,$$

где

$$x_{1''} = x_{1'}, \quad x_{2''} = \frac{a_{2'}x_{2'} + a_{3'}x_{3'}}{\sqrt{a_{2'}^2 + a_{3'}^2}}, \quad x_{3''} = \frac{-a_{3'}x_{2'} + a_{2'}x_{3'}}{\sqrt{a_{2'}^2 + a_{3'}^2}}.$$

После параллельного переноса начала координат в точку

$$O'\left(-\frac{a_{1'}}{\lambda_1}, \quad -\frac{\lambda_1 a - a_{1'}^2}{2\lambda_1\sqrt{a_{2'}^2 + a_{3'}^2}}, \quad 0\right)$$

это уравнение примет вид

$$\lambda_1 x_{1'''}^2 + 2hx_{2'''} = 0, \qquad \text{(IV)}$$

где

$$h = \sqrt{a_{2'}^2 + a_{3'}^2} \neq 0$$

и

$$x_{1'''} = x_{1''} + \frac{a_{1'}}{\lambda_1}, \quad x_{2'''} = x_{2''} + \frac{\lambda_1 a - a_{1'}^2}{2\lambda_1\sqrt{a_{2'}^2 + a_{3'}^2}}, \quad x_{3'''} = x_{3''}.$$

Поверхность четвертого типа тоже является цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси $O'\boldsymbol{e}_{3'}$, но у этого цилиндра нет оси симметрии, параллельной образующим, а имеется только одна плоскость симметрии — эта плоскость определяется точкой O' и векторами $\boldsymbol{e}_{2'}$, $\boldsymbol{e}_{3'}$.

V. Пусть, наконец, в уравнении (8.12)

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad a_{2'} = a_{3'} = 0.$$

Последние условия означают, что вектор l коллинеарен вектору $\boldsymbol{e}_{1'}$. Уравнение (8.12) в этом случае может быть записанное в виде

$$\lambda_1\left(x_{1'} + \frac{a_{1'}}{\lambda_1}\right)^2 + R = 0,$$

где

$$R = a - \frac{a_{1'}^2}{\lambda_1}.$$

Перейдя к новому началу

$$O'\left(-\frac{a_{1'}}{\lambda_1},\ 0,\ 0\right),$$

т.е. сделав преобразование координат по формулам

$$x_{1''} = x_{1'} + \frac{a_{1'}}{\lambda_1}, \quad x_{2''} = x_{2'}, \quad x_{3''} = x_{3'},$$

мы приведем уравнение (8.12) к виду

$$\lambda_1 x^2_{1''} + R = 0. \qquad \text{(V)}$$

В дальнейшем будет показано, что поверхности этого типа представляют собой пары плоскостей (действительных, мнимых или совпадающих), расположенных симметрично относительно плоскости $O'\,\boldsymbol{e}_{2'}\,\boldsymbol{e}_{3'}$.

3. Объединим полученные в этом пункте результаты в теорему. Условимся при этом обозначать в уравнениях (I) - (V) все индексы как и ранее без штрихов.

Теорема. *Общее уравнение* (8.10) *поверхности второго порядка, заданное относительно некоторой прямоугольной системы координат, при помощи поворота и параллельного переноса этой системы координат может быть приведено к одному из следующих пяти типов:*

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_1 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + R = 0, \quad \lambda_1 \neq 0, \ \lambda_2 \neq 0, \ \lambda_3 \neq 0. \qquad \text{(I)}$$

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + 2a_3 x_3 = 0, \quad \lambda_1 \neq 0, \ \lambda_2 \neq 0, \ a_3 \neq 0. \qquad \text{(II)}$$

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + R = 0, \quad \lambda_1 \neq 0, \ \lambda_2 \neq 0. \qquad \text{(III)}$$

$$\lambda_1 x_1^2 + 2h x_2 = 0, \quad \lambda_1 \neq 0, \quad h \neq 0. \qquad \text{(IV)}$$

$$\lambda_1 x_1^2 + R = 0, \quad \lambda_1 \neq 0. \qquad \text{(V)}$$

Эти пять типов уравнений поверхности второго порядка будем называть *простейшими.*

Очевидно, что *общее уравнение кривой второго порядка на плоскости* L_2

$$a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + 2a_1 x_1 + 2a_2 x_2 + a = 0$$

с помощью поворота осей и их параллельного переноса может быть приведено к одному из следующих трех простейших типов:

$$\begin{array}{lll} \text{I.} & \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + R = 0, & \lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0. \\ \text{II.} & \lambda_1 x_1^2 + 2a_2 x_2 \qquad = 0, & \lambda_1 \neq 0, \quad a_2 \neq 0. \\ \text{III.} & \lambda_1 x_1^2 \qquad\quad + R = 0, & \lambda_1 \neq 0. \end{array}$$

Доказательство этого утверждения, аналогичное доказательству такого же утверждения для поверхности второго порядка, предоставляем читателю.

8.3. Определение типа поверхности второго порядка с помощью инвариантов

1. В этом пункте с помощью инвариантов I_1, I_2, I_3, I_4 и семиинвариантов K_3 и K_2 будут даны необходимые и достаточные условия принадлежности поверхности второго порядка к одному из пяти полученных в п. 8.2 типов и указано, как можно выразить коэффициенты уравнений (I) — (V) через эти инварианты.

Прежде всего докажем, что семиинвариант K_3 будет инвариантом для поверхностей III, IV, V типов, а семиинвариант K_2 будет инвариантом для поверхности V типа.

Для доказательства первого утверждения заметим, что поверхности III, IV и V типов характеризуются тем, что в их простейших уравнениях отсутствует переменное x_3. Добиться этого можно только за счет поворота осей координат (при параллельном переносе осей, очевидно, количество переменных, которые входят в уравнение, остается неизменным). Поэтому существует такой базис, получающийся из исходного поворотом (при этом K_3 не меняется), в котором общее уравнение поверхностей III, IV, V типов имеет вид

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0.$$

Тогда

$$K_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}.$$

Инвариантность же полученного определителя при параллельном переносе может быть доказана или непосредственно, или так, как была доказана в п.8.1 инвариантность I_4 при параллельном переносе.

Для доказательства второго утверждения заметим аналогично, что поскольку в простейших уравнениях поверхностей V типа отсутствуют x_2 и x_3, то существует базис, получающийся из исходного только поворотом (при этом K_2 не меняется), в котором общее уравнение поверхности V типа имеет вид

$$a_{11}x^2_1 + 2a_1x_1 + a = 0. \qquad (8.14)$$

Итак, в этом случае

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix}.$$

После параллельного переноса осей в точку $O'(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ координаты x_i преобразуются по формулам

$$x_i = x'_i + \gamma_i$$

а уравнение поверхности (8.14) примет вид

$$a_{11}(x'_1)^2 + 2(a_{11}\gamma_1 + a_1)x'_1 + a_{11}\gamma_1^2 + 2a_1\gamma_1 + a = 0.$$

Поэтому

$$K'_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}\gamma_1 + a_1 \\ a_{11}\gamma_1 + a_1 & a_{11}\gamma_1^2 + 2a_1\gamma_1 + a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix} = K_2.$$

2. Следующая теорема дает необходимые и достаточные признаки принадлежности поверхности второго порядка к одному из пяти указанных в п. 8.2 типов.

Теорема. *Для того чтобы поверхность второго порядка принадлежала* I, II, III, IV *или* V *типа, необходимо и достаточно выполнение следующих признаков:*

I. $I_3 \neq 0$.

II. $I_3 = 0,\ I_4 \neq 0$.

III. $I_3 = 0,\ I_4 = 0,\ I_2 \neq 0$.

IV. $I_3 = 0,\ I_4 = 0,\ I_2 = 0,\ K_3 \neq 0$.

V. $I_3 = 0,\ I_4 = 0,\ I_2 = 0,\ K_3 = 0,\ I_1 \neq 0$.

Заметим сразу, что достаточно доказать необходимость этих признаков, так как достаточность будет тогда вытекать из того, что эти признаки попарно несовместимы и в совокупности исчерпывают все возможности. (Случай, когда $I_3=I_4=I_2=K_3=I_1=0$, приводит к обращению в нуль всех коэффициентов при членах второй степени общего уравнения поверхности второго порядка и поэтому исключается из рассмотрения.)

Докажем необходимость указанных признаков для каждого из пяти типов. Достаточно проверить их выполнение в какой-нибудь одной системе координат; в других системах эти признаки будут выполнены автоматически, поскольку имеют инвариантную формулировку. В качестве этой системы координат для каждого из пяти типов поверхностей возьмем ту систему, в которой уравнение поверхности имеет простейший вид (см. формулы (I) - (V) п. 8.2). Тогда необходимость условия доказываемой теоремы проверяется простым подсчетом инвариантов для каждого из этих случаев.

Установленные признаки позволяют легко определить, к какой из пяти групп относится поверхность второго порядка: для этого надо последовательно вычислять I_3, I_4, I_2, K_3, I_1.

Поверхность будет относиться к группе, номер которой совпадает с порядковым номером первого отличного от нуля из этих пяти инвариантов.

3. Покажем теперь для каждого из пяти типов поверхностей, как с помощью инвариантов можно сразу перейти от общего уравнения поверхности второго порядка к ее простейшему уравнению.

I. Простейшее уравнение имеет вид

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + R = 0.$$

Как мы уже отметили, λ_1, λ_2, λ_3 являются корнями характеристического уравнения

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0.$$

Поскольку в этом случае $I_4=\lambda_1\lambda_2\lambda_3 R$, $I_3=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, коэффициент R выражается так:

$$R = \frac{I_4}{I_3},$$

и поэтому простейшее уравнение поверхности I типа имеет вид

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \frac{I_4}{I_3} = 0. \tag{1'}$$

II. В этом случае

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + 2a_3 x_3 = 0,$$

где λ_1 и λ_2 - корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$$

(это следует из того, что $\lambda_3 = 0$ и $I_3 = 0$). Далее, как легко видеть,

$$I_4 = -\lambda_1\lambda_2 a_3^2,$$

и потому

$$a_3^2 = -\frac{I_4}{I_2}, \qquad a_3 = \pm\sqrt{-\frac{I_4}{I_2}}.$$

Таким образом, простейшее уравнение поверхности II типа I принимает вид

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 \pm 2\sqrt{-\frac{I_4}{I_2}}\, x_3 = 0. \tag{II'}$$

III. Теперь

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + R = 0,$$

где λ_1 и λ_2— как и ранее корни уравнения

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0.$$

Для определения R заметим, что $I_2 = \lambda_1\lambda_2$; кроме того, подсчет величины K_3, которая является инвариантом для поверхностей III типа, дает $K_3 = R\lambda_1\lambda_2$. Поэтому

$$R = \frac{K_3}{I_2},$$

и простейшее уравнение поверхности III типа примет вид,

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0. \qquad \text{(III')}$$

IV. Простейшее уравнение имеет вид ,

$$\lambda_1 x_1^2 + 2hx_2 = 0,$$

где, поскольку $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$,

$$\lambda_1 = I_1.$$

Подсчет инварианта K_3 для поверхностей этого типа дает $K_2 = — h^2 I_1$. Отсюда следует, что

$$h = \pm\sqrt{-\frac{K_3}{I_1}},$$

и окончательно простейшее уравнение поверхностей IV типа примет вид

$$I_1 x_1^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1}}\, x_2 = 0. \qquad \text{(IV′)}$$

V. Поверхности этого типа имеют простейшее уравнение

$$\lambda_1 x_1^2 + R = 0$$

где, как и в случае IV, $\lambda_1 = I_1$. Величина K_2, которая является инвариантом для поверхностей V типа, оказывается равной $\lambda_1 R$, и поэтому

$$R = \frac{K_2}{I_1}.$$

Таким образом, простейшее уравнение для поверхностей V типа будет выглядеть так:

$$I_1 x_1^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0. \qquad \text{(V′)}$$

4. Кривые второго порядка, как отмечалось в конце предыдущего пункта, можно разделить на три типа по виду их простейших уравнений. Для кривых III типа можно доказать, что семиинвариант

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix}$$

является инвариантом. Необходимые и достаточные условия принадлежности кривых до одного из этих трех типов с помощью инвариантов I_1, I_2, I_3 (см. п. 8.1) могут быть сформулированы следующим образом:

I. $I_2 \neq 0$.

II. $I_2 = 0$, $I_3 \neq 0$.

III. $I_2 = 0$, $I_3 = 0$, $I_1 \neq 0$.

Что касается записи простейших уравнений кривых второго порядка этих трех типов через инварианты I_1, I_2, I_3 и семиинвариант K_2 (который входит только в простейшее уравнение кривых третьего типа), то она имеет вид

I. $$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0, \quad \lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0,$$

где λ_1 и λ_2 — корени уравнения $\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$.

II. $$I_1 x_1^2 \pm 2\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}\, x_2 = 0.$$

III. $$I_1 x_1^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0.$$

Доказательство всех этих утверждений для кривых второго порядка мы предоставляем читателю.

8.4. Классификация поверхностей второго порядка

Проведем теперь внутри каждого из пяти полученных в п. 8.2 типов дальнейшую классификацию поверхностей - классификацию, которая бы учитывала все возможные комбинации знаков у отличных от нуля коэффициентов, входящих в простейшие уравнения, а также возможность обращения некоторых коэффициентов в нуль.

I. Простейшее уравнение поверхностей этого типа имеет вид

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + R = 0.$$

Различные комбинации знаков коэффициентов приводят к следующим случаям:

I_1. λ_1, λ_2, λ_3 одного знака, который противоположен знаку R, $R \neq 0$. Тогда простейшее уравнение можно переписать в виде

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=1, \qquad (I_1)$$

где

$$a_i^2=-\frac{R}{\lambda_i}.$$

Уравнение (I_1) является, как известно, каноническим уравнением эллипсоида.

I_2. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, R$ одного знака. Перепишем уравнение (8.14) в виде

$$-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}=1, \qquad (I_2)$$

где

$$a_i^2=\frac{R}{\lambda_i}.$$

Уравнение (I_2) является каноническим уравнением мнимого эллипсоида (название «мнимый эллипсоид» объясняется сходством уравнения (I_2) с уравнением (I_1)).

Не существует ни одной действительной точки, координаты которой удовлетворяли бы уравнению (I_2).

I_3. λ_1, λ_2 одного знака, а λ_3 и R имеют знак, противоположный знаку λ_1 и λ_2. Уравнение (8.14) в этом случае можно переписать в виде

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}=1, \qquad (I_3)$$

где

$$a_1^2=-\frac{R}{\lambda_1},\quad a_2^2=-\frac{R}{\lambda_2},\quad a_3^2=\frac{R}{\lambda_3}.$$

Мы получили каноническое уравнение однополосного гиперболоида.

I_4. λ_1, λ_2 и R одного знака, противоположного знаку λ_3.
Обозначая

$$\frac{R}{\lambda_1},\ \frac{R}{\lambda_2},\ -\frac{R}{\lambda_3}$$

соответственно через $a^2{}_1$, $a^2{}_2$, $a^2{}_3$, получим уравнение

$$-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=1, \qquad (I_4)$$

которое является каноническим уравнением двуполосного гиперболоида.

I_5. λ_1 и λ_2 одного знака, противоположного знаку λ_3, а $R=0$.
Уравнение (8.14) можно переписать в виде

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=0, \qquad (\mathrm{I}_5)$$

где

$$a_i^2=\frac{1}{|\lambda_i|}$$

(i=1, 2, 3). Уравнение (I_5) есть каноническое уравнение конуса второго порядка.

I_6. λ_1, λ_2, λ_3 одного знака, а R=0. Тогда уравнение (8.14) можно записать в каноническом виде:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}=0, \qquad (\mathrm{I}_6)$$

где по-прежнему

$$a_i^2=\frac{1}{|\lambda_i|}$$

(i=1, 2, 3). Уравнению (I_6) удовлетворяют только координаты точки (0, 0, 0). Будем говорить, что уравнение (I_6) определяет мнимый конус с действительной вершиной.

II. Простейшее уравнение поверхностей второго типа записывается в виде

$$\lambda_1 x_1^2+\lambda_2 x_2^2+2a_3x_3=0,$$

где $a_3 \neq 0$. Этот тип приводит нас к двум существенно различным видам поверхностей:

II_1. λ_1 и λ_2 одного знака. Можно считать, что a_3 имеет знак, противоположный знаку λ_1 и λ_2; в противном случае можно добиться этого, изменив направление оси Ox_3. Поэтому, обозначая положительные в силу условия величины $-\frac{a_3}{\lambda_1}$ и $-\frac{a_3}{\lambda_2}$ соответственно через p и q, придем к уравнению

$$\frac{x_1^2}{p}+\frac{x_2^2}{q}=2x_3, \qquad (\mathrm{II}_1)$$

которое является каноническим уравнением эллиптического параболоида.

II_2. λ_1 и λ_2 разных знаков. Тогда, если считать, что знак λ_1 противоположен знаку a_3, то, обозначая $-\frac{a_3}{\lambda_1}$ через p и $\frac{a_3}{\lambda_2}$ через q ($p > 0$, $q > 0$), получим каноническое уравнение

$$\frac{x_1^2}{p}-\frac{x_2^2}{q}=2x_3 \qquad (\mathrm{II}_2)$$

гиперболического параболоида.

III. Простейшее уравнение поверхностей этого типа записывается так:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + R = 0.$$

Здесь могут представиться следующие возможности:

III$_1$. λ_1 и λ_2 одного знака, а R имеет противоположный знак. Тогда уравнение (III) можно переписать в виде

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1, \tag{III$_1$}$$

где

$$a_1 = -\frac{R}{\lambda_1}, \quad a_2 = -\frac{R}{\lambda_2}.$$

Получаем каноническое уравнение эллиптического цилиндра.

III$_2$. λ_1, λ_2 и R одного знака. Тогда, полагая

$$\frac{R}{\lambda_1} = a_1^2, \quad \frac{R}{\lambda_2} = a_2^2,$$

приводим уравнение (III) к каноническому виду:

$$-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1. \tag{III$_2$}$$

Мы получили уравнение поверхности, не имеющей ни одной точки с действительными координатами. Эту поверхность называют мнимым эллиптическим цилиндром.

III$_3$. λ_1 и λ_2 разных знаков, $R \neq 0$. Тогда, если λ_1 имеет знак, противоположный знаку R, то, полагая

$$a_1^2 = -\frac{R}{\lambda_1}, \quad a_2^2 = \frac{R}{\lambda_2},$$

приводим уравнение (III) к каноническому виду:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1. \tag{III$_3$}$$

Это уравнение представляет собой каноническое уравнение гиперболического цилиндра.

III$_4$. λ_1 и λ_2 разных знаков, $R = 0$. Обозначая

$$a_1^2 = \frac{1}{|\lambda_1|}, \quad a_2^2 = \frac{1}{|\lambda_2|},$$

получим каноническое уравнение

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0 \tag{III$_4$}$$

двух пересекающихся плоскостей

$$\frac{x_1}{a_1} \pm \frac{x_2}{a_2} = 0.$$

III$_5$. λ_1 и λ_2 одного знака, $R = 0$. Обозначая опять

$$a_1^2 = \frac{1}{|\lambda_1|},\ a_2^2 = \frac{1}{|\lambda_2|},$$

приведем уравнение (III) к каноническому виду:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0. \qquad \text{(III}_5\text{)}$$

Уравнению (III$_5$) удовлетворяют координаты точек, которые лежат на прямой $x_1 = x_2 = 0$. Будем говорить, что уравнение (III$_5$) определяет пару мнимых плоскостей, которые пересекаются по действительной прямой.

IV. Простейшее уравнение поверхностей четвертого типа записывается в виде

$$\lambda_1 x_1^2 + 2hx_2 = 0, \qquad \lambda_1 \neq 0, \qquad h \neq 0.$$

Здесь можно получить только один тип поверхности:

$$x^2_1 = 2px_2, \qquad \text{(IV}_1\text{)}$$

где

$$p = -\frac{h}{\lambda_1}.$$

Уравнение (IV$_1$) является каноническим уравнением параболического цилиндра.

V. Поверхности пятого типа имеют простейшее уравнение

$$\lambda_1 x_1^2 + R = 0, \qquad \lambda_1 \neq 0.$$

Здесь имеются три возможности:

V$_1$. λ_1 и R имеют противоположные знаки. Тогда (V) принимает вид

$$x^2_1 = a^2, \qquad \text{(V}_1\text{)}$$

где

$$a^2 = -\frac{R}{\lambda_1},$$

и представляет собой каноническое уравнение двух параллельных плоскостей.

V$_2$. λ_1 и R одного знака. Тогда, обозначая

$$a^2 = \frac{R}{\lambda_1},$$

придем к каноническому уравнению

$$-x^2_1 = a^2 \qquad \text{(V}_2\text{)}$$

двух мнимых параллельных плоскостей.

V_3. $R = 0$. Уравнение (V) принимает вид

$$x^2_1 = 0 \qquad (V_3)$$

и представляет собой каноническое уравнение двух совпадающих плоскостей.

Таким образом, всего мы получили 17 возможных, геометрически различных видов поверхностей второго порядка.

Что касается кривых второго порядка, то они делятся на девять видов:

I_1. Эллипс:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1.$$

I_2. Мнимый эллипс:

$$-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1.$$

I_3. Гипербола:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$$

I_4. Две пересекающиеся прямые:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0.$$

I_5. Две мнимые прямые, пересекающиеся в действительной точке

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0.$$

II. Парабола: $x^2_1 = 2px_2, p \neq 0$.

III_1. Две параллельные прямой: $x^2_1 = a^2 \quad (a \neq 0)$.

III_2. Две мнимые параллельные прямые: $- x^2_1 = a^2 (a \neq 0)$.

III_3, Две совпадающие прямые: $x^2_1 = 0$.

Указанная классификация и соответствующие канонические уравнения без труда могут быть получены читателем.

8.5. Приложение теории инвариантов к классификации поверхностей второго порядка

В этом пункте мы каждый из 17 полученных в п. 8.4 видов поверхностей второго порядка охарактеризуем с помощью инвариантов I_1, I_2, I_3, I_4 и семиинвариантов K_3 и K_2, первый из которых является инвариантом для поверхностей III, IV, V типов, а второй - для поверхностей V типа. В приводимой ниже таблице даются необходимые и достаточные условия принадлежности поверхности второго порядка каждому с 17 видов.

Таблица

№ пп	Название поверхности	Признаки класса	Каноническое уравнение
		Поверхности I типа, $I_3 \neq 0$	
1	Эллипсоид	$I_4<0,\ I_2>0,\ I_1I_3>0$	$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=1$
2	Мнимый эллипсоид	$I_4>0,\ I_2>0,\ I_1I_3>0$	$-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}=1$
3	Однополостный гиперболоид . .	$I_4>0,\ I_2\leqslant 0$ или $I_1I_3\leqslant 0$	$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}=1$
4	Двуполостный гиперболоид . .	$I_4<0,\ I_2\leqslant 0$ или $I_1I_3\leqslant 0$	$-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=1$
5	Конус второго порядка	$I_4=0,\ I_2\leqslant 0$ или $I_1I_3\leqslant 0$	$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}=0$
6	Мнимый конус . .	$I_4=0,\ I_2>0,\ I_1I_3>0$	$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=0$
		Поверхности II типа, $I_3=0,\ I_4\neq 0$	
7	Эллиптический параболоид . . .	$I_4<0$	$\frac{x_1^2}{p}+\frac{x_2^2}{q}=2x_3$ $(p>0,\ q>0)$
8	Гиперболический параболоид . . .	$I_4>0$	$\frac{x_1^2}{p}-\frac{x_2^2}{q}=2x_3$ $(p>0,\ q>0)$
		Поверхности III типа, $I_3=0,\ I_4=0,\ I_2\neq 0$	
9	Эллиптический цилиндр	$I_2>0,\ I_1K_3<0$	$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}=1$
10	Мнимый эллиптический цилиндр	$I_2>0,\ I_1K_3>0$	$-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}=1$
11	Гиперболический цилиндр	$I_2<0,\ K_3\neq 0$	$\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}=1$
12	Две пересекающиеся плоскости	$I_2<0,\ K_3=0$	$\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}=0$

Продолжение таблицы

№ пп	Название поверхности	Признаки класса	Каноническое уравнение
13	Две мнимые пересекающиеся плоскости	$I_2>0,\ K_3=0$	$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}=0$
	Поверхности IV типа, $I_3=0,\ I_4=0,\ I_2=0,\ K_3\neq 0$		
14	Параболический цилиндр	$K_3\neq 0$	$x_1^2=2px_2\ (p\neq 0)$
	Поверхности V типа, $I_3=0,\ I_4=0,\ I_2=0,\ K_3=0$		
15	Две параллельные плоскости	$K_2<0$	$x_1^2=a^2$
16	Две мнимые параллельные плоскости	$K_2>0$	$-x_1^2=a^2$
17	Две совпадающие плоскости	$K_2=0$	$x_1^2=0$

Отметим прежде всего, что все указанные в таблице признаки являются инвариантными относительно общего преобразования системы координат, так как I_1, I_2, I_3, I_4 инвариантны при таком преобразовании, K_2 и K_3 тоже инвариантны при общем преобразовании для поверхностей тех типов, в признаки которых они входят.

Кроме того, эти признаки оказываются инвариантными по отношению умножения левой части уравнения поверхности на некоторое число $s\neq 0$, так как при таком умножении величины I_1, I_2, I_3, I_4, K_2 и K_3 умножаются соответственно на s, s^2, s^3, s^4, s^2 и s^3. Отсюда следует, что при доказательстве необходимости указанных условий можно исходить из канонических уравнений каждого вида поверхности второго порядка.

Проверим, например, необходимость выполнения указанных в таблице признаков для эллипсоида, однополостного гиперболоида, гиперболического параболоида, мнимого эллиптического цилиндра, параболического цилиндра и двух параллельных плоскостей.

1. Эллипсоид:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=1.$$

Для него имеем

$$I_1=\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_3^2},\quad I_2=\frac{1}{a_1^2a_2^2}+\frac{1}{a_2^2a_3^2}+\frac{1}{a_1^2a_3^2},$$

$$I_3=-I_4=\frac{1}{a_1^2a_2^2a_3^2}.$$

Отсюда видно, что для эллипсоида $I_2>0$, $I_1 I_3>0$, $I_4<0$.

3. Однополостный гиперболоид:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}=1.$$

Имеем

$$I_1=\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}-\frac{1}{a_3^2},\quad I_2=\frac{1}{a_1^2a_2^2}-\frac{1}{a_3^2}\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}\right),$$

$$I_3=-I_4=\frac{-1}{a_1^2a_2^2a_3^2}.$$

Если $I_2>0$, то

$$\frac{1}{a_3^2}<\frac{\frac{1}{a_1^2a_2^2}}{\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}}=\frac{1}{a_1^2+a_2^2},$$

и потому

$$I_1I_3=\frac{1}{a_1^2a_2^2a_3^2}\left(\frac{1}{a_3^2}-\frac{1}{a_1^2}-\frac{1}{a_2^2}\right)<\frac{1}{a_1^2a_2^2a_3^2}\left(\frac{1}{a_1^2+a_2^2}-\frac{1}{a_1^2}-\frac{1}{a_2^2}\right)=$$
$$=-\frac{a_1^4+a_1^2a_2^2+a_2^4}{a_1^4a_2^4a_3^2\,(a_1^2+a_2^2)}<0.$$

Аналогично, если $I_1 I_3>0$, то

$$\frac{1}{a_3^2}>\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}$$

и

$$I_1I_3=\frac{1}{a_1^2a_2^2a_3^2}\left(\frac{1}{a_3^2}-\frac{1}{a_1^2}-\frac{1}{a_2^2}\right)<\frac{1}{a_1^2a_2^2a_3^2}\left(\frac{1}{a_1^2+a_2^2}-\frac{1}{a_1^2}-\frac{1}{a_2^2}\right)=$$
$$=-\frac{a_1^4+a_1^2a_2^2+a_2^4}{a_1^4a_2^4a_3^2\,(a_1^2+a_2^2)}<0.$$

Поэтому соотношение $I_2>0$ и $I_1I_3>0$ в этом случае несовместны и, следовательно, или $I_2\le 0$, или $I_1 I_3\le 0$.

8. Гиперболический параболоид:

$$\frac{x_1^2}{p}-\frac{x_2^2}{q}=2x_3.$$

Тогда

$$I_3=0, \quad I_4=\frac{1}{pq}>0.$$

10. Мнимый эллиптический цилиндр:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}=-1.$$

Имеем

$$I_3=0, \quad I_4=0, \quad I_2=K_3=\frac{1}{a_1^2a_2^2}, \quad I_1=\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2},$$
$$I_2>0, \quad I_1K_3>0.$$

14. Параболический цилиндр: $x^2_1=2px_2$ ($p\neq 0$). В этом случае

$$I_2 = I_3=I_4 =0, \quad K_3 = -p^2\neq 0.$$

15. Две параллельные плоскости: $x^2_1= a^2$ ($a\neq 0$). Здесь

$$I_2 = I_3=I_4 = K_3 = 0, \quad K_2 = -a^2<0.$$

В других случаях доказательство необходимости проводится аналогично, и мы предоставляем его читателю.

Что касается достаточности условий, которые приводятся в таблице, то она вытекает из несовместимости любых двух из 17 приведенных признаков и из того, что эти признаки исчерпывают все возможности.

Для кривых второго порядка аналогичную таблицу можно получить, рассмотрев девять последних строк приведенной таблицы, в которой вместо слов «эллиптический цилиндр», «мнимый эллиптический цилиндр», «гиперболический цилиндр», «параболический цилиндр» надо написать «эллипс», «мнимый эллипс», «гипербола», «парабола», а вместо слова «плоскости» поставить слово «прямые». Это следует из того, что уравнение

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+2a_1x_1+2a_2x_2+a=0$$

определяет в пространстве цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси $\boldsymbol{e}_3$, и с направляющей, которая в плоскости $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ определяется тем же уравнением, что и сама цилиндрическая поверхность.

Кроме того, если написанное уравнение рассматривать как уравнение поверхности и подсчитать для него инварианты I'_1, I'_2, I'_3, I'_4 и семиинварианты K'_2 и K'_3, то окажется, что $I'_3=I'_4= 0$, а I'_1, I'_2, K'_3 и K'_4 совпадают соответственно с инвариантами I_1, I_2, I_3 и семиинвариантом K_2, определенными для кривой.

8.6. Центральные и нецентральные поверхности второго порядка

1. Рассмотрим сначала поверхность второго порядка, в общем уравнении которой отсутствуют члены с первыми степенями координат:

$$a_{ij}x_ix_j + a = 0. \qquad (8.15)$$

Если на такой поверхности лежит точка с координатами (x_1, x_2, x_3), то на ней же лежит и точка с координатами ($-x_1, -x_2, -x_3$), симметричная с первой точкой относительно начала координат. Таким образом, в рассмотренном случае начало координат служит центром симметрии поверхности.

Легко доказать, что и, обратно, если начало координат служит центром симметрии поверхности второго порядка, то ее уравнение имеет вид (8.15).

Если существует в пространстве точка, относительно которой поверхность второго порядка симметрична, то эту точку называют *центром поверхности.* Следовательно, в случае, когда поверхность второго порядка определена уравнениям (8.15), начало координат является ее центром.

Пусть теперь поверхность второго порядка в некоторой прямоугольной системе координат задана своим общим уравнением

$$a_{ij}\, x_ix_j + 2a_ix_i + a = 0. \qquad (8.16)$$

Очевидно, что если поверхность, которая определена уравнениеям (8.16), имеет центр, то, перенося начало координат в центр, мы должны прийти к уравнению вида (8.15). При этом формулы преобразования координат, как мы знаем, имеют вид

$$x_i = x'_i + \gamma_i,$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ - координаты нового начала в старой системе. При таком преобразовании системы координат коэффициенты уравнения поверхности второго порядка преобразуются по формулам (8.3). Из этих формул нам сейчас понадобится формула преобразования коэффициентов при членах первой степени:

$$b_i = a_{ij}\gamma_j + a_i. \qquad (8.17)$$

Чтобы новое начало координат было центром заданной поверхности второго порядка, необходимо и достаточно обращение в нуль коэффициентов b_i. Поэтому координаты центра относительно старой системы координат должны удовлетворять системе уравнений

$$a_{ij}\gamma_j + a_i = 0, \qquad (8.18)$$

которая более подробно записывается так:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + a_{13}\gamma_3 + a_1 = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + a_{23}\gamma_3 + a_2 = 0, \\ a_{31}\gamma_1 + a_{32}\gamma_2 + a_{33}\gamma_3 + a_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.19}$$

Мы докажем далее, что вопрос о существовании центра поверхности второго порядка тесно связан с той классификацией этих поверхностей, которая была проведена в п. 8.2 и 8.3. Исследование разрешимости системы уравнений (8.19), определяющей координаты центра, сводится к сравнению рангов матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \end{pmatrix},$$

какие мы обозначим соответственно через r и r_1. А именно, как известно из алгебры, система уравнений (8.19) имеет решение только в том случае, когда $r = r_1$ и не имеет решения при $r < r_1$. Причем в первом случае при r=3 она имеет единое решение, при r=2 совокупность ее решений геометрически представляет собой прямую линию, а при r =1- плоскость.

Докажем сначала, что ранги r и r_1 не меняются при преобразованиях прямоугольной системы координат. В самом деле, так как при параллельном переносе компоненты матрицы A вообще не меняются, то, значит, не меняется и ее ранг. При повороте системы координат компоненты матрицы A преобразуются как компоненты матрицы линейного оператора, поэтому ранг ее не меняется. Таким образом, инвариантность ранга r доказана.

Что касается матрицы A_1, то при параллельном переносе первые три ее столбца не меняются, а последний преобразуется по формулам (8.17), и это, как легко видеть, не меняет ее ранга. При повороте системы координат, определяемом ортогональной матрицей $\Gamma=(\gamma_{i'i})$ элементы матрицы A_1 преобразуются по формулам (8.2), первые из которых можно записать в виде

$$a_{i'j'} = \gamma_{i'i}\, a_{ij'}, \quad \text{где} \quad a_{ij'} = \gamma_{j'j}\, a_{ij'}.$$

Поэтому преобразование матрицы A_1 в матрицу $A''_1=(a_{i'j'}, a_{i'})$ можно разбить на два последовательных преобразования, первое из которых переводит матрицу A_1 в матрицу $A'_1=(a_{ij'}, a_i)$, а второе — матрицу A'_1 в A''_1. Столбцы матрицы A'_1 являются линейными комбинациями столбцов матрицы A_1, и поэтому ее ранг r'_1 не превосходит r_1. Строки матрицы A''_1 являются линейными комбинациями строк матрицы A'_1, и поэтому ее ранг r''_1 не превосходит r'_1. Таким образом, $r''_1 \leq r_1$. Но при обратном повороте новой системы координат, определяемом ортогональной матрицей Γ^{-1}, матрица A''_1 переходит в A_1 и, следовательно, $r_1 \leq r''_1$. Поэтому $r_1 = r'_1$, что окончательно доказывает инвариантность ранга r_1.

2. Теперь легко убедиться, что существует следующая связь между принадлежностью поверхности второго порядка к одному из пяти типов, введенных в 8.2, и значениями рангов r и r_1 матриц A и A_1:

для поверхностей I типа $r = 3$, $r_1 = 3$;
для поверхностей II типа $r = 2$, $r_1 = 3$;
для поверхностей III типа $r = 2$, $r_1 = 2$;
для поверхностей IV типа $r=1$, $r_1= 2$;
для поверхностей V типа $r =1$, $r_1=1$.

Чтобы доказать это предложение, следует перейти к той системе координат, в которой уравнение поверхности имеет простейший вид, записать соответствующие ему матрицы A и A_1 и непосредственно подсчитать ранги.

После этого уже легко решить вопрос о существовании центра поверхности второго порядка. Если поверхность принадлежит первому типу, то $r = r_1 = 3$ и система (8.19) имеет единственное решение. Следовательно, поверхность имеет единственный центр. Если поверхность принадлежит третьему типу, то $r = r_1 = 2$, система (8.19) имеет однопараметрическое семейство решений, а поверхность - однопараметрическое семейство центров, расположенных на одной прямой. Эту прямую называют *прямой центров.* Если поверхность принадлежит пятому типу, то $r = r_1=1$ и совокупность ее центров образует плоскость - *плоскость центров.* Наконец, так как для поверхностей II и IV типов $r < r_1$, то эти поверхности центров не имеют.

Поскольку отмеченные здесь случаи исчерпывают все возможности, имеют место и обратные предложения. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Поверхность второго порядка имеет единственный центр тогда и только тогда, когда она принадлежит типу* I; *имеет прямую центров, когда она принадлежит типу* III; *имеет плоскость центров, когда она принадлежит типу* V. *Она не имеет центра тогда и только тогда, когда принадлежит типам* II *или* IV.

Заметим, что поверхности, которые имеют единственный центр симметрии, называются *центральными* поверхностями второго порядка.

Микромодуль 21.
Примеры решения типовых задач

Рассмотрим примеры исследования общего уравнения поверхности второго порядка.

1. Определить вид поверхности второго порядка и ее расположение, если в некоторой прямоугольной системе координат она имеет уравнение

$$2x^2_1+2x^2_2 - 5x^2_3 + 2x_1x_2 - 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 2 = 0.$$

Решение. Имеем $I_3 = -15 \neq 0$; отсюда уже следует, что это поверхность I типа и поэтому она имеет единственный центр. Далее находим $I_4=-12<0$, $I_1=-1$. Поэтому $I_1I_3>0$. Следовательно, рассмотренная поверхность представляет собой двуполостный гиперболоид (см. таблицу).

Находим еще ее инвариант I_2: $I_2=-17$. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + \lambda^2-17\lambda + 15 = 0,$$

соответствующее этой поверхности, имеет корни $\lambda_1=1$, $\lambda_2= 3$, $\lambda_3 = -5$. Следовательно, ее простейшее уравнение запишется в виде

$$x^2_1+3x^2_2-5x^2_3 + 4/5 = 0,$$

а каноническое уравнение -

$$-\frac{x_{1'}^2}{\frac{4}{5}}-\frac{x_{2'}^2}{\frac{4}{15}}+\frac{x_{3'}^2}{\frac{4}{25}}=1.$$

Координаты центра рассмотренной поверхности находим из системы уравнений

$$\left.\begin{array}{lr} 2x_1+x_2 & -1=0, \\ x_1+2x_2 & -2=0, \\ & -5x_3-2=0, \end{array}\right\}$$

которая дает $x_1 = 0$, $x_2=1$, $x_3 = -(2/5)$, т.е. центром поверхности будет точка $B'(0,\ 1, -(2/5)$.

Определим теперь векторы $\boldsymbol{e}_{1'}$, $\boldsymbol{e}_{2'}$, $\boldsymbol{e}_{3'}$, направленные вдоль главных осей рассмотренной поверхности. Координаты вектора $\boldsymbol{e}_{1'}$ являются нормированными решениями системы

$$\left.\begin{array}{lr} (2-1)\,x_1+\quad x_2 & =0, \\ x_1+(2-1)\,x_2 & =0, \\ & (-5-1)\,x_3=0, \end{array}\right\}$$

откуда $x_1:x_2:x_3=1 :(-1):0$ и

$$e_{1'}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right\}.$$

Аналогично находим

$$e_{2'}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right\},\qquad e_{3'}=\{0,\ 0,\ 1\}.$$

2. Определить вид поверхности второго порядка и ее расположение, если в некоторой прямоугольной системе координат она имеет уравнение

$$2x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+$$
$$+2x_2x_3-4x_1+6x_2-2x_3+3=0.$$

Решение. Находим

$$I_3 = 0,\qquad I_4 = -125<0.$$

Следовательно, поверхность представляет собой эллиптический параболоид (см. таблицу). Далее имеем

$$I_1 =7,\qquad I_2=10,\qquad \lambda^2-7\lambda+10 = 0,\qquad \lambda_1 = 2,\qquad \lambda_2 = 5.$$

Поэтому простейшее уравнение поверхности выглядит так:

$$2x_1^2 + 5x_2^2 - 5\sqrt{2}\, x_3 = 0,$$

а ее каноническое уравнение запишется в виде

$$\frac{x_1^2}{\frac{5}{2\sqrt{2}}}+\frac{x_2^2}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=2x_3,$$

т.е. для этой поверхности

$$p=\frac{5}{2\sqrt{2}},\qquad q=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Вектор $e_{3'}$, соответствующий собственному значению $\lambda_3=0$, направленный в сторону вогнутости по оси параболоида, определим из системы

$$\left.\begin{aligned}2x_1+2x_2+x_3&=0,\\2x_1+2x_2+x_3&=0,\\x_1+x_2+3x_3&=0,\end{aligned}\right\}$$

которая дает

$$e_{3'}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right\}.$$

Аналогично находим векторы $e_{1'}$ и $e_{2'}$, которые параллельные главным осям эллипсов, получающихся в сечении эллиптического параболоида плоскостями, перпендикулярными его осям:

$$e_{1'}=\left\{\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\right\},\quad e_{2'}=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}.$$

Для определения вершины параболоида рассмотрим плоскость $x_1 - x_2 = m$, перпендикулярную оси параболоида. Эта плоскость пройдет через вершину тогда и только тогда, когда она будет иметь с параболоидом только одну общую точку. Уравнения сечения параболоида указанной плоскостью имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_2 + m,\\ 8x_2^2 + 3x_3^2 &+ 4x_2x_3 + (8m+2)\,x_2 + \\ &+ (2m-2)\,x_3 + 2m^2 - 4m + 3 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Так как эта линия распадается на две мнимые пересекающиеся прямые, то (см. п. 8.5)

$$\begin{vmatrix} 8 & 2 & 4m+1 \\ 2 & 3 & m-1 \\ 4m+1 & m-1 & 2m^2-4m+3 \end{vmatrix} = 0,$$

или $100m - 45 = 0$, откуда $m = 0{,}45$.

Координаты x_2 и x_3 вершины определим как координаты центра кривой (*):

$$\left.\begin{aligned} 8x_2 + 2x_3 + (4\cdot 0{,}45 + 1) &= 0,\\ 2x_2 + 3x_3 + (0{,}45 - 1) \quad &= 0, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$x_3 = -\frac{19}{40},\quad x_3 = \frac{1}{2},$$

а из системы (*) находим что

$$x_1 = -\frac{1}{40}.$$

Таким образом, вершиной параболоида служит точка

$$O'\left(-\frac{1}{40},\ -\frac{19}{40},\ \frac{1}{2}\right).$$

3. Определить вид и расположение поверхности второго порядка, которая в некотором прямоугольном базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ имеет уравнение

$$x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 10x_1x_3 + \\ + 4x_2x_3 + 2x_1 + 4x_2 - 10x_3 - 1 = 0.$$

Решение. Имеем

$$I_3 = I_4 = 0,\quad I_2 = -36<0,\quad K_3=72\neq 0.$$

Следовательно, поверхность представляет гиперболический цилиндр (см. таблицу). Далее находим

$$I_1 = 0,\quad \lambda^2-36 = 0,\quad \lambda_1 = 6,\quad \lambda_2 = -6.$$

Простейшее уравнение поверхности имеет вид

$$6x^2_1 - 6x^2_2 - 2 = 0,$$

а каноническое уравнение-вид

$$\frac{x_{1'}^2}{\frac{1}{3}} - \frac{x_{3'}^2}{\frac{1}{3}} = 1.$$

Ось цилиндра найдем, определив его прямую центров из системы

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 1 &= 0,\\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2 &= 0,\\ -5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Два первых уравнения этой системы независимы, они и являются уравнениями оси цилиндра. Направляющим единичным вектором этой оси служит вектор

$$\boldsymbol{e}_{3'} = \left\{\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}.$$

В качестве точки O' может быть взята любая точка этой оси. Векторы $\boldsymbol{e}_{1'}$ и $\boldsymbol{e}_{2'}$ находим как собственные векторы, соответствующие собственным значениям $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -6$:

$$\boldsymbol{e}_{1'} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\},\quad \boldsymbol{e}_{2'} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}.$$

Эти векторы параллельны действительной и мнимой оси гиперболы, которая служит направляющей гиперболического цилиндра.

4. Определить вид и расположение поверхности второго порядка, которая в некотором прямоугольном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ имеет уравнение

$$x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 4x_2x_3 - 6x_3 + 1 = 0.$$

Решение. Находим

$$I_3 = 0,\ I_4 = 0,\quad I_2 = 0,\quad K_3 = -18,\ I_1 = 6.$$

Согласно таблице рассматирваемая поверхность представляет собой параболический цилиндр. Его простейшее уравнение имеет вид

$$6x_{1'}^2 - 2\sqrt{3}\,x_{2'} = 0,$$

а каноническое — вид

$$x_{1'}^2 = \frac{x_{3'}}{\sqrt{3}},$$

т.е. для этой поверхности

$$p = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Чтобы определить расположение этого цилиндра, найдем главные направления квадратичной формы, стоящей в левой части его уравнения. Ее характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 = 0,$$

откуда $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_1 = 6$. Система уравнений для определения главных направлений этой формы записывается так:

$$\left.\begin{aligned} (1-\lambda)x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0, \\ x_1 + (1-\lambda)x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + (4-\lambda)x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Для $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ получим отсюда одно уравнение:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0.$$

Следовательно, векторы $\boldsymbol{e}_{2'}$ и $\boldsymbol{e}_{3'}$ лежат в плоскости, которая определяется этим уравнением. Вектор $\boldsymbol{e}_{1'}$ перпендикулярен к указанной плоскости и потому имеет вид

$$\boldsymbol{e}_{1'} = \left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right\}.$$

В качестве вектора $\boldsymbol{e}_{2'}$ можно взять вектор

$$\boldsymbol{e}_{2'} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}.$$

Тогда

$$\boldsymbol{e}_{3'} = \boldsymbol{e}_{1'} \times \boldsymbol{e}_{2'} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}.$$

Координаты $x_{i'}$ и x_i будут связаны формулами:

$$\left\{\begin{aligned} x_{1'} &= \frac{1}{\sqrt{6}}(x_1 + x_2 + 2x_3), \\ x_{2'} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2), \\ x_{3'} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + x_2 - x_3), \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}}x_{1'} + \frac{1}{\sqrt{2}}x_{2'} + \frac{1}{\sqrt{3}}x_{3'}, \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}x_{1'} - \frac{1}{\sqrt{2}}x_{2'} + \frac{1}{\sqrt{3}}x_{3'}, \\ x_3 &= \frac{2}{\sqrt{6}}x_{1'} - \frac{1}{\sqrt{3}}x_{3'}. \end{aligned}\right.$$

После перехода к координатам $x_{i'}$ уравнение цилиндра примет вид

$$6x_{1'}^2 - 2\sqrt{6}\,x_{1'} + 2\sqrt{3}\,x_{3'} + 1 = 0.$$

Это уравнение можно переписать так:

$$\left(x_{1'}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2+\frac{1}{\sqrt{3}}x_{3'}=0.$$

Теперь делаем параллельный перенос вдоль оси $e_{1'}$, определяемый формулой

$$x_1''=x_1'-\frac{1}{\sqrt{6}},$$

и поворот в плоскости $O\,e_{2'}\,e_{3'}$, определяемый формулами

$$x_{2''}=-x_{3'},\qquad x_{3''}=x_{2'}.$$

После этих преобразований уравнение цилиндра записывается в каноническом виде:

$$x_{1''}^2-\frac{1}{\sqrt{3}}x_{2''}=0.$$

Координаты $x_{i''}$ выражаются через исходные координаты x_i по формулам

$$\begin{cases} x_{1''}=\dfrac{x_1}{\sqrt{6}}+\dfrac{x_2}{\sqrt{6}}+\dfrac{2x_3}{\sqrt{6}}-\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \\ x_{2''}=-\dfrac{x_1}{\sqrt{3}}-\dfrac{x_2}{\sqrt{3}}+\dfrac{x_3}{\sqrt{3}}, \\ x_{3''}=\dfrac{x_1}{\sqrt{2}}-\dfrac{x_2}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Поэтому уравнение плоскости симметрии цилиндра, которое в новых координатах имеет вид $x_{1''}=0$, в исходных координатах выглядит так: $x_1+x_2+2x_3-1=0$. Плоскость $x_{2''}=0$ касается параболического цилиндра вдоль той его образующей, по которой он пересекается с плоскостью симметрии. Ее уравнение в исходной системе координат записывается в виде $x_1+x_2-x_3=0$. Плоскость $x_{3''}=0$ будет перпендикулярна образующей. Ее первоначальное уравнение: $x_1-x_2=0$. Точка O'' лежит на пересечении этих трех плоскостей. Ее координаты относительно исходной системы: $x_1=x_2=1/6$, $x_3=1/3$.

Вектор $e_{3''}=e_{2'}$ направлен вдоль образующей цилиндра, вектор $e_{1''}=e_{1'}$ — перпендикулярно плоскости симметрии, и вектор $e_{2''}=-e_{3'}$ — в плоскости симметрии перпендикулярно образующей.

5. Определить вид и расположение поверхности, заданной в некотором прямоугольном базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ уравнением

$$x_1^2+4x_2^2+9x_3^2-4x_1x_2+$$
$$+6x_1x_3-12x_2x_3-x_1+2x_2-3x_3-6=0.$$

Решение. Имеем

$$I_3 = I_4 = I_2 = K_3 = 0, \quad I_1 = 14, \quad K_2 = -87{,}5 < 0.$$

Следовательно, мы получаем пару параллельных плоскостей, каноническое уравнение которых

$$x_{1'}^2 = \frac{25}{4}.$$

Чтобы найти уравнение этих плоскостей в исходной системе координат, заметим, что квадратичная форма, содержащаяся в левой части исходного уравнения, представляет собой полный квадрат, и уравнение может быть переписано в виде

$$(x_1 - 2x_2 + 3x_3)^2 - x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 6 = 0.$$

Выделяя в левой части этого уравнения полный квадрат, получим

$$\left(x_1 - 2x_2 + 3x_3 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 0.$$

Левая часть уравнения раскладывается на два сомножителя:

$$(x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3)(x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2) = 0.$$

Поэтому уравнение пары параллельных плоскостей, определяемых заданным уравнением второго порядка, в исходной системе координат записываются в виде

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3 = 0,$$
$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2 = 0.$$

Микромодуль 21
Индивидуальные тестовые задачи

1. Доказать сформулированные в конце п. 8.1—8.5 утверждения, которые относятся к кривым второму порядка на плоскости L_2.
2. Установить, какие из классов кривых второго порядка имеют центр и какие - не имеют.
3. Определить вид кривой второго порядка и ее расположение на плоскости, если в некотором прямоугольном базисе она имеет уравнение

а) $5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2 - 32x_1 - 56x_2 + 80 = 0;$
б) $5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 18x_1 - 18x_2 + 9 = 0;$
в) $6x_1x_2 + 8x_2^2 - 12x_1 - 26x_2 + 11 = 0;$
г) $7x_1^2 + 16x_1x_2 - 23x_2^2 - 14x_1 - 16x_2 - 218 = 0;$

д) $9x_1^2+24x_1x_2+16x_2^2-40x_1+30x_2=0$;
е) $3x_1^2-2x_1x_2+3x_2^2-2x_1+2x_2+1=0$;
ж) $7x_1^2+6x_1x_2-x_2^2+28x_1+12x_2+28=0$;
з) $5x_1^2-2x_1x_2+5x_2^2-4x_1+20x_2+20=0$;
и) $9x_1^2+12x_1x_2+4x_2^2-24x_1-16x_2+3=0$;
к) $16x_1^2-24x_1x_2+9x_2^2-160x_1+120x_2+425=0$.

4. При каком α уравнение

$$x_1^2+6x_1x_2+x_2^2+6x_1+2x_2+\alpha=0$$

изображает пара действительных пересекающихся прямых?

5. При каком α уравнение

$$3x_1^2-2x_1x_2+3x_2^2-2x_1+2x_2+\alpha=0$$

изображает мнимый эллипс?

6. При каких α и β уравнение

$$2x_1^2+\alpha x_1x_2+2x_2^2-7x_1+\beta x_2+3=0$$

изображает пару параллельных прямых?

7. Определить вид поверхности второго порядка и ее расположение, если в некотором прямоугольном базисе она имеет уравнение

а) $x_1^2+x_2^2+x_3^2-6x_1+8x_2+10x_3+1=0$;
б) $5x_1^2+6x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2+4x_2x_3-10x_1+8x_2+14x_3-6=0$;
в) $2x_1^2+5x_2^2+11x_3^2-20x_1x_2+4x_1x_3+16x_2x_3-24x_1-6x_2-6x_3-18=0$;
г) $3x_1^2-2x_2^2-x_3^2+4x_1x_2+8x_1x_3-12x_2x_3+18x_1-4x_2-14x_3=0$;
д) $4x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_1x_3-4x_2x_3+6x_1+4x_2+8x_3+2=0$;
е) $x_2^2-x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-6x_1+4x_2+2x_3+8=0$;
ж) $4x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_1x_3-4x_2x_3+8x_1-4x_2+8x_3=0$;
з) $x_2^2-x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-3=0$;
и) $4x_1^2+x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+8x_1x_3-4x_2x_3-12x_1-12x_2+6x_3=0$;
к) $7x_2^2-7x_3^2-8x_1x_2+8x_1x_3=0$;
л) $5x_1^2+5x_2^2+8x_3^2-8x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3=0$;
м) $36x_1^2+9x_2^2+4x_3^2+36x_1x_2+24x_1x_3+12x_2x_3-49=0$;
н) $36x_1^2+9x_2^2+4x_3^2+36x_1x_2+24x_1x_2+12x_2x_3=0$;
о) $x_1^2+x_2^2+2x_3^2+4x_1-6x_2-8x_3+21=0$;
п) $2x_1^2+2x_2^2-5x_3^2+2x_1x_2-2x_1-4x_2-4x_3+2=0$;
р) $3x_1^2+3x_2^2-6x_1+4x_2-1=0$;
с) $x_1^2-2x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3-14x_1-4x_2+14x_3+16=0$.

8. Найти плоскости симметрии поверхностей:

а) $x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3-x_1+4x_2-x_3+2=0$;
б) $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=1$;
в) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1-2x_2+9x_3-1=0$.

9. При каких α и β уравнение

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2+2\alpha x_1x_2+2\beta x_2x_3-2x_1-4x_2+2x_3=0$$

является уравнением конуса?

10. Найти (с помощью инвариантов) необходимое и достаточное условие для того, чтобы общее уравнение поверхности второго порядка определяло бы

а) круглый цилиндр;

б) круглый конус;

в) сферу;

г) параболоид вращения;

д) две перпендикулярные плоскости.

11. Выразить через инварианты объем эллипсоида, заданного общим уравнением.

12. Уравнение второй степени определяет пары обычных плоскостей. Выразить через его инварианты тангенс угла между этими плоскостями.

13. Уравнение второй степени определяет пары параллельных плоскостей. Выразить через его инварианты расстояние между этими плоскостями.

14. При каких α и β уравнение

$$x_1^2-x_2^2+3x_3^2+(\alpha x_1+\beta x_2)^2-1=0$$

является уравнением цилиндра вращения?

15. При каком α конус

$$x_1^2-2x_1x_2+\alpha x_3^2=0$$

будет конусом вращения? Найти ось вращения.

<u>Микромодуль 22</u>
Приведение квадратичных форм. Другие виды форм

8.7. Преобразование переменных в квадратичной форме

1. Как мы уже говорили**,** *квадратичной формой* называется однородный многочлен второй степени относительно n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Квадратичную форму всегда можно представить в виде

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k \quad (a_{ik} = a_{ki};\ i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

где $A = \| a_{ik} \|^n_1$ — симметрическая матрица.

Обозначая через x столбцевую матрицу $(x_1, x_2, ..., x_n)$ и пользуясь сокращенным обозначением для квадратичной формы

$$A(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k, \tag{8.20}$$

мы можем написать:

$$A(x, x) = x' Ax. \tag{8.21}$$

(Значок ' означает транспонирование. В формуле (8.21) квадратичная форма представлена в виде произведения трех матриц: строчной x', квадратной A и столбцевой x).

Если $A = \| a_{ik} \|^n_1$ — вещественная симметрическая матрица, то форма (8.20) называется *вещественной*. В этом микромодуле мы будем в основном рассматривать вещественные квадратичные формы.

Определитель $| A | = | a_{ik} |^n_1$ называется *дискриминантом* квадратичной формы $A(x, x)$. Форма называется *сингулярной*, если ее дискриминант равен нулю.

Каждой квадратичной форме соответствует *билинейная форма*

$$A(x, y) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i y_k \tag{8.22}$$

или

$$A(x, y) = x'Ay \quad [x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n)]. \tag{8.23}$$

Если $x^1, x^2, ..., x^l, y^1, y^2, ..., y^m$ — столбцевые матрицы, а $c_1, c_2, ..., c_l, d_1, d_2, ..., d_m$ — скаляры, то в силу билинейности выражения $A(x, y)$

$$A\left(\sum_{i=1}^{l} c_i x^i,\ \sum_{j=1}^{m} d_j y^j\right) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} c_i d_j A(x^i, y^j). \tag{8.24}$$

Если задано некоторый симметрический оператор $\boldsymbol{A}$ в n-мерном евклидовом пространстве и этому оператору в некотором ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ соответствует матрица $A=\|a_{ik}\|^n_1$

$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\boldsymbol{e}_i \ \ (k = 1, ..., n))$, то для любых векторов

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i\boldsymbol{e}_i$$

имеет место тождество

$$A(x,y)=(\mathbf{Ax,y}) = (\mathbf{x},A\mathbf{y}).$$

(В $A(x, y)$ скобки составляют часть условного обозначения; в $(\mathbf{Ax, y})$ и в $(\mathbf{x}, \mathbf{Ay})$ скобки обозначают скалярное произведение).

В частности,

$$A\ (x,\ x) = (\mathbf{Ax,\ x}) = (\mathbf{x,\ Ax}).$$

При этом

$$a_{ik} = (\mathbf{Ae}_{i;}\ \mathbf{e}_k) \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ ...,\ n).$$

2. Посмотрим, как изменяется матрица коэффициентов формы при преобразовании переменных:

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}\xi_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{8.25}$$

В матричной записи это преобразование выглядит так:

$$x = T\xi. \tag{8.26}$$

Здесь x и ξ, — столбцевые матрицы: $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\xi= (\xi_1, \xi_2,\ldots,\xi_n)$, а T — *преобразующая матрица:* $T = \| t_{ik} \|^n_1$.

Подставляя в (8.21) выражение для x, из (8.26) получим:

$$A\ (x,\ x) = \xi' T' A T \xi = \xi' \tilde{A} \xi = \tilde{A}\ (\xi,\ \xi),$$

где

$$\tilde{A} = T'AT. \tag{8.27}$$

Формула (8.27) выражает матрицу $\tilde{A}=\|\tilde{a}_{ik}\|^n_1$ коэффициентов преобразованной формы

$$\tilde{A}\ (\xi,\ \xi) = \sum_{i,\ k=1}^{n} \tilde{a}_{ik}\xi_i\xi_k$$

через матрицу коэффициентов первоначальной формы $A = \| a_{ik} \|^n_1$ и матрицу преобразования $T = \| t_{ik} \|^n_1$.

Из формулы (8.27) следует, что при преобразовании формы ее дискриминант умножается на квадрат определителя преобразования:

$$|\tilde{A}| = |A|\,|T|^2. \tag{8.28}$$

В дальнейшем мы будем пользоваться исключительно неособенными преобразованиями переменных ($|T| \neq 0$). При таких преобразованиях, как видно из формулы (8.27), ранг матрицы коэффициентов остается неизменным (ранг матрицы A равен рангу матрицы $\tilde{A}$). Ранг матрицы коэффициентов обычно называют *рангом формы.*

Определение 1. Две симметрические матрицы A и $\tilde{A}$, связанные равенством (8.27), в котором $|T| \neq 0$, называются *конгруэнтными.*

Таким образом, с каждой квадратичной формой связан целый класс попарно конгруэнтных ссимметрических матриц. Как было уже отмечено выше, все эти матрицы имеют тот же ранг - ранг формы. Ранг является инвариантом для данного класса матриц. В случае вещественной квадратичной формы вторым инвариантом является так называемая «сигнатура» квадратичной формы. К введению этого понятия мы и переходим.

8.8. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов. Закон инерции

Вещественную квадратичную форму *A (x, x)* можно бесчисленным множеством способов представить в виде

$$A(x, x) = \sum_{i=1}^{r} a_i X_i^2, \tag{8.29}$$

где $a_i \neq 0$ (i = 1,2, ...,r) и

$$X_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

— независимые вещественные линейные формы от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (отсюда $r \leq n$).

Рассмотрим неособенное преобразование переменных, при котором первые r из новых переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n г}$ связаны с $x_1, x_2, \ldots, x_n$ формулами

$$\xi_i = X_i \quad (i = 1,2, \ldots, r).$$

(необходимое преобразование получаем, дополняя систему линейных форм $X_1, \ldots, X_r$ линейными формами $X_{r+1}, \ldots, X_n$ так, чтобы n форм X_j (j = 1, 2, ..., n) были независимы, и полагая $\xi_j = X_j$ (j = 1, 2, ..., n)).
Тогда в новых переменных

$$A(x, x) = \tilde{A}(\xi, \xi) = \sum_{i=1}^{r} a_i \xi_i^2$$

и, следовательно, матрица $\tilde{A}$ имеет диагональный вид:

$$\tilde{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_r, 0, \ldots, 0\}.$$

Но ранг матрицы $\tilde{A}$ равен r. Следовательно, *число квадратов в представлении* (8.29) *всегда равно рангу формы.*

Мы покажем, что неизменным при различных представлениях формы A (x, x) в виде (8.29) является не только число всех квадратов, но и число положительных (а значит, и число всех отрицательных) квадратов. (Под числом положительных (отрицательных) квадратов в представлении (8.29) мы понимаем число положительных (соответственно отрицательных) коэффициентов a_i).

Теорема 1 (закон инерции квадратичных форм). *При представлении вещественной квадратичной формы А (х, х) в виде суммы независимых квадратов*

$$A(x, x) = \sum_{i=1}^{r} a_i X_i^2$$

число положительных квадратов и число отрицательных квадратов не зависят от способа представления формы в указанном виде.
(Под суммой независимых квадратов мы понимаем сумму вида (8.29), в которой все $a_i \neq 0$ и формы $X_1, X_2, ..., X_r$ линейно независимы).

Доказательство. Пусть наряду с представлением (8.29) имеет место другое представление формы *А (х, х)* в виде суммы независимых квадратов

$$A(x, x) = \sum_{i=1}^{r} b_i Y_i^2,$$

и пусть

$$a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ \dots,\ a_h > 0,\ a_{h+1} < 0,\ \dots,\ a_r < 0,$$
$$b_1 > 0,\ b_2 > 0,\ \dots,\ b_g > 0,\ b_{g+1} < 0,\ \dots,\ b_r < 0.$$

Предположим, что $h \neq g$, например $h < g$. Тогда в тождестве

$$\sum_{i=1}^{r} a_i X_i^2 = \sum_{i=1}^{r} b_i Y_i^2 \tag{8.30}$$

дадим переменным $x_1, x_2, ..., x_n$ значения, удовлетворяющие системе $r — (g—h)$ уравнений

$$X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ ...,\ X_h = 0, Y_{q+1} = 0, ..., Y_r = 0 \tag{8.31}$$

и не обращающие в нуль хотя бы одну из форм $X_{h+1}, ..., X_r$.
(Такие значения существуют, так как в противном случае уравнения $X_{h+1}=0, ..., X_r = 0$, а значит, и все r уравнений $X_1 = 0, ..., X_r = 0$ были бы следствием $r — (g — h)$ уравнений (8.31). Это невозможно, поскольку линейные формы $X_1, X_2, \dots, X_r$ независимы).

При этих значениях переменных левая часть тождества (8.30) равна

$$\sum_{j=h+1}^{r} a_j X_j^2 < 0,$$

а права равна

$$\sum_{k=1}^{g} b_k Y_k^2 \geqslant 0.$$

Таким образом, допущение $h \neq g$ привело нас к противоречию. Теорема доказана.

Определение 2. Разность σ между числом π положительного и числом ν отрицательного квадратов в представлении формы *A(x, x)* называют *сигнатурой* формы *A (x, x)*.

Ранг r и сигнатура σ определяют однозначно числа π и ν, так как

$$r = \pi + \nu, \qquad \sigma = \pi - \nu.$$

Заметим еще, что в формуле (8.29) положительный множитель

$$\sqrt{|a_i|}$$

можно отнести к форме X_i $(i = 1, 2, ..., r)$. Тогда формула (8.29) принимает вид

$$A(x, x) = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_\pi^2 - X_{\pi+1}^2 - \ldots - X_r^2. \tag{8.32}$$

Полагая $\xi_i = X_i$ $(i = 1, 2, ..., r)$, мы форму *A(x, x)* приводим к каноническому виду

$$\tilde{A}(\xi, \xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_\pi^2 - \xi_{\pi+1}^2 - \ldots - \xi_r^2. \tag{8.33}$$

Отсюда на основании теоремы 1 заключаем, что *всякая вещественная симметрическая матрица A конгруэнтна диагональной матрице, в которой диагональные элементы равны* +1,-1 *или* 0:

$$A = T'\{\underbrace{+1, \ldots, +1}_{\pi}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{\nu}, 0, \ldots, 0\}\, T. \tag{8.34}$$

В следующем пункте будет приведено правило для определения сигнатуры за коэффициентами квадратичной формы.

8.9. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к сумме квадратов. Формула Якоби

Из предыдущего пункта вытекает, что для определения ранга и сигнатуры формы достаточно каким-либо способом привести эту форму к сумме независимых квадратов.

Мы изложим здесь метод приведения Лагранжа.

1. **Метод Лагранжа**. Пусть дана квадратичная форма

$$A(x, x) = \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k.$$

Рассмотрим два случая:

1) При некотором g $(1 \le g \le n)$ диагональный коэффициент $a_{gg} \neq 0$. Тогда, полагая

$$A(x, x) = \frac{1}{a_{gg}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{gk} x_k \right)^2 + A_1(x, x), \tag{8.35}$$

непосредственной проверкой убеждаемся в том, что квадратичная форма $A_1(x, x)$ уже не содержит переменной x_q. Этот способ выделения квадрата из квадратичной формы применим всегда, когда в матрице $A = \| a_{ik} \|^n_1$ имеются диагональные элементы, отличные от нуля.

2) Коэффициенты $a_{qq} = 0$, $a_{hh} = 0$, но $a_{qh} \neq 0$. В этом случае полагаем:

$$A(x, x) = \frac{1}{2a_{hg}}\left[\sum_{k=1}^{n}(a_{gk} + a_{hk})\, x_k\right]^2 - \frac{1}{2a_{hg}}\left[\sum_{k=1}^{n}(a_{gk} - a_{hk})\, x_k\right]^2 + A_2(x, x). \tag{8.36}$$

Формы

$$\sum_{k=1}^{n} a_{gk}x_k, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{hk}x_k \tag{8.37}$$

линейно независимы, так как первая содержит x_h, но не содержит x_q, а вторая, наоборот, содержит x_q, но не содержит x_h. Поэтому и формы, стоящие под знаком квадрата в (8.36), линейно независимы [как сумма и разность независимых линейных форм (8.37)].

Таким образом, мы выделили в $A(x, x)$ два независимых квадрата. Каждый из этих квадратов содержит x_q и x_h, в то время как форма $A_2(x, x)$, как легко проверить, этих переменных не содержит.

Последовательным комбинированием приемов 1) и 2) можно всегда с помощью рациональных операций привести форму $A(x, x)$ к сумме квадратов. При этом полученные квадраты будут независимы, так как на каждом этапе выделяемые квадраты содержат переменные, которые отсутствуют в последующих квадратах.

Заметим еще, что основные формулы (8.35) и (8.36) могут быть записаны так:

$$A(x, x) = \frac{1}{4a_{gg}}\left(\frac{\partial A}{\partial x_g}\right)^2 + A_1(x, x), \tag{8.38}$$

$$A(x, x) = \frac{1}{8a_{gh}}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial x_g} + \frac{\partial A}{\partial x_h}\right)^2 - \left(\frac{\partial A}{\partial x_g} - \frac{\partial A}{\partial x_h}\right)^2\right] + A_2(x, x). \tag{8.39}$$

Пример.

$$A(x, x) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_1x_4 + 4x_2x_3 - 4x_3x_4.$$

Применяем формулу (8.38) ($g = 1$):

$$A(x, x) = \frac{1}{16}(8x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 4x_4)^2 + A_1(x, x) = (2x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2 + A_1(x, x),$$

где

$$A_2(x, x) = 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - 2x_3x_4.$$

Применяем формулу (8.39) ($g = 2$, $h = 3$):

$$A_1(x, x) = \frac{1}{8}(2x_2 + 2x_3)^2 - \frac{1}{8}(2x_3 - 2x_2 + 4x_4)^2 + A_2(x, x) =$$

$$= \frac{1}{2}(x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{2}(x_3 - x_2 + 2x_4)^2 + A_2(x, x),$$

где

$$A_2(x, x) = 2x_4^2.$$

Окончательно

$$A(x, x) = (2x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{2}(x_3 - x_2 + 2x_4)^2 + 2x_4^2,$$

$$r = 4, \quad \sigma = 2.$$

2. **Формула Якоби**. Обозначим через r ранг квадратичной формы

$$A(x, x) = \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k$$

и предположим, что

$$D_k = A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix} \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r). \tag{8.40}$$

Поскольку $a_{11} = D_1 \neq 0$, то, выделяя по методу Лагранжа из формы $A(x, x)$ один квадрат, получим:

$$A(x, x) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2 + A_1(x, x), \tag{8.41}$$

где квадратичная форма

$$A_1(x, x) = \sum_{i, k=2}^{n} a_{ik}^{(1)} x_i x_k \quad (a_{ik}^{(1)} = a_{ki}^{(1)},\ i, k = 2, \dots, n) \tag{8.42}$$

не содержит переменной x_1. Из тождества (8.41) следует, что коэффициенты формы $A_1(x, x)$ определяются формулами

$$a_{ik}^{(1)} = a_{ik} - \frac{a_{1i}a_{1k}}{a_{11}} \quad (i, k = 2, \dots, n). \tag{8.43}$$

Но тогда эти коэффициенты совпадают с соответствующими элементами матрицы

$$G_1 = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{Vmatrix},$$

которая получается из симметрической матрицы $A = \| a_{ik} \|_1^n$ после применения к ней первого этапа алгоритма исключения Гаусса (из формулы (8.43) и симметричности матрицы $A = \| a_{ik} \|^n_1$ следует симметричность матриц $A = \| a_{ik} \|^n_2$).

Таким образом, процесс выделения одного квадрата по методу Лагранжа, в сущности, совпадает с первым этапом алгоритма Гаусса. Элементы первой строки матрицы G_1 являются коэффициентами в выделяемом квадрате; величина, обратная элементу a_{11}, является множителем при квадрате. Остальные элементы матрицы G_1 определяют коэффициенты формы $A_1(x, x)$. Для выделения второго квадрата следует выполнить второй этап алгоритма Гаусса и т.д. Применяя к симметрической матрице $A = \| a_{ik} \|^n_1$ полный алгоритм Гаусса, состоящий из r этапов (выполнение алгоритма возможно благодаря неравенствам (8.40). Из этих неравенств следует, что $a_{11} \neq 0,\ a_{22}^{(1)} \neq 0, \ldots, a_{rr}^{(r-1)} \neq 0$), получим матрицу

$$G_r = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2r}^{(1)} & a_{2,r+1}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a_{rr}^{(r-1)} & a_{r,r+1}^{(r-1)} & \ldots & a_{rn}^{(r-1)} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \right\|$$

и соответственно представление квадратичной формы A (x, x) в виде суммы квадратов

$$A(x, x) = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{a_{kk}^{(k-1)}} (a_{kk}^{(k-1)} x_k + a_{k,k+1}^{(k-1)} x_{k+1} + \ldots + a_{kn}^{(k-1)} x_n)^2$$

$$(a_{1j}^{(0)} = a_{1j}, \quad j = 1, \ldots, n). \tag{8.44}$$

Введем сокращенные обозначения для независимых линейных форм

$$X_k = a_{kk}^{(k-1)} x_k + a_{k,k+1}^{(k-1)} x_{k+1} + \ldots + a_{kn}^{(k-1)} x_n \quad (a_{1k}^{(0)} = a_{1k};\ k = 1, \ldots, r). \tag{8.45}$$

Замечая, что

$$a_{kk}^{(k-1)} = \frac{D_k}{D_{k-1}} \quad (k = 1, \ldots, r; \quad D_0 = 1,\ a_{11}^{(0)} = a_{11}), \tag{8.46}$$

(формулы (8.46) получаются приравниванием последовательных главных миноров D_{k-x} и D_k в матрицах A и G_r; при этом получаем

$D_k = a_{11}a_{22}^{(1)} \dots a_{kk}^{(k-1)} \; (k = 1, 2, \dots, r).$)

можно тождества (8.44) записать в виде

$$A(x, x) = \sum_{k=1}^{r} \frac{D_{k-1}}{D_k} X_k^2 \qquad (D_0 = 1). \tag{8.47}$$

Эта формула, которая дает представление квадратичной формы $A(x, x)$ в виде суммы независимых квадратов, носит название формулы Якоби.

Для коэффициентов, которые фигурируют в формуле Якоби линейных форм X_k имеют место равенства (см. формулу (2.15)

$$a_{kq}^{(k-1)} = \frac{A\begin{pmatrix} 1 & \dots & k-1 & k \\ 1 & \dots & k-1 & q \end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix} 1 & \dots & k-1 \\ 1 & \dots & k-1 \end{pmatrix}} \qquad (k = 1, \dots, r). \tag{8.48}$$

Если через G обозначить произвольную верхнюю треугольную матрицу, у которой первые r строк совпадают с соответствующими строками матрицы G_r, то на основе формулы Якоби можно утверждать, что преобразование переменных $\xi = Gx$ $(\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n))$ переводит квадратичную форму

$$\sum_{k=1}^{n} D_{k-1}/D_k \xi_k^2$$

с диагональной матрицей коэффициентов

$\tilde{D} = \{1/D_1, D_1/D_2, \dots, D_{r-x}/D_r, 0, \dots, 0\}$ в квадратичную форму $A(x, x)$. Но тогда справедливо равенство

$$A = G' \tilde{D} G.$$

Эта формула устанавливает разложение симметрической матрицы A на треугольные множители и совпадает с формулой (2.59).

Формулу Якоби часто представляют в другом виде.

Вместо X_k $(k = 1, 2, \dots, r)$ вводят линейно независимые формы

$$Y_k = D_{k-1} X_k \qquad (k = 1, 2, \dots, r;\ D_0 = 1). \tag{8.49}$$

Тогда формула Якоби (8.47) запишется так:

$$A(x, x) = \sum_{k=1}^{r} \frac{Y_k^2}{D_{k-1} D_k}. \tag{8.50}$$

Здесь

$$Y_k = c_{kk}x_k + c_{k,k+1}x_{k+1} + \dots + c_{kn}x_n \qquad (k = 1, 2, \dots, r), \tag{8.51}$$

где

$$c_{kq} = A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k \\ 1 & 2 & \dots & k-1 & q \end{pmatrix} \quad (q = k, k+1, \dots, n;\ k = 1, 2, \dots, r).$$

(8.52)

Пример.

$$A(x, x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 3x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 6x_2x_3 + 8x_2x_4 + 2x_3x_4.$$

Приводим матрицу

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & -3 \end{Vmatrix}$$

к гауссовой форме

$$G = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Отсюда $r=2$, $a_{11} = 1$, $a^{(1)}_{22} = -1$.

Формула (8.44) дает:

$$A(x, x) = (x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4)^2 - (-x_2 - x_3 + 2x_4)^2.$$

Из формулы Якоби (8.50) вытекает теорема.

Теорема 2 (Якоби). *Если для квадратичной формы*

$$A(x, x) = \sum_{i,\, k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$$

ранга r *имеют место неравенства*

$$D_k = A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix} \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r),$$

(8.53)

то число положительных квадратов π *и число отрицательных квадратов* ν *формы* $A(x, x)$ *совпадают соответственно с числом знакопостоянства* P *и с числом знакоперемен* V *в ряду чисел*

$$1, D_1, D_2, \dots, D_r, \qquad (8.54)$$

т.е. $\pi = P(1, D_1, D_2, \dots, D_r)$, $\nu = V(1, D_1, D_2, \dots, D_r)$ *и сигнатура*

$$\sigma = r - 2V(1, D_1, D_2, \dots, D_r). \qquad (8.55)$$

Замечание 1. *В случае, когда в ряду чисел* $1, D_1, \dots, D_r \neq 0$ *есть нули, но нет трех подряд идущих нулей, для определения сигнатуры можно пользоваться формулой*

$$\sigma = r - 2V(1, D_1, D_2, \dots, D_r),$$

пропуская нулевое D_k, если $D_{k-1}D_{k+1}$≠0, и полагая в случае
$D_k = D_{k+1} = 0$

$$V(D_{k-1},\ D_k,\ D_{k+1},\ D_{k+2}) = \begin{cases} 1 \text{ при } \dfrac{D_{k+2}}{D_{k-1}} < 0 \\ 2 \text{ при } \dfrac{D_{k+2}}{D_{k-1}} > 0. \end{cases} \tag{8.56}$$

Мы приводим здесь это правило без обоснования.

Замечание 2. *При наличии трех подряд идущих нулей, в ряду D_1, D_2, ..., D_{r-1} сигнатура квадратичной формы не может быть непосредственно определена с помощью теоремы Якоби.* В этом случае знаки ненулевых D_k не определяют сигнатуру формы. Следующий пример убеждает нас в этом:

$$A(x, x) = 2a_1x_1x_4 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 \qquad (a_1a_2a_3 \neq 0).$$

Здесь

$$D_1 = D_2 = D_3 = 0, \qquad D_4 = -a_1^2a_2a_3 \neq 0.$$

В то же время

$$\nu = \begin{cases} 1 \text{ при } a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \\ 3 \text{ при } a_2 < 0, \quad a_3 < 0. \end{cases}$$

В обеих случаях $D_4 < 0$.

Замечание 3. *Если $D_1 \neq 0$, ..., $D_{r-x} \neq 0$, а $D_r = 0$, то знаки D_1, D_2, ..., D_{r-1} не определяют сигнатуру формы.* Как подтверждающий пример можно привести форму

$$ax_1^2 + ax_2^2 + bx_3^2 + 2ax_1x_2 + 2ax_2x_3 + 2ax_1x_3 = a(x_1 + x_2 + x_3)^2 + (b - a)x_3^2.$$

Однако в последнем случае перенумерацией переменных можно достичь того, чтобы имело место и неравенство $D_r \neq 0$. Действительно, пусть s-я строка $(s \geq r)$ линейно независима по отношению к первым r — 1 строкам. Поменяем между собой номера переменных x_r и x_s. После этого в новой матрице коэффициентов A первые r строк, а значит (в силу симметричности матрицы) и первые r столбцов, линейно независимы. Тогда в произвольном миноре r -го порядка Δ_r каждую строку представим в виде линейной комбинации первых r строк, а потом каждый столбец — в виде линейной комбинации первых r столбцов. В соответствии с этим, расщепляя минор Δ_r на сумму определителей r-го порядка, мы в конце концов получим, что минор Δ_r равен произведению главного минора D_r на некоторый числовой множитель: $\Delta_r = cD_r$. Но среди миноров Δ_r имебтся отличные от нуля миноры, так как r — ранг матрицы A. Поэтому $D_r \neq 0$.

8.10. Положительные квадратичные формы

В этом пункте мы остановимся на специальном, но важном классе положительных квадратичных форм.

Определение 3. Вещественная квадратичная форма

$$A\,(x,\,x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k$$

называется *неотрицательной (неположительной),* если при любых вещественных значениях переменных

$$A\,(x,\,x) \geq 0 \quad (\leq 0). \tag{8.57}$$

В этом случае симметричная матрица коэффициентов A называется положительно полуопределенной (отрицательно полуопределенной).

Определение 4. Вещественная квадратичная форма

$$A\,(x,\,x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k$$

называется *положительно определенной* (*отрицательно определенной*), если при любых не равных одновременно нулю вещественных значениях переменных ($x \neq 0$)

$$A(x,x)>0 \quad (<0). \tag{8.58}$$

В этом случае матрица A также называется положительно определенной (отрицательно определенной).

Класс положительно определенных (отрицательно определенных) форм является частью класса неотрицательных неложительно (соответственно неложительных) форм.

Пусть данная неотрицательная форма $A(x,\,x)$. Представим ее в виде суммы независимых квадратов:

$$A(x,x) = \sum_{i=1} a_i X^2_i. \tag{8.59}$$

В этом представлении все квадраты должны быть положительными:

$$a_i>0 \qquad (i = 1,2,\,...,r). \tag{8.60}$$

Действительно, если бы какое-либо a_i было <0, то можно было бы подобрать такие значения $x_1, x_2, ..., x_n$, при которых

$$X_1 = ... = X_{i-1} = X_{i+1} = ... = X_r = 0, \quad X_i \neq 0.$$

Но тогда при этих значениях переменных форма $A(x,\,x)$ имела бы отрицательное значение, что по условию невозможно. Очевидно, что и обратно, из (8.59) и (8.60) следует положительность формы $A(x,\,x)$.

Таким образом, неотрицательная квадратичная форма характеризуется равенствами $\sigma = r$ ($\pi = r$, $\nu = 0$).

Пусть теперь A (x, x) — положительно определенная форма. Тогда A (x, x) и неотрицательная форма. Поэтому она представима в виде (8.59), где все a_i (i = 1, 2, .. .,r) положительны. Из положительной определенности формы следует, что $r=n$. Действительно, в случае $r< n$ можно подобрать такие не равные одновременно нулю значения x_1, x_2, ..., x_n, при которых все X_i обращались бы в нуль. Но тогда в силу (8.59) A (x, x) = 0 при $x\neq 0$, что противоречит условию (8.58).

Легко видеть, что и обратно, если в (8.59) r — n и все a_1, a_2,..., a_n положительны, то A (x, x) — положительно определенная форма.

Иначе говоря, *неотрицательная форма тогда и только тогда является положительно определенной, когда она не сингулярна.*

Следующая теорема дает критерий положительной определенности формы в виде неравенств, которым должны удовлетворять коэффициенты формы. При этом используются обозначение которые уже встречались в предыдущих пунктах, для последовательных главных миноров матрицы A:

$$D_1 = a_{11}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема 3. *Для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$D_1>0, \quad D_2>0, \ldots, D_n>0. \qquad (8.61)$$

Доказательство. Достаточность условий (8.61) следует непосредственно из формулы Якоби (8.50). Необходимость условий (8.61) устанавливается следующим образом. Из положительной определенности формы A (x, x) $=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$ следует положительная определенность «урезанных» форм (форма $A_p(x, x)$ получается из формы A (x, x), если в последней положить $x_{p+1} =\ldots= x_n=0$ (p= 1,2. ...,n))

$$A_p(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k \quad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

Но тогда все эти формы должны быть несингулярны, т.е.

$$D_P = |A_p| \neq 0 \quad (p = 1,2, \ldots,n).$$

Теперь мы имеем возможность воспользоваться формулой Якоби (8.50) (при *r — n).* Поскольку в правой части этой формулы все квадраты должны быть положительными, то

$$D_1 > 0,\quad D_1D_2 > 0,\quad D_2D_3 > 0, \ldots, D_{n-1}D_n > 0.$$

Отсюда следуют неравенства (8.61). Теорема доказана.

Поскольку любой главный минор матрицы *A* при надлежащей перенумерации переменных можно поместить в левый верхний угол, то имеет место следствие

Следствие. *В положительно определенной квадратичной форме*

$$A(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$$

все главные миноры матрицы коэффициентов положительны:

$$A\begin{pmatrix} i_1\, i_2 \ldots i_p \\ i_1\, i_2 \ldots i_p \end{pmatrix} > 0 \quad (1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n;\ p = 1, 2, \ldots, n). \tag{8.62}$$

(Таким образом, из положительности последовательных главных миноров вещественной симметрической матрицы следует положительность всех остальных главных миноров).

Замечание. Из неотрицательности последовательных главных миноров

$$D_1 \geq 0,\quad D_2 \geq 0,\ \ldots, D_n \geq 0$$

не следует неотрицательность формы *A (x, x).* Действительно, форма

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2,$$

в которой $a_{11} = a_{12} = 0$, $a_{22} < 0$, удовлетворяет условиям $D_1 \geq 0$, $D_2 \geq 0$, но не является неотрицательной.

Однако имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Для того чтобы квадратичная форма* $A(x, x)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$ *была неотрицательной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы коэффициентов были неотрицательны:*

$$A\begin{pmatrix} i_1\, i_2 \ldots i_p \\ i_1\, i_2 \ldots i_p \end{pmatrix} \geqslant 0 \quad (1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n;\ p = 1, 2, \ldots, n).$$

Доказательство. Введем вспомогательную форму

$$A_\varepsilon(x, x) = A(x, x) + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad (\varepsilon > 0).$$

Очевидно,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} A_\varepsilon(x, x) = A(x, x).$$

Из неотрицательности формы $A(x, x)$ следует положительная определенность формы $A_\varepsilon(x, x)$ и, следовательно, неравенства (см. следствие из теоремы 3)

$$A_\varepsilon\begin{pmatrix} i_1 \, i_2 \, \dots \, i_p \\ i_1 \, i_2 \, \dots \, i_p \end{pmatrix} > 0 \quad (1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_p \leqslant n; \quad p = 1, 2, \dots, n).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем условия (8.62).

Пусть, наоборот, даны условия (8.62). Из этих условий следует:

$$A_\varepsilon\begin{pmatrix} i_1 \, i_2 \, \dots \, i_p \\ i_1 \, i_2 \, \dots \, i_p \end{pmatrix} = \varepsilon^p + \dots \geqslant \varepsilon^p > 0 \; (1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_p \leqslant n; \quad p = 1, 2, \dots, n).$$

Но тогда (согласно теореме 3) $A_\varepsilon(x, x)$ — положительно определенная форма

$$A_\varepsilon(x, x) > 0 \quad (x \neq 0).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем отсюда:

$$A(x, x) \geq 0.$$

Теорема доказана.

Условия неположительности и отрицательной определенности формы получаются соответственно из неравенств (8.61) и (8.62), если эти неравенства применить к форме $-A(x, x)$.

Теорема 5. *Для того чтобы квадратичная форма $A(x, x)$ была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы имели место неравенства*

$$D_1 < 0,\ D_2 > 0,\ D_3 < 0, \dots,\ (-1)^n D_n > 0. \qquad (8.63)$$

Теорема 6. *Для того чтобы квадратичная форма $A(x, x)$ была неположительной, необходимо и достаточно, чтобы имели место неравенства*

$$(-1)^p A\begin{pmatrix} i_1 \, i_2 \, \dots \, i_p \\ i_1 \, i_2 \, \dots \, i_p \end{pmatrix} \geqslant 0 \; (1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_p \leqslant n; p = 1, 2, \dots, n).$$

(8.64)

8.11. Приведение квадратичной формы к главным осям

Рассмотрим произвольную вещественную квадратичную форму

$$A(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k$$

Ее матрица коэффициентов $A=\|a_{ik}\|^n_1$ является вещественной симметрической. Поэтому она ортогонально-подобна некоторой вещественной диагональной матрице Λ, т.е. существует такая вещественная ортогональная матрица O, что

$$\Lambda = O^{-1}AO \quad (\Lambda = \| \lambda_i \delta_{ik} \|_1^n, \quad OO' = E). \tag{8.65}$$

Здесь $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ — характеристические числа матрицы A.

Поскольку для ортогональной матрицы $O^{-1} = O'$, то из (8.65) следует, что форма $A(x, x)$ при ортогональном преобразовании переменных

$$x = O\xi \qquad (OO' = E) \tag{8.66}$$

или в более подробной записи

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} o_{ik}\xi_k \ \left(\sum_{j=1}^{n} o_{ij}o_{kj} = \delta_{ik};\ i, k = 1, 2, \ldots, n\right) \tag{8.67}$$

переходит в форму

$$\Lambda(\xi, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^2. \tag{8.68}$$

Теорема 7. *Вещественная квадратичная форма* $A(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k$ *всегда может быть приведена при помощи ортогонального преобразования к канонической форме* (8.68); *при этом* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ — *характеристические числа матрицы* $A = \| a_{ik} \|^n_1$.

Приведение квадратичной формы $A(x, x)$ при помощи ортогонального преобразования к канонической форме (8.68) называется *приведением к главным осям.* Это название связана с тем, что уравнение центральной гиперповерхности второго порядка,

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k = c \qquad (c = \text{const} \neq 0), \tag{8.69}$$

при ортогональном преобразовании переменных (8.66) принимает канонический вид

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \frac{\xi_i^2}{a_i^2} = 1 \qquad \left(\frac{\varepsilon_i}{a_i^2} = \frac{\lambda_i}{c}; \quad \varepsilon_i = \pm 1; \quad i = 1, 2, \ldots, n\right).$$

(8.70)

Если мы будем рассматривать $x_1, x_2, ..., x_n$ как координаты в некотором ортонормированном базисе n-мерного евклидова пространства, то $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ будут координатами в новом ортонормированном базисе того же пространства, причем «поворот» осей осуществляется ортогональным преобразованием (8.66). (Если $|O|=-1$, то преобразование (8.70) представляет собой соединение вращения с зеркальным отображением. Однако приведение к главным осям можно всегда осуществить с помощью ортогональной матрицы O первого рода ($|O|=1$). Это следует из того, что, не меняя канонической формы, мы можем сделать дополнительное преобразование $\xi_i = \xi_i' (i = 1, 2, \ldots, n-1), \quad \xi_n = -\xi_n'$.). Новые оси координат являются осями симметрии центральной поверхности (8.69) и обычно называются *главными осями* этой поверхности.

Из формулы (8.68) следует, что *ранг r формы A(x, x) равен числу отличных от нуля характеристических чисел матрицы A, а сигнатура σ равна разности между числом положительных и числом отрицательных характеристических чисел матрицы A.*

Отсюда, в частности, вытекает такое предложение:

Если при непрерывном изменении коэффициентов квадратичной формы остается неизменным ее ранг, то при этом изменении коэффициентов остается неизменной и ее сигнатура.

При этом мы исходим из того, что непрерывное изменение коэффициентов влечет непрерывное изменение характеристических чисел. Сигнатура может измениться лишь тогда, когда какое-либо характеристическое число поменяет знак. Но тогда в какой-то промежуточный момент россматриваемое характеристическое число обратится в нуль, который влечет изменение ранга формы.

Из формулы (8.68) также следует, что вещественная симметрическая матрица A является положительно полуопределенной (положительно определенной) в том и только в том случае, когда все характеристические числа матрицы A неотрицательны (положительны) (отсюда сразу следует, что в ортонормированном базисе евклидова пространства неотрицательному (положительно полуопределенному) оператору $\boldsymbol{A}$ отвечает положительно полуопределенная (положительно определенная) матрица A), т.е. когда она представима в виде

$$A = O \, \| \lambda_i \delta_{ik} \|_1^n \, O^{-1} \quad [\lambda_i \geqslant 0 \; (> 0); \; i = 1, \ldots, n]. \tag{8.71}$$

Положительно полуопределенная (определенная) матрица

$$F = O \, \| \sqrt{\lambda_i} \delta_{ik} \|_1^n \, O^{-1} \tag{8.72}$$

является корнем квадратным из положительно полуопределенной (определенной) матрицы A:

$$F = \sqrt{A}. \tag{8.73}$$

8.12. Пучок квадратичных форм

В теории малых колебаний приходится одновременно рассматривать две квадратичные формы, из которых одна задает потенциальную, а вторая - кинетическую энергию системы. Вторая форма всегда является положительно определенной.

Изучению системы двух таких форм мы посвящаем этот пункт.

Две вещественные квадратичные формы

$$A(x, x) = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k, \quad B(x, x) = \sum_{i,\,k=1}^{n} b_{ik} x_i x_k$$

определяют *пучок* форм $A(x, x) — \lambda B(x, x)$ (λ - параметр).

Если форма $B(x, x)$ — положительно определенная, то пучок $A(x, x) — \lambda B(x, x)$ называют *регулярным*.

Уравнение

$$| A - \lambda B | = 0$$

называется *характеристическим уравнением пучка форм* $A(x, x) — \lambda B(x, x)$.

Обозначим через λ_0 какой-либо корень этого уравнения. Поскольку матрица $A — \lambda_0 B$ особенная, то существует столбец $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \neq 0$ такой, что $(A — \lambda_0 B)\, z = 0$ или

$$Az = \lambda_0 Bz \qquad (z \neq 0).$$

Число λ_0 мы будем называть *характеристическим числом пучка* $A(x, x) — \lambda B(x, x)$, а z — соответствующим *главным столбцом* или *«главным вектором»* этого пучка. Имеет место следующая теорема

Теорема 8. *Характеристическое уравнение*

$$|A - \lambda B|=0$$

регулярного пучка форм $A(x, x)$—$\lambda B(x, x)$ *всегда имеет n вещественных корней* λ_k (k = 1, 2, ..., n), *которым соответствуют главные векторы* $z^k = (z_{1k}, z_{2k},... ...,z_{nk})$ (k= 1,2, ...,n):

$$Az^k = \lambda_k Bz^k \quad (k = 1,2,...,n). \tag{8.74}$$

Эти главные векторы z^k *могут быть выбраны так, чтобы выполнялись соотношения*

$$B(z^i z^k) = \delta_{ik} \quad (u,k=1,2,...,n). \tag{8.75}$$

(Иногда говорят, что равенства (8.75) выражают собой ортонормированность векторов z^1, ..., z^n в B-метрике).

Доказательство. Заметим, что равенства (8.74) могут быть записаны так:

$$B^{-1}Az^k = \lambda_k z^k \quad (k = 1, 2, ..., n). \tag{8.76}$$

Таким образом, наша теорема утверждает, что матрица

$$D = B^{-1}A \tag{8.77}$$

имеет: 1° простую структуру, 2° вещественные характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ и 3° собственные столбца (векторы) $z^1, z^2,..., z^n$, соответсвующие этим характеристическим числам и удовлетворяют соотношением (8.75).

Матрица D, являясь произведением двух симметрических матриц B^{-1} и A, не обязательно сама должна быть симметрической, поскольку $D = B^{-1}A$, а $D'=AB^{-1}$. Однако, полагая $F=\sqrt{B}$ (F — положительно определенная матрица, поэтому $|F| \neq 0$), из равенства (8.77) легко получаем:

$$D = F^{-1}SF, \tag{8.78}$$

где

$$S=F^{-1}AF^{-1} \tag{8.79}$$

— симметрическая матрица. Из того, что *матрица D подобна симметрической матрице S,* сразу следует утверждение 1° и 2°. Обозначая через u^k (k=1,...,n) пронормированную систему собственных векторов симметрической матрицы S:

$$Su^k = \lambda_k u^k \ (k = 1, \ldots, n), \qquad (u^k)' u^l = \delta_{kl} \ (k, l = 1, \ldots, n) \tag{8.80}$$

и полагая

$$u^k = Fz^k \quad (k=1,...,n), \tag{8.81}$$

мы из равенств (8.78), (8.79), (8.80), (8.81) найдем:

$$Dz^k = \lambda_k z^k, \quad B(z^k, z^l) = (z^k)' Bz^l = \delta_{kl},$$

где k, l = 1, ..., n, т.е. доказано утверждения 3°, и теорема 8 доказана полностью.

Заметим, что из (8.75) следует, что столбцы z^1, z^2,..., z^n линейно независимы. В самом деле, пусть

$$\sum_{k=1}^{n} c_k z^k = 0. \tag{8.82}$$

Тогда при любом i ($1 \le i \le n$) согласно (8.75)

$$0 = B\left(z^i, \sum_{k=1}^{n} c_k z^k\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k B(z^i, z^k) = c_i.$$

Таким образом, в (8.82) все c_i (i = 1, 2, ..., n) равны нулю, и никакой линейной зависимости между столбцами z^1, z^2, ..., z^n не существует.

Квадратную матрицу, составленную из главных столбцов z^1, z^2, ..., z^n, удовлетворяющих соотношением (8.75),

$$Z = (z^1, z^2, \ldots, z^n) = \| z_{ik} \|_1^n$$

мы будем называть *главной матрицей* для пучка форм $A(x, x)$—$\lambda B(x, x)$. Главная матрица Z - неособенная ($| Z | \ne 0$), поскольку ее столбцы линейно независимы.

Равенства (8.75) могут быть записаны так:

$$z^{i'} B z^k = \delta_{ik} \quad (i,k = 1,2,\ldots,n). \tag{8.83}$$

Кроме того, умножив обе части равенств (8.74) слева на строчную матрицу $z^{i'}$, получим:

$$z^{i'} A z^k = \lambda_k z^{i'} B z^k = \lambda_k \delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n). \tag{8.84}$$

Вводя главную матрицу $Z = (z^1, z^2,\ldots, z^n)$, мы равенства (8.83) и (8.84) можем представить в виде

$$Z'AZ = \| \lambda_k \delta_{ik} \|_1^n, \quad Z'BZ = E. \tag{8.85}$$

Формулы (8.85) показывают, что неособенное преобразование

$$x = Z\xi \tag{8.86}$$

одновременно приводит квадратичные формы $A(x, x)$ и $B(x, x)$ к суммам квадратов:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k^2 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2. \tag{8.87}$$

Это свойство преобразования (8.86) характеризует главную матрицу Z. Действительно, пусть преобразование (8.86) одновременно приводит формы $A(x, x)$ и $B(x, x)$ к каноническим видам (8.87). Тогда имеют место равенства (8.85), а следовательно, для столбцов матрицы Z, (8.83) и (8.84). Из (8.85) следует неособенность матрицы Z ($|Z| \neq 0$). Равенства же (8.84) перепишем так:

$$z^{i'}(Az^k - \lambda_k Bz^k) = 0 \quad (i = 1, 2, ... n); \qquad (8.88)$$

здесь k имеет произвольное фиксированное значение ($1 \leq k \leq n$). Систему равенств (8.88) можно объединить в одно равенство:

$$Z' (Az^k - \lambda_k Bz^k) = 0,$$

откуда, поскольку Z' - неособенная матрица,

$$Az^k - \lambda_\kappa Bz^k = 0,$$

т.е. при каждом k получаем (8.74). Следовательно, Z - главная матрица. Нами доказана теорема

Теорема 9. *Если* $Z = \| z_{ik} \|^n_1$ *— главная матрица регулярного пучка форм* $A(x, x) — \lambda B(x, x)$, *то преобразование*

$$x = Z\xi \qquad (8.89)$$

приводит одновременно формы $A(x, x)$ *и* $B(x, x)$ *соответственно к суммам квадратов*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k^2, \quad \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2, \qquad (8.90)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *— характеристические числа пучка* $A(x, x) — \lambda B(x, x)$, *соответствующие столбцам* $z^1, z^2, ..., z^n$ *матрицы* Z.

Обратно, если некоторое преобразование (8.89) *одновременно переводит формы* $A(x, x)$ *и* $B(x, x)$ *к виду* (8.90), *то* $Z = \| z_{ik} \|^n_1$ *— главная матрица регулярного пучка форм* $A(x, x) — \lambda B(x, x)$.

Иногда характерное свойство преобразования (8.89), сформулированное в теореме 9, используется для построения главной матрицы и доказательства теоремы 8. Для этого сначала делают преобразование переменных $x = Ty$, которые приводят форму $B(x, x)$ к единичной сумме квадратов

$$\sum_{k=1}^{n} y_k^2$$

(что всегда возможно, поскольку $B(x, x)$ — положительно определенная форма). При этом форма $A(x, x)$ переходит в некоторую форму $A_1(y, y)$. Теперь форму $A_1(y, y)$ приводят к виду

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k^2$$

при помощи ортогонального преобразования $y = O\xi$, (приведение к главным осям!). При этом, очевидно (ортогональные преобразования не меняют суммы квадратов переменных, поскольку $(Ox)' Ox = x'x$),

$$\sum_{k=1}^{n} y_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2.$$

Таким образом, преобразование $x = Z\xi$,, где Z = *TO,* приводит данные две формы к виду (8.89). После этого показывают (как это было сделано выше), что столбцы z^1, z^2, ..., z^n матрицы Z удовлетворяют соотношением (8.74) и (8.75).

В частном случае, когда $B\,(x, x)$ — единичная форма, т.е.

$$B\,(x, x) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

и, следовательно, $B = E$, характеристическое уравнение пучка $A\,(x, x) - \lambda B\,(x, x)$ совпадает с характеристическим уравнением матрицы *A,* а главные векторы пучка становятся собственными векторами матрицы *A*. В этом случае соотношения (8.75) записываются так: $z^{i'}z^k = \delta_{ik}$ $(i, k = 1,2, ..., n)$, и выражают ортонормированность столбцов z^1, z^2, ..., z^n.

Теоремы 8 и 9 допускают наглядную геометрическую интерпретацию. Введем евклидово пространство ***R*** с базисом $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$ и основной метрической формой $B\,(x, x)$.

Рассмотрим в ***R*** центральную гиперповерхность второго порядка, уравнение которой

$$A\,(x,\ x) \equiv \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k = c. \tag{8.91}$$

После преобразования координат $x = Z\xi$, где $Z = \|\, z_{ik}\,\|_1^n$ — главная матрица пучка $A(x, x) - \lambda B\,(x, x)$, новыми базисными векторами являются векторы z^1, z^2, ..., z^n, координаты которых в старом базисе представляют столбцы матрицы Z, т.е. главные векторы пучка. Эти векторы образуют ортонормированный базис, в котором уравнение гиперповерхности (8.91) имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k^2 = c. \tag{8.92}$$

Следовательно, главные векторы пучка z^1, z^2, ..., z^n совпадают по направлению с главными осями гиперповерхности (8.91), а характеристические числа пучка $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ определяют величины полуосей:

$$\lambda_k = \pm \frac{c}{a_k^2} (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, задача определения характеристических чисел и главных векторов регулярного пучка форм $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ эквивалентна задаче приведение к главным осям уравнения (8.91) центральной гиперповерхности второго порядка в том случае, когда уравнение гиперповерхности задано в обобщенной косоугольной системе координат (т.е. косоугольная система координат с различными масштабами длин вдоль осей), в которой «единичная сфера» имеет уравнение $B(x, x) = 1$.

Пример.

Дано уравнения поверхности второго порядка

$$2x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 10yz + 2xz - 4 = 0 \qquad (8.93)$$

в обобщенной косоугольной системе координат, в которой уравнение единичной сферы

$$2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz = 1. \qquad (8.94)$$

Требуется уравнение (8.93) привести к главным осям.

В данном случае

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 1 & -5 & -3 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Характеристическое уравнение пучка $|A - \lambda B| = 0$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2-2\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 0 & -2-3\lambda & -5 \\ 1-\lambda & -5 & -3-2\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (8.95)$$

Это уравнение имеет три корня: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -4$.

Координаты главного вектора, соответствующего характеристическому числу 1, обозначим через u, v, w. Величины u, v, w определяются из системы однородных уравнений, коэффициенты которых совпадают с элементами определителя (8.95) при $\lambda = 1$:

$$0 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w = 0,$$
$$0 \cdot u - 5v - 5w = 0,$$
$$0 \cdot u - 5v - 5w = 0.$$

Фактически мы здесь имеем лишь одно соотношение

$$v + w = 0.$$

Характеристическому числу $\lambda = 1$ должны отвечать два ортонормированных главных вектора. Координаты первого можем выбрать произвольно, лишь бы выполнялось условие $v + w = 0$. Выберем их так:

$$u = 0,\ v,\ w, \text{ где } w = -v.$$

Координаты второго главного вектора возьмем в виде

$$u',\ v',\ w', \text{ где } w' = -v',$$

и запишем условие ортогональности $[B(z^1, z^2) = 0]$:

$$2uu' + 3vv' + 2ww' + uw' + u'w = 0.$$

Отсюда найдем: $u' = 5v'$. Таким образом, координаты второго главного вектора

$$u' = 5v',\ v',\ w' = -v'.$$

Аналогично, полагая в характеристическом определителе $\lambda=-4$, найдем для соответствующего главного вектора:

$$u'',\ v'' = -u'',\ w'' = -2u''.$$

Величины v, v' и u'' определяются из условия: координаты главного вектора должны удовлетворять уравнению единичной сферы [$B(x, x)= 1$], т.е. уравнению (8.94). Отсюда находим:

$$v = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad v' = \frac{1}{3\sqrt{5}}, \qquad u'' = -\frac{1}{3}.$$

Поэтому главная матрица имеет вид

$$Z = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{Vmatrix},$$

и соответствующее преобразование координат ($x - Z\xi$) приводит уравнения (8.93) и (8.94) к каноническому виду

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 - 4\xi_3^2 - 4 = 0, \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1.$$

Первое уравнение может быть еще записанное так:

$$\frac{\xi_1^2}{4} + \frac{\xi_2^2}{4} - \frac{\xi_3^2}{1} = 1.$$

Это — уравнение однополостного гиперболоида вращения с вещественной полуосью, которая равна 2, и мнимой, которая равна 1. Координаты орта оси вращения определяются третьим столбцом матрицы Z, т.е. равны

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}.$$

Координаты ортов других двух ортогональных осей задаются первым и вторым столбцами.

8.13. Экстремальные свойства характеристических чисел регулярного пучка форм

1. Пусть даны две квадратичных формы:

$$A(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k \quad \text{и} \quad B(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}x_i x_k,$$

причем форма $B(x, x)$ — положительно определенная. Характеристические числа регулярного пучка форм $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ занумеруем так, чтобы они шли в неубывающем порядке:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n. \qquad (8.96)$$

Соответствующим этим характеристическим числам главные векторы (здесь мы употребляем термин «главный вектор» в смысле главного столбца пучка, а вообще в этом пункте, имея в видк геометрическую интерпретацию, мы часто столбец будем называть вектором) как и раньше будем обозначать через $z^1, z^2, \ldots, z^n$:

$$z^k = (z_{1k}, z_{2k}, \ldots, z_{nk}); \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Определим наименьшее значение (минимум) отношения форм

$$\frac{A(x, x)}{B(x, x)},$$

рассматривая все возможные значения переменных, которые не равны одновременно нулю ($x \neq 0$). Для этого удобно перейти к новым переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ с помощью преобразования

$$x = Z\xi \quad \left(x_i = \sum_{i=1}^{n} z_{ik}\xi_k; \quad i = 1, 2, \ldots, n\right),$$

где $Z = \| Z_{ik} \|_1^n$ — главная матрица пучка $A(x, x) - \lambda B(x, x)$. В новых переменных отношение форм представится в виде [см. (8.90)]

$$\frac{A(x, x)}{B(x, x)} = \frac{\lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \ldots + \lambda_n\xi_n^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2}. \qquad (8.97)$$

Возьмем на числовой оси n точек $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Припишем этим точкам соответственно неотрицательные массы

$$m_1 = \xi_1^2, \; m_2 = \xi_2^2, \ldots, m_n = \xi_n^2.$$

Тогда согласно формуле (8.97) отношение

$$\frac{A(x, x)}{B(x, x)}$$

будет числовой координатой центра этих масс. Поэтому

$$\lambda_1 \leq \frac{A(x, x)}{B(x, x)} \leq \lambda_n.$$

Отбрасывая временно вторую часть неравенства, выясним, когда в первой части имеет место знак равенства. Для этого выделим в (8.96) группы равных характеристических чисел:

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_{p_1} < \lambda_{p_1+1} = \ldots = \lambda_{p_1+p_2} < \ldots \tag{8.98}$$

Центр масс может совпадать с крайней точою λ_1 лишь в том случае, когда все массы вне этой точки равны нулю, т.е. когда

$$\xi_{p_1+1} = \ldots = \xi_n = 0.$$

В этом случае соответствующее x будет линейной комбинацией главных столбцов $z^1, z^2, \ldots, z^{p_1}$ (из $x = Z\xi$ следует: $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k z^k.$). Поскольку все эти столбцы отвечают характеристическим числам, равным λ_1, то и x будет главным столбцом (вектором) для $\lambda = \lambda_1$.

Нами доказана теорема

Теорема 10. *Наименьшее характеристическое число регулярного пучка $A(x, x) — \lambda B(x, x)$ является минимумом отношения форм $A(x, x)$ и $B(x, x)$*

$$\lambda_1 = \min \frac{A(x, \bar{x})}{B(x, x)}, \tag{8.99}$$

причем этот минимум достигается только на векторах, которые являются главными для характеристического числа λ_1.

2. Для того чтобы дать аналогичную «минимальную» характеристику для следующего характеристического числа λ_2, ограничимся рассмотрением всех векторов x, ортогональных к z^1, т.е. удовлетворяющих уравнению

$$B(z^1, x)=0.$$

(Здесь и далее под ортогональностью двух векторов (столбцов) x, y мы будем понимать ортогональность в B-метрике, т.е. равенство $B(x, y)= 0$. Это находится в полном соответствии с геометрической интерпретацией, данной в предыдущем пункте. Мы рассматриваем величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ как координаты вектора x в некотором базисе евклидова пространства, в котором квадрат длины (норма) вектора задается положительно определенной формой

$$B(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik} x_i x_k.$$

В этой метрике векторы $z^1, z^2, \ldots, z^n$ образуют ортонормированный базис. Поэтому если вектор

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k z^k$$

ортогонален к одному из z^k, то соответствующее $\xi_k = 0$).

Для этих векторов

$$\frac{A(x, x)}{B(x, x)} = \frac{\lambda_2 \xi_2^2 + \ldots + \lambda_n \xi_n^2}{\xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2}$$

и, следовательно,

$$\min \frac{A(x, x)}{B(x, x)} = \lambda_2 \qquad [B(z^1, x) = 0].$$

При этом знак равенства достигается только на тех векторах, ортогональных к z^1, которые являются главными для характеристического числа λ_2.

Переходя к дальнейшим характеристическим числам, мы в конце концов получим следующую теорему:

Теорема 11. *При любом p* ($1 \le p \le n$) *p-е по величине характеристическое число* λ_p *в ряду* (8.96) *является минимумом отношения форм*

$$\lambda_p = \min \frac{A(x, x)}{B(x, x)} \tag{8.100}$$

при условии, что варьируемый вектор x ортогонален к первым p — 1 *ортонормированным главным векторам* $z^1, z^2, \ldots, z^{p-1}$.

$$B(z^1, x) = 0, \ldots, B(z^{p-1}, x) = 0. \tag{8.101}$$

При этом минимум достигается только на тех векторах, которые удовлетворяют условию (8.101) *и являются одновременно главными векторами для характеристического числа* λ_p.

3. Характеристика числа λ_p, данная в теореме 11, имеет то неудобство, что она связана с предыдущими главными векторами z^1, $z^2, \ldots, z^{p-1}$ и, следовательно, может быть использована только тогда, когда эти векторы известны. Кроме того, в выборе этих векторов имеется известный произвол.

Для того чтобы дать характеристику числа λ_p ($p = 1, 2, \ldots, n$), свободную от указанных недостатков, мы введем понятие о связях, наложенных на переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Пусть даны линейные формы от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$L_k(x) = l_{1k}x_1 + l_{2k}x_2 + \ldots + l_{nk}x_n \qquad (k = 1, 2, \ldots, h). \tag{8.102}$$

Мы будем говорить, что на переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ или (что то же самое) на вектор x наложено h связей $L_1, L_2, \ldots, L_h$, если рассматриваются лишь значение переменных, удовлетворяющие системе уравнений

$$L_k(x) = 0 \qquad (k = 1,2,...,h). \qquad (8.103)$$

Сохраняя обозначения (8.102) для произвольных линейных форм, мы введем специализированные обозначения для «скалярных произведений» вектора x на главные векторы $z^1, z^2, ..., z^n$:

$$\tilde{L}_k(x) = B(z^k, x) \qquad (k = 1, 2, ...,n). \qquad (8.104)$$

($\tilde{L}_k(x) = z^{k\prime} Bx = \tilde{l}_{1k}x_1 + \tilde{l}_{2k}x_2 + \ldots + \tilde{l}_{nk}x_n$, где $\tilde{l}_{1k}, \tilde{l}_{2k}, \ldots, \tilde{l}_{nk}$ — элементы строчной матрицы $z^{k\prime} B (k = 1, 2, ...,n)$).

Кроме того, в случае, когда на варьируемый вектор наложены связи (8.103), будем обозначать $\min \frac{A(x, x)}{B(x, x)}$ так:

$$\mu\left(\frac{A}{B};\ L_1, L_2, \ldots, L_h\right).$$

В этих обозначениях равенство (8.100) запишется так:

$$\lambda_p = \mu\left(\frac{A}{B};\ \tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \ldots, \tilde{L}_{p-1}\right) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n). \qquad (8.105)$$

Рассмотрим связи

$$L_1(x)=0,..., L_{p-1}(x)= 0 \qquad (8.106)$$

и

$$\tilde{L}_{p+1}(x) = 0, ..., \tilde{L}_n(x) = 0. \qquad (8.107)$$

Поскольку число связей (8.106) и (8.107) меньше n, то существует вектор $x^{(1)}\neq 0$, удовлетворяющий одновременно всем этим связям. Так как связи (8.107) выражают ортогональность вектора x к главным векторам $z^{p+1}, ..., z^n$, то соответствующие вектору $x^{(1)}$ координаты $\xi_{p+1} = ... = \xi_z = 0$. Поэтому согласно (8.97)

$$\frac{A(x^{(1)}, x^{(1)})}{B(x^{(1)}, x^{(1)})} = \frac{\lambda_1\xi_1^2 + \ldots + \lambda_p\xi_p^2}{\xi_1^2 + \ldots + \xi_p^2} \leqslant \lambda_p.$$

Но тогда

$$\mu\left(\frac{A}{B};\ L_1, L_2, \ldots, L_{p-1}\right) \leqslant \frac{A(x^{(1)}, x^{(1)})}{B(x^{(1)}, x^{(1)})} \leqslant \lambda_p.$$

Это неравенство в соединении с (8.105) показывает, что при варьировании связей $L_1, L_2, ..., L_{p-1}$ величина μ остается $\leq \lambda_p$ и достигает λ_p, если взять специализированные связи $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, ..., \tilde{L}_{p-1}$.

Нами доказана теорема

Теорема 12. *Если мы рассмотрим минимум отношения двух форм*

$$\frac{A(x, x)}{B(x, x)}$$

при произвольных $p - 1$ *связях* $L_1, L_2, ..., L_{p-1}$ *и будем варьировать связи, то максимум этих минимумов будет равен* λ_p*:*

$$\lambda_p = \max \mu\left(\frac{A}{B};\ L_1, L_2, \ldots, L_{p-1}\right) \quad (p = 1, \ldots, n). \tag{8.108}$$

Теорема 12 дает «максимально-минимальную» характеристику числам $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ в отличие от «минимальной» характеристики, о которой речь идет в теореме 11.

4. Заметим, что при замене формы $A(x, x)$ в пучке $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ на форму $-A(x, x)$ все характеристические числа пучка меняют знак, а соответствующие главные векторы остаются неизменными. Таким образом, характеристическими числами пучка $-A(x, x) - \lambda B(x, x)$ являются числа $-\lambda_n \le -\lambda_{n-1} \le \ldots \le -\lambda_1$.

Кроме того, обозначая через

$$\nu\left(\frac{A}{B};\ L_1, L_2, \ldots, L_h\right) = \max \frac{A(x,x)}{B(x,x)} \tag{8.109}$$

в случае, когда на варьируемый вектор наложены связи $L_1, L_2, ..., L_h$, мы сможем написать:

$$\mu\left(-\frac{A}{B};\ L_1, L_2, \ldots, L_h\right) = -\nu\left(\frac{A}{B};\ L_1, L_2, \ldots, L_h\right)$$

и

$$\max \mu\left(-\frac{A}{B};\ L_1, L_2, \ldots, L_h\right) = -\min \nu\left(\frac{A}{B};\ L_1, L_2, \ldots, L_h\right).$$

Поэтому, применяя к отношению

$$-\frac{A(x,x)}{B(x,x)}$$

теоремы 10, 11, 12, мы вместо формул (8.99), (8.105), (8.108) получим формулы

$$\lambda_n = \max \frac{A(x,x)}{B(x,x)},$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_{n-p+1} = \nu\left(\dfrac{A}{B};\ \tilde{L}_n, \tilde{L}_{n-1}, \ldots, \tilde{L}_{n-p+2}\right), \\ \lambda_{n-p+1} = \min \nu\left(\dfrac{A}{B};\ L_1, L_2, \ldots, L_{p-1}\right) \end{array}\right. \quad (p = 2, \ldots, n).$$

Эти формулы устанавливают соответственно «максимальные» и «минимально-максимальные» свойства чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, которые мы сформулируем в виде следующей теоремы:

Теорема 13. *Пусть характеристическим числам*

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$$

регулярного пучка форм $A(x, x)$ — $\lambda B(x, x)$ соответствуют линейно независимые главные векторы пучка z^1, z^2, ..., z^n. Тогда

1) *Наибольшее характеристическое число λ_n является максимумом отношения форм*

$$\lambda_n = \max \frac{A(x,x)}{B(x,x)}, \tag{8.110}$$

причем этот максимум достигается только на главных векторах пучка, соответствующих характеристическому числу $\lambda_г$.

2) р-*е (из конца) характеристическое число λ_{n-p+1}* ($2 \leq p \leq n$) *является максимумом того же отношения форм*

$$\lambda_{n-p+1} = \max \frac{A(x,x)}{B(x,x)} \tag{8.111}$$

при условии, что на варьируемый вектор х наложены связи:

$$B(z^n, x) = 0,\ B(z^{n-1}, x) = 0,\ \ldots,\ B(z^{n-p+2}, x) = 0, \tag{8.112}$$

т.е.

$$\lambda_{n-p+1} = \nu\left(\frac{A}{B};\ \tilde{L}_n, \tilde{L}_{n-1}, \ldots, \tilde{L}_{n-p+2}\right); \tag{8.113}$$

этот максимум достигается только на главных векторах пучка, соответствующих характеристическому числу λ_{n-p+1} и удовлетворяющих связям (8.112).

3) *Если в максимуме отношения форм*

$$\frac{A(x,x)}{B(x,x)}$$

при связях

$$L_1(x) = 0, \ldots, L_{p-1}(x) = 0$$

($2 \leq p \leq n$) *варьировать связи, то наименьшее значение (минимум) этого максимума равно λ_{n-p+1}:*

$$\lambda_{n-p+1} = \min \nu\left(\frac{A}{B};\ L_1, L_2, \ldots, L_{p-1}\right). \tag{8.114}$$

5. Пусть даны *h независимых* связей

$$L^0_1(x) = 0,\ L^0_2(x) = 0,\ \ldots,\ L^0_h(x) = 0. \tag{8.115}$$

(Связи (8.115) являются независимыми, когда независимы линейные формы $L^0_1(x)$, $L^0_2(x)$, ..., $L^0_h(x)$, стоящие в левых частях уравнений связей).

Тогда из них можно выразить h из переменных x_1, x_2, ..., x_n через остальные переменные, которые мы обозначим буквами v_1, v_2, ..., v_{n-h}.

Поэтому при наложении связей (8.115) регулярный пучок форм $A\ (x, x) — \lambda B\ (x, x)$ переходит в пучок $A^0\ (v, v) — \lambda B^0\ (v, v)$, причем $B^0\ (v, v)$ — снова положительно определенная форма (только от n-h переменных). Полученный таким образом регулярный пучок имеет $n — h$ вещественных характеристических чисел

$$\lambda^0_1 \le \lambda^0_2 \le \ldots \le \lambda^0_{n-h} \ldots \qquad (8.116)$$

При наложении связей (8.115) можно по-разному выразить все переменные через $n — h$ независимых $v_1, v_2, ..., v_{n-h}$. Однако характеристические числа (8.116) не зависят от этого произвола и имеют вполне определенные значения. Это следует хотя бы из максимально-минимальных свойств характеристических чисел

$$\lambda_1^0 = \min \frac{A^0(v, v)}{B^0(v, v)} = \mu\left(\frac{A}{B};\ L_1^0, L_2^0, \ldots, L_h^0\right) \qquad (8.117)$$

и вообще

$$\lambda_p^0 = \max \mu\left(\frac{A^0}{B^0};\ L_1, L_2, \ldots, L_{p-1}\right) = \max \mu\left(\frac{A}{B};\ L_1^0, \ldots, L_h^0; L_1, \ldots, L_{p-1}\right), \qquad (8.118)$$

при этом в формуле (8.118) варьируются только связи $L_1, L_2, ..., L_{p-1}$.

Имеет место теорема

Теорема 14. *Если* $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n$ *— характеристические числа регулярного пучка форм* $A\ (x, x) — \lambda B(x, x)$, *а* $\lambda^0_1 \le \lambda^0_2 \le \ldots \le \lambda^0_{n-h}$ *— характеристические числа того же пучка при наложении* h *независимых связей, то*

$$\lambda_p \le \lambda^0_p \le \lambda_{p+h} \quad (p = 1, 2, ..., n - h). \qquad (8.119)$$

Доказательство. Неравенства $\lambda_p \le \lambda^0_p$ $(p = 1,2, ..., n - h)$ сразу следуют из формул (8.108) и (8.118). Действительно, при добавлении новых связей величина минимума

$$\mu\left(\frac{A}{B};\ L_1, \ldots, L_{p-1}\right)$$

увеличивается или остается прежней.

Поэтому

$$\mu\left(\frac{A}{B};\ L_1, \ldots, L_{p-1}\right) \le \mu\left(\frac{A}{B};\ L_1^0, \ldots, L_h^0; L_1, \ldots, L_{p-1}\right).$$

Отсюда

$$\lambda_p = \max \mu\left(\frac{A}{B};\ L_1, \ldots, L_{p-1}\right) \leqslant \lambda_p^0 =$$
$$= \max \mu\left(\frac{A}{B};\ L_1^0, \ldots, L_h^0; L_1, \ldots, L_{p-1}\right).$$

Вторые части неравенств (8.119) имеют место в силу соотношений

$$\lambda_p^0 = \max \mu\left(\frac{A}{B};\ L_1^0, \ldots, L_h^0; L_1, \ldots, L_{p-1}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \max \mu\left(\frac{A}{B};\ L_1, \ldots, L_{p-1}, L_p, \ldots, L_{p+h-1}\right) = \lambda_{p+h}.$$

Здесь в правой части варьируются не только связи $L_1, \ldots, L_{p-1}$, но и связи $L_p, \ldots, L_{p+h-1}$; в левой же части последние связи заменены фиксированными связями $L^0_1, \ldots, L^0_h$.

Теорема доказана.

6. Пусть даны два регулярных пучка форм

$$A(x, x) - \lambda B(x, x), \qquad \tilde{A}(x, x) - \lambda \tilde{B}(x, x) \tag{8.120}$$

и пусть при любому $x \neq 0$

$$\frac{A(x, x)}{B(x, x)} \leqslant \frac{\tilde{A}(x, x)}{\tilde{B}(x, x)}.$$

Тогда, очевидно,

$$\max \mu\left(\frac{A}{B};\ L_1, L_2, \ldots, L_{p-1}\right) \leqslant \max \mu\left(\frac{\tilde{A}}{\tilde{B}};\ L_1, L_2, \ldots, L_{p-1}\right)$$
$$(p = 1, 2, \ldots, n).$$

Поэтому, обозначая через $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ и $\tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 \leq \ldots \leq \tilde{\lambda}_n$ соответственно характеристические числа пучков (8.120), будем иметь:

$$\lambda_p \leq \tilde{\lambda}_p \quad (p = 1,2, \ldots,n).$$

Таким образом, доказана теорема

Теорема 15. *Если даны два регулярных пучка форм* $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ *и* $\tilde{A}(x, x) - \lambda \tilde{B}(x, x)$ *с характеристическими числами соответственно* $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ *и* $\tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 \leq \ldots \leq \tilde{\lambda}_n$, *то из тождественного соотношения*

$$\frac{A(x, x)}{B(x, x)} \leqslant \frac{\tilde{A}(x, x)}{\tilde{B}(x, x)} \tag{8.121}$$

следует:

$$\lambda_p \leq \tilde{\lambda}_p \quad (p = 1,2, \ldots,n). \tag{8.122}$$

Рассмотрим частный случай, когда в неравенстве (8.121)

$B(x, x) \equiv \tilde{B}(x, x)$. В этом случае разность $\tilde{A}(x, x) - A(x, x)$ является неотрицательной квадратичной формой и поэтому может быть представлена в виде суммы независимых положительных квадратов:

$$\tilde{A}(x, x) = A(x, x) + \sum_{i=1}^{r} [X_i(x)]^2.$$

Тогда при наложении r независимых связей

$$X_1(x)=0, \quad X_2(x)=0, \ldots, X_r(x)=0$$

формы $A(x, x)$ и $\tilde{A}(x, x)$ совпадают, и пучки $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ и $\tilde{A}(x, x) - \lambda B(x, x)$ имеют одни и те же характеристические числа $\lambda^0_1 \le \lambda^0_2 \le \ldots \le \lambda^0_{n-r}$...

Применяя теорему 14 к каждому из пучков $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ и $\tilde{A}(x, x) - \lambda B(x, x)$, будем иметь:

$$\tilde{\lambda}_p \le \lambda^0_p \le \lambda_{p+r} \quad (p = 1, 2, \ldots, n - r).$$

Присоединяя сюда неравенство (8.122), приходим к теореме:

Теорема 16. *Если* $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n$ *и* $\tilde{\lambda}_1 \le \tilde{\lambda}_2 \le \ldots \le \tilde{\lambda}_n$ — *характеристические числа двух регулярных пучков форм* $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ и $\tilde{A}(x, x) - \lambda B(x, x)$, где

$$\tilde{A}(x, x) = A(x, x) + \sum_{i=1}^{r} [X_i(x)]^2,$$

а $X_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ — *независимые линейные формы, то имеют место неравенства*

$$\lambda_p \le \tilde{\lambda}_p \le \lambda_{p+r} \ (p = 1, 2, \ldots, n). \qquad (6.123)$$

(Вторые части этих неравенств имеют место только при $p \le n - r$).

Совершенно аналогично доказывается следующая теорема

Теорема 17. *Если* $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n$ *и* $\tilde{\lambda}_1 \le \tilde{\lambda}_2 \le \ldots \le \tilde{\lambda}_n$ — *характеристические числа регулярных пучков форм* $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ и $A(x, x) - \lambda \tilde{B}(x, x)$, *где форма* $\tilde{B}(x, x)$ *получается из* $B(x, x)$ *прибавлением* r *положительных квадратов, то имеют место неровенства*

$$\lambda_{p-r} \le \tilde{\lambda}_p \le \lambda_p \quad (p = 1, 2, \ldots, n). \qquad (8.124)$$

(Первые части неравенств имеют место при $p > r$).

Замечание. В теоремах 16 и 17 можно утверждать, что при некотором p имеем $\lambda_p < \tilde{\lambda}_p$ (соответственно $\tilde{\lambda}_p < \lambda_p$ если, конечно, $r \ne 0$).

8.14. Малые колебания системы с *n* степенями свободы

Результаты предыдущих двух пунктов имеют важные приложения в теории малых колебаний механической системы с *n* степенями свободы.

Рассмотрим свободные колебания консервативной механической системы с *n* степенями свободы вблизи ее устойчивого положения равновесия. Отклонение системы от положения равновесия будем задавать с помощью независимых обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Само положение равновесия при этом соответствует нулевым значениям этих координат: $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, ..., $q_n = 0$. Тогда кинетическая энергия системы представится в виде квадратичной формы относительно обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ (точкой мы обозначаем производную по времени):

$$T = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}(q_1, q_2, \ldots, q_n)\,\dot{q}_i\dot{q}_k.$$

Разлагая коэффициенты $b_{ik}(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ в ряд по степеням $q_1, q_2, \ldots, q_n$,

$$b_{ik}(q_1, q_2, \ldots, q_n) = b_{ik} + \ldots \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

и сохраняя (ввиду малости отклонений $q_1, q_2, \ldots, q_n$) только постоянные члены b_{ik}, будем иметь:

$$T = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k \qquad (b_{ik} = b_{ki};\ i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Кинетическая энергия всегда положительна и обращается в нуль только при нулевых скоростях $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \ldots = \dot{q}_n = 0$. Поэтому

$$\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$$

- положительно определенная форма.

Потенциальная энергия системы является функцией от координат: $\Pi(q_1, q_2, \ldots, q_n)$. Не нарушая общности, можем принять $\Pi_0 = \Pi(0, 0, \ldots, 0) = 0$. Тогда, раскладывая потенциальную энергию в ряд по степеням $q_1, q_2, \ldots, q_n$, получим:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} a_i q_i + \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} q_i q_k + \ldots$$

Поскольку в положении равновесия потенциальная энергия всегда имеет стационарное значение, то

$$a_i = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right)_0 = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Сохраняя только члены второго порядка относительно $q_1, q_2, \ldots, q_n$, мы будем иметь:

$$\Pi = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} q_i q_k \quad (a_{ik} = a_{ki};\ i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, потенциальная энергия П и кинетическая энергия T определяются двумя квадратичными формами:

$$\Pi = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} q_i q_k, \quad T = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \tag{8.125}$$

причем вторая форма - положительно определенная.

Напишем теперь дифференциальные уравнения движения в форме уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{8.126}$$

Подставляя сюда вместо T и П их выражения из (8.125), получаем:

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} q_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{8.127}$$

Вводя в рассмотрение вещественные симметрические матрицы

$$A = \| a_{ik} \|^n_1; \quad \text{и} \quad B = \| b_{ik} \|^n_1$$

и столбцевую матрицу $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, мы систему уравнений (8.127) можем записать в следующей матричной форме:

$$B\ddot{q} + Aq = 0. \tag{8.128}$$

Будем искать решение системы (8.128) в виде гармонических колебаний

$$q_1 = v_1 \sin(\omega t + \alpha), \quad q_2 = v_2 \sin(\omega t + \alpha), \ldots, q_n = v_n \sin(\omega t + \alpha);$$

в матричной записи

$$q = v \sin(\omega t + \alpha). \tag{8.129}$$

Здесь $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ — постоянный амплитудный столбец («вектор»), ω - частота и α - начальная фаза колебаний.

Подставляя выражение (8.129) для q в (8.128), получим после сокращения на $\sin(\omega t + \alpha)$:

$$Av = \lambda Bv \quad (\lambda = \omega^2).$$

Но это уравнение совпадает с уравнением (8.74). Следовательно, искомый амплитудный вектор является главным вектором, а квадрат частоты $\lambda = p^2$ — соответствующим характеристическим числом регулярного пучка форм $A(x, x) - \lambda B(x, x)$.

Мы наложим на потенциальную энергию дополнительное ограничение, потребовав, чтобы функция $\Pi(q_1, q_2, ..., q_n)$ в положении равновесия имела строгий минимум (т.е. чтобы значение Π_0 в положении равновесия было меньше всех других значений функции в некоторой окрестности положения равновесия).

Тогда на основании теоремы Лежен-Дирихле положение равновесия системы будет устойчивым. С другой стороны, сделанное нами допущение означает, что квадратичная форма $\Pi = A(q, q)$ также является положительно определенной.

Согласно теореме 8 регулярный пучок форм $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ имеет n действительных характеристических чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_г$ и n соответствующим этим числам главных векторов $v^1, v^2, ..., v^n$ [$v^k = (v_{1k}, v_{2k}, ..., v_{nk})$; $k = 1, 2, ..., n$], удовлетворяющих условиям

$$B(v^i, v^k) = \sum_{\mu, \nu = 1}^{n} b_{\mu\nu} v_{\mu i} v_{\nu k} = \delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n). \tag{8.130}$$

Из положительной определенности формы $A(x, x)$ следует, что все характеристические числа пучка $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ положительны (это следует хотя бы из представления (8.90).

Но тогда существует n гармонических колебаний (здесь начальные фазы α_k $(k = 1, 2, ..., n)$ — произвольные постоянные).

$$v^k \sin(\omega_k t + \alpha_k) \quad (\omega_k^2 = \lambda_k, \ k = 1, 2, \ldots, n), \tag{8.131}$$

амплитудные векторы которых $v^k = (v_{1k}, v_{2k}, ..., v_{nk})$ $(k = 1, 2, ..., n)$ удовлетворяют условиям «ортонормированности» (8.130).

В силу линейности уравнения (8.128) произвольное колебание может быть получено наложением гармонических колебаний (8.131):

$$q = \sum_{k=1}^{n} A_k \sin(\omega_k t + \alpha_k) v^k, \tag{8.132}$$

где A_k, α_k $(k = 1, 2, ..., n)$ — произвольные постоянные. Действительно, при любых значениях этих постоянных выражение (8.132) является решением уравнения (8.128). С другой стороны, за счет произвольных постоянных можно удовлетворить любым начальным условиям:

$$q|_{t=0} = q_0, \quad \dot{q}|_{t=0} = \dot{q}_0.$$

В самом деле, из (8.132) находим:

$$q_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k \sin \alpha_k v^k, \quad \dot{q}_0 = \sum_{k=1}^{n} \omega_k A_k \cos \alpha_k v^k. \tag{8.133}$$

Поскольку главные столбцы $v^1, v^2, \ldots, v^n$ всегда линейно независимы, то из равенств (8.133) однозначно определяются величины $A_k \sin \alpha_k$ и $\omega_k A_k \cos \alpha_k$ $(k = = 1, 2, \ldots, n)$ и, следовательно, произвольные постоянные A_k и α_k $(k = 1, 2, \ldots \ldots, n)$.

Решение (8.132) нашей системы дифференциальных уравнений (8.127) может быть более подробно записано так:

$$q_i = \sum_{k=1}^{n} A_k \sin(\omega_k t + \alpha_k)\, v_{ik}. \tag{8.134}$$

Заметим, что к тем же формулам (8.132), (8.134) можно прийти, исходя из теоремы 9. Действительно, рассмотрим неособенное преобразование переменных с матрицей $V = \| v_{ik} \|^n_1$, приводящее одновременно обе формы $A(x, x)$ и $B(x, x)$ к каноническому виду (8.90). Полагая

$$q_i = \sum_{k=1}^{n} v_{ik}\theta_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{8.135}$$

или в сокращенной записи

$$q = V\theta \; [\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)] \tag{6.136}$$

и замечая, что $\dot{q} = V\dot{\theta}$, будем иметь:

$$\Pi = A(q, q) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_k \theta_k^2, \qquad T = B(q, q) = \sum_{k=1}^{n} \theta_k^2. \tag{8.137}$$

Координаты $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_г$, в которых потенциальная и кинетическая энергии представляются в виде (8.137), называются *нормальными координатами.*

Воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода (8.127), подставив в них вместо П и Т их выражения (8.137). Получим:

$$\ddot{\theta}_k + \lambda_k \theta_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{8.138}$$

Поскольку форма $A(q, q)$ — положительно определенная, то все числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ положительны и могут быть представлены в виде

$$\lambda_k = \omega_k^2 \quad (\omega_k > 0;\; k = 1, 2, \ldots, n). \tag{8.139}$$

Из (8.137) и (8.138) находим:

$$\theta_k = A_k \sin(\omega_k t + \alpha_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{8.140}$$

Подставляя эти выражения для θ_k в равенства (8.135), получим снова формулы (8.134) и, следовательно, (8.132). Величины v_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ при обоих выводах будут одни и теже, поскольку согласно теореме 9 матрица $V = \| v_{ik} \|^n_1$ в (8.136) есть главная матрица регулярного пучка форм $A(x, x) — \lambda B(x, x)$.

Отметим еще механическую интерпретацию теорем 14 и 15. Занумеруем частоты $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ данной механической системы в порядке неубывания:

$$0 < \omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \ldots \leqslant \omega_n.$$

Этим определится и расположение соответствующих характеристических чисел $\lambda_k=\omega^2_k$ $(k =1, 2, ..., n)$ пучка $A(x, x)—\lambda B(x, x)$:

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n.$$

Наложим на данную систему h независимых конечных стационарных связей (конечная стационарная связь выражается уравнением $f(q_1,q_2, ..., q_n) = 0$, где $f(q_1,q_2, ..., q_n)$ — некоторая функции от обобщенных координат). Поскольку отклонения $q_1, q_2,..., q_n$ считаются малыми величинами, то эти связи можно считать линейными относительно $q_1, q_2, .. .,q_n$:

$$L_1(q) = 0, \quad L_2(q) = 0, \ \ldots, L_h(q) = 0.$$

После наложения связей наша система будет иметь $n — h$ степеней свободы. Частоты этой системы

$$\omega_1^0 \leqslant \omega_2^0 \leqslant \ldots \leqslant \omega_{n-h}^0$$

связаны с характеристическими числами $\lambda^0_1 \leq \lambda^0_2 \leq ... \leq \lambda^0_{n-h}$ пучка $A(x, x)—\lambda B(x, x)$ при наложении связей $L_1, L_2, ..., L_h$ соотношениями $\lambda^0_j = \omega^{02}_j$ $(j = 1, 2, ..., n-h)$. Поэтому из теоремы 14 непосредственно следует:

$$\omega_j \leqslant \omega_j^0 \leqslant \omega_{j+h} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-h).$$

Таким образом, при *наложении h связей частоты системы могут только увеличиться, однако при этом величина новой j-й частоты* ω^0_j *не может превзойти величины бывшей $(j + h)$-й частоты* ω_{j+h}.

Точно так же на основании теоремы 15 можно утверждать, что *при увеличении жесткости системы, т.е. при увеличении формы $A(q, q)$ для потенциальной энергии [без изменения формы $B(q, q)$], частоты могут только увеличиться, а при увеличении инерции системы, т.е. при увеличении формы $B(q, q)$ для кинетической энергии [без изменения формы $A(q, q)$], частоты могут только уменьшиться.*

Теоремы 16 и 17 вносят дополнительное уточнение в это положение.

8.16. Эрмитовы формы

В предыдущих пунктах все числа и переменные были вещественными. В этом же пункте все числа и переменные принимают комплексные значения.

Все результаты п.п.8.7—8.13 этого модуля, которые установлены для вещественных квадратичных форм, могут быть перенесенные на эрмитовы формы.

Напомним, что *эрмитовой формой* называется выражение

$$H(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} h_{ik} x_i \bar{x}_k \qquad (h_{ik} = \bar{h}_{ki};\ k = 1, 2, \ldots, n). \tag{8.141}$$

Т.е., квадрат длины вектора представляется в виде *эрмитовой формы* его координат.

Эрмитовой форме (8.141) соответствует следующая *билинейная эрмитова форма:*

$$H(x, y) = \sum_{i,k=1}^{n} h_{ik} x_i \bar{y}_k; \tag{8.142}$$

при этом

$$H(y, x) = \overline{H(x, y)} \tag{8.143}$$

и, в частности,

$$H(x, x) = \overline{H(x, x)}, \tag{8.144}$$

т.е. форма *H (x, x)* принимает только вещественные значения.

Матрица коэффициентов эрмитовой формы $H=\|h_{ik}\|^n_1$ является эрмитовой, т.е. $H^*=H$ (звездочкой * мы отмечаем переход к сопряженной матрице).

Пользуясь матрицей $H=\|h_{ik}\|^n_1$, можно представить *H(x, y)* и, в частности, *H(x, x)* в виде произведения трех матриц — строчной, квадратной и столбцевой:

$$H(x, y) = x' H \bar{y}, \qquad H(x, x) = x' H \bar{x} \tag{8.145}$$

(Здесь

$x = x(x_1, x_2, \ldots, x_n), \bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n), \bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, y_n);$

значок ' означает транспонирование).

Если

$$x = \sum_{i=1}^{m} c_i u^i, \qquad y = \sum_{k=1}^{p} d_k v^k, \tag{8.146}$$

где u^i, v^k — столбцевые матрицы, c_i, d_k — комплексные числа (i = 1, 2, ..., m; k = 1,2, ...,p), то

$$H(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} c_i \bar{d}_k H(u^i, v^k). \tag{8.147}$$

Подвергнем переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ линейному преобразованию

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}\xi_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{8.148}$$

или в матричной записи

$$x = T\xi \quad (T = \| t_{ik} \|_1^n) \tag{8.149}$$

После преобразования эрмитова форма $H(x, x)$ примет вид

$$\tilde{H}(\xi, \xi) = \sum_{i,k=1}^{n} \tilde{h}_{ik}\xi_i\bar{\xi}_k,$$

где матрица новых коэффициентов $\tilde{H} = \|\tilde{h}_{ik}\|^n_1$ связана с матрицей старых коэффициентов $H = \|h_{ik}\|^n_1$ формулой

$$\tilde{H} = T'H\bar{T}. \tag{8.150}$$

В этом непосредственно убеждаемся после замены во второй формуле (8.145) x на $T\xi$.

Если положить $T = \bar{W}$, то формулу (8.150) можно еще переписать так:

$$\tilde{H} = W^*HW. \tag{8.151}$$

Из формулы (8.150) следует, что ранги матриц H и $\tilde{H}$ равны, если преобразование (8.148) — неособенное ($|T|\neq 0$). Ранг матрицы H называется *рангом формы $H(x, x)$.*

Определитель $|H|$ называется *дискриминантом* эрмитовой формы $H(x, x)$. Из (8.150) следует формула преобразования дискриминанта при переходе к новым переменным:

$$|\tilde{H}| = |H|\,|T|\,|\bar{T}|.$$

Эрмитова форма называется *сингулярной*, если ее дискриминант равен нулю. Очевидно, сингулярная форма остается сингулярной при любом преобразовании переменных (8.148).

Эрмитову форму $H(x, x)$ можно бесчисленным множеством способов представить в виде

$$H(x, x) = \sum_{i=1}^{r} a_i X_i \bar{X}_i, \tag{8.152}$$

где $a_i \neq 0$ (i = 1, 2, ...,r) - вещественные числа, а

$$X_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

— независимые комплексные линейные формы от переменных x_1, x_2, ..., x_n (следовательно $r \le n$).

Правую часть в (8.152) будем называть *суммой независимых квадратов* (эта терминология связана с тем, что произведение $X_i \bar{X}_i$ равно квадрату модуля $X_i (X_i \bar{X}_i = | X_i |^2)$, а каждое слагаемое в этой сумме — *положительным* или *отрицательным квадратом* в зависимости от того, соответствующее $a_i > 0$ или < 0. Как и для квадратичных форм, число r в (8.152) равно рангу формы $H(x, x)$.

Теорема 18 (закон инерции эрмитовых форм). *При представлении эрмитовой формы $H(x, x)$ в виде суммы независимых квадратов*

$$H(x, x) = \sum_{i=1}^{r} a_i X_i \bar{X}_i$$

число положительных и число отрицательных квадратов не зависят от способа представления.

Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 1.

Разность σ между числом π положительных и числом ν отрицательных квадратов в (8.152) называется сигнатурой эрмитовой формы $H(x, x)$: $\sigma = \pi - \nu$.

Метод Лагранжа приведения квадратичных форм к сумме квадратов может быть использован и для эрмитовых форм, только при этом основные формулы (8.35) и (8.36) должны быть заменены формулами

$$H(x, x) = \frac{1}{h_{gg}} \left| \sum_{k=1}^{n} h_{kg} x_k \right|^2 + H_1(x, x), \tag{8.153}$$

$$H(x, x) = \frac{1}{2} \left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} \left(h_{kf} + \frac{h_{kg}}{h_{fg}} \right) x_k \right|^2 - \left| \sum_{k=1}^{n} \left(h_{kf} - \frac{h_{kg}}{h_{fg}} \right) x_k \right|^2 \right\} + H_2(x, x). \tag{8.154}$$

(Формула (8.153) применяется в случае, когда $h_{gg} \neq 0$, а формула (8.154) — в случае, когда $h_{ff} = h_{gg} = 0$, а $h_{fg} \neq 0$).

Пусть теперь для эрмитовой формы

$$H(x, x) = \sum_{i, k=1}^{n} h_{ik} x_i \bar{x}_k$$

ранга r выполняются неравенства

$$D_k = H\begin{pmatrix}1 & 2 \ldots k\\ 1 & 2 \ldots k\end{pmatrix} \neq 0.$$

(8.155)

Тогда совсем так же, как и для квадратичной формы, получаем формулу Якоби в двух видах:

$$H(x, x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{D_{k-1}}{D_k} X_k \overline{X}_k, \quad H(x, x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{Y_k \overline{Y}_k}{D_{k-1} D_k} \quad (D_0 = 1),$$

(8.156)

где

$$X_k = \frac{1}{D_k} Y_k, \quad Y_k = c_{kk} x_k + c_{k,\,k+1} x_k + \ldots + c_{kn} x_n \quad (k = 1, \ldots, r),$$

(8.157)

а

$$c_{kq} = H\begin{pmatrix}1 \ldots k-1 & q\\ 1 \ldots k-1 & k\end{pmatrix} \quad (q = k, k+1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, r).$$

(8.158)

Согласно формуле Якоби (8.156) число отрицательных квадратов в представлении формы $H(x, x)$ равно числу знакоперемен в ряде 1, D_1, D_2, ...,D_r

$$v = V(1, D_1, D_2, \ldots, D_r) \quad (8.159)$$

и, следовательно, сигнатура σ эрмитовой формы $H(x, x)$ определится формулой

$$\sigma = r - 2V(1, D_1, D_2, \ldots, D_r). \quad (8.160)$$

Все замечания относительно особых случаев, которые могут здесь представиться, сделанные для квадратичных форм (п. 8.9), автоматически переносятся на эрмитовы формы.

Определение 5. Эрмитова форма

$$H(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} h_{ik} x_i \overline{x}_k$$

называется *неотрицательной (неположительной),* если при любых значениях переменных

$$H(x, x) \geq 0 \quad (\text{соответственно} \leq 0).$$

Определение 6. Эрмитова форма

$$H(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} h_{ik} x_i \overline{x}_k$$

называется *положительно определенной (отрицательно определенной),* если при любых значениях переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, не равных одновременно нулю,

$H(x, x) > 0$ (соответственно < 0).

Теорема 19. *Для того чтобы эрмитова форма*

$$H(x, x) = \sum_{i, k=1}^{n} h_{ik} x_i \bar{x}_k$$

была положительно определенной , необходимо и достаточно, чтобы имели место неравенства

$$D_k = H\begin{pmatrix} 1 & 2 \dots k \\ 1 & 2 \dots k \end{pmatrix} > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \tag{8.161}$$

Теорема 20. *Для того чтобы эрмитова форма*

$$H(x, x) = \sum_{i, k=1}^{n} h_{ik} x_i \bar{x}_k$$

была неотрицательной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы $H = \| h_{ik} \|_1^n$ *были неотрицательны:*

$$H\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \dots i_p \\ i_1 & i_2 \dots i_p \end{pmatrix} \geqslant 0 \quad (i_1, i_2, \dots, i_p = 1, 2, \dots, n;\ p = 1, 2, \dots, n). \tag{8.162}$$

Доказательство теорем 19 и 20 совершенно аналогично доказательству теорем 3 и 4 для квадратичных форм.

Условия отрицательной определенности и неположительности эрмитовой формы $H(x, x)$ получаются соответственно из условий (8.161) и (8.162), если последний применить к форме $-H(x, x)$.

Теорема 21. Матрица H является эрмитовой тогда и только тогда, когда она унитарно-подобна диагональной матрице с вещественными числами на диагонали:

$$H = U\|\lambda_i \delta_{ik}\|_1^n U^{-1} \quad (U^* = U^{-1};\ \lambda_i = \bar{\lambda}_I;\ i = 1, 2, \dots, n)$$

Из теоремы 21 следует теорема о приведения эрмитовой формы к главным осям:

Теорема 22. *Эрмитова форма*

$$H(x, x) = \sum_{i, k=1}^{n} h_{ik} x_i \bar{x}_k$$

всегда может быть приведенная при помощи унитарного преобразования переменных

$$x = U\xi \quad (UU^* = E) \tag{8.163}$$

к канонической форме

$$\Lambda(\xi, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i \bar{\xi}_i; \tag{8.164}$$

при этом λ_1, λ_2, ..., λ_n — *характеристические числа матрицы* $H = \| h_{ik} \|^n_1$.

Справедливость теоремы 22 вытекает из формулы

$$H = U \| \lambda_i \delta_{ik} \| U^{-1} = T' \| \lambda_i \delta_{ik} \| \overline{T} \qquad (U' = \overline{U}^{-1} = T). \tag{8.165}$$

Пусть даны две эрмитовы формы

$$H(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} h_{ik} x_i \overline{x}_k \quad \text{и} \quad G(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} x_i \overline{x}_k.$$

Рассмотрим пучок эрмитовых форм $H(x, x)$-$\lambda G(x, x)$ (λ – вещественный параметр). Этот пучок называется *регулярным,* если форма $G(x, x)$ — положительно определенная. С помощью эрмитовых матриц $H=\| h_{ik} \|^n_1$ и $G = \| g_{ik} \|^n_1$ составим уравнение

$$|H - \lambda G| = 0.$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением пучка эрмитовых форм.* Корни этого уравнения называются *характеристическими числами пучка.*

Если λ_0 — характеристическое число пучка, то существует столбец $z = (z_1, z_2, ..., z_n) \neq 0$ такой, что

$$Hz = \lambda_0 z.$$

Столбец z мы будем называть *главным столбцом* или *главным вектором пучка* $H(x, x) — \lambda G(x, x)$, соответствующим характеристическому числу λ_0.

Имеет место теорема

Теорема 23. *Характеристическое уравнение регулярного пучка эрмитовых форм* $H(x, x) — \lambda G(x, x)$ *имеет n вещественных корней* λ_1, λ_2, ..., λ_n. *Этим коренням соответствуют n главных векторов* z^1, z^2, ..., z^n, *которые удовлетворяют условиям «ортонормированности».*

$$G(z^i, z^k) = \delta_{ik} \ (i, k = 1,2, ...n).$$

Доказательство совеншенно аналогично доказательству теоремы 8.

Все экстремальные свойства характеристических чисел регулярного пучка квадратичных форм сохраняют свою силу и для эрмитовых форм.

Теоремы 10-17 сохраняют свою силу, если в этих теоремах термин «квадратичные формы» заменить везде термином «эрмитовы формы». Доказательства теорем остаются при этом неизменными.

8.16. Ганкелевы формы

Пусть даны $2n$ — 1 чисел s_0, s_2,..., s_{2n-2}. С помощью этих чисел сложим квадратичную форму от n переменных

$$S(x,x)=\sum_{i,k=0}^{n-1} s_{i+k}x_ix_k. \tag{8.166}$$

Квадратичная форма (8.166) называется *ганкелевой*. Соответствующая ей симметрическая матрица $S = \| s_{i+k} \|^{n-1}_0$ также называется *ганкелевою*.

Эта матрица имеет вид

$$S=\left\|\begin{matrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{matrix}\right\|.$$

Последовательные главные миноры матрицы S будем обозначать через $D_1, D_2, ..., D_n$:

$$D_p = | s_{i+k} |^{n-1}_0 \quad (p = 1,2, ...,n).$$

В этом пункте мы установим основные результаты Фробениуса относительно ранга и сигнатуры вещественных ганкелевых форм.

Предварительно докажем две леммы.

Лемма 1. *Если в ганкелевой матрице* $\| s_{i+k} \|^{n-1}_0$ *первые* h *строк линейно независимы, а первые* $h + 1$ *строк линейно зависимы, то*

$$D_h \neq 0.$$

Доказательство. Обозначим через $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_h, \Gamma_{h+1}$ первые $h + 1$ строк матрицы S. По условию теоремы строки $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_h$ линейно независимы, а строка Γ_{h+1} линейно выражается через эти строки:

$$\Gamma_{h+1}=\sum_{j=1}^{h}\alpha_j\Gamma_{h-j+1}$$

или

$$s_q=\sum_{j=1}^{h}\alpha_j s_{q-j} \quad (q=h, h+1, \dots, h+n-1). \tag{8.167}$$

Выпишем матрицу, которая состоит из первых h строк $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_h$ матрицы S:

$$\left\|\begin{matrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{h-1} & s_h & s_{h+1} & \dots & s_{h+n-2} \end{matrix}\right\|. \tag{8.168}$$

Эта матрица имеет ранг h. С другой стороны, в силу (8.167) любой столбец этой матрицы выражается линейно через h предыдущих столбцов. Следовательно, любой столбец матрицы выражается линейно через h первых столбцов. Но тогда, поскольку ранг матрицы (8.168) равен h, эти первые h столбцов матрицы (8.168) должны быть линейно независимы, т.е.

$$D_h \neq 0$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Если для матрицы* $S = \| s_{i+k} \|^{n-1}_0$ *при некотором* h $(< n)$

$$D_h \neq 0, \quad D_{h+1} = \ldots = D_n = 0 \qquad (8.169)$$

и

$$t_{ik} = \frac{S\begin{pmatrix} 1 \ldots h & h+i+1 \\ 1 \ldots h & h+k+1 \end{pmatrix}}{S\begin{pmatrix} 1 \ldots h \\ 1 \ldots h \end{pmatrix}} = \frac{1}{D_h} \begin{vmatrix} & & s_{h+k} \\ & D_h & \vdots \\ & & s_{2h+k-1} \\ s_{h+i} & \ldots \; s_{2h+i-1} & s_{2h+i+k} \end{vmatrix},$$

$$(i, k = 0, 1, \ldots, n-h-1) \qquad (8.170)$$

то матрица $T = \|t_{ik}\|^{n-h-1}_0$ *также ганкелева и все ее элементы, которые расположены над второй диагональю, равны нулю, т.е. существуют такие числа* $t_{n-h-1}, \ldots, t_{2n-2h-2}$, *что*

$$t_{ik} = t_{i+k} \quad (i,k = 0, 1, \ldots, n-h-1;\ t_0 = t_1 = \ldots = t_{n-h-2} = 0).$$

Доказательство. Введем в рассмотрение матрицы

$$T_p = \| t_{ik} \|^{p-1}_0 \ (p = 1, 2, \ldots, n-h).$$

В этих обозначениях $T = T_{n-h}$.

Мы докажем, что каждая из матриц T_p $(p — 1, 2, \ldots, n — h)$ является ганкелевой и что в ней $t_{ik} = 0$ при $i + k \leq p — 2$. Доказательство будем вести индуктивно относительно p.

Для матрицы T_1 наше утверждение тривиально, для матрицы T_2 оно очевидно, так как

$$T_2 = \begin{Vmatrix} t_{00} & t_{01} \\ t_{10} & t_{11} \end{Vmatrix},$$

$t_{01} = t_{10}$ (в сиду симметрии S) и

$$t_{00} = \frac{D_{h+1}}{D_h} = 0.$$

Допустим, что наше утверждение справедливо для матрицы T_p $(p < n — h)$, и докажем его справедливость для матрицы $T_{p+1} = \|t_{ik}\|^p_0$. Из допущения следует существование таких чисел $t_{p-1}, t_p, \ldots, t_{2p-2}$, что при $t_0 = \ldots = t_{p-2} = 0$

$$T_p = \|t_{ik}\|^{p-1}_0.$$

При этом

$$|T_p| = \pm t^p_{p-1} \qquad (8.171)$$

С другой стороны, пользуясь детерминантным тождеством Сильвестра, найдем:

$$| T_p | = \frac{D_{h+p}}{D_h} = 0. \qquad (8.172)$$

Из сопоставления (8.171) с (8.172) получаем:

$$t_{p-1} = 0. \qquad (8.173)$$

Далее из (8.170):

$$t_{ik} = s_{2h+i+k} + \frac{1}{D_h}\begin{vmatrix} & & & s_{h+k} \\ & D_h & & \vdots \\ & & & s_{2h+k-1} \\ s_{h+i} & \dots & s_{2h+i-1} & 0 \end{vmatrix}. \qquad (8.174)$$

На основании предыдущей леммы из (8.169) следует, что $(h + 1)$-я строка матрицы $S=\| s_{i+k} \|^{n-1}_0$ линейно зависит от первых h строк:

$$s_q = \sum_{g=1}^{h} \alpha_g s_{q-g} \quad (q = h, h+1, \dots, h+n-1). \qquad (6.175)$$

Пусть $i, k \leq p \leq i + k \leq 2p — 1$. При этом одно из чисел i и k меньше p. Не нарушая общности рассуждений, примем, что $i<p$. Тогда, разлагая с помощью (8.175) последний столбец в определителе, стоящем в правой части равенства (8.174), и снова используя соотношение (8.174), будем иметь:

$$t_{ik} = s_{2h+i+k} + \sum_{g=1}^{h} \frac{\alpha_g}{D_h}\begin{vmatrix} & & & s_{h+k-g} \\ & D_h & & \vdots \\ & & & s_{2h+k-g-1} \\ s_{h+i} & \dots & s_{2h+i-1} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= s_{2h+i+k} + \sum_{g=1}^{h} \alpha_g (t_{i,k-g} - s_{2h+i+k-g}). \qquad (8.176)$$

Но в силу допущения индукции имеет место (8.173), и поскольку в (8.176) $i < p$, $k — g$ и $i + k — g \leq 2p — 2$, то $t_{i,\, k-q} = t_{i+k-q}$. Следовательно, при $i + k < p$ все $t_{ik} = 0$, а при $p \leq i + k \leq 2p — 1$ величина t_{ik} в силу (8.176) зависит только от $i + k$.

Таким образом, T_{p+1} — ганкелева матрица и в этой матрице все элементы $t_0, t_1, \dots, t_{p-1}$, стоящие над второй диагональю, равны нулю.

Лемма доказана.

Пользуясь леммой 2, докажем следующую теорему:

Теорема 24. *Если ганкелева матрица* $S=\| s_{i+k} \|^{n-1}_{0}$ *имеет ранг* r *и при некотором* $h(<r)$

$$D_h \neq 0,\ D_{h+1} = \ldots = D_r = 0,$$

то главный минор r*-го порядка, образованный первыми* h *и последними* r - h *линиями матрицы* S*, не равен нулю:*

$$D^{(r)} = S\begin{pmatrix} 1 \ldots h & n-r+h+1 & n-r+h+2 \ldots n \\ 1 \ldots h & n-r+h+1 & n-r+h+2 \ldots n \end{pmatrix} \neq 0.$$

Доказательство. На основании предыдущей леммы матрица

$$T = \| t_{ik} \|_{0}^{n-h-1} \left[t_{ik} = \frac{S\begin{pmatrix} 1 \ldots h & h+i+1 \\ 1 \ldots h & h+k+1 \end{pmatrix}}{S\begin{pmatrix} 1 \ldots h \\ 1 \ldots h \end{pmatrix}} \quad (i, k = 0, 1, \ldots, n-h-1) \right]$$

есть ганкелева матрица, в которой все элементы над второй диагональю равны нулю. Поэтому

$$| T | = \pm t_{0, n-h-1}^{n-h}.$$

С другой стороны (на основании детерминантного тождества Сильвестра)

$$| T | = \frac{D_n}{D_h} = 0.$$

Следовательно, $t_{0,n-h-1}= 0$, и матрица T имеет вид

$$T = \begin{Vmatrix} 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & u_{n-h-1} \\ \vdots & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ \vdots & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \vdots \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & u_2 \\ 0 & u_{n-h-1} & \ldots & u_2 & u_1 \end{Vmatrix}.$$

Матрица T должна иметь ранг r - h. (Из тождества Сильвестра следует, что все миноры матрицы T, у которых порядок > r - h, равны нулю. С другой стороны, матрица S содержит некоторый окаймляющий D_h минор r-го порядка, отличный от нуля. Отсюда следует, что и соответствующий минор порядка r — h матрицы T отличен от нуля). Поэтому при $r < n$ — 1 в матрице T элементы $u_{r-h+1} = \ldots = u_{r-h+1} = 0$ и матрица T всегда имеет вид

$$T = \begin{Vmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 \\ \vdots & & & & u_{r-h} \\ \vdots & & & \iddots & \vdots \\ 0 \dots 0 & u_{r-h} & \dots & \dots & u_1 \end{Vmatrix} \quad (u_{r-h} \neq 0).$$

Но тогда в силу тождества Сильвестра

$$D^{(r)} = D_h T\begin{pmatrix} n-r+1 \dots n-h \\ n-r+1 \dots n-h \end{pmatrix} = \pm D_h u_{r-h}^{r-h} \neq 0,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим вещественную (в предыдущих леммах 1, 2 и теореме 24 в качестве основного поля можно было брать произвольное числовое поле и, в частности, поле всех комплексных чисел или поле всех вещественных чисел) ганкелеву форму

$$S(x, x) = \sum_{i,k=0}^{\infty} s_{i+k} x_i x_k$$

ранга r. Обозначим через π, ν, σ соответственно число положительных квадратов, число отрицательных квадратов и сигнатуру этой формы:

$$\pi + \nu = r,$$

$$\sigma = \pi - \nu = r - 2\nu.$$

Согласно теореме Якоби эти величины могут быть определены из рассмотрения знаков последовательных миноров

$$D_0 = 1, D_1, D_2, \dots, D_{r-1}, D_r \qquad (8.177)$$

при помощи формул

$$\left.\begin{aligned} \pi = P(1, D_1, \dots, D_r),\ \nu = V(1, D_1, \dots, D_r), \\ \sigma = P(1, D_1, \dots, D_r) - V(1, D_1, \dots, D_r) = r - 2V(1, D_1, \dots, D_r). \end{aligned}\right\} \qquad (8.178)$$

Эти формулы становятся непригодными в случае, когда последний член в ряду (8.177) либо три подряд идущих промежуточных члена равны нулю (см. п. 8.9). Однако для ганкелевой формы, как показал Фробениус, можно дать правило, позволяющее использовать формулы (8.178) в самом общем случае:

Теорема 25 (Фробениуса). *Для вещественной ганкелевой формы*

$$S(x, x) = \sum_{i,k=0}^{n-1} s_{i+k} x_i x_k$$

ранга r величины π, ν, σ *могут быть определены из формул* (8.178), *если*

1) *при*

$$D_h \neq 0,\ D_{h+1} = \ldots = D_r = 0\ (h < r) \qquad (8.179)$$

заменить в этих формулах D_r *на* $D^{(r)}$, *где*

$$D^{(r)} = S\begin{pmatrix} 1 \ldots h & n-r+h+1 \ldots n \\ 1 \ldots h & n-r+h+1 \ldots n \end{pmatrix} \neq 0;$$

2) *в любой группе из p промежуточных нулевых определителей*

$$(D_h \neq 0)\ D_{h+1} = D_{h+2} = \ldots = D_{h+p} = 0\ (D_{h+p+1} \neq 0) \qquad (8.180)$$

нулевым определителям приписать знаки по формуле

$$\operatorname{sign} D_{h+j} = (-1)^{\frac{j(j-1)}{2}} \operatorname{sign} D_h. \qquad (8.181)$$

При этом величины P, V, P — V, соответствующие группе (8.180), *получат значения*

	p нечетно	p четно
$P_{h,p} = P(D_h, D_{h+1}, \ldots, D_{h+p+1})$	$\frac{p+1}{2}$	$\frac{p+1+\varepsilon}{2}$
$V_{h,p} = V(D_h, D_{h+1}, \ldots, D_{h+p+1})$	$\frac{p+1}{2}$	$\frac{p+1-\varepsilon}{2}$
$P_{h,p} - V_{h,p}$	0	ε

;

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{p}{2}} \operatorname{sign} \frac{D_{h+p+1}}{D_h}. \qquad (8.182)$$

(Формулы (8.181) и (8.182) применимы и к случаю (8.179), только здесь нужно положить $p = r - h - 1$ и под D_{h+p+1} понимать не $D_r = 0$, а $D^{(r)} \neq 0$).

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $D_r \neq 0$. В этом случае формы

$$S(x, x) = \sum_{i,k=0}^{n-1} s_{i+k} x_i x_k \quad \text{и} \quad S_r(x, x) = \sum_{i,k=0}^{r-1} s_{i+k} x_i x_k$$

имеют не только один и тот же ранг r, но и одну и ту же сигнатуру σ. Действительно, пусть

$$S(x, x) = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i Z_i^2,$$

где Z_i — вещественные линейные формы, а $\varepsilon_i = \pm 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Положим $x_{r+1} = \ldots = x_n = 0$. Тогда формы $S(x, x)$, Z_i перейдут соответственно в $S_r(x, x)$, $\hat{Z}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, причем

$$S_r(x, x) = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i \hat{Z}_i^2,$$

имеет такое же число положительных (отрицательных) независимых квадратов, как и форма $S(x, x)$ (линейные формы $\hat{Z}_1, \hat{Z}_2, \ldots, \hat{Z}_r$ линейно независимы, поскольку квадратичная форма

$$S_r(x, x) = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i \hat{Z}_i^2$$

имеет ранг r $(D_r \neq 0)$).

Таким образом, σ есть сигнатура формы $S_r(x, x)$.

Проварьируем непрерывно параметры $s_0, s_1, \ldots, s_{2r-2}$ так, чтобы при новых значениях параметров $s^*_0, s^*_1, \ldots, s^*_{2r-2}$ (в этом пункте значок * не означает перехода к сопряженной матрице) все члены ряда

$$1, D_1^*, D_2^*, \ldots, D_r^* \; (D_q^* = | s_{i+k}^* |_0^{q-1};\; q = 1; 2, \ldots, r)$$

были отличны от нуля и чтобы в процессе варьирования ни один из отличных от нуля определителей (8.177) не обратился в нуль. (Такую вариацию всегда можно осуществить, поскольку в пространстве параметров $s_0, s_1, \ldots, s_{2r-2}$ уравнение вида $D_i = 0$ определяет некоторую алгебраическую гиперповерхность. Если точка принадлежит нескольким таким гиперповерхностям, то она может быть всегда апроксимована сколь угодно близкими точками, которые лежат вне этих гиперповерхностей).

Так как при варьировании не изменялся ранг формы $S_r(x, x)$, то не изменялась и ее сигнатура. Поэтому

$$\sigma = P(1, D_1^*, \ldots, D_r^*) - V(1, D_1^*, \ldots, D_r^*). \tag{8.183}$$

Если при некотором i $D_i \neq 0$, то

$$\operatorname{sign} D_i^* = \operatorname{sign} D_i.$$

Поэтому весь вопрос сводится к определению изменений знака между теми D_i^*, которым соответствуют $D_i = 0$. Точнее, для каждой группы вида (8.180) требуется определить

$$P(D_h^*, D_{h+1}^*, \ldots, D_{h+p+1}^*) - V(D_h^*, D_{h+1}^*, \ldots, D_{h+p}^*, D_{h+p+1}^*).$$

Для этого положим:

$$t_{ik} = \frac{1}{D_h}\begin{vmatrix} & D_h & & s_{h+k} \\ & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & s_{2h+k-1} \\ s_{h+i} & \ldots & s_{2h+i-1} & s_{2h+i+k} \end{vmatrix} \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, p).$$

Согласно лемме 2 матрица

$$T = \|t_{ik}\|_0^p$$

ганкелева и все элементы ее, стоящие над второй диагональю, равны нулю, т.е. матрица T имеет вид

$$T = \begin{Vmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & t_p \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & * \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ 0 & \cdot & & & & \cdot \\ t_p & * & \ldots & & & * \end{Vmatrix}. \tag{8.184}$$

Обозначим последовательные миноры матрицы T через $\hat{D}_1, \hat{D}_2, \ldots, \hat{D}_{p+1}$:

$$\hat{D}_q = |\, t_{ik} \,|_0^{q-1} \qquad (q = 1, 2, \ldots, p+1).$$

Наряду с матрицей T введем в рассмотрение матрицу

$$T^* = \|\, t_{ik}^* \,\|_0^p,$$

где

$$t_{ik}^* = \frac{1}{D_h^*}\begin{vmatrix} & & s_{h+k}^* \\ & D_h^* & \vdots \\ & & s_{2h+k-1}^* \\ s_{h+i}^* \ldots & s_{2h+i-1}^* & s_{2h+i+k}^* \end{vmatrix} \quad (i, k = 0, 1, \ldots, p),$$

и соответственные определители

$$\hat{D}_q^* = | t_{ik}^* |_0^{q-1} \quad (q = 1, 2, \ldots, p+1).$$

Согласно детерминантному тождеству Сильвестра

$$D_{h+q}^* = D_h^* \hat{D}_q^* \quad (q = 1, 2, \ldots, p+1).$$

Поэтому

$$P(D_h^*, D_{h+1}^*, \ldots, D_{h+p+1}^*) - V(D_h^*, D_{h+1}^*, \ldots, D_{h+p+1}^*) =$$
$$= \hat{P}(1, \hat{D}_1^*, \ldots, \hat{D}_{p+1}^*) - V(1, \hat{D}_1^*, \ldots, \hat{D}_{p+1}^*) = \hat{\sigma}^*, \quad (8.185)$$

где σ* - сигнатура формы

$$T^*(x, x) = \sum_{i, k=0}^{p} t_{ik}^* x_i x_k.$$

Наряду с формой $T^*(x, x)$ рассмотрим формы

$$T(x, x) = \sum_{i, k=0}^{p} t_{i+k} x_i x_k \quad \text{и} \quad T^{**}(x, x) = t_p(x_0 x_p + x_1 x_{p-1} + \ldots + x_p x_0).$$

Матрица T^{**} получается из матрицы T, если в последней заменить нулями все элементы, которые стоят под второй диагональю. Сигнатуры форм $T(x, x)$ и $T^{**}(x, x)$ обозначим соответственно через σ и σ**. Так как формы $T^*(x, x)$ и $T^{**}(x, x)$ получаются из формы $T(x, x)$ таким варьированием коэффициентов, в процессе которого ранг формы не меняется

$$\left(| T^{**} | = | T | = \frac{D_{h+p+1}}{D_h} \neq 0, \ | T^* | = \frac{D_{h+p+1}^*}{D_h^*} \neq 0\right),$$

то и сигнатуры форм $T(x, x)$, $T^*(x, x)$ и $T^{**}(x, -x)$ должны быть одинаковы:

$$\sigma = \sigma^* = \sigma^{**}. \quad (8.186)$$

Но

$$T^{**}(x, x)\begin{cases} 2t_p(x_0x_{2k-1} + \ldots + x_{k-1}x_k) & \text{при} \quad p = 2k-1, \\ t_p[2(x_0x_{2k} + \ldots + x_{k-1}x_{k+1}) + x_k^2] & \text{при} \quad p = 2k. \end{cases}$$

Так как каждое произведение вида $x_\alpha x_\beta$ при $\alpha \neq \beta$ можно заменить разностью квадратов

$$\left(\frac{x_\alpha + x_\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_\alpha - x_\beta}{2}\right)^2$$

и таким образом получить разложение $T^{**}(x, x)$ на независимые вещественные квадраты, то

$$\hat{\sigma}^{**} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad p \text{ нечетном}, \\ \operatorname{sign} t_p & \text{при} \quad p \text{ четном}. \end{cases} \tag{8.187}$$

С другой стороны, из (8.184)

$$\frac{D_{h+p+1}}{D_h} = |T| = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} t_p^{p+1}. \tag{8.188}$$

Из (8.185), (8.186), (8.187)и (8.188) следует:

$$P(D_h^*, D_{h+1}^*, \ldots, D_{h+p+1}^*) - V(D_h^*, D_{h+1}^*, \ldots, D_{h+p+1}^*) = \\ = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad p \text{ нечетном}, \\ \varepsilon & \text{при} \quad p \text{ четном}, \end{cases} \tag{8.189}$$

где

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{p}{2}} \operatorname{sign} \frac{D_{h+p+1}}{D_h}.$$

Так как

$$P(D_{h+1}^*, D_{h+2}^*, \ldots, D_{h+p+1}^*) + V(D_{h+1}^*, D_{h+2}^*, \ldots, D_{h+p+1}^*) = p + 1, \tag{8.190}$$

то из (8.189)и (8.190) вытекает таблица (8.182).

Пусть теперь $D_r = 0$. Тогда при некоторому $h < r$

$$D_h \neq 0, D_{h+1} = \ldots = D_r = 0.$$

В этом случае согласно теореме 24

$$D^{(r)} = S\begin{pmatrix} 1 \ldots h & n-r+h+1 \ldots n \\ 1 \ldots h & n-r+h+1 \ldots n \end{pmatrix} \neq 0.$$

Рассматриваемый случай сводится к предыдущему перенумерацией переменных в квадратичной форме

$$S(x, x) = \sum_{i,k=0}^{n-1} s_{i+k} x_i x_k.$$

Полагаем:

$$\tilde{x}_0 = x_0, \ldots, \tilde{x}_{h-1} = x_{h-1}, \tilde{x}_h = x_{n-r+h}, \ldots, \tilde{x}_{r-1} = x_{n-1},$$
$$\tilde{x}_r = x_h, \ldots, \tilde{x}_{n-1} = x_{n-r+h-1}.$$

(8.191)

При этом

$$S(x, x) = \sum_{i,k=0}^{n-1} \tilde{s}_{i+k} x_i x_k.$$

Исходя из структуры матрицы T и пользуясь полученными из детерминантного тождества Сильвестра соотношениями

$$\hat{D}_j = \frac{D_{h+j}}{D_h}, \quad \hat{\hat{D}}_j = \frac{\tilde{D}_{h+j}}{D_h} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-h),$$

найдем, что ряд 1, $\hat{D}_1$, $\hat{D}_2, \ldots$, $\hat{D}_n$ получается из ряда $1, D_1, D_2, \ldots, D_n$ заменой одного элемента D_r на $D^{(r)}$.

Таким образом, показано, что во всех случаях можно пользоваться таблицей (8.182).

Заметим, что при p ненечетном [p — число нулевых определителей в группе (8.180)] из формулы (8.188) следует:

$$\operatorname{sign} \frac{D_{h+p+1}}{D_h} = (-1)^{\frac{p+1}{2}}.$$

(8.192)

Пользуясь этим равенством, легко проверить, что таблице (8.182) соответствует то приписывание знаков нулевым определителям, которое дается формулой (8.181).

Теорема доказана полностью. (Нетрудно убедиться, что теорема 24, а с ней и теорема 25, сохраняют силу также при h=0, если считать D_0=1).

Примечание. При p = 1 из формулы (8.192) следует: $D_h D_{h+2} < 0$. Поэтому имеет место правило Гундельфингера, т.е. при подсчете $V(1, D_2, \ldots, D_r)$ можно D_{h+1} опустить. При p = 2 из таблицы (8.182) вытекает правило Фробениуса.

Модуль 9
Комплексные матрицы и матрицы с неотрицательными элементами

Микромодуль 23
Комплексные матрицы

Ранее нами были изучены и исследованы вещественные симметрические, кососимметрические и ортогональные матрицы, т.е. вещественные квадратные матрицы, характеризуемые соответственно соотношениями

$$S' = S, \quad K' = -K, \quad O' = O^{-1}$$

(здесь ' означает переход к транспонированной матрице). Было выяснено, что в поле комплексных чисел все эти матрицы имеют линейные элементарные делители, и были установлены нормальные формы для этих матриц, т.е. «простейшие» вещественные симметрические, кососимметрические и ортогональные матрицы, которым вещественно- и ортогонально-подобны произвольные матрицы рассмотренных типов.

В этом разделе мы выполним исследование комплексных симметричных, кососиметричних и ортогональных матриц. Выясним, какие элементарные делители могут иметь эти матрицы, и установим для них нормальные формы. Эти формы имеют значительно более сложную структуру, чем соответствующие нормальные формы в действительном случае. Предварительно в п. 6.17 устанавливаются связи между комплексными ортогональными, унитарными и действительными симметричными, кососиметричними и ортогональными матрицами.

9.1. Определение комплексных ортогональных и унитарных матриц

Начнем с леммы.

Лемма 1. *Если матрица G одновременно является и эрмитовой и ортогональной* ($G' = \overline{G} = G^{-1}$)*, то она представима в виде*

$$G = Ie^{iK}, \tag{9.1}$$

где I — вещественная симметрическая инволютивная матрица, а К — перестановочная с ней вещественная кососимметрическая матрица:

$$I = \overline{I} = I', \quad I^2 = E, \quad K = \overline{K} = -K'. \tag{9.2}$$

2. *Если дополнительно G является положительно определенной эрмитовой матрицей* (т.е. *G* — матрица коэффициентов положительно определенной *эрмитовой* формы), *то в формуле* (9.1) *I = E и*

$$G = e^{iK}. \tag{9.3}$$

Доказательство. 1. Пусть

$$G=S + iT, \tag{9.4}$$

где *S* и *T* — вещественные матрицы. Тогда

$$\overline{G} = S-iT \quad \text{и} \quad G' = S' + iT. \tag{9.5}$$

Поэтому равенство $\overline{G} = G'$ влечет: $S = S'$, $T = — T'$, т.е. *S* — симметрическая, а *T* — кососимметрическая матрица.

Далее, комплексное равенство $G\overline{G} = E$ после подстановки у него выражений для *G* и $\overline{G}$ из (9.4) и (9.5) распадается на два вещественных равенства:

$$S^2 + T^2 = E, ST = TS. \tag{9.6}$$

Второеиз этих равенств показывает, что *S* и *T* коммутируют.

Рассмотрим две теоремы

Теорема А. *Если дано любое множество коммутирующих нормальных линейных операторов в евклидовом пространстве **R**, то все эти операторы имеют общий ортонормированный канонический базис* x_k, y_k, x_l.

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{A}\mathbf{x}_k = \mu_k\mathbf{x}_k - \nu_k\mathbf{y}_k, & \mathbf{B}\mathbf{x}_k = \mu'_k\mathbf{x}_k - \nu'_k\mathbf{y}_k, \ \ldots, \\ \mathbf{A}\mathbf{y}_k = \nu_k\mathbf{x}_k + \mu_k\mathbf{y}_k, & \mathbf{B}\mathbf{y}_k = \nu'_k\mathbf{x}_k + \mu'_k\mathbf{y}_k, \ \ldots, \\ \mathbf{A}\mathbf{x}_l = \mu_l\mathbf{x}_l, & \mathbf{B}\mathbf{x}_l = \mu'_l\mathbf{x}_l, \ \ldots \end{array}\right\} \tag{9.7}$$

Приведем матричное формулирование теоремы А:

Теорема Б. *Любое множество коммутирующих вещественных нормальных матриц A, B, C, ... при помощи одного и того же вещественного ортогонального преобразования O может быть приведена к каноническому виду*

$$\left.\begin{array}{l} A = O\left\{\begin{Vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ -\nu_1 & \mu_1 \end{Vmatrix}, \ldots, \begin{Vmatrix} \mu_q & \nu_q \\ -\nu_q & \mu_q \end{Vmatrix}, \mu_{2q+1}, \ldots, \mu_n\right\} O^{-1}, \\ B = O\left\{\begin{Vmatrix} \mu'_1 & \nu'_1 \\ -\nu'_1 & \mu'_1 \end{Vmatrix}, \ldots, \begin{Vmatrix} \mu'_q & \nu'_q \\ -\nu'_q & \mu'_q \end{Vmatrix}, \mu'_{2q+1}, \ldots, \mu'_n\right\} O^{-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{9.8}$$

Примечание. Если какой-либо из операторов ***A, B, C***, ... (какая-либо из матриц *A, B, C, ...),* например ***A****(A),* является симметричным (симметричной), то в соответствующих формулах (9.7) [соответственно (в 9.8)] все ν равны нулю. В случае косой симметрии все μ равны нулю. В случае, если ***A*** — ортогональный оператор *(A* — ортогональная матрица), то $\mu_k = \cos \varphi_k$, $\nu_k = \sin \varphi_k$, $\mu_l = \pm 1$ $(k = 1, 2, ..., q;$ $l = 2q+1, ..., n)$.

Согласно теореме Б коммутирующие нормальные матрицы S и T можно одним и тем же вещественным ортогональным преобразованием привести к квазидиагональной канонической форме. Поэтому

$$\left.\begin{array}{l} S = O\{s_1, s_1, s_2, s_2, \ldots, s_q, s_q, s_{2q+1}, \ldots, s_n\} O^{-1} \quad (O = \overline{O} = O'^{-1}), \\ T = O\left\{\begin{Vmatrix} 0 & t_1 \\ -t_1 & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 & t_2 \\ -t_2 & 0 \end{Vmatrix}, \ldots, \begin{Vmatrix} 0 & t_q \\ -t_q & 0 \end{Vmatrix}, 0, \ldots, 0\right\} O^{-1} \end{array}\right. \tag{9.9}$$

(числа s_i и t_i вещественные). Отсюда

$$G = S + iT = 0\left\{\begin{Vmatrix} s_1 & it_1 \\ -it_1 & s_1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} s_2 & it_2 \\ -it_2 & s_2 \end{Vmatrix}, \ldots, \begin{Vmatrix} s_q & it_q \\ -it_q & s_q \end{Vmatrix}, s_{2q+1}, \ldots, s_n\right\} O^{-1}. \tag{9.10}$$

С другой стороны, подставляя выражения (9.9) для S и T в первое из равенств (9.6), найдем:

$$s_1^2 - t_1^2 = 1,\ s_2^2 - t_2^2 = 1, \ldots, s_q^2 - t_q^2 = 1,\ s_{2q+1} = \pm 1, \ldots, s_n = \pm 1. \tag{9.11}$$

Теперь нетрудно проверить, что матрица типа

$$\begin{Vmatrix} s & it \\ -it & s \end{Vmatrix}$$

при $s^2 - t^2 = 1$ всегда представима в виде

$$\begin{Vmatrix} s & it \\ -it & s \end{Vmatrix} = \varepsilon e^{i\begin{Vmatrix} 0 & \varphi \\ -\varphi & 0 \end{Vmatrix}},$$

где

$$|s| = \operatorname{ch}\varphi, \quad \varepsilon t = \operatorname{sh}\varphi, \quad \varepsilon = \operatorname{sign} s.$$

Поэтому в силу (9.10) и (9.11) имеем:

$$G = O\left\{\pm e^{i\begin{Vmatrix} 0 & \varphi_1 \\ -\varphi_1 & 0 \end{Vmatrix}}, \pm e^{i\begin{Vmatrix} 0 & \varphi_2 \\ -\varphi_2 & 0 \end{Vmatrix}}, \ldots, \pm e^{i\begin{Vmatrix} 0 & \varphi_q \\ -\varphi_q & 0 \end{Vmatrix}}, \pm 1, \ldots, \pm 1\right\} O^{-1}, \tag{9.12}$$

т.е.

$$G = Ie^{iK},$$

где

$$\left.\begin{aligned} &I = O\{\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1\} O^{-1}, \\ &K = O\left\{\begin{Vmatrix} 0 & \varphi_1 \\ -\varphi_1 & 0 \end{Vmatrix}, \ldots, \begin{Vmatrix} 0 & \varphi_q \\ -\varphi_q & 0 \end{Vmatrix}, 0, \ldots, 0\right\} O^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{9.13}$$

и

$$IK=KI.$$

Из (9.13) вытекают равенства (9.2).

2. Если дополнительно известно, что G — положительно определенная эрмитова матрица, то можно утверждать, что все характеристические числа матрицы G положительны. Но в силу формулы (9.12) этими характеристическими числами являются числа

$$\pm e^{\varphi_1}, \pm e^{-\varphi_1}, \pm e^{\varphi_2}, \pm e^{-\varphi_2}, \ldots, \pm e^{\varphi_q}, \pm e^{-\varphi_q}, \pm 1, \ldots, \pm 1$$

(здесь знаки соответствуют знакам в формуле (9.12)).

Поэтому в формуле (9.12) и в следующей формуле (9.13) всюду, где стоит знак ±, сохраняется знак +. Следовательно,

$$I=O\,\{1,1.....1\}O^{-1} = E,$$

что и требовалось доказать.

Лемма доказана полностью.

С помощью леммы мы докажем следующую теорему:

Теорема 1. *Комплексная ортогональная матрица O всегда представима в виде*

$$O = Re^{iK}, \tag{9.14}$$

где R — вещественная ортогональная, а K — вещественная кососиметрична матрица

$$R = \overline{R} = R'^{-1}, \qquad K= \overline{K} = -K'. \tag{9.15}$$

Доказательство. Предположим, что формула (9.14) имеет место. Тогда

$$B^* = \bar{O}' = e^{iK}R'$$

и

$$O^*O = e^{iK}R'Re^{iK} = e^{2iK}.$$

Теперь в силу предыдущей леммы искомую вещественную кососиметричную матрицу *К* можно определить из равенства

$$O^*O = e^{2iK}, \qquad (9.16)$$

поскольку матрица O^*O — положительно определенная эрмитова и ортогональная матрица. (Комплексная ортогональная матрица O является неособенной, так как из равенства $OO' = E$ следует, что $|O| = \pm 1$). После того как матрица *К* определена из (9.14), мы находим *R* из (9.10):

$$R = Oe^{-iK}. \qquad (9.17)$$

Тогда

$$R^*R = e^{-iK}O^*Oe^{iK} = E,$$

т.е. *R* — унитарная матрица. С другой стороны, из (9.17) следует, что матрица *R* как произведение двух ортогональных матриц сама ортогональна: $R'R = E$. Таким образом, *R* является одновременно унитарной и ортогональной и, следовательно, вещественной ортогональной. Формулу (9.17) можно записать в виде (9.14).

Теорема доказана.

Установим теперь следующую лемму:

Лемма 2. *Если матрица D является одновременно симметрической и унитарной* ($D = D' = \bar{D}^{-1}$), *то она всегда представима в виде*

$$D = e^{iS}, \qquad (9.18)$$

где S — вещественная симметрическая матрица ($S = \bar{S} = S'$).

Доказательство. Положим

$$D = U + iV \quad (U = \bar{U},\ V = \bar{V}). \qquad (9.19)$$

Тогда

$$\bar{D} = U - iV, \quad D' = U' + iV.$$

Комплексное равенство $D = D'$ распадается на два вещественных:

$$U = U', \quad V = V'.$$

Таким образом, *U* и *V* — вещественные симметрические матрицы.

Равенство $D\bar{D} = E$ влечет:

$$U^2 + V^2 = E, \quad UV = VU. \qquad (9.20)$$

Согласно второму из этих равенств матрицы *U* и *V* коммутируют. Применяя к ним теорему Б (вместе с примечанием), получим:

$$U = O\{s_1, s_2, \dots, s_n\}O^{-1}, \quad V = O\{t_1, t_2, \dots, t_n\}O^{-1}. \qquad (9.21)$$

Здесь $O = \overline{O} = O^{r-1}$, а s_k и t_k $(k = 1, 2, ..., n)$ — вещественные числа. Теперь первое из равенств (9.20) дает:

$$s^2_k + t^2_k = 1 \quad (k=1,2,...,n).$$

Поэтому существуют такие вещественные числа φ_k $(k = 1,2, ..., n)$, что

$$s_k = \cos \varphi_k, \quad t_k = \sin \varphi_k \ (k = 1, 2, ..., n).$$

Подставляя эти выражения для s_k и t_k в (9.21) и пользуясь (9.19), найдем:

$$D = O\{e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \ldots, e^{i\varphi_n}\} O^{-1} = e^{iS},$$

где

$$S=O\{\varphi_1, \varphi_2,..., \varphi_n\}O^{-1} \qquad (9.22)$$

Из (9.22) следует: $S = \overline{S} = S'$.

Лемма доказана.

Пользуясь этой леммой, доведем следующую теорему:

Теорема 2. *Унитарная матрица U всегда представима в виде*

$$U = Re^{iS}, \qquad (9.23)$$

где R — вещественная ортогональная, а S — вещественная симметрическая матрица:

$$R = \overline{R} = R^{r-1}, \quad S = \overline{S} = S'. \qquad (9.24)$$

Доказательство. Из формулы (9.23) следует:

$$U' = e^{iS}R'. \qquad (9.25)$$

Перемножая почленно (9.23) и (9.25), получим в силу (9.24):

$$U'\,U = e^{iS}R'Re^{iS} = e^{2iS}.$$

Согласно лемме 2 вещественную симметрическую матрицу S можно определить из уравнения

$$U'\,U = e^{2is}, \qquad (9.26)$$

поскольку матрица U' является симметрической унитарной. После того как матрица S определена, мы определим матрицу R равенством

$$R = Ue^{-iS}. \qquad (9.27)$$

Тогда

$$R' = e^{-iS}\,U', \qquad (9.28)$$

и потому из (9.26), (9.27) и (9.28) вытекает

$$R'\,R = e^{-iS}\,U'\,Ue^{-iS} = E,$$

т.е. R — ортогональная матрица.

С другой стороны, согласно (9.27) R есть произведение двух унитарных матриц и, следовательно, R — унитарная матрица. Поскольку R одновременно является ортогональной и унитарной, R — вещественная матрица. Формулу (9.27) можно переписать в виде (9.23).

Теорема доказана.

9.2. Полярное разложение комплексной матрицы

Докажем следующую теорему:

Теорема 3. *Если* $A=\| a_{ik} \|^n_1$ *— неособенная матрица с комплексными элементами, то*

$$A = SO \tag{9.29}$$

и

$$A = S_1O_1 \tag{9.30}$$

где S *и* S_1 *— комплексные симметрические, а* O *и* O_1 *— комплексные ортогональные матрицы. При этом*

$$S = \sqrt{AA'} = f(AA'), \qquad S_1 = \sqrt{A'A} = f_1'(A'A),$$

где $f(\lambda)$, $f_1(\lambda)$ *— некоторые многочлены относительно* λ.

Как в разложении (9.29), *так и в разложении* (9.222) *сомножители* S *и* O *(соответственно* O_1 *и* S_1) *перестановочны между собой в том и только в том случае, когда матрицы* A *і* A' *перестановочны между собой.*

Доказательство. Достаточно установить разложение (9.29), так как, применив это разложение к матрице A' и определив из полученной формулы матрицу A, мы придем к разложению (9.30).

Если имеет место формула (6.29), то

$$A = SO, \quad A' = O^{-1}S$$

и потому

$$AA' = S^2. \tag{9.31}$$

Обратно, поскольку AA' — неособенная матрица ($|AA'| = |A|^2 \neq 0$), то функция $\sqrt{\lambda}$ определенная на спектре этой матрицы (мы берем однозначную ветвь функции $\sqrt{\lambda}$ в односвязной области, которая содержит все характеристические числа матрицы AA' и не содержит число 0), и, следовательно, существует такой интерполяционный многочлен $f(\lambda)$, что

$$\sqrt{AA'} = f(AA'). \tag{9.32}$$

Симметрическую матрицу (9.32) обозначим через

$$S = \sqrt{AA'}.$$

Тогда имеет место (9.31) и, следовательно, $|S| \neq 0$. Определяя матрицу O з равенства (9.29)

$$O = S^{-1}A,$$

легко проверяем, что эта матрица является ортогональной. Таким образом разложение (9.29) установлено.

Если в разложении (9.29) множители S и O перестановочны между собой, то перестановочны и матрицы

$$A = SO \quad \text{и} \quad A' = O^{-1} S,$$

так как

$$AA' = S^2, \quad A'A = O^{-1}S^2O.$$

Обратно, если $AA' = A'A$, то

$$S^2 = O^{-1}S^2O,$$

т.е. матрица O перестановочна с $S^2=AA'$. Но тогда матрица O перестановочна и с матрицей $S =f(AA')$.

Таким образом теорема доказана полностью.

Пользуясь полярным разложением, докажем теорему:

Теорема 4. *Если две комплексные симметрические, либо кососимметрические, либо ортогональные матрицы подобны*

$$B= T^{-1}AT, \tag{9.33}$$

то эти матрицы ортогонально-подобны, т.е. существует такая ортогональная матрица О, что

$$B = O^{-1}AO. \tag{9.34}$$

Доказательство. Из условия теоремы следует существование такого многочлена q (λ), что

$$A' = q\ (A), \qquad B' = q(B). \tag{9.35}$$

Этот многочлен q(λ) в случае симметрических матриц тождественно равен λ, а в случае кососимметрических матриц тождественно равен — λ. Если же A и B — ортогональные матрицы, то q (λ) — интерполяционный многочлен для 1/λ на общем спектре матриц A и B.

Пользуясь равенствами (9.35), мы проведем доказательство данной теоремы. Из (9.33) следует:

$$q(B)=T^{-1}q(A)T$$

или в силу (9.35)

$$B' = T^{-1}A'T.$$

Отсюда

$$B = T'AT'^{-1}$$

Сопоставляя это равенство с (9.33), легко находим:

$$TT'A=ATT'. \tag{9.36}$$

Применим к неособенной матрице T полярное разложение

$$T=SO \quad (S= S' =f(TT'), \quad O'=O^{-1}).$$

Поскольку согласно (9.36) матрица TT' перестановочна с A, то и матрица $S=f(TT')$ также перестановочна с A. Поэтому, подставляя в (9.335) вместо T произведение SO, будем иметь:

$$B = O^{-1}S^{-1}ASO = O^{-1}AO.$$

Теорема доказана.

9.3. Нормальная форма комплексной симметрической матрицы

Докажем следующую теорему.

Теорема 5. *Существует комплексная симметрическая матрица с любыми наперед заданными элементарными делителями.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу H n-го порядка, у которой элементы первой наддиагонали равны единице, а все остальные элементы равны нулю. Докажем, что существует симметрическая матрица S, подобная матрице H:

$$S = THT^{-1}. \qquad (9.37)$$

Преобразующую матрицу T будем искать, исходя из условия:

$$S = THT^{-1} = S' = T'^{-1}H'\,T'.$$

Это условие можно переписать так:

$$VH = H'V, \qquad (9.38)$$

где V — симметрическая матрица, связанная с T равенством

$$T'T = -2iV \qquad (9.39)$$

(Для упрощения дальнейших формул нам удобно здесь ввести множитель — $2i$).

Вспоминая свойства матриц H и $F = H'$, мы найдем, что любое решение V матричного уравнения (9.38) имеет такой вид:

$$V = \begin{Vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ & & \cdot & \\ & \cdot & a_0 & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{Vmatrix}, \qquad (9.40)$$

где $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ — произвольные комплексные числа.

Поскольку нам достаточно отыскать одну преобразующую матрицу T, то мы в этой формуле положим $a_0 = 1$, $a_1 = ... = a_{n-1} = 0$ и определим матрицу V равенством (матрица V является одновременно симметрической и ортогональной)

$$V = \begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{9.41}$$

Кроме того, преобразующую матрицу T будем искать в виде симметрической матрицы:

$$T = T'. \tag{9.42}$$

Тогда уравнение (9.39) для T перепишется так:

$$T^2 = -2iV. \tag{9.43}$$

Теперь неизвестную матрицу T будем искать в виде многточлена от V. Поскольку $V^2=E$, в качестве такого многочлена можно взять многочлен первой степени: $T = \alpha E + \beta V$. Из уравнения (9.43), учитывая равенство $V^2 = E$, найдем: $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, $2\alpha\beta = -2i$. Этим соотношениям мы удовлетворим, полагая $\alpha = 1$, $\beta = -i$. Тогда

$$T=E-iV. \tag{9.44}$$

T — неособенная симметрическая матрица (неособенность матрицы T следует, в частности, из (9.43), поскольку V — неособенная матрица).
В то же время из (9.43):

$$T^{-1} = \frac{1}{2} iV^{-1}T = \frac{1}{2} iVT,$$

т.е.

$$T^{-1} = \frac{1}{2}(E + iV). \tag{9.45}$$

Таким образом, симметрическая форма S матрицы H определится равенством

$$S = THT^{-1} = \frac{1}{2}(E - iV)\, H\, (E + iV), \quad V = \begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{9.46}$$

Поскольку матрица S удовлетворяет уравнению (9.38) и $V^2 = E$, то равенство (9.46) может быть переписано еще так:

$$2S = (H+H') + i(HV - VH) = H + H' + i(H - H')V =$$

$$= \left\|\begin{matrix} 0 & 1 & \dots & & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & 1 & 0 \end{matrix}\right\| + i \left\|\begin{matrix} 0 & \dots & & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & -1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & -1 & & \dots & 0 \end{matrix}\right\|. \tag{9.47}$$

Формула (9.47) определяет симметрическую форму S матрицы H.

В дальнейшем, если n — порядок матрицы H, $H=H^{(n)}$, то соответствующие матрицы T, V и S будем еще обозначать и так: $T^{(n)}$, $V^{(n)}$ и $S^{(n)}$.

Пусть даны произвольные элементарные делители:

$$(\lambda - \lambda_1)^{p_1}, \qquad (\lambda - \lambda_2)^{p_2}, \ \dots, (\lambda - \lambda_u)^{p_u}. \tag{9.48}$$

Составим соответствующую жорданову матрицу

$$J = \{\lambda_1 E^{(p_1)} + H^{(p_1)}, \qquad \lambda_2 E^{(p_2)} + H^{(p_2)}, \dots, \lambda_u E^{(p_u)} + H^{(p_u)}\}.$$

Для каждой матрицы $H^{(p_j)}$ введем соответствующую симметрическую форму $S^{(p_j)}$. Из

$$S^{(p_j)} = T^{(p_j)} H^{(p_j)} [T^{(p_j)}]^{-1} \qquad (j = 1, 2, \dots, u)$$

следует:

$$\lambda_j E^{(p_j)} + S^{(p_j)} = T^{(p_j)} [\lambda_j E^{(p_j)} + H^{(p_j)}] [T^{(p_j)}]^{-1}.$$

Поэтому, полагая

$$\tilde{S} = \{\lambda_1 E^{(p_1)} + S^{(p_1)}, \ \lambda_2 E^{(p_2)} + S^{(p_2)}, \dots, \lambda_u E^{(p_u)} + S^{(p_u)}\}, \tag{9.49}$$

$$T = \{T^{(p_1)}, T^{(p_2)}, \dots, T^{(p_u)}\}, \tag{9.50}$$

будем иметь:

$$S = TJT^{-1}.$$

$\tilde{S}$ — симметрическая форма жордановой матрицы J. Матрица $\tilde{S}$ подобна матрице J и имеет те же элементарные делители (9.48), что и матрица J. Теорема доказана.

Следствие 1. *Произвольная квадратная комплексная матрица* $A = \| a_{ik} \|^n_i$ *подобна симметрической матрице.*

Привлекая теорему 4, получим:

Следствие 2. *Произвольная комплексная симметрическая матрица $S = \| s_{ik} \|^n_i$ ортогонально-подабна симметрической матрице, имеющей нормальную форму $\tilde{S}$, т.е. существует такая ортогональная матрица O, что*

$$S = O\tilde{S}O^{-1} \qquad (9.51)$$

Нормальная форма комплексной симметричной матрицы имеет квазідіагональний вид

$$\tilde{S} = \{\lambda_1 E^{(p_1)} + S^{(p_1)}, \lambda_2 E^{(p_2)} + S^{(p_2)}, \ldots, \lambda_u E^{(p_u)} + S^{(p_u)}\}, \qquad (9.52)$$

где клетки $S^{(p)}$ определяются так (см. (9.46), (9.47)):

$$2S^{(p)} = [E^{(p)} - iV^{(p)}]\, H^{(p)}\, [E^{(p)} + iV^{(p)}] =$$

$$= [H^{(p)} + H^{(p)\prime} + i\,(H^{(p)} - H^{(p)\prime})\, V^{(p)}] =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0 & 1 & & \ldots & & 0 \\ 1 & & \ddots & & & \\ & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \\ & & & \ddots & & 1 \\ 0 & & \ldots & & 1 & 0 \end{Vmatrix} + i \begin{Vmatrix} 0 & & \ldots & & 1 & 0 \\ & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & -1 \\ \vdots & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \vdots \\ 1 & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \\ 0 & -1 & & \ldots & & 0 \end{Vmatrix}.$$

(9.47)

9.4. Нормальная форма комплексной кососимметрической матрицы

Выясним, какие ограничения на элементарные делители накладывает косая симметрия матрицы. При этом мы будем опираться на следующую теорему:

Теорема 6. *Кососимметрическая матрица всегда имеет четный ранг.*

Доказательство. Пусть кососимметрическая матрица *K* имеет ранг *r*. Тогда среди строк матрицы *K* имеется *r* линейно независимых с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_r$; все остальные строки являются линейными комбинациями этих строк. Поскольку столбцы матрицы *K* получаются из соответствующих строк, если элементы последних помножить на —1, то и любой столбец матрицы *K* есть линейная комбинация столбцов с номерами i_1, i_2, ..., i_r. Поэтому произвольный минор r-го порядка матрицы K может быть представлен в виде

$$\alpha K\begin{pmatrix} i_1\, i_2\, \ldots\, i_r \\ i_1\, i_2\, \ldots\, i_r \end{pmatrix},$$

где α - число.

Отсюда вытекает, что

$$K\begin{pmatrix} i_1\, i_2\, \ldots\, i_r \\ i_1\, i_2\, \ldots\, i_r \end{pmatrix} \neq 0.$$

Но кососиметрический определитель нечеткого порядка всегда равен нулю. Следовательно, r — четное число.

Теорема доказана.

Теорема 7.1° *Если* λ_0 — *характеристическое число кососимметрической матрицы* K *и ему соответствуют элементарные делители*

$$(\lambda-\lambda_0)^{f_1},\quad (\lambda-\lambda_0)^{f_2}, \ldots, (\lambda-\lambda_0)^{f_t},$$

то — λ_0 *также является характеристическим числом матрицы* K *и этому числу соответствуют элементарные делители матрицы* K *в том же числе и тех же степеней*

$$(\lambda+\lambda_0)^{f_1},\quad (\lambda+\lambda_0)^{f_2}, \ldots, (\lambda+\lambda_0)^{f_t}.$$

2° *Если число нуль является характеристическим числом кососимметрической матрицы* K (т.е. если $|K| = 0$. При n нечетном всегда $|K| = 0$)*, то в системе элементарных делителей матрицы* K *все элементарные делители четной степени, которые соответствуют характеристическому числу нуль, повторяются четное число раз.*

Доказательство. 1° Транспонированная матрица K' имеет те же элементарные делители, что и матрица K. Но $K' = -K$, а элементарные делители матрицы — K получаются из элементарных делителей матрицы K, если в последних все характеристические числа λ_1, λ_2, ... заменить на — λ_1, —λ_2, ... Отсюда следует первая часть нашей теоремы.

2° Пусть характеристическому числу нуль матрицы K отвечает δ_1 элементарных делителей вида λ, δ_2 — вида λ^2 и т.д. Вообще мы через δ_p обозначим число элементарных делителей вида λ^p (p = 1, 2, ...). Мы докажем, что δ_2, δ_4, ... - четные числа.

Дефект d матрицы K равен числу линейно независимых собственных векторов, соответствующих характеристическому числу нуль или, что то же самое, числу элементарных делителей вида λ, λ^2, λ^3, ... Поэтому

$$d = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + ... \qquad (9.54)$$

Поскольку согласно теореме 6 ранг матрицы K — четное число, а $d= n-r$, то число d имеет ту же четность, чио и число n. Такое же утверждение можно сделать относительно дефектов d_3, d_5, ... матриц K^3, K^5, ..., поскольку нечетные степени кососимметрической матрицы снова являются кососимметрическими матрицами. Поэтому все числа $d_1 = d$, d_3, d_5, ... имеют одну и ту же четность.

С другой стороны, при возведении матрицы K в степень m каждый элементарный делитель λ^p этой матрицы при $p < m$ расщепляется на p элементарных делителей (первой степени), а при $p \geq m$ — на m элементарных делителей. Поэтому число элементарных делителей матриц K, K^3, ..., являющихся степенями λ, определится по формулам

$$\begin{aligned} d_3 &= \delta_1 + 2\delta_2 + 3(\delta_3 + \delta_4 + \ldots), \\ d_5 &= \delta_1 + 2\delta_2 + 3\delta_3 + 4\delta_4 + 5(\delta_5 + \delta_6 + \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (9.55)$$

Сопоставляя (9.54) с (9.55) и помня, что все числа $d_1 = d$, d_3, d_5, ... имеют одну и ту же четность, легко заключаем, что δ_2, δ_4, ... - четные числа.

Теорема доказана полностью.

Теорема 8. *Существует кососимметрическая матрица с любыми наперед заданными элементарными делителями, которые удовлетворяют ограничениям* 1°, 2° *предыдущей теоремы.*

Доказательство. Найдем сначала кососимметрическую форму для квазидиагональной матрицы порядка $2p$:

$$J_{\lambda_0}^{(pp)} = \{\lambda_0 E + H, -\lambda_0 E - H\}, \qquad (9.56)$$

которая имеет два элементарных делителя $(\lambda - \lambda_0)^p$ и $(\lambda + \lambda_0)^p$; здесь $E = E^{(p)}$, $H = H^{(p)}$.

Будем искать такую преобразующую матрицу T, чтобы матрица

$$TJ_{\lambda_0}^{(pp)}T^{-1}$$

была кососимметрической, т.е. чтобы имело место равенство

$$TJ_{\lambda_0}^{(pp)}T^{-1} + T'^{-1}[J_{\lambda_0}^{(pp)}]'\,T' = 0$$

или

$$WJ_{\lambda_0}^{(pp)} + [J_{\lambda_0}^{(pp)}]'W = 0, \qquad (9.57)$$

где W —симметрическая матрица, которая связана с матрицей T равенством

$$T'T = -2iW. \tag{9.58}$$

Разобьем матрицу W на четыре квадратных блока, каждый порядка p:

$$W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда (9.57) можно переписать так:

$$\begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_0 E + H & 0 \\ 0 & -\lambda_0 E - H \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} \lambda_0 E + H' & 0 \\ 0 & -\lambda_0 E - H' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} = 0. \tag{9.59}$$

Выполняя указанные действия над блочными матрицами в левой части матричного уравнения (9.59), мы заменим это уравнение системой четырех матричных уравнений:

$$\left.\begin{array}{ll} 1)\ H'W_{11} + W_{11}(2\lambda_0 E + H) = 0, & 2)\ H'W_{12} - W_{12}H = 0, \\ 3)\ H'W_{21} - W_{21}H = 0, & 4)\ H'W_{22} + W_{22}(2\lambda_0 E + H) = 0. \end{array}\right\} \tag{9.60}$$

Уравнение $AX — XB = 0$, где A и B — квадратные матрицы без общих характеристических чисел, имеет только нулевое решение X=0. Поэтому первое и четвертое уравнение (9.60) дают: $W_{11}=W_{22}=0$ (При $\lambda_0\neq 0$ уравнение 1) и 4), кроме нулевых, других решений не имеют. При $\lambda_0=0$ существуют и другие решения, но мы выбираем нулевые решения). Что же касается второго из этих уравнений, то, как мы видели при доказательстве теоремы 5, этому уравнению можно удовлетворить, полагая

$$W_{12} = V = \begin{Vmatrix} 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ 0 & . & . & . & 1 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{9.61}$$

поскольку

$$VH - H'V = 0.$$

Из симметрии матрицы W следует, что

$$W_{21} = W'_{12} = V.$$

Тогда автоматически удовлетворяется и уравнение 3).

Таким образом,

$$W = \begin{pmatrix} 0 & V \\ V & 0 \end{pmatrix} = V^{(2p)}. \tag{9.62}$$

Но тогда, как уже было выяснено, уравнение (9.58) удовлетворится, если положить:

$$T = E^{(2p)} - iV^{(2p)}. \tag{9.63}$$

При этом

$$T^{-1} = \frac{1}{2}(E^{(2p)} + iV^{(2p)}). \tag{9.64}$$

Следовательно, искомая кососимметрическая матрица находится по формуле

$$K_{\lambda_0}^{(pp)} = \frac{1}{2}[E^{(2p)} - iV^{(2p)}]\, J_{\lambda_0}^{(pp)}\, [E^{(2p)} + iV^{(2p)}] = \\ = \frac{1}{2}\left[J_{\lambda_0}^{(pp)} - J_{\lambda_0}^{(pp)\prime} + i(J_{\lambda_0}^{(pp)}V^{(2p)} - V^{(2p)}J_{\lambda_0}^{(pp)})\right] \tag{9.65}$$

(Здесь мы используем равенства (9.57), (9.62) и равенство $[V^{(2p)}]^2=E^{(2p)}$. Из этих уравнений следует

$$V^{(2p)}J_{\lambda_0}^{(pp)} = -J_{\lambda_0}^{(pp)\prime}V^{(2p)} \quad \text{и} \quad V^{(2p)}J_{\lambda_0}^{(pp)}V^{(2p)} = -J_{\lambda_0}^{(pp)\prime}.$$
)

Подставляя вместо $J_{\lambda_0}^{(pp)}$ и $V^{(2p)}$ соответствующие блочные матрицы из (9.56) и (9.62), найдем:

$$2K_{\lambda_0}^{(pp)} = \begin{pmatrix} H - H' & 0 \\ 0 & H' - H \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} H + H' + 2\lambda_0 E & 0 \\ 0 & -H - H' - 2\lambda_0 E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & V \\ V & 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} H - H' & i(2\lambda_0 V + HV + VH) \\ -i(2\lambda_0 V + HV + VH) & H' - H \end{pmatrix}, \tag{9.66}$$

т.е.

$$K_{\lambda_0}^{(pp)} = \frac{1}{2}\left\|\begin{array}{cccccc:cccccc}
0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & i & 2\lambda_0 \\
-1 & 0 & \cdot & & & & & & & \cdot & 2\lambda_0 & i \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & & & \cdot & \cdot & 1 & i & \cdot & \cdot & & & \cdot \\
0 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 0 & 2\lambda_0 & i & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
\hdashline
0 & \cdot & \cdot & -i & & -2\lambda_0 & 0 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
& & \cdot & -2\lambda_0 & & -i & 1 & 0 & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & -1 \\
-i & \cdot & \cdot & & & & & & & \cdot & \cdot & \\
-2\lambda_0 & -i & & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0
\end{array}\right\| \tag{9.67}$$

Построим теперь кососимметрическую матрицу q-го порядка $K^{(q)}$, имеющую один элементарный делитель λ^q, где q — нечетное число. Очевидно, что искомая кососимметрическая матрица будет подобна матрице

$$J^{(q)} = \left\|\begin{array}{cccccc}
0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & 0 & 1 & & & \cdot \\
\cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & & & & \cdot & \cdot \\
\cdot & & & \cdot & -1 & 0 \\
\cdot & & & & 0 & -1 \\
0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0
\end{array}\right\|. \tag{9.68}$$

В этой матрице все элементы вне первой наддиагонали равны нулю, а вдоль первой наддиагонали сначала идут $\frac{q-1}{2}$ единиц, а потом $\frac{q-1}{2}$ элементов, равных - 1. Полагая

$$K^{(q)} = TJ^{(q)}T^{-1}, \qquad (9.69)$$

из условия косой симметрии найдем:

$$W_1 J^{(q)} + J^{(q)\prime} W_1 = 0, \qquad (9.70)$$

где

$$T'T = -2iW_1 \qquad (9.71)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что матрица

$$W_1 = V^{(q)} = \begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ . & \dots & . & . \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

удовлетворяет уравнению (9.70). Принимая это значение для W_1, мы с (9.71), как и ранее, находим

$$T = E^{(q)} - iV^{(q)}, \qquad T^{-1} = \frac{1}{2}[E^{(q)} + iV^{(q)}], \qquad (9.72)$$

$$2K^{(q)} = [E^{(q)} - iV^{(q)}]J^{(q)}[E^{(q)} + iV^{(q)}] = J^{(q)} - J^{(q)\prime} + i(J^{(q)} + J^{(q)\prime})V^{(q)}. \qquad (9.73)$$

Произведя соответствующие вычисления, найдем:

$$2K^{(q)} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & . & . & . & . & . & 0 \\ -1 & 0 & \cdot & & & & & . \\ . & & . & . & . & & & . \\ . & & & . & . & . & & . \\ . & & & & . & . & . & . \\ . & & & & & \cdot & \cdot & -1 \\ . & & & & & & \cdot & \cdot \\ 0 & & & & & & 1 & 0 \end{Vmatrix} + i \begin{Vmatrix} 0 & . & . & . & . & . & 1 & 0 \\ . & & & & & . & . & \\ . & & & & . & . & & 1 \\ . & & & . & . & . & . & . \\ . & & . & . & . & . & & . \\ . & . & . & . & & & & . \\ -1 & . & . & & & & & . \\ 0 & -1 & & & . & . & . & 0 \end{Vmatrix}. \qquad (9.74)$$

Пусть даны произвольные элементарные делители, которые удовлетворяют условиям теоремы 7:

$$\left.\begin{array}{l} (\lambda - \lambda_j)^{p_j}, \quad (\lambda + \lambda_j)^{p_j} \quad (j = 1, 2, \dots, u), \\ \lambda^{q_k} \quad (k = 1, 2, \dots, v; \quad q_1, q_2, \dots, q_v \text{ — нечетные числа}). \end{array}\right\} \qquad (9.75)$$

(Среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u$ могут быть и равные нулю. Кроме того, одно из чисел u и v может равняться нулю, т.е. в частном случае могут быть только элементарные делители одного типа).

Тогда квазидиагональная кососимметрическая матрица

$$\tilde{K}=\left\{K_{\lambda_1}^{(p_1p_1)},\ \ldots,\ K_{\lambda_u}^{(p_up_u)};\ K^{(q_1)},\ \ldots,\ K^{(q_v)}\right\} \tag{9.76}$$

имеет элементарные делители (9.75).

Теорема доказана.

Следствие. *Произвольная комплексная кососимметрическая матрица К ортогонально-подобна кососимметрической матрице, которая имеет нормальную форму К, определенную формулами* (9.76), (9.67), (9.74), *т.е. существует такая (комплексная) ортогональная матрица О, что*

$$K=O\tilde{K}O^{-1}. \tag{9.77}$$

Замечание. Если *К* — вещественная кососимметрическая матрица, то она имеет линейные элементарные делители

$$\lambda-i\varphi_1,\ \ \lambda+i\varphi_1,\ \ \ldots,\ \ \lambda-i\varphi_u,\ \ \lambda+i\varphi_u,\ \ \underbrace{\lambda,\ \ldots,\ \lambda}_{v\ \text{раз}}$$

(φ_j – вещественные числа).

В этом случае, полагая в (9.76) все p_j = 1 и все q_k = 1, получим нормальную форму вещественной кососимметрической матрицы

$$\tilde{K}=\left\{\begin{Vmatrix}0 & \varphi_1\\ -\varphi_1 & 0\end{Vmatrix},\ \ldots,\ \begin{Vmatrix}0 & \varphi_u\\ -\varphi_u & 0\end{Vmatrix},\ 0,\ \ldots,0\right\}.$$

9.5. Нормальная форма комплексной ортогональной матрицы

Начнем с выяснение, какие ограничения на элементарные делители накладывает ортогональность матрицы.

Теорема 9.1. *Если* λ_0 ($\lambda_0^2\neq 1$) — *характеристическое число ортогональной матрицы О и этому характеристическому числу соответствуют элементарные делители*

$$(\lambda-\lambda_0)^{f_1},\ (\lambda-\lambda_0)^{f_2},\ \ldots,\ (\lambda-\lambda_0)^{f_t},$$

то $\frac{1}{\lambda_0}$ *- также является характеристическим числом матрицы О и этому характеристическому числу соответствуют такие же элементарные делители, как и числу* λ_0:

$$(\lambda-\lambda_0^{-1})^{f_1},\ \ (\lambda-\lambda_0^{-1})^{f_2},\ \ldots,\ (\lambda-\lambda_0^{-1})^{f_t}.$$

2. *Если* $\lambda_0=\pm1$ *является характеристическим числом ортогональной матрицы О, то элементарные делители четной степени, которые*

отвечают этому характеристическому числу λ_0, *повторяются четное число раз.*

Доказательство. 1. Для любой неособенной матрицы O при переходе от O к O^{-1} каждый элементарный делитель $(\lambda - \lambda_0)^f$ заменяется элементарным делителем $(\lambda - \lambda_0^{-1})^f$. (Полагая

$f(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$, имеем

$$f'(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2} \neq 0.$$

Отсюда следует, что при переходе от матрицы O к матрице O^{-1} элементарные делителя не расщепляются). С другой стороны, матрицы O и O' всегда имеют одни и те же элементарные делители. Поэтому из условия ортогональности $O'=O^{-1}$ сразу следует первая часть теоремы.

2. Допустим, что число 1 является характеристическим числом матрицы O, а число —1 не является таким ($|E - O| = 0$, $|E + O| \neq 0$). Тогда воспользуемся формулами Кэли, которые сохраняют свою силу и для комплексных матриц. Определим матрицу K равенством

$$K = (E - O)(E + O)^{-1}. \tag{9.78}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что $K' = -K$, т.е. что K — кососимметрическая матрица. Решая уравнение (9.78) относительно O, находим:

$$B = (E - K)(E + K)^{-1}.$$

(Заметим, что из (9.78) следует: $E+K= 2(E + O)^{-1}$ и, следовательно,

$$|E+K|= 2^n|E + O|^{-1} \neq 0).$$

Полагая

$$f(\lambda) = \frac{1-\lambda}{1+\lambda},$$

имеем

$$f'(\lambda) = -\frac{2}{(1+\lambda)^2} \neq 0.$$

Следовательно, при переходе от матрицы K к матрице $O=f(K)$ элементарные делители не расщепляются. Поэтому в системе элементарных делителей матрицы O элементарные делители вида $(\lambda - 1)^{2p}$ повторяются четное число раз, поскольку это имеет место для элементарных делителей вида λ^{2p} матрицы K (см. теорему 7).

Случай, когда ортогональная матрица O имеет характеристическое число — 1, но не имеет характеристического числа +1, сразу сводится к разобранному случаю путем рассмотрения ортогональной матрицы — O.

Переходим к наиболее сложному случаю, когда матрица O одновременно имеет характеристическое число +1 и характеристическое число — 1. Обозначим через $\psi(\lambda)$ минимальный многочлен матрицы O. Используя доказанную первую часть теоремы, мы сможем записать $\psi(\lambda)$ в виде

$$\psi(\lambda) = (\lambda - 1)^{m_1} (\lambda + 1)^{m_2} \prod_{j=1}^{u} (\lambda - \lambda_j)^{p_j} (\lambda - \lambda_j^{-1})^{p_j} \qquad (\lambda_j^2 \neq 1; \; j = 1, 2, \ldots, u).$$

Рассмотрим многочлен $g(\lambda)$ степени $< m$ [m — степень $\psi(\lambda)$], у которого $g(1) = 1$, а все остальные m — 1 значений на спектре матрицы O равны нулю, и положим:

$$P = g(O). \qquad (9.79)$$

(Из основной формулы (3.86)

$$g(A) = \sum_{k=1}^{s} [g(\lambda_k) Z_{k1} + g'(\lambda_k) Z_{k2} + \ldots]$$

вытекает, что $P=Z_{11}$).

Заметим, что функции $[g(\lambda)]^2$ и $g\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ принимают те же значения на спектре матрицы O, что и функция $g(\lambda)$. Поэтому

$$P^2 = P, \quad P' = g(O') = g(O^{-1}) = P, \qquad (9.80)$$

т.е. P — симметрическая проекционная матрица.

Определим многочлен $h(\lambda)$ и матрицу Q равенствами

$$h(\lambda) = (\lambda - 1)g(\lambda), \qquad (9.81)$$

$$Q = h(OБ) = (OБ - E) P. \qquad (9.82)$$

Поскольку степень

$$[h(\lambda)]^{m_1}$$

обращается в нуль на спектре матрицы O, эта степень делится на $\psi(\lambda)$ без остатка. Отсюда следует:

$$Q^{m_1} = 0,$$

т.е. Q — нильпотентная матрица с индексом нильпотентности m_1.

Из (9.82) находим:

$$Q' = (O'-E)P. \qquad (9.83)$$

(Все матрицы, которые фигурируют здесь, P, Q, O', $O'=O^{-1}$ перестановочны между собой и с O, поскольку все они являются функциями от O).

Рассмотрим матрицу

$$R = Q(Q' + 2E). \qquad (9.84)$$

С (9.80), (9.82) и (9.83) следует:

$$R = QQ' + 2Q=(O- O')P.$$

Из этого представления матрицы R видно, что R - кососимметрическая матрица.

С другой стороны, с (9.84)

$$R^k = Q^k (Q' + 2E)^k \qquad (k =1,2,...). \qquad (9.85)$$

Но Q ', как и Q - нильпотентная матрица и, следовательно,

$$| Q ' + 2E | \neq 0.$$

Поэтому из (9.85) вытекает, что при каждом k матрицы R^k и Q^k имеют один и тот же ранг.

Но при k нечетном матрица R^k является кососимметрической и потому имеет четный ранг. Следовательно, каждая из матриц

$$Q, Q^3, Q^5\ldots$$

имеет четный ранг.

Поэтому, повторяя дословно для матрицы Q соображения, проведенные в п. 9.20 для матрицы *К,* мы сможем утверждать, что среди элементарных делителей матрицы Q делители вида λ^{2p} повторяются четное число раз. Но каждому элементарному делителю λ^{2p} матрицы Q соответствует элементарный делитель $(\lambda — 1)^{2p}$ матрицы O и наоборот. (Поскольку $h(1)=0$, $h'(1)\neq 0$, то при переходе от матрицы O к матрице $Q=h(O)$ элементарные делители вида $(\lambda — 1)^{2p}$ матрицы O, не расщепляясь, заменяются элементарными делителями λ^{2p}). Отсюда следует, что среди элементарных делителей матрицы O делители вида $(\lambda — 1)^{2p}$ повторяются четное число раз.

Аналогичное утверждение для элементарных делителей вида $(\lambda + 1)^{2p}$ мы получим, применяя доказанное уже положение к матрице $-O$.

Тяким образом, теорема доказана полностью.

Докажем теперь обратную теорему.

Теорема 10. *Любая система степеней вида*

$$\left.\begin{array}{l} (\lambda - \lambda_j)^{p_j},\ (\lambda - \lambda_j^{-1})^{p_j} \quad (\lambda_j \neq 0;\ j = 1, 2, \ldots, u), \\ (\lambda - 1)^{q_1},\ (\lambda - 1)^{q_2}, \ldots, (\lambda - 1)^{q_v}, \\ (\lambda + 1)^{t_1},\ (\lambda + 1)^{t_2}, \ldots, (\lambda + 1)^{t_w} \\ (q_1, \ldots, q_v,\ t_1, \ldots, t_w — \text{нечетные числа}) \end{array}\right\} \qquad (9.86)$$

является системой элементарных делителей некоторой комплексной ортогональной матрицы O. (Некоторые (или даже все) из чисел λ_j могут равняться ± 1. Одно число или два из чисел *u, v, w* могут равняться нулю. Тогда элементарные делители соответствующего вида отсутствуют у матрице O).

Доказательство. Обозначим через μ_j - числа, связанные с числами λ_j $(j = 1,2, ..., u)$ равенствами

$$\lambda_j = e^{\mu_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, u).$$

Введем в рассмотрение «канонические» кососимметрические матрицы (см. предыдущий пункт)

$$K_{\mu_j}^{(p_j p_j)} \quad (j = 1, 2, \ldots, u); \quad K^{(q_1)}, \ldots, K^{(q_v)}; \quad K^{(t_1)}, \ldots, K^{(t_w)},$$

которые имеют соответственно элементарные делители

$$(\lambda - \mu_j)^{p_j},\ (\lambda + \mu_j)^{p_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, u); \quad \lambda^{q_1}, \ldots, \lambda^{q_v}; \ \lambda^{t_1}, \ldots, \lambda^{t_w}.$$

Если *К* — кососимметрическая матрица, то

$$O = e^K$$

является ортогональной

$$(O' = e^{K'} = e^{-K} = O^{-1}).$$

При этом каждому элементарному делителю $(\lambda - \mu)^p$ матрицы *К* отвечает элементарный делитель $(\lambda\text{-}e^{\mu})^p$ матрицы *О*. (Это следует из того, что при $f(\lambda) = e^{\lambda}$ имеем: $f'(\lambda) = e^{\lambda} \neq 0$ при любом λ).

Поэтому квазидиагональная матрица

$$\tilde{O} = \left\{ e^{K_{\mu_1}^{(p_1 p_1)}}, \ldots, e^{K_{\mu_u}^{(p_u p_u)}};\ e^{K^{(q_1)}}, \ldots, e^{K^{(q_v)}};\ -e^{K^{(t_1)}}, \ldots, -e^{K^{(t_w)}} \right\} \tag{9.87}$$

является ортогональной и имеет элементарные делители (9.86).

Теорема доказана.

Из теорем 4, 9 и 10 следует

Следствие. *Произвольная (комплексная) ортогональная матрица О всегда ортогонально-подобна ортогональной матрице, имеющей нормальную форму* $\tilde{O}$, *т.е. существует такая ортогональная матрица* O_1, *что*

$$O = O_1 \tilde{O} O_1^{-1}. \tag{9.88}$$

Примечание. Подобно поэтому как это было сделано для кососимметрической матрицы *К,* можно конкретизировать форму диагональных клеток в нормальной форме $\tilde{O}$.

Микромодуль 23
Матрицы с неотрицательными элементами

В этом микромодули изучаются свойства вещественных матриц с неотрицательными элементами. Эти матрицы находят себе широкое применение в теории вероятностей при исследовании цепей Маркова («стохастические матрицы») и в теории малых колебаний упругих систем («осцилляционные матрицы»).

9.6. Общие свойства

Начнем с определения.

Определение 1. Прямоугольную матрицу A с вещественными элементами

$$A = \| a_{ik} \| \qquad (i = 1,2, ...,m; k= 1,2, ...,n)$$

мы будем называть *неотрицательной* (обозначение: $A \geq 0$) или *положительной* (обозначение: $A>0$), если все элементы матрицы A неотрицательны (соответственно положительны): $a_{ik} \geq 0$ (соответственно > 0).

Определение 2. Квадратная матрица $A=\|a_{ik}\|^n_1$ называется *разложимой,* если при некотором разбиении всех индексов 1,2, ..., n на две дополнительные системы (без общих индексов) i_1 i_2, ..., i_μ; k_1, k_2, ...,k_ν ($\mu + \nu = n$)

$$a_{i_\alpha k_\beta} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \mu; \beta = 1, 2, \ldots, \nu).$$

В противном случае матрицу A будем называть *неразложимой.*

Под *перестановкой рядов* в квадратной матрице $A=\|a_{ik}\|^n_1$ мы будем понимать соединение перестановки строк с такой же перестановкой столбцов матрицы A.

Определение разложимой и неразложимой матриц может быть сформулировано так:

Определение 2'. Матрица $A=\|a_{ik}\|^n_1$ называется *разложимой,* если перестановкой рядов она может быть приведена к виду

$$\tilde{A} = \begin{Vmatrix} B & 0 \\ C & D \end{Vmatrix},$$

где B и D — квадратные матрицы. В противном случае матрица A называется *неразложимой.*

Пусть матрица $A=\|a_{ik}\|^n_1$ соответствует линейному оператору $\boldsymbol{A}$ в n-мерном векторном пространстве $\boldsymbol{R}$ с базисом $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$. Перестановке рядов в матрице A соответствует перенумерация базисных векторов, т.е. переход от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$ к новому базису

$$\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_{j_1}, \boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}_{j_2}, \ldots, \boldsymbol{e}'_n = \boldsymbol{e}_{j_n},$$

где $(j_1, j_2, ...,j_n)$ — некоторая перестановка индексов 1, 2, ..., n. При этом матрица A переходит в подобную ей матрицу $\tilde{A}= T^{-1}AT$ (в каждой строке и в каждом столбцы преобразующей матрицы T один элемент равен единице, а все остальные элементы равны нулю).

Под v-мерным *координатным подпространством* в $\boldsymbol{R}$ мы будем понимать любое подпространство в $\boldsymbol{R}$ с базисом

$$\mathbf{e}_{k_1},\ \mathbf{e}_{k_2},\ \ldots,\ \mathbf{e}_{k_v}$$

($1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_v \le n$). С каждым базисом $\boldsymbol{e_1, e_2, \ldots, e_n}$ пространства $\boldsymbol{R}$ связаны C^v_n v-мерных координатных подпространств. Определение разложимой матрицы может быть еще дано в следующей форме:

Определение 2". Матрица $A=\|a_{ik}\|^n_1$ называется *разложимой* в том и только в том случае, если соответствующий этой матрице оператор $\boldsymbol{A}$ имеет v-мерне инвариантное координатное подпространство с $v < n$.

Докажем следующую лемму:

Лемма 1. *Если $A \ge 0$ — неразложимая матрица и n — порядок матрицы A, то*

$$(E + A)^{n-1} > 0. \qquad (9.87)$$

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать, что для любого вектора (столбца) $y \ge 0$ ($y \ne 0$) имеет место неравенство

$$(E + A)^{n-1} y > 0.$$

(Здесь и далее в этом микромодуле мы под вектором будем понимать столбец из n чисел. Этим самым мы как бы отождествляем вектор со столбцом его координат в том базисе, в котором данная матрица $A=\|a_{ik}\|^n_1$ задает некоторый линейный оператор).

Это же неравенство будет установлено, если мы только покажем, *что при условии* $y \ge 0$ и $y \ne 0$ *вектор $z = (E + A)y$ всегда имеет меньше нулевых координат, чем вектор y*. Допустим противное. Тогда векторы y и z имеют одни и те же нулевые координаты (здесь мы исходим из того, что $z = y + Ay$ и $Ay \ge 0$; поэтому положительным координатам вектора y соответствуют положительные координаты вектора z). Не нарушая общности рассуждений, можно принять, что столбцы y и z имеют вид

$$y = \begin{Vmatrix} u \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad z = \begin{Vmatrix} v \\ 0 \end{Vmatrix} \qquad (u > 0, v > 0),$$

где столбцы u и v имеют один и тот же размер.
(К такому виду можно привести столбцы y и z при помощи некоторой (одной и той же для y и z) перенумерации координат).

Полагая соответственно

$$A = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix},$$

будем иметь:

$$\begin{Vmatrix} u \\ 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} u \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} v \\ 0 \end{Vmatrix},$$

откуда

$$A_{21}u = 0.$$

Поскольку $u > 0$, то отсюда вытекает:

$$A_{21} = 0.$$

Это равенство противоречит неразложимости матрицы A.

Таким образом, лемма доказана.

Введем в рассмотрение степени матрицы A:

$$A^q = \|a^{(q)}{}_{ik}\|^n{}_1, (q = 1, 2, ...).$$

Тогда из леммы вытекает

Следствие. *Если* $A \geq 0$ *— неразложимая матрица, то для любой пары индексов* (1 ≤) i, k ($\leq n$) *существует целое положительное число* q *такое, что*

$$a^{(q)}{}_{ik} > 0. \qquad (9.88)$$

При этом число q всегда можно выбрать в пределах

$$\left.\begin{aligned} q \leq m-1,\ \text{если}\ i \neq k, \\ q \leq m,\ \text{если}\ i = k. \end{aligned}\right\} \qquad (9.89)$$

где m — степень минимального многочлена $\psi(\lambda)$ матрицы A.

Действительно, обозначим через $r(\lambda)$ остаток от деления $(X + 1)^{n-1}$ на $\psi(\lambda)$. Тогда в силу (9.87) $r(A)>0$. Так как степень $r(\lambda)$ меньше m, то из полученного неравенства вытекает, что при любых (1 ≤) i, k ($\leq n$) по крайней мере одно из неотрицательных чисел

$$\delta_{ik},\ a_{ik},\ a_{ik}^{(2)},\ \ldots,\ a_{ik}^{(m-1)}$$

не равно нулю. Поскольку $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$, то отсюда следует первое из соотношений (9.89). Второе соотношение (для $i=k$) получается аналогично, если неравенство $r(A) > 0$ заменить неравенством $Ar(A) > 0$. (Произведение неразложимой неотрицательной матрицы на положительную всегда представляет собой положительную матрицу).

Замечание. Это следствие из леммы показывает, что в неравенстве (9.87) можно заменить число n — 1 числом m — 1, где m — степень минимального многочлена матрицы A.

9.7. Спектральные свойства неразложимых неотрицательных матриц

1. Перрон в 1907 г. установил свойства спектра (т.е. совокупности характеристических чисел и собственных векторов) положительных матриц.

Теорема 1 (Перрона). *Положительная матрица* $A=\|a_{ik}\|^n_1$ *всегда имеет вещественное и притом положительное характеристическое число* r, *которое является простым корнем характеристического уравнения и превосходит модули всех других характеристических чисел. Этому «максимальному» характеристическому числу* r *соответствует собственный вектор* $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ *матрицы A с положительными координатами* $z_i > 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

(Поскольку число r является простым характеристическим числом, то собственный вектор r, отвечающий этому числу, определяется с точностью до скалярного множителя. По теореме Перрона все координаты вектора z отличны от нуля, вещественны и одного знака. Умножением вектора z на ±1 можно сделать все его координаты положительными. В этом последнем случае вектор (столбец) $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ будем называть *положительным* (срвните с определением 1)).

Положительная матрица является частным видом неразложимой неотрицательной матрицы. Фробениус обобщил теорему Перрона, исследовав спектральные свойства неразложимых неотрицательных матриц.

Теорема 2 (Фробениуса). *Неразложимая неотрицательная матрица* $A=\|a_{ik}\|^n_1$ *всегда имеет положительное характеристическое число* r, *которое является простым корнем характеристического уравнения. Модули всех других характеристических чисел не превосходят числа* r. *«Максимальному» характеристическому числу* r *соответствует собственный вектор* z *с положительными координатами.*

Если при этом A имеет h характеристических чисел $\lambda_0= r, \lambda_1, ..., \lambda_{h-1}$, *по модулю равных* r, *то эти числа все разны между собой и являются корнями уравнения*

$$\lambda^h - r^h = 0, \tag{9.90}$$

и вообще совокупность всех характеристических чисел $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{h-1}$ *матрицы* $A=\|a_{ik}\|^n_1$, *россматриваемая как система точек в комплексной* λ*-плоскости, переходит сама в себя при повороте этой* *плоскости на угол* $\frac{2\pi}{h}$. *При h* > 1 *перестановкой рядов можно матрицу А привести к следующему «циклическому» виду:*

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{h-1,\,h} \\ A_{h1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}, \tag{9.91}$$

где вдоль диагонали стоят квадратные блоки.

Поскольку теорема Перрона следует как частный случай из теоремы Фробениуса, то мы будем доказывать только последнюю. Предварительно условимся относительно некоторых обозначений.

Мы будем писать:

$$C \le D \text{ или } D \ge C,$$

где C и D — вещественные прямоугольные матрицы одинаковых размеров $m \times n$

$$C = \| c_{ik} \|, \quad D = \| d_{ik} \| \qquad (i = 1, 2, ..., m;\ k = 1, 2, ..., n),$$

в том и только в том случае, когда

$$c_{ik} \le d_{ik} \qquad (i = 1, 2, ..., m;\ k = 1, 2, ..., n). \tag{9.92}$$

Если во всех неравенствах (9.92) можно отбросить знак равенства, то мы будем писать:

$$C < D \quad \text{или} \quad D > C.$$

В частности, $C \ge 0$ ($C > 0$) обозначает, что все элементы матрицы C неотрицательны (соответственно положительны).

Кроме того, через C^+ мы будем обозначать mod C, т.е. матрицу, которая получается, если все элементы матрицы C заменить их модулями.

2. **Доказательство теоремы Фробениуса**. Для фиксированного вещественного вектора $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \ge 0$ ($x \ne 0$) полагаем:

$$r_x = \min_{1 \le i \le n} \frac{(Ax)_i}{x_i} \left((Ax)_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k;\ i = 1, 2, \dots, n \right);$$

при этом определении минимума исключаются те значения индекса i, для которых $x_i = 0$. Очевидно, $r_x \ge 0$ и r_x есть наибольшее из вещественных чисел ρ, для которых имеет место неравенство

$$\rho x \le Ax.$$

Мы докажем, что функция r_x достигает своего наибольшего значения r на некотором векторе $z \ge 0$:

$$r = r_z = \max_{(x \geqslant 0)} r_x = \max_{(x \geqslant 0)} \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{(Ax)_i}{x_i}. \tag{9.93}$$

Из определения r_x следует, что при умножении вектора $x \geq 0 (x \neq 0)$ на число $\lambda > 0$ величина r_x не меняется. Поэтому при отыскании максимума функции r_x можно ограничиться замкнутым множеством *M,* состоящим из векторов *x,* для которых

$$x \geqslant 0, \quad (xx) \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1.$$

Если бы функция r_x была непрерывна на множестве *M,* то существование максимума было бы обеспечено. Однако функция r_x непрерывна в любой «точке» $x > 0$, но в предельных точках множества *M,* где одна из координат оборащаетсяв нуль, может испытывать разрывы. Поэтому мы вместо множества *M* введем множество *N*, состоящее из всех векторов *y* виде

$$y = (E + A)^{n-1} x \qquad (x \in M).$$

Множество *N,* как и *M,* ограничено и замкнуто и состоит согласно лемме 1 из положительных векторов.

Кроме того, помножая обе части неравенства

$$r_x x \leq Ax$$

на $(E + A)^{n-1} > 0$, получаем:

$$r_x y \leqslant Ay \quad [y = (E + A)^{n-1} x].$$

Отсюда, исходя из определения r_y, находим:

$$r_x \leq r_y.$$

Поэтому при отыскании максимума r_x мы можем множество *M* заменить множеством *N,* состоящим только из положительных векторов. На ограниченном замкнутом множестве *N* функция r_x непрерывна и поэтому достигает своего наибольшего значения на некотором векторе $z > 0$.

Любой вектор $z \geq 0$, для которого

$$r_x = r, \tag{9.94}$$

будем называть экстремальным.

Докажем теперь, что: 1) *определенное равенством* (9.93) *число r положительно и является характеристическим числом матрицы A и 2) любой экстремальный вектор z положителен и является собственным вектором матрицы A для характеристического числа r, т.е.*

$$r > 0, \quad z > 0, \quad Az = rz. \tag{9.95}$$

Действительно, если

$$u = \underbrace{(1, 1, \ldots, 1)}_{n},$$

то

$$r_u = \min_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.$$

Но тогда $r_u > 0$, поскольку ни одна строка неразложимой матрицы не может состоять сплошь из нулей. Следовательно, и $r > 0$, так как $r \geq r_u$. Дальше, пусть

$$x = (E + A)^{n-1} z. \qquad (9.96)$$

Тогда согласно лемме 1 $x > 0$. Допустим теперь, что $Az — rz \neq 0$. Тогда в силу (9.87), (9.94) и (9.96) получаем последовательно:

$$Az - rz \geqslant 0, \quad (E + A)^{n-1}(Az - rz) > 0, \quad Ax - rx > 0.$$

Последнее же неравенство противоречит определению числа r, так как из этого неравенства следовало бы $Ax — (r + \varepsilon)\, x > 0$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$, т.е. $r_x \geq r + \varepsilon > r$. Следовательно, $Az = rz$. Но тогда

$$0 < x = (E + A)^{n-1} z = (1 + r)^{n-1} z,$$

откуда вытекает: $z > 0$.

Покажем теперь, что *модули всех характеристических чисел не превосходят* r. Пусть

$$Ay = \alpha y \quad (y \neq 0). \qquad (9.97)$$

Переходя к модулям в левой и правой частях равенства (9.97), получим:

$$|\alpha| y^+ \leq A y^+. \qquad (9.98)$$

Отсюда

$$|\alpha| \leq r_{y+} \leq r.$$

Предположим, что характеристическому числу r соответствует какой-нибудь собственный вектор y:

$$Ay = ry \quad (y \neq 0).$$

Тогда, полагая в (9.97) и (9.98) $\alpha = r$, заключаем, что y^+ — экстремальный вектор и, следовательно, $y^+ > 0$, т.е. $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, где $y_i \neq 0$ $(r = 1, 2, ..., n)$. Отсюда следует, что *характеристическому числу* r *соответствует только одно собственное направление*, так как при наличии двух линейно независимых собственных векторов z и z_1 мы смогли бы подобрать числа c и d так, чтобы собственный вектор $y = cz + dz_1$ имел нулевую координату, а это по доказанному невозможно.

Введем в рассмотрение присоединенную матрицу для характеристической матрицы $\lambda E — A$:

$$B(\lambda) = \| B_{ik}(\lambda) \|_1^n = \Delta(\lambda)(\lambda E - A)^{-1},$$

где $\Delta(\lambda)$ — характеристический многочлен матрицы *A,* а $B_{ik}(\lambda)$ — алгебраическое дополнение элемента $\lambda\delta_{ki} - a_{ki}$ в определителе $\Delta(\lambda)$. Из того, что характеристическому числу *r* соответствует (с точностью до множителя) только один собственный вектор $z = (z_1, z_2,..., z_n)$, где $z_1 > 0$, $z_2 > 0,..., z_n > 0$, вытекает, что $B(r) \neq 0$ и что в любом ненулевом столбце матрицы *B* (*r*) все элементы отличны от нуля и одного знака. То же положение имеет место и для строк матрицы *B(r),* поскольку, в предыдущих рассуждениях можно матрицу *A* заменить транспонированной матрицей *A'*. Из отмеченных свойств строк и столбцов матрицы *A* вытекает, что все $B_{ik}(r)$ $(i, k = 1,2, ..., n)$ отличны от нуля и одного знака σ. Поэтому

$$\sigma\Delta'(r) = \sigma\sum_{i=1}^{n} B_{ii}(r) > 0,$$

т.е. $\Delta'(r) \neq 0$ и *r* — *простой корень характеристического уравнения* $\Delta(\lambda)=0$.

Так как *r* — максимальный корень многочлена $\Delta(\lambda)= \lambda^n + ...$, то $\Delta(\lambda)$ возрастает при $\lambda = r$. Поэтому $\Delta'(r) > 0$ и $\sigma = 1$, т.е.

$$B_{ik}(r)>0 \quad (i, k = 1,2, ..., n). \tag{9.99}$$

3. Переходя к доказательству второй части теоремы Фробениуса, мы воспользуемся следующей леммой:

Лемма 2. *Если* $A=\|a_{ik}\|^n_1$ *и* $C=\|c_{ik}\|^n_1$ — *две квадратные матрицы одного и того же порядка n, причем A — неразложимая матрица и*

$$C^+ \leq A, \tag{9.100}$$

(*C* — комплексная матрица, а $A \geq 0$), *то между любым характеристическим числом* γ *матрицы C и максимальным характеристическим числом r матрицы A имеет место неравенство*

$$|\gamma| \leq r. \tag{9.101}$$

В соотношении (9.101) *знак равенства может иметь место в том и только в том случае, когда*

$$C = e^{i\varphi}DAD^{-1} \tag{9.102}$$

где

$$e^{i\varphi} = \frac{\gamma}{r},$$

а D — диагональная матрица, у которой диагональные элементы по модулю равны единице ($D^+ = E$).

Доказательство леммы. Обозначим через *y* собственный вектор матрицы *C,* соответствующий характеристическому числу γ:

$$Cy = \gamma y \quad (\gamma \neq 0). \tag{9.102}$$

Из (9.100) и (9.103) находим:

$$|\gamma| y^+ \leq C^+ y^+ \leq A y^+. \tag{9.104}$$

Поэтому

$$|\gamma| \leqslant r_{y^+} \leqslant r.$$

Разберем теперь подробно случай $|\gamma| = r$. В этом случае с (9.104) следует, что y^+ — экстремальный вектор для матрицы A и, следовательно, $y^+ > 0$ и y^+ — собственный вектор матрицы A для характеристического числа r. Поэтому соотношение (9.104) принимает вид

$$Ay^+ = C^+y^+ = ry^+, \; y^+ > 0. \tag{9.105}$$

Отсюда в силу (9.100)

$$C^+ = A. \tag{9.106}$$

Пусть $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, где

$$y_j = |y_j| e^{i\psi_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Определим диагональную матрицу D равенством

$$D = \{e^{i\psi_1}, e^{i\psi_2}, \ldots, e^{i\psi_n}\}.$$

Тогда

$$y = Dy^+.$$

Подставляя это выражение для y в (9.103) и полагая там $\gamma = re^{i\varphi}$, легко найдем:

$$Fy^+ = ry^+, \tag{9.107}$$

где

$$F = e^{-i\varphi}D^{-1}CD. \tag{9.108}$$

Сопоставляя (9.105) с (9.107), получим:

$$Fy^+ = C^+y^+ = Ay^+. \tag{9.109}$$

Но в силу (9.108) и (9.106)

$$F^+ = C^+ = A.$$

Поэтому из (9.109) находим:

$$Fy^+ = F^+y^+.$$

Поскольку $y^+ > 0$, то это равенство может иметь место лишь тогда, когда

$$F = F^+,$$

т.е.

$$e^{-i\varphi}D^{-1}CD = A.$$

Отсюда

$$C = e^{i\varphi}DAD^{-1}.$$

Лемма доказана.

4. Вернемся к теореме Фробениуса и применим доказанную лемму к нерозложимой матрице $A \geq 0$, имеющей ровно h различных характеристических чисел с максимальным модулем r.

$$\lambda_0 = re^{i\varphi_0},\ \lambda_1 = re^{i\varphi_1},\ \ldots,\ \lambda_{h-1} = re^{i\varphi_{h-1}}\ (0 = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_{h-1} < 2\pi).$$

Тогда, полагая в лемме $C = A$ и $\gamma=\lambda_k$ для любого $k = 0, 1, ..., h — 1$ будем иметь:

$$A = e^{i\varphi_k} D_k A D_k^{-1}, \qquad (9.110)$$

где D_k— диагональная матрица с $D_k^+ = E$.

Пусть снова z — положительный собственный вектор матрицы A, соответствующий максимальному характеристическому числу r:

$$Az = rz \quad (z > 0). \qquad (9.111)$$

Тогда, полагая

$$\overset{k}{y} = D_k z \ (\overset{k}{y}{}^+ = z > 0), \qquad (9.112)$$

из (9.111) и (9.112) найдем:

$$A\overset{k}{y} = \lambda_k \overset{k}{y} \quad (\lambda_k = re^{i\varphi_k};\quad k = 0, 1, \ldots, h-1). \qquad (9.113)$$

Последние равенства показывают, что векторы

$$\overset{0}{y},\ \overset{1}{y},\ \ldots,\ \overset{h-1}{y},$$

определяемые из (9.112), являются собственными векторами матрицы A для характеристических чисел $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{h-1}$.

Из (9.110) следует, что не только $\lambda_0=r$, но и *каждое из характеристических чисел* $\lambda_1, ..., \lambda_{h-1}$ *матрицы A является простым.* Поэтому собственные векторы $\overset{k}{y}$, а значит, и матрицы D_k (k=0,1,...,h — 1) определяются с точностью до скалярных множителей. Для однозначного определения матриц $D_0, D_1, ..., D_{h-1}$ мы будем выбирать первые диагональные элементы этих матриц равными единице. Тогда $D_0=E$ и $\overset{0}{y} = z > 0$.

Дальше, из (9.110) следует:

$$A = e^{i(\varphi_j \pm \varphi_k)} D_j D_k^{\pm 1} A D_k^{\mp 1} D_j^{-1} \quad (j, k = 0, 1, \ldots, h-1).$$

Отсюда аналогично предыдущему заключаем, что вектор

$$D_j D_k^{\pm 1} z$$

есть собственный вектор матрицы A, соответствующий характеристическому числу $re^{i(\varphi j \pm \varphi k)}$.

Поэтому $e^{i(\varphi j \pm \varphi k)}$ совпадает с одним из чисел $e^{i\varphi i}$, а матрица $D_j D_k^{\pm 1}$— с соответствующей матрицей D_l, т.е. при некоторых $(0 \le)\ l_1, l_2\ (\le h — 1)$

$$e^{i(\varphi_j+\varphi_k)} = e^{i\varphi_{l_1}}, \quad e^{i(\varphi_j-\varphi_k)} = e^{i\varphi_{l_2}},$$

$$D_j D_k = D_{l_1}, \quad D_i D_k^{-1} = D_{l_2}.$$

Таким образом, числа

$$e^{i\varphi_0},\ e^{i\varphi_1},\ \ldots,\ e^{i\varphi_{h-1}}$$

и соответствующие диагональные матрицы $D_0, D_1, \ldots, D_{h-1}$ образуют две изоморфные между собой мультипликативные абелевы группы.

В каждой конечной группе, которая состоит из h различных элементов, h-я степень любого элемента равна единице группы. Поэтому $e^{i\varphi_0}, e^{i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_{h-1}}$ — корни h-й степени из единицы. Так как существует всего h различных корней из единицы и $\varphi_0 = 0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_{h-1} < 2\pi$, то

$$\varphi_k = \frac{2k\pi}{h} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, h-1)$$

и

$$e^{i\varphi_k} = \varepsilon^k \quad \left(\varepsilon = e^{i\varphi_1} = e^{\frac{2\pi}{h}i},\ \ k = 0, 1, \ldots, h = 1\right), \tag{9.114}$$

$$\lambda_k = r\varepsilon^k \quad (k = 0, 1, \ldots, h-1). \tag{9.115}$$

Числа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{h-1}$ образуют полную систему корней уравнения (9.90). В соответствии с (9.114) будем иметь (здесь мы опираемся на изоморфность мультипликативных групп $e^{i\varphi_0}, e^{i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_{h-1}}$ и $D_0, D_1, \ldots, D_{h-1}$):

$$D_k = D^k \quad (D = D_1;\ k = 0, 1, \ldots, h-1). \tag{9.116}$$

Теперь равенство (9.110) нам дает (при $k = 1$):

$$A = e^{i\frac{2\pi}{h}} DAD^{-1}. \tag{9.117}$$

Отсюда следует, что матрица A при умножении на

$$e^{\frac{2\pi i}{h}}$$

переходит в подобную матрицу, и, следовательно, *вся система n характеристических чисел матрицы A при умножении на*

$$e^{i\frac{2\pi}{h}}$$

переходит в самое себя. (Число h есть наибольшее целое число, обладающее этим свойством, поскольку матрица A имеет ровно h характеристических чисел с максимальным модулем r. Кроме того, из (9.117) вытекает, что все характеристические числа матрицы разбиваются на системы (по h чисел в каждой) вида $\mu_0, \mu_0\varepsilon, \ldots, \mu_0\varepsilon^{h-1}$ и что в пределах каждой такой системы любым двум характеристическим числам отвечают элементарные делители соответственно одинаковых степеней. Одну из таких систем образуют корни уравнения (9.90): $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{h-1}$).

Далее

$$D^h = E,$$

поэтому все диагональные элементы в D — корни h-й степени из единицы. Перестановкой рядов в A (и соответственно в D) можно добиться того, чтобы матрица D имела следующий квазидиагональный вид:

$$D = \{\eta_0 E_0, \eta_1 E_1, \ldots, \eta_{s-1} E_{s-1}\}, \tag{9.118}$$

где $E_0, E_1, ..., E_{s-1}$ — единичные матрицы, а

$$\eta_p = e^{i\psi_p}, \quad \psi_p = n_p \frac{2\pi}{h}$$

(n_p — целое; p = 0, 1, ..., s — 1; $0 = n_0 < n_1 < ... < n_{s-1} < h$). Очевидно, что $s \leq h$.

Записывая A в блочном виде [в соответствии с (9.118)]

$$A = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{s1} & A_{s2} & \ldots & A_{ss} \end{Vmatrix}, \tag{9.119}$$

мы равенство (9.117) заменим системой равенств

$$\varepsilon A_{pq} = \frac{\eta_{q-1}}{\eta_{p-1}} A_{pq} \quad \left(p, q = 1, 2, \ldots, s; \varepsilon = e^{\frac{2\pi}{h}i}\right). \tag{9.120}$$

Отсюда при любых p и q либо

$$\frac{\eta_{q-1}}{\eta_{p-1}} = \varepsilon,$$

либо $A_{pq} = 0$.

Возьмем p=1. Поскольку все матрицы $A_{12}, A_{13}, ..., A_{1s}$ не могут одновременно обратиться в нуль, то одно из чисел

$$\frac{\eta_1}{\eta_0}, \frac{\eta_2}{\eta_0}, \ldots, \frac{\eta_{s-1}}{\eta_0} \; (\eta_0 = 1)$$

должно равняться ε. Это возможно лишь при $n_1 = 1$. Тогда

$$\frac{\eta_1}{\eta_0} = \varepsilon$$

$A_{12} = A_{13} = ... = A_{1s} = 0$. Полагая в (9.120) p = 2, аналогично найдем, что $n_2 = 2$ и что $A_{21} = A_{22} = A_{24} = ... = A_{2s} = 0$ и т.д. В результате получим:

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{s-1,\,s} \\ A_{s1} & A_{s2} & A_{s3} & \dots & A_{ss} \end{Vmatrix}.$$

При этом $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, ..., $n_{s-1} = s - 1$. Но тогда при $p = s$ в правых частях равенства (9.120) стоят множители

$$\frac{\eta_{q-1}}{\eta_{s-1}} = e^{(q-s)\frac{2\pi}{h}i} \quad (q = 1, 2, \dots, s).$$

Одно из этих чисел должно равняться

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi}{h}i}.$$

Это возможно лишь, когда $s=h$ и $q=1$ и, следовательно, $A_{s2} = \ldots = A_{ss} = 0$. Таким образом,

$$D = \{E_0, \varepsilon E_1, \varepsilon^2 E_2, \dots, \varepsilon^{h-1} E_{h-1}\}$$

и матрица A имеет вид (9.91).

Теорема Фробениуса доказана полностью.

5. Сделаем несколько замечаний к теореме Фробениуса.

Замечание 1. При доказательстве теоремы Фробениуса мы попутно установили, что для нерозложимой матрицы $A \geq 0$, имеющей максимальное характеристическое число r, присоединенная матрица $B(\lambda)$ при $\lambda = r$ положительна:

$$B(r) > 0, \tag{9.121}$$

т.е.

$$B_{ik}(r) > 0 \quad (i,k = 1, 2, \dots, n), \tag{9.122}$$

где $B_{ik}(r)$ — алгебраическое дополнение элемента $r\delta_{ki} - a_{ki}$ в определителе $| rE - A |$.

Рассмотрим теперь приведенную присоединенную матрицу

$$C(\lambda) = \frac{B(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)},$$

где $D_{n-1}(\lambda)$ — наибольший общий делитель (со старшим коэффициентом единица) всех многочленов $B_{ik}(\lambda)$ $(i,k = 1, 2, \dots, n)$. При этом из (9.122) следует, что $D_{n-1}(r) \neq 0$. Все корни многочлена $D_{n-1}(\lambda)$ являются характеристическими числами, отличными от r. ($D_{n-1}(\lambda)$ является делителем характеристического многочлена $D_n(\lambda) = |\lambda E - A|$). Поэтому все корни $D_{n-1}(\lambda)$ либо комплексные, либо вещественные, но меньше r. Отсюда $D_{n-1}(r) > 0$, что в соединении с (9.121) дает:

$$C(r) = \frac{B(r)}{D_{n-1}(r)} > 0 \qquad (9.123)$$

(В следующем пункте будет доказано, что для неразложимой матрицы $B(\lambda) > 0$, $C(\lambda) > 0$ при любом вещественном $\lambda \geq r$).

Замечание 2. Неравенства (9.122) позволяют определить границы для величины максимального характеристического числа r.

Введем обозначение

$$s_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),\ s = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} s_i, \quad S = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} s_i .$$

Тогда *для неразложимой матрицы* $A \geq 0$

$$s \leq r \leq S, \qquad (9.124)$$

причем знак равенства слева или справа от r *имеет место лишь при* $s = S$, *т.е. когда все «строчные суммы»* $s_1, s_2, \ldots, s_n$ *равны между собой*.

Действительно, прибавим к последнему столбцу характеристического определителя

$$\Delta(r) = \begin{vmatrix} r - a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & r - a_{22} & \ldots & -a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & r - a_{nn} \end{vmatrix}$$

все предыдущие столбцы и разложим после этого определитель по элементам последнего столбца. Получим:

$$\sum_{k=1}^{n} (r - s_k) B_{nk}(r) = 0.$$

Отсюда в силу (9.122) вытекает неравенство (9.124).

***Замечание* 3**. *Неразложимая матрица* $A \geq 0$ *не может иметь двух линейно независимых неотрицательных собственных векторов.* Действительно, пусть помимо положительного собственного вектора $z > 0$, соответствующего максимальному характеристическому числу r, матрица A имеет еще собственный вектор $y \geq 0$ (линейно независимый от z) для характеристического числа α:

$$Ay = \alpha y \quad (y \neq 0;\ y \geq 0).$$

Поскольку r — простой корень характеристического уравнения $|\lambda E - A| = 0$, то

$$\alpha \neq r.$$

Обозначим через u положительный собственный вектор транспонированной матрицы A' для $\lambda = r$.

$$A'u = ru \quad (u > 0).$$

Тогда (если $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ и $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$, то под (y, u) мы понимаем «скалярное произведение»

$$y'u = \sum_{i=1}^{n} y_i u_i.$$

Тогда $(y, A'u) = y'A'u$ и $(Ay, u) = (Ay)'\, u = y'A'u)$

$$r\,(y, u) = (y, A'u) = (Ay, u) = \alpha(yu);$$

отсюда, поскольку $\alpha \neq r$,

$$(y, u) = 0,$$

а это невозможно при $u > 0$, $y \geq 0$, $y \neq 0$.

Замечание 4. При доказательстве теоремы Фробениуса мы установили следующую характеристику максимального собственного числа r неразложимой матрицы $A \geq 0$:

$$r = \max_{(x \geqslant 0)} r_x,$$

где r_x — более всего из чисел ρ, для которых имеет место неравенство $\rho x \leq Ax$. Другими словами, поскольку

$$r_x = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{(Ax)_i}{x_i},$$

то и

$$r = \max_{(x \geqslant 0)} \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{(Ax)_i}{x_i}.$$

Совершенно аналогично можно для любого вектора $x \geq 0$ $(x \neq 0)$ определить r^x как наименьшее из чисел σ, удовлетворяющих неравенству

$$\sigma x \geq Ax,$$

т.е. положить:

$$r^x = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{(Ax)_i}{x_i}.$$

При этом, если при некоторому i имеют место соотношения $x_i = 0$, $(Ax)_i \neq 0$, то следует считать $r^x = +\infty$.

Совершенно так же, как и для функции r_x, доказывается, что функция r^x достигает своего наименьшего значения $\hat{r}$ на некотором векторе $v > 0$.

Покажем, что число $\hat{r}$, которое определяется равенством

$$\hat{r} = \min_{(x \geqslant 0)} r^x = \min_{(x \geqslant 0)} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{(Ax)_i}{x_i}, \tag{9.125}$$

совпадает с числом r, а вектор $v \geq 0$ ($v \neq 0$), на котором достигается этот минимум, является собственным вектором матрицы A при $\lambda = r$. Действительно,

$$\hat{r}v - Av \geqslant 0 \quad (v \geqslant 0, \ v \neq 0).$$

Допустим, что здесь знак $\geq$ нельзя заменить знаком равенства. Тогда согласно лемме 1

$$(E + A)^{n-1} (\hat{r}v - Av) > 0, \quad (E + A)^{n-1} v > 0. \tag{9.126}$$

Полагая

$$u = (E + A)^{n-1} v > 0,$$

будем иметь:

$$\hat{r}u > Au$$

и, следовательно, при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$(\hat{r} - \varepsilon)\, u > Au \quad (u > 0),$$

что противоречит определению числа $\hat{r}$. Итак,

$$Av = \hat{r}\, v.$$

Но тогда

$$u = (E + A)^{n-1} v = (1 + \hat{r})^{n-1} v.$$

Поэтому из $u > 0$ следует $v > 0$.

В силу замечания 3 отсюда

$$\hat{r} = r$$

Таким образом, мы имеем для числа r двойную характеристику:

$$r = \max_{(x \geqslant 0)} \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{(Ax)_i}{x_i} = \min_{(x \geqslant 0)} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{(Ax)_i}{x_i}, \tag{9.127}$$

причем доказано, что $\min\limits_{(x \geqslant 0)}$ или $\max\limits_{(x \geqslant 0)}$ достигается только на положительном собственном векторе для $\lambda = r$.

Из установленной характеристики числа r вытекают неравенства

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{(Ax)_i}{x_i} \leqslant r \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{(Ax)_i}{x_i} \quad (x \geqslant 0, x \neq 0). \tag{9.128}$$

Замечание 5. Поскольку в (9.127) $\min\limits_{(x \geqslant 0)}$ и $\max\limits_{(x \geqslant 0)}$ всегда достигаются только на положительном собственном векторе неразложимой матрицы $A \geq 0$, то из неравенств

$$rz \leq Az, \quad z \geq 0, \quad z \neq 0$$

или

$$rz \geq Az, \quad z \geq 0, \quad z \neq 0$$

всегда следует:

$$Az = rz, \quad z > 0.$$

6.8. Разложимые матрицы

1. Установленные в предыдущем пункте спектральные свойства неразложимых неотрицательных матриц не сохраняются при переходе к разложимым матрицам. Однако, поскольку произвольная неотрицательная матрица $A \geq 0$ всегда может быть представленная как граница последовательности неразложимых и даже положительных матриц A_m

$$A = \lim_{m \to \infty} A_m \; (A_m > 0, \; m = 1, 2, \ldots), \tag{9.129}$$

это некоторые из спектральных свойств неразложимых матриц в ослабленной форме имеют место и для разложимых матриц.

Для произвольной неотрицательной матрицы $A = \| a_{ik} \|^n_1$ докажем следующую теорему:

Теорема 3. *Неотрицательная матрица $A = \| a_{ik} \|^n_1$ всегда имеет неотрицательное характеристическое число r такое, что модули всех характеристических чисел матрицы A не превосходят r. Этому «максимальному» характеристическому числу r соответствует неотрицательный собственный вектор*

$$Ay = ry \quad (y \geq 0, \; y \neq 0).$$

Доказательство. Пусть для матрицы A имеет место представление (9.129). Обозначим через $r^{(m)}$ и $y^{(m)}$ максимальное характеристическое число положительной матрицы A_m и соответствующий этому числу нормированный (под нормированным вектором мы понимаем столбец $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, для которого $(yy) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1.$) положительный собственный вектор:

$$A_m y^{(m)} = r^{(m)} y^{(m)} \quad [(y^{(m)} y^{(m)}) = 1, \; y^{(m)} > 0; \; m = 1, 2, \ldots]. \tag{9.130}$$

Тогда из (9.129) следует, что существует предел

$$\lim r^{(m)} = r,$$

где r — характеристическое число матрицы A. Из того, что $r^{(m)} > 0$ и $r^{(m)} > \mid \lambda_0^{(m)} \mid$, где $\lambda_0^{(m)}$ — любое характеристическое число матрицы A_m $(m = 1, 2, \ldots)$, предельным переходом получаем:

$$r \geq 0, \quad r \geq |\lambda_0|, \tag{9.131}$$

где λ_0 — любое характеристическое число матрицы A. Этот же предельный переход дает нам вместо (9.121)

$$B(r) \geq 0. \tag{9.132}$$

Далее, из последовательности нормированных собственных векторов $y^{(m)}$ $(m = 1, 2, ...)$ можно выделить подпоследовательность $y^{(m_p)}$ $(p = 1, 2, ...)$, сходящуюся к некоторому нормированному (и, следовательно, не равному нулю) вектору y. Перейдем к пределу в обеих частях равенства (9.130), давая m последовательность значений m_p $(p = 1,2, ...)$. Мы получим:

$$Ay = ry \quad (y \geq 0, y \neq 0).$$

Теорема доказана.

Замечание. При предельном переходе (9.129) неравенства (9.124) сохраняются. Поэтому эти неравенства имеют место для произвольной неотрицательной матрицы. Однако условие, при котором в (9.124) имеет место знак равенства, для разложимой матрицы уже неверно.

2. Установим ряд важных предложений для матриц с неотрицательными элементами:

1° *Если* $A=\|a_{ik}\|^n_1$ *— неотрицательная матрица с максимальным характеристическим числом r, то*

$$(\lambda E - A)^{-1} \geqslant 0, \frac{d}{d\lambda}(\lambda E - A)^{-1} \leqslant 0 \text{ при } \lambda > r. \tag{9.133}$$

Действительно, при $\lambda > r \geq 0$ справедливо разложение

$$(\lambda E - A)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{\lambda^{j+1}} \geqslant 0 \tag{9.134}$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{d\lambda}(\lambda E - A)^{-1} = - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+1)A^j}{\lambda^{j+2}} \leqslant 0. \tag{9.135}$$

2° *Если* $A=\|a_{ik}\|^n_1$ *— неотрицательная матрица с максимальным характеристическим числом r, а* $B(\lambda)$ *и* $C(\lambda)$ *— ее присоединенная и приведенная присоединенная матрицы, то*

$$B(\lambda) \geq 0, \quad C(\lambda) \geq 0 \text{ при } \lambda \geq r. \tag{9.136}$$

Поскольку

$$B(\lambda) = (\lambda E - A)^{-1} \Delta(\lambda), C(\lambda) = (\lambda E - A)^{-1} \psi(\lambda)$$

и

$$\Delta(\lambda) > 0, \psi(\lambda) > 0 \text{ при } \lambda > r, \tag{9.137}$$

то из первого неравенства (9.133) сразу вытекают соотношения (6.136).

3° *Если* $A=\|a_{ik}\|^n{}_1$ — *неразложимая матрица с максимальным характеристическим числом* r, *то,*

$$(\lambda E - A)^{-1} >_{,} 0, \frac{d}{d\lambda}(\lambda E - A)^{-1} < 0 \text{ при } \lambda > r, \tag{9.138}$$

$$B(\lambda) > 0, \quad C(\lambda) > 0 \text{ при } \lambda \geq r \tag{9.139}$$

Действительно, согласно следствию из леммы 1, в случае неразложимой матрицы $A \geq 0$ в соотношениях (9.134) и (9.135) можно знак равенства отбросить. Тогда и $B(\lambda) > 0$, $C(\lambda) > 0$ при $\lambda > r$. Но, как было показано в п. 9.7, для неразложимой матрицы $B(r) > 0$, $C(r) > 0$. Следовательно, справедливы неравенства (6.139).

4° *Максимальное характеристическое число* r' *любого главного минора (порядка* < *n) неотрицательной матрицы* $A=\|a_{ik}\|^n{}_1$ *не превосходит максимального характеристического числа* r *матрицы A:*

$$r \leq r. \tag{9.140}$$

Если для главного минора (n—1)*-го порядка* $r'<r$, *то для характеристического определителя* $\Delta(\lambda)=|\lambda E - A|$ *имеем неравенство*

$$\Delta(\lambda) < 0 \quad \text{при} \quad r' < \lambda < r. \tag{9.141}$$

Если A — неразложимая матрица, то в (9.140) *всегда знак равенства отпадает.*

Если A — разложимая матрица, то по крайней мере для одного главного минора в (9.140) *имеет место знак равенства.*

Действительно, пусть для конкретности r' — максимальное характеристическое число матрицы $A_1=\|a_{ik}\|^{n-1}{}_{i,k-1}$, которая имеет характеристический многочлен $\Delta_1(\lambda) = B_{nn}(\lambda)$. Тогда $B_{nn}(r^1) = 0$ и в случае неразложимой матрицы A согласно (9.139) $B_{nn}(\lambda)>0$ при $\lambda \geq r$. Следовательно, $r'<r$. Отсюда в случае разложимой матрицы предельным переходом получаем неравенство (9.140).

Пусть $r'<\lambda<r$. Тогда, раскладывая определитель $\Delta(\lambda)$ по элементам последней строки и последнего столбца, получаем:

$$\Delta(\lambda) = \Delta_1(\lambda)(\lambda - a_{nn}) - \sum_{i,k=1}^{n-1} A_{ik}^{(1)}(\lambda)\, a_{in}\, a_{nk}, \tag{9.142}$$

где $A^{(1)}{}_{ik}(\lambda)$ — алгебраическое дополнение элемента $\lambda\delta_{ik} — a_{ik}$ в определителе $\Delta_1(\lambda) = B_{nn}(\lambda)$ (i,k= 1, 2, ..., n - 1). Разделим обе части тождества (9.142) на $\Delta_1(\lambda)$:

$$\frac{\Delta(\lambda)}{\Delta_1(\lambda)} = \lambda - a_{nn} - \sum_{i,k=1}^{n-1} \{(\lambda E - A_1)^{-1}\}_{ik}\, a_{in} a_{nk}. \tag{9.143}$$

Используя другое неравенство (9.133) для матрицы A, замечаем, что при $\lambda > r'$ первый член $\lambda — a_{nn}$ в правой части (9.143) монотоно возрастает, а второй — не убывает. Следовательно, отношение

$\Delta(\lambda)/\Delta_1(\lambda)$ монотоно возрастает при $\lambda>r'$. Но тогда это отношение отрицательно при $r'<\lambda<r$, поскольку $\Delta(r) = 0$. Но $\Delta_1(\lambda) > 0$ при $\lambda > r'$. Следовательно, имеет место неравенство (9.141).

Мы установили справедливость неравенства (9.140) для миноров (n — 1)-го порядка. Постепенным переходом от n — 1 к n — 2, от n — 2 к n— 3 и т.д. мы докажем справедливость неравенства (9.140) (без знака = в случае неразложимой матрицы) для главного минора любого порядка.

Если A — разложимая матрица, то перестановкой рядов она может быть представлена в виде

$$A = \begin{Vmatrix} B & 0 \\ C & D \end{Vmatrix}.$$

Тогда число r должно быть характеристическим числом одного из двух главных миноров B и D. Предложение 4° доказано.

Из 4° вытекает

5° *Если $A\geq 0$ и в характеристическом определителе*

$$\Delta(r) = \begin{vmatrix} r - a_{11} & -a_{12} \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & r - a_{22} \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} \dots & r - a_{nn} \end{vmatrix}$$

какой-либо из главных миноров обращается в нуль (матрица A разложима), то обращается в нуль любой «объемлющий» главный минор и, в частности, один из главных миноров (n - 1)-го порядка

$$B_{11}(\lambda), B_{22}(\lambda), \dots, B_{nn}(\lambda).$$

Из 4° и 5° следует:

6° *Матрица $A\geq 0$ является разложимойа в том и только в том случае, когда в одном из соотношений*

$$B_{ii}(r) \geq 0 \qquad (i=1,2, \dots, n)$$

имеет место знак равенства.

Из 4° следует также

7° *Если r — максимальное характеристическое число матрицы $A\geq 0$, то при любом $\lambda > r$ все главные миноры характеристической матрицы $A_\lambda \equiv \lambda E$ — A положительны:*

$$A_\lambda \begin{pmatrix} i_1 \, i_2 \dots i_p \\ i_1 \, i_2 \dots i_p \end{pmatrix} > 0 \; (\lambda > r; \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n; \quad p = 1, 2, \dots, n).$$

(9.144)

Нетрудно видеть, что, и обратно, из неравенств (9.144) следует: $\lambda > r$. Действительно,

$$\Delta(\lambda+\mu) = |(\lambda+\mu)E - A| = |A_\lambda + \mu E| = \sum_{k=0}^{n} S_k \mu^{n-k},$$

где S_k — сумма всех главных миноров k-го порядка характеристической матрицы $A_\lambda \equiv \lambda E$-$A$ (k = 1,2, ...,n). Поэтому, если при некотором вещественном λ все главные миноры характеристической матрицы A_λ положительны, то при любом $\mu \geq 0$

$$\Delta(\lambda+\mu) \neq 0,$$

т.е. всякое число $\geq\lambda$ не является характеристическим числом матрицы A. Следовательно,

$$r < \lambda.$$

Таким образом, неравенства (9.144) представляют собой необходимые и достаточные условия для того, чтобы число λ было верхней границей для модулей характеристических чисел матрицы A. Однако не все неравенства (9.144) независимы между собой.

Матрица λE-A представляет собой матрицу с неположительными недиагональными элементами. (Нетрудно видеть, что и, наоборот, всякая матрица с отрицательными или нулевыми недиагональными элементами всегда может быть представлена в виде $\lambda E - A$, где A — неотрицательная матрица, а λ — действительное число). Д. М. Котелянський показал, что для таких матриц, как и для симметрических матриц, положительность всех главных миноров вытекает из положительности последовательных главных миноров.

Лемма 3 (Котелянського). *Если в вещественной матрице* $G = \|g_{ik}\|^n_1$ *все недиагональные элементы отрицательны или равны нулю*

$$g_{ik} \leq 0 \quad (i \neq k; i,k = 1,2, ...,n), \tag{9.145}$$

а последовательные главные миноры положительны

$$g_{11} = G\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} > 0, \quad G\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix} > 0, \ \ldots, G\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\1 & 2 & \ldots & n\end{pmatrix} > 0, \tag{9.146}$$

то все главные миноры матрицы G положительны:

$$G\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \ldots & i_p\\i_1 & i_2 & \ldots & i_p\end{pmatrix} > 0 \quad (1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n;\ p = 1, 2, \ldots, n).$$

Доказательство. Будем доказывать лемму индуктивно относительно порядка матрицы n. При n = 2 лемма имеет место, так как из

$$g_{12} \leq 0, \quad g_{21} \leq 0, \quad g_{11} > 0, \quad g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} > 0$$

следует: $g_{22} > 0$. Пусть лемма справедлива для матриц порядка $< n$; докажем ее для матрицы $G = \|g_{ik}\|^n_1$. Введем в рассмотрение окаймляющие определители

$$t_{ik} = G\begin{pmatrix}1 & i\\ 1 & k\end{pmatrix} = g_{11}g_{ik} - g_{1k}g_{i1} \quad (i, k = 2, \ldots, n).$$

Из (9.145) и (9.146) следует:

$$t_{ik} \le 0 \quad (i \ne k; i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

С другой стороны, применяя к матрице $T = \|t_{ik}\|^n_2$ тождество Сильвестра, получаем:

$$T\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \ldots & i_p\\ i_1 & i_2 & \ldots & i_p\end{pmatrix} = (g_{11})^{p-1}G\begin{pmatrix}1 & i_1 & i_2 & \ldots & i_p\\ 1 & i_1 & i_2 & \ldots & i_p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_p \le n,\\ p = 1, 2, \ldots, n-1\end{pmatrix}.$$

(9.147)

Отсюда в силу (9.146) следует, что последовательные главные миноры матрицы $T = \|t_{ik}\|^n_2$ положительны:

$$t_{22} = T\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix} > 0, \quad T\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 3\end{pmatrix} > 0, \ldots, T\begin{pmatrix}2 & 3 & \ldots & n\\ 2 & 3 & \ldots & n\end{pmatrix} > 0.$$

Таким образом, матрица $(n - 1)$-го порядка $T = \|t_{ik}\|^n_2$ удовлетворяет условиям леммы. Поэтому согласно допущению индукции все главные миноры матрицы T положительны:

$$T\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \ldots & i_p\\ i_1 & i_2 & \ldots & i_p\end{pmatrix} > 0 \quad (2 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_p \le n;\ p = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Но тогда из (9.147) следует, что положительны все главные миноры матрицы G, содержащие первую строку:

$$G\begin{pmatrix}1 & i_1 & i_2 & \ldots & i_p\\ 1 & i_1 & i_2 & \ldots & i_p\end{pmatrix} > 0 \; (2 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_p \le n;\ p = 1, 2, \ldots, n-1).$$

(9.148)

Возьмем фиксированные индексы $(1 <)\ i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-2}\ (\le n)$ и составим матрицу $(n - 1)$-го порядка:

$$\| g_{\alpha\beta} \| \quad (\alpha, \beta = 1, i_1, i_2, \ldots, i_{n-2}).$$

(9.149)

Последовательные главные миноры этой матрицы в силу (9.148) положительны:

$$g_{11} > 0, \quad G\begin{pmatrix}1 & i_1\\ 1 & i_1\end{pmatrix} > 0, \ldots, G\begin{pmatrix}1 & i_1 & i_2 & \ldots & i_{n-2}\\ 1 & i_1 & i_2 & \ldots & i_{n-2}\end{pmatrix} > 0,$$

а недиагональные элементы неположительны:

$$g_{\alpha\beta} \leqslant 0 \quad (\alpha \neq \beta;\ \alpha,\ \beta = 1, i_1, i_2, \ldots, i_{n-2}).$$

Но порядок матрицы (9.149) равен n — 1. Поэтому согласно допущению индукции все главные миноры этой матрицы положительны; в частности,

$$G\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_p \end{pmatrix} > 0$$

$$(2 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n;\ p = 1, 2, \ldots, n-2).$$

(9.150)

Таким образом, все миноры порядка $\leq n — 2$ матрице G положительны.

Поскольку в силу (9.150) $g_{22} > 0$, то мы можем теперь ввести в рассмотрение определители второго порядка, которые окаймляют элемент g_{22} (а не g_{11}, как раньше):

$$t^*_{ik} = G\begin{pmatrix} 2 & i \\ 2 & k \end{pmatrix} \quad (i, k = 1, 3, \ldots, n).$$

Оперируя с матрицей $T^*=\|t^*_{ik}\|$ так, как мы ранее оперировали с матрицей T, мы получим неравенства, аналогичные неравенствам (9.148):

$$G\begin{pmatrix} 2 & i_1 & \ldots & i_p \\ 2 & i_1 & \ldots & i_p \end{pmatrix} > 0$$

$$(i_1 < i_2 < \ldots < i_p;\ i_1, \ldots, i_p = 1, 3, \ldots, n;\ p = 1, 2, \ldots, n-1).$$

(9.151)

Так как любой главный минор матрицы $G = \| g_{ik} \|^n_1$ либо содержит первую строку, либо содержит вторую строку, либо имеет порядок $\leq n$ — 2, то из неравенств (9.148), (9.150) и (9.151) следует, что все главные миноры матрицы A положительны. Лемма доказана.

Доказанная лемма позволяет в условиях (9.144) сохранить лишь последовательные главные миноры и сформулировать следующую теорему:

Теорема 4. *Для того чтобы действительное число λ было больше максимального характеристического числа r матрицы $A = \| a_{ik} \|^n_1 \geq 0$,*

$$r < \lambda,$$

необходимо и достаточно, чтобы при этом значении λ все последовательные главные миноры характеристической матрицы $A_\lambda \equiv \lambda E - A$ были положительны:

$$\lambda - a_{11} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \quad \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \ldots & -a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

(9.152)

Рассмотрим одно приложение этой теоремы. Пусть в матрице $C = \| c_{ik} \|^n_1$ все недиагональные элементы неотрицательны. Тогда при некотором $\lambda > 0$ матрица $A = C + \lambda E \geq 0$. Характеристические числа λ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) матрицы C расположим в порядке роста вещественных частей:

$$\operatorname{Re}\lambda_1 \leqslant \operatorname{Re}\lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re}\lambda_n.$$

Обозначим через r максимальное характеристическое число матрицы A. Поскольку характеристическими числами матрицы A являются суммы $\lambda_i + \lambda$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), то

$$\lambda_n + \lambda = r.$$

В этом случае неравенство $r < \lambda$ имеет место лишь при $\lambda_n < 0$ и означает, что у матрицы C все характеристические числа имеют отрицательные вещественные части. Записывая неравенства (9.152) для матрицы — $C = \lambda E - A$, мы получим теорему (поскольку $C = \lambda E - A$, $A \geq 0$, то λ_n вещественное (это следует из равенства $\lambda_n + \lambda = r$, и этому характеристическому числу соответствует неотрицательный собственный вектор матрицы C: $Cy = \lambda_n y$ ($y \geq 0$, $y \neq 0$)):

Теорема 5. *Для того чтобы у вещественной матрице* $C = \|c_{ik}\|^n_1$ *с неотрицательными недиагональными элементами*

$$c_{ik} \geq 0 \quad (i \neq k;\ i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

все характеристические числа имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$c_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, (-1)^n \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

(9.153)

Пусть снова A — произвольная неразложимая неотрицательная матрица, а $x \geq 0$ ($x \neq 0$) — некоторый вектор, который не является собственным для максимального характеристического числа r (обозначение $x \geq 0$ означает, что столбцевая матрица x неотрицательная). Тогда в силу замечания 5 п.9.7 существуют индексы i и j ($1 \leq i, j \leq n$) такие, что выполняются неравенства

$$(Ax)_i > rx_i \quad \text{и} \quad (Ax)_j < rx_j. \qquad (9.154)$$

Если же x — собственный вектор матрицы A для характеристического числа r, то в соотношениях (9.154) знаки неравенств следует заменить знаком равенства. Поэтому для любого вектора $x \geq 0$ существуют индексы i и j ($1 \leq i$, $k \leq г$), при которых

$$(Ax)_i \geq rx_i \quad \text{и} \quad (Ax)_j \leq rx_j. \qquad (9.155)$$

В таком ослабленном виде соотношения (9.155) остаются в силе и для разложимой матрицы $A \geq 0$, поскольку она может быть представлена в виде предела последовательности неразложимых матриц.

Соотношение (9.155) позволяет установить следующую теорему:

Теорема 6. *При увеличении любого элемента неотрицательной матрицы А максимальное характеристическое число не убывает. Оно строго возрастает, если А — неразложимая матрица.*

Эта теорема допускает эквивалентную формулировку.

Теорема 6'. *Если даны две неотрицательные матрицы A и A_1 с максимальными характеристическими числами r и r_1, то из неравенства $A \leq A_1$ ($A \neq A_1$) следует неравенство $r \leq r_1$. Если же A — неразложимая матрица, то $r < r_1$.*

Доказательство. Пусть A — неразложимая матрица. Тогда A_1 — также неразложимая матрица. Обозначим через x собственный вектор матрицы A_1 для характеристического числа r_1:

$$A_1x = r_1x \quad (x > 0).$$

Отсюда

$$(r_1 - r)\, x = Ax - rx + (A_1 - A)\, x. \qquad (9.156)$$

Но $(A_1 — A)\, x \geq 0$. Поэтому, если x не является собственным вектором матрицы A для характеристического числа r, то в силу (9.154) при некотором индексе i ($1 \leq i \leq n$)

$$(r_1 - r)\, x_i \geq (Ax)_i - rx_i > 0,$$

откуда $r_1 — r > 0$, т.е. $r < r_1$.

Если же x — собственный вектор матрицы A при характеристическом числе r, то $Ax — rx = 0$, и поскольку при некотором индексе i $[(A_1 — A)\, x]_i > 0$, то из равенства (9.156) вытекает:

$$(r_1 - r)\, x_i = (A_i - A)\, x_i > 0,$$

т.е. снова $r < r_1$.

В случае разложимой матрицы введем в рассмотрение матрицы $A_\varepsilon = A + \varepsilon B$ и $A_{1\varepsilon} = A_1 + \varepsilon B$, где $B > 0$, $\varepsilon > 0$. Тогда $A_\varepsilon \leq A_{1\varepsilon}$ и $A_{1\varepsilon} > 0$. Поэтому $r_\varepsilon < r_{1\varepsilon}$, где r_ε и $r_{1\varepsilon}$ — максимальные характеристические числа матриц A_ε и $A_{1\varepsilon}$. В пределе при $\varepsilon \to 0$ матрицы A_ε и $A_{1\varepsilon}$ переходят в матрицы A и A_1, а неравенство $r_\varepsilon < r_{1\varepsilon}$ — в соотношение $r \leq r_1$.

Теорема доказана.

9.9. Нормальная форма разложимой матрицы

Рассмотрим произвольную разложимую матрицу $A=\|a_{ik}\|^n{}_1$. Перестановкой рядов ее можно представить в виде

$$A = \begin{Vmatrix} B & 0 \\ C & D \end{Vmatrix}, \tag{9.157}$$

где B, D — квадратные матрицы.

Если какая-либо из матриц B и D разложима, то ее можно также представить в виде, аналогичном (9.157), после чего матрица A примет вид

$$A = \begin{Vmatrix} K & 0 & 0 \\ H & L & 0 \\ F & G & M \end{Vmatrix}.$$

Если какая-либо из матриц K, L, M разложима, то этот процесс можно продолжить. В результате надлежащей перестановкой рядов мы матрице A придадим треугольную блочную форму:

$$A = \begin{Vmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{ss} \end{Vmatrix}, \tag{9.159}$$

где диагональные блоки - квадратные неразложимые матрицы.

Диагональный блок A_i $(1 \le i \le s)$ будем называть *изолированным,* если

$$A_{ik} = 0 \quad (k= 1,2, ..., i- 1, i+ 1, ..., s).$$

Перестановкой блочных рядов в матрице (9.159) можно все изолированные блоки поставить на первые места вдоль главной диагонали, после чего матрица A примет вид

$$A = \begin{Vmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_g & 0 & \dots & 0 \\ A_{g+1,1} & A_{g+1,2} & \dots & A_{g+1,g} & A_{g+1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{sg} & A_{s,g+1} & \dots & A_s \end{Vmatrix}; \quad (9.160)$$

здесь $A_1, A_2, \dots, A_s$—неразложимые матрицы, а в каждом ряду

$$A_{f1}, A_{f2}, \dots, A_{f,f-1} \quad (f = g+1, \dots, s)$$

по крайней мере одна из матриц не равна нулю.

Матрицу (9.160) будем называть *нормальной формой* разложимой матрицы A.

Покажем, что *нормальная форма матрицы A определяется однозначно с точностью до перестановки блочных рядов.* (Не нарушая нормальной формы, можно произвольно переставить между собой первые g блочных рядов. Кроме того, иногда возможны некоторые перестановки между последними $s — g$ блочными рядами, которые сохраняют нормальность формы). Для этого рассмотрим линейный оператор $\boldsymbol{A}$, соответствующий матрице A в n-мерном векторном пространстве $\boldsymbol{R}$. Представлению матрицы A в виде (9.160) соответствует расщепление пространства $\boldsymbol{R}$ на координатные подпространства

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2 + \dots + \boldsymbol{R}_q + \boldsymbol{R}_{q+1} + \dots + \boldsymbol{R}_s; \quad (9.161)$$

при этом всегда $\boldsymbol{R}_s$, $\boldsymbol{R}_{s-1}+\boldsymbol{R}_s$, $\boldsymbol{R}_{s-2}+\boldsymbol{R}_{s-1}+\boldsymbol{R}_s$, ... — инвариантные координатные подпространства для оператора $\boldsymbol{A}$, причем между любыми двумя соседними из этих подпространств не существует промежуточного инвариантного подпространства.

Допустим, что наряду с нормальной формой (9.160) данной матрицы имеется другая нормальная форма, которая соответствует другому расщеплению $\boldsymbol{R}$ на координатные подпространства:

$$\boldsymbol{R} = \hat{\boldsymbol{R}}_1 + \hat{\boldsymbol{R}}_2 + \dots + \hat{\boldsymbol{R}}_g + \hat{\boldsymbol{R}}_{g+1} + \dots + \hat{\boldsymbol{R}}_t. \quad (9.162)$$

Однозначность нормальной формы будет показана, если мы докажем совпадение расщеплений (9.161) и (9.162) с точностью до порядка слагаемых.

Пусть инвариантное подпространство $\hat{\boldsymbol{R}}_t$ имеет общие координатные векторы с $\boldsymbol{R}_k$ и не имеет таковых с $\boldsymbol{R}_{k+1},\ldots\boldsymbol{R}_s$... Тогда $\hat{\boldsymbol{R}}_t$ должно целиком содержаться в $\boldsymbol{R}_k$, так как в противном случае $\hat{\boldsymbol{R}}_t$ содержало бы «меньшее» инвариантное подпространство — пересечение $\hat{\boldsymbol{R}}_t$ с $\boldsymbol{R}_k + \boldsymbol{R}_{k+1} + \ldots + \boldsymbol{R}_s$. Далее, $\hat{\boldsymbol{R}}_t$ должно совпасть с $\boldsymbol{R}_k$, так как в противном случае инвариантное подпространство $\hat{\boldsymbol{R}}_t + \boldsymbol{R}_{k+1} + \ldots + \boldsymbol{R}_s$ было бы промежуточным между инвариантными подпространствами $\boldsymbol{R}_k + \boldsymbol{R}_{k+1} + \ldots + \boldsymbol{R}_s$ и $\boldsymbol{R}_{k+1} + \ldots + \boldsymbol{R}_s$. Поскольку $\boldsymbol{R}_k$ совпадает с $\hat{\boldsymbol{R}}_t$, $\boldsymbol{R}_k$ — инвариантное подпространство. Поэтому без нарушения нормальной формы матрицы $\boldsymbol{R}_k$ может быть поставлено на место $\boldsymbol{R}_s$. Таким образом, мы можем считать в расщеплениях (9.161) и (9.162): $\boldsymbol{R}_s \equiv \hat{\boldsymbol{R}}_t$

Рассмотрим теперь координатное подпространство $\hat{\boldsymbol{R}}_{t-1}$. Пусть оно имеет общие координатные векторы $\boldsymbol{R}_l$ ($l < s$), но не имеет таковых с $\boldsymbol{R}_{l+1} + \ldots \ldots + \boldsymbol{R}_s$. Тогда инвариантное подпространство $\hat{\boldsymbol{R}}_{t-1} + \hat{\boldsymbol{R}}_t$ должно целиком содержаться в $\boldsymbol{R}_l + \boldsymbol{R}_{l+1} + \ldots \ldots + \boldsymbol{R}_s$, так как в противном случае существовало бы промежуточное инвариантное координатное подпространство между $\hat{\boldsymbol{R}}_t$ и $\hat{\boldsymbol{R}}_{t-1} + \hat{\boldsymbol{R}}_t$. Поэтому $\hat{\boldsymbol{R}}_{t-1} \subset \boldsymbol{R}_l$. Далее, $\hat{\boldsymbol{R}}_{t-1} \equiv \boldsymbol{R}_l$, поскольку в противном случае $\hat{\boldsymbol{R}}_{t-1} + \boldsymbol{R}_{l+1} + \ldots + \boldsymbol{R}_s$ было бы промежуточным инвариантным подпространством между $\boldsymbol{R}_l + \boldsymbol{R}_{l+1} + \ldots + \boldsymbol{R}_s$ и $\boldsymbol{R}_{l+1} + \ldots + \boldsymbol{R}_s$. Из $\hat{\boldsymbol{R}}_{t-1} \equiv \boldsymbol{R}_l$ следует, что $\boldsymbol{R}_l + \boldsymbol{R}_s$ — инвариантное подпространство. Поэтому $\boldsymbol{R}_l$ можно поставить на место $\boldsymbol{R}_{s-1}$ после чего будем иметь:

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{t-1} \equiv \boldsymbol{R}_{s-1} \qquad \hat{\boldsymbol{R}}_t \equiv \boldsymbol{R}_s.$$

Продолжая этот процесс далее, мы в конце концов придем к тому, что $s = t$ и что расщепления (9.161) и (9.162) совпадают с точностью до порядка слагаемых. Тогда с точностью до перестановки блочных рядов совпадают и соответствующие нормальные формы.

Из однозначности нормальной формы следует, что числа g и s являются некоторыми инвариантами для неотрицательной матрицы A. (Для неразложимой матрицы $g = s = 1$).

Пользуясь нормальной формой матрицы, докажем теорему:

Теорема 7. *Максимальному характеристическому числу r матрицы*

$A \geq 0$ соответствует положительный собственный вектор в том и только в том случае, когда в нормальной форме (9.159) *матрицы A:* 1° *каждая из матриц $A_1, A_2, \ldots, A_q$ имеет число r своим характеристическим числом и (при $g<s$)* 2° *ни одна из матриц $A_{q+1}, \ldots, A_s$ этим свойством не обладает.*

Доказательство. 1. Пусть максимальному характеристическому числу r соответствует положительный собственный вектор $z > 0$. В соответствии с разбиениями на блоки в (9.160) мы столбец z разобьем на части z^k $(k = 1, 2, \ldots, s)$. Тогда равенство

$$Az = rz \quad (z>0) \tag{9.163}$$

заменится двумя системами равенств:

$$A_i z^i = rz_i \quad (i = 1, 2, \ldots, g), \tag{9.164}$$

$$\sum_{h=1}^{j-1} A_{jh} z^h + A_j z^j = rz^j \quad (j = g+1, \ldots, s). \tag{9.165}$$

Из (9.164) следует, что число r является характеристическим числом каждой из матриц $A_1, A_2, \ldots, A_q$. Из (9.165) находим:

$$A_j z^j \leq rz^j, \quad A_j z^j \neq rz^j \quad (j = g+1, \ldots, s). \tag{9.166}$$

Обозначим через r_j максимальное характеристическое число матрицы A_j $(j = g + 1, \ldots, s)$... Тогда [см. (9.128)] из (9.166) находим:

$$r_j \leq \max_i \frac{(A_j z^j)_i}{z_i^j} \leq r \quad (j = g+1, \ldots, s).$$

С другой стороны, равенство $r_j = r$ противоречит вторым соотношениям (9.166) (см. замечание 5 п. 9.7). Поэтому

$$r_j < r \quad (j = g+1, \ldots, s). \tag{9.167}$$

2. Пусть теперь дано, что максимальные характеристические числа матриц A_i $(i = 1, 2, \ldots, g)$ равны r, а для матриц A_j $(j = g + 1, \ldots, s)$ имеют место неравенства (9.167). Тогда, заменяя искомое равенство (9.163) системой равенств (9.164), (9.165), мы сможем из (9.164) определить положительные собственные столбцы z^i матрицы A_i $(i = 1, 2, \ldots, g)$. После этого из (9.165) найдем столбцы z^j $(j = g + 1, \ldots, s)$:

$$z^j = (rE_j - A_j)^{-1} \sum_{h=1}^{j-1} A_{jh} z^h \quad (j = g+1, \ldots, s), \tag{9.168}$$

где E_j — единичная матрица того же порядка, что и матрица A_j $(j = g + 1, \ldots, s)$.

Поскольку $r_j < r$ $(j = g + 1, \ldots, s)$, то [см. (9.138)]

$$(rE_j - A_j)^{-1} > 0 \quad (j = g+1, \ldots, s). \tag{9.169}$$

Докажем индуктивно, что определенные по формулам (9.168) столбцы $z^{g+1}, \ldots, z^s$ положительны. Мы покажем, что при любом j

($g + 1 \leq j \leq s$) из положительности столбцов $z^1, z^2, ..., z^{j-1}$ следует: $z^j > 0$. Действительно, в этом случае

$$\sum_{h=1}^{j-1} A_{jh} z^h \geq 0, \quad \sum_{h=1}^{j-1} A_{jh} z^h \neq 0,$$

что в соединении с (9.169) на основании формулы (9.168) дает:

$$z^j > 0.$$

Таким образом, положительный столбец

$$z = \left\| \begin{matrix} z^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z^s \end{matrix} \right\|$$

будет собственным вектором для матрицы A при характеристическом числе r. Теорема доказана.

Следующая теорема дает нам характеристику матрицы $A \geq 0$, которая вместе со своей транспонированной матрицей A' обладает тем свойством, что максимальному характеристическому числу отвечает положительный собственный вектор.

Теорема 7'. *Максимальному характеристическому числу r матрицы $A \geq 0$ отвечает положительный собственный вектор матрицы A и положительный собственный вектор транспонированной матрицы A' в том и только в том случае, когда матрица A может быть перестановкой рядов представлена в квазидиагональном виде*

$$A = \{A_1, A_2, ..., A_s\}, \tag{9.170}$$

где $A_1, A_2, ..., A_s$ — неразложимые матрицы, каждая из которых имеет число r своим максимальным характеристическим числом.

Доказательство. Пусть матрицы A и A' имеют положительные собственные векторы для $\lambda = r$. Тогда по теореме 7 матрица A представима в нормальной форме (9.159), где матрицы $A_1, A_2, ..., A_q$ имеют максимальное характеристическое число r и (при $g < s$) матрицы $A_{g+1}, ..., A_s$ имеют максимальные характеристические числа $< r$. Тогда

$$A' = \left\| \begin{matrix} A'_1 & \dots & 0 & A'_{g+1,1} & \dots & A'_{s1} \\ \vdots & \ddots & & & & \\ 0 & \dots & A'_g & A'_{g+1,g} & \dots & A'_{sg} \\ 0 & \dots & 0 & A'_{g+1} & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & A'_s \end{matrix} \right\|.$$

Поменяем здесь порядок блочных рядов на обратный:

$$\left\| \begin{matrix} A'_s & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A'_{s,s-1} & A'_{s-1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ A'_{s1} & A'_{s-1\cdot 1} & & \dots & A'_1 \end{matrix} \right\|. \qquad (9.171)$$

Поскольку матрицы A'_s, A'_{s-1}..., A'_1 неразложимы, то из матрицы (9.171) перестановкой блочных рядов мы получим нормальную форму, поставив на первые места вдоль главной диагонали изолированные блоки. Одним из таких изолированных блоков является блок A'_s. Поскольку нормальная форма матрицы A' должна удовлетворять условию предыдущей теоремы, то максимальное характеристическое число матрицы A'_s должно равняться r. Это возможно лишь при $g = s$. В этом случае нормальная форма (9.159) переходит в (9.170).

Если, обратно, дано представление (9.170) для матрицы A, то тогда

$$A' = \{A'_1, A'_2, \dots, A'_s\}. \qquad (9.172)$$

Тогда из (9.170) и (9.172) в силу предыдущей теоремы заключаем, что матрицы A и A' имеют положительные собственные векторы для максимального характеристического числа r.

Теорема доказана.

Следствие. *Если максимальное характеристическое число* r *матрицы* $A \geq 0$ *является простым и ему соответствуют положительные собственные векторы матриц* A *и* A', *то* A *— неразложимая матрица.*

Поскольку, обратно, всякая неразложимая матрица обладает свойствами, которые указаны в этом следствии, то эти свойства представляют собой спектральную характеристику неразложимой неотрицательной матрицы.

9.10. Примитивные и импримитивные матрицы

Начнем с некоторой классификации неразложимых матриц.

Определение 3. Если неразложимая матрица $A\geq 0$ имеет всего h характеристических чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_h$ с максимальным модулем r ($\lambda_1 = |\lambda_2| = ... = |\lambda_h| = r$), то матрица A называется *примитивной* при h=1 *и импримитивной* при h>1. Число h называется *индексом импримитивности* матрицы A.

Индекс импримитивности h сразу определяется, если известны коэффициенты характеристического уравнения

$$\Delta(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n_1} + a_2\lambda^{n_2} + \ldots + a_t\lambda^{n_t} = 0$$

$$(n > n_1 > \ldots > n_t;\ a_1 \neq 0,\ \ a_2 \neq 0,\ \ldots,\ a_t \neq 0)$$

матрицы, а именно *число h равно наибольшему общему делителю разностей*

$$n - n_1, n_1 - n_2, ..., n_{t-1} - n_t. \tag{9.173}$$

Действительно, согласно теореме Фробениуса спектр матрицы A в комплексной λ-плоскости переходит в себя при повороте на угол $(2\pi)/h$ вокруг точки $\lambda = 0$. Поэтому многочлен $\Delta(\lambda)$ должен получиться из некоторого многочлена $g(\mu)$ по формуле

$$\Delta(\lambda) = g(\lambda^h)\lambda^{n'}.$$

Отсюда следует, что h — общий делитель разностей (9.173). Наконец, h равняется наибольшему общему делителю d этих разностей, так как спектр не изменяется при повороте на угол $(2\pi)/d$, а это невозможно при $h < d$.

Следующая теорема устанавливает свойство примитивной матрицы:

Теорема 8. *Матрица $A\geq 0$ является примитивной в том и только в том случае, когда некоторая степень матрицы A положительна:*

$$A^p > 0 \quad (p\geq 1). \tag{9.174}$$

Доказательство. Если $A^p>0$, то матрица A неразложима, так как из разложимости матрицы A следует разложимость матрицы A^p. Далее, для матрицы A число h=1, так как в противном случае положительная матрица A^p имела бы h (> 1) характеристических чисел $\lambda^p_1, \lambda^p_2, .., \lambda^p_h$ с максимальным модулем r^p, что противоречит теореме Перрона.

Пусть теперь, обратно, дано, что A — примитивная матрица. Воспользуемся для степени A^p формулой (3.94) модуля 3

$$A^p = \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{(m_k-1)!} \left[\frac{C(\lambda)\lambda^p}{\overset{k}{\psi}(\lambda)} \right]^{(m_k-1)}_{\lambda=\lambda_k}, \tag{9.175}$$

где

$$\psi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\dots(\lambda-\lambda_s)^{m_s} \ (\lambda_j \neq \lambda_f \text{ при } j \neq f)$$

- минимальный многочлен матрицы

$$A, \ \overset{k}{\psi}(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)^{m_k}} \ (k = 1, 2, \dots, s),$$

а $C(\lambda)$ — приведенная присоединенная матрица $C(\lambda) = (\lambda E - A)^{-1}\psi(\lambda)$. В данном случае можно положить:

$$\lambda_1 = r > |\lambda_2| \geqslant \dots \geqslant |\lambda_s|, \quad m_1 = 1. \tag{9.176}$$

Тогда формула (9.175) примет вид

$$A^p = \frac{C(r)}{\psi'(r)} r^p + \sum_{k=2}^{s} \frac{1}{(m_k-1)!} \left[\frac{C(\lambda)\lambda^p}{\overset{k}{\psi}(\lambda)} \right]^{(m_k-1)}_{\lambda=\lambda_k}.$$

Отсюда легко заключить в силу (9.176)

$$\lim_{p\to\infty} \frac{A^p}{r^p} = \frac{C(r)}{\psi'(r)}.$$

С другой стороны, $C(r)$ и $\psi'(r) > 0$ в силу (9.176). Поэтому

$$\lim_{p\to\infty} \frac{A^p}{r^p} > 0, \tag{9.177}$$

и, следовательно, начиная с некоторого p, имеет место неравенство (9.171).

Теорема доказана.

Замечание. *Если матрица А примитивна и* $A^p > 0$, *то* $A^m > 0$ *для всех* $m > p$, *так как матрица А не содержит нулевых рядов.*

Следствие. *Степень примитивной матрицы всегда неразложимо и притом примитивна.*

Для наименьшего номера $p = p_A$, начиная с которого выполняется неравенство (9.171), Фробениус указал верхнюю оценку, которая зависит только от порядка n матрицы A:

$$p_A \leq 2n^2 - 2n.$$

Виландт отметил (без доказательства), что на самом деле

$$p_A \leq 2n^2 - 2n + 2, \tag{9.178}$$

и эта оценка точна. Он достигается на матрице

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Приводимое ниже доказательство неравенства (9.178) по сути совпадает с доказательством, которое принадлежит Седлачеку.

Лемма. *Если А — примитивная матрица, то для любых двух (не обязательно различных) индексов i, k существует такая цепочка индексов* $i, i_1, i_2, ..., i_s, k (s \geq 0)$, *что*

$$a_{ii_1} > 0, a_{i_1 i_2} > 0, ..., a_{i_s k} > 0.$$

О такой цепочке будем говорить, что она ведет в матрице A из i в k. Число $s + 1$ назовем длиной цепочки. Очевидно, в кратчайшей цепочке, которая ведет из i в k, все индексы попарно различны.

Для доказательства леммы достаточно взять $s \geq 0$ так, чтобы было

$$A^{s+1} \equiv \| a_{ik}^{(s+1)} \|_1^n > 0.$$

Тогда

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_s = 1}^{n} a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_s k} = a_{ik}^{(s+1)} > 0,$$

и так как все слагаемые здесь неотрицательные, то по крайней мере одно из них положительно. Оно и дает требуемую цепочку индексов.

Перейдем к доказательству неравенства (9.178).

Обозначим через l_i наименьшую из длин цепочек, которые ведут в матрице A из i в i ($i = 1,2, ..., n$), и положим

$$l = \min_{1 \leq i \leq n} l_i.$$

(l можно определить как наименьший показатель, для которого матрица A^l имеет положительный диагональный элемент).

Пусть для определенности

$$a_{12} > 0, a_{23} > 0, \dots, a_{l1} > 0. \qquad (9.179)$$

Тогда в матрице A^l будут положительными первые l диагональных элементов:

$$a^{(l)}_{11} > 0, a^{(l)}_{23} > 0, \dots, a^{(l)}_{l\,l} > 0. \qquad (9.180)$$

Возьмем произвольный индекс i. Кратчайшая цепочка, которая ведет в матрице A из i в какой-нибудь из индексов 1, 2, ..., l, имеет, очевидно, длину, не большую $n — l$. В силу (9.179) эту цепочку можно продолжить за счет индексов 1,2,.., l до цепочки с длиной ровно $n — l$. Получится некоторая цепочка

$$i, i_1, i_2, ..., i_{n-l-1}, j,$$

где $1 \le j \le l$.

Возьмем еще один произвольный индекс k (не обязательно отличный от i). Так как матрица A^l, согласно следствию теоремы 8, тоже примитивна, то найдется цепочка индексов длины, не больше $n — l$, ведущая в матрице A^l из j в k. В силу (9.180) эту цепочку можно продолжить за счет индекса j до цепочки с длиной ровно $n — l$. Получится некоторая цепочка

$$j, j_1, j_2,...,j_{n-2},k...$$

Итак,

$$a_{ii_1} > 0, a_{i_1i_2} > 0, \ldots, a_{i_{n-l-1}j} > 0$$

и

$$a^{(l)}_{jj_1} > 0, a^{(l)}_{j_1j_2} > 0, \ldots, a^{(l)}_{j_{n-2}k} > 0.$$

Отсюда

$$a_{ii_1}a_{i_1i_2} \ldots a_{i_{n-l-1}j}a^{(l)}_{jj_1}a^{(l)}_{j_1j_2} \ldots a^{(l)}_{j_{n-2}k} > 0.$$

Следовательно,

$$a_{ik}^{(n-l+l(n-1))} > 0.$$

Ввиду произвольности индексов i, k оказывается

$$A^{n-l+l(n-1)} > 0.$$

Тем самым

$$p_A \leqslant n - l + l(n-1) = (n-2)\,l + n.$$

Заметим теперь, что $l \le n — 1$. Действительно, в противном случае $l = n$ и в силу определения числа l матрица A оказывается циклической:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

т.е. импримитивной. Таким образом,

$$p_A \le (n-2)(n-1) + n = n^2 - 2n + 2,$$

что и требовалось доказать.

Докажем теперь следующую теорему:

Теорема 9. *Если* $A \geq 0$ — *неразложимая матрица и некоторая степень* A^q *этой матрицы разложима, то степень* A^q *вполне разложима, т.е. перестановкой рядов* A^q *может быть представленная в виде*

$$A^q = \{A_1, A_2, ..., A_d\}, \tag{9.181}$$

где $A_1, A_2, ..., A_d$ — *неразложимые матрицы. Эти матрицы имеют одно и то же максимальное характеристическое число. При этом число d есть наибольший общий делитель чисел q и h, где h — индекс импримитивности матрицы A.*

Доказательство. Поскольку матрица A является неразложимой, то согласно теореме Фробениуса максимальному характеристическому числу r отвечают положительные собственные векторы матриц A и A'. Но тогда эти же положительные векторы являются собственными для неотрицательных матриц A^q и $(A^q)'$ при характеристическом числе $\lambda = r^q$. Поэтому, применяя к степени A^q теорему 7', мы представим (после надлежащей перестановки рядов) эту степень в виде (9.181), где $A_1, A_2, ..., A_d$ — неразложимые матрицы с одним и тем же максимальным характеристическим числом r^q. Но матрица A имеет h характеристических чисел с максимальным модулем r:

$$r, r\varepsilon, \ldots, r\varepsilon^{h-1} \qquad \left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{h}}\right).$$

Поэтому и матрица A^q имеет h характеристических чисел с максимальным модулем

$$r^q, r^q\varepsilon^q, \ldots, r^q\varepsilon^{q(h-1)},$$

среди которых d чисел равны r^q. Это возможно лишь тогда, когда d — наибольший общий делитель чисел q и h. Теорема доказана.

Если в формулировке теоремы положить $q=h$, то получим ***Следствие***. *Если A — импримитивная матрица с индексом импримитивности h, то степень* A^h *раскладывается на h примитивных матриц, которые имеют одно и то же максимальное характеристическое число.*

Модуль 10
Введение в стохастические матрицы

Микромодуль 25
Стохастические матрицы

10.1. Основные понятия и определения

Рассмотрим n возможных состояний некоторой системы

$$S_1, S_2, \ldots, S_n \qquad (10.1)$$

и последовательность моментов времени

$$t_0, t_1, t_2 \ldots$$

Пусть в каждый из этих моментов времени система находится в одном и только в одном из состояний (10.1), причем p_{ij} обозначает вероятность нахождения системы в состоянии S_j в момент времени t_k, если известно, что в предыдущий момент времени t_{k-1} система находилась в состоянии S_i $(i,\ j\ =\ 1,2,\ \ldots,\ n;\ k\ =1,2,\ldots)$. Мы будем предполагать,что *переходные вероятности* p_{ij} $(i,\ j\ =1,2,\ldots\ \ldots,\ n)$ не зависят от индекса k (номера момента времени t_k).

Если матрица переходных вероятностей

$$P=\|\,p_{ij}\,\|^n{}_1$$

задана, то говорят, что задана *однородная цепь Маркова с конечным числом состояний*. При этом очевидно, что

$$p_{ij} \geqslant 0, \quad \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (10.2)$$

Определение. Квадратная матрица $P=\|p_{ij}\|^n{}_1$ называется *стохастической,* если матрица P неотрицательна и сумма элементов каждой строки матрицы P равна единице, т.е. имеют место соотношения (10.2) (Иногда определение стохастической матрицы включают дополнительное требование $\sum_{i=1}^{n} p_{ij} \neq 0\ (j = 1, 2, \ldots, n).$).

Таким образом, для каждой однородной цепи Маркова матрица переходных вероятностей является стохастической и, наоборот, любая стохастическая матрица может быть рассмотрена как матрица переходных вероятностей некоторой однородной цепи Маркова. На этом основывается матричный исследовательский прием однородных цепей Маркова.

Стохастическая матрица является частным видом неотрицательной матрицы. Поэтому к ней применяются все понятия и положения предыдущих пунктов.

Отметим некоторые специфические свойства стохастической матрицы. Из определения стохастической матрицы следует, что эта матрица имеет характеристическое число 1 с положительным собственным вектором z = (1, 1, ..., 1). Легко видеть, что, и обратно, всякая матрица $P\geq 0$, имеющая собственный вектор (1, 1, ..., 1) при характеристическом числе 1, является стохастической. При этом единица является максимальным характеристическим числом стохастической матрицы, поскольку максимальное характеристическое число всегда заключено между наибольшей и наименьшей из строчных сумм, а для стохастической матрицы все строчные суммы равны единице. Таким образом, доказано предложение:

1° *Неотрицательная матрица* $P\geq 0$ *является стохастической тогда и только тогда, когда она имеет собственный вектор* (1, 1, ..., 1) *при характеристическом числе* 1. *Характеристическое число* 1 *является максимальным для стохастической матрицы.*

Пусть теперь дана неотрицательная матрица $A=\|a_{ik}\|^n_1$, имеющая положительное максимальное характеристическое число $r>0$ и соответствующий этому числу положительный собственный вектор $z=(z_1, z_2, ..., z_n)>0$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_j = rz_i \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{10.3}$$

Введем в рассмотрение диагональную матрицу $Z=\{z_1, z_2, ..., z_n\}$ и матрицу $P=\|p_{ij}\|^n_1$

$$P=\frac{1}{r}Z^{-1}AZ.$$

Тогда

$$p_{ij}=\frac{1}{r}z_i^{-1}a_{ij}z_j \geqslant 0 \quad (i, j=1, 2, \ldots, n),$$

и в силу (10.3)

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}=1 \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом,

2° *Неотрицательная матрица* $A\geq 0$, *имеющая положительное максимальное характеристическое число* $r>0$ *и соответствующий этому числу положительный собственный вектор* $z=(z_1, z_2, ..., z_n)>0$, *всегда подобна произведению числа r на некоторую стохастическую матрицу:*

$$A = ZrPZ^{-1} \qquad (Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\} > 0) \tag{10.4}$$

(Предложение 2° имеет место и при $r = 0$, так как из $A \geq 0$, $z > 0$ следует $A = 0$).

В предыдущем пункте была установленная (см. теорему 7) характеристика класса ненеотрицательных матриц, которые имеют положительный собственный вектор при $\lambda = r$. Формула (10.4) устанавливает тесную связь этого класса матриц с классом стохастических матриц.

Докажем теперь следующую теорему:

Теорема 10. *Характеристическому числу* 1 *стохастической матрицы всегда соответствуют только элементарные делители первой степени.*

Доказательство. Применим к стохастической матрице $P = \|p_{ij}\|^n_1$ разложение (9.159) :

$$P = \begin{Vmatrix} A_1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & A_g & 0 \ \ldots & 0 \\ A_{g+1,1} & \ldots & \ldots & A_{g+1,g} & A_{g+1} \ \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \ldots & \ldots & A_{sg} & \ldots & A_s \end{Vmatrix},$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_s$ — неразложимые матрицы и

$$A_{f1} + A_{f2} + \ldots + A_{f,\,f-1} \neq 0 \qquad (f = g+1, \ldots, s).$$

Здесь $A_1\ A_2, \ldots, A_g$ — неразложимые стохастические матрицы, и потому каждая из этих матриц имеет простое характеристическое число 1. Что же касается остальных неразложимых матриц $A_{g+1}, \ldots, A_s$, то согласно замечанию 2 п. 9.7 их максимальные характеристические числа < 1, поскольку в каждой из этих матриц хотя бы одна строчная сумма меньше единицы (эти свойства матриц $A_1 \ldots . A_s$ вытекают также из теоремы 7). Таким образом, матрица P представима в виде

$$P = \begin{Vmatrix} Q_1 & 0 \\ S & Q_2 \end{Vmatrix},$$

где в матрице Q_1 характеристическому числу 1 соответствуют элементарные делители первой степени, а для матрицы Q_2 число 1 не является характеристическим числом. После этого справедливость теоремы непосредственно вытекает из следующей леммы:

Лемма 4. *Если матрица A имеет вид*

$$A = \begin{Vmatrix} Q_1 & 0 \\ S & Q_2 \end{Vmatrix}, \tag{10.5}$$

где Q_1 и Q_2 — квадратные матрицы, и характеристическое число λ_0 матрицы A является характеристическим числом матрицы Q_1 и не является таковым для матрицы Q_2,

$$|Q_1 - \lambda_0 E| = 0, \quad |Q_2 - \lambda_0 E| \neq 0,$$

это элементарные делители матриц A и Q_1, соответствующие характеристическому числу λ_0, одинаковы.

Доказательство. 1. Рассмотрим сначала случай, когда Q_1 и Q_2 не имеют общих характеристических чисел. Покажем, что в этом случае элементарные делители матриц Q_1 и Q_2 в совокупности образуют систему элементарных делителей матрицы A, т.е. что при некоторой матрице T ($|T| \neq 0$)

$$TAT^{-1} = \begin{Vmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{Vmatrix}. \tag{10.6}$$

Матрицы T будем искать в виде

$$T = \begin{Vmatrix} E_1 & 0 \\ U & E_2 \end{Vmatrix}$$

(разбиение на блоки в T соответствует разбиению в A; E_1 и E_2 — единичные матрицы). Тогда

$$TAT^{-1} = \begin{Vmatrix} E_1 & 0 \\ U & E_2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} Q_1 & 0 \\ S & Q_2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} E_1 & 0 \\ -U & E_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Q_1 & 0 \\ UQ_1 - Q_2U + S & Q_2 \end{Vmatrix}. \tag{10.7}$$

Равенство (10.7) перейдет в равенство (10.6), если прямоугольную матрицу U подберем так, чтобы она удовлетворяла матричному уравнению

$$Q_2U - UQ_1 = S.$$

В случае, когда Q_1 и Q_2 не имеют общих характеристических чисел, это уравнение при любой правой части S всегда имеет одно определенное решение.

2. В случае, когда матрицы Q_1 и Q_2 могут иметь и общие характеристические числа, мы заменим в (10.5) матрицу Q_1 ее

жордановой формой J (в результате этого матрица A заменится матрицей, ей подобной). При этом $J= \{J_1, J_2\}$, где в J_1 собраны все жордановы клетки с характеристическим числом λ_0. Тогда

$$A = \begin{Vmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 \\ S_{11} & S_{12} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{Q_2}} \\ S_{21} & S_{22} & & \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ S_{11} & & \hat{Q}_2 & \\ S_{21} & & & \end{Vmatrix}.$$

Эта матрица подходит под разобранный уже первый случай, поскольку матрицы J_1 и $\hat{Q}_2$ не имеют общих характеристических чисел. Отсюда следует, что элементарные делители вида $(\lambda - \lambda_0)^p$ одинаковы у матриц A и J_1 и, следовательно, одинаковы у матриц A и Q_1. Лемма доказана.

Если неразложимая стохастическая матрица P имеет комплексное характеристическое число λ_0 с $|\lambda_0| = 1$, то матрица $\lambda_0 P$ подобна матрице P и потому из теоремы 10 вытекает, что числу λ_0 отвечают только элементарные делители первой степени. Пользуясь нормальной формой матрицы и леммой 4, легко распространить это утверждение и на разложимые стохастические матрицы. Таким образом, получаем следствие.

Следствие 1. *Если λ_0 — характеристическое число стохастической матрицы и $|\lambda_0|=1$, то этому числу λ_0 соответствуют элементарные делители первой степени матрицы P.*

Из теоремы 10 в силу 2° вытекает также следствие.

Следствие 2. *Если максимальному характеристическому числу r неотрицательной матрицы A отвечает положительный собственный вектор, то все элементарные делители матрицы A, соответствующие любому характеристическому числу λ_0 с $|\lambda_0| = r$, имеют первую степень.*

Укажем на некоторые работы, связанные с расположением характеристических чисел стохастической матрицы.

Характеристическое число стохастической матрицы P всегда лежит в круге $|\lambda|\leq 1$ λ-плоскости. Совокупность всех точек этого круга, являющихся характеристическими числами каких-либо стохастических матриц n-го порядка, обозначим через M_n.

Колмогоровым буда поставлена задача определения структуры области M_n. Эта задача была частично решена Н. А. Дмитриевым и Е. Б. Дынкиним и полностью решена Ф. И. Карпелевичем. Оказалось, что граница M_n состоит из конечного числа точек на окружности $|\lambda|=1$ и определенных криволинейных дуг, которые соединяют в круговом порядке эти точки.

Заметим, что в силу предложения 2° характеристические числа матриц $A=\|a_{ik}\|^n{}_1 \geq 0$, имеющих положительный собственный вектор при $\lambda=r$, при фиксированному r образуют множество $r \cdot M_n$ ($r \cdot M_n$ есть совокупность точек λ-плоскости вида $r\mu$, где $\mu \in M_n$). Поскольку произвольная матрица $A=\|a_{ik}\|^n{}_1 \geq 0$ может быть рассматриваемая как предел последовательности неотрицательных матриц указанного типа, а множество $r \cdot M_n$ замкнуто, то характеристические числа произвольных матриц $A=\|a_{ik}\|^n{}_1 \geq 0$ с данным максимальним характеристичним числом r заполняют множество $r \cdot M_n$.

10.2. Марковские процессы и матрицы

10.2.1. Постранство состояний. Эволюция системы

Пусть имеется некоторая физическая система S, которая с течением времени может менять свое состояние. Как мы знаем, состояние системы в каждый момент времени можно характеризовать набором численных значений ее параметров. Эти параметры будем называть *фазовыми координатами системы*, а состояние системы изображать в виде точки s с этими координатами в некотором условном *фазовом пространстве*. Тогда изменению состояния системы в процессе ее эволюции соответствует некоторая *траектория точки s в фазовом пространстве*. Фазовое пространство может быть различным в зависимости от числа параметров, характеризующих состояние системы, и от мощности множества возможных состояний системы. В зависимости от числа параметров системы фазовое пространство может быть одномерным, двумерным и вообще n-мерным, (n — произвольное целое положительное число). Множество возможных состояний системы (т. е. множество возможных значений параметров системы и их комбинаций) может быть *конечным, счетным или несчетным*. В соответствии с этим фазовое пространство может быть *дискретным* либо *непрерывным*.

Процесс эволюции системы во времени также может протекать непрерывно либо дискретно. Будем говорить, что процесс в системе протекает дискретно, если состояние системы меняется лишь в определенные моменты времени, которые можно пронумеровать.

Рассмотрим случайный процесс в некоторой физической системе, протекающий в дискретном фазовом пространстве:

$$E = \{0,1,2,...\},$$

причем множество моментов времени перехода системы из одного состояния в другое также дискретно, т. е.

$$T=\{0, 1, 2, ...\}.$$

Введем случайную величину $\xi_l \in E$, соответствующую номеру состояния, в котором находится система в момент времени l. Обозначим через E_{li} событие, состоящее в том, что в момент времени l система находится в состоянии i, т. е. $E_{li} \sim (\xi_l = i)$.

Полное теоретико-вероятностное описание эволюции системы состоит в определении вероятности того, что для произвольных наборов $l_1, l_2, ..., l_k$ $(l_1 < l_2 < \ldots < l_k)$ и $i_1, i_2, ..., i_k$ имеет место событие

$$E_{l_1 l_2 \ldots l_k, i_1 i_2 \ldots i_k} = E_{l_1 i_1} \cap E_{l_2 i_2} \cap \ldots \cap E_{l_k i_k} = \bigcap_{t=1}^{k} E_{l_t i_t},$$

т. е. в заданные k моментов времени система находится в заданных состояниях.

Понятно, что вероятность события

$$E_{l_1 l_2 \ldots l_k, i_1 i_2 \ldots i_k}$$

может быть в принципе вычислена через систему условных вероятностей следующим образом:

$$P(E_{l_1 i_1} \cap E_{l_2 i_2} \cap \ldots \cap E_{l_k i_k} = P(E_{l_1 i_1}) P(E_{l_2 i_2} | E_{l_1 l_1}) \ldots$$
$$\ldots P(E_{l_k i_k} | E_{l_1 i_1} \cap E_{l_2 i_2} \cap \ldots \cap E_{l_{k-1} i_{k-1}}). \quad (10.8)$$

Однако такое описание поведения системы является достаточно сложным. Вместе с тем существует класс случайных процессов, для которых требуемое описание может быть получено более простым путем. Это класс марковских случайных процессов.

10.2.2. Маркоский процесс. Цепи Маркова

Процесс, протекающий в физической системе, называется марковским (или процессом без последействия), если для каждого момента времени поведение системы в будущем зависит только от состояния системы в данный момент и не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние. Иначе говорят, что процесс обладает марковским свойством.

Случайный процесс с дискретным временем будем называть случайной последовательностью или случайной цепью.

Случайная цепь, для которой в каждый момент времени дальнейшая последовательность событий зависит только от состояния системы в данный момент, называется марковской цепью.

Иначе, случайная цепь, обладающая марковским свойством, называется простой марковской. Математически это означает следующее:

для любого $s = (2, 3, ..., k)$

$$P(\xi_{l_s} = i_s \mid \xi_{l_{s-1}} = i_{s-1}, \xi_{l_{s-2}} = i_{s-2}, \xi_{l_{s-3}} = i_{s-3}, ..., \xi_{l_1} = i_1) =$$
$$= P(E_{l_s i_s} \mid E_{l_{s-1} i_{s-1}} \cap E_{l_{s-2} i_{s-2}} \cap \dots \cap E_{l_1 l_1}) =$$
$$= P(E_{l_s i_s} \mid E_{l_{s-1} i_{s-1}}). \tag{10.9}$$

Тогда

$$P(E_{l_1 i_1} \cap E_{l_2 i_2} \cap \dots \cap E_{l_s i_s}) =$$
$$= P(E_{l_1 i_1}) P(E_{l_2 i_2} \mid E_{l_1 i_1}) P(E_{l_3 i_3} \mid E_{l_2 i_2}) \dots P(E_{l_s i_s} \mid E_{l_{s-1} l_{s-1}})$$

или

$$P\left(\bigcap_{t=1}^{s} E_{l_t i_t}\right) = P(E_{l_1 l_1}) \prod_{t=2}^{s} P(E_{l_t i_t} \mid E_{l_{t-1} i_{t-1}}).$$

Рассмотрим два смежных момента времени: l-й и $(l+1)$-й. Введем

$$w_{ij}(l, l+1) = P(E_{l+1, j} \mid E_{l, i}) \tag{10.10}$$

— условную вероятность перехода системы за один шаг из состояния i в момент времени l в состояние j в момент времени $(l+1)$.

Если вероятность перехода $w_{ij}(l, l+1)$ не зависит от момента времени, когда осуществляется переход, для всех $(i, j) \in E$, т. е. $w_{ij}(l, l+1) = w_{ij}$, то соответствующая марковская цепь называется *однородной.*

Вероятность перехода $w_{ij} > 0$, если переход из состояния i в состояние j возможен за один шаг; в противном случае $w_{ij} = 0$.

Совокупность вероятностей перехода w_{ij} для всех $(i, j) \in E$ образует матрицу переходов **W**, часто называемую стохастической.

Элементы матрицы переходов удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{j\in\mathscr{E}} w_{ij}=1, \quad i\in\mathscr{E},$$

$$w_{ij}\geqslant 0, \quad (i,j)\in\mathscr{E}.$$

Рассмотрим совокупность вероятностей $\{\mathbf{P}(\xi_l=i)\}$, $i\in$ Е, характеризующую распределение вероятностей пребывания системы в различных состояниях в момент времени l. Введенное распределение будем называть в дальнейшем вектодом-состояний системы в момент времени l и обозначать через $\mathbf{P}(l)$, причем

$$\mathbf{P}(l)=(P_0(l)\,P_1(l)\,P_2(l)\,\ldots), \qquad l\in T,$$

где

$$P_i(l)=P(\xi_l=i), \quad i\in\mathscr{E}. \tag{10.11}$$

Вектор состояний $\mathbf{P}(0) = (P_0\ (0)\ P_1\ (0)P_2(0)\ ...)$, соответствующий распределению вероятностей состояний системы в нулевой момент времени, будем называть начальным. Понятно, что при наличии начального вектора системы $\mathbf{P}(0)$ и матрицы переходов $\mathbf{W}$ можно проследить эволюцию системы. Действительно,

$$P_j(1)=\sum_{i\in\mathscr{E}} P_i(0)\,w_{ij}, \quad j\in\mathscr{E}.$$

Это же соотношение в матричных обозначениях имеет вид

$$\mathbf{P}(1) = \mathbf{P}_2\,(0)\mathbf{W}. \tag{10.12}$$

Аналогично

$$\mathbf{P}(2) = \mathbf{P}(1)\mathbf{W} \tag{10.13}$$

или, подставляя (10.12) в (10.13),

$$\mathbf{P}(2) = \mathbf{P}(0)(\mathbf{W})^2.$$

Точно так же

$$\mathbf{P}(3) = \mathbf{P}(0)(\mathbf{W})^3$$

и, вообще,

$$\mathbf{P}\,(l)=\mathbf{P}(0)(\mathbf{W})^l. \tag{10.14}$$

С другой стороны, введем совокупность $w_{ij}^{(l)}$- условных вероятностей перехода системны из состояния i в состояние j за l шагов. Переход из состояния i в состояние j за l шагов может быть осуществлен различными путями. Условная вероятность $w_{ij}^{(l)}$ есть сумма вероятностей переходов из i в j для всех возможных путей. При этом, в частности,

$$w_{ij}^{(1)}=w_{ij} \quad \text{и} \quad w_{ij}^{(2)}=\sum_{\nu\in\mathscr{E}} w_{i\nu}^{(1)}w_{\nu j}^{(1)}.$$

По индукции легко показать, что

$$w_{ij}^{(l+m)} = \sum_{\nu \in \mathcal{E}} w_{i\nu}^{(l)} w_{\nu j}^{(m)}, \quad (i, j) \in \mathcal{E}. \tag{10.15}$$

Система уравнений (10.15) носит название уравнений Чэпмена—Колмогорова.

В матричной форме эти уравнения записываются следующим образом:

$$\mathbf{W}^{(l+m)} = \mathbf{W}^{(l)} \mathbf{W}^{(m)}.$$

Используя матрицу переходов за l шагов и начальный вектор состояния системы, легко получить вектор состояния в момент l. Тогда

$$P_j(l) = \sum_{i \in \mathcal{E}} P_i(0) w_{ij}^{(l)}, \quad j \in \mathcal{E},$$

или

$$\mathbf{P}(l) = \mathbf{P}(0)\mathbf{W}^{(l)} \tag{10.16}$$

где $(\mathbf{W})^{(l)}$ — матрица вероятностей переходов за l шагов.

Сравнивая (10.14) и (10.16), получаем

$$\mathbf{W}^{(l)} = (\mathbf{W})^{l}.$$

Таким образом, матрица переходов за l шагов равна l-й степени матрицы переходов за один шаг.

10.2.3. Классификация состояний

Введем несколько определений.

Состояние j *достижимо* из состояния i, если существует такое k, что $w_{ij}^{(k)} > 0$.

Подмножество C множества возможных состояний Е называется замкнутым, если за один шаг невозможны никакие переходы из состояния, входящего в C, в состояние, не входящее в C, т. е. $w_{ij} = 0$ для всех $j \notin C$.

Цепь называется *неприводимой*, если соответствующее ей множество всех возможных состояний не содержит никаких замкнутых подмножеств, кроме самого себя.

Состояние i называется *возвратным,* если вероятность того, что система, выйдя из этого состояния, когда-либо вернется в него же, равна единице. Если же эта вероятность меньше единицы, то состояние называется *невозвратным.*

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Состояние i является возвратным тогда и только тогда, когда ряд

$$\sum_{l=0}^{\infty} w^{(l)}{}_{ii}$$

расходится, т. е.

$$\lim_{r\to\infty}\sum_{l=0}^{r} w_{ii}^{(l)}=\infty.$$

Смысл высказанного в теореме утверждения становится понятным, если принять во внимание, что

$$\lim_{r\to\infty}\sum_{l=0}^{r} w_{ii}^{(l)}$$

легко интерпретируется как среднее число возвращений системы в состояние i. В самом деле, введем случайную величину

$$\eta_{li}=\begin{cases}0, & \text{если } \xi_l\neq i,\\ 1, & \text{если } \xi_l=i.\end{cases}$$

Тогда

$$\eta_i=\sum_{l=1}^{\infty}\eta_{li}$$

есть, очевидно, число пребываний системы в состоянии i и

$$M[\eta_i]=\sum_{l=1}^{\infty}M[\eta_{li}]=\sum_{l=1}^{\infty}w_{ii}^{(l)}=\lim_{r\to\infty}\sum_{l=1}^{r}w_{ii}^{(l)}$$

есть среднее число возвращений системы в состояние i.

Теперь понятно, что если исходное состояние i является возвратным, то система с вероятностью 1 за бесконечное число шагов бесконечно много раз возвратится в i. Если же состояние i является невозвратным, то за бесконечное число шагов система с вероятностью 1 лишь конечное число раз побывает в состоянии i, другими словами, после некоторого конечного числа шагов она никогда больше не возвратится в i.

Отсюда следует, что если i — возвратное состояние и j достижимо из i, то и i, в свою очередь, достижимо из j. Действительно, в противном случае, выйдя из состояния i, система с положительной вероятностью $w^{(l)}{}_{ij}$ = α попадала бы в состояние j, из которого i недостижимо; таким образом, вероятность возвращения в i была бы не больше чем 1— α, что противоречит возвратности i. Теперь понятно, что если состояние j достижимо из возвратного состояния i, то и состояние j является возвратным.

Наконец, нетрудно видеть, что если цепь Маркова имеет конечное число состояний, причем каждое из них достижимо из любого другого состояния, то все они являются возвратными. Действительно, если имеется лишь конечное число состояний, то за бесконечное число шагов хотя бы в одном из них система побывает бесконечное число раз, т. е. хотя бы одно из состояний системы является возвратным. Поскольку по условию из него можно с положительной вероятностью перейти в любое другое состояние, то все они являются возвратными.
Состояние i называется *поглощающим,* если вероятность ухода системы из этого состояния в любое другое равна нулю, т. е.

$$w_{ij}^{(1)}=0,\ j\in\mathscr{E},\ j\neq i.$$

Ясно, что если в системе имеется хотя бы одно поглощающее состояние, то ни одно из состояний системы не является возвратным.
Предположим, что в момент времени 0 система находится в произвольном, но фиксированном состоянии i, т. е. $\xi_0=i$. Пусть $f_i^{(l)}$ — вероятность того, что первое возвращение в i произойдет в момент l. При этом ясно, что

$$f_i^{(1)}=w_{ii},$$
$$f_i^{(2)}=w_{ii}^{(2)}-f_i^{(1)}w_{ii},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f_i^{(l)}=w_{ii}^{(l)}-f_i^{(1)}w_{ii}^{(l-1)}-f_i^{(2)}w_{ii}^{(l-2)}-\dots-f_i^{(l-1)}w_{ii}.$$

Сумма

$$F_i=\sum_{l=1}^{\infty}f_i^{(l)}$$

может быть интерпретирована как вероятность того, что система, выйдя из состояния i, когда-либо вернется в это состояние.

Если $F_i=l$, то это возвращение обязательно произойдет. Введем параметр

$$\mu_i=\sum_{l=1}^{\infty}lf_i^{(l)},$$

равный математическому ожиданию времени возвращения.
Возвратное состояние i, для которого $\mu_i=\infty$, называется нулевым. Возвратное состояние, для которого возвращение возможно лишь через число шагов, кратное d, называется периодическим (с периодом

d). Возвратное состояние, не являющееся ни нулевым,ни периодическим, называется *эргодическим*.

10.2.4. Предельный вектор

В п. 1.2.2 была введена вероятность $w^{(l)}_{ij}$ перехода системы из состояния i в состояние j за l шагов. Во многих прикладных задачах требуется изучить асимптотическое поведение $w^{(l)}_{ij}$ при $l \to \infty$.

Введем распределение $\{\pi_k\}$, которое будем называть *стационарным*, если

$$\pi_j = \sum_{i \in \mathcal{E}} \pi_i w_{ij}, \quad j \in \mathcal{E}. \tag{10.17}$$

Соотношение (10.17) в векторно-матричной форме имеет вид

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi W}, \tag{10.18}$$

где $\mathbf{\Pi}$=($\pi_0, \pi_1, ..., \pi_k, ...$) — стационарное распределение (распределение $\{\pi_k\}$ часто называют вектором предельных (финальных) вероятностей).

Возможность существования стационарного распределения устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2. Если все состояния неприводимой цепи являются эргодическими, то для любой пары состояний i и j

$$\lim_{l \to \infty} w^{(l)}_{ij} = \pi_j$$

существует и не зависит от i, причем $\pi_j = 1/\mu_j$, где μ_j— среднее время возвращения в состояние j. Величины π_j удовлетворяют уравнениям

$$\pi_j = \sum_{i \in \mathcal{E}} \pi_i w_{ij}, \quad j \in \mathcal{E},$$

где

$$\sum_{j \in \mathcal{E}} \pi_j = 1.$$

Распределение { π_j } является при этом единственным. Заметим, что если множество состояний конечно и Е = {0, 1, 2, ... n}, то

$$\lim_{l\to\infty} \mathbf{W}^{(l)} = \begin{vmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_j & \dots & \pi_n \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_j & \dots & \pi_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_j & \dots & \pi_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_j & \dots & \pi_n \end{vmatrix}, \tag{10.19}$$

поэтому, в соответствии с (10.14)

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{P}(0) \lim_{l\to\infty} \mathbf{W}^{(l)} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_j, \dots, \pi_n)$$

и не зависит от начального распределения.

Таким образом, предельный вектор существует в том и только в том случае, если все состояния неприводимой цепи являются эргодическими.

Понятно, что если цепь имеет конечное число возможных состояний, каждое из них достижимо из любого другого состояния и не является периодическим, то предельный вектор для такой цепи существует. Если же состояния цепи являются периодическими, то $\lim\limits_{l\to\infty} \mathbf{W}^{(l)}$ не существует, хотя стационарное распределение, удовлетворяющее (10.17), может существовать.

Так, например, для цепи с двумя состояниями и матрицей переходов

$$\mathbf{W} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

предельной матрицы нет, так как

$$\mathbf{W}^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{W}^{(3)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \dots, \mathbf{W}^{(2k)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{W}^{(2k+1)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \dots,$$

в то время как предельное распределение существует и

$$\mathbf{\Pi} = | \, ^1/_2, \quad ^1/_2 \, |.$$

Совокупность линейных алгебраических уравнений (10.17), дополненная условием нормировки

$$\sum_{j\in\mathscr{E}} \pi_j = 1,$$

позволяет рассчитать компоненты предельного вектора. Важно заметить, что существование предельного распределения и численные значения его компонент не зависят, как уже было сказано, от начального распределения вероятностей состояний системы **P**(0), а целиком определяются лишь стохастической матрицей **W**. Систему, для которой предельный вектор существует, будем называть эргодической.

10.2.5. Отображение марковской цепи в виде графа

Рассмотрим стохастическую матрицу **W** марковской цепи. Если некоторый элемент w_{ij} этой матрицы отличен от нуля, переход из состояния i в состояние j возможен за один шаг.

Множество всех состояний системы и выполнимых переходов очень удобно отображать в виде графа. Введем следующее определение. *Граф* есть совокупность вершин, соединенных направленными дугами. Соответствие между множеством состояний и возможных переходов системы, с одной стороны, и множеством вершин и дуг графа, с другой, установим следующим образом.

Множество состояний системы отображается совокупностью вершин графа, а возможные переходы системы — в виде дуг графа, причем направление дуги указывает, из какого состояния и в какое переходит система. Каждой дуге графа припишем число, равное соответствующей вероятности перехода системы за один шаг. Таким образом, матрица переходов системы **W** и ее граф взаимно однозначно соответствуют друг другу.

Пусть, например, матрица переходов системы имеет вид

$$\mathbf{W} = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Соответствующий этой системе граф изображен на рис. 10.1.

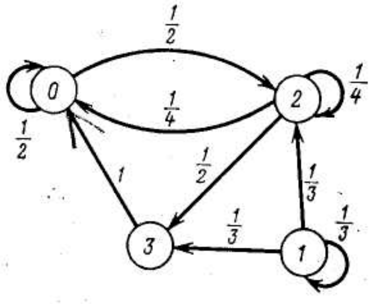


Рис. 10.1.

10.2.6. Примеры применения теории цепей Маркова

Пример 1 (случайное блуждание). Рассмотрим случайное блуждание, при котором частица из каждой целочисленной точки i на следующем шаге с вероятностью p переходит в соседнюю справа точку j=i+1 и с вероятностью q — в соседнюю слева точку $j = i$—1, (p+ q =1). Ясно, что в этом случае

$$w_{ij}^{(1)} = \begin{cases} p, & j = i + 1, \\ q, & j = i - 1, \\ 0, & (j = i) \vee (|j - i| > 1). \end{cases}$$

Матрица переходов **W** системы имеет вид

$$\mathbf{W} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & q & 0 & p & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & q & 0 & p & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & q & 0 & p & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & p & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Понятно, что каждое состояние этой цепи достижимо из любого другого состояния. Непосредственно можно убедиться в том, что

$$w_{ii}^{(l)} = \begin{cases} 0, & l = 2k + 1, \\ C_{2k}^{k} p^k q^k, & l = 2k, \ k > 0. \end{cases}$$

Используя формулу Стерлинга, при $k \to \infty$ получаем

$$C_{2k}{}^k p^k q^k = \frac{(2k)!}{(k!)^2} p^k q^k \approx \frac{\sqrt{4\pi k}\left(\frac{2k}{e}\right)^{2k} p^k q^k}{\left(\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k\right)^2} = \frac{(4pq)^k}{\sqrt{\pi k}},$$

где $4pq = (p+q)^2 — (p—q)^2 = 1 — (p—q)^2 \leq 1$, причем знак равенства имеет место лишь при $p = q = {}^1/_2$.
Таким образом, при $k \to \infty$

$$w_{ii}^{(2k)} \approx \frac{1}{\pi k}(4pq)^k,$$

откуда следует, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_{ii}^{(2k)} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4pq)^k}{\sqrt{\pi k}}$$

сходятся или расходятся одновременно.
Если $p \neq q$, то $4pq < 1$ и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_{ii}^{(2k)}$$

сходится в соответствии с признаком Даламбера, так как

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(4pq)^{k+1}\sqrt{\pi k}}{(4pq)^k \sqrt{\pi(k+1)}} = 4pq \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{k}{k+1}} = 4pq < 1.$$

В этом случае каждое состояние i системы является невозвратным Интуитивно ясно, что при этом блуждающая частица будет неограниченно удаляться в положительном направлении (при $p>q$) или в отрицательном (при $p<q$), рано или поздно навсегда покидая любое фиксированное состояние i.

Если же $p—q$, то $4pq=1$ и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_{ii}^{(2k)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

расходится, так как члены этого ряда, начиная с некоторого, становятся больше соответствующих членов гармонического ряда

$$\Gamma = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots,$$

который, как известно, расходится. В этом случае все состояния системы являются возвратными и частицы при неограниченно продолжающемся симметричном случайном блуждении бесконечное число раз возвращается в каждое из состояний. Для системы со случайным блужданием предельный вектор не существует, так как ни при $p = q$, ни при $p \neq q$ состояния цепи не являются эргодическими.

Пример 2. Система передачи данных работает в режиме, называемом нормальным, до появления сбоев в n сообщениях подряд. В этом случае система переходит в режим аварии, в котором остается до тех пор, пока очередное сообщение не будет принято правильно. После этого система возвращается в нормальный режим. Пусть вероятность появления сбоя в очередном сообщении равна p, а вероятность безошибочного приема данных равна $q=1—p$.

Введем множество возможных состояний системы:

E_0 — сбоев нет;

E_1 — имеется сбой в одном сообщении;

E_2 — имеется сбой в двух сообщениях подряд;

……………………………………………………………

E_n — имеется сбой в n сообщениях подряд.

Понятно, что процесс, протекающий в такой системе, является марковским. Множество возможных состояний системы конечно и содержит $n+1$ элементов. Матрица переходов системы имеет вид

$$\mathbf{W} = \begin{vmatrix} q & p & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \ldots & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 0 & 0 & \ldots & p & 0 \\ q & 0 & 0 & \ldots & 0 & p \\ q & 0 & 0 & \ldots & 0 & p \end{vmatrix}.$$

Граф состояний и переходов изображен на рис. 10.2.

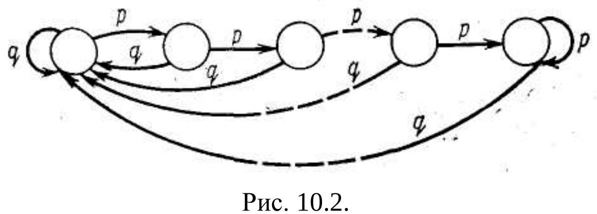


Рис. 10.2.

Очевидно, что каждое состояние системы достижимо из любого другого состояния. Поэтому, учитывая, что множество возможных

состояний системы конечно, можно утверждать, что в этой системе существует предельный вектор.
Отыщем компоненты этого вектора, используя соотношение

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi W}$$

или

$$\pi_0 = \sum_{i=0}^{n} \pi_i w_{i0},$$
$$\pi_1 = \sum_{i=0}^{n} \pi_i w_{i1},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\pi_n = \sum_{i=0}^{n} \pi_i w_{in}. \qquad (10.20)$$

В рассматриваемом случае система уравнений (10.20) приобретает вид

$$\pi_0 = q \sum_{i=0}^{n} \pi_i = q,$$
$$\pi_1 = \pi_0 p = pq,$$
$$\pi_2 = \pi_1 p = p^2 q,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\pi_{n-1} = \pi_{n-2} p = p^{n-1} q,$$
$$\pi_n = \pi_{n-1} p + \pi_n p. \qquad (10.21)$$

Из последнего уравнения системы (10.21) имеем

$$\pi_n = (p/q)\,\pi_{n-1} = p^n.$$

Таким образом, предельный вектор системы **П** имеет вид

$$\Pi = (q,\ pq,\ p^2 q,\ \ldots,\ p^{n-1} q,\ p^n).$$

Пример 3. На выходе приемного устройства радиолокатора в результате локации цели появляется отраженный сигнал. Из-за наложения на этот сигнал внутренних шумов приемника и изрезанности диаграммы направленности вторичного излучения цели принимаемый сигнал флуктуирует. Пусть вероятность превышения сигналом некоторого заранее выбранного порога равна p (вероятность непревышения, естественно, равна q=1—p).

Примем следующую логику работы устройства обнаружения целей: а) цель следует считать обнаруженной, если сигнал превышает порог при двух последовательных локациях; б) цель следует считать потерянной, если сигнал не превышает порог дважды подряд.

Проанализируем работу устройства. Введем множество возможных состояний системы:

E_0 — исходное состояние. После очередной локации система должна оставаться в этом состоянии с вероятностью q и переходить в состояние E_1 с вероятностью p;

E_1 — состояние, соответствующее однократному превышению порога. Если при очередной локации сигнал будет превышать порог (вероятность этого события равна p), то система должна переходить в состояние E_2, в противном случае — должна возвращаться в исходное состояние (вероятность этого события равна q).

E_2 — состояние, соответствующее двухкратному превышению порога подряд (обнаружение цели). Система должна оставаться в этом состоянии с вероятностью p и переходить и состояние E_3 с вероятностью q;

E_3 — состояние, соответствующее однократному непревышению порога после обнаружения цели. Если после очередной локации сигнал превышает порог, система должна возвратиться в состояние E_2, в противном случае — перейти в исходное состояние E_0. Граф переходов системы приведен на рис. 10.3.

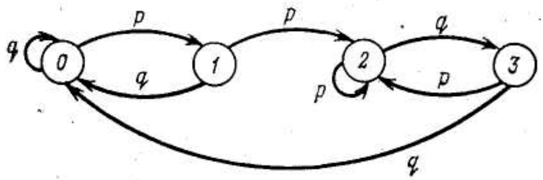


Рис. 10.3.

Выпишем матрицу переходов системы

$$\mathbf{W} = \begin{vmatrix} q & p & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p & q \\ q & 0 & p & 0 \end{vmatrix}.$$

Поскольку множество состояний конечно и все они достижимы из j любого другого, система обладает эргодическим свойством и предельный вектор существует.

Для отыскания компонент этого вектора используем соотношение

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi W}.$$

Так как в рассматриваемом примере $\mathbf{\Pi}=(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$, то

$$\pi_0 = \sum_{i=0}^{3} \pi_i w_{i0}, \qquad \pi_1 = \sum_{i=0}^{3} \pi_i w_{i1},$$

$$\pi_2 = \sum_{i=0}^{3} \pi_i w_{i2}, \qquad \pi_3 = \sum_{i=0}^{3} \pi_i w_{i3},$$

откуда

$$\pi_0 = q(\pi_0 + \pi_1 + \pi_3), \qquad \pi_1 = p\pi_0,$$

$$\pi_2 = p(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3), \qquad \pi_3 = q\pi_2.$$

Решим эту систему, дополнив ее условием нормировки

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1,$$

В результате имеем

$$\pi_0 = \frac{q^2}{1 - pq}; \qquad \pi_1 = \frac{pq^2}{1 - pq}; \qquad \pi_2 = \frac{p^2}{1 - pq}; \qquad \pi_3 = \frac{qp^2}{1 - pq}.$$

10.2.7. Асимптотическое поведение неэргодических систем

Практический интерес имеет изучение асимптотического поведения системы, не все состояния которой являются эргодическими. Рассмотрим, например, марковскую цепь, граф переходов которой изображен на рис. 10.4.

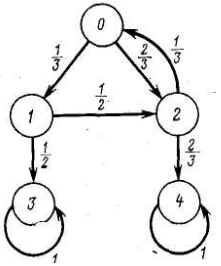


Рис. 10.4.

Эта цепь содержит два поглощающих состояния (i = 3 и i = 4). Понятно, что предельный вектор такой системы в том смысле, как он был введен ранее, не существует. В самом деле, состояние, в котором окажется эта система через достаточно большое число шагов, зависит от исходного. Если исходным состоянием было одно из состояний множества {0, 1, 2}, то система придет, в конце концов, в одно из двух поглощающих состояний. Если же исходным было одно из поглощающих состояний, то система навсегда в нем и останется.

Таким образом, для характеристики асимптотического поведения такой системы уже недостаточно введения предельного вектора **П**, так как он будет различным в зависимости от исходного состояния.

В связи с этим введем матрицу $\mathbf{B}=(b_{ij})$, строки которой определяли бы предельные распределения вероятностей различных состояний системы, причем номер строки указывал бы номер исходного состояния, т. е.

$$\mathbf{B}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \dots \\ \mathbf{B}_i \\ \dots \\ \mathbf{B}_n \end{vmatrix},$$

где $\mathbf{B}_i(b_{i1}b_{i2}\ \dots\ b_{in})$ — вектор распределения предельных вероятностей системы, если исходным было состояние с номером i.

Метод расчета элементов матрицы **B** состоит в следующем. Множество всех поглощающих состояний обозначим через T, а множество всех остальных состояний системы (они все являются невозвратными) обозначим через $\overline{T}$. Пусть множество возможных состояний системы содержит k поглощающих. Перенумеруем все состояния системы таким образом, чтобы поглощающим состояниям соответствовали бы последние k номеров, т, е.

$$\overline{T}=\{i : i\in\mathscr{E},\quad 0\leqslant i\leqslant n-k\},$$

$$T=\{i : i\in\mathscr{E},\quad n-k+1\leqslant i\leqslant n\}.$$

Тогда матрица переходов **W** системы будет иметь следующую структуру:

$$\mathbf{W}=\begin{vmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{R} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{vmatrix}.$$

Подматрица **Q** содержит вероятности переходов из невозвратных состояний в невозвратные, а подматрица **R** — вероятности переходов из невозвратных состояний в поглощающие. По аналогии с (10.19) запишем

$$\mathbf{B}=\lim_{l\to\infty}\mathbf{W}^{(l)}. \qquad (10.22)$$

Возведя (путем непосредственного перемножения) **W** в l-ю степень, имеем

$$\mathbf{W}^{(l)} = \begin{vmatrix} \mathbf{Q}^{(l)} & \mathbf{B}^*{}_l \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{vmatrix}, \tag{10.23}$$

где

$$\mathbf{B}^*{}_l = (\mathbf{I} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 + \ldots + \mathbf{Q}^{l-1})\mathbf{R} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Q}^l)\mathbf{R}.$$

Выполнив предельный переход по l, в результате получим

$$\lim_{l\to\infty} \mathbf{Q}^l = \mathbf{O},$$

$$\lim_{l\to\infty} \mathbf{B}^*{}_l = \lim_{l\to\infty} (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Q}^l)\mathbf{R} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R} = \mathbf{B}^*. \tag{10.24}$$

Таким образом, объединяя (10.22) — (10.24), можно записать, что

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I}^* \end{vmatrix}.$$

Заметим, что для подматрицы **B*** выполняется следующее соотношение:

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{R} + \mathbf{Q}\mathbf{B}^*, \tag{10.25}$$

справедливость которого становится ясной из следующих соображений.

Пусть $i \in \overline{T}$ является начальным состоянием процесса и $j \in T$ есть некоторое поглощающее состояние. Выйдя из i, процесс может поглотиться в j на первом шаге или на одном из последующих шагов. Вероятность захвата j-м поглощающим состоянием на первом шаге равна w_{ij}. Другими исходами первого шага могут быть захват каким-либо другим поглощающим состоянием (тогда достигнуть j-го состояния будет невозможно) или переход в некоторое другое,, например k-е ($k \in \overline{T}$), невозвратное состояние. В последнем случае процесс поглотится в состоянии j с вероятностью b_{kj}. Следовательно,

$$b_{is} = w_{ij} + \sum_{k \in T} w_{ik} b_{kj}.$$

Матричным аналогом этого соотношения и является (10.25). Покажем теперь, что

$$\mathbf{WB} = \mathbf{B}. \tag{10.26}$$

Действительно,

$$\mathbf{WB} = \begin{vmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{R} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B}^* \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{QB}^* + \mathbf{R} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{vmatrix},$$

и с учетом (10.25) получаем требуемое.

Матричное уравнение (10.26) трансформируется в совокупность уравнений вида

$$\mathbf{WP}_j = \mathbf{P}_j, \quad j = 0, 1, \ldots, n, \qquad (10.27)$$

где

$$\mathbf{P}_j = \begin{vmatrix} b_{0j} \\ b_{1j} \\ \cdots \\ b_{ij} \\ \cdots \\ b_{nj} \end{vmatrix}$$

— вектор-столбец, содержащий вероятности поглощения в j-м состоянии для различных исходных состояний.

Векторно-матричные уравнения (10.27) решаются уже описанным выше способом, путем преобразования к системе алгебраических уравнений

$$\begin{gathered} w_{00}b_{0j} + w_{01}b_{1j} + \ldots + w_{0n}b_{nj} = b_{0j}, \\ w_{10}b_{0j} + w_{11}b_{1j} + \ldots + w_{1n}b_{nj} = b_{1j}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_{n0}b_{0j} + w_{n1}b_{1j} + \ldots + w_{nn}b_{nj} = b_{nj}. \end{gathered} \qquad (10.28)$$

Система (10.28) может быть упрощена, если учесть структуру матриц **W** и **B**. Действительно, так как

$$w_{ij} = \begin{cases} 0, & i \in T, \quad j \in T, \quad i \neq j, \\ 1, & i \in T, \quad j \in T, \quad i = j, \end{cases}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & (j \in \bar{T}) \vee [(j \in T) \wedge (i \in T) \wedge (i \neq j)], \\ 1, & (j \in T) \wedge (i = j), \end{cases}$$

то уравнения (10.28) трансформируются к виду

$$\begin{gathered} w_{00}b_{0j} + w_{01}b_{1j} + \ldots + w_{0,\, n-k}\, b_{n-k,\, j} + w_{0j} = b_{0j}, \\ w_{10}b_{0j} + w_{11}b_{1j} + \ldots + w_{1,\, n-k}\, b_{n-k,\, j} + w_{1j} = b_{1j}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_{n-k,\, 0}\, b_{0j} + w_{n-k,\, 1}\, b_{1j} + \ldots + w_{n-k,\, n-k}\, b_{n-k,\, j} + \\ + w_{n-k,\, j} = b_{n-k,\, j}, \\ j = n-k+1, \ldots, n. \end{gathered} \qquad (10.29)$$

Итак, решая систему уравнений (10.29) для различных j ($j = n—k+1.....n$), последовательно заполняем матрицу **B**.

Как уже указывалось, строки этой матрицы задают распределения вероятностей поглощения для различных исходных состояний процесса.

Проиллюстрируем изложенную методику на примере марковской цепи, граф переходов которой изображен на рис. 10.4.

Пример.

$$\mathbf{W} = \begin{vmatrix} 0 & ^1/_3 & ^2/_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ^1/_2 & ^1/_2 & 0 \\ ^1/_3 & 0 & 0 & 0 & ^2/_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \overline{T} = \{0;\ 1;\ 2\}, \quad T = \{3;\ 4\}.$$

$$w_{00}b_{0j} + w_{01}b_{1j} + w_{02}b_{2j} + w_{0j} = b_{0j},$$
$$w_{10}b_{0j} + w_{11}b_{1j} + w_{12}b_{2j} + w_{1j} = b_{1j},$$
$$w_{20}b_{0j} + w_{21}b_{1j} + w_{22}b_{2j} + w_{2j} = b_{2j} \quad (j = 3;\ 4).$$

$j = 3$

$$\frac{1}{3}b_{13} + \frac{2}{3}b_{23} = b_{03},$$
$$\frac{1}{2}b_{23} + \frac{1}{2} = b_{13},$$
$$\frac{1}{3}b_{03} = b_{23}.$$

Решая эту систему уравнений, имеем

$$b_{03} = {}^3/_{13}, \quad b_{13} = {}^7/_{13}, \quad b_{23} = {}^1/_{13}.$$

$j = 4$

$$\frac{1}{3}b_{14} + \frac{2}{3}b_{24} = b_{04}$$
$$\frac{1}{2}b_{24} = b_{14}$$
$$\frac{1}{3}b_{04} + \frac{2}{3} = b_{24}.$$

В результате решения этой системы уравнений, имеем

$$b_{04} = {}^{10}/_{13}, \quad b_{14} = {}^6/_{13}, \quad b_{24} = {}^{12}/_{13}.$$

Таким образом, матрица **B** имеет вид

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & ^3/_{13} & ^{10}/_{13} \\ 0 & 0 & 0 & ^7/_{13} & ^6/_{13} \\ 0 & 0 & 0 & ^1/_{13} & ^{12}/_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Хорошей проверкой правильности решения задачи является выполнение условия нормировки

$$\sum_{j=0}^{n} b_{ij} = 1$$

для строк матрицы B.

Заметим, что вычислительная процедура отыскания элементов матрицы **B** по объему эквивалентна k-кратному решению системы из $n—k+1$ линейных алгебраических уравнений с таким же числом неизвестных. В то же время, если иметь в виду, что исходное состояние системы обычно фиксируется, интерес представляет лишь одна строка матрицы **B**, номер которой равен номеру исходного состояния. В связи с этим представляется целесообразной разработка метода расчета предельного распределения, не использующего громоздкую процедуру вычисления элементов **B**. С этой целью преобразуем исходную марковскую цепь в псевдоэргодическую путем введения фиктивных переходов из поглощающих состояний в начальное, приписав им некоторую вероятность α. При этом для каждого из поглощающих состояний вероятность перехода в себя должна быть уменьшена на α. С учетом этого граф переходов, например, для цепи, анализ которой проведен в рассмотренном выше примере, будет иметь вид, показанный на рис. 10.5.

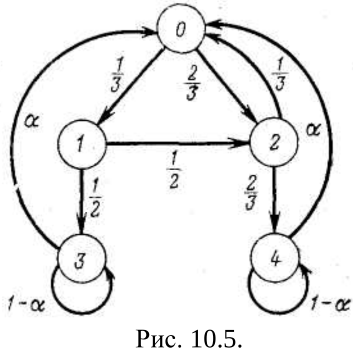


Рис. 10.5.

Здесь для определенности в качестве исходного выбрано нулевое состояние цепи.

Предельный вектор такой цепи уже может быть рассчитан в результате решения векторно-матричного уравнения

$$\mathbf{\Pi}(\alpha) = \mathbf{\Pi}(\alpha)\,\mathbf{W}(\alpha),$$

$$\mathbf{W}(\alpha) = \left|\begin{array}{c:c} \mathbf{Q} & \mathbf{R} \\ \hdashline \begin{matrix} \alpha \\ \alpha \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha \end{matrix} \;\; \mathbf{O} & \mathbf{I}(1-\alpha) \end{array}\right|. \qquad (10.30)$$

С учетом перенумерации состояний искомый вектор решения может быть записан следующим образом:

$$\mathbf{\Pi}(\alpha) = |\,\mathbf{X}_{н}(\alpha) \,\vdots\, \mathbf{X}_{п}(\alpha)\,|, \qquad (10.31)$$

где $\mathbf{X}_{н}(\alpha)$—вектор-строка, содержащий $n—k+1$ компонент, соответствующих непоглощающим состояниям цепи;
$\mathbf{X}_{п}(\alpha)$ —вектор-строка, содержащий k компонент, соответствующих поглощающим состояниям.

Покажем теперь, что компоненты предельного вектора $\mathbf{\Pi}(\alpha)$, получаемого в результате решения уравнения (10.30), после предельного перехода по α в точности соответствуют компонентам первой строки матрицы **B**. Введем матрицы

$$\boldsymbol{\alpha} = \left|\begin{matrix} \alpha \\ \alpha \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha \end{matrix}\right|; \quad \mathbf{Q}_1 = \left|\begin{matrix} q_{00} \\ q_{10} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_{n-k,\,0} \end{matrix}\right|; \quad \widetilde{\mathbf{Q}} = \left|\begin{matrix} q_{01} q_{02} & \cdots & q_{0,\,n-k} \\ q_{11} q_{12} & \cdots & q_{1,\,n-k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n-k,\,1} q_{n-k,\,2} & \cdots & q_{n-k,\,n-k} \end{matrix}\right| \qquad (10.32)$$

с размерностями, соответственно равными $k \times 1$, $(n—k+1) \times 1$, $(n—k+1) \times (n—k)$. С учетом (10.31) и (10.32) перепишем (10.30) в виде

$$|\,\mathbf{X}_{н}(\alpha) \,\vdots\, \mathbf{X}_{п}(\alpha)\,| = |\,\mathbf{X}_{н}(\alpha) \,\vdots\, \mathbf{X}_{п}(\alpha)\,| \left|\begin{array}{c:c:c} \mathbf{Q}_1 & \widetilde{\mathbf{Q}} & \mathbf{R} \\ \hdashline \boldsymbol{\alpha} & \mathbf{O} & \mathbf{I}(1-\alpha) \end{array}\right|$$

или

$$|\mathbf{X}_н(\alpha) \vdots \mathbf{X}_п(\alpha)| = |\mathbf{X}_н(\alpha)\mathbf{Q}_1 + \mathbf{X}_п(\alpha)\,\alpha \vdots \mathbf{X}_п(\alpha)\tilde{\mathbf{Q}} \,|\, \mathbf{X}_п(\alpha)\mathbf{R} + \\ + \mathbf{X}_п(\alpha)\mathbf{I}(1-\alpha)| =$$

$$= \left| \mathbf{X}_н(\alpha)\mathbf{Q}_1 + \alpha \sum_{j=n-k+1}^{n} x_j \,|\, \mathbf{X}_н(\alpha)\tilde{\mathbf{Q}} \vdots \mathbf{X}_н(\alpha)\mathbf{R} + \mathbf{X}_п(\alpha)(1-\alpha) \right|,$$

откуда

$$\mathbf{X}_н(\alpha) = \mathbf{X}_н(\alpha)\mathbf{Q} + \mathbf{A}^T,$$

$$\mathbf{X}_п(\alpha) = \mathbf{X}_н(\alpha)\mathbf{R} + \mathbf{X}_п(\alpha)(1-\alpha), \tag{10.33}$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \alpha \sum\limits_{j=n-k+1}^{n} x_j(\alpha) \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{vmatrix}$$

— вектор размерности $(n—k+1)\times 1$; T — знак транспонирования. Из первого уравнения системы (10.33) имеем

$$\mathbf{X}_н(\alpha) = \mathbf{A}^T(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}. \tag{10.34}$$

Второе уравнение системы упрощается к виду

$$\mathbf{X}_п(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\mathbf{X}_н(\alpha)\mathbf{R}. \tag{10.35}$$

Подставляя (10.34)в (10.35), получаем

$$\mathbf{X}_п(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\mathbf{A}^T(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sum\limits_{j=n-k+1}^{n} x_j(\alpha) \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{vmatrix} (\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R}. \tag{10.36}$$

С учетом условия нормировки

$$\sum_{j=0}^{n} x_j(\alpha) = 1,$$

а также имея в виду (10.24), перепишем (10.36) следующим образом:

$$\mathbf{X}_{п}(\alpha)=\begin{vmatrix} 1-\sum\limits_{j=0}^{n-k} x_j(\alpha) \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{vmatrix}(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1-\sum\limits_{j=0}^{n-k} x_j(\alpha) \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{vmatrix}\mathbf{B}^*=\mathbf{B}^*_0-\mathbf{B}^*_0\sum_{j=0}^{n-k} x_j(\alpha), \tag{10.37}$$

где $\mathbf{B}^*_0$ —нулевая строка матрицы $\mathbf{B}^*$.

Если теперь принять во внимание, что

$$\lim_{\alpha\to 0} x_j(\alpha)=x_j(0)=0, \quad j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-k,$$

то окончательно имеем

$$\mathbf{X}_{п}=\lim_{\alpha\to 0}\mathbf{X}_{п}(\alpha)=\mathbf{B}^*_0; \qquad \mathbf{X}_{н}=\lim_{\alpha\to 0}\mathbf{X}_{н}(\alpha)=\mathbf{O},$$

что и требовалось,

Таким образом, предельное распределение вероятностей системы с произвольным числом поглощающих состояний может быть найдено в результате решения векторно-матричного уравнения (10.30) с последующим предельным переходом по α.

Заметим, что методика расчета предельного вектора не меняется, если изменить начальное состояние. Однако фиктивные переходы из поглощающих состояний в начальное необходимо ввести соответствующим этому изменению образом. Проиллюстрируем изложенную методику на примере цепи, граф которой изображен на рис. 10.4. Граф соответствующей псевдоэргодической цепи изображен на рис. 10.5.

Матрица переходов для этого графа имеет вид:

$$\mathbf{W}(\alpha)=\begin{vmatrix} 0 & ^1/_3 & ^2/_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ^1/_2 & ^1/_2 & 0 \\ ^1/_3 & 0 & 0 & 0 & ^2/_3 \\ \alpha & 0 & 0 & 1-\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 1-\alpha \end{vmatrix}.$$

Рассчитаем компоненты предельного вектора **П**(α). С этой целью решим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} &\pi_0(\alpha)={}^1/_3\pi_2(\alpha)+\alpha\,[\pi_3(\alpha)+\pi_4(\alpha)],\\ &\pi_1(\alpha)={}^1/_3\pi_0(\alpha),\\ &\pi_2(\alpha)={}^2/_3\pi_0(\alpha)+{}^1/_2\pi_1(\alpha), \end{aligned} \qquad (10.38)$$

$$\begin{aligned} &\pi_3(\alpha)=\frac{1}{2}\pi_1(\alpha)+(1-\alpha)\,\pi_3(\alpha),\\ &\pi_4(\alpha)=\frac{2}{3}\pi_2(\alpha)+(1-\alpha)\,\pi_4(\alpha). \end{aligned} \qquad (10.39)$$

Решая подсистему (10.38), имеем

$$\begin{aligned} &\pi_0(\alpha)=\frac{18}{13}\alpha\,[\pi_3(\alpha)+\pi_4(\alpha)],\\ &\pi_1(\alpha)=\frac{6}{13}\alpha\,[\pi_3(\alpha)+\pi_4(\alpha)],\\ &\pi_2(\alpha)=\frac{15}{13}\alpha\,[\pi_3(\alpha)+\pi_4(\alpha)]. \end{aligned} \qquad (10.40)$$

После упрощения (10.39) и использования (10.40) получим

$$\begin{aligned} &\pi_3(\alpha)=\frac{3}{13}[\pi_3(\alpha)+\pi_4(\alpha)],\\ &\pi_4(\alpha)=\frac{10}{13}[\pi_3(\alpha)+\pi_4(\alpha)]. \end{aligned}$$

Если учесть теперь, что

$$\lim_{\alpha\to 0}[\pi_3(\alpha)+\pi_4(\alpha)]=\lim_{\alpha\to 0}\{1-[\pi_0(\alpha)+\pi_1(\alpha)+\pi_2(\alpha)]\}=1,$$

то искомый предельный вектор имеет вид

$$\mathbf{\Pi}=|0\ 0\ 0\ {}^3/_{13}\ {}^{10}/_{13}|.$$

Как и следовало ожидать, вычисленные компоненты предельного вектора совпадают с элементами нулевой строки матрицы **В**, полученной ранее.

10.2.8. Применение теории марковских цепей для оценки эффективности сложных АСУ

Процесс функционирования сложной АСУ определяется алгоритмом работы системы, который обеспечивает приспосабливающееся к изменениям внешней среды поведение системы в соответствии с логикой ее алгоритма. Реакция алгоритма на ту или иную комбинацию внешних воздействий определяет эффективность системы в этой конкретной ситуации. Оценка эффективности системы на всем множежестве возможных входных воздействий может быть получена, если будет найдено соответствующее распределение вероятностей реализации различных реакций на выходе алгоритма системы.

Пусть множество ситуаций, каждая из которых соответствует фиксированной комбинации входных воздействий на систему, пронумеровано и образует алфавит **А**. Аналогичным образом можетбыть сформирован алфавит возможных реакций системы **Ф**. Таким образом, *алгоритм — это алфавитный оператор, отображающий элементы множества* ***А*** *на элементы множества* ***Ф***.

Поставим задачу отыскания распределения вероятностей реализации различных реакций на выходе алгоритма при фиксированных статистических характеристиках и структуре входных воздействий на систему.

Введем предварительно несколько определений. Обозначим через $E(s)$ множество состояний, в которых может оказаться система в процессе функционирования, если исходным является состояние s. Тогда будем говорить, что в алгоритме имеются циклы, если существует хотя бы одно состояние s_i такое, что $s_i \in E(s_i)$. Кроме того, будем считать, что в алгоритме имеются пересечения, если существует хотя бы одна пара s_i и s_k таких, что

$$E(s_i) \bigcap E(s_k) \neq \varnothing .$$

Если алгоритм имеет простую ветвящуюся структуру без циклов и пересечений, искомое распределение может быть легко получено. В самом деле, ветвящийся алгоритм без циклов и пересечений схематически может быть представлен в виде дерева (рис. 10.6), состоящего из узлов и соединяющих их направленных дуг.

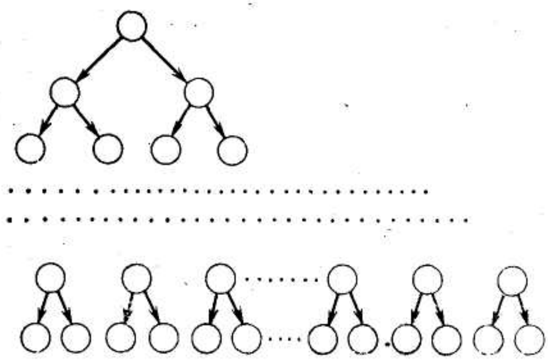


Рис. 10.6.

Узлам этого дерева соответствуют логические операторы алгоритма, статистика работы которых по различным ветвям соответствует содержанию входной информации о состоянии внешней среды и системы и определяется априорным распределением вероятностей реализации различных вариантов входных воздействий, т. е. элементов алфавита **А**. Каждой дуге, соединяющей два каких-либо смежных узла, в соответствии с содержанием входной информации может быть приписана вероятность выполнения алгоритма именно по этой дуге. Понятно, что эта вероятность может в случае необходимости учитывать надежность элементов системы, реализующих выполнение алгоритма по выбранной дуге. Множество оконечных узлов соответствует множеству элементов алфавита **Ф**.

Если алгоритм не имеет циклов и пересечений, каждому оконечному узлу дерева, очевидно, соответствует одна и только одна ветвь, соединяющая этот узел с начальным узлом дерева. Вероятность попадания в этот конечный узел поэтому может быть определена как произведение вероятностей прохождения дуг, образующих выбранную ветвь. Однако описанная процедура не может быть реализована, если дерево, соответствующее алгоритму, имеет циклы и пересечения. Так, например, прямой подсчет распределения вероятностей попадания в оконечные узлы затруднен для алгоритма, дерево которого изображено на рис. 10.7.

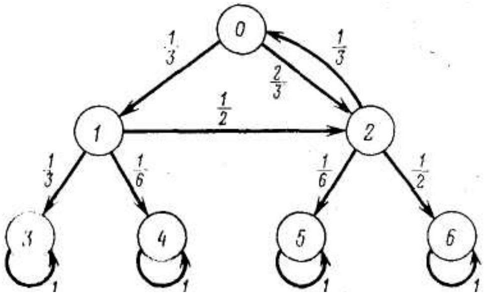


Рис. 10.7

Распределение вероятностей реализации различных исходов работы алгоритма для любой системы в принципе может быть получено непосредственным статистическим моделированием алгоритма функционирования системы. Однако вычислительные трудности ограничивают возможности использования такого подхода для оценки эффективности реальных сложных систем.

Рассмотрим в связи с этим аналитический метод отыскания закона распределения вероятностей попадания в оконечные узлы для алгоритмов, дерево которых имеет произвольную (в смысле наличия циклов и пересечений и их количества) структуру.

В общем случае (для получения распределения различных реакций алгоритма на входные воздействия) представим алгоритм как реализацию некоторого дискретного марковского процесса, т. е. в виде простой марковской цепи. При этом множеству состояний цепи поставим в соответствие множество узлов дерева алгоритма, а множеству вероятностей перехода из одного состояния в другое — множество вероятностей прохождения соответствующих дуг. Поскольку оконечные узлы дерева алгоритма соответствуют поглощающим состояниям цепи, каждому из этих состояний необходимо приписать вероятность перехода в самих себя, равную единице.

Таким образом, алгоритму функционирования системы может быть поставлена в соответствии некоторая неэргодическая марковская цепь, изучение поведения которой может быть проведено методами п. 1.2.7.

Поскольку начальное состояние алгоритма известно заранее, интерес представляет лишь одна строка матрицы **B**, номер которой равен номеру исходного состояния. Приведем без пояснений результат решения задачи по отысканию матрицы **B** для алгоритма, граф которой изображен на рис. 10.7:

$$\mathbf{B}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & {}^{2}/_{13} & {}^{1}/_{13} & {}^{5}/_{26} & {}^{15}/_{26} \\ 0 & 0 & 0 & {}^{14}/_{39} & {}^{7}/_{39} & {}^{3}/_{26} & {}^{9}/_{26} \\ 0 & 0 & 0 & {}^{2}/_{39} & {}^{1}/_{39} & {}^{3}/_{13} & {}^{9}/_{17} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Знание распределения вероятностей реализации различных реакций алгоритма может быть использовано для оценки эффективности системы. Итак, пусть вектор **Р** представляет собой закон распределения вероятностей различных реакций системы на внешние воздействии. При наличии модели системы нетрудно оценить эффективность системы для каждой из реакций алгоритма. Обозначим соответствующее множество оценок через

$$R = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}.$$

Тогда легко рассчитать $M[r]$ — математическое ожидание эффективности системы на всем множестве входных воздействий

$$M[r]=\sum_{i=1}^{m} r_i P_i. \tag{10.41}$$

Знание компонент вектора **Р** позволяет определить и другие оценки эффективности системы, например вероятность того, что эффективность системы находится в заданных пределах:

$$\text{Вер}\,\{r_{min}\leqslant r\leqslant r_{max}\}=\sum_{i\in I_0} P_i,$$
$$I_0=\{i : i\in[1,m],\quad r_{min}\leqslant r\leqslant r_{max}\}, \tag{10.42}$$

или вероятность того, что эффективность системы не ниже заданной:

$$\text{Вер}\,\{r_{зад}\leqslant r\}=\sum_{i\in I_1} P_i,$$
$$I_1=\{i : i\in[1,m],\quad r_{зад}\leqslant r_i\}, \tag{10.43}$$

или дисперсию случайного значения эффективности системы

$$Д[r]=\sum_{i=1}^{m}(r_i-M[r])^2 P_i=\sum_{i=1}^{n} r_i^2 P_i-\left(\sum_{i=1}^{n} r_i P_i\right)^2.$$

10.3. Свойства семейств стохастических матриц

В этом пункте приводятся сведения важнейших свойств систем конечных стохастических матриц.

Пусть A — $k\times k$-*матрица*. Рассмотрим линейное преобразование линейного пространства E^k на себя, описываемое соотношениям

$$\boldsymbol{\mu}' = \boldsymbol{\mu} A. \tag{10.44}$$

Лемма 1. *Для того чтобы линейное преобразование* (10.44) *в* k *-мерном векторном пространстве* E^k *отображало в себя координатный симплекс*

$$\Lambda^{(k)} = \left\{ \boldsymbol{\mu} = (\mu^1, \ldots, \mu^k) \colon \sum_{i=1}^{k} \mu^i = 1,\ \mu^i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, k \right\},$$

необходимо и достаточно, чтобы матрица A была стохастической.

Доказательство. Действительно, симплекс $A^{(k)}$ есть множество всех стохастических векторов с k координатами. Если A - стохастическая матрица, то она переводит стохастический вектор в стохастический. Обратно, если матрицу A записать в виде

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \cdots \\ \mathbf{p}_k \end{pmatrix}, \quad \Delta^{(k)} A \subseteq \Delta^{(k)},$$

то каждая вершина $\boldsymbol{\mu}_i = (0, ..., 1, 0, . .., 0)$ симплекса $\Delta^{(k)}$ переводится преобразованием (10.44) в векторы $\boldsymbol{p}_i$, i=l, ..., k, следовательно, $\boldsymbol{p}_i$ i=l, ..., k,— стохастические векторы и A — стохастическая матрица.

Исследуем отображение из леммы 1 более детально.

Замечание 1. Матрица A^s, s = 1, ..., преобразует вершины $\boldsymbol{\mu}_i$ = (0, . .., 0, 1, 0, . . ., 0) координатного симплекса $\Delta^{(k)}$ в стохастические вектор-строки $\boldsymbol{p}_i^{(s)}$, где $\boldsymbol{p}_i^{(s)}$ есть i-я строка s-й степени матрицы A.

Замечание 2. Пусть произвольная точка **u** гиперплоскости, которая определяется симплексом $\Delta^{(t)}$, $0<t\leq k$, представлена в виде линейной комбинации вершин координатного симплекса в виде

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{t} u^i \boldsymbol{\mu}_i.$$

Тогда образ точки **u** в отображении A^s представляется в виде

$$\mathbf{u}A^s = \sum_{i=1}^{t} u^i \mathbf{p}_i^{(s)},\ s = 1, \ldots$$

Обозначим через $A^{(t)}(x^s)$ образ симплекса $\Delta^{(t)}$ в отображении $A^s(x)$. Аналогично, обозначим через $\Delta^{(t)}(p)$ образ симплекса $\Delta^{(t)}$ в отображении, определяемом матрицей $A(p)$, где $p = x_1 \ldots x_s$, и $A(p)=A(x_1) \ldots A(x_s)$.

Замечание 3. Симплекс $\Delta^{(t)}(p_1p_2)$ является образом симплекса $\Delta^{(t)}(p_1)$ в отображении, определяемом матрицей $A(p_2)$ для любых слов p_2 из свободной полугруппы X^*.

На рис. 10.8 изображенная картина преобразования симплекса $\Delta^{(3)}$ для матриц A и A^1.

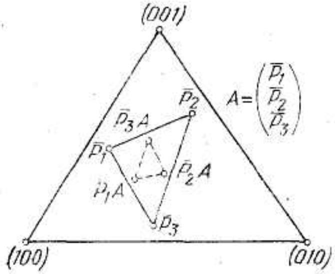


Рис. 10.8.

Введем в рассмотрение метрическую норму в просторанстве $E^{(k)}$ условием

$$\rho(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) = \sum_{i=1}^{k} |\mu_1^i - \mu_2^i|. \tag{10.45}$$

Лемма 2. *Если A — стохастическая $k \times k$-матрица в метрическом пространстве $E^{(k)}$ с метрической нормой* (10.45), *то для любой пары векторов $\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2$ верно неравенство* $\rho(\boldsymbol{\mu}_1 A, \boldsymbol{\mu}_1 A) \le \rho(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$.

Доказательство. Имеем

$$\rho(\boldsymbol{\mu}_1 A, \boldsymbol{\mu}_2 A) = \sum_{i=1}^{k} |\mu_1'^i - \mu_2'^i| = \sum_{i=1}^{k} \left| \sum_{j=1}^{k} \mu_1^j a_{ji} - \sum_{j=1}^{k} \mu_2^j a_{ji} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} a_{ji} |\mu_1^j - \mu_2^j| = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} a_{ji} |\mu_1^j - \mu_2^j| = \sum_{j=1}^{k} |\mu_1^j - \mu_2^j|.$$

Из доказательства леммы 2 видно, что она справедлива не только для стохастических матриц, но для любой матрицы, суммы элементов строк которой не превосходят единицы.

Пусть **m** - поствектор. Положим, по определению,

$$\|\mathbf{m}\| = \max_i m^i - \min m^i,$$

где максимум и минимум берутся по всем координатам поствектора. Заметим, что $\|\mathbf{m}\|$ является полунормой, т.е. удовлетворяет всем свойствам нормы, но из $\|\mathbf{m}\|= 0$ не следует равенство нулю $\mathbf{m}$.

Распространим это определение на матрице. Если $A = (\mathbf{q}_1 \ldots \mathbf{q}_n)$ — некоторая матрица, то положим

$$\| A \| = \max_i \| \mathbf{q}_i \|.$$

Лемма 3. *Если* $A = (a_{ij})$ — *стохастическая* $n\times n$-*матрица*,

$$\delta = \min_{i,j} a_{ij}$$

и $\mathbf{m}$ — *поствектор, то*

$$\|A\mathbf{m}\| \le (1\text{-}2\delta)\ \|\mathbf{m}\|.$$

Доказательство. Пусть $A\mathbf{m}=\mathbf{b}$. Без ограничения общности можно положить

$$b_1 = \max_i b_i,\quad b_2 = \min_i b_i,\quad m_1 = \max_i m_i,\quad m_2 = \min_i m_i.$$

Тогда имеем

$$b_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} m_j \leqslant m_1 - a_{12}(m_1 - m_2).$$

Аналогично, подставляя в сумму для b_2 число m_2 вместо m_1, получаем $b_2 \ge m_2 + a_{21}(m_1 - m_2)$.

Таким образом,

$$\|A\mathbf{m}\| = b_1 - b_2 \le (m_1 - m_2)(1 - a_{12} - a_{21}).$$

Но $(m_1 - m_2) = \|\mathbf{m}\|$, и так как $\delta \le a_{12}$, $\delta \le a_{21}$, то

$$1 - a_{12} - a_{21} \le 1\text{-}2\delta.$$

Следствие 1. *Если* $A=\langle A(x),\ x\in X\rangle$ — *система стохастических матриц, все элементы которых большие* $\delta > 0$, *то для любых слов* $p\in X^*$, $|p| = k$,

$$\|A(p)\| \le (1\text{-}2\delta)^{k-1}.$$

Доказательство. Вектор-столбцы матриц $A(x)$ удовлетворяют условию $\|\mathbf{a}_j(x)\| \le 1$, $j = 1, \ldots, n$, $A(x) = (\mathbf{a}_1(x), \ldots\ldots, \mathbf{a}_n(x))$. По лемме 2 столбцы произведения матриц $A(x)A(y)$ удовлетворяют условию $\|\mathbf{a}_j(xy)\| \le (1\text{-}2\delta)$. Проводя индукцию по длине слова p, получаем необходимый результат.

Для каждой $n \times n$-*матрицы* $A = (a_{ij})$ положим

$$| A | = \max_{i,j} | a_{i,j} |.$$

Ясно, что $|A|$ обладает обычными свойствами *нормы.*

Лемма 4. *Если* A — *стохастическая* $n \times n$ -*матрица и* $\mathbf{m}$ — вектор-столбец, *то*

$$|A\mathbf{m} - \mathbf{m}| \le \|\mathbf{m}\|.$$

Доказательство. Пусть $(a_{i1}, ..., a_{in})$ — i-я строка матрицы A и b_i — i-й элемент вектора-столбца $A\mathbf{m}$. Тогда

$$b_i - m_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}m_j - m_i\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|m_j - m_i| \leqslant \|\mathbf{m}\|, \ i = 1, \ldots, n.$$

Следствие 2. *Если A — стохастическая $n\times n$ -матрица и H — произвольная вещественная $n\times n$ -матрица, то*

$$|AH-H|\leq\|H\|.$$

Будем говорить, что $n \times n$ -матрица B *принадлежит классу матриц* W, если сумма элементов этой матрицы по строкам равна нулю, а сумма всех положительных элементов в каждой строке не больше единицы.

Лемма 5. *Пусть A — произвольная вещественная $n \times n$ -матрица, а B — $n \times n$ -матрица из класса W. Тогда справедливо неравенство* $|BA|\leq\|A\|$.

Доказательство. Обозначим элементы матрицы BA через c_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$. Пусть

$$\max_{i,j} |c_{ij}| = |c_{kr}|.$$

Согласно определению произведения двух матриц имеем

$$c_{kr} = \sum_{j=1}^{n} b_{kj}a_{jr}. \tag{10.46}$$

Положим

$$\max_{j} a_{jr} = M, \quad \min_{j} a_{jr} = m.$$

Рассмотрим два случая.

1) $c_{kr} \geq 0$. Заменив в (10.46) в слагаемых с положительными коэффициентами b_{kj} сомножители a_{jr} на M и в слагаемых с неотрицательными коэффициентами b_{kj} те же сомножители на m, получаем неравенство

$$c_{kr} \leqslant b_{ki_1}M + \ldots + b_{ki_l}M + b_{ki_{l+1}}m + \ldots + b_{ki_n}m = \\ = (b_{ki_1} + \ldots + b_{ki_l})(M - m) + (b_{k1} + \ldots + b_{kn})m.$$

Отсюда в силу того, что матрица B является матрицей из класса W, имеем $c_{kr} \leq M — m \leq\|A\|$. Так как $c_{kr}\geq 0$, то в этом случае $c_{kr} \leq \|A\|$.

2) Пусть теперь $c_{kr}<0$. Представим выражение (10.46) в виде четырех групп слагаемых

$$c_{kr} = b_{ki_1}a_{i_1r} + \ldots + b_{ki_s}a_{i_sr} + b_{ki_{s+1}}a_{i_{s+1}r} + \ldots \\ \ldots + b_{ki_l}a_{i_lr} + b_{ki_{l+1}}a_{i_{l+1}r} + \ldots + b_{ki_t}a_{i_tr} + \\ + b_{ki_{t+1}}a_{i_{t+1}r} + \ldots + b_{ki_n}b_{i_nr},$$

где элементы

$$b_{ki_1}a_{i_1r}, \ldots, b_{ki_l}a_{i_lr}$$

— положительные (причем коэффициенты $b_{ki_1}, \ldots, b_{ki_s}$ — положительные, а коэффициенты $b_{ki_{s+1}}, \ldots, b_{ki_l}$ — отрицательные), а элементы

$$b_{ki_{l+1}}a_{i_{l+1}}, \ \ldots \ \ldots, b_{ki_n}a_{i_n}r$$

— неположительные (причем коэффициенты $b_{ki_{l+1}}, \ldots b_{ki_t}$ — положительные, а коэффициенты $b_{ki_{t+1}}, \ldots, b_{ki_n}$ — неположительные). Имеет место неравенство

$$\begin{aligned} c_{kr} \geqslant b_{ki_1}m + \ldots + b_{ki_s}m + b_{ki_{s+1}}M + \ldots + b_{ki_l}M + \\ + b_{ki_{l+1}}m + \ldots + b_{ki_{t+1}}M + \ldots + b_{ki_n}M = \\ = (b_{ki_{s+1}} + \ldots + b_{ki_l} + b_{ki_{t+1}} + \ldots + b_{ki_n})M + \\ + (b_{ki_1} + \ldots + b_{ki_s} + b_{ki_{l+1}} + \ldots + b_{ki_t})m = \\ = (b_{ki_{s+1}} + \ldots + b_{ki_l} + b_{ki_{t+1}} + \ldots + b_{ki_n})(M - m) \end{aligned}$$

Так как $c_{kr} \leq 0$, то согласно определению матриц из класса W получим $|c_{kr}| \leq M - m \leq \|A\|$.

Следствие 3. *Если C и D-стохастические матрицы одинаковых порядков, такие, что произведения CA и DA, где A — произвольная матрица, определены, то* $|CA - DA| \leq \|A\|$.

Доказательство. Матрица $C - D$ является матрицей из класса W, а потому к произведению $(C - D)A$ применима лемма 4.

Определение 1. Для любой стохастической $n \times n$ -матрицы $A = (a_{ij})$ через $Q(A) = (\delta_{ij})$ обозначим матрицу из нулей и единиц, которая удовлетворяет условиям

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } a_{ij} > 0, \\ 0, \text{ если } a_{ij} = 0. \end{cases} \quad (i, j=1, \ldots,n)\ldots$$

Матрица $Q(A)$ называется *булевським шаблоном* стохастической матрицы A.

Определим операции над булевськими матрицами аналогично операциям над числовыми матрицами заменой операций сложения и умножение чисел на соответствующие операции логического сложения и умножения. Таким образом,

$$(\delta_{ij}^1) + (\delta_{ij}^2) = (\delta_{ij}^1 \vee \delta_{ij}^2),$$
$$\sum_k (\delta_{ik}^1)(\delta_{kj}^2) = \left(\bigvee_k \delta_{ik}^1 \& \delta_{kj}^2\right).$$

Тогда булевський шаблон стохастической матрицы A будет стохастическим в новом смысле, поскольку для любой строки из

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$$

следует

$$\bigvee_{j=1}^{n} \delta_{ij} = 1.$$

Лемма 6. *Соответствие Q: A→Q(A) является гомоморфизмом полугруппы G стохастических n×n-матриц на полугруппу Q(G) булевських стохастических n×n - матриц-шаблонов.*

Доказательство. Действительно, пусть элемент произведения Q стохастических матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{jk})$ строго больше нуля:

$$\sum_j a_{ij} b_{jk} = c_{ik} > 0.$$

Тогда это означает, что обнаружится значение индекса j такое, что $a_{ij} > 0$ и $b_{jk} > 0$. Но в этом случае в соответствующих матрицах-шаблонах $Q(A)$ и $Q(B)$ имеем, что $\delta^A_{ij} = 1$ и $\delta^B_{jk} = 1$. Но тогда элемент δ^C_{ik} матрицы-шаблона для произведения $Q(AB)$ будет равен единице:

$$\sum_j \delta^A_{ij} \delta^B_{jk} = \delta^C_{ik} = 1.$$

Обратно, если элемент произведения AB равен нулю, то, поскольку матрицы A и B имеют только неотрицательные элементы, то равенство

$$\sum_j a_{ij} b_{jk} = c_{ik} = 0$$

возможно лишь в том случае, когда все элементы a_{ij} и b_{jk} ($j = 1, ..., n$) матриц A и B равны нулю. Однако в этом случае будет равен нулю и элемент δ^C_{ik} матрицы-шаблона $Q(AB)$:

$$\sum_j \delta^A_{ij} \delta^B_{jk} = \delta^C_{ik} = 0.$$

Таким образом, мы получили тождество $Q(AB) = Q(A)Q(B)$ для любой пары матриц A и B из полугруппы G, что и означает наличие гомоморфизма.

Стохастическая матрица называется *регулярной,* если некоторая ее конечная положительная степень состоит только из положительных элементов. Естественно называть регулярным и булевський шаблон регулярной матрицы. Свойство матрицы A быть регулярной инвариантной относительно отображения Q*:* $A \to Q(A)$. Таким образом, булевская матрица регулярна, если некоторая ее конечная положительная степень состоит только с одних единиц.

Определение 2. Стохастическая матрица называется *стягивающей,* если для любой пары ее строк обнаружится хотя бы один столбец, на пересечении которого с этими строками находятся положительные элементы.

Теорема 1. *Пусть* $\langle A(x),\ x \in X\rangle$ — *конечная система стохастических* $n \times n$*-матриц. Следующие четыре условий эквивалентны.*

I. $\lim\limits_{|p| \to \infty} \| A(p) \| = 0.$

II. *Существует натуральное* l_1 *такое, что любая матрица* $A(p)$ *для* $|p| = l_1$ *имеет по крайней мере один положительный столбец.*

III. *Существует натуральное* l_2 *такое, что для любой матрицы* $A(p)$ *для* $|p| = l_2$ *выполняется соотношение*

$$\max_{F \subset \mathfrak{A}} \| A(p)\, \mathbf{n}_F \| = 1 - c, \quad c > 0,$$

где F*-подмножество номеров столбцов матрицы* $A(p)$*, а* c — *положительная величина, которая зависит от матрицы* $A(p)$*.*

IV. *Существует натуральное* l_2 *такое, что любая матрица* $A(p)$ *для* $|p| = l_2$ *является стягивающей матрицей.*

Доказательство. Предположим, что выполнено I. В любой матрице $A(p)$ обнаружится столбец, в котором есть элемент, не меньший чем $1/n$. Выберем t такое, что

$$||A(p)|| < 1/n \qquad (10.47)$$

для всех слов p, $|p| = t$. Пусть j — номер столбца матрицы $A(p)$, в котором содержится элемент, не меньший $1/n$. Согласно (10.47) j-й столбец матрицы $A(p)$ будет состоять только из положительных элементов. Следовательно, из I следует II. Пусть для некоторого l_2 любая матрица $A(p)$, $|p| = l_2$, удовлетворяет условию III.

Докажем, что матрица $A(p)$ в этом случае будет стягивающей. Предположим обратное. Тогда существует пара строк с номерами i и j такая, что в любом столбце на пересечении с этими строками находятся элементы, один из которых неотрицательный. В силу этого имеем

$$\left| \sum_{k \in F'} a_{ik}(p) - \sum_{k \in F'} a_{jk}(p) \right| = 1,$$

где F' — множество всех номеров столбцов, на пересечении которых с i-м рядом находятся ненулевые элементы. Иначе это означает, что для двух строк $\mathbf{a}_i(p)$ и $\mathbf{a}_j(p)$ матрицы $A(p)$: $|\mathbf{a}_i(p)\mathbf{n}_{F'}$ -aj$(p)\mathbf{n}_{F'}| = 1$, что

противоречит условию III. Наоборот, если $A(p)$ — стягивающая матрица, то для нее выполняется условие III. Пусть i и j — произвольные строки матрицы $A(p)$. Поскольку $A(p)$ — стягивающая матрица, то обнаружится столбец с номером k такой, что
$a_{ik}(p) > 0$, $a_{jk}(p)>0$. Пусть F— произвольное подмножество номеров столбцов $A(p)$. Тогда либо $k\in F$, либо $k\notin F$. В обеих случаях имеем строгое неравенство

$$\left|\sum_{t\in F} a_{it}(p) - \sum_{t\in F} a_{jt}(p)\right| < 1,$$

с той разницей, что в первом случае обе суммы определенно равны нулю, а во втором случае обе суммы определенно строго меньше единицы. Ввиду конечности порядка матрицы $A(p)$ число различных пар строк i и j и число различных подмножеств F конечно. Следовательно, обнаружится положительное $c = c(A(p))$, которое фигурирует в условии III. Следовательно, условия III и IV эквивалентны. Очевидно, что из условия II следует условие IV, следовательно, и III.

Пусть выполнено условие IV, $|p|=l_2$. Для пары строк (i, j) столбцов с указанным свойством может оказаться несколько. Положим

$$c_{ij}(p) = \max_{k\in F} \min\{a_{ik}(p),\ a_{jk}(p)\},$$

где F — множество номеров таких столбцов, и

$$c(p) = \min_{i,j} c_{ij}(p).$$

Если B — произвольная матрица, для которой определено произведение $A(p)B$, то

$$\|A(p)B\| \leqslant [1 - c(p)]\,\|B\|. \tag{10.48}$$

Действительно, пусть $B = (b_{ij})$ и

$$M_k = \max_t a_{tk}(p), \quad m_k = \min_t a_{tk}(p).$$

Очевидно, что

$$a_{ir}(p)b_{rk} = M_k a_{ir}(p) - (M_k - b_{rk})a_{ir}(p),$$
$$a_{jr}(p)b_{rk} = m_k a_{jr}(p) + (b_{rk} - m_k)a_{jr}(p).$$

Пусть r— номер столбца, на пересечении которого со строками i и j находится элемент $c_{ij}(p)$. Тогда для общего элемента матрицы $A(p)B$ получим

$$a'_{ik} = \sum_{t\neq r} a_{it}(p)\,b_{tk} + M_k a_{ir}(p) - (M_k - b_{rk})\,a_{ir}(p).$$

Аналогично

$$a'_{jk} = \sum_{t \neq r} a_{jt}(p)\, b_{tk} + m_k a_{jr}(p) + (b_{rk} - m_k)\, a_{jr}(p).$$

Переходя к оценкам, будем иметь

$$a'_{ik} \leqslant M_k \sum_{t=1}^{n} a_{it}(p) - (M_k - b_{rk})\, a_{ir}(p) = M_k - (M_k - b_{rk})\, a_{ir}(p),$$

$$k \geqslant m_k + (b_{rk} - m_k) a_{jr}(p),$$

$$a'_{ik} - a'_{jk} \leqslant (M_k - m_k) - (M_k - b_{rk})\, a_{ir}(p) - \\ - (b_{rk} - m_k)\, a_{jr}(p) \leqslant (1 - c_{ij}(p))\,(M_k - m_k).$$

Для произвольных двух строк t_1 и t_2 и произвольного столбца получим

$$a'_{t_1 s} - a'_{t_2 s} \leqslant (1 - c(p))\, \| B \|,$$

поэтому формула (10.48) доказана.

Пусть теперь $N \geq l_2$. Тогда любую матрицу $A(p)$, $|p|=N$, можно представить в виде произведения матриц

$$A(p) = A(p_1) \ldots A(p_n) A(p_{n+1}), \qquad (10.49)$$

где

$$|p_1| = \ldots = |p_h| = l_2, \quad h = [N/l_2]$$

($[N/l_2]$ означает наибольшее целое число, которое не превосходит N/l_2), и каждая, матрица $A(p_i)$, $i = 1, \ldots, n$, является стягивающей.

Число матриц вида $A(p)$, $|p| = l_2$, конечно. Поэтому, если обозначить

$$c = \min_{|p|=l_2} c(p),$$

то, применяя к (10.49) $[N/l_2]$ раз соотношения (10.48), получим

$$\| A(p) \| \leqslant (1 - c)^{[N/l_2]}.$$

Следовательно,

$$\lim_{N \to \infty} \| A(p) \| = 0,$$

т.е. из условия IV следует условие I.

Пусть $a_{ij}(p)$ — общий элемент матрицы переходов $A(p)$ объекта $A = \langle A(x), x \in X \rangle$.

Определение 3. Объект A называется *эргодическим,* если для любой пары строк матрицы переходов и произвольной последовательности слов p_i, $i = 1, \ldots$, возрастающей длины имеет место соотношения

$$\lim_{|p_i| \to \infty} \max_{\beta} | a_{\alpha\beta}(p_i) - a_{\alpha'\beta}(p_i) | = 0.$$

Смысловое выполнение эргодического принципа для системы матриц вероятностей переходов объекта означает, что вероятность того, что объект будет находиться в состоянии $a \in \mathfrak{A}$ после подачи на вход слова p, при $|p| \to \infty$ не зависит от начального состояния. Более того, эта вероятность не зависит даже от начального вектора состояний.

Теорема 2. *Для того чтобы объект A был эргодическим, необходимо и достаточно, чтобы каждая матрица вероятностей переходов $A(p)$, $p \in X^* \backslash \{e\}$, принадлежала классу регулярных стохастических матриц.*

Доказательство. Действительно, предположим противное, тогда существует некоторая матрица $A(p)$, которая является иррегулярной. Тогда, очевидно, и матрица $A^t(p)$ является иррегулярной для любого t=1, ... Последнее противоречит условию II теоремы 1. Полученное противоречие доказывает необходимость условий теоремы.

Пусть теперь каждая матрица $A(p)$, $p \in X^* \backslash \{e\}$, принадлежит классу регулярных стохастических матриц.

Обозначим через $B\langle B(p),\ p \in X^*\rangle$ систему булевских шаблонов матриц вероятностей переходов объекта A и через $B(x)$ — булевский шаблон матрицы $A(x)$. Замыкание системы матриц B относительно булевськой операции умножения содержит конечное число матриц. В систему матриц B входят матрицы, которые содержат по крайней мере по одном положительному столбцу (из единиц). Обозначим множество таких матриц через M. Пусть, далее, k есть число различных с точностью до перестановки строк матриц из разности $B \backslash M$.

Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что любая матрица $B(x_1) \ldots B(x_{k+1})$ принадлежит множеству M. Очевидно, если $B(x_1) \ldots B(x_t)$ для некоторого $t \le k$ принадлежит множеству M, то и $B(x_1) \ldots B(x_{k+1})$ будет принадлежать M. Представим теперь, что все $B(x_1) \ldots B(x_t)$, $t \le k+1$, не приналежат множеству M. Тогда обнаружится пара натуральных l,m, $l < m \le k+1$, такая, что матрицы $B(x_1) \ldots B(x_l)$, $B(x_1) \ldots B(x_m)$ либо равны, либо отличаются одна от другой перестановкой строк. В любому из их случаев матрица $B(x_1) \ldots B(x_l)(B(x_{l+1}) \ldots B(x_m))^d$, d=1, ..., не принадлежит множеству M, что противоречит условию теоремы, так как для некоторого d матрица $(B(x_{i+1}) \ldots \ldots B(x_m))^d$ принадлежит множеству M.

10.4. Предельные вероятности для однородной цепи Маркова с конечным числом состояний

1. Пусть

$$S_1, S_2, \ldots, S_n$$

— все возможные состояния системы в однородной цепи Маркова, а

$P = ||p_{ij}||^n_1$ - определяющая эту цепь стохастическая матрица, которая составлена из переходных вероятностей p_{ij} $(i, j = 1, 2, ..., n)$.

Обозначим через $p^{(q)}_{ij}$ вероятность нахождения системы в состоянии S_j в момент времени t_k, если известно, что в момент времени t_{k-q} система находилась в состоянии S_i $(i, j = 1,2, ..., n; q = 1,2, ...)$. Очевидно, $p^{(1)}_{ij} = p_{ij}$ $(i, j =1, 2, ..., n)$. Пользуясь теоремами о сложеннии и умножении вероятностей, мы легко найдем:

$$p_{ij}^{(q+1)} = \sum_{h=1}^{n} p_{ih}^{(q)} p_{hj} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

или в матричной записи

$$\| p_{ij}^{(q+1)} \| = \| p_{ij}^{(q)} \|_1^n \, \| p_{ij} \|_1^n.$$

Отсюда, придавая q последовательно значение 1, 2, ..., получим формулу

$$\| p_{ij}^{(q)} \| = P^q \qquad (q = 1, 2, \ldots).$$

(Из этой формулы следует, что вероятности $p^{(q)}_{ij}$, так же как и p_{ij}
$(i, j= 1,2, ...,n; q = 1, 2, ...)$, не зависят от номера k исходного момента времени t_k).

Если существуют пределы

$$\lim_{q \to \infty} p_{ij}^{(q)} = p_{ij}^{\infty} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

или в матричной записи

$$\lim_{q \to \infty} P^q = P^{\infty} = \| p_{ij}^{\infty} \|_1^n,$$

то величины p^{∞}_{ij} $(i, j = 1,2, ..., n)$ называются *предельными или финальными переходными вероятностями* (матрица P^{∞} как предел стохастических матриц также является стохастической).

Для выяснения, в каких случаях существуют предельные переходные вероятности, и для вывода соответствующих формул введем следующую терминологию.

Мы будем стохастическую матрицу P и соответствующую ей однородная цепь Маркова называть *правильной,* если в матрице P нет характеристических чисел, отличных от единицы и равных по модулю единице, и *регулярной,* если д о п о л н и т е л ь н о единица является простым корнем характеристического уравнения матрицы P.

Правильная матрица P характеризуется тем, что в ее нормальной форме (9.159) матрицы $A_1, A_2, ..., A_q$ являются примитивными. Для регулярной матрицы д о п о л н и т е л ь н о g=l.

Кроме того, однородная цепь Маркова называется *нерозложимой, розложимой, ациклической, циклической,* если для этой цепи стохастическая матрица P является соответственно нерозложимой, розложимой, примитивной, импримитивной.

Поскольку примитивная стохастическая матрица является частным видом правильной матрицы, постольку ациклическая цепь Маркова является частным видом правильной цепи.

Мы покажем, что *предельные переходные вероятности существуют только в правильных однородных цепях Маркова.*

Действительно, пусть $\psi(\lambda)$ — минимальный многочлен правильной матрицы $P = ||p_{ij}||^n_1$. Тогда

$$\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_u)^{m_u} \quad (\lambda_i \neq \lambda_k;\ i, k = 1, 2, \dots, u). \tag{10.50}$$

Согласно теореме 10 п.9.10 можно принять, что

$$\lambda_1 = 1, \quad m_1 = 1. \tag{10.51}$$

На основании формулы (3.94) модуля 3

$$P^q = \frac{C(1)}{\overset{1}{\psi}(1)} + \sum_{k=2}^{u} \frac{1}{(m_k - 1)!} \left[\frac{C(\lambda)}{\overset{k}{\psi}(\lambda)} \lambda^q \right]^{(m_k - 1)}_{\lambda = \lambda_k}, \tag{10.52}$$

где $C(\lambda) = (\lambda E — P)^{-1} \psi(\lambda)$ — приведенная присоединенная матрица и

$$\overset{k}{\psi}(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{m_k}} \qquad (k = 1, 2, \dots, u);$$

при этом

$$\overset{1}{\psi}(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)}{\lambda - 1} \text{ и } \overset{1}{\psi}(1) = \psi'(1).$$

Если P — правильная матрица, то

$$|\lambda_k| < 1 \qquad (k = 2, 3, \dots, u),$$

и потому в правой части формулы (10.52) все слагаемые, кроме первого, при $q \to \infty$ стремятся к нулю. Поэтому для правильной матрицы P существует матрица P^∞, которая составлена из предельных переходных вероятностей, и

$$P^\infty = \frac{C(1)}{\psi'(1)}. \tag{10.53}$$

Обратное положение очевидное. Если существует предел

$$P^\infty = \lim_{q \to \infty} P^q, \tag{10.54}$$

то матрица P не может иметь характеристического числа λ_k, для которого

$\lambda_k \neq 1$, а $|\lambda_k| = 1$, так как тогда не существовал бы предел $\lim\limits_{q\to\infty} \lambda_k^q$. [Этот же предел должен существовать в силу существования предела (10.54).]

Мы доказали, что для правильной (и только для правильной) однородной цепи Маркова существует матрица P^∞. Эта матрица определяется формулой (10.53).

Покажем, как можно выразить матрицу P^∞ через характеристический многочлен

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_u)^{n_u} \tag{10.55}$$

и присоединенную матрицу $B(\lambda) = (\lambda E — P)^{-1}\, \Delta(\lambda)$.

Из тождества

$$\frac{B(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{C(\lambda)}{\psi(\lambda)}$$

в силу (10.50), (10.51) и (10.55) вытекает:

$$\frac{n_1 B^{(n_1-1)}(1)}{\Delta^{(n_1)}(1)} = \frac{C(1)}{\psi'(1)}.$$

Поэтому формулу (10.53) можно заменить формулой

$$P^\infty = \frac{n_1 B^{(n_1-1)}(1)}{\Delta^{(n_1)}(1)}. \tag{10.56}$$

Для регулярной цепи Маркова, поскольку она является частным видом правильной цепи, матрица P^∞ существует и определяется любой из формул (10.53), (10.56). В этом случае $n_1=1$ и формула (10.56) имеет вид

$$P^\infty = \frac{B(1)}{\Delta'(1)}. \tag{10.57}$$

2. Рассмотрим правильную цепь общего типа (нерегулярную). Соответствующую матрицу P запишем в нормальной форме

$$P = \begin{Vmatrix} Q_1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & Q_g & 0 & & & 0 \\ U_{g+1,1} & \ldots & U_{g+1,g} & Q_{g+1} & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ U_{s1} & \ldots & U_{sg} & \ldots & U_{s,s-1} & & Q_s \end{Vmatrix}, \tag{10.58}$$

где Q_1, ..., Q_q — примитивные стохастические матрицы, а у нерозложимых матриц Q_{q+1}, ..., Q_s, максимальные характеристические числа <1. Полагая

$$U = \begin{Vmatrix} U_{g+1,1} & \ldots & U_{g+1,g} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ U_{s1} & \ldots & U_{sg} \end{Vmatrix}, \qquad W = \begin{Vmatrix} Q_{g+1} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ U_{s,g+1} & \ldots & Q_s \end{Vmatrix},$$

запишем P в виде

$$P = \begin{Vmatrix} Q_1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & Q_g & 0 \\ & U & & W \end{Vmatrix}.$$

Тогда

$$P^q = \begin{Vmatrix} Q_1^q & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & Q_g^q & 0 \\ & U_q & & W^q \end{Vmatrix} \tag{10.59}$$

и

$$P^{\infty} = \lim_{q\to\infty} P^q = \begin{Vmatrix} Q_1^{\infty} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & Q_g^{\infty} & 0 \\ & U_{\infty} & & W^{\infty} \end{Vmatrix}.$$

Но

$$W^{\infty} = \lim_{q\to\infty} W^q = 0,$$

поскольку все характеристические числа матрицы W по модулю меньшие единицы. Поэтому

$$P^{\infty} = \begin{Vmatrix} Q_1^{\infty} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & Q_g^{\infty} & 0 \\ & U_{\infty} & & 0 \end{Vmatrix}.$$

(10.60)

Поскольку Q_1, ..., Q_q — примитивные стохастические матрицы, то матрицы $Q^{\infty}{}_1$, ..., $Q^{\infty}{}_q$ согласно формулам (10.57) и (9.121) положительны:

$$Q^{\infty}{}_1>0, ..., Q^{\infty}{}_q >0,$$

и в каждом столбце каждой из этих матриц все элементы равны между собой:

$$Q_h^{\infty} = \| q_{*j}^{(h)} \|_{i,j=1}^{n} \qquad (h = 1, 2, \dots, g).$$

Заметим, что нормальному виду (10.58) стохастической матрицы P соответствует разбиение состояний системы $S_1, S_2, \dots, S_n$ на группы:

$$\sum_1, \sum_2, \dots, \sum_g, \sum_{g+1}, \dots, \sum_s. \qquad (10.61)$$

Каждой группе Σ в (10.61) соответствует своя группа рядов в (10.59). По терминологии А. Н. Колмогорова состояния системы, которые входят в

$$\sum_1, \sum_2, \dots, \sum_g,$$

называются *существенными,* а состояния, которые входят в остальные группы

$$\sum_{g+1}, \ \ldots, \ \sum_{s}$$

— *несущественными.*

Из вида (10.59) матрицы P^q следует, что при любом конечном числе шагов q (от момента t_{k-q} к моменту t_k) возможен только переход системы а) из существенного состояния в существенное состояние той же группы, б) из несущественного состояния в существенное состояние и в) из несущественного состояния в несущественное состояние той же или предшествующей группы.

Из вида (10.60) матрицы P^∞ следует, что в пределе при $q \to\infty$ *переход возможен только из любого состояния в существенное состояние,* т.е. вероятность перехода в любое несущественное состояние при числе шагов $q\to\infty$ стремится к нулю. Поэтому существенные состояния иногда называются и *предельными состояниями.*

3. Из формулы (10.53) следует:

$$(E - P)P^\infty = 0.$$

(Эта формула имеет место для произвольной правильной цепи и может быть получена из очевидного равенства $P^q—P•P^{q-1}=0$ предельным переходом $q\to\infty$).

Отсюда видно, что *каждый столбец матрицы P^∞ является собственным вектором стохастической матрицы P для характеристического числа* $\lambda = 1$.

Для регулярной матрицы P число 1 является простым корнем характеристического уравнения и этому числу соответствует только один (с точностью до скалярного множителя) собственный вектор (1,1, .. ., 1) матрицы P. Поэтому в каждом j -в столбце матрицы P^∞ все элементы равны одному и тому же неотрицательному числу $p^\infty{}_{*j}$:

$$p^\infty_{j} = p^\infty_{*j} \geqslant 0 \qquad \left(j = 1, 2, \ \ldots, \ n; \ \sum_{j=1}^{n} p_{*j} = 1\right). \tag{10.62}$$

Таким образом, в регулярной цепи предельные переходные вероятности не зависят от начального состояния.

Обратно, если в некоторой правильной однородной цепи Маркова предельные переходные вероятности не зависят от начального состояния, т.е. имеют место формулы (10.62), то в схеме (10.60) для матрицы P^∞ обязательно $g = 1$. Но тогда $n_1 = 1$ и цепь является регулярной.

Для ацикличкской цепи, которая является частным случаем регулярной цепи, P — примитивная матрица. Поэтому при некотором $q > 0$ $P^q > 0$ (см. теорему 8 п.9.10). Но тогда и $P^\infty = P^\infty P^q > 0$

(Это матричное равенство получается предельным переходом $m \to \infty$ из равенства $p^m = P^{m-q} \cdot P^q$ ($m > q$). P^∞— стохастическая матриця; поэтому $P^\infty \geq 0$, и в любой строке матрицыі P^∞ имеются ненулевые элементы. Отсюда $P^\infty P^q > 0$. Вместо теоремы 8 можно здесь воспользоваться формулой (10.394) и неравенством (9.171)).

Обратно, из $P^\infty > 0$ следует, что при некотором $q > 0$ $P^q > 0$, а это по теореме 8 означает примитивность матрицы P и, следовательно, ацикличность данной однородной цепи Маркова.

Полученные результаты мы сформулируем в виде следующей теоремы:

Теорема 1. 1. *Для того чтобы в однородной цепи Маркова существовали все предельные переходные вероятности, необходимо и достаточно, чтобы цепь была правильной. В этом случае матрица* P^∞*, которая составлена из предельных переходных вероятностей, определяется формулой* (10.53) *или* (10.56).

2. *Для того чтобы в правильной однородной цепи Маркова предельные переходные вероятности не зависели от начального состояния, необходимо и достаточно, чтобы цепь была регулярной. В этом случае матрица* P^∞ *определяется формулой* (10.57).

3. *Для того чтобы в правильной однородной цепи Маркова все предельные переходные вероятности были отличны от нуля, необходимо и достаточно, чтобы цепь была ациклической.*

(Заметим, что из $P^\infty > 0$ вытекает ацикличность, а следовательно, и регулярность цепи. Поэтому из $P^\infty > 0$ автоматически следует, что предельные переходные вероятности не зависят от начального состояния, т.е. имеют место формулы (10.62).

4. Введем в рассмотрение столбцы из *абсолютных вероятностей*

$$\overset{k}{p} = (\overset{k}{p}_1, \overset{k}{p}_2, \ldots, \overset{k}{p}_n) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{10.63}$$

где $\overset{k}{p}_i$ — вероятность нахождения системы в момент t_k в состоянии S_i ($i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 0, 1, 2, \ldots$). Пользуясь теоремами сложения и умножения вероятностей, найдем:

$$\overset{k}{p}_i = \sum_{h=1}^{n} \overset{0}{p}_h p_{hi}^{(k)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n; \; k = 1, 2, \ldots),$$

или в матричной записи

$$\overset{k}{p} = P'^k \overset{0}{p} \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{10.64}$$

где P' — транспонированная матрица для матрицы P.

Все абсолютные вероятности (10.63) определяются из формулы (10.64), если известны начальные вероятности

$$\overset{0}{p}_1, \overset{0}{p}_2, \ldots, \overset{0}{p}_n$$

и матрица переходных вероятностей $P = \|p_{ij}\|^n{}_1$.

Введем в рассмотрение *предельные абсолютные вероятности*

$$\overset{\infty}{p}_i = \lim_{k\to\infty} \overset{k}{p}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

или

$$\overset{\infty}{p} = (\overset{\infty}{p}_1, \overset{\infty}{p}_2, \ldots, \overset{\infty}{p}_n) = \lim_{k\to\infty} \overset{k}{p}.$$

Переходя в обеих частях равенства (10.64) к пределу при $k\to\infty$, получим:

$$\overset{\infty}{p} = P^{\infty\prime} \overset{0}{p}. \tag{10.65}$$

Заметим, что существование матрицы предельных переходных вероятностей P^∞ влечет существование предельных абсолютных вероятностей

$$\overset{\infty}{p} = (\overset{\infty}{p}_1, \overset{\infty}{p}_2, \ldots, \overset{\infty}{p}_n)$$

при любых начальных вероятностях

$$\overset{0}{p} = (\overset{0}{p}_1, \overset{0}{p}_2, \ldots, \overset{0}{p}_n)$$

и наоборот.

Из формулы (10.65) и из вида (10.60) матрицы P^∞ вытекает, что *предельные абсолютные вероятности, соответствующие несущественным состояниям, равны нулю.*

Умножая обе части матричного равенства

$$P' \cdot P^{\infty\prime} = P^{\infty\prime}$$

справа на $\overset{0}{p}$, мы в силу (10.65) получим:

$$P' \overset{\infty}{p} = \overset{\infty}{p}, \tag{10.66}$$

т.е. столбец предельных абсолютных вероятностей $\overset{\infty}{p}$ *является собственным вектором матрицы P′ для характеристического числа* $\lambda = 1$.

Если данная цепь Маркова регулярна, то $\lambda = 1$ является простым корнем характеристического уравнения матрицы P'. В этом случае столбец предельных абсолютных вероятностей однозначно определяется из (10.66) (поскольку

$$\overset{\infty}{p}_j \geqslant 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n) \text{ и } \sum_{j=1}^{n} \overset{\infty}{p}_j = 1).$$

Пусть дана регулярная цепь Маркова. Тогда из (10.62) и из (10.65) следует:

$$\overset{\infty}{p}_j = \sum_{h=1}^{n} \overset{0}{p}_h p_{hj}^{\infty} = p_{*j}^{\infty} \sum_{h=1}^{n} \overset{0}{p}_h = p_{*j}^{\infty} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{10.67}$$

В этом случае предельные абсолютные вероятности

$$\overset{\infty}{p}_1, \overset{\infty}{p}_2, \ldots, \overset{\infty}{p}_n$$

не зависят от начальных вероятностей

$$\overset{0}{p}_1, \overset{0}{p}_2, \ldots, \overset{0}{p}_n.$$

Обратно, $\overset{\infty}{p}$ может не зависеть от $\overset{0}{p}$ при наличии формулы (10.65) тогда и только тогда, когда все строки матрицы P^{∞} одинаковы, т.е.

$$p_{hj}^{\infty} = p_{*j}^{\infty} \qquad (h, j = 1, 2, \ldots, n),$$

и потому (согласно теореме 10.1) P — регулярная матрица.
Если P — примитивная матрица, то $P^{\infty} > 0$, а отсюда в силу (10.76)

$$\overset{\infty}{p}_j > 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Наоборот, если все

$$\overset{\infty}{p}_j > 0$$

(j = 1,2, ..., *n)* и не зависят от начальных вероятностей, то в каждом столбцы матрицы P^{∞} все элементы одинаковые и согласно (10.67) $P^{\infty}>0$, а это по теореме 1 означает, что P — примитивная матрица, т.е. данная цепь ациклична.

Из изложенного вытекает, что теорему 1 можно сформулировать так:

Теорема 2. 1. *Для того чтобы в однородной цепи Маркова существовали все предельные абсолютные вероятности при любых начальных вероятностях, необходимо и достаточно, чтобы цепь была правильной.*

2. *Для того чтобы в однородной цепи Маркова существовали предельные абсолютные вероятности при любых начальных вероятностях и не зависели от этих начальных вероятностей, необходимо и достаточно, чтобы цепь была регулярной.*

3. *Для того чтобы в однородной цепи Маркова при любых начальных вероятностях существовали положительные предельные абсолютные вероятности и эти предельные вероятности не зависели от начальных, необходимо и достаточно, чтобы цепь была*

ациклической. (Вторую часть теоремы 2 иногда называют *эргодической,* а первую — *общей квазиэргодической теоремой* для однородных цепей Маркова).

5. Рассмотрим теперь однородную цепь Маркова общего типа с матрицей переходных вероятностей P.

Возьмем нормальную форму (9.159) матрицы P и обозначим через $h_1, h_2, \ldots \ldots, h_q$ индексы импримитивности матриц $A_1, A_2, \ldots, A_q$ в (9.159). Пусть h — наименьшее общее кратное целых чисел $h_1, h_2, \ldots, h_q$. Тогда матрица P^h не имеет характеристических чисел, равных по модулю единице, но отличных от единицы, т.е. P^h — правильная матрица; при этом h — наименьший показатель, при котором P^h — правильная матрица. Число h назовем *периодом* данной однородной цепи Маркова.

Поскольку P^h — правильная матрица, то существуют предел

$$\lim_{q\to\infty} P^{hq} = (P^h)^\infty,$$

а значит, и пределы

$$\lim_{q\to\infty} P^{r+qh} = P_r = P^r (P^h)^\infty \qquad (r = 0, 1, \ldots, h-1).$$

Таким образом, в общем случае последовательность матриц

$$P, P^2, P^3, \ldots$$

разбивается на h подпоследовательностей с пределами $P_r = P^r(P^h)^\infty$ $(r = 0, 1, \ldots, h\text{-}1)$.

Переходя от переходных вероятностей к абсолютным при помощи формулы (10.64), мы получим, что последовательность

$$\overset{1}{p}, \overset{2}{p}, \overset{3}{p}, \ldots$$

распадается на h подпоследовательностей с пределами

$$\lim_{q\to\infty} \overset{r+qh}{p} = (P'^h)^\infty \overset{r}{p} \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, h-1).$$

Для произвольной однородной цепи Маркова с конечным числом состояний всегда существуют пределы средних арифметических

$$\tilde{P} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} P^k = \frac{1}{h}(E + P + \ldots + P^{h-1})(P^h)^\infty \tag{10.68}$$

и

$$\tilde{p} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \overset{k}{p} = \tilde{P}' \overset{0}{p}. \tag{10.69}$$

Здесь

$$\tilde{P} = \|\tilde{p}_{ij}\|_1^n \text{ и } \tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_n).$$

Величины $\tilde{p}_{ij}$ $(i,j = 1, 2, ..., n)$ и $\tilde{p}_j$ $(j = 1,2, ..., n)$ называются соответственно *средними предельными переходными и средними предельными абсолютными вероятностями.*
Поскольку

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=2}^{N+1} P^k = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} P^k,$$

то

$$\tilde{P}P = \tilde{P}$$

и, следовательно, в силу (10.69)

$$P'\tilde{p} = \tilde{p}, \qquad (10.70)$$

т.е. $\tilde{p}$ — собственный вектор матрицы P' для $\lambda = 1$.

Заметим, что по формулам (9.159) и (10.68) мы можем матрицу $\tilde{P}$ представить в виде

$$\tilde{P} = \left\| \begin{array}{ccccc} \tilde{A}_1 & 0 & \ldots & 0 & \\ 0 & \tilde{A}_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \tilde{A}_g & \\ & \tilde{U} & & & \tilde{W} \end{array} \right\|,$$

где

$$\tilde{A}_i = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} A_i^k \quad (i = 1, 2, \ldots, g), \quad \tilde{W} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} W^k,$$

$$W = \left\| \begin{array}{cccc} A_{g+1} & 0 & \ldots & 0 \\ * & A_{g+2} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & * & \ldots & A_s \end{array} \right\|.$$

Поскольку все характеристические числа матрицы W по модулю меньше единицы, то

$$\lim_{k\to\infty} W^k = 0$$

и, следовательно, $\tilde{W} = 0$.

Поэтому

$$\tilde{P} = \left\| \begin{matrix} \tilde{A}_1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \tilde{A}_2 & \dots & 0 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{A}_g & \\ & \tilde{U} & & & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{10.71}$$

Поскольку $\tilde{P}$ — стохастическая матрица, то стохастическими являются здесь и матрицы $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$, ..., $\tilde{A}_q$.

Из полученного представления для $\tilde{P}$ и из (10.65) следует, что *средние предельные абсолютные вероятности, соответствующие несущественным состояниям, всегда равны нулю.*

Если в нормальной форме матрицы P число g = 1, то для матрицы P' число λ = 1 является простым характеристическим числом.

В этом случае $\tilde{p}$ однозначно определяется из (10.70), и средние предельные вероятности $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n$ не зависят от начальных вероятностей $\overset{0}{p}_1, \overset{0}{p}_2, \dots, \overset{0}{p}_n$.

Обратно, если $\tilde{p}$ не зависит от $\overset{0}{p}$, то в силу (10.69) матрица $\tilde{P}$ имеет ранг 1. Но матрица (10.71) может иметь ранг 1 только тогда, когда g = 1.

Полученные результаты мы сформулируем в виде следующей теоремы (эту теорему иногда называют *асимптотической теоремой* для однородных цепей Маркова):

Теорема 3. *Для произвольной однородной цепи Маркова с периодом h матрицы вероятностей P^k и $\overset{k}{p}$ при $k \to \infty$ стремятся к периодическому повторению с периодом h; при этом всегда существуют средние предельные переходные и абсолютные вероятности*

$$\tilde{P} = \| \tilde{p}_{ij} \|_1^n \text{ и } \tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n),$$

которые определяются формулами **(**10.68) *и* **(**10.69)**.**

Средние предельные абсолютные вероятности соответствующие несущественным состояниям, всегда равны нулю.

Если в нормальной форме матрицы P число g = 1 *(и только в этом случае), средние предельные абсолютные вероятности* $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_n$ *не зависят от начальных вероятностей* $\overset{0}{p}_1, \overset{0}{p}_2, \ldots, \overset{0}{p}_n$ *и однозначно определяются из уравнения* **(**10.71**).**

10.5. Классификация стохастических эргодических матриц методами кластерного и дискриминантного анализа

В.М. Захаровым, Н.Н. Нурмеевым, Ф.И. Салимовым, СВ. Шалагиным разработаны и исследованы возможности автоматической классификации марковских моделей методами многомерной математической статистики. Дана схема классификации эргодических матриц на основе объединения методов кластерного и дискриминантного анализа. Ниже приводится изложение указанных методов

Задача классификации объектов актуальна для исследований в области анализа математических моделей как в теоретическом, так и в прикладном плане. Появление компьютерных технологий статистической обработки данных, таких как «Интегрированная система STATISTICA 5.0», позволяет ставить и решать задачи данного направления.

В работе изучаются возможности подхода к классификации стохастических матриц, основанного на методах многомерной математической статистики - кластерном и дискриминантном анализе. Рассмотрение ограничено классом эргодических матриц.

Свойства стохастических матриц зависят от их структуры, определяемой как соотношение значений её элементов относительно друг друга. В связи с чем, естественно возникающей задачей анализа марковских моделей является классификация стохастических матриц по некоторым критериям схожести или различия их структур. Следует отметить, что для различных приложений можно выбирать такие наборы критериев (свойств), которые существенны именно для них. На примере класса эргодических стохастических матриц в настоящей работе показывается, что существует удовлетворительное решение задачи, а в основу критериев положены функционалы на цепях Маркова, часто встречающиеся в прикладных задачах, в частности, в области защиты информации.

Как известно, кластерный анализ (КА) основывается на двух положениях:

1) в один класс (кластер) объединяются объекты, сходные между собой по определённым критериям (свойствам, признакам);

2) степень сходства у объектов, принадлежащих одному классу, должна быть больше, чем у объектов, относящихся к разным классам.

Методы КА позволяют получить характеристики кластерной структуры исследуемого множества стохастических матриц, которые могут быть использованы при решении различных задач (оценка эффективности функционирования марковских моделей сложных систем, распознавание объектов и др.).

В классе стохастических эргодических матриц существует большое число различных подклассов матриц (положительные, дважды стохастические, циркулянты и др.). КА даёт ответы на вопросы: какова кластерная структура той или иной смеси (объединения) подклассов стохастических матриц, представленных определённым набором критериев, отличается ли смесь от однородной совокупности и др

Дискриминантный анализ (ДА) позволяет на основе измерения параметров (признаков) объекта классифицировать его - отнести к одной из заданных групп объектов некоторым оптимальным образом, то есть решать задачи распознавания (идентификации) марковских моделей.

Объединение методов КА и ДА для обработки одной и той же модели данных расширяет возможности анализа, приводит к коррекции результатов.

Рассматриваемая схема классификации состоит из трёх этапов.

Этап I. Построение модели данных

Этап 2. Кластерный анализ.

Этап 3 Дискриминантный анализ.

Первый этап реализован ниже на основе разработанных специализированных программных средств, этапы 2 - 3 - системой STATISTICA 5.0.

10.5.1. Описание модели данных

<u>*Построение наборов объектов классификации.*</u> Обозначим через B множество $(n \times n)$ - мерных эргодических стохастических матриц (ЭСМ) - $P = \|p_{ij}\|_{n \times n}$. Рассматриваются следующие подклассы ЭСМ.

Π - положительные стохастические эргодические матрицы, элементы которых удовлетворяют условию $p_{ij} > 0$, $i, j = \overline{1, n}$.

Д- дважды стохастические матрицы, удовлетворяющие ограничениям вида:

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1,\ p_{ij} > 0,\ i, j = \overline{1,n}.$$

Ц - дважды стохастические матрицы типа правых *h*-циркулянтов - матрицы, у которых каждая строка (за исключением первой) получается из предыдущей путём циклического сдвига всех элементов строк на *h* позиций вправо, $h = \overline{1, n-1}$.При этом $p_{ij} > 0,\ i, j = \overline{1,n}$.

С - дважды стохастические симметрические матрицы. На них наложено ограничение вида: $p_{ij} = p_{ji},\ p_{ij} > 0,\ i, j = \overline{1,n},\ i \neq j$.

ЛП - матрицы вида

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{32} & p_{33} & p_{34} & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{43} & p_{44} & p_{45} & & 0 & 0 & 0 \\ & & \cdots & & & \ddots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & p_{(n-1)(n-2)} & p_{(n-1)(n-1)} & p_{(n-1)n} \\ p_{n1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_{n(n-1)} & p_{nn} \end{pmatrix},$$

задающие локальные вероятностные переходы, где расположение ненулевых элементов определено буквенными обозначениями.

Структура подклассов класса *В* приведена на рис. 10.9.

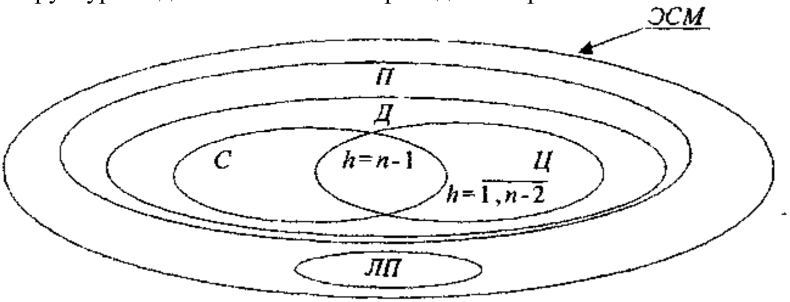


Рис. 10.9

Ограничимся рассмотрением трех подклассов класса $A = П \cup Д \cup ЛП$, которые имеют чётко выраженные, различающиеся структуры. Заметим, что подклассы *П* и *Д* имеют сходство в том, что они содержат положительные матрицы *(Д* включён в состав *П),* а матрицы из подкласса *ЛП* характеризуются значительным количеством нулей. Таким образом, *ЛП* существенно отличается от *П* и *Д*.

В качестве объектов рассматриваются элементы множества матриц

$$\Psi = \{P_t, t = \overline{1,N}\},\ \Psi \subseteq A.$$

Замечание. Далее будем придерживаться терминологии, принятой в теории цепей Маркова. Любая стохастическая матрица рассматривается как матрица вероятностей переходов в состояния некоторой цепи Маркова. Состояние $s_r,\ r = \overline{1,n}$, цепи Маркова будем отождествлять с его номером *r/*

Определение множества классификационных признаков. Определим через $c_j,\ j = \overline{1,m}$, некоторое отображение элементов множества *А* на числовую ось. Назовём c_j - *j*-м признаком. Выбор признаков должен отражать существенные свойства матриц из *А.* В рамках данной задачи ограничимся рассмотрением следующих свойств матриц *Р, Р*$\in$*А:*

1) асимптотические (мультипликативные) свойства матрицы *Р,* определяемые структурой матрицы, получаемой возведением *Р* в степень *t* (*t* -натуральное число) при $t\to\infty$;

2) уровень, характеризуемый мерой отклонения положительных элементов матрицы *Р* от нуля;

3) рассеяние (разброс) элементов в строках и столбцах матрицы *Р* относительно средних;

4) энтропия матрицы *Р,* характеризующая отклонение матрицы *Р* от матрицы, в которой элементы $p_{ij} = 1/n,\ i,j = \overline{1,n}$

Замечание. Для матриц *Р* из класса ЭСМ существует единственный предельный вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, компоненты α_j которого удовлетворяют уравнениям вида:

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_{ij},\ j = \overline{1,n};\quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

На основе α введём следующие признаки.

c_1- математическое ожидание предельного распределения состояний $s_j : \alpha(s) = (\alpha_1(s_1), \alpha_2(s_2), \dots, \alpha_n(s_n))$,

$$c_1 = M_\alpha = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j s_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j j.$$

Напомним, что значение s_j совпадает с номером индекса *j*.

c_2 - дисперсия распределения α*(s)*:

$$c_2 = D_\alpha = \sum_{j=1}^{n} (j - M_\alpha)^2 \alpha_j.$$

Замечание. Для ЭСМ существует также единственный вектор $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ предельных дисперсий для времён пребывания в каждом состоянии. Компоненты β_j, $j = \overline{1,n}$, вычисляются из соотношения вида

$$\beta_j = \alpha_j(2z_{jj} - 1 - \alpha_j),$$

где величина z_{jj} - элемент фундаментальной матрицы Z, определяемой матрицей P. Z имеет вид:

$$Z = (I - (P\text{-}A))^{-1},$$

где I - единичная матрица, A - предельная матрица для P. На основе p введём следующие признаки.

c_3 –норма вектора β:

$$c_3 = \sum_{j=1}^{n} \beta_j ;$$

c_4 - евклидова норма вектора β:

$$c_4 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\beta_j)^2} ;$$

Уровень отклонения определим группой признаков - нормами вида

$$c_5 = n \max_{ij} | p_{ij} |; \quad c_6 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} | p_{ij} |^2} .$$

Рассеяние P характеризуется признаками:

c_7 - средняя дисперсия:

$$c_7 = (n)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (j - M_i)^2 p_{ij}, \text{ где } M_i = \sum_{j=1}^{n} j p_{ij} ;$$

c_8 - сумма стандартных отклонений элементов:

$$c_8 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (p_{ij} - \bar{p})^2, \text{ где } \bar{p} = 1/n .$$

Разброс по столбцам вычисляется по формуле:

$$c_9 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (p_{ji} - \bar{p}_j)^2, \text{ где } \bar{p}_j = (n)^{-1} \sum_{i=1}^{n} p_{ij} .$$

Энтропия матрицы P определяется признаком вида:

$$c_{10} = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i p_{ij} \log_2(p_{ij}),$$

при этом энтропия, опражая асимптотические свойства матрицы P и находясьв пределах $0 \le c_{10} \le \log_2 n$, достигает максимума для

$$P: p_{ij}=1/n,\ i,j=1,2, ,,,.,n.$$

Множество $V=\{c_j, j=1, 2,\ldots,10\}$ будем называть рабочим словарём.

Построение исходной таблицы данных. Для проведения экспериментов была построена с помощью генератора случайных чисел выборка объёмом в 300 ($n\times n$)-матриц из класса ЭСМ, $n=5$, из которых первые 100 матриц принадлежат к классу (П\Д), следующие сто матриц - к классу Д и оставшиеся матрицы - к классу ЛП. Все положительные элементы p_{ij} матриц представлены с дискретностью $0{,}5*10^{-5}$ в диапазоне:

$$0{,}5*10^{-5} \le p_{ij} \le 1-0{,}5*10^{-5},\ i,j=\overline{1,5}.$$

Набор признаков К совпадает с рабочим словарем.

Описание данных для проведения КА и ДА представим в виде таблицы объект-признак. Строки таблицы соответствуют объектам, а столбцы - признакам (переменным) из рабочего словаря V. На пересечении i-й строки, $i=\overline{1,N}$, N=300, и j-го столбца, $j=\overline{1,m}$, m=10, содержится значение x_{ij} j-го признака, принимаемое им на i-м объекте. Вектор значений $(x_{i1},x_{i2},\ldots,x_{im})$, соответствующий i-й строке, обозначим X_i, а множество векторов - символом X Все последующие конкретные рассмотрения основаны на построенном примере.

10.5.2. Кластерный анализ

Кластерный анализ (КА) таблицы проведём, придерживаясь традиционной схемы (с ограничениями, определяемыми системой STATIS-T1CA5.0:

1) определение меры сходства (различия) объектов;
2) выбор методов кластерного анализа,
3) кластерный анализ при ограничениях на метрики и методы;
4) оценка качества решений кластерного анализа;
5) оценка достоверности (обоснованности) кластерного решения.

Проведение этапов 1,2 ограничим возможностями STATISTICA 5.0 *Определение метрик и методов.* Система STATISTICA 5.0 в модуле «Кластерный анализ» (далее Модуль) предлагает несколько мер сходства объектов, основанных на метриках [1, 10]. Введём для метрики обозначение $d(X_i,X_j),\ i,j=\overline{1,N}$.

Приведем следующие метрики, применяемые в Модуле.

Метрика Минковского:

$$d(X_i, X_j) = [\sum_{k=1}^{n} | x_{ik} - x_{jk} |^r]^{1/r}, \; r \geq 1. \qquad (10.73)$$

Евклидова метрика:

$$d(X_i, X_j) = [\sum_{k=1}^{n} | x_{ik} - x_{jk} |^2]^{1/2}. \qquad (10.74)$$

Манхэттенская метрика:

$$d(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^{n} | x_{ik} - x_{jk} |. \qquad (10.75)$$

Метрика Чебышева или - метрика доминирования:

$$d(X_i, X_j) = \max_{k} | x_{ik} - x_{jk} |. \qquad (10.76)$$

Замечание. Метрики (10.74), (10.75), (10.76) являются частными случаями метрики Минковского (10.73). Евклидова метрика (10.74) при $n > 2$ даёт большее значение, чем метрика (10.76), но меньшее значение, чем метрика (10.75). Исходя из этого, далее будем рассматривать результаты кластерного анализа, основанные на евклидовой метрике (1.74).

В Модуле реализованы методы из семейства иерархических агломеративных методов кластеризации и итеративные методы группировки. Использован итеративный метод «К-средних». Начальные кластерные центры были выбраны на основе максимальных расстояний между ними. Кластерное решение, полученное отмеченным методом, отвечает критерию, основанному на минимизации внутрикластерных сумм квадратов отклонений.

Кластеризация. Рассматриваемая постановка задачи кластерного анализа в общем виде заключается в том, чтобы на основании данных, содержащихся в таблице, и одной из метрик получить методом «К-средних» разбиение множества Ψ на непересекающиеся подмножества, то есть получить кластерную структуру смеси подклассов из *A*.

Варьируя числом и составом объектов в множестве Ψ и признаков в *V*, выбором метрик и методов кластеризации, можно получить различные уточнённые постановки задач

Ограничимся рассмогрением следующих двух уточнённых задач.

Задача 1 - выявить кластерную структуру для объединения объектов множества Ψ, используя метод К-средних и метрику (10.74).

Задача 2 - провести сравнительную оценку качества признаков *V*.

Решение задачи 1. В методе К-средних число кластеров задаётся априори. Ниже приводятся решения задачи для k = 3,4 и 5. Диаграммы, отображающие средние кластерных центров и характеризующие качество кластеризации, приведены на рис. 10.10–10.12 соответственно (на этих и последующих рисунках приняты обозначения, используемые в Модуле).

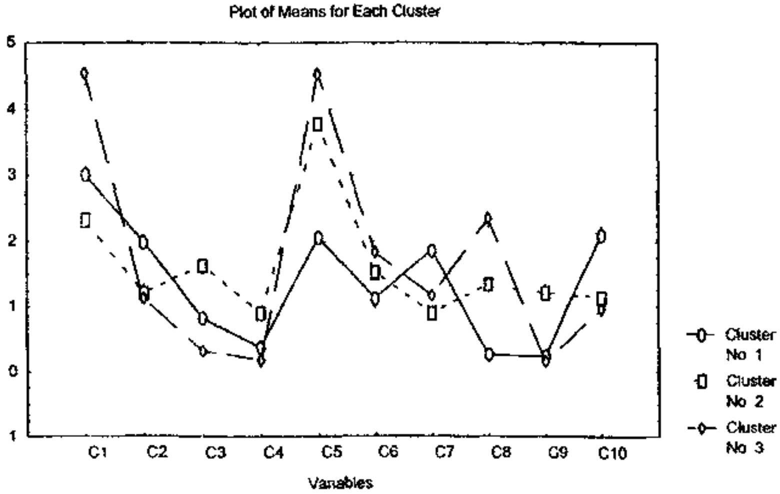


Рис. 10.10

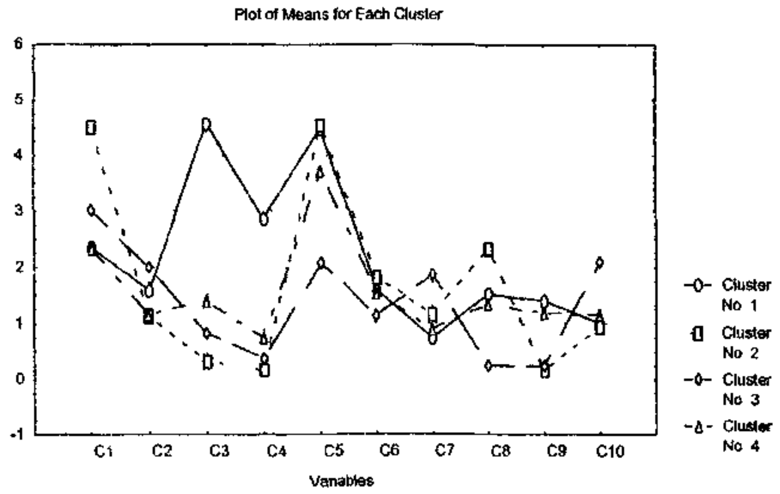


Рис. 10.11

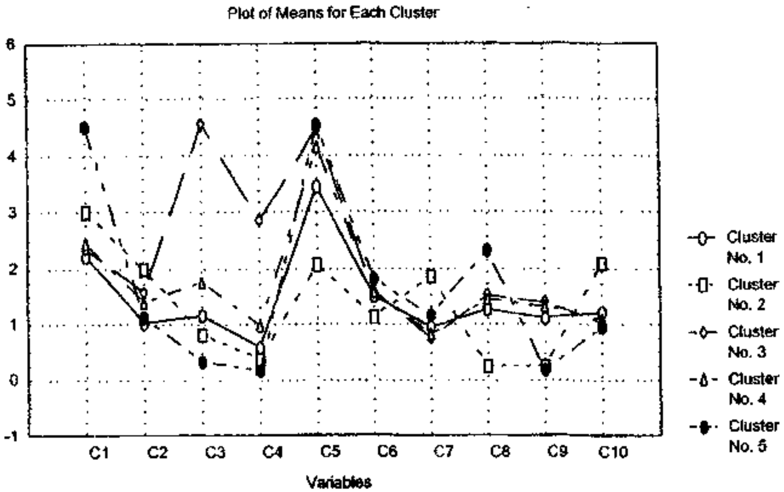


Рис. 10.12.

Оценка качества кластерных решений. На основе диаграмм на рис. 10.10–10.12 в качестве кластерного решения можно принять 3 или 4 кластера. Более формальным подходом к задаче выбора кластерного решения является применение различных критериев. Рассмотрим применение к решению задачи 1 критерия качества классификации $F1$:

$$F1 = (d_w / f_w)/(d_b / f_b),$$

где d_w, d_b - суммы внутри- и межкластерных расстояний, f_w, f_b - их число $F1$ показывает, во сколько раз среднее внутрикластерное расстояние превышает среднее межкластерное расстояние. Объекты классифицируются более качественно, когда $F1$ ближе к 0.

Оценки для множества объектов Ψ и набора признаков V при числе кластеров k = 2,3,4 и 5 приведены в табл. 1. Согласно критерию $F1$, Ψ классифицирован наиболее качественно при k = 4.

Таблица1.

Число кластеров	d_w	f_w	d_b	f_b	$F1$
2	653,35	300	0,961	1	2,267
3	322,99	300	3,216	3	1,004
4	222,76	300	7,993	6	0,557
5	193,97	300	11,519	10	0,561

Кластерное решение по составу кластеров при $k = 4$ следующее. Кластер №1 содержит 7% объектов из *ЛП,* кластер №2 - половину объектов из *П.* Кластер №3 включает 99% объектов из группы *Д* и половину объектов из *П,* 4-й кластер содержит остальные объекты из *ЛП.*

Подкласс *ЛП* разделен на два кластера под номерами 1 и 4.

Согласно рис. 10.11, у *ЛП* из кластера №1 переменные c_3 и c_4 имеют более высокий уровень (около 4,5 и примерно 3), чем *ЛП* из кластера №4 (около 1,5 и примерно 1). Наибольшее расстояние наблюдается между *ЛП* из кластера №1 и *П.* Ближе всего находятся *ЛП* из кластера №4 и смесь *Д* и часть *П* из кластера №3. При этом множество *ЛП* отделяется от остальных наборов, а *П* и *Д* частично пересекаются.

Табл. 2 характеризует евклидовы расстояния между средними кластеров при k=4.

Таблица 2.

Евклидовы расстояния между кластерами

	No. 1	No 2	No. 3	No 4
No 1	0	1,80687	1,79628	1,24037
No 2	1,80687	0	1,26900	0,96171
No 3	1,79628	1,26900	0	0,91839
No. 4	1,24037	0,96171	0,91839	0

***Решение задачи* 2.** Целью данного этапа является получение сравнительных оценок качества для признаков из *V.*

Метод К-средних даёт возможность проведения дисперсионного анализа над каждой из трёх априори заданных групп - *П, Д* и *ЛП,* для определения степени влияния на классификацию каждого из признаков. Основа дисперсионного анализа - поиск дисперсии для всей выборки - межгрупповой дисперсии *(BetweenSS),* и суммы дисперсий для отдельных групп-кластеров *(WithinSS).* Данные обозначения приняты в Модуле.

Степень влияния признаков определяется отношением функции Фишера, вычисленной эмпирически на основе внутри- и межкластерных расстояний в некотором наборе объектов (*F*), к функции Фишера, вычисленной теоретически, при соответствующих степенях свободы выборки для внутри- и межкластерных расстояний из условия равенства их дисперсий *($F_{кр}$).* Это соотношение, имеющее вид $K_{ККл} = F/F_{кр}$, является коэффициентом качества кластеризации для отдельного признака, где

$\bar{F}_{кр} = F(\gamma, \max(df1, df2), \min(df1, df2))$; $\gamma = 0{,}01$ - уровень значимости; $df1, df2$ - число степеней свободы выборки межклассовых и внутриклассовых расстояний соответственно.

Чем выше $K_{ККл}$, тем больше *BetweenSS* и меньше *WithinSS* для данной переменной и тем выше для неё качество классификации. Решение задачи 2 приведено в таблице 3.

Таблица 3.

Анализ дисперсий

	Between SS	Df1	Within SS	df2	F	$F_{кр}(0{,}01)$	$K_{ККл}$
c_6	22,04	3	1,47	296	1482,5	3,848	385,230
c_8	182,43	3	13,94	296	1290,9	3,848	335,430
c_{10}	65,50	3	7,43	296	870,2	3,848	226,120
c_9	80,01	3	12,94	296	609,8	3,848	158,468
c_7	61,58	3	10,23	296	593,7	3,848	154,279
c_5	314,42	3	59,50	296	521,4	3,848	135,483
c_1	161,64	3	34,96	296	456,2	3,848	118,531
c_4	52,33	3	12,49	296	413,5	3,848	107,452
c_3	132.40	3	34,46	296	379,2	3,848	98,521
c_2	50,25	3	35,34	296	140,3	3,848	36,457

Согласно данным таблицы 3, строки которой упорядочены по убыванию $K_{ККл}$, наибольший вклад в классификацию вносят c_6 и c_8.

Оценка обоснованности результатов. Существуют различные методы проверки обоснованности решений КА. Была проведена оценка степени повторяемости кластерного решения в серии наборов данных, полученных путём случайного перемешивания исходной совокупности. Набор объектов Ψ_r получался путём случайного перемешивания исходного набора Ψ. Затем производилась кластеризация набора Ψ_r, и полученное решение сравнивалось с исходным (для набора Ψ). КА серии наборов типа Ψ_r, r=1,2,…,10, показал, что кластерные решения задачи 1 для них идентичны исходному кластерному решению, то есть, имеем устойчивое кластерное решение.

10.5.3. Дискриминантный анализ

В дискриминантном анализе (ДА) вводятся определённые ограничения, касающиеся статистических свойств исходных данных. Отметим следующее фундаментальное допущение: каждая переменная должна иметь нормальное распределение при фиксированных остальных. Данное предположение позволяет получить точные значения вероятности принадлежности к данному классу и критерии значимости.

Соответствие переменных из рабочего словаря нормальному закону распределения в STATISTICA 5.0 можно проверить по критерию Шапиро-Уилкса (W).

Значения W, которые характеризуют близость распределения переменных рабочего словаря к нормальному для каждой из групп, приведены в таблице 4. Выберем те из них, значение W для которых более 0,75 хотя бы в одном из столбцов. В результате рабочий словарь для ДА имеет вид:

$$H1=\{c_j,\ j=\overline{5,10}\}.$$

Таблица 4

Признаки / Объекты	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}
П	0,82	0,91	0,92	0,94	0,77	0,78	0,94	0,79	0,89	0,82
Д	--	--	0,98	0,97	0,90	0,93	0,84	0,91	0,91	0,94
ЛП	0,98	0,98	0,74	0,70	0,95	0,97	0,96	0,96	0,97	0,86

Замечания.

1) Граничное значение для W подобрано опытным путём. Для $W \geq 0{,}8$ хотя бы в одном из столбцов, набор имеет вид $H2=\{c_j,\ j=7,9,10\}$.

2) Для класса *Д* значение дисперсии для c_1 и c_2 равно 0, поэтому данные переменные исключаются из $H1$ и $H2$ при выполнении ДА.

Цель ДА заключается в том, чтобы на основе измерения переменных X_i из рабочего словаря для i-го объекта, классифицировать его, то есть отнести к одной из k априори заданных групп (классов) некоторым оптимальным способом. Под оптимальным способом далее будем понимать минимум вероятности ложной классификации.

Постановка задачи ДА. Пусть имеем для данных, представленных таблицей объект-признак, кластерное решение - разбиение на k=4 кластеров, полученное по набору признаков $H1$. Отметим, что k=4 выбрано на основе сравнительной оценки качества по критерию $F1$. Разбиение на кластеры оказалось следующее: первый кластер *(К*1*)* содержит 48% объектов из *П* и 98% из *Д,* второй кластер *(К*2*)* содержит половину объектов из *П, К*3 - 54% из *ЛП, К*4 - 46% объектов из *ЛП,* 2% из *П* и 2% из *Д.*

Рассматриваемая задача заключается в том, чтобы построить решающее правило (РП), позволяющее по вычисленным значениям x_{ij} вектора $X_i \in X$ указать группу, к которой он принадлежит.

В STATISTICA 5.0 РП строится на основе линейных дискриминантных функций (ЛДФ) - функций классификации, которые имеют вид:

$$f_{ih} = u_{0h} + u_{1h}x_{i_1h} + u_{2h}x_{i_2h} + \ldots + u_{mh}x_{i_mh},$$

где f_{ih} - значение ЛДФ для вектора X_i в группе h, $i = \overline{1,k}$, x_{i_jh} - значение признака c_j вектора X, в группе h, u_{ih} - коэффициенты, которые необходимо определить.

Таким образом, построение РП сводится к нахождению коэффициентов u_{ih}. Классифицируемый объект P, (соответственно, вектор X_i) относится к той группе, для которой значение f_{ih}, вычисляемое по значениям x_{ij}, максимально.

Результаты ДА. Искомые функции классификации, полученные в Модуле стандартным методом, представлены в таблице 5, где в столбцах, соответствующих рассматриваемым кластерам, представлены коэффициенты $u_{j1}, u_{j2}, u_{j3}, u_{j4}$, $j = \overline{5,10}$, четырёх функций классификации.

Таблица 5.

Классификационные функции

	$K1$ p = 0,487	$K2$ p = 0,167	$K3$ p = 0,177	$K4$ p = 0,169	X_1
c_5	-133,16	-123,14	-124,80	-133,28	4,659
c_6	13108,78	13714,27	13203,41	13389,84	1,764
c_7	36,03	41,86	22,37	21,95	1,216
c_8	-3946,19	-4082,81	-3963,77	-4025,56	2,111
c_9	-616,51	-676,67	-592,35	-606,09	0,167
c_{10}	28,91	31,90	31,60	27,94	1,494
Constant	-6689,74	-7438,79	-6833,64	-6982,81	
Значения ф-ций	7467,40	7546,18	7483,72	7485,14	

В данной таблице в правом столбце в качестве примера идентификации X_i приведены значения элементов набора $H1$ вектора X_1 таблицы, а в нижней строке - вычисленные значения ЛДФ. Значение ЛДФ для $K2$ максимально, что позволяет судить о принадлежности X_1 к данной группе.

Таким образом, решение задачи идентификации объектов получено.

Рассмотрим дополнительные результаты, предоставляемые дискриминантным анализом.

Классификационная матрица. Классификационная матрица приведена в табл. 6.

Таблица 6.

Классификационная матрица
Строки: апостериорная классификация
Столбцы: априорная классификация

	Percent Correct	*K*1 p = 0,48667	*K*2 p = 0,16667	*K*3 p – 0,17667	*K*4 p = 0,17000
*K*1	100	146	0	0	0
*K*2	100	0	50	0	0
*K*3	94,34	0	0	50	3
*K*4	86,27	4	0	3	44
Total	96,67	150	50	53	47

По строкам представлены апостериорные (наблюдаемые) классификации, а по столбцам - априорные, полученные и представленные выше по результатам кластерного анализа.

КА даёт разбиение на кластеры. ДА дает возможность проверить принадлежность объектов к тому или иному кластеру. В классификационной матрице (табл. 6) приведено число объектов, отнесённых в тот или иной кластер по результатам ДА.

При проведении ДА 2% объектов из *П* и 2% из *Д,* априори включённых в кластер *К*4 по результатам КА, "перешли" в кластер *К*1, который изначально включает объеклы из *П* и *Д*. Расхождения результатов ДА и КА для кластеров *К*3 и *К*4 объясняются наличием в кластерах однотипных объектов (в них входит 100% объектов из *ЛП)*

Заметим, что при проведении КА большее влияние оказывают признаки, имеющие больший разброс, чем остальные, в частности, признаки c_5 и c_8. Параметры распределений значений признаков $c_j,\ j=\overline{5,10}$ представлены на графике - рис 10.13, где изображены для каждого распределения медиана, минимальные и максимальные значения и нижний и верхний квартили.

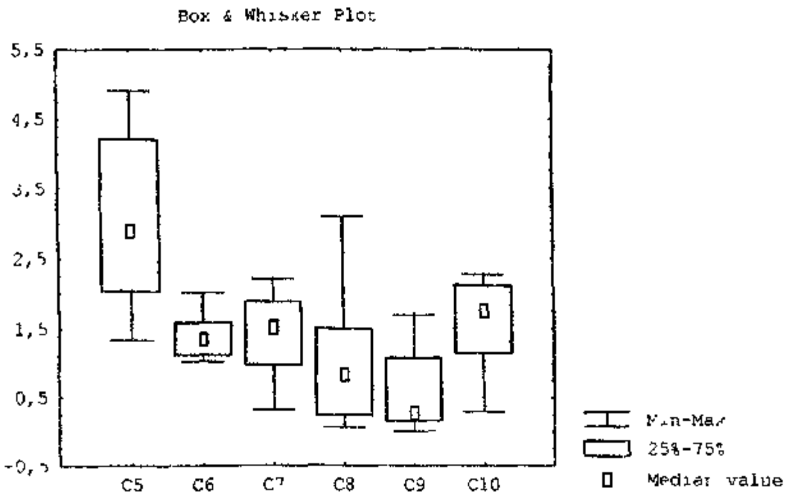


Рис 10.13

При проведении ДА влияние разброса признаков не так существенно, так что метод ДА «исправляет» ошибки, возникающие при кластеризации из-за различия в степени разброса

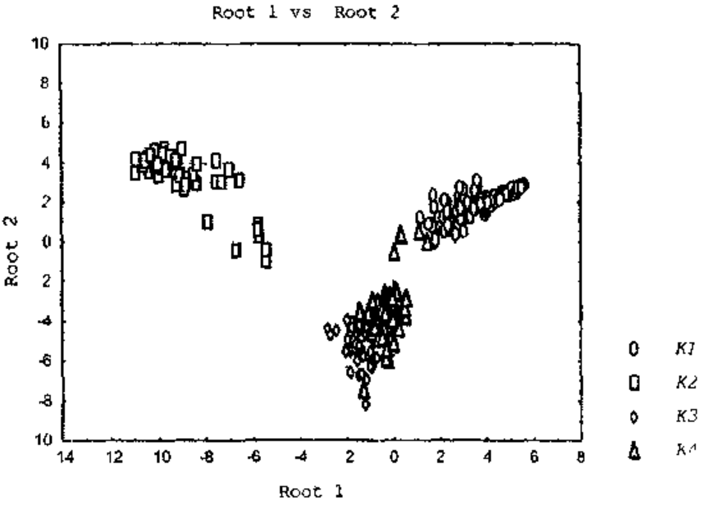


Рис 10.14

На рис. 10.14 представлен пример диаграммы рассеяния значений f_{ih}, которые интерпретируются как координаты объектов в пространстве двух ЛДФ: по оси абсцисс даны значения ЛДФ, вычисленные при u_{j1}, j=5,6,...,10, а по оси ординат - значения ЛДФ, вычисленные при u_{j2}, j=5,6,...,10. Двумерный график наглядно отображает разделение кластеров в двумерном пространстве.

Вклад каждой переменной в кластеризацию приведен в табл. 7.

Таблица 7.

Итоговый анализ переменных.
Сокращённый анализ дискримин
Переменных в модели: 6,
Группы: К1÷К4 (4 grps)
Wilks' Lambda: 0,00251,
F(18,823)=334,01 p<0,0000

	Wilks' Lambda	Partial Lambda
c_5	0,00340	0,74053
c_6	0,00408	0,61631
c_7	0,00292	0,86035
c_8	0,00362	0,69544
c_9	0,00594	0,42338
c_{10}	0,00255	0,98485

Из табл. 7 заключаем, что качество признака c_{10} имеет максимальное значение частичной λ-статистики (Partial Lambda) и минимальную λ -статистику Уилкса, что определяет его максимальный вклад в классификацию объектов при проведении ДА.

Таким образом, на примере множества стохастических эргодических матриц получена схема классификации объектов путём объединения методов кластерного и дискриминантного анализа. Предложенный подход может быть использован для более широкого класса марковских моделей.

10.6. Вполне неотрицательные матрицы

В этом и следующем пунктах мы рассмотрим вещественные матрицы, в которых не только элементы, но и все миноры любых порядков неотрицательны. Такие матрицы имеют важные применения в теории малых колебаний упругих систем.

1. Начнем из определения:

Определение 5. Прямоугольная матрица

$$A = ||a_{ik}|| \quad (i=1,2,...,m; k=1,2,...,n)$$

называется *вполне неотрицательной (вполне положительной),* если все миноры любых порядков этой матрицы неотрицательны (соответственно положительны):

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ k_1 & k_2 & \dots & k_p \end{pmatrix} \geqslant 0 \text{ (соответственно } > 0)$$

$$\left(1 \leqslant \begin{matrix} i_1 < i_2 < \dots < i_p \\ k_1 < k_2 < \dots < k_p \end{matrix} \leqslant n;\ p = 1, 2, \dots, \min(m, n)\right).$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только квадратных вполне неотрицательных и вполне положительных матриц.

Пример 1. *Обобщенная матрица Вандермонда*

$$V = ||a_i^{\alpha_k}||_1^n \quad (0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n; \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n)$$

является вполне положительной. Докажем сначала, что $|V| \neq 0$. В самом деле, из равенства $|V| = 0$ следовало бы, что можно так определить не равные одновременно нулю вещественные числа $c_1, c_2, \dots, c_n$, чтобы функция

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x^{\alpha_k}$$

имела бы n нулей в точках $x_i = a_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), где n — число степенных слагаемых. При $n=1$ это невозможно. Примем индуктивное допущение, что это невозможно для суммы меньшего, чем n, числа степенных слагаемых, и докажем, что это невозможно и для данной функции $f(x)$. Допустим противное. Тогда по теореме Ролля функция $f_1(x) = [x^{-\alpha_1} f(x)]'$, которая состоит из n — 1 степенных слагаемых, имела бы n — 1 положительных нулей, а это противоречит допущению индукции.

Итак, $|V| \neq 0$. Но при $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, ..., $\alpha_n = n - 1$ определитель $|V|$ переходит в обычный определитель Вандермонда $|a_i^{k-1}|_1^n$ который положителен. Так как переход от этого определителя Вандермонда к обобщенному можно осуществить за счет непрерывного изменения показателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ с сохранением неравенств между ними ($\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$), и так как по доказанному определитель при этом не обратится в нуль, то и $|V| > 0$ при любых $(0 <)\ \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$.

Поскольку любой минор матрицы V может рассматриваться как определитель некоторой обобщенной матрицы Вандермонда, то все миноры матрицы V положитедбны.

Пример 2. Рассмотрим *якобиеву матрицу*

$$J = \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c_{n-1} & a_n \end{Vmatrix}, \qquad (10.77)$$

т.е. матрицу, в которой все элементы, не принадлежащие главной диагонали, первой наддиагонали и первой поддиагонали, равны нулю. Установим формулу, которая выражает произвольный минор этой матрицы через главные миноры и элементы b, c. Пусть

$$1 \leq \begin{matrix} i_1 < i_2 < \ldots < i_p \\ k_1 < k_2 < \ldots < k_p \end{matrix} \leq n$$

и

$$i_1 = k_1, i_2 = k_2, \ \ldots, \ i_{\nu_1} = k_{\nu_1}; \ i_{\nu_1+1} \neq k_{\nu_1+1}, \ \ldots, \ i_{\nu_2} \neq k_{\nu_2}; \ i_{\nu_2+1} = k_{\nu_2+1}, \ \ldots, \ i_{\nu_3} = k_{\nu_3}; \ \ldots$$

Тогда

$$J\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_p \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_{\nu_1} \\ k_1 & \ldots & k_{\nu_1} \end{pmatrix} J\begin{pmatrix} i_{\nu_1+1} \\ k_{\nu_1+1} \end{pmatrix} \ldots J\begin{pmatrix} i_{\nu_2} \\ k_{\nu_2} \end{pmatrix} J\begin{pmatrix} i_{\nu_2+1} & \ldots & i_{\nu_3} \\ k_{\nu_2+1} & \ldots & k_{\nu_3} \end{pmatrix} \ldots \qquad (10.78)$$

Справедливость этой формулы вытекает из равенства, которое легко проверяется:

$$J\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_p \\ k_1 & \ldots & k_p \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_{\nu-1} \\ k_1 & \ldots & k_{\nu-1} \end{pmatrix} J\begin{pmatrix} i_\nu \\ k_\nu \end{pmatrix} J\begin{pmatrix} i_{\nu+1} & \ldots & i_p \\ k_{\nu+1} & \ldots & k_p \end{pmatrix} \ (\text{при } i_\nu \neq k_\nu). \qquad (10.79)$$

Из формулы (10.78) следует, что любой минор равен произведению некоторых главных миноров и некоторых элементов матрицы J. Таким образом, *для того чтобы матрица J была вполне неотрицательной, необходимо и достаточно, чтобы все ее главные миноры и элементы b, c были неотрицательны*.

2. Для вполне неотрицательной матрицы $A = \| a_{ik} \|^n_1$ всегда имеет место следующее важное детерминантное неравенство:

$$A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ 1 & 2 & \dots & n\end{pmatrix} \leqslant A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & p\\ 1 & 2 & \dots & p\end{pmatrix} A\begin{pmatrix}p+1 & \dots & n\\ p+1 & \dots & n\end{pmatrix} \qquad (p < n). \tag{10.80}$$

(Знак равенства в (10.80) может иметь место только лишь в следующих очевидных случаях:

1) один из множителей в правой части (10.80) равен нулю,

2) все элементы a_{ik} (i = 1,2, .. .,p; k = p+ 1, …,n) или все элементы a_{ik} (i = p+ 1, ..., n; k = 1, 2, ... ,p) равны нулю.

Неравенство (10.80) имеет тот же внешний вид, что и обобщенное неравенство Адамара для положительно определенной эрмитовой или квадратичной формы).

Выводу этого неравенства предпошлем следующую лемму:

Лемма 5. *Если во вполне неотрицательной матрице* $A=\|a_{ik}\|^n_1$ *какой-либо главный минор равен нулю, то равен нулю любой «объемлющий» главный минор.*

Доказательство. Лемма будет доказана, если мы покажем, что для вполне неотрицательной матрицы $A=\|a_{ik}\|^n_1$ с

$$A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & q\\ 1 & 2 & \dots & q\end{pmatrix} = 0 \quad (q < n) \tag{10.81}$$

всегда следует:

$$A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ 1 & 2 & \dots & n\end{pmatrix} = 0. \tag{10.82}$$

При этом рассмотрим два случая:

1) $a_{11} = 0$. Поскольку

$$\begin{Vmatrix}a_{11} & a_{1k}\\ a_{i1} & a_{ik}\end{Vmatrix} = -a_{i1}a_{1k} \geqslant 0, \quad a_{i1} \geqslant 0, \quad a_{1k} \geqslant 0$$

(i,k= 2, ..., n), то либо все a_{i1}=0 (i = 2, ..., n), либо все a_{1k}=0 (k = 2, ..., n). Из этих равенств и из a_{11} = 0 следует (10.82).

2) $a_{11} \neq 0$. Тогда при некотором p ($1 \leq p \leq q$)

$$A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & p-1\\ 1 & 2 & \dots & p-1\end{pmatrix} \neq 0, \; A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & p-1 & p\\ 1 & 2 & \dots & p-1 & p\end{pmatrix} = 0. \tag{10.83}$$

Введем окаймляющие определители

$$d_{ik} = A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & p-1 & i\\ 1 & 2 & \dots & p-1 & k\end{pmatrix} \quad (i, k = p,\; p+1,\; \dots,\; n). \tag{10.84}$$

Из них составим матрицу $D=\| d_{ik} \|^n_p$.

Согласно тождеству Сильвестра

$$D\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_g \\ k_1 & k_2 & \dots & k_g \end{pmatrix} =$$

$$= \left[A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p-1 \\ 1 & 2 & \dots & p-1 \end{pmatrix}\right]^{g-1} A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p-1 & i_1 & i_2 & \dots & i_g \\ 1 & 2 & \dots & p-1 & k_1 & k_2 & \dots & k_g \end{pmatrix} \geqslant 0$$

$$\left(p \leqslant \begin{matrix} i_1 < i_2 < \dots < i_g \\ k_1 < k_2 < \dots < k_g \end{matrix} \leqslant n;\ g = 1, 2, \dots, n-p+1\right)$$

(10.85)

и потому D — целиком неотрицательная матрица.

Поскольку в силу (10.83)

$$d_{pp} = A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p \\ 1 & 2 & \dots & p \end{pmatrix} = 0,$$

то матрица $D=\| d_{ik} \|^n_p$ подходит под уже разобранный случай 1) и

$$D\begin{pmatrix} p & p+1 & \dots & n \\ p & p+1 & \dots & n \end{pmatrix} = \left[A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p-1 \\ 1 & 2 & \dots & p-1 \end{pmatrix}\right]^{n-p} A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = 0.$$

Отсюда, поскольку

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p-1 \\ 1 & 2 & \dots & p-1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

следует (10.82). Лемма доказана.

3. Теперь мы имеем возможность при доказательстве неравенства (10.80) предполагать, что все главные миноры матрицы A отличны от нуля, так как согласно лемме 5 равенство нулю одного из главных миноров возможно лишь тогда, когда $| A | = 0$, а в этом случае неравенство (10.80) очевидно.

При n=2 справедливость неравенства (10.80) проверяется непосредственно:

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \leqslant a_{11}a_{22},$$

поскольку $a_{12} \geq 0$, $a_{21} \geq 0$. Будем устанавливать неравенство (10.80) для $n>2$, предполагая, что оно уже справедливо для матриц порядка $< n$. Кроме того, не рарушая общности, можем считать, что $p > 1$, так как в противном случае за счет обратной нумерации строк и столбцов мы поменяли бы ролями числа p и $n - p$.

Вводя снова в рассмотрение матрицу $D = \| d_{ik} \|^n_p$, где d_{ik} $(i, k = p, p+1, \dots \dots, n)$ определяются формулами (10.84), используя дважды тождество Смльвестра и основное неравенство (10.80) для матриц порядка $< n$, имеем

$$A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ 1 & 2 & \dots & n\end{pmatrix} = \frac{D\begin{pmatrix}p & p+1 & \dots & n\\ p & p+1 & \dots & n\end{pmatrix}}{\left[A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & p-1\\ 1 & 2 & \dots & p-1\end{pmatrix}\right]^{n-p}} \leqslant \frac{d_{pp}D\begin{pmatrix}p+1 & \dots & n\\ p+1 & \dots & n\end{pmatrix}}{\left[A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & p-1\\ 1 & 2 & \dots & p-1\end{pmatrix}\right]^{n-p}} =$$

$$= \frac{A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & p\\ 1 & 2 & \dots & p\end{pmatrix} A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & p-1 & p+1 & \dots & n\\ 1 & 2 & \dots & p-1 & p+1 & \dots & n\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & p-1\\ 1 & 2 & \dots & p-1\end{pmatrix}} \leqslant$$

$$\leqslant A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & p\\ 1 & 2 & \dots & p\end{pmatrix} A\begin{pmatrix}p+1 & \dots & n\\ p+1 & \dots & n\end{pmatrix}. \qquad (10.86)$$

Таким образом, неровность (10.80) можно считать установленным.

Введем следующее определение

Определение 6. Минор

$$A\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \dots & i_p\\ k_1 & k_2 & \dots & k_p\end{pmatrix} \left(1 \leqslant \begin{matrix} i_1 < i_2 < \dots < i_p \\ k_1 < k_2 < \dots < k_p \end{matrix} \leqslant n\right) \qquad (10.87)$$

матрицы $A = \| a_{ik} \|^n_1$ будем называть *почти главным*, если среди разностей $i_1 - k_1, i_1 - k_2, \dots, i_p - k_p$ только одна разность не равна нулю.

Обращаем внимание на то, что весь вывод неравенства (10.80) (в том числе и доказательство вспомогательной леммы) сохраняет свою силу, если условие «A — вполне неотрицательная матрица» заменить более слабым условием «в матрице A неотрицательны все главные и почти главные миноры».

10.7. Осциляционные матрицы

1. Характеристические числа и собственные векторы вполне положительных матриц обладают целым рядом важных свойств. Однако класс вполне положительных матриц недостаточно широк с точки зрения приложений к малым колебаниям упругих систем. В этом отношении класс вполне неотрицательных матриц имеет уже достаточный объем. Но не для всех вполне неотрицательных матриц имеют место нужные нам спектральные свойства. Однако существует промежуточный класс (между классами вполне положительных и вполне неотрицательных матриц), в котором сохраняются спектральные свойства вполне положительных матриц и который достаточно широк для охвата приложений. Матрицы этого промежуточного класса получили название «осцилляционных». Это название связано с тем, что осцилляционные матрицы образуют математический аппарат для исследования осцилляционных свойств малых колебаний линейных упругих систем.

Определение 7. Матрица $A = \| a_{il} \|^n_1$ называется *осцилляционной*, если A — вполне неотрицательная матрица и существует такое целое число $q > 0$, что A^q — вполне положительная матрица.

Пример. Якобиева матрица J является осцилляционной в том и только в том случае, когда 1° все числа b, c положительны и 2° последовательные главные миноры положительны:

$$a_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \ldots, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix} > 0. \tag{10.88}$$

Необходимость условий 1°, 2°. Числа b, c неотрицательны, поскольку матрица $J \geq 0$. При этом ни одно из чисел b, c не может равняться нулю, так как в противном случае матрица была бы разложимой, и тогда при любом $q > 0$ неравенство $J^q>0$ не соблюдалось бы. Следовательно, все числа b, c положительны. Все главные миноры (10.88) положительны согласно лемме 5, поскольку из $| J| \geq 0$ и $| J^q | > 0$ следует: $| J | > 0$.

Достаточность условий 1°, 2°. Раскрывая $|J|$, легко убеждаемся в том, что числа b, c входят в состав $| J|$ только произведениями
b_1c_1, b_2c_2 ..., $b_{n-1}c_{n-1}$. Это же относится к любому главному минору «нулевой плотности», т.е. минора, образованному подряд идущими (без пропусков) строками и столбцами. Но любой главный минор матрицы J распадается в произведение главных миноров нулевой плотности. Поэтому *в любой главный минор матрицы J числа b и c входят только произведениями* b_1c_1, b_2c_2 ..., $b_{n-1}c_{n-1}$.

Сложим симметрическую якобиеву матрицу

$$\tilde{J} = \begin{Vmatrix} a_1 & \tilde{b}_1 & & & 0 \\ \tilde{b}_1 & a_2 & \tilde{b}_2 & & \\ & \tilde{b}_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \tilde{b}_{n-1} \\ 0 & & & \tilde{b}_{n-1} & a_n \end{Vmatrix}, \quad \tilde{b}_i = \sqrt{b_i c_i} > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

(10.89)

Из установленного выше свойства главных миноров якобиевой матрицы следует, что соответствующие главные миноры матриц J и $\tilde{J}$ равны друг другу. Но тогда условия (10.88) означают, что квадратичная форма

$$\tilde{J}(x,x)$$

Является положительно определенной. Но в положительно определенной квадратичной форме все главные миноры положительны. Следовательно, и в матрице J все главные миноры положительны. Поскольку по условию 1° все числа b, c положительны, то по формуле (10.78) все миноры матрицы J неотрицательны, т.е. J — вполне неотрицательная матрица.

Осцилляционность вполне неотрицательной матрицы J, для которой выполняются условия 1°, 2°, вытекает непосредственно из следующего критерия сцилляционности.

Для того чтобы вполне неотрицательная матрица $A=\|a_{ik}\|^n_1$ была сцилляционной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) A — неособенная матрица ($|A| > 0$),

2) все элементы матрицы A, которые расположены на главной диагонали, на первой наддиагонали и на первой поддиагонали, отличны от нуля ($a_{ik} > 0$ при $|i - k| \leq 1$).

2. Для того чтобы сформулировать свойства характеристических чисел и собственных векторов сцилляционной матрицы, введем некоторые предварительные понятия и обозначение.

Рассмотрим вектор (столбец)

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

Будем подсчитывать число изменений знака в ряду координат u_1, u_2, ..., u_n вектора u, приписывая нулевым координатам (если таковы имеются) произвольные знаки. В зависимости от того, какие мы знаки припишем нулевым координатам, число изменений знака будет колебаться в известных пределах. Получающиеся при этом *максимальное* и *минимальное* числа перемен знака будем обозначать соответственно через S_u^+ и S_u^-. В том случае, когда $S_u^-=S_u^+$, мы будем говорить о *точном* числе перемен знака и обозначать его через S_u. Очевидно, $S_u^-=S_u^+$ тогда и только тогда, когда 1° крайние координаты u_1 и u_n вектора u отличны от нуля, и 2° равенство $u_i=0$ $(1<i<n)$ всегда сопровождается неравенством $u_{i-1}u_{i+1} < 0$.

Теперь мы докажем следующую основную теорему:

Теорема 13.1. *Осцiлляционная матрица* $A=\|a_{ik}\|^n_1$ *всегда имеет n различных положительных характеристических чисел*

$$\lambda_1 > \lambda_2 > ... > \lambda_г > 0. \tag{10.90}$$

2. *У собственного вектора* $\overset{1}{u} = (u_{11}, u_{21}, ..., u_{n1})$ *матрицы A, отвечающего наибольшему характеристическому числу* λ_1, *все координаты отличны от нуля и одного знака; у собственного вектора* $\overset{2}{u} = (u_{12}, u_{22}, \ldots, u_{n2})$, *отвечающего второму по величине характеристическому числу* λ_2, *в ряду координат имеется точно одна перемена знака и вообще в ряду координат собственного вектора* $\overset{k}{u} =(u_{1k},u_{2k},..., u_{nk})$, *отвечающего характеристическому числу* λ_k *имеется точно* k — 1 *перемен знака* (k = 1,2, ..., n).

3. *При любых действительных числах*

$$c_g, c_{g+1}, \ldots, c_h \; (1 \leqslant g \leqslant h \leqslant n; \sum_{k=g}^{h} c_k^2 > 0)$$

в ряду координат вектора

$$u = \sum_{k=g}^{h} c_k \overset{k}{u} \tag{10.91}$$

число перемен знака заключается между g — 1 *и* h — 1

$$g - 1 \leqslant S_u^- \leqslant S_u^+ \leqslant h - 1. \tag{10.92}$$

Доказательство. 1. Занумеруем характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ матрицы A так, чтобы

$$|\lambda_1|\geq| \lambda_2| \geq ... \geq | \lambda_n|,$$

и введем в рассмотрение p-ю ассоциированную матрицу

$$\mathfrak{A}_p \; (p = 1, 2, \ldots, n;$$

Характеристическими числами матрицы $\mathfrak{A}_p$ являются всевозможные произведения по p из характеристических чисел матрицы A, т.е. произведения

$$\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_p,\ \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_{p-1}\lambda_{p+1}, \ldots$$

Из условий теоремы следует, что при некотором целом q степень A^q — вполне положительная матрица. Но тогда

$$\mathfrak{A}_p \geqslant 0,\ \mathfrak{A}_p^q > 0,$$

т.е. $\mathfrak{A}_p$ — неразложимая неотрицательная и притом примитивная матрица. (Матрица $\mathfrak{A}_p^q$ является p-й ассоциированной матрицей для A^q). Применяя теорему Фробениуса к примитивной матрице $\mathfrak{A}_p$ $(p = 1,2, \ldots, n)$, получим:

$$\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_p > 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_p > \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_{p-1}\lambda_{p+1} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Отсюда вытекают неравенства (10.90).

2. Из установленных неравенств (10.90) вытекает, что $A=\|a_{ik}\|^n_1$ — матрица простой структуры. Тогда и все ассоциированные матрицы $\mathfrak{A}_p$ $(p = 1,2, \ldots, n)$ будут иметь простую структуру.

Введем в рассмотрение фундаментальную матрицу $U=\| u_{ik} \|^n_1$ для матрицы A (в k-м столбце матрицы U стоят координаты k-го собственного вектора $\overset{k}{u}$ матрицы A; $k = 1, 2, \ldots, n$). Тогда характеристическому числу $\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_p$ матрицы $\mathfrak{A}_p$ будет соответствовать собственный вектор с координатами

$$U\begin{pmatrix} i_1\ i_2 \ldots i_p \\ 1\ \ 2 \ldots p \end{pmatrix} \qquad (1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n). \tag{10.93}$$

По теореме Фробениуса все числа (10.93) отличны от нуля и одного знака.

Умножая векторы

$$\overset{1}{u}, \overset{2}{u}, \ldots, \overset{n}{u}$$

на ±1, можно сделать все миноры (10.93) положительными:

$$U\begin{pmatrix} i_1\ i_2 \ldots i_p \\ 1\ \ 2 \ldots p \end{pmatrix} > 0 \qquad \begin{pmatrix} 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n; \\ p = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}. \tag{10.94}$$

Фундаментальная матрица $U=\|u_{ik}\|^n_1$ для матрицы A связана с матрицей A равенством

$$A = U\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}\, U^{-1}. \tag{10.95}$$

Но тогда

$$A' = U'^{-1}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}\, U'. \qquad (10.96)$$

Сопоставляя (10.95) с (10.96), мы видим, что матрица

$$V=U'^{-1} \qquad (10.97)$$

является фундаментальной для транспонированной матрицы A' при тех же характеристических числах $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$. Но из осциляционности матрицы A следует осциляционность транспонированной матрицы A'. Поэтому и для матрицы V при любому $p = 1, 2, \ldots, n$ все миноры

$$V\begin{pmatrix} i_1\, i_2 \ldots i_p \\ 1\ 2 \ldots p \end{pmatrix} \quad (1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n) \qquad (10.98)$$

отличны от нуля и имеют один и тот же знак.

С другой стороны, согласно (10.97) матрицы U и V связаны равенством

$$U'\,V = E.$$

Переходя к p-м ассоциированным матрицам, будем иметь:

$$\mathfrak{U}_p \mathfrak{B}_p = \mathfrak{C}_p.$$

Отсюда, в частности, записывая, что диагональный элемент матрицы $\mathfrak{C}_p$ равен единице, получим:

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n} U\begin{pmatrix} i_1\, i_2 \ldots i_p \\ 1\ 2 \ldots p \end{pmatrix} V\begin{pmatrix} i_1\, i_2 \ldots i_p \\ 1\ 2 \ldots p \end{pmatrix} = 1. \qquad (10.99)$$

В левой части этого равенства первые множители в слагаемых положительны, а вторые - отличны от нуля и одного знака. Тогда очевидно, что и вторые сомножители положительны, т.е.

$$V\begin{pmatrix} i_1\, i_2 \ldots i_p \\ 1\ 2 \ldots p \end{pmatrix} > 0 \quad \begin{pmatrix} 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n; \\ p = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix} \qquad (10.100)$$

Таким образом, для матриц $U=\|u_{ik}\|^n_1$ и $V=U'^{-1}$ одновременно имеют место неравенства (10.94) и (10.100).

Выражая миноры матрицы V через миноры обратной матрицы $V^{-1}=V$ по известным формулам, получим:

$$V\begin{pmatrix} j_1 j_2 \ldots j_{n-p} \\ 1\ 2 \ldots n-p \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{np+\sum_{\nu=1}^{p} i_\nu}}{|U|}\, U\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots i_p \\ n & n-1 & \ldots n-p+1 \end{pmatrix}, \qquad (10.101)$$

где $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ и $j_1 < j_2 < \ldots < j_{n-p}$ вместе дают полную систему индексов 1,2, ..., n. так как в силу (10.94) $|\, U \,| > 0$, то из (10.100) и (10.101) вытекает:

$$(-1)^{np+\sum_{\nu=1}^{p} i_\nu} U\begin{pmatrix} i_1\, i_2 \dots i_p \\ 1\ 2 \dots p \end{pmatrix} > 0 \begin{pmatrix} 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n; \\ p = 1, 2, \dots, n \end{pmatrix}. \quad (10.102)$$

Пусть теперь

$$u = \sum_{k=g}^{h} c_k \overset{k}{u} \,(\sum_{k=g}^{h} c_k^2 > 0).$$

Мы покажем, что из неравенств (10.94) следует вторая часть неравенства (10.92):

$$S^+_u \leq h - 1, \quad (10.103)$$

а из неравенств (10.102) - первая:

$$S^-_u \geq g - 1. \quad (10.104)$$

Предположим, что $S^+_u > h—1$. Тогда можно указать такие h+1 координат вектора u

$$u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_{h+1}} \,(1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{h+1} \leq n), \quad (10.105)$$

что

$$u_{i_\alpha} u_{i_{\alpha+1}} \leq 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, h).$$

При этом координаты (10.105) не могут все одновременно равняться нулю, так как тогда, приравнивая нулю соответствующие координаты вектора

$$u = \sum_{k=1}^{h} c_k \overset{k}{u} \,(c_1 = \dots = c_{g-1} = 0;\ \sum_{k=1}^{h} c_k^2 > 0),$$

мы получили бы систему однородных уравнений

$$\sum_{k=1}^{h} c_k u_{i_\alpha k} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, h)$$

с ненулевым решением c_1, c_2, ..., c_h; в тот же время определитель этой системы

$$U\begin{pmatrix} i_1\, i_2 \dots i_h \\ 1\ 2 \dots h \end{pmatrix}$$

согласно (10.94) отличен от нуля.

Рассмотрим теперь равный нулю определитель

$$\begin{vmatrix} u_{i_1 1} & \dots & u_{i_1 h} & u_{i_1} \\ u_{i_2 1} & \dots & u_{i_2 h} & u_{i_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{i_{h+1} 1} & \dots & u_{i_{h+1} h} & u_{i_{h+1}} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем его по элементам последней вертикали:

$$\sum_{\alpha=1}^{h+1}(-1)^{h+\alpha+1}u_{i_\alpha}U\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_{\alpha-1} & i_{\alpha+1} & \dots & i_{h+1}; \\ 1 & . & . & . & . & h \end{pmatrix}=0.$$

Но такое равенство не может иметь места, так как в левой части нет двух слагаемых разных знаков, и по крайней мере одно слагаемое отлично от нуля. Таким образом, допущение $S^+_u > h - 1$ привело нас к противоречию, и неравенство (10.103) можно считать установленным.

Введем в рассмотрение векторы

$$\overset{k}{u}{}^* = (u^*_{1k}, u^*_{2k}, \dots, u^*_{nk}) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

где

$$u^*_{ik} = (-1)^{n+i+k}u_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n);$$

тогда для матрицы $U^* = \| u^*_{ik} \|^n_1$ в силу (10.102) будем иметь:

$$U^*\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ n & n-1 & \dots & n-p+1 \end{pmatrix} > 0 \begin{pmatrix} 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n; \\ p = 1, 2, \dots, n \end{pmatrix}. \tag{10.106}$$

Но неравенства (10.106) аналогичны неравенствам (10.94). Поэтому полагая

$$u^* = \sum_{k=g}^{h}(-1)^k c_k \overset{k}{u}{}^*, \tag{10.107}$$

будем иметь неравенство, аналогичное неравенству (10.103):

$$S^+_{u^*} \leq n - g. \tag{10.108}$$

(В неравенствах (10.106) векторы $\overset{k}{u}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ идут в обратном порядке

$$\overset{n}{u}, \overset{n-1}{u}, \dots$$

Вектору $\overset{g}{u}$ предшествует $n - g$ векторов этого ряда).

Пусть

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n), \text{ а } u^* = (u^*_1, u^*_2, \dots, u^*_n).$$

Легко видеть, что

$$u^*_i = (-1)^i u_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Поэтому

$$S^+_{u^*} + S^-_u = n - 1$$

и, следовательно, в силу (10.108) имеет место соотношения (10.104).

Неравенство (10.92) установлено. Поскольку из него получается при $g = h = k$ утверждение 2 теоремы, то теорема доказана полностью.

3. Рассмотрим применение доказанной теоремы к исследованию малых колебаний *n* масс $m_1, m_2, ..., m_n$, сосредоточенных в *n* подвижных точках $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ сегментного упругого континуума (струна или стрежень конечной длины), простирающегося (в состоянии равновесия) вдоль отрезка $0 \le x \le l$ оси *x*.

Обозначим через $K(x, s)$ ($0 \le x, s \le l$) функцию влияния этого континуума [$K(x, s)$ — прогиб в точке *x* под действием единичной силы, приложенной в точке *s*], а через k_{ij} — коэффициенты влияния для данных *n* масс:

$$k_{ij} = K(x_i, x_j) \quad (i, j = 1, 2, ..., n).$$

Если в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ приложены *n* сил $F_1, F_2, \ldots, F_n$, то соответствующий статический прогиб $y(x)$ ($0 \le x \le l$) в силу линейного наложения прогибов выразится формулой

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} K(x, x_j) F_j.$$

Заменяя здесь силы F_j силами инерции

$$-m_j \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x_j; t) \; (j = 1, 2, \ldots, n),$$

получим уравнение свободных колебаний

$$y(x) = -\sum_{j=1}^{n} m_j K(x, x_j) \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x_j; t). \tag{10.109}$$

Будем искать гармонические колебания континуума в виде

$$y(x) = u(x) \sin(\omega t + \alpha) \qquad (0 \leqslant x \leqslant l). \tag{10.110}$$

Здесь $u(x)$ - амплитудная функция, ω — частота, α — начальная фаза. Подставляя это выражение для $y(x)$ в (10.109) и сокращая на $\sin(\omega t + \alpha)$, получим:

$$u(x) = \omega^2 \sum_{j=1}^{n} m_j K(x, x_j) u(x_j). \tag{10.111}$$

Введем обозначение для переменных прогибов и для амплитудных прогибов в точках расположения масс:

$$y_i = y(x_i; t), u_i = u(x_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда

$$y_i = u_i \sin(\omega t + \alpha) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Введем еще *приведенные амплитудные прогибы и приведенные коэффициенты влияния*

$$\tilde{u}_i = \sqrt{m_i}\, u_i, \quad a_{ij} = \sqrt{m_i m_j}\, k_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{10.112}$$

Заменяя в (10.111) x последовательно на x_i $(u = 1, 2, ..., n)$, получим систему уравнений для амплитудных прогибов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{u}_j = \lambda \tilde{u}_i \quad \left(\lambda = \frac{1}{\omega^2};\ i = 1, 2, \ldots, n\right). \tag{10.113}$$

Отсюда видно, что амплитудный вектор

$$\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \ldots, \tilde{u}_n)$$

есть собственный вектор матрицы

$$A = \| a_{ij} \|_1^n = \| \sqrt{m_i m_j}\, k_{ij} \|_1^n \text{ при } \lambda = \frac{1}{\omega^2}$$

В результате подробного анализа устанавливается, что *матрица коэффициентов влияния* $\|k_{ij}\|^n{}_1$ *сегментного континуума всегда является осцилляционной матрицей.* Но тогда и матрица

$$A = \| a_{ij} \|_1^n = \| \sqrt{m_i m_j}\, k_{ij} \|_1^n$$

является осцилляционной! Поэтому матрица A (согласно теореме 13) имеет n положительных характеристических чисел

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n > 0,$$

т.е. существует n гармонических колебаний континуума с *различными* частотами:

$$(0 <)\ \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_n \quad \left(\lambda_i = \frac{1}{\omega_i^2};\quad i = 1, 2, \ldots, n\right).$$

В силу той же теоремы основному тону с частотой ω_1 соответствуют амплитудные прогибы, отличные от нуля и одного знака. В ряду амплитудных прогибов, отвечающих первому обертону с частотой ω_2, имеется точно одна перемена знака и вообще в ряду амплитудных прогибов для обертона с частотой ω_j имеется точно j — 1 перемен знака $(j = 1,2, ..., n)$.

Из того факта, что матрица коэффициентов влияния $\|k_{ij}\|^n{}_1$ осцилляционна, вытекают и другие осцилляционные свойства континуума: 1) при $\omega = \omega_1$ амплитудная функция $u(x)$, связанная с амплитудными прогибами формулой (10.111), не имеет узлов; и вообще при $\omega = \omega_j$ эта функция имеет j — 1 узлов $(j = 1,2, ..., n)$; 2) узлы двух смежных тонов перемежаются и т.д.

Микромодуль 26.
Основы тензорного анализа

10.8. Тензорное поле и его дифференцирование

1. До сих пор при рассмотрении тензоров в евклидовом пространстве E_3 мы не задумывались над тем, в какой точке заданы тензоры. Можно считать, что все введенные нами операции над тензорами осуществлялись в одной точке, но можно считать также, что все эти операции осуществлялись в некоторой области V пространства E_3 (или даже во всем E_3), если предполагать, что исследуемые тензоры одинаковы во всех точках области V.

В этом микромодули мы перейдем от тензорной алгебры к тензорному анализу. В связи с этим будем рассматривать ***тензорные поля***, для которых, кроме изученных ранее алгебраических операций, будет определена еще одна операция - ***дифференцирование***.

Позже мы построим тензорный анализ в трехмерном евклидовом пространстве E_3 в прямоугольной декартовой системе координат и рассмотрим некоторые его приложения. Затем мы введем криволинейные координаты в E_3 и построим тензорный анализ в криволинейных, но по-прежнему ортогональных системах координат.

2. Перейдем теперь к определению тензорного поля. Будем говорить, что *в области* $V \subset E_3$ (запись $V \subset E_3$ означает, что область V принадлежит пространству E_3) *задано тензорное поле, если каждой точке* $M \in V$ *поставлено в соответствие тензор одной и той же валентности.* Этот тензор называется *тензором поля.* Он, вообще говоря, меняется от точки к точке. Пусть, например, валентность заданного тензорного поля равна трем, тогда тензор a_{ijk} будет выступать в функции точки M (или радиуса-вектора этой точки):

$$a_{ijk} = a_{ijk}(M),$$

или

$$a_{ijk} = a_{ijk}(x_1, x_2, x_3),$$

где x_1, x_2, x_3 - координаты точки M относительно некоторого прямоугольного базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

Будем считать в дальнейшем, что функции, которые задают тензорное поле, непрерывны и имеют непрерывные частные производные любого нужного нам порядка по всем аргументам.

Теперь можно сказать, что ранее мы рассматривали *однородные* тензорные поля, т.е. такие поля, тензор которых не меняется от точки к точке.

Приведем несколько примеров тензорных полей.

а) **Скалярное поле**. Так называется поле тензора нулевой валентности. Мы знаем, что такой тензор является инвариантом. Поэтому для задачи скалярного поля надо в каждой точке $M \in V$ задать инвариант φ:

$$\varphi = \varphi\,(M),$$

или

$$\varphi = \varphi\,(x_1, x_2, x_3),$$

т.е. скалярное поле задается некоторой функцией трех перенных.

Укажем некоторые конкретные скалярные поля: поле температур неравномерно нагретого тела, поле щільностей неоднородного тела, поле давлений газа и т.д.

б) **Векторное поле**. Так называют поле тензора первой валентности:

$$a_i = a_i(x_1, x_2, x_3), \qquad (10.114)$$

поскольку, как мы знаем, компоненты тензора первой валентности являются координатами вектора

$$\boldsymbol{a} = a_i\boldsymbol{e}_i.$$

Равенства (10.114) показывают, что векторное поле задается уже тремя функциями от трех аргументов.

Укажем несколько примеров векторных полей: поле вектора скорости (или ускорение) движущейся жидкости или газа, поле вектора плотности электрического тока в некотором проводнике большого сечения, поле сил тяготения, создаваемых каким-нибудь массивным телом, и т.д.

в) **Поле двухвалентного тензора**:

$$a_{ij} = a_{ij}(x_1, x_2, x_3).$$

Здесь поле задается уже девятью функциями от трех аргументов. Конкретными примерами таких полей могут служить поле напряжений и поле деформаций твердого тела.

Отметим, что в приложениях обычно встречаются именно тензорные поля, а не отдельные тензоры.

Алгебраические операции над тензорами, которые построены нами ранее для тензоров, определенных в одной точке, естественным образом переносятся и на тензорные поля: *нало считать, что эти операции производятся над тензором поля в каждой точке* $M \in V$.

Например, если в области V даны тензорные поля

$$a_{ijk} = a_{ijk}(M),$$
$$b_{ijk} = b_{ijk}\,(M),$$

$$c_{ij} = c_{ij}(M).$$

то, складывая компоненты тензоров первых двух полей в каждой точке $M \in V$, мы получим в V новое тензорное поле

$$m_{ijk}(M) = a_{ijk}(M) + b_{ijk}(M),$$

являющееся суммой двух первых полей, а перемножая в каждой точке $M \in V$ компоненты первых и третьего тензорных полей, получим новое тензорное поле

$$n_{ijklm}(M) = a_{ijk}(M) c_{lm}(M)$$

— произведение первого и третьего тензорных полей.

Аналогично можно рассмотреть операции свертывания тензорных полей и перестановки индексов в данном тензорном поле, производя эти операции над тензорами заданных полей, в каждой точке $M \in V$.

3. В тензорном поле, кроме алгебраических операций можно определить еще *операцию дифференцирования* — основную операцию тензорного анализа. Эту операцию можно ввести следующей образом.

Пусть, например, в области $V \subset E_3$ дано поле тензора третьей валентности

$$a_{ijk} = a_{ijk}(M). \qquad (10.115)$$

Выясним, как меняется этот тензор при переходе от точки $M(x_1, x_2, x_3)$ в бесконечно близкую к M точку M'. Положение точки M' относительно точки M определяется вектором $d\mathbf{x} = \overline{MM'}$, разложение которого по базисным векторам записывается в виде

$$d\mathbf{x} = dx_i \mathbf{e}_i.$$

При переходе к новому ортонормованноту базису $\mathbf{e}_{i'} = \gamma_{i'i} \mathbf{e}_i$ координаты вектора $d\mathbf{x}$ преобразуются по формулам

$$dx_{i'} = \gamma_{i'i} dx_i.$$

Так как $\overline{OM'} = \overline{OM} + \overline{MM'}$, то компоненты x'_i точки M' теперь выразятся так:

$$x'_i = x_i + dx_i.$$

Обозначим через Δa_{ijk} приращения, которые получают компоненты тензора a_{ijk} при переходе из точки M в точку M'. Если предположить, что эти компоненты являются диференцируемыми функциями от координат точки M, то главные части приращений могут быть записаны так:

$$da_{ijk} = \frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l} dx_l. \qquad (10.116)$$

Докажем, что совокупность величин da_{ijk} образует тензор третьей валентности. Действительно, при переходе к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ компоненты тензора a_{ijk} преобразуются по формулам

$$a_{i'j'k'} = \gamma_{i'i}\gamma_{j'j}\gamma_{k'k}a_{ijk}.$$

Дифференцируя их почленно и учитывая то, что величины $\gamma_{i'i}$ постояны (они не зависят от положения точки *M,* так как являются косинусами углов между векторами старого и нового базисов), мы получим

$$da_{i'j'k'} = \gamma_{i'i}\gamma_{j'j}\gamma_{k'k}\, da_{ijk}.$$

Эти равенства показывают, что величины da_{ijk} при замене базиса преобразуются по тензорному закону. *Тензор с координатами da_{ijk} назовем абсолютным дифференциалом тензорного поля a_{ijk}.*

Теперь формулы (10.116) показывают, что при свертывании величин $\frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l}$ с координатами произвольного вектора dx_i получается тензор da_{ijk}. В силу обратного тензорного признака отсюда следует, что величины $\frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l}$ образуют тензор четвертой валентности в точке *M.*

Поскольку наши построения можно провести в любой точке $M\in V$, мы получаем в V новое тензорное поле, называемое *абсолютной производной тензорного поля a_{ijk}.* Для абсолютной производной тензорного поля a_{ijk} применяется обозначение

$$\frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l} = a_{ijk,\,l},$$

в котором в качестве дополнительного индекса l на последнем месте ставится индекс той координаты x_l точки *M,* по которой производится дифференцирование, причем этот индекс от остальных отделяется зпятой.

Перепишем формулы (10.116) в новых обозначениях:

$$da_{ijk} = a_{ijk,\,l}\, dx_l. \tag{10.117}$$

Эти формулы показывают, что абсолютный дифференциал тензора a_{ijk} есть результат свертывания тензора dx_l и абсолютной производной $a_{ijk,l}$ этого тензора.

Аналогичные рассуждения могут быть проведены для тензорного поля любой валентности. *Совокупность всех частных производных первого порядка от компонент данного тензорного поля по координатам x_l той точки, в которой рассматривается тензорное поле, образует тензор, валентность которого на единицу больше валентности исходного тензорного поля, — абсолютную производную данного поля. Результат свертывания этой абсолютной производной по индексу, который возникает при дифференцировании, с координатами вектора dx представляет собой абсолютный дифференциал заданного векторного поля.*

Сделаем еще три замечания.

Замечание 1. Поскольку в прямоугольной декартовой системе координат координаты абсолютного дифференциала и абсолютной производной тензорного поля совпадают с обычными дифференциалами и частыми производными компонент исходного поля, правила абсолютного дифференцирования будут точно такими же, как правила обычного дифференцирования.

Замечание 2. Точно так же, как были построены абсолютный дифференциал и абсолютная производная первого порядка для произвольного тензорного поля, можно построить абсолютный дифференциал и абсолютную производную второго порядка, а потом и высших порядков для этого поля. Например, для тензорного поля a_{ijk} частные производные

$$\frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_m \partial x_l} = a_{ijk,\, lm}$$

образуют вторую абсолютную производную тензора a_{ijk}, которая является тензором пятой валентности. Результат свертывания этого тензора с дифференциалами dx_l и dx_m приведет к выражению для второго абсолютного дифференциала тензора a_{ijk}:

$$d^2 a_{ijk} = a_{ijk,\, lm}\, dx_l\, dx_m.$$

Вообще, *абсолютный дифференциал порядка р от произвольного, не менее чем р раз дифференцируемого тензорного поля представляет собой тензорное поле той же валентности, что и исходное поле, а его абсолютная производная порядка р — тензорное поле, валентность которого на р единиц больше валентности исходного поля.*

Замечание 3. Предположим, что функции, которые определяют тензорное поле, имеют непрерывные частные производные (n+1)-го порядка в точке $M(x_1, x_2, x_3)$ и ее окрестности. Тогда в окрестности точки M эти функции могут быть разложены по формуле Тейлора. Полученное разложение будем называть *разложением тензора по формуле Тейлора*. Для тензорного поля a_{ijk} это разложение запишется так:

$$\begin{aligned} a_{ijk}(x_1+\Delta x_1,\ x_2+\Delta x_2,\ x_3+\Delta x_3) &= a_{ijk}(x_1,\ x_2,\ x_3) + \\ &+ da_{ijk}(x_1,\ x_2,\ x_3) + \frac{1}{2!} d^2 a_{ijk}(x_1,\ x_2,\ x_3) + \ldots + \\ &+ \frac{1}{n!} d^n a_{ijk}(x_1,\ x_2,\ x_3) + \\ + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} a_{ijk}(x_1+\theta_{ijk}\Delta x_1,\ &x_2+\theta_{ijk}\Delta x_2,\ x_3+\theta_{ijk}\Delta x_3), \end{aligned}$$

или, в развернутом виде,

$$a_{ijk}(x_1+\Delta x_1,\ x_2+\Delta x_2,\ x_3+\Delta x_3)=a_{ijk}(x_1,\ x_2,\ x_3)+$$
$$+a_{ijk,\ l_1}(x_1,\ x_2,\ x_3)\,\Delta x_{l_1}+\frac{1}{2!}\,a_{ijk,\ l_1 l_2}(x_1,\ x_2,\ x_3)\,\Delta x_{l_1}\,\Delta x_{l_2}+$$
$$+\ldots+\frac{1}{n!}\,a_{ijk,\ l_1 l_2\cdots l_n}(x_1,\ x_2,\ x_3)\,\Delta x_{l_1}\ldots\Delta x_{l_n}+$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\,a_{ijk,\ l_1 l_2\cdots l_n l_{n+1}}(x_1+\theta_{ijk}\,\Delta x_1,\ \ x_2+\theta_{ijk}\,\Delta x_2,\ \ x_3+$$
$$+\theta_{ijk}\,\Delta x_3)\,\Delta x_{l_1}\ldots\Delta x_{l_n}\,\Delta x_{l_{n+1}}. \tag{10.118}$$

Здесь $\Delta x_i = dx_i$ и $0<\theta_{ijk}<1$, причем θ_{ijk}, вообще говоря, различны для разных наборов i, j, k. Важно заметить, что коэффициенты в каждой группе членов этой формулы являются тензорами: это компоненты тензоров a_{ijk,l_1}, $a_{ijk,l_1 l_2}$, ..., вычисленные в точке M.

4. Рассмотрим *дифференцирование скалярного поля* - поля тензора нулевой валентности:

$$\varphi = \varphi\,(x_1, x_2, x_3)$$

Согласно общему правилу абсолютная производная этого поля

$$\varphi,_i=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

является тензором первой валентности, которая, как известно, определяет векторное поле. Это поле называется *градиентом* скалярного поля и обозначается grad φ или ∇ φ:

$$\mathrm{grad}\ \varphi = \varphi,_i \boldsymbol{e}_i.$$

Поскольку новое поле есть *поле одновалентного тензора,* его инвариантный ссмысл не вызывает сомнения. Из курса высшей математики известно, что градиент скалярного поля в данной точке M - это вектор, в направлении которого скалярное поле возрастает с наибольшей скоростью и модуль которого равен этой наибольшей скорости.

Приведем некоторые примеры скалярных полей и их градиентов.

а) Если имеется скалярное поле температуры

$$T = T(M)$$

неравномерно нагретого изотропного тела, то вектор

$$\boldsymbol{h} = -k\,\mathrm{grad}\ T$$

выражает плотность теплового потока, идущего от болуе нагретых частей тела к менее нагретым его частям: здесь k — постоянный множитель, называемый *коэффициентом теплопроводности*. Тепловой поток в каждой точке тела идет по направлению вектора $\boldsymbol{h}$, причем через ортогональную $\boldsymbol{h}$ площадку dS за одну секунду проходит $|\boldsymbol{h}|dS$ единиц тепла.

б) Если имеем скалярное поле давлений

$$P = P(M)$$

в различных точках идеальной жидкости, которая заполняет некоторый объем V, то вектор

$$dF=-\operatorname{grad} P\cdot dV$$

дает равнодействующую сил давления, приложенных к элементу объема dV.

в) В электростатике напряженность E электрического поля, т.е. сила, которая действует на единицу заряда положительного электричества, как установлено опытом, равна

$$\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad} \varphi,$$

где φ — потенциал электрического поля. Если поле порождается положительным зарядом e, помещенным в начало координат, то по закону Кулона

$$\boldsymbol{E}=\frac{e}{|\boldsymbol{r}|^3}\,\boldsymbol{r},$$

где $\boldsymbol{r}$-радиус-вектор данной точки. Отсюда следует, что

$$\varphi=\frac{e}{|\boldsymbol{r}|}.$$

5. Применим теперь полученные в этом пункте результаты и условия Сильвестра положительной и отрицательной определенности квадратичной формы для вывода достаточных условий екстремума функции двух и трех сменных.

Пусть функция

$$u = u(x_1, x_2, x_3)$$

определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков в окрестности некоторой точки $M_0(x^0{}_1, x^0{}_2, x^0{}_3)$, и пусть эта точка является *стационарной*, т.е. в ней

$$\frac{\partial u\,(x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0)}{\partial x_i}=0 \quad (i=1,\ 2,\ 3). \tag{10.119}$$

Тогда, чтобы выяснить, достигается ли в стационарной точке экстремум, воспользуемся формулой Тейлора (10.118), записав ее для тензорного поля $u(x_1, x_2, x_s)$ нулевой валентности. Обозначим

$$u_{,ij}(x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0)=\frac{\partial^2 u\,(x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0)}{\partial x_j \partial x_i}=a_{ij} \quad (a_{ij}=a_{ji}).$$

Если учесть условие стационарности (10.119), то, пользуясь формулой Тейлора, приращение функции $u(x_1, x_2, x_3)$ можно записать в виде

$$\Delta u = u(x_1^0 + \Delta x_1,\ x_2^0 + \Delta x_2,\ x_3^0 + \Delta x_3) - u(x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0) = \\ = \frac{1}{2!} a_{ij} \Delta x_i \Delta x_j + [3];$$

здесь $\Delta x_i = x_i - x^0_u$, а через [3] обозначенные члены не менее третьего порядка малости.

Так как при малых $|\Delta x_i|$ члены третьего порядка значительно меньше членов второго порядка, то знак всей правой части определяется знаком квадратичной формы

$$\Phi(\Delta x,\ \Delta x) = a_{ij}\Delta x_i \Delta x_j = a_{11}(\Delta x_1)^2 + a_{22}(\Delta x_2)^2 + a_{33}(x_3)^2 + \\ + 2a_{12}\Delta x_1 \Delta x_2 + 2a_{13}\Delta x_1 \Delta x_3 + 2a_{23}\Delta x_2 \Delta x_3.$$

Если эта форма будет положительно определенной, то $\Delta u > 0$,

$$u(x_1^0 + \Delta x_1,\ x_2^0 + \Delta x_2,\ x_3^0 + \Delta x_3) > u(x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0)$$

и в точке (x^0_1, x^0_2, x^0_3) функция $u(x_1, x_2, x_3)$ имеет минимум. Если же эта форма отрицательной определена, то $\Delta u < 0$,

$$u(x_1^0 + \Delta x_1,\ x_2^0 + \Delta x_2,\ x_3^0 + \Delta x_3) < u(x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0)$$

и в точке (x^0_1, x^0_2, x^0_3) будет максимум.

Что касается необходимых и достаточных условий положительной и отрицательной определенности формы $\Phi(\Delta x, \Delta x)$, то они нам известны - это условия Сильвестра. Таким образом, *достаточными условиями того, чтобы в стационарной точке* (x^0_1, x^0_2, x^0_3) *функции* $u(x_1, x_2, x_3)$ *достигался минимум или максимум, будут соответственно условия*

$$\alpha)\ a_{11} > 0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} > 0;$$

$$\beta)\ a_{11} < 0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} < 0.$$

Если ни условие α), ни условие β) не выполнены, то возможны два случая: или форма $\Phi(\Delta x, \Delta x)$ — *неопределенная,* т.е. принимает в окрестности стационарной точки значения разных знаков, или же она является *полуопределенной,* т.е. принимает значение одного знака, но обращается в нуль не только при $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0$ (в частности, она может быть тождественно равна нулю).

В первом случае в стационарной точке экстремума не будет, а во втором - экстремум может быть, а может и не быть: в этом случае надо исследовать аналогичным образом члены третьего порядка формулы Тейлора при тех значениях Δx_i, при которых члены второго порядка обращаются в нуль (в частности, при любых Δx_i, когда все частные производные второго порядка в стационарной точке равны 0).

Замечание. Для функции $u(x)$ одного переменного квадратичная форма $\Phi(\Delta x, \Delta x)$ сводится к одному члену

$$u''(x_0)\,\Delta x^2,$$

где x_0 — стационарная точка. Эта форма будет положительно определенной при $u''(x_0)>0$ и отрицательно определенной при $u''(x_0)<0$. В первом случае функция $u(x)$ в точке x_0 будет иметь минимум, а во втором — максимум.

Для функции $u(x_1, x_2)$ двух переменных исследование ее поведения в окрестности стационарной точки M_0 $(x^0_1,\ x^0_2)$ сводится к исследованию квадратичной формы от двух переменных Δx_1 и Δx_2:

$$\Phi(\Delta x, \Delta x) = a_{11}(\Delta x_1)^2 + 2a_{12}\Delta x_1 \Delta x_2 + a_{22}(\Delta x_2)^2,$$

где снова

$$a_{ij} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\right|_{M_0}.$$

Критерий Сильвестра показывает, что исследуемая функция имеет в точке M_0 минимум, если

$$a_{11} > 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

и максимум, если

$$a_{11} < 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0.$$

Если $M_2<0$, то квадратичная форма $\Phi(\Delta x, \Delta x)$ является неопределенной и функция $u(x_1, x_2)$ не имеет экстремума в точке M_0. Если же $M_2 = 0$, то форма $\Phi(\Delta x, \Delta x)$ — полуопределенная и для выяснения вопроса о наличии экстремума в точке M_0 необходимо дальнейшее исследование.

6. Рассмотрим теперь *дифференцирование векторного поля* - тензорного поля первой валентности:

$$a_i = a_i(x_1, x_2, x_3).$$

Абсолютная производная этого поля равна

$$a_{i,k} = \frac{\partial a_i}{\partial x_k}.$$

Полученный тензор второй валентности $a_{i,k}$ называют *градиентом векторного поля.*

Напишем теперь формулу, которая связывает абсолютный дифференциал da_i и абсолютную производную $a_{i,k}$:

$$da_i = a_{i,k} dx_k, \qquad (10.120)$$

где dx_k - *координаты* вектора $d\boldsymbol{x} = \overline{MM'}$. Тензор второй валентности $a_{i,k}$, как мы знаем, порождает линейное преобразование

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

или в координатной форме,

$$y_i = a_{i,k} x_k.$$

Поэтому формулу (10.120) можно переписать в виде

$$d\boldsymbol{a} = \boldsymbol{A}(M) d\boldsymbol{x}. \qquad (10.121)$$

Поскольку $d\boldsymbol{a} \approx \boldsymbol{a}(M') — \boldsymbol{a}(M)$, а $d\boldsymbol{x} = \overline{MM'}$, то с точностью до бесконечно малых второго порядка линейное преобразование $\boldsymbol{A}(M)$, действуя на вектор бесконечно малого смещения $\overline{MM'} = d\boldsymbol{x}$, дает соответствующее увеличение векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$:

$$\boldsymbol{a}(M') — \boldsymbol{a}(M) = \Delta \boldsymbol{a}(M) \approx \boldsymbol{A}(M)\, d\boldsymbol{x}. \qquad (10.122)$$

Последнее соотношение показывает, что линейное преобразование $\boldsymbol{A}(M)$ определяет главную линейную часть приращения векторного поля $\boldsymbol{a}$ в точке M.

Рассмотрим след линейного преобразования $\boldsymbol{A}(M)$:

$$\mathrm{Sp}\, \boldsymbol{A}(M) = a_{i,i}.$$

Так как производная $a_{i,k}$ векторного поля есть тензор второй валентности, то этот след представляет собой инвариант, который называют *дивергенцией* векторного поля $\boldsymbol{a}$:

$$a_{i,i} = \mathrm{div}\, \boldsymbol{a}.$$

Поле этого инварианта будет скалярным полем, определенным в той же области V, в которой определено исходное векторное поле $\boldsymbol{a}$. Так как инвариант div $\boldsymbol{a}$ получается из векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$ в результате дифференцирования, то его называют *дифференциальным инвариантом* поля $\boldsymbol{a}(M)$.

Рассмотрим еще вектор $\boldsymbol{z}$, координаты которого получаются в результате свертывания тензора $a_{i,j}$ с дискриминантным тензором — ε_{ijk}, а именно положим

$$z_i = —\varepsilon_{ijk} a_{j,k}. \qquad (10.123)$$

Этот вектор $\boldsymbol{z}$ называется *ротором* векторного поля $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{z} = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{a}.$$

Расписывая подробно формулы (10.123) для координат вектора $\boldsymbol{z}$, найдем

$$z_1 = (a_{3,2} — a_{2,3})\, \varepsilon,$$
$$z_2 = (a_{1,3} — a_{3,1})\, \varepsilon,$$
$$z_3 = (a_{2,1} — a_{1,2})\, \varepsilon,$$

где величина ε равна +1 в правой и -1 в левой системах координат. Мы видим отсюда, что *компоненты вектора* rot**a** *с точностью до множителя* ε *совпадают с компонентами удвоенного альтернированного тензора* $a_{i,\,k}$. Таким образом, с векторным полем ***a*** *(M),* определенным в области V, инвариантно связывается новое векторное поле — поле вектора rot **a**, определенное в той же области V.

Дивергенция и ротор векторного поля являются основными понятиями векторного анализа. При обычном изложении векторного анализа необходимо доказывать инвариантности этих полей. В данном же случае инвариантность непосредственно вытекает из тензорной природы этих понятий.

Напомним еще, что векторное поле $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(M)$ называется *соленоидальным* в области V, если в этой области div $\boldsymbol{a}$ = 0; векторное поле называется *безвихревым* в V, если в ней rot $\boldsymbol{a}$ = 0.

Найдем, наконец, дивергенцию векторного поля, являющегося градиентом некоторого скалярного поля $\varphi(M)$:

$$\boldsymbol{a}=\operatorname{grad}\varphi=\varphi_{,\,i}\,\boldsymbol{e}_i=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i.$$

Для определения дивергенции векторного поля $\boldsymbol{a}=a_i\boldsymbol{e}_i$, как мы знаем, надо взять производную этого векторного поля $a_{i,\,k}$ и свернуть его по индексам i и k. Но $a_{i,\,k}=\varphi_{,\,ik}$, поэтому

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\varphi_{,\,ii}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}.$$

Оператор

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

называется *оператором Лапласа* (или «лапласианом»). С помощью этого оператора дивергенция векторного поля grad φ может быть записана в виде

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi)=\Delta\varphi.$$

Если скалярное поле $\varphi(M)$ удовлетворяет условию

$$\Delta\varphi=0,$$

это оно называется *гармоническим* (или *лапласовим) полем.*

Уравнение

$$\frac{da_{ijk}}{dt}=\frac{\partial a_{ijk}}{\partial t}+\frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l}\,\frac{dx_l}{dt}.$$

которому удовлетворяет определяющая такое поле функция φ(x_1, x_2, x_3), называется *уравнением Лапласа*. Функция φ(x_1, x_2, x_3), которая удовлетворяет этому уравнению, называется *гармонической*.

7. До сих пор мы изучали тензорные поля, тензоры которых зависят от положения точки в пространстве, но не зависят от момента времени, в который рассматривается это поле. Такие тензорные поля называются *стационарными*. Если же *тензор поля зависит не только от положения точки в пространстве, но и от времени, то поле называется* ***нестационарным***. Компоненты нестационарного тензорного поля будут функциями координат x_i точки M и времени t. Например, для трехвалентного тензорного поля эта зависимость запишется так:

$$a_{ijk} = a_{ijk}(x_1, x_2, x_3, t).$$

Нестационарное тензорное поле будем называть *фазовым пространством*.

Скорость изменения тензорного поля во времени в некоторой неподвижной точке M будет описываться частными производными $\dfrac{\partial a_{ijk}}{\partial t}$, которые, как легко видеть, снова образуют тензорное поле той же валентности, что и исходное поле. Предположим теперь, что нестационарное тензорное поле a_{ijk} описывает некоторое свойство материальной среды, частицы которой находятся в движении. Определим, как изменятся компоненты тензора a_{ijk}, которые связаны с некоторой фиксированной частицей, при ее движении. Пусть траектория движения этой частицы описывается уравнениями

$$x_i = x_i(t).$$

Тогда скорость изменения компонент тензора a_{ijk}, связанных с частицей, будет равнять

$$\frac{da_{ijk}}{dt} = \frac{\partial a_{ijk}}{\partial t} + \frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l}\,\frac{dx_l}{dt}.$$

Но $\dfrac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l} = a_{ijk,l}$, а $\dfrac{\partial x_l}{\partial t}$ — компоненты скорости частицы движущейся материальной среды, которые мы обозначим через v_l. Поэтому предыдущая формула перепишется так:

$$\frac{da_{ijk}}{dt} = \frac{\partial a_{ijk}}{\partial t} + a_{ijk,l}\,v_l. \qquad (10.124)$$

Первый член правой части этого соотношения описывает изменение компонент тензора a_{ijk} в неподвижной точке M, а второй член связан с движением частицы в пространстве. Он называется *переносным членом.*

Очевидно, что формулы вида (10.124) будут иметь место для нестационарных тензорных полей любой валентности. Для скалярного поля $\varphi = \varphi\ (M, t)$ эта формула примет вид

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \varphi_{,\,i}\, v_i. \tag{10.125}$$

Если обозначить вектор скорости частицы через $\boldsymbol{v}$, то

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \boldsymbol{v}\ \mathrm{grad}\ \varphi.$$

Для нестационарного векторного поля $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(M,\ t)$ формула, аналогична формуле (10.124), выглядит так:

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{\partial a_i}{\partial t} + a_{i,\,k} v_k.$$

Последняя формула равносильна соотношению

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial t} + \ \boldsymbol{A}(M)\ \boldsymbol{v},$$

где $\boldsymbol{A}(M)$ — линейное преобразование, определяемое тензором $a_{i,k}$.

10.9. Механика деформируемой среды

1. Применим аппарат, построенный в п. 10.8, для изучения механики деформируемой среды.

Рассмотрим некоторую сплошную среду — газ, жидкость, пластическое или упругое тело, которое движется в пространстве, и подвергается при этом деформации. Пусть в начальный момент времени эта среда заполняла некоторый объем V и x_0 — радиус-вектор некоторой ее точки M_0 в начальный момент. В течение некоторого времени точка M_0 переместилась в пространстве и заняла новое положение M. Если обозначить радиус-вектор точки M через $\boldsymbol{x}$, то будем иметь

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t), \tag{10.126}$$

где в правой части стоит векторная функция $\boldsymbol{x}$ векторного аргумента $\boldsymbol{x}_0$ и времени t непрерывная и диференцируемая необходимое число раз по всем своим аргументам и удовлетворяющая условию

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, 0) = \boldsymbol{x}_0.$$

Если точка M_0 фиксирована, то уравнение (10.126) представляет собой уравнение движения этой точки при изменении времени. Наоборот, если фиксировано время t, то уравнение (10.126) описывает то новое положение точек рассматриваемой деформируемой среды, которое они займут в момент времени t.

Обозначим через $\boldsymbol{v}$ скорость точки M деформируемой среды. Тогда по определению

$$\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}.$$

Вектор $\boldsymbol{v}$ является функцией от начального положения точки M, определяемого вектором $\boldsymbol{x}_0$, и времени t. Но при фиксированном t можно считать, что вектор $\boldsymbol{v}$ является функцией координат точки M, т.е.

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(M).$$

Таким образом, в каждый момент времени с деформируемой сплошной средой связывается векторное поле — поле скоростей точек этой среды. Пусть v_i — координаты вектора $\boldsymbol{v}$ по неподвижному базису $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, так что $\boldsymbol{v} = v_i\boldsymbol{e}_i$.

Выделим в нашей сплошной среде малую окрестность некоторой ее точки M. Заполняющая эту окрестность среда, перемещаясь вместе со всей средой, испытывает некоторую деформации и вращение. Рассмотрим движение всех частиц, содержащихся в выделенной окрестности, за бесконечно малый промежуток времени Δt. С точностью до бесконечно малых второго порядка относительно Δt можно считать, что перемещение частицы, расположенной в точке M, определяется вектором $\boldsymbol{v}(M)\Delta t$. Наряду с точкой M нашей окрестности рассмотрим еще какую-нибудь ее точку M' (рис. 10.15).

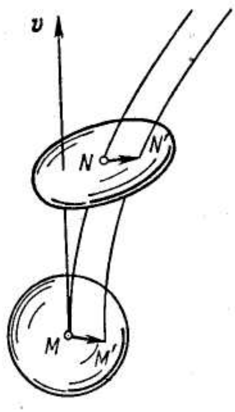


Рис. 10.15.

При рассматриваемом смещении точки M и M' переходят соответственно в точки N и N', причем

$$\overline{MN} \approx \boldsymbol{v}(M)\,\Delta t, \qquad \overline{M'N'} \approx \boldsymbol{v}(M')\,\Delta t.$$

Обозначим через $\boldsymbol{x}'$ радиус-вектор точки M', и пусть $\Delta \boldsymbol{x} = \overline{MM'}$. Тогда вектор $\overline{NN'}$, в который переходит вектор $\overline{MM'}$ при рассматриваемой деформации, можно записать следующим образом:

$$\overline{NN'} = \overline{NM} + \overline{MM'} + \overline{M'N'} = \overline{MM'} + \left(\overline{M'N'} - \overline{MN}\right) \approx$$
$$\approx \Delta \boldsymbol{x} + [\boldsymbol{v}(M') - \boldsymbol{v}(M)]\,\Delta t.$$

Но по формуле (10.122) с точностью до бесконечно малых второго порядка относительно $\Delta \boldsymbol{x}$ имеем

$$\boldsymbol{v}(M') - \boldsymbol{v}(M) \approx \boldsymbol{V}(M)\,\Delta \boldsymbol{x},$$

где $\boldsymbol{V}(M)$ — линейное преобразование с матрицей

$$V(M) = (v_{i,j}),$$

составленной из производных координат вектора $\boldsymbol{v}$ по координатам точки M. Поэтому предыдущее соотношение может быть переписано в виде

$$\overline{NN'} \approx \Delta x + \boldsymbol{V}(M)\,\Delta t\,\Delta \boldsymbol{x},$$

или, если положить $\overline{NN'} = \Delta \boldsymbol{y}$,

$$\Delta \boldsymbol{y} \approx [\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V}(M)\,\Delta t]\,\Delta \boldsymbol{x}, \qquad (10.127)$$

где $\boldsymbol{E}$ — тождественное преобразование пространства.

Равенство (10.127) означает, что вектор $\overline{MM'} = \Delta \boldsymbol{x}$ переходит в вектор $\overline{NN'} = \Delta \boldsymbol{y}$ посредством линейного преобразования $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V}(M)\,\Delta t$, где $\boldsymbol{V}(M)$ — линейное преобразование, которое определяется тензором абсолютной производной векторного поля $\boldsymbol{V}(M)$. Это означает, что малая окрестность каждой точки деформируемой среды с точностью до бесконечно малых величин второго порядка относительно $\Delta \boldsymbol{x}$ и Δt испытывает однородную деформацию.

Запишем разложение векторов $\Delta \boldsymbol{x}$ и $\Delta \boldsymbol{y}$ по базисным векторам $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$:

$$\Delta \boldsymbol{x} = \Delta x_i \boldsymbol{e}_i, \qquad \Delta \boldsymbol{y} = \Delta y_i \boldsymbol{e}_i.$$

Тогда соотношение (10.127) в координатной форме перепишется так:

$$\Delta y_i = (\delta_{ij} + v_{i,j}\Delta t)\,\Delta x_j. \qquad (10.128)$$

Сравнивая это равенство с соотношением

$$\Delta y_i = (\delta_{ij} + e_{ij})\,\Delta x_j,$$

заключаем, что тензор $v_{i,j}\Delta t$ описывает полную деформацию бесконечно малой окрестности точки *М.* Используя вышеприведенное обозначение, запишем

$$e_{ij} = v_{i,j}\Delta t. \tag{10.129}$$

В этом случае тензор e_{ij} не будет оставаться постоянным, а будет меняться от точки к точки. Это связано с тем, что теперь рассматривается неоднородная деформация сплошной среды.

В рассматриваемом случая симметричная часть тензора e_{ij} описывает чистую деформацию окрестности точки *М,* а кососимметричная его часть — вбращение этой окрестности вокруг точки *М.* Тензор чистой бесконечно малой деформации ε_{ij} теперь может быть записан в виде

$$\varepsilon_{ij} = e_{(ij)} = v_{(i,j)}\,\Delta t. \tag{10.130}$$

Тензор

$$u_{ij} = v_{(i,j)} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$$

называется *тензором скоростей деформации.* Тензор ω_{ij}, определяющий бесконечно малый поворот окрестности точки *М,* записывается так:

$$\omega_{ij} = e_{[i,j]} = v_{[i,j]}\Delta t.$$

Ось, вокруг которой производится этот поворот, имеет направление вектора $\boldsymbol{\omega}$, координаты которого, как было указано, связанные с компонентами тензора ω_{ij} соотношениями

$$\omega_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_{jk},$$

а угол поворота равен $|\,\boldsymbol{\omega}\,|$. С тензором $v_{i,j}$ вектор $\boldsymbol{\omega}$ связан так:

$$\omega_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}v_{[j,k]}\Delta t = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}v_{j,k}\Delta t$$

(в силу косой симметрии тензора. ε_{ijk} знак альтернування тензора $v_{i,j}$ может быть опущен). Но из формулы (10.123) следует, что величины — $\varepsilon_{ijk}v_{i,j}$ являются координатами вектора rot $\boldsymbol{v}$. Поэтому последняя формула может быть переписана в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\cdot\Delta t. \tag{10.131}$$

Отсюда становится ясным механический смысл ротора векторного поля ***v*:** если ***v*** — *поле мгновенных скоростей движущейся деформированной среды, то векторное поле* rot ***v*** *представляет собой поле удвоенных угловых скоростей частиц этой среды.*

Полная деформация окрестности точки M определяется тензором $\delta_{ij} + e_{ij}$, который может быть представлен в виде

$$\delta_{ij} + e_{ij} = (\delta_{ik} + \omega_{ik})(\delta_{kj} + \varepsilon_{kj})$$

и, значит, состоит из чистой деформации и поворота вокруг точки M. Но, кроме того, окрестность точки M переносится параллельно, когда точка M переходит в положение N. Отсюда следует, что *бесконечно малое перемещение окрестности точки M деформируемой среды состоит из чистой деформации, определяемой тензором* $\varepsilon_{ij} = v_{(i,j)}\Delta t$, *бесконечно малого поворота определяемого вектором*

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \Delta t.$$

и параллельного переноса, определяемого вектором $\mathbf{v}\Delta t$.

Вычислим еще коэффициент относительного объемного расширения деформируемой среды. Для случая однородной деформации этот коэффициент равен

$$\mu = v_{ii}\Delta t.$$

Эта же формула остается справедливой и в общем случае, если применять ее к малой оерестности каждой рассматриваемой точки деформируемой среды. Пользуясь формулой (10.130) и учитывая, что $v_{(i,i)} = v_{i,i}$, перепишем последнее соотношение:

$$\mu = v_{i,u}\Delta t.$$

Но $v_{i,u} = \operatorname{div} \boldsymbol{v}$. Поэтому

$$\mu = \operatorname{div} \boldsymbol{v} \cdot \Delta t. \qquad (10.132)$$

Формула (10.132) раскрывает механический смысл дивергенции векторного поля $\boldsymbol{v}$: *если* $\mathbf{v}$ *— поле скоростей движущейся деформируемой среды, то* div$\mathbf{v}$ *представляет собой скалярное поле скоростей относительного объемного расширения этой среды.*

Теперь ясно, что условие несжимаемости деформируемой среды может быть записано в виде

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0.$$

Это означает, что поле скоростей несжимаемой среды является соленоидальным полем.

Заметим еще, что движение деформируемой среды называется *безвихревым,* если частицы жидкости при этом движении не вращаются. Из формулы (10.131) видно, что для того, чтобы движение деформируемой среды было безвихревым, необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0,$$

т.е. чтобы поле скоростей этой среды было потенциальным.

2. Выведем теперь основные уравнения механики деформируемой среды. Пусть $\rho = \rho(M, t)$ — плотность, а $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(M, t)$ — скорость частицы

среды, которая находится в точке M в момент времени t. Функции ρ и $\boldsymbol{v}$ предполагаются непрерывными и достаточное число раз дифференцируемые функциями своих аргументов. Выделим снова в нашей среде достаточно малую окрестность точки M. Тогда масса Δm этой окрестности с точностью до бесконечно малых величин второго порядка — может быть вычислена по формуле

$$\Delta m \approx \rho(M)\,\Delta V,$$

где ΔV - объем этой окрестности. При перемещении выделенной окрестности в пространстве, согласно закону сохранения вещества, ее масса должна оставаться постоянной, т.е.

$$\frac{d}{dt}(\Delta m) \equiv \frac{d\rho}{dt}\Delta V + \rho\frac{d}{dt}(\Delta V) = 0. \tag{10.133}$$

Но

$$\frac{d}{dt}(\Delta V) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta V(N) - \Delta V(M)}{\Delta t},$$

где N-точка, в которую переместится точка M за время Δt. Числитель дроби, стоящий под знаком предела, таким образом может быть выражен через коэффициент относительного объемного расширения:

$$\Delta V(N) - \Delta V(M) \approx \mu(M)\,\Delta V(M)$$

или, в силу формулы (10.132),

$$\Delta V(N) - \Delta V(M) \approx \operatorname{div}\boldsymbol{v}\cdot\Delta V(M)\,\Delta t.$$

Подставляя это выражение под знак предела и совершая предельный переход, получим

$$\frac{d}{dt}(\Delta V) = \operatorname{div}\boldsymbol{v}\cdot\Delta V.$$

Если внести эту величину в соотношение (10.133) и сократить на ΔV, то найдем

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0. \tag{10.134}$$

Это уравнение называется *уравнением неразрывности* и является первым основным уравнением механики деформируемой среды.

Уравнение (10.134) обычно записывают в несколько иной форме. Во-первых,

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = v_{i,u},$$

во-вторых, в силу формулы (10.125)

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho_{,i}v_i.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (10.124), найдем

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho_{,i}v_i+\rho v_{i,i}=0,$$

откуда

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\rho v_i)_{,i}=0. \qquad (10.135)$$

Последняя формула может быть переписана еще так:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})=0.$$

3. Найдем второе основное уравнение механики деформируемой среды - *уравнение движения*. Для этого рассмотрим окрестность точки *M,* имеющую форму параллелепипеда с гранями, параллельными координатным плоскостям, и центром в точке *M*. Обозначим длину ребра этого параллелепипеда, параллельного базисному вектору $\boldsymbol{e}_i$, через $2\Delta x_i$, площадь грани, перпендикулярной этому вектору, — через Δs_i, и объем параллелепипеда — через ΔV. Тогда

$$\Delta s_i=4\Delta x_j\Delta x_k,\quad \Delta V=8\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3,\quad i\neq j,\ i\neq k,\ j\neq k.$$

Рассмотрим, какие силы действуют на элемент объема нашего тела, заключенный внутри выделенного параллелепипеда. Как мы знаем, имеется два типа таких сил — *объемные и поверхностные силы*. Если обозначить через $\boldsymbol{F}$ величину объемной силы, отнесенной к единице массы, то на выделенный элемент объема будет действовать сила

$$\boldsymbol{F}\Delta m=\boldsymbol{F}\rho\Delta V.$$

Поверхностные силы, действующие на выделенный объем, связаны с теми напряжениями, которые возникают в деформируемой среде. Эти напряжения описываются тензором напряжений σ_{ij}, который теперь не будет уже постоянным, а меняется от точки к точке, так что

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}(M)$$

(конечно, компоненты тензора напряжений являются достаточное число раз дифференцируемыми функциями координат точки).

Пусть $\boldsymbol{\sigma}(M)$ — линейное преобразование, порождаемое тензором напряжений в точке *M*. Найдем силы, которые действуют на две параллельных грани выделенного параллелепипеда, например на грани, которые перпендикулярны вектору $\boldsymbol{e}_1$. Пусть M' и M'' — их центры, так что $M'=M''(x_1+\Delta x_1\ x_2,\ x_3)$, $M''=M''(x_1-\Delta x_1\ x_2\ x_3)$. Тогда силы, действующие на правую и левую грани параллелепипеда, соответственно равны

$$\boldsymbol{\sigma}(M')\,\boldsymbol{e}_1\Delta s_1 \ \text{ и } \ \boldsymbol{\sigma}(M'')(-\boldsymbol{e}_1)\,\Delta s_1,$$

так как векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $-\boldsymbol{e}_1$ являются внешними нормалями к этим граням. Сумма этих сил будет равна

$$\Delta \boldsymbol{p}_1 = [\boldsymbol{\sigma}(M') - \boldsymbol{\sigma}(M'')]\, \boldsymbol{e}_1 \Delta s_1 = [\sigma_{i1}(M') - \sigma_{i1}(M'')]\, \boldsymbol{e}_i \Delta s_1.$$

Применяя к разностям, которые стоят в скобках, теорему Лагранжа, получим

$$\Delta \boldsymbol{p}_1 = \sigma_{i1,\,1}(M_{1i})\, \boldsymbol{e}_i \cdot 2\Delta x_1 \Delta s_1 = \sigma_{i1,\,1}(M_{1i})\, \boldsymbol{e}_i \Delta V, \tag{10.136}$$

где точки M_{1i} принадлежат рассматриваемой окрестности точки M. Аналогично подсчитываются силы, действующие на остальные грани выделенного параллелепипеда.

Обозначим через $\boldsymbol{w}$ ускорение, которое сообщают выделенной окрестности точки M действующие на нее силы. Тогда второй закон Ньютона для этой окрестности запишется в виде

$$\boldsymbol{w} \rho\, \Delta V = \boldsymbol{F} \rho\, \Delta V + \Delta \boldsymbol{p}_1 + \Delta \boldsymbol{p}_2 + \Delta \boldsymbol{p}_3.$$

Используя соотношение (10.136) и аналогичные ему выражения для $\Delta \boldsymbol{p}_2$ и $\Delta \boldsymbol{p}_3$ и сокращая на ΔV, получим отсюда

$$\rho \boldsymbol{w} = \rho \boldsymbol{F} + [\sigma_{i1,1}(M_{1i}) + \sigma_{i2,2}(M_{2i}) + \sigma_{i3,3}(M_{3i})]\, \boldsymbol{e}_i,$$

где точки M_{1i}, M_{2i}, M_{3i} принадлежат рассматриваемой окрестности точки M. Перейдем теперь к пределу при $\Delta x_i \to 0$; так как при этом все точки $M_{ij} \to M$, последнее выражение примет вид

$$\rho \boldsymbol{w} = \rho \boldsymbol{F} + (\sigma_{i1,1} + \sigma_{i2,2} + \sigma_{i3,3})\, \boldsymbol{e}_i.$$

Теперь все величины, которые входят в это соотношение, вычисляются в одной и той же точке M.

Обозначим через F_i координаты вектора $\boldsymbol{F}$. Так как

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}, \text{ то } w_i = \frac{dv_i}{dt}.$$

Выражение

$$\sigma_{i1,1} + \sigma_{i2,2} + \sigma_{i3,3} = \sigma_{ik,k}$$

есть свернутая абсолютная производная тензорного поля σ_{ik}. Поэтому предыдущее уравнение может быть записано в виде

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i + \sigma_{ik,k}. \tag{10.137}$$

Эти уравнения называются *уравнениями движения* деформируемой среды. Вместе с уравнением (10.135) они представляют ***систему основных уравнений механики деформируемой среды.***

Отметим, что уравнения (10.135) и (10.137) записанные в инвариантной форме и потому не зависят от выбора прямоугольной декартовой системы координат пространства.

10.10. Ортогональные криволинейные системы координат

1. До сих пор положение точки в пространстве мы определяли ее радиусом-вектором $\boldsymbol{x}=\overline{OM}=x_i\boldsymbol{e}_i$ относительно некоторого недвижимого ортонормированного базиса $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ с началом в точке O; числа x_1, x_2, x_3 — это прямоугольные декартовы координаты точки M.

Во многих случаях бывает полезно определять положение точки в пространстве не тремя декартовыми координатами x_1, x_2, x_3, а какими-нибудь тремя другими числами u_1, u_2, u_3, которые более тесно связаны с рассматриваемой задачей. Будем предполагать, что не только каждой точке M соответствуют три числа u_1, u_2, u_3, но и, обратно, каждой такой тройке чисел u_1, u_2, u_3 соответствует определенная точка M. При этом иногда приходится ограничивать область изменения переменных u_1, u_2, u_3, чтобы достичь взаимной однозначности соответствия между точками и тройками чисел u_1, u_2, u_3.

Числа u_1, u_2, u_3 называются *криволинейными координатами* точки M (основание для такого названия координат будет выяснена ниже).

Поскольку всякой точке M соответствуют координаты u_1, u_2, u_3, то каждая из этих координат является функцией от прямоугольных декартових координат x_1, x_1, x_3:

$$u_i = u_i\,(x_1, x_2, x_3) \quad (i=1,2,3). \tag{10.138}$$

Но задание чисел u_1, u_2, u_3 определяет положение точки M, и поэтому ее прямоугольные декартовы координаты x_1, x_2, x_3 будут функциями от u_1, u_2, u_3:

$$x_i = x_i(u_1, u_2, u_3) \quad (i=1,2,3). \tag{10.139}$$

Как известно из курса математического анализа, для того чтобы соотношение (10.138) были разрешимы относительно x_1, x_2, x_3, т.е. чтобы из них можно было вывести формулы (10.139), необходимо и достаточно, чтобы определитель

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| \equiv \frac{\partial (u_1, u_2, u_3)}{\partial (x_1, x_2, x_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля:

$$\frac{\partial (u_1, u_2, u_3)}{\partial (x_1, x_2, x_3)} \neq 0.$$

Точно так же должен быть отличен от нуля и определитель

$$\left|\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\right| \equiv \frac{\partial (x_1, x_2, x_3)}{\partial (u_1, u_2, u_3)}.$$

В дальнейшем будем всюду предполагать неравенство нулю этих определителей и считать функции (10.138) и (10.139), определяющие связь между декартовыми и криволинейными координатами точки M, по крайней мере дважды непрерывно дифференцируемы.

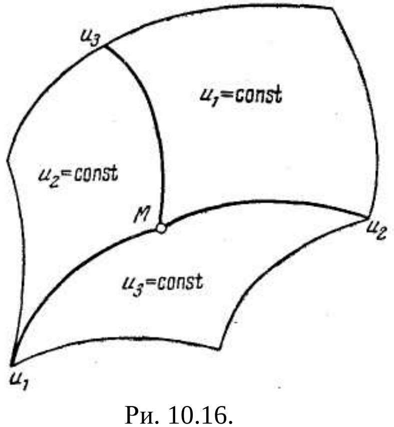
2. Перейдем теперь к выяснению геометрического смысла криволинейных координат. Рассмотрим уравнение

$$u_1 (x_1, x_2, x_3)=C_1,$$

где C_1 = const. Как известно, такое уравнение в пространстве определяет поверхность. При различных значениях C_1 получаем некоторое семейство поверхностей. Если точка M имеет первой координатой $u_1 = \alpha$, то это значит, что она лежит на поверхности $u_1 (x_1, x_2, x_3) = \alpha$ этого семейства. Аналогично уравнения

$$u_2 (x_1, x_2, x_3)=C_2,$$
$$u_3 (x_1, x_2, x_3)=C_3$$

являются уравнениями двух других семейств поверхностей. Если точка M имеет координаты u_1, u_2, u_3, то это означает, что она лежит на определеннях поверхностях этих трех семейств, т.е. является пересечением трех поверхностей, взятых по одной из каждого семейства (рис. 10.16).



Ри. 10.16.

Указанное выше отличие от нуля определителя является гарантией того, что три поверхности из разных семейств пересекаются в одной и только в одной точке.

Назовем поверхности указанных трех семейств *координатными поверхностями* и для сжатости будем называть их u_1*-поверхностью*, u_2*-поверхностью*, u_3*-поверхностью*.

Если рассмотреть попарное пересечение поверхностей разных семейств, то получим *координатные линии.* Через каждую точку M проходят три координатные линии. Вдоль координатной линии, которая является пересечением u_2-поверхности, u_3-поверхности, изменяется лишь координата u_1, а u_2 и u_3 остаются постоянными. Эту координатную линию будем называть *линией* u_1. Аналогично определяются координатные линии u_2 и u_3. Легко видеть, что координатные линии будут, вообще говоря, кривыми линиями. Отсюда и определяется название «криволинейные координаты».

Найдем векторы, которые касательные к координатным линиям криволинейной системы координат, которые проходят через некоторую точку M. Параметрические уравнения координатной линии u_1, которая проходит через точку M_0 (u^0_i), записываются в виде

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u_1,\ u_2^0,\ u_3^0).$$

Как известно из курса анализа, касательным вектором к этой линии в точке M_0 будет вектор

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial x_i}{\partial u_1}\right|_{M_0}\boldsymbol{e}_i,$$

который мы обозначим через x^0_1 Точно так же касательными к линиям u_2 и u_3, которые проходят через точку M, будут векторы

$$\boldsymbol{x}_2^0=\left.\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial x_i}{\partial u_2}\right|_{M_0}\boldsymbol{e}_i,$$

$$\boldsymbol{x}_3^0=\left.\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_3}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial x_i}{\partial u_3}\right|_{M_0}\boldsymbol{e}_i.$$

Теперь легко видеть, что

$$(\boldsymbol{x}_1^0,\ \boldsymbol{x}_2^0,\ \boldsymbol{x}_3^0)=\left|\frac{\partial x_i}{\partial u_k}\right|_{M_0}$$

и неравенство нулю определителя, который стоит в правой части этого соотношения, равносильно линейной независимости векторов

$$\boldsymbol{x}_1^0,\ \boldsymbol{x}_2^0,\ \boldsymbol{x}_3^0$$

3. Рассмотрим несколько примеров криволинейных систем координат.

а) **Прямоугольная декартова система координат**. Ее тоже можно рассматривать как частный случай криволинейной системы координат. Координатными поверхностями здесь служат плоскости, которые параллельны координатным плоскостям (x_1-*поверхности*— плоскости, параллельные плоскости Oe_2e_3, и т.д.). Координатными линиями служат прямые линии, которые параллельны осям координат (например, координатные линии x_1— прямые линии, параллельные $\boldsymbol{e}_1$, и т.д.).

б) **Цилиндрическая система координат**. Пусть в пространстве дана прямоугольная декартова система координат $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ с началом в O. Рассмотрим тройку чисел u_1, u_2, u_3, где $u_1 \geq 0$, $0 \leq u_2 < 2\pi$, и поставим в соответствие этой тройке чисел такую точку M, что ее аппликата равна u_3, а проекция на плоскость Oe_1e_2 имеет полярные координаты u_1 и u_2 (рис. 10.17).

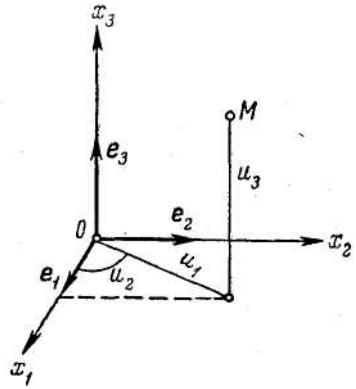


Рис. 10.17.

Очевидно, что при этом каждой тройки чисел u_1, u_2, u_3 соответствует определенная точка M и, обратно, каждой точке M соответствует определенная тройка чисел таких, что

$$u_1 \geqslant 0, \quad 0 \leqslant u_2 < 2\pi, \quad -\infty < u_3 < \infty$$

(лишь в случае, если точка M лежит на оси Oe_3, координаты u_1 и u_3 определяются однозначно, а координата u_2 неопределена: ей можно приписать любое значение).

Введенные таким образом числа u_1, u_2, u_3 называются *цилиндрическими координатами* точки M. (Обычно цилиндрические координаты обозначают буквами ρ, φ, z.) Легко видеть, что эти координаты связаны из прямоугольными декартовыми координатами x_1, x_2, x_3 точки M соотношениями

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= u_1 \cos u_2, \\ x_2 &= u_1 \sin u_2, \\ x_3 &= u_3 \end{aligned}\right\} \tag{10.140}$$

и, обратно,

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ \operatorname{tg} u_2 &= \frac{x_2}{x_1}, \\ u_3 &= x_3. \end{aligned}\right\}$$

Определитель

$$\left|\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\right|$$

в этом случае будет вычисляться следующим образом:

$$\left|\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\right| = \begin{vmatrix} \cos u_2 & -u_1 \sin u_2 & 0 \\ \sin u_2 & u_1 \cos u_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = u_1.$$

Отсюда ясно, что этот определитель отличен от нуля всюду, за исключением прямой $u_1 = 0$, которая совпадает с осью $\boldsymbol{e}_3$. На этой прямой, как мы видели выше, нарушается взаимная однозначность соответствия между точками и их цилиндрическими координатами.

Координатными поверхностями в цилиндрической системе координат служат: u_1-поверхностями — круговые цилиндры с общей осью $\boldsymbol{e}_3$; u_2-поверхностями — полуплоскости, ограниченные осью $\boldsymbol{e}_3$; u_3-поверхностями — плоскости, параллельные плоскости $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$. Название «цилиндрическая система координат» именно и объясняется тем, что среди ее координатных поверхностей есть цилиндрические поверхности. Координатными линиями в цилиндрической системе координат служат: линиями u_1 — лучи, которые выходят из произвольной точки оси $\boldsymbol{e}_3$ и параллельные плоскости $\boldsymbol{e}_1O\boldsymbol{e}_2$; линиями u_2 — окружности с центром на оси $\boldsymbol{e}_3$, которые расположены в плоскостях, перпендикулярных $\boldsymbol{e}_3$; линиями u_3 - прямые, параллельные оси $\boldsymbol{e}_3$ (рис. 10.18).

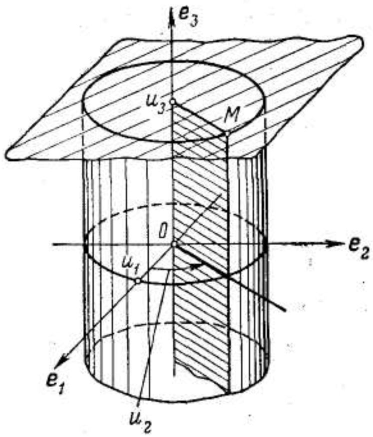


Рис. 10.18.

в) **Сферическая система координат**. Зададим три числа u_1, u_2, u_3, которые определяют положение точки *М* в пространстве, следующим образом: u_1— расстояние от начала координат *О* до точки *М*, u_2 — угол между вектором $\boldsymbol{e}_3$ и радиусом-вектором точки *М*, u_3 — угол между положительным направлением оси $\boldsymbol{e}_1$ и проекцией радиуса-вектора точки *М* на плоскость $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ (рис 10.19).

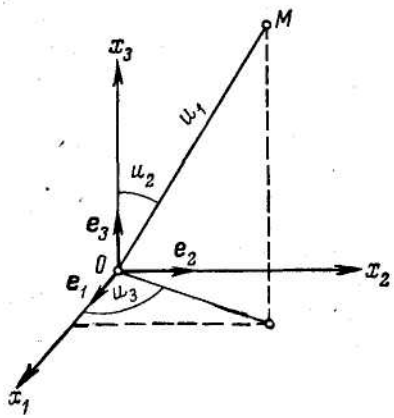


Рис. 10.19.

Эти три числа называются *сферическими координатами* точки *М*. (Обычно сферические координаты обозначают буквами r, θ, φ).

Нетрудно видеть, что $\frac{\pi}{2}$-u_2 и u_3 — это географические широта и долгота точки *М* на сфере с центром в точке *М* и радиусом *ОМ*.

Далее, очевидно, что каждой точке пространства соответствует определенная тройка чисел u_1, u_2, u_3, где $u_1 \geq 0$, $0 \leq u_2 \leq \pi$; $0 \leq u_3 < 2\pi$, и обратно, каждой такой тройке чисел соответствует определенная точка пространства (эта однозначность нарушается, как и в случае цилиндрической системы координат, лишь для точек оси $\boldsymbol{e}_3$, для которых координата u_3 неопределенна).

Легко установить связь между сферическими и прямоугольными декартовыми координатами точки:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= u_1 \sin u_2 \cos u_3, \\ x_2 &= u_1 \sin u_2 \sin u_3, \\ x_3 &= u_1 \cos u_2 \end{aligned}\right\} \tag{10.141}$$

и, обратно,

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \\ u_2 &= \arccos \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \\ \operatorname{tg} u_3 &= \frac{x_2}{x_1}. \end{aligned}\right\}$$

Определитель

$$\left|\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\right|$$

в этом случае будет равен $u^2_1 \sin u_2$. Он обращается в нуль только на оси $\boldsymbol{e}_3$, в точках которой нарушается взаимная однозначность соответствия между декартовыми и сферическими координатами.

Координатными поверхностями в сферической системе координат служат: u_1-поверхностями— сферы с центром в начале координат, u_2-поверхностями — полуплоскости, ограниченные осью $\boldsymbol{e}_3$, и u_3-поверхностями — конические поверхности с образующими, которые составляют постоянный угол с осью $\boldsymbol{e}_3$. Название «сферическая система координат» опять-таки объясняется тем, что среди координатных поверхностей имеются сферы.

Координатными линиями в сферической системе координат служат: линиями u_1 — лучи, которые выходят из начала координат; линиями u_2 — полуокружности с центром в начале координат, которые лежат в полуплоскостях, ограниченных осью $\boldsymbol{e}_3$, и, наконец, линиями u_3 — окружности с центром на оси $\boldsymbol{e}_3$, которые расположены в плоскостях, перпендикулярных $\boldsymbol{e}_3$ (рис. 10.20).

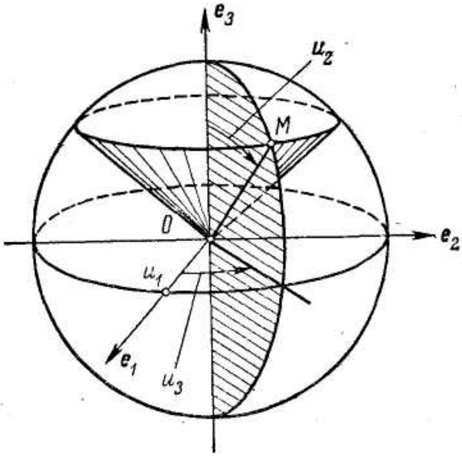


Рис.10.20.

Во всех рассмотренных примерах криволинейных систем координат координатные линии, которые проходят через произвольную точку пространства, ортогональны друг другу. Системы криволинейных координат, обладающие таким свойством, называются *ортогональными.* Векторы x_1, x_2, x_3, касательные к координатным линиям такой системы координат, будут попарно ортогональны в каждой точке пространства.

10.11. Подвижный репер ортогональной криволинейной системы координат и тензорные поля

1. Пусть дана некоторая область V евклидова пространства E_3, отнесенная к какой-нибудь ортогональной криволинейной системе координат u_1, u_2, u_3. Тогда через каждую точку $M \in V$ проходят три попарно ортогональные координатные линии. Построим единичные векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, исходящие из точки M, касающиеся в M соответствующих координатных линий и направленные в сторону возрастания соответствующей координаты. Поскольку такое построение мы осуществляем в каждой точке $M \in V$, то в каждой

точке области V возникает своя тройка единичных попарно ортогональных векторов $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{e_3}$, что зависит только от точки M:

$$\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_i(M) \qquad (i=1, 2, 3),$$

или

$$\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_i(u_1, u_2, u_3).$$

Такую тройку единичных попарно ортогональных векторов назовем *подвижным репером,* а сами эти векторы — *ортами* подвижного репера.

Если векторы $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{e_3}$ образуют в каждой точке правую тройку, то говорят, что задано *правую криволинейную систему координат.* Так, например, прямоугольная декартова система координат $Ox_1x_2x_3$ (при обычном расположении осей, принятом в аналитической геометрии) будет правой. Правыми будут также цилиндрическая и сферическая системы координат (но именно при том порядка координат, в котором они введены в примерах *б), в)* п. 10.10).

Заметим, что в прямоугольной декартовой системе координат направления векторов $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{e_3}$ не зависят от точки, в которой они построены; можно сказать, что все положения подвижного репера получаются из какого-то одного его положения с помощью параллельного переноса.

Что касается действительно *криволинейных* систем координат (например, цилиндрической и сферической), то там векторы $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{e_3}$, которые построены в различных точках, уже совсем не обязательно параллельны друг другу; так, например, в цилиндрической системе координат векторы $\boldsymbol{e_1}$ и $\boldsymbol{e_2}$, которые построены в различных точках, имеют различные направления.

2. Рассмотрим теперь радиус-вектор точки M:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u_1, u_2, u_3).$$

Когда u_2 и u_3 постоянны, а изменяется лишь u_1, годографом этого радиуса-вектора служит координатная линия u_1, а потому вектор $\frac{\partial x}{\partial u_1}$ направлен по касательной к координатной линии u_1 и, следовательно,

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{\partial x}{\partial u_1} = h_1 \boldsymbol{e}_1,$$

где

$$h_1 = |\, x_1|.$$

Аналогично

$$x_2 = \frac{\partial x}{\partial u_2} = h_2 e_2, \qquad x_3 = \frac{\partial x}{\partial u_3} = h_3 e_3,$$

где

$$h_2 = |\, x_2|, \qquad h_3 = |\, x_3|.$$

Обозначим теперь через e^0_i неподвижный базис евклидова пространства. Тогда

$$x = x_k e^0_k,$$

$$x_i = \frac{\partial x}{\partial u_i} = \frac{\partial x_k}{\partial u_i} e^0_k.$$

Так как

$$h_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)^2,$$

то

$$h_i^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_i}\right)^2.$$

Таким образом,

$$h_i = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_i}\right)^2} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{10.142}$$

Величины h_1, h_2, h_3 называются *коэффициентами Ламе*. Формулы (10.142) дают выражение этих коэффициентов через частные производные от прямоугольных декартовых координат по криволинейным.

Рассмотрим теперь дифференциал радиуса-вектора $x = \overline{OM}$ точки M:

$$dx = dM = x_i du_i.$$

Если внести сюда выражения для векторов x_i через базисные векторы e_i подвижного репера, присоединенного к точке M, то получим

$$dM = \sum_{i=1}^{3} h_i du_i e_i.$$

(В этой формуле мы подставили знак суммы, так как в ней индекс повторяется три, а не два раза, как обычно.) Положим в этом соотношении

$$\omega_1 = h_1 du_1, \qquad \omega_2 = h_2 du_2, \qquad \omega_3 = h_3 du_3. \tag{10.143}$$

Тогда

$$dM = \omega_i e_i. \tag{10.144}$$

Величины ω_u линейно зависят от дифференциалов du_i криволинейных координат. Поэтому их называют *линейными дифференциальными формами.* Формы ω_i являются коэффициентами разложения дифференциала $d\boldsymbol{M}$ по векторам $\boldsymbol{e}_i$ подвижного репера, присоединенного к точке M.

Дифференциальные формы ω_i являются линейно независимыми формами, так как уравнения (10.143) могут быть однозначно разрешены относительно независимых дифференциалов du_i криволинейных координат.

Из соотношения (10.144) можно получить выражение для квадрата элемента длины в криволинейной ортогональной системе координат. В самом деле,

$$ds^2 = d\boldsymbol{M}^2 = \omega_i \omega_j \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j.$$

Но $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$. Поэтому предыдущее соотношение переписывается в виде

$$ds^2 = \omega_u\, \omega_u,$$

или, подробнее,

$$ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2. \tag{10.145}$$

Подставляя сюда выражение (10.143) для формы ω_i, получим другое выражение для квадрата элемента длины:

$$ds^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2. \tag{10.146}$$

Далее, поскольку каждый из дифференциалов $d\boldsymbol{e}_i$ векторов подвижного репера (i=1, 2, 3) сам является вектором, его можно разложить по векторам $\boldsymbol{e}_j$; обозначая коэффициенты этого разложения через ω_{ij}, будем иметь

$$d\boldsymbol{e}_i = \omega_{ij}\, \boldsymbol{e}_j \qquad (i, j = 1, 2, 3). \tag{10.147}$$

Найдем, как выразятся коэффициенты ω_{ij} через дифференциалы криволинейных координат. Если обе части формулы (10.147) скалярно умножить на вектор $\boldsymbol{e}_k$, то получим

$$\boldsymbol{e}_k d\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_k \omega_{ij} \boldsymbol{e}_j = \omega_{ij} \delta_{jk} = \omega_{ik},$$

или

$$\omega_{ij} = \boldsymbol{e}_i d\boldsymbol{e}_i.$$

Но

$$d\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial u_k} du_k.$$

Поэтому

$$\omega_{ij} = \boldsymbol{e}_i \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial u_k} du_k.$$

Следовательно, коэффициенты ω_{ij} являются линейными дифференциальными формами от дифференциалов du_k криволинейных координат. Если, пользуясь соотношениями (10.143), подставить в предыдущие формулы вместо дифференциалов du_k независимые формы ω_k, то получим

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{h_k} \boldsymbol{e}_j \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial u_k} \omega_k.$$

Последние формулы можно переписать в виде

$$\omega_{ij} = \Gamma_{ijk}\omega_k, \tag{10.148}$$

где через Γ_{ijk} обозначенные коэффициенты

$$\Gamma_{ij\alpha} = \frac{1}{h_\alpha} \boldsymbol{e}_j \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial u_\alpha}. \tag{10.149}$$

Здесь в правой части стоит выражение, в котором по повторяющемуся индексу α суммирование не производится. Поэтому его обозначили греческой буквой. И в дальнейшем по повторяющемуся греческому индексу суммирование производится не будет. Для латинских же индексов остаются в силе все прежние правила о суммировании. Величины Γ_{ijk} будем называть *символами Кристоффеля*.

Уравнения (10.144) и (10.147) называют *уравнениями инфинитезимального перемещения подвижного репера,* связанного с ортогональной криволинейной системой координат. Дифференциальные формы ω_k и ω_{ij} называют *компонентами инфинитезимального перемещения* этого подвижного репера.

Как уже указывалось, дифференциальные формы ω_k являются линейно независимыми. Что касается форм ω_{ij}, то они удовлетворяют целому ряду соотношений. Эти соотношения мы получим, дифференцируя равенства

$$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$$

выполняющиеся для базисных векторов ортонормированного репера:

$$\boldsymbol{e}_i d\boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_j d\boldsymbol{e}_i = 0.$$

Подставляя сюда разложение векторов $d\boldsymbol{e}_j$ и $d\boldsymbol{e}_i$ из формулы (10.147), найдем искомые соотношения:

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0. \tag{10.150}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0.$$

Из (10.150) вытекает, что символы Кристоффеля Γ_{ijk} также удовлетворяют целому ряду соотношений. В самом деле, соотношения (10.150) могут быть переписаны в виде

$$\Gamma_{ijk}\,\omega_k + \Gamma_{jik}\omega_k = 0,$$

откуда, в силу линейной независимости форм ω_k, следует, что

$$\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} = 0, \qquad (10.151)$$

т.е. величины Γ_{ijk} кососимметричны по первым двум индексах. В частности,

$$\Gamma_{\alpha\alpha k} = 0.$$

Установим еще некоторые соотношения между символами Кристоффеля. Имеем

$$\Gamma_{\alpha j\beta} = \frac{1}{h_\beta}\boldsymbol{e}_j\frac{\partial \boldsymbol{e}_\alpha}{\partial u_\beta} = \frac{1}{h_\beta}\boldsymbol{e}_j\frac{\partial}{\partial u_\beta}\left(\frac{\boldsymbol{x}_\alpha}{h_\alpha}\right) = \frac{1}{h_\beta}\boldsymbol{e}_j\left(\frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial \boldsymbol{x}_\alpha}{\partial u_\beta} - \frac{\boldsymbol{x}_\alpha}{h_\alpha^2}\frac{\partial h_\alpha}{\partial u_\beta}\right) = \\ = \frac{1}{h_\alpha h_\beta}\boldsymbol{e}_j\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial u_\beta \partial u_\alpha} - \frac{1}{h_\alpha h_\beta}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_\alpha\frac{\partial h_\alpha}{\partial u_\beta}.$$

В этом соотношении следует считать $j\neq\alpha$, так как $\Gamma_{\alpha\alpha k} = 0$. Поэтому векторы $\boldsymbol{e}_j$ и $\boldsymbol{e}_\alpha$ ортогональны и второе слагаемое правой части этого соотношения обращается в нуль. Следовательно, при $j\neq\alpha$

$$\Gamma_{\alpha j\beta} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta}\boldsymbol{e}_j\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial u_\beta\,\partial u_\alpha}.$$

Так как

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial u_\beta\,\partial u_\alpha} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial u_\alpha\,\partial u_\beta},$$

то при $j\neq\beta$ эти выражения будут симметричными относительно индексов α и β:

$$\Gamma_{\alpha j\beta} = \Gamma_{\beta j\alpha} \text{ при } j\neq\beta, \quad j\neq\alpha. \qquad (10.152)$$

Пусть теперь $j = \beta$. Тогда

$$\Gamma_{\alpha\beta\beta} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta}\boldsymbol{e}_\beta\frac{\partial \boldsymbol{x}_\beta}{\partial u_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta}\boldsymbol{e}_\beta\frac{\partial}{\partial u_\alpha}(h_\beta \boldsymbol{e}_\beta) = \frac{1}{h_\alpha h_\beta}\boldsymbol{e}_\beta\left(\boldsymbol{e}_\beta\frac{\partial h_\beta}{\partial u_\alpha} + h_\beta\frac{\partial \boldsymbol{e}_\beta}{\partial u_\alpha}\right).$$

Но $\boldsymbol{e}^2_\beta=1$, а

$$\boldsymbol{e}_\beta\frac{\partial \boldsymbol{e}_\beta}{\partial u_\alpha} = 0.$$

Поэтому

$$\Gamma_{\alpha\beta\beta} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta}\frac{\partial h_\beta}{\partial u_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial \ln h_\beta}{\partial u_\alpha}.$$

Соотношение (10.152) означают, что *символы Кристоффеля* Γ_{ijk} *при* $j\neq i$, $j\neq k$ *симметричны по крайним индексам.* Это свойство вместе со свойством (10.151) кососимметричности по первым двум индексам дает для величин Γ_{ijk} с разными индексами i, j, k соотношение

$$\Gamma_{ijk} = -\Gamma_{jik} = -\Gamma_{kij} = \Gamma_{ikj} = \Gamma_{jki} = -\Gamma_{kji} = -\Gamma_{ijk},$$

которое означает, что величины Γ_{ijk} с разными индексами равны 0:

$$\Gamma_{ijk} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j, \quad i \neq k, \quad j \neq k.$$

Таким образом, в ортогональной криволинейной системе координат из 27 величин Γ_{ijk} ненулевыми могут быть не более 12:

$$\Gamma_{\beta\alpha\alpha} = -\Gamma_{\alpha\beta\alpha} = \frac{1}{h_\beta}\frac{\partial \ln h_\alpha}{\partial u_\beta}. \tag{10.153}$$

3. Найдем для рассмотренных в п. 10.10 декартовых, цилиндрических и сферических координат коэффициенты Ламе h_i, величины ω_i, ω_{ij}, Γ_{ijk} и ds^2 — квадрат длины вектора $d\boldsymbol{M}$.

а) В случае прямоугольных декартовых координат векторы $\boldsymbol{e}_i$= const, поэтому $\dfrac{\partial e_i}{\partial u_j}$ = 0, и, следовательно, в силу формул (10.149) все величины $\Gamma_{ijk} = 0$.

Обратно, если в какой-нибудь системе координат все $\Gamma_{ijk} = 0$, то ω_{ij}=0, $d\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{e}_i$=const и рассматриваемая система координат будет прямоугольной декартовой.

Что касается коэффициентов Ламе, то формулы (10.142) показывают, что все они равны 1:

$$h_1 = h_2 = h_3 = 1,$$

так как $u_i = x_i$ и поэтому по формулам (10.146)

$$ds^2 = du_1^2 + du_2^2 + du_3^2$$

Наконец, формулы (10.143) показывают, что $\omega_i = du_i$.

б) В случае цилиндрической системы координат в силу формул (10.140) и формул (10.142) получаем следующие выражения для коэффициентов Ламе:

$$\begin{aligned} &h_1^2 = \cos^2 u_2 + \sin^2 u_2 = 1, \\ &h_2^2 = u_1^2 \sin^2 u_2 + u_1^2 \cos^2 u_2 = u_1^2, \\ &h_3^2 = 1, \end{aligned}$$

откуда

$$h_1 = 1, \quad h_2 = u_1, \; h_3 = 1,$$

и по формулам (10.146)

$$ds^2 = du_1^2 + u_1^2 du_2^2 + du_3^2.$$

Что касается величин Γ_{ijk}, то те из них, которые могут быть отличными от нуля, в силу формул (10.153) в цилиндрических координатах имеют вид

$$\begin{aligned} &\Gamma_{122} = -\Gamma_{212} = \frac{1}{u_1}, \quad \Gamma_{133} = \Gamma_{313} = 0, \quad \Gamma_{211} = \Gamma_{121} = 0, \\ &\Gamma_{233} = \quad \Gamma_{323} = 0, \quad \Gamma_{311} = \Gamma_{131} = 0, \quad \Gamma_{322} = \Gamma_{232} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда в силу формул (10.143) и (10.148)

$$\omega_1 = du_1, \quad \omega_2 = u_1\,du_2, \quad \omega_3 = du_3,$$
$$\omega_{12} = -\omega_{21} = \Gamma_{122}\,du_2 = \frac{du_2}{u_1}, \quad \omega_{13} = 0,$$
$$\omega_{23} = 0, \quad \omega_{31} = 0, \quad \omega_{32} = 0.$$

Это означает, что

$$de_3 = 0,$$
$$de_1 = \frac{du_2}{u_1}\,e_2,$$
$$de_2 = -\frac{du_2}{u_1}\,e_1,$$

т.е. что при перемещении репера вектор $\boldsymbol{e}_3$ не меняется, а векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ меняются (это вытекает также из геометрического смысла цилиндрических координат).

в) Для сферической системы координат в силу формул (10.141) и формул (10.142) получаем следующие выражения для коэффициентов Ламе:

$$h_1^2 = \sin^2 u_2 \cos^2 u_3 + \sin^2 u_2 \sin^2 u_3 + \cos^2 u_2 = 1,$$
$$h_2^2 = u_1^2 \cos^2 u_2 \cos^2 u_3 + u_1^2 \cos^2 u_2 \sin^2 u_3 + u_1^2 \sin^2 u_2 = u_1^2,$$
$$h_3^2 = u_1^2 \sin^2 u_2 \sin^2 u_3 + u_1^2 \sin^2 u_2 \cos^2 u_3 = u_1^2 \sin^2 u_2,$$

откуда

$$h_1 = 1, \quad h_2 = u_1, \quad h_3 = u_1 \sin u_2,$$

и по формулам (10.146)

$$ds^2 = du_1^2 + u_1^2\,du_2^2 + u_1^2 \sin^2 u_2\,du_3^2.$$

Те из величин Γ_{ijk}, которые в ортогональных криволинейных координатах могут быть отличными от нуля, в сферической системе координат в силу (10.153) имеют вид

$$\Gamma_{122} = -\Gamma_{212} = \frac{1}{u_1}, \qquad \Gamma_{133} = -\Gamma_{313} = \frac{1}{u_1}, \quad \Gamma_{211} = \Gamma_{121} = 0,$$
$$\Gamma_{233} = -\Gamma_{323} = \operatorname{ctg} u_2, \quad \Gamma_{311} = \Gamma_{131} = 0, \quad \Gamma_{322} = \Gamma_{232} = 0$$

Отсюда в силу формул (10.143) и (10.148) имеем следующие выражения для форм ω_i и ω_{ij}:

$$\omega_1 = du_1, \quad \omega_2 = u_1\,du_2, \quad \omega_3 = u_1 \sin u_2\,du_3,$$
$$\omega_{12} = -\omega_{21} = \frac{1}{u_1}\,du_2, \quad \omega_{13} = -\omega_{31} = \frac{1}{u_1}\,du_3,$$
$$\omega_{23} = -\omega_{32} = \operatorname{ctg} u_2\,du_3.$$

Теперь все $d\boldsymbol{e}_i \neq \mathbf{0}$, т.е. при переходе из точки M в бесконечно близкую точку все векторы подвижного репера поворачиваются (этот факт также легко усматривается из геометрического смысла сферических координат).

4. Чтобы рассмотреть тензоры в ортогональных криволинейных координатах, выясним, что происходит с подвижным репером, когда ортогональные криволинейные координаты подвергаются преобразованию

$$u_{i'} = u_{i'}(u_1, u_2, u_3) \qquad (u'=1, 2, 3), \qquad (10.154)$$

где $u_{1'}$, $u_{2'}$, $u_{3'}$ — новые ортогональные криволинейные координаты. Формулы (10.154) предполагаются обратными, а функции $u_{i'}(u_1, u_2, u_3)$ — дважды непрерывно дифференцируемыми.

Для новых ортогональных криволинейных координат $u_{i'}$ в каждой точке M возникает свой подвижной репер $\{\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}\}$, векторы которого можно выразить через векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ подвижного репера, соответствующего старой ортогональной криволинейной системе координат, по формулам

$$\boldsymbol{e}_{i'}(M) = \gamma_{i'i}(M)\boldsymbol{e}_i(M). \qquad (10.155)$$

Коэффициенты $\gamma_{i'i}(M)$ образуют ортогональную матрицу, элементы которой зависят от точки M. (Можно сказать, что в каждой точке закон преобразования подвижного репера задается своей ортогональной матрицей.) Коэффициенты $\gamma_{i'i}(M)$ могут быть выражены через частные производные $\dfrac{\partial u_i'}{\partial u_i}$ и коэффициенты Ламе h_i и $h_{i'}$ старой и новой систем криволинейных координат.

Пусть теперь в некоторой ортогональной криволинейной системе координаты даны тензорное поле, например, поле тензора третьей валентности

$$a_{ijk} = a_{ijk}(M).$$

Координаты этого тензора будем вычислять в каждой точке относительно того локального подвижного репера, который присоединен к этой точке.

Если ортогональные криволинейные координаты переходят в другие такие же координаты по формулам (10.154), то векторы подвижного репера в точке M преобразуются по формулам (10.155), а тензор a_{ijk} подвергается преобразованию по обычному тензорному закону:

$$a_{i'j'k'}(M) = \gamma_{i'i}(M)\,\gamma_{j'j}(M)\,\gamma_{k'k}(M)\,a_{ijk}(M),$$

где все компоненты тензора и все элементы матрицы преобразования берутся в одной и той же точке.

Поскольку, как было отмечено в п. 10.8, в случае тензорного поля все алгебраические операции над тензором поля производятся по отдельности в каждой точке, то все такие операции автоматически переносятся и на случай тензорного поля в ортогональных криволинейных координатах: их следует производить в каждой точке *M* относительно локального репера, который в данной системе координат присоединен к этой точке.

5. Выясним теперь, как при переходе от одной ортогональной криволинейной системы координат к другой преобразуются величины ω_i , ω_{ij}, Γ_{ijk}.

Поскольку из формулы (10.143) следует, что ω_i — координаты вектора $d\boldsymbol{M}$ относительно базиса $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$, то совокупность величин ω_1, ω_2, ω_3 образует тензорное поле первой валентности и потому при переходе от одной ортогональной криволинейной системы координат к другой преобразуется по формулам

$$\omega_{i'} = \gamma_{i'i}\, \omega_i. \qquad (10.156)$$

Далее, дифференцируя равенства (10.155) и пользуясь при этом соотношениями (10.147) и аналогичными соотношениями для $\boldsymbol{e}_{i'}$,

$$d\boldsymbol{e}_{i'} = \omega_{i'j'}\, \boldsymbol{e}_{j'},$$

получим

$$\omega_{i'j'}\boldsymbol{e}_{j'} = d\gamma_{i'i}\boldsymbol{e}_i + \gamma_{i'i}\omega_{ij}\boldsymbol{e}_j$$

или, используя (10.155) и изменяя индекс суммирования i на j в первом слагаемом правой части, будем иметь

$$\omega_{i'j'}\gamma_{j'j}\boldsymbol{e}_j = (d\gamma_{i'j} + \gamma_{i'i}\omega_{ij})\boldsymbol{e}_j,$$

откуда в силу линейной независимости векторов $\boldsymbol{e}_j$

$$\omega_{i'j'}\gamma_{j'j} = d\gamma_{i'j} + \gamma_{i'i}\omega_{ij}.$$

Умножим обе части этого равенства на $\gamma_{k'j}$ и просуммируем по j. Тогда

$$\omega_{i'j'}\gamma_{j'j}\gamma_{k'j} = \gamma_{k'j}d\gamma_{i'j} + \gamma_{i'i}\gamma_{k'j}\omega_{ij},$$

или, используя, что $\gamma_{j'j}\gamma_{k'j} = \delta_{j'k'}$, окончательно получим

$$\omega_{i'k'} = \gamma_{k'j}d\gamma_{i'j} + \gamma_{i'i}\gamma_{k'j}\omega_{ij}. \qquad (10.157)$$

Отсюда видно, что величины ω_{jk} преобразуются не по тензорному закону (имеются дополнительные члены $\gamma_{k'j}d\gamma_{i'j}$ которые, вообще говоря, не равны нулю, так как величины $\gamma_{i'j}$ меняются от точки к точке).

Отметим, что если воспользоваться равенствами (10.143), то дифференциалы $d\gamma_{i'j}$ можно представить в виде

$$d\gamma_{i'j} = \frac{\partial \gamma_{i'j}}{\partial u_k} du_k = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial \gamma_{i'j}}{\partial u_\alpha} \frac{1}{h_\alpha} \omega_\alpha$$

или, если принять обозначение

$$\frac{\partial \gamma_{i'j}}{\partial u_\alpha} \frac{1}{h_\alpha} = \gamma_{i'j\alpha},$$

в виде

$$d\gamma_{i'j} = \gamma_{i'jl}\omega_l. \qquad (10.158)$$

Из (10.157), используя равенства (10.148) и (10.158), будем иметь

$$\Gamma_{i'k'l'}\omega_{l'} = \gamma_{k'j}\gamma_{i'jl}\omega_l + \gamma_{i'i}\gamma_{k'k}\Gamma_{ikl}\omega_l.$$

Выражая формы ω_l через $\omega_{l'}$ по формулам

$$\omega_l = \gamma_{ll'}\omega_{l'}$$

обратным формулам (10.156), и учитывая то, что $\gamma_{ll'} = \gamma_{l'l}$ и что формы $\omega_{l'}$ линейно независимы, окончательно получаем

$$\Gamma_{i'k'l'} = \gamma_{k'j}\gamma_{l'l}\gamma_{i'jl} + \gamma_{i'i}\gamma_{k'k}\gamma_{l'l}\Gamma_{ikl}. \qquad (10.159)$$

Отсюда следует, что величины Γ_{ikl} тоже не образуют тензору.

То, что величины ω_{ij} и Γ_{ijk} не образуют тензоров, можно подтвердить еще и следующими геометрическими соображениями. Ранее было показано, что эти величины в прямоугольной декартовой системе координат тождественно равны нулю, а в цилиндрической и сферической системах координат среди них есть отличные от нуля. Но для тензоров такого положения быть не может: если все координаты тензора равны нулю в одной системе координат, то то же самое будет, в силу линейного однородного закона преобразования тензора, и в любой другой допустимой системе координат.

10.12. Дифференцирование тензорного поля в криволинейных координатах

1. Перейдем теперь к рассмотрению операции дифференцирования тензорного поля в криволинейных координатах.

Займемся сначала вопросом о дифференцировании скалярного поля. Пусть в некоторой ортогональной криволинейной системе координат (u_1, u_2, u_3), определенной в некоторой области V пространства E_3, задано скалярное поле φ:

$$\varphi = \varphi\,(u_1, u_2, u_3).$$

Дифференциал его определяется равенством.

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u_i} du_i = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial\varphi}{\partial u_\alpha} \frac{1}{h_\alpha} \omega_\alpha$$

(здесь мы воспользовались формулами (10.143). Далее, обозначая коэффициент при ω_α через $\varphi_{,\alpha}$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_\alpha} \frac{1}{h_\alpha} = \varphi_{,\alpha}, \tag{10.160}$$

будем иметь

$$d\varphi = \varphi_{,i}\omega_{i}. \tag{10.161}$$

Совокупность величин $\varphi_{,1}$, $\varphi_{,2}$, $\varphi_{,3}$ назовем *ковариантной (абсолютной) производной скалярного поля.*

Поскольку $d\varphi$, как и φ, образуют некоторое скалярное поле, а ω_i — тензорное поле первой валентности, то коэффициенты $\varphi_{,i}$ в равенстве (10.161) также образуют тензорное поле первой валентности. Вектор с координатами $\varphi_{,i}$ является инвариантным вектором, который не зависит от выбора системы координат в рассматриваемой области V пространства E_3. Докажем, что этот вектор является градиентом скалярного поля φ, т.е.

$$\operatorname{grad} \varphi = \varphi_{,i}\boldsymbol{e}_i. \tag{10.162}$$

В самом деле, если мы перейдем к декартовой прямоугольной системе координат, то получим

$$h_i = 1, \quad \varphi_{,i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

и

$$\varphi_{,i}\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i = \operatorname{grad}\varphi$$

согласно определению градиента скалярного поля, которое было дано в п. 10.8. Но последнее равенство не зависит от выбора системы координат в области V. Поэтому оно остается верным для любой криволинейной системы координат.

Найдем еще выражение градиента скалярного поля в цилиндрической и сферической системах координат.

а) В *цилиндрической* системе координат мы имели

$$h_2 = 1,\ h_2 = u_1,\ h_3 = 1,$$

поэтому по формуле (10.160),получаем

$$\varphi_{,1} = \frac{\partial\varphi}{\partial u_1}, \quad \varphi_{,2} = \frac{1}{u_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}, \ \varphi_{,3} = \frac{\partial\varphi}{\partial u_3},$$

откуда в силу формулы (10.162)

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{u_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial u_3}\boldsymbol{e}_3.$$

б) В *сферической* системе координат коэффициенты Ламе определялись формулами

$$h_1 = 1,\ h_2 = u_1,\ h_3 = u_1\sin u_2;$$

отсюда в силу формулы (10.160)

$$\varphi_{,1} = \frac{\partial\varphi}{\partial u_1},\quad \varphi_{,2} = \frac{1}{u_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2},\quad \varphi_{,3} = \frac{1}{u_1\sin u_2}\frac{\partial\varphi}{\partial u_3}$$

и по формуле (10.162)

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{u_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{u_1\sin u_2}\frac{\partial\varphi}{\partial u_3}\boldsymbol{e}_3.$$

2. Перейдем теперь к дифференцированию векторного поля. Пусть дано векторное поле

$$\boldsymbol{a}(M) = a_i(M)\boldsymbol{e}_i(M).$$

Найдем его дифференциал. Пользуясь формулами (10.147), получим (для простоты записи в дальнейшем будем вместо $a_i(M)$, $da_i(M)$ и т.д. писать просто a_i, da_i и т.д., подразумевая, что все вычисления производятся в точке M).

$$d\boldsymbol{a} = da_i\boldsymbol{e}_i + a_i d\boldsymbol{e}_i = da_i\boldsymbol{e}_i + a_i\omega_{ij}\boldsymbol{e}_j$$

или, меняя индекс суммирования i в первом слагаемом на j и пользуясь кососимметричностью форм ω_{ij}, будем иметь

$$d\boldsymbol{a} = (da_j - a_i\omega_{ji})\,\boldsymbol{e}_j.$$

Полагая

$$Da_j = da_j - a_i\omega_{ji}, \tag{10.164}$$

найдем

$$d\boldsymbol{a} = Da_j\boldsymbol{e}_j. \tag{10.164}$$

Так как $d\boldsymbol{a}$ — вектор, то из равенства (10.164) следует, что Da_j — координаты тензора первой валентности. Этот тензор называется *абсолютным дифференциалом тензора* a_j.

Отметим, что обычные дифференциалы da_i координат векторного поля в криволинейной системе координат уже не образуют тензора первой валентности. Так как в ***прямоугольной декартовой системе координат (и <u>только в такой системе координат</u>)*** $\omega_{ij} = 0$, ***то в ней и только в ней абсолютные дифференциалы координат вектора <u>совпадают</u> с его обычными дифференциалами***. Заметим еще, что для того, чтобы векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$, которое задано в криволинейной системе координат, было однородным полем (т.е. чтобы все векторы поля были равны между собой), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$Da_i = 0.$$

Далее, если воспользоваться тем, что

$$da_j = \frac{\partial a_j}{\partial u_k} du_k = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial a_j}{\partial u_\alpha} \frac{1}{h_\alpha} \omega_\alpha$$

и

$$\omega_{ji} = \Gamma_{jik} \omega_k,$$

то формулу (10.163) можно записать в виде

$$Da_j = \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial a_j}{\partial u_\alpha} - a_i \Gamma_{ji\alpha} \right) \omega_\alpha .$$

Обозначив выражение в скобках через $a_{j,\ \alpha}$:

$$a_{j,\alpha} = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial a_j}{\partial u_\alpha} - a_i \Gamma_{ji\alpha}, \tag{10.165}$$

получим

$$Da_j = a_{j,k}\omega_k. \tag{10.166}$$

Поскольку Da_j — тензорное поле первой валентности и ω_k — координаты произвольного вектора $\boldsymbol{dM}$, то на основании обратного тензорного признака можно утверждать, что величины $a_{j,k}$ образуют тензорное поле второй валентности. Это поле называется *абсолютной производной векторного поля* a_j. Легко видеть, что абсолютная производная тензорного поля совпадает с его обычной производной тогда и только тогда, когда криволинейная система координат становится декартовой прямоугольной.

Таким образом, мы ввели ***понятие <u>абсолютного дифференциала</u> и <u>абсолютной производной</u> <u>векторного поля</u>. Они вычисляются по формулам (10.163) и (10.165) и представляют собой тензорные поля соответственно первой и второй валентности***.

Если абсолютную производную $a_{j,k}$ векторного поля a_j свернуть по индексам j и k, то получим инвариант, который совпадает с *дивергенцией векторного поля* ***a***(*M*):

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = a_{i,i} = a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}. \tag{10.167}$$

В самом деле, инвариант $a_{j,j}$ не зависит от выбора системы координат, но в прямоугольной декартовой системе координат

$$a_{j,j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_j} = \operatorname{div} \boldsymbol{a}.$$

Используя формулу (10.153), приведем выражение для дивергенции к виду

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial a_1}{\partial u_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial a_2}{\partial u_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial a_3}{\partial u_3} + a_i\Gamma_{i11} + a_i\Gamma_{i22} + a_i\Gamma_{i33} =$$

$$= \frac{1}{h_1}\frac{\partial a_1}{\partial u_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial a_2}{\partial u_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial a_3}{\partial u_3} + \frac{a_2}{h_2 h_1}\frac{\partial h_1}{\partial u_2} + \frac{a_3}{h_3 h_1}\frac{\partial h_1}{\partial u_3} +$$

$$+ \frac{a_1}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial u_1} + \frac{a_3}{h_2 h_3}\frac{\partial h_2}{\partial u_3} + \frac{a_1}{h_1 h_3}\frac{\partial h_3}{\partial u_1} + \frac{a_2}{h_2 h_3}\frac{\partial h_3}{\partial u_2}$$

или, собирая члены с a_i, к виду

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{\frac{\partial (a_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} + \frac{\partial (a_2 h_3 h_1)}{\partial u_2} + \frac{\partial (a_3 h_1 h_2)}{\partial u_3}\right\}. \tag{10.168}$$

Если же абсолютную производную $a_{i,k}$ свернуть с дискриминантным тензором — ε_{ijk}, то получим ротор векторного поля

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = — \varepsilon_{ijk} a_{j,k} \boldsymbol{e}_i.$$

В самом деле, так как в прямоугольной декартовой системе координат

$$a_{j,k} = \frac{\partial a_j}{\partial u_k},$$

то эта формула совпадает с формулой (10.123) и в правой системе координат может быть записана в виде

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = (a_{3,2} - a_{2,3})\,\boldsymbol{e}_1 + (a_{1,3} - a_{3,1})\,\boldsymbol{e}_2 + (a_{2,1} - a_{1,2})\,\boldsymbol{e}_3. \tag{10.169}$$

С помощью соотношений (10.153) формула для проекции ротора на ось $\boldsymbol{e}_1$ преобразуется следующим образом:

$$\text{Пр}_{\boldsymbol{e}_1} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = a_{3,2} - a_{2,3} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial a_3}{\partial u_2} - \frac{1}{h_3}\frac{\partial a_2}{\partial u_3} + a_i\Gamma_{i32} - a_i\Gamma_{i23} =$$

$$= \frac{1}{h_2}\frac{\partial a_3}{\partial u_2} - \frac{1}{h_3}\frac{\partial a_2}{\partial u_3} - \frac{a_2}{h_2 h_3}\frac{\partial h_2}{\partial u_3} + \frac{a_3}{h_2 h_3}\frac{\partial h_3}{\partial u_2} =$$

$$= \frac{1}{h_2 h_3}\left\{\frac{\partial (a_3 h_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial (a_2 h_2)}{\partial u_3}\right\}.$$

Аналогично можно преобразовать формулы для проекций ротора на оси $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$. Окончательно формула для вычисления ротора в криволинейных ортогональных координатах принимает вид

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \frac{1}{h_2 h_3}\left\{\frac{\partial (a_3 h_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial (a_2 h_2)}{\partial u_3}\right\}\boldsymbol{e}_1 +$$

$$+ \frac{1}{h_3 h_1}\left\{\frac{\partial (a_1 h_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial (a_3 h_3)}{\partial u_1}\right\}\boldsymbol{e}_2 +$$

$$+ \frac{1}{h_1 h_2}\left\{\frac{\partial (a_2 h_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial (a_1 h_1)}{\partial u_2}\right\}\boldsymbol{e}_3. \tag{10.170}$$

Найдем еще выражение оператора Лапласа в общей ортогональной криволинейной системе координат. Так как

$$\Delta\varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi,$$

то, пользуясь формулами (10.160), (10.162), (10.168), получим

$$\Delta\varphi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial u_3}\right)\right\} \qquad (10.171)$$

Запишем теперь абсолютную производную, дивергенцию и ротор векторного поля, а также оператор Лапласа в цилиндрической и сферической системах координат, которые при выбранном нами порядке координат все были правыми.

а) В цилиндрической системе координат по формуле (10.165) получим

$$a_{1,1} = \frac{\partial a_1}{\partial u_1}, \quad a_{1,2} = \frac{1}{u_1}\frac{\partial a_1}{\partial u_2} - \frac{a_2}{u_1}, \quad a_{1,3} = \frac{\partial a_1}{\partial u_3},$$

$$a_{2,1} = \frac{\partial a_2}{\partial u_1}, \quad a_{2,2} = \frac{1}{u_1}\frac{\partial a_2}{\partial u_2} + \frac{a_1}{u_1}, \quad a_{2,3} = \frac{\partial a_2}{\partial u_3},$$

$$a_{3,1} = \frac{\partial a_3}{\partial u_1}, \quad a_{3,2} = \frac{1}{u_1}\frac{\partial a_3}{\partial u_2}, \quad a_{3,3} = \frac{\partial a_3}{\partial u_3}.$$

Поэтому из (10.167) имеем

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} = \frac{\partial a_1}{\partial u_1} + \frac{1}{u_1}\frac{\partial a_2}{\partial u_2} + \frac{\partial a_3}{\partial u_3} + \frac{a_1}{u_1}$$

или

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{u_1}\frac{\partial (u_1a_1)}{\partial u_1} + \frac{1}{u_1}\frac{\partial a_2}{\partial u_2} + \frac{\partial a_3}{\partial u_3}$$

(последний результат можно получить также непосредственно из формулы (10.168)).

По формуле (10.170) получаем следующее выражение ротора в цилиндрических координатах:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \left(\frac{1}{u_1}\frac{\partial a_3}{\partial u_2} - \frac{\partial a_2}{\partial u_3}\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial u_3} - \frac{\partial a_3}{\partial u_1}\right)\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{u_1}\left(\frac{\partial (u_1a_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial a_1}{\partial u_2}\right)\boldsymbol{e}_3,$$

и, наконец, пользуясь (10.171), найдем выражение для оператора Лапласа:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{u_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(u_1\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\right) + \frac{1}{u_1^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_3^2}.$$

б) В сферической системе координат получим

$$a_{1,1}=\frac{\partial a_1}{\partial u_1},\quad a_{1,2}=\frac{1}{u_1}\frac{\partial a_1}{\partial u_2}-\frac{a_2}{u_1},\quad a_{1,3}=\frac{1}{u_1\sin u_2}\frac{\partial a_1}{\partial u_3}-\frac{a_3}{u_1},$$

$$a_{2,1}=\frac{\partial a_2}{\partial u_1},\quad a_{2,2}=\frac{1}{u_1}\frac{\partial a_2}{\partial u_2}+\frac{a_1}{u_1},\quad a_{2,3}=\frac{1}{u_1\sin u_2}\frac{\partial a_2}{\partial u_3}-\operatorname{ctg} u_2\cdot a_3,$$

$$a_{3,1}=\frac{\partial a_3}{\partial u_1},\quad a_{3,2}=\frac{1}{u_1}\frac{\partial a_3}{\partial u_2},\quad a_{3,3}=\frac{1}{u_1\sin u_2}\frac{\partial a_3}{\partial u_3}+\frac{a_1}{u_1}.$$

Далее по формулам (10.168) и (10.170) имеем

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{1}{u_1^2\sin u_2}\left\{\frac{\partial(a_1u_1^2\sin u_2)}{\partial u_1}+\frac{\partial(a_2u_1\sin u_2)}{\partial u_2}+\frac{\partial(a_3u_1)}{\partial u_3}\right\},$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\frac{1}{u_1^2\sin u_2}\left\{\frac{\partial(a_3u_1\sin u_2)}{\partial u_2}-\frac{\partial(a_2u_1)}{\partial u_3}\right\}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{u_1\sin u_2}\left\{\frac{\partial a_1}{\partial u_3}-\frac{\partial(a_3u_1\sin u_2)}{\partial u_1}\right\}\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{u_1}\left\{\frac{\partial(a_2u_1)}{\partial u_1}-\frac{\partial a_1}{\partial u_2}\right\}\boldsymbol{e}_3$$

или

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{1}{u_1^2}\frac{\partial(u_1^2a_1)}{\partial u_1}+\frac{1}{u_1\sin u_2}\frac{\partial(a_2\sin u_2)}{\partial u_2}+\frac{1}{u_1\sin u_2}\frac{\partial a_3}{\partial u_3},$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\frac{1}{u_1\sin u_2}\left\{\frac{\partial(a_3\sin u_2)}{\partial u_2}-\frac{\partial a_2}{\partial u_3}\right\}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{u_1}\left\{\frac{1}{\sin u_2}\frac{\partial a_1}{\partial u_3}-\frac{\partial(u_1a_3)}{\partial u_1}\right\}\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{u_1}\left\{\frac{\partial(u_1a_2)}{\partial u_1}-\frac{\partial a_1}{\partial u_2}\right\}\boldsymbol{e}_3.$$

Наконец, по формуле (10.171) найдем следующее выражение оператора Лапласа в сферических координатах:

$$\Delta\varphi=\frac{1}{u_1^2}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(u_1^2\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\right)+\frac{1}{u_1^2\sin u_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\sin u_2\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\right)+\frac{1}{u_1^2\sin^2 u_2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_3^2}.$$

3. Рассмотрим далее операцию абсолютного дифференцирования поля тензора второй валентности, которое задано в некоторой криволинейной ортогональной системе координат u_1, u_2, u_3:

$$a_{ij}=a_{ij}(u_1, u_2, u_3).$$

В каждой точке компоненты a_{ij} этого тензора можно рассматривать как коэффициенты билинейной формы

$$\varphi=\varphi\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=a_{ij}x_iy_j$$

где $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ - произвольные векторные поля, имеющие относительно подвижного репер, присоединенного к криволинейной системе координат, соответственно координаты x_i и y_j $(i, j=1, 2, 3)$.

Пользуясь формулами (10.163) для абсолютного дифференциала векторного поля, находим дифференциал формы φ:

$$d\varphi = da_{ij}x_iy_j + a_{ij}dx_iy_j + a_{ij}x_idy_j =$$
$$= da_{ij}x_iy_j + a_{ij}(Dx_i - x_k\omega_{ki})y_j + a_{ij}x_i(Dy_j - y_k\omega_{kj}) =$$
$$= (da_{ij} - a_{kj}\omega_{ik} - a_{ik}\omega_{jk})x_iy_j + a_{ij}Dx_iy_j + a_{ij}x_iDy_j$$

(в последнем переходе мы дважды поменяли индексы суммирования: в одном слагаемом i на k и обратно, в другом -j на k и обратно).

Второе и третье слагаемые здесь показывают, как меняется билинейная форма φ в зависимости от изменения векторов полей $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ при переходе из точки M в бесконечно близкую точку. Первое из слагаемых отражает изменение этой формы за счет приращения коэффициентов a_{ij}. Поскольку $d\varphi$ — инвариант, $a_{ij}Dx_iy_j$ и $a_{ij}x_iDy_j$ — тоже инварианты, как результаты свертывания тензора a_{ij} соответственно с векторами Dx_i,y_j и x_i,Dy_j, то первое слагаемое также представляет собой инвариант — некоторую билинейную форму относительно векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Коэффициенты этой последней билинейной формы образуют тензор второй валентности, называемый *абсолютным дифференциалом тензора* a_{ij} и обозначаемый

$$Da_{ij} = da_{ij} - a_{kj}\omega_{ik} - a_{ik}\omega_{jk}. \qquad (10.172)$$

Далее, если воспользоваться формулами

$$da_{ij} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_l}du_l = \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial a_{ij}}{\partial u_\alpha}\frac{1}{h_\alpha}\omega_\alpha,$$
$$\omega_{ij} = \Gamma_{ijl}\omega_l,$$

то соотношение (10.172) можно записать в виде

$$Da_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial u_\alpha}\frac{1}{h_\alpha} - a_{kj}\Gamma_{ik\alpha} - a_{ik}\Gamma_{ik\alpha}\right)\omega_\alpha.$$

Обозначив выражение, которое стоит в скобках, через $a_{ij,\alpha}$:

$$a_{ij,\alpha} = \frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial a_{ij}}{\partial u_\alpha} - a_{kj}\Gamma_{ik\alpha} - a_{ik}\Gamma_{jk\alpha}, \qquad (10.173)$$

получим

$$Da_{ij} = a_{ij,l}\omega_l. \qquad (10.174)$$

Отсюда ясно, что величины $a_{ij,l}$ образуют тензорное поле валентности три, называемое *абсолютной производной тензорного поля* a_{ij}.

Таким образом, абсолютный дифференциал и абсолютная производная тензорного поля второй валентности образуют тензорные поля соответственно второй и третьей валентности и вычисляются по формулам (10.172) и (10.174).

Совершенно аналогично тому, как введены абсолютный дифференциал и абсолютная производная тензорного поля второй валентности, можно ввести абсолютный дифференциал и абсолютную производную тензорного поля валентности p (p>2) (для этого придется использовать уже не билинейные, а полилинейные формы). Аналогично окажется, что абсолютный дифференциал такого поля образует тензор той же валентности, а абсолютная производная - тензор на единицу большей валентности.

Формулы для их вычисления будут иметь вид, аналогичный формулам (10.163), (10.172) и (10.165), (10.173). Например, для тензора четвертой валентности a_{ijkl} абсолютный дифференциал и абсолютная производная находятся по формулам

$$\left.\begin{aligned} Da_{ijkl} &= da_{ijkl} - a_{mjkl}\omega_{im} - a_{imkl}\omega_{jm} - \\ &\qquad - a_{ijml}\omega_{km} - a_{ijkm}\omega_{lm}, \\ a_{ijkl,\alpha} &= \frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial a_{ijkl}}{\partial u_\alpha} - a_{mjkl}\Gamma_{im\alpha} - a_{imkl}\Gamma_{jm\alpha} - \\ &\qquad - a_{ijml}\Gamma_{km\alpha} - a_{ijkm}\Gamma_{lm\alpha}. \end{aligned}\right\} \quad (10.175)$$

4. Установим теперь правила абсолютного дифференцирования, т.е. определим, как находятся абсолютные дифференциалы и абсолютные производные от суммы тензоров, от произведения тензоров, от свернутого тензора и от свернутого произведения тензоров. Для простоты мы выведем эти правила на примерах тензоров небольших валентностей - вывод в общем случае будет точно таким же.

а) **Абсолютное дифференцирование суммы тензоров**. Пусть дано тензорное поле второй валентности c_{ij}, которое является суммой двух тензорных полей a_{ij} и b_{ij} той же валентности:

$$c_{ij}(M) = a_{ij}(M) + b_{ij}(M).$$

Продифференцируем это равенство обычным способом:

$$dc_{ij} = da_{ij} + db_{ij}.$$

Отсюда, пользуясь формулой (10.172), получим

$$\begin{aligned} Dc_{ij} + c_{kj}\omega_{ik} + c_{ik}\omega_{jk} &= \\ = Da_{ij} + a_{kj}\omega_{ik} + a_{ik}\omega_{jk} &+ Db_{ij} + b_{kj}\omega_{ik} + b_{ik}\omega_{kj} \end{aligned}$$

или, используя, что $c_{ij}=a_{ij} + b_{ij}$, найдем

$$D(a_{ij} + b_{ij}) = Da_{ij} + Db_{ij}.$$

Таким образом, *абсолютный дифференциал суммы тензоров равен сумме абсолютных дифференциалов слагаемых.*

б) **Абсолютное дифференцирование произведения тензоров**. Пусть теперь

$$c_{ijk}(M) = a_{ij}(M)b_k(M).$$

Дифференцируем это равенство:

$$dc_{ijk} = b_k\, da_{ij} + a_{ij}db_k;$$

отсюда, пользуясь формулами для абсолютных дифференциалов Dc_{ijk}, Da_{ij}, Db_k будем иметь

$$Dc_{ijk} + c_{ljk}\omega_{il} + c_{ilk}\omega_{jl} + c_{ijl}\omega_{kl} = \\ = b_k(Da_{ij} + a_{lj}\omega_{il} + a_{il}\omega_{jl}) + a_{ij}(Db_k + b_l\omega_{kl})$$

откуда, используя равенство $c_{ijk} = a_{ij}b_k$, получаем

$$D\,(a_{ij}b_k) = b_k\, Da_{ij} + a_{ij}\, Db_k.$$

Таким образом, *абсолютный дифференциал произведения тензоров равен абсолютному дифференциалу первого множителя, умноженного на второй множитель, плюс произведение первого множителя на абсолютный дифференциал второго*.

в) **Абсолютное дифференцирование свернутого тензора**. Пусть тензор a_{ijk} свернут по первый двум индексам:

$$c_k(M) = a_{iik}\,(M).$$

Продифференцируем это равенство:

$$dc_k = a_{iik},$$

отсюда, пользуясь выражениями для Dc_k и Da_{iik}, найдем

$$Dc_k + c_l\omega_{kl} = Da_{iik} + a_{lik}\omega_{il} + a_{ilk}\omega_{il} + a_{iil}\omega_{kl}.$$

Последние слагаемые в левой и правой частях этого соотношения равны, так как $c_l = a_{iil}$. Кроме того,

$$a_{lik}\omega_{il} + a_{ilk}\omega_{il} = a_{lik}\omega_{il} + a_{lik}\omega_{li} = a_{lik}(\omega_{il} + \omega_{li}) \equiv 0.$$

Поэтому

$$Dc_k = Da_{iik}$$

Это равенство можно записать еще таким образом:

$$D\sum_{i=1}^{3} a_{iik} = \sum_{i=1}^{3} Da_{iik},$$

т.е. *операции абсолютного дифференцирования и свертывания тензоров перестановочны*.

г) **Абсолютное дифференцирование свернутого произведения тензоров**. Пусть, наконец,

$$c_i = a_{ij}b_j.$$

Тогда, пользуясь правилом абсолютного дифференцирования свернутого тензора и произведения тензоров, найдем

$$Dc_i = D\sum_{j=1}^{3} a_{ij}b_j = \sum_{j=1}^{3} D(a_{ij}b_j) = \sum_{j=1}^{3}(b_j Da_{ij} + a_{ij}Db_j),$$

т.е. *правило дифференцирования произведения тензоров сохраняется и при наличии свертывания перемножаемых тензоров.*

Полученные здесь правила абсолютного дифференцирования автоматически переносятся и на абсолютные производные:

$$(a_{ij} + b_{ij})_{,\,l} = a_{ij,\,l} + b_{ij,\,l},$$

$$(a_{ij}b_k)_{,\,l} = a_{ij,\,l}b_k + a_{ij}b_{k,\,l},$$

$$\left(\sum_{i=1}^{3} a_{iik}\right)_{,\,l} = \sum_{i=1}^{3} a_{iik,\,l},$$

$$\left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}b_j\right)_{,\,l} = \sum_{j=1}^{3}(a_{ij,\,l}b_j + a_{ij}b_{j,\,l}).$$

Доказательство всех этих формул протекает аналогично. Докажем какую-нибудь одну из них, например вторую. В формуле

$$D(a_{ij}b_k) = b_k Da_{ij} + a_{ij}Db_k$$

заменим абсолютные дифференциалы Da_{ij} Db_k и $D(a_{ij}b_k)$ по формулам (10.174), (10.166) и аналогичной формуле для абсолютного дифференциала трехвалентного тензора $a_{ij}b_k$, тогда получим

$$(a_{ij}b_k)_{,\,l}\,\omega_l = b_k a_{ij,\,l}\,\omega_l + a_{ij}b_{k,\,l}\,\omega_l.$$

Так как формы ω_l линейно независимы, то коэффициенты при ω_l в правой и левой частях последнего соотношения будут равны, что приведет нас к доказываемой формуле:

$$(a_{ij}b_k)_{,\,l} = a_{ij,\,l}b_k + a_{ij}b_{k,\,l}.$$

Таким образом, мы видим, что операция абсолютного дифференцирования тензоров имеет все свойства обычного дифференцирования. Этого, конечно, и следовало ожидать, так как абсолютное дифференцирование - инвариантная операция, которая не зависит от выбора криволинейной ортогональной системы координат. А в прямоугольных декартовых координатах абсолютное дифференцирование совпадает с обычным дифференцированием тензоров.

5. Как мы уже отмечали выше, абсолютные производные скалярного и векторного полей при переходе к прямоугольной

декартовой системые координат совпадают с обычными производными этих полей. Это утверждение остается верным и для абсолютных производных тензорного поля любой валентности, которая сразу следует из формул типа (10.175), если учесть, что в прямоугольных координатах h_i=1, Γ_{ijk} = 0. Именно поэтому для обыкновенных производных тензорного поля, заданного в прямоугольной декартовой системе координат, в п. 10.8 использовались те же самые обозначения, что и в этом пункте для абсолютных производных тензорного поля, заданного в произвольной криволинейной ортогональной системе координат.

Теперь ясно, что все тензорные уравнения, записанные в прямоугольной декартовой системе координат и содержащие обычные производные тензорного поля, при переходе к ортогональным криволинейным координатам перейдут в точно такие же уравнения, в которых вместо обычных производных будут стоять абсолютные производные.

В частности, полученные в п. 10.9 уравнения механики сплошных сред будут справедливыми не только в прямоугольной системе координат, в которой они были выведены, но также и в произвольной ортогональной криволинейной системе координат. При этом входящие в них обыкновенные производные надо заменить абсолютными производными.

Микромодуль 26

Идивидуальные тестовые задачи

1. Найти экстремумы следующих функций от двух и трех переменных:

а) $u = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3ax_1 - 3bx_2$;

б) $u = x_1^4 + x_2^4 - 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2$;

в) $u = e^{-x_1^2 - x_2^2}(ax_1^2 + bx_2^2)$, $a > 0$, $b > 0$;

г) $u = \cos x_1 \cos x_2 \cos(x_1 + x_2)$, $0 \leqslant x_1 \leqslant \pi$, $0 \leqslant x_2 \leqslant \pi$;

д) $u = x_1x_2x_3(4a - x_1 - x_2 - x_3)$;

е) $u = \dfrac{x_1}{x_2 + x_3} + \dfrac{x_2}{x_1 + x_3} + \dfrac{x_3}{x_1 + x_2}$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$;

ж) $u = (ax_1 + bx_2 + cx_3)e^{-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$,

2. Доказать следующие формулы:

а) $\operatorname{grad}(\varphi+\psi)=\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{grad}\psi$, $\operatorname{div}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\operatorname{div}\boldsymbol{b}$, $\Delta(\varphi+\psi)=\Delta\varphi+\Delta\psi$, $\operatorname{rot}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\operatorname{rot}\boldsymbol{a}+\operatorname{rot}\boldsymbol{b}$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=$ $=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}+\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}$;

б) $\operatorname{grad}(\varphi\psi)=\varphi\operatorname{grad}\psi+\psi\operatorname{grad}\varphi$, $\operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{a})=\varphi\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\operatorname{grad}\varphi$, $\operatorname{rot}(\varphi\boldsymbol{a})=\varphi\operatorname{rot}\boldsymbol{a}+\operatorname{grad}\varphi\times\boldsymbol{a}$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=0$, $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi=0$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a}-\Delta\boldsymbol{a}$,

где последнее слагаемое означает вектор, координаты которого получаются применением оператора Лапласа к соответствующим координатам вектора ***a;***

г) $\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}$, $\operatorname{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\operatorname{div}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a}+$ $+\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{a}$, $\operatorname{grad}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — линейные преобразования с матрицами $(a_{i,k})$ и $(b_{i,k})$;

д) $\operatorname{grad}\varphi\,[f(\boldsymbol{r})]=\dfrac{\partial\varphi}{\partial f}\operatorname{grad} f$,

3. Пусть $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x_i e_i}$, $r=\sqrt{x_i x_i}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c_1}$, $\boldsymbol{c_2}$ — постоянные векторные поля и α - константа. Доказать, что

а) $\operatorname{grad} r=\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$, $\operatorname{grad} r^n=nr^{n-2}\boldsymbol{r}$, $\operatorname{grad}\dfrac{\alpha}{r}=-\dfrac{\alpha}{r^3}\boldsymbol{r}$, $\operatorname{grad}(\boldsymbol{c}\boldsymbol{r})=\boldsymbol{c}$, $\operatorname{grad}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})^2=2\boldsymbol{r}c^2-2\boldsymbol{c}(\boldsymbol{c}\boldsymbol{r})$;

б) $\operatorname{div}(\alpha\boldsymbol{r})=3\alpha$, $\operatorname{div}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})=0$, $\operatorname{div}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}=\dfrac{2}{r}$, $\operatorname{div}(\boldsymbol{c}r)=\dfrac{\boldsymbol{c}\boldsymbol{r}}{r}$, $\operatorname{div}(\boldsymbol{c}r^2)=2\boldsymbol{c}\boldsymbol{r}$, $\operatorname{div}(r^4\cdot\boldsymbol{r})=r^4$, $\operatorname{div}[\boldsymbol{c}_2(\boldsymbol{r}\boldsymbol{c}_1)]=\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2$, $\operatorname{div}[\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{c})]=$ $=4\boldsymbol{r}\boldsymbol{c}$, $\operatorname{div}[\boldsymbol{r}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})]=0$, $\operatorname{div}[\boldsymbol{c}_1\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{c}_2)]=2\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2$, $\operatorname{div}[\boldsymbol{r}\varphi(r)]=$ $=3\varphi+r\varphi'$;

в) $\operatorname{rot}\boldsymbol{r}=0$, $\operatorname{rot}[\boldsymbol{r}(\boldsymbol{c}\boldsymbol{r})]=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r}$, $\operatorname{rot}[\boldsymbol{c}_2(\boldsymbol{r}\boldsymbol{c}_1)]=\boldsymbol{c}_1\times\boldsymbol{c}_2$, $\operatorname{rot}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})=$ $=2\boldsymbol{c}$, $\operatorname{rot}(\boldsymbol{r}c)=\dfrac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{c}}{r}$, $\operatorname{rot}[\boldsymbol{r}\varphi(r)]=0$.

4. а) Воспользовавшись тем, что эллипс $r_1+r_2=2a$ есть линия уровня функции $\varphi=r_1+r_2$, где r_1 и r_2 расстояния переменной точки M эллипса к его фокусам F_1 и F_2, доказать, что углы наклона прямых F_1M и F_2M к касательной эллипса в точке M равны.

б) Решить аналогичную задачу для гиперболы $r_1-r_2=2a$ и параболы $r-x=p$, фокус которой помещен в начале координат.

5. Найти дивергенцию и ротор поля скоростей $\boldsymbol{v}$ и ускорений $\boldsymbol{w}$ твердого тела, которое вврашается вокруг недвижимой оси, если известно, что:

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r},\qquad \boldsymbol{w}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}),$$

где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{\omega}$ - постоянные векторы.

6. Доказать, что векторное поле

$$\boldsymbol{a}=x_1x_2^2x_3^2\boldsymbol{e}_1+x_1^2x_2x_3^2\boldsymbol{e}_2+x_1^2x_2^2x_3\boldsymbol{e}_3$$

является безвихревым.

Векторное поле ***a*** *(M)* называется *потенциальным* в области *V,* если в этой области существует такое скалярное поле φ, что ***a***= grad φ.

7. Доказать, что

а) всякое потенциальное поле является безвихревым;

б) всякое безвихревое поле является потенциальным.

8. Доказать, что div(***a*** × ***b***) = 0, если ***a*** и ***b*** — потенциальные векторные поля.

9. Показать, что гармоническое поле одновременно является и потенциальным и соленоидальным.

10. Доказать, что следующие функции являются гармоническими:

а) $u=a_i x_i+a$;

б) $u=a\,(x_1^2-x_2^2)$;

в) $u=a\left(x_1^2-\frac{1}{2}x_2^2-\frac{1}{2}x_3^2\right)$;

г) $u=ax_1x_2x_3$;

д) $u=\frac{1}{r}$, где $r=\sqrt{x_i x_i}$, $i=1,\ 2,\ 3$;

е) $u=\ln\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, где $x_1^2+x_2^2\neq 0$.

11. Доказать, что уравнения движения сплошной среды могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_{i,k}v_k=F_i+\frac{1}{\rho}\sigma_{ik,k}.$$

Сплошная среда называется *идеальной жидкостью,* если для нее тензор напряжений является нулевым тензором: $\sigma_{ij}= - p\delta_{ij}$, где *p=p(M,t)* -давление жидкости.

12. Доказать, что уравненич движения идеальной жидкости могут быть записаны в следующих формах:

$$\text{а)}\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}=F_i-\frac{\partial v_i}{\partial t}-v_{i,k}v_k;$$

$$\text{б)}\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}=F_i-\frac{\partial v_i}{\partial t}+\varepsilon_{ijk}v_jz_k-\frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial x_i},$$

где $z=(z_k e_k)$=rot ***v***, $v=|\boldsymbol{v}|$

в) для однородной несжимаемой жидкости, которая определяется условием $\rho=c$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}v^2\right)=F_i-\frac{\partial v_i}{\partial t}+\varepsilon_{ijk}v_jz_k;$$

г) для однородной несжимаемой жидкости в потенциальном силовом поле *F*= — grad *U*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}v^2+U\right)=-\frac{\partial v_i}{\partial t}+\varepsilon_{ijk}v_j z_k;$$

д) для безвихревого движения однородной несжимаемой жидкости в потенциальном силовом поле

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}v^2+U,$$

где φ -потенциал векторного поля $\boldsymbol{v}$, так что grad φ =— $\boldsymbol{v}$ (см. задачу 7).

13. Учитывая соотношение

$$\sigma_{ij}=\lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}+2\mu\varepsilon_{ii},$$

которое связывает тензоры деформации и напряжений упругой изотропной среды, доказать, что уравнение движения такой среды в случае его однородности (λ, μ -постоянные) записываются в виде

$$\rho\frac{dv_i}{dt}=\rho F_i+[(\lambda+\mu)\,v_{k,ki}+\mu v_{i,kk}].$$

Сплошная среда называется *вязкой жидкостью,* если ее тензор напряжений имеет вид

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+\sigma'_{ij},$$

где σ'_{ij} — вязкий тензор напряжения, которое удовлетворяет условию $\sigma'_{ii}=0$.

14. Доказать, что уравнение движения вязкой жидкости имеет вид

$$\rho\frac{dv_i}{dt}=\rho F_i-\frac{\partial\rho}{\partial x_i}+\sigma'_{ik,k}.$$

15. Ввести систему криволинейных координат на плоскости E_2 аналогично тому, как это сделано в тексте для пространства E_3.

16. Установить формулы, которые выражают криволинейные координаты точки плоскости E_2 через прямоугольные декартовы и обратно, найти координатные линии, подсчитать определитель

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2}\\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2}\end{vmatrix}$$

и выяснить, в каких точках плоскости E_2 нарушается взаимная однозначность соответствия между криволинейными и прямоугольными декартовыми координатами точки на плоскости для следующих криволинейных систем координат u_1, u_2:

а) для полярной системы координат, которая определяется равенством (для краткости часто криволинейные координаты на плоскости задают в комплексной форме, из которой легко найти выражение декартовых координат x_1, x_2 через криволинейные координаты u_1 и u_2, если приравнять между собой соответственно действительные и мнимые части основного равенства).

$$x_1+ix_2=u_1e^{iu_2} \qquad (0\leqslant u_1<\infty, \qquad -\pi<u_2\leqslant\pi);$$

б) для обобщенной полярной системы координат, которая определяется равенством

$$\frac{x_1}{a_1}+i\,\frac{x_2}{a_2}=u_1e^{iu_2}\ (0\leqslant u_1<\infty, \quad -\pi<u_2\leqslant\pi, \quad a_1>0, \quad a_2>0);$$

в) для эллиптической системы координат, которая определяется равенством

$$x_1+ix_2=\operatorname{ch}(u_1+iu_2) \qquad (0\leqslant u_1<\infty, \quad -\pi<u_2\leqslant\pi);$$

г) для параболической системы координат, которая определяется равенством

$$x_1+ix_2=\frac{1}{2}(u_1+iu_2)^2 \qquad (-\infty<u_1<\infty, \qquad 0\leqslant u_2<\infty);$$

д) для биполярной системы координат, которая определяется равенством

$$x_1+ix_2=\operatorname{th}\frac{u_1+iu_2}{2} \qquad (-\infty<u_1<\infty, \quad -\pi<u_2\leqslant\pi).$$

17. Найти координатные поверхности и координатные линии, подсчитать определитель

$$\left|\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\right|$$

и установить, в каких точках пространства E_3 нарушается взаимная однозначность соответствия между криволинейными и прямоугольными декартовыми координатами для следующих криволинейных систем координат u_1, u_2, u_3 пространства E_3:

а) для обобщенной цилиндрической системы координат, которая определяется равенствами

$$x_1=a_1u_1\cos u_2, \qquad x_2=a_2u_1\sin u_2, \qquad x_3=u_3$$
$$(u_1\geqslant 0, \quad 0<u_2\leqslant 2\pi, \quad -\infty<u_3<\infty, \quad a_1>0, \quad a_2>0);$$

б) для обобщенной сферической системы координат, которая определяется равенствами

$$x_1=a_1u_1\sin u_2\cos u_3, \qquad x_2=a_2u_1\sin u_2\sin u_3, \qquad x_3=a_3u_1\cos u_2$$
$$(u_1\geqslant 0, \quad 0\leqslant u_2\leqslant\pi, \quad 0\leqslant u_3<2\pi, \quad a_1>0, \quad a_2>0, \quad a_3>0);$$

в) для эллипсоидальной системы координат, которая определяется равенствами

$$x_1^2 = \frac{(a_1 - u_1)(a_1 - u_2)(a_1 - u_3)}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)},$$
$$x_2^2 = \frac{(a_2 - u_1)(a_2 - u_2)(a_2 - u_3)}{(a_3 - a_2)(a_1 - a_2)},$$
$$x_3^2 = \frac{(a_3 - u_1)(a_3 - u_2)(a_3 - u_3)}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)},$$

г) для параболической системы координат, которая определяется равенствами

$$x_1 = u_1 u_2 \cos u_3, \quad x_2 = u_1 u_2 \sin u_3 \quad x_3 = \frac{1}{2}(u_1^2 - u_2^2)$$
$$(0 \leqslant u_1 < \infty, \quad 0 \leqslant u_2 < \infty, \quad -\pi < u_3 \leqslant \pi);$$

д) для системы вырожденнных эллипсоидальных координат, которые определяются равенствами

$$x_1 = \operatorname{sh} u_1 \sin u_2 \cos u_3, \quad x_2 = \operatorname{sh} u_1 \sin u_2 \sin u_3, \quad x_3 = \operatorname{ch} u_1 \cos u_2$$
$$(0 \leqslant u_1 < \infty, \quad 0 \leqslant u_2 \leqslant \pi, \quad -\pi < u_3 \leqslant \pi)$$

или равенствами

$$x_1 = \operatorname{ch} u_1 \sin u_2 \cos u_3, \quad x_2 = \operatorname{ch} u_1 \sin u_2 \sin u_3, \quad x_3 = \operatorname{sh} u_1 \cos u_2$$
$$(0 \leqslant u_1 < \infty, \quad 0 \leqslant u_2 \leqslant \pi, \quad -\pi < u_3 \leqslant \pi)$$

в зависимости от того, будет ли эллипсоид вращения вытянутым или сплюснутым;

е) для системы тороидальных координат, которая определяется равенствами

$$x_1 = \frac{\operatorname{sh} u_1 \cos u_3}{\operatorname{ch} u_1 - \cos u_2}, \quad x_2 = \frac{\operatorname{sh} u_1 \sin u_3}{\operatorname{ch} u_1 - \cos u_2}, \quad x_3 = \frac{\sin u_2}{\operatorname{ch} u_1 - \cos u_2}$$
$$(0 \leqslant u_1 < \infty, \quad -\pi < u_2 \leqslant \pi, \quad -\pi < u_3 \leqslant \pi).$$

18. Выяснить, какие из систем криволинейных координат, которые определены в задачах 16 и 17, будут ортогональными.

19. Найти величины h_i, ω_u, ω_{ij}, Γ_{ijk} в криволинейных ортогональных системах координат, указанных в задачах 16 а) -д) и 17 в) -е).

20. а) Доказать формулу (10.156) непосредственно, используя (10.155) и то, что $\omega_{u'} = \boldsymbol{e}_{i'} d\boldsymbol{M}$, $\omega_u = \boldsymbol{e}_i d\boldsymbol{M}$.

б) Доказать формулы (10.157) и (10.159) непосредственно, используя (10.147), (10.149), (10.154) и то, что

$$\omega_{i'j'} = e_{i'} de_{j'}, \quad \omega_{ij} = e_i de_j.$$

21. Найти выражение компонент $\gamma_{i'i}(M)$ матрицы, определяющей переход от подвижного репера криволинейной системы координат (u_1, u_2, u_3) к подвижному реперу новой системы координат ($u_{1'}$, $u_{2'}$, $u_{3'}$), через частные производные

$$\frac{\partial u_{i'}}{\partial u_i}$$

и коэффициенты Ламе обеих систем.

22. Найти выражения величин $\gamma_{i'j,l}$, входящих в формулы (10.158), через вторые производные от новых координат по старым и коэффициенты Ламе (см. предыдущую задачу).

23. Используя результаты задачи 19, найти выражения для градиента скалярного поля, дивергенции и ротора векторного поля, а также оператора Лапласа в ортогональных криволинейных системах координат, рассмотренных в задачах 16 а) -д) и 17 а)-е).

24. Используя равенство

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,u_i = \mathbf{0}$$

(почему оно верно?), вывести формулу

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{e}_\alpha = \frac{1}{h_\alpha}\,\mathrm{grad}\,h_\alpha \times \boldsymbol{e}_\alpha,$$

а из нее получить формулу (10.170).

25. Используя равенство

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{e}_i = \mathrm{div}\,(\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{e}_k\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_j\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{e}_k$$

(см. задачу 2 г), где индексы *i, j, k* различны и $\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{e}_j$, $\boldsymbol{e}_k$ образуют правую тройку, вывести формулу

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{e}_i = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\,\frac{\partial (h_j h_k)}{\partial u_i} \quad (i \neq j,\; j \neq k,\; k \neq i),$$

а из нее получить формулу (10.168).

26. Доказать равенства

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\alpha}{\partial u_j} = \frac{\boldsymbol{e}_j}{h_\alpha}\,\frac{\partial h_k}{\partial u_\alpha} \quad (\alpha \neq j,\; j \neq k,\; k \neq \alpha),$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\alpha}{\partial u_\alpha} = -\sum_{i \neq \alpha} \frac{1}{h_i}\,\frac{\partial h_\alpha}{\partial u_i}\,\boldsymbol{e}_i.$$

27. Векторное поле ***a*** в сферических координатах имеет компоненты

$$a_1 = \frac{2k\cos u_2}{u_1^3}, \quad a_2 = \frac{k\sin u_2}{u_1^3}, \quad a_3 = 0.$$

Доказать, что это поле потенциально и соленоидально, и найти его потенциал.

28. Найти решение уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = 0$$

записанного в сферических координатах, если функция φ зависит от одной сферической координаты u_1, u_2 или u_3. Рассмотреть все три случая.

29. а) Найти $a_{ij,k}$, $a_{ij,j}$, $a_{ji,j}$.

б) Найти $\delta_{ij,k}$ и $(x_i y_i)_{,k}$, где x_i, y_i — координаты векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в некоторой криволинейной системе координат.

в) Доказхать формулу

$$x_{,i} = \frac{x_{j,i} x_j}{x},$$

где $x = |\boldsymbol{x}|$ и x_i -координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в некоторой криволинейной системе координат.

30. Записать уравнение неразрывности и уравнение движения деформируемой среды в цилиндрических и сферических координатах.

Приложение

Использование тензорного исчисления к вопросам механики и физики

1. Тензор инерции

1. Рассмотрим движение твердого тела $(\mathscr{K})$, закрепленного в одной точке, которую мы обозначим буквой O и примем за начало координат. В каждый момент времени движение этого тела можно рассматривать как вращение с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг некоторой оси, проходящей через точку O. Линейная скорость точки M этого тела, определяемой радиусом-вектором $\overline{OM} = \boldsymbol{x}$, как известно из механики, будет вычисляться по формуле

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}.$$

Найдем кинетическую энергию рассматриваемого тела. Для этого выделим элемент тела в окрестности точки M. Кинетическая энергия этого элемента будет равна

$$dT = \frac{1}{2} \boldsymbol{v}^2\, dm.$$

Поэтому кинетическая энергия всего тела может быть найдена в виде

$$T = \frac{1}{2} \int\limits_{(\mathscr{K})} \boldsymbol{v}^2\, dm, .$$

или в виде

$$T = \frac{1}{2} \int\limits_{(\mathscr{K})} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x})^2 \, dm, \tag{1}$$

где интегрирование ведется по всему телу $(\mathscr{K})$ (если тело трехмерное, то интеграл будет тройным; если тело представляет собой кусок поверхности, то интегрирование будет вестись по этой поверхности; если тело представляет собой некоторую линию, то интеграл будет криволинейным, и, наконец, если тело состоит из конечного числа точечных масс, интеграл превратится в простую сумму).

Преобразуем теперь подынтегральное выражение. Имеем

$$(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x})^2 = \boldsymbol{\omega}^2 \boldsymbol{x}^2 - (\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{x})^2.$$

Пусть $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ — неподвижный базис с началом в точке O. Запишем разложения векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{x}$ по этому базису в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_i \boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{x} = x_j \boldsymbol{e}_i.$$

Тогда выражения $\boldsymbol{\omega}^2$, $\boldsymbol{x}^2$ и $\boldsymbol{\omega x}$ могут быть записаны так:

$$\boldsymbol{\omega}^2 = \delta_{ij} \omega_i \omega_j, \qquad \boldsymbol{x}^2 = \delta_{kl} x_k x_l,$$
$$\boldsymbol{\omega x} = \delta_{ik} \omega_i x_k = \delta_{jl} \omega_j x_l.$$

Поэтому выражение для $(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x})^2$ принимает вид

$$(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x})^2 = (\delta_{ij} \omega_i \omega_j)(\delta_{kl} x_k x_l) - (\delta_{ik} \omega_i x_k)(\delta_{jl} \omega_j x_l) =$$
$$= (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{ik} \delta_{jl}) \, \omega_i \omega_j x_k x_l.$$

Подставим это выражение в интеграл (1). Здесь переменными интегрирования являются координаты x_k вектора $\boldsymbol{x}$, а координаты вектора $\boldsymbol{\omega}$ следует считать постоянными. Поэтому их можно вынести из-под знака интеграла и записать равенство (1) следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{ik} \delta_{jl}) \, \omega_i \omega_j \int\limits_{(\mathscr{K})} x_k x_l \, dm.$$

Это выражение не зависит от координат вектора $\boldsymbol{x}$, так как по ним производится интегрирование, а зависит только от координат вектора $\boldsymbol{\omega}$. Кинетическая энергия T представляет собой квадратичную форму относительно координат этого вектора. Ее коэффициенты образуют симметричный тензор второй валентности. Этот тензор, умноженный на два, называют *тензором инерции* тела $(\mathscr{K})$. Если обозначить компоненты тензора инерции через I_{ij} то получим для них следующее выражение:

$$I_{ij} = (\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl}) \int\limits_{(\mathcal{K})} x_k x_l \, dm. \qquad (2)$$

Кинетическая энергия вращающегося тела запишется теперь в виде

$$T = \frac{1}{2} I_{ij}\omega_i\omega_j, \qquad (3)$$

или в виде

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{I} \boldsymbol{\omega},$$

где через ***I*** обозначен симметричный линейный оператор, порожденный тензором I_{ij}.

Простой подсчет показывает, что формулы (2) для вычисления компонент тензора инерции I_{ij} могут быть переписаны следующим образом:

$$I_{11} = \int\limits_{(\mathcal{K})} (x_2^2 + x_3^2)\, dm, \qquad I_{23} = I_{32} = -\int\limits_{(\mathcal{K})} x_2 x_3 \, dm,$$

$$I_{22} = \int\limits_{(\mathcal{K})} (x_1^2 + x_3^2)\, dm, \qquad I_{31} = I_{13} = -\int\limits_{(\mathcal{K})} x_1 x_3 \, dm,$$

$$I_{33} = \int\limits_{(\mathcal{K})} (x_2^2 + x_1^2)\, dm, \qquad I_{12} = I_{21} = -\int\limits_{(\mathcal{K})} x_1 x_2 \, dm.$$

Величины I_{11}, I_{22}, I_{33} являются *моментами инерции* тела $(\mathcal{K})$ относительно осей Ox_1, Ox_2, Ox_3. Величины I_{12}, I_{23}, I_{31} носят название *полярных моментов инерции.*

2. Найдем величину момента инерции тела относительно любой оси, проходящей через точку *O*. Рассмотрим ось, проходящую через точку *O,* определяемую единичным вектором *p* (рис. 1).

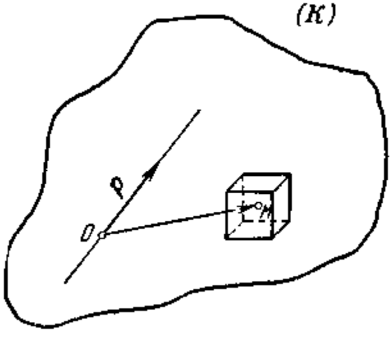


Рис. 1.

Пусть снова M — произвольная точка тела $(\mathcal{K})$, определяемая радиусом-вектором $\boldsymbol{x} = \overline{OM}$, и dm — элемент массы, сосредоточенной в окрестности точки M. Момент инерции этого элемента относительно оси $O\boldsymbol{p}$ будет равен

$$dI = \rho^2\, dm,$$

где ρ — расстояние от точки M до оси $O\boldsymbol{p}$. Но, как известно, это расстояние можег быть вычислено по формуле

$$\rho = \frac{|\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{x}|}{|\boldsymbol{p}|}$$

или, так как $|\boldsymbol{p}| = 1$, по формуле

$$\rho = |\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{x}|.$$

Следовательно,

$$dI = (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{x})^2\, dm,$$

и момент инерции тела $(\mathcal{K})$ относительно оси $O\boldsymbol{p}$ определится так:

$$I = \int\limits_{(\mathcal{K})} (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{x})^2\, dm. \quad (4)$$

Сравним полученное выражение для момента инерции I с формулой (1) для кинетической энергии T тела $(\mathcal{K})$. Это выражение для I получается из формулы (1) отбрасыванием множителя 1/2 и заменой вектора $\boldsymbol{\omega}$ на вектором $\boldsymbol{p} = p_i \boldsymbol{e}_i$. Поэтому и окончательное выражение для момента инерции I получится из выражения (3) для кинетической энергии T путем такой же замены и будет иметь вид

$$I = I_{ij} p_i p_j. \qquad (5)$$

Эта формула показывает, чю *момент инерции тела относительно произвольной оси, проходящей через точку О, определяется только при помощи тензора инерции этого тела.*

3. Как и всякий симметричный тензор второй валентности, тензор инерции может быть приведен к диагональному виду путем ортогонального преобразования базиса. Оси Ox^0_i, определяемые точкой O и собственными векторами $\boldsymbol{e}^0_i$ тензора инерции, называются *главными осями инерции* тела $(\mathcal{K})$. Собственные значения I_i тензора инерции являются моментами инерции тела $(\mathcal{K})$ относительно главных осей инерции. Поэтому они удовлетворяют условию $I_i > 0$. Они называются *главными моментами инерции.*

Полярные моменты инерции I_{ij} $(i \neq j)$ тела $(\mathscr{K})$, вычисленные в базисе $\{e_i^0\}$, будут равны нулю. Поэтому выражение для кинетической энергии тела $(\mathscr{K})$ примет в этом базисе вид

$$T = \frac{1}{2}\left[I_1(\omega_1^0)^2 + I_2(\omega_2^0)^2 + I_3(\omega_3^0)^2\right];$$

здесь ω_i^0 —координаты вектора $\boldsymbol{\omega}$ относительно базиса $\{e_i^0\}$. Так как I_i>0, то эта квадратичная форма является положительно определенной.

Тело, у которого все три главных момента инерции различны, называется *асимметричным волчком.* Если два главных момента инерции тела равны между собой, но не равны третьему, то тело называется *симметричным волчком.* При $I_1 = I_2 \neq I_3$ любая ось, проходящая через точку *О* и лежащая в плоскости векторов e_1^0, e_2^0, будет главной осью инерции. Если, наконец, все главные моменты инерции тела равны между собой, то тело называется *шаровым волчком.* В этом случае любая ось, проходящая через точку *О,* будет главной осью инерции тела.

Рассмотрим характеристическую поверхность второго порядка, определяемую тензором инерции I_{ij}. Ее уравнение записывается в виде

$$\boldsymbol{x}I\boldsymbol{x} = 1$$

или, в координатной форме, в виде,

$$I_{ij}x_ix_j = 1.$$

Так как собственные значения тензора I_{ij} положительны, то эта поверхность является эллипсоидом и называется *эллипсоидом инерции* данного тела. Оси симметрии этого эллипсоида совпадают с главными осями инерции тела $(\mathscr{K})$. Эллипсоид инерции позволяет геометрически найти величину момента инерции относительно произвольной оси, проходящей через точку *О.*

Действительно, если $\boldsymbol{x} = \overline{OM}$ —радиус-вектор точки *М* эллипсоида инерции, имеющей направление вектора $\boldsymbol{p}$, то

$$\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{p},$$

где $x = |\boldsymbol{x}|$, и

$$x_i = xp_i.$$

Поэтому

$$I = I_{ij}p_ip_j = \frac{I_{ij}x_ix_j}{|\boldsymbol{x}|^2} = \frac{1}{|\boldsymbol{x}|^2},$$

так как $I_{ij}x_ix_j = 1$. Таким образом, *момент инерции I относительно оси* ***Op*** *равен единице, деленной на квадрат расстояния* *от точки О до той точки М эллипсоида инерции, в которой ее пересекает прямая* $\boldsymbol{p}$.

4. Предположим, что точка *О* является центром инерции (центром массы) тела $(\mathscr{K})$, и найдем, как изменится тензор инерции тела при переходе от точки *О* к некоторой другой точке *О'*, определяемой радиусом-вектором $\overline{OO'} = \boldsymbol{a}$. Пусть *М* — произвольная точка тела и $\overline{OM} = \boldsymbol{x}$, $\overline{O'M} = \boldsymbol{x}'$.

Тогда

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$$

и момент инерции тела $(\mathscr{K})$ относительно оси $O'\boldsymbol{p}$, проходящей через точку *О'*, направление которой задается единичным вектором $\boldsymbol{p}$, определится по формуле, аналогичной формуле (4):

$$I' = \int\limits_{(\mathscr{K})} (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{x}')^2\, dm = \int\limits_{(\mathscr{K})} [\boldsymbol{p} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})]^2\, dm.$$

Это выражение может быть переписано в виде

$$I' = \int\limits_{(\mathscr{K})} (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{x})^2\, dm - 2(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{a})\Big(\boldsymbol{p} \times \int\limits_{(\mathscr{K})} \boldsymbol{x}\, dm\Big) + \\ + (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{a})^2 \int\limits_{(\mathscr{K})} dm$$

(здесь используется то, что при интегрировании векторных выражений остаются справедливыми хорошо известные из анализа свойства определенного интеграла). Но так как *О* — центр инерции тела, то

$$\int\limits_{(\mathscr{K})} \boldsymbol{x}\, dm = 0$$

и, кроме того,

$$\int\limits_{(\mathscr{K})} dm = m,$$

где через *m* обозначена масса тела $(\mathscr{K})$. Поэтому выражение для *I'* принимает вид

$$I' = \int\limits_{(\mathscr{K})} (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{x})^2\, dm + m(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{a})^2$$

или

$$I' = I + m(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{a})^2.$$

Так как выражение $(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{a})^2$ равно квадрату расстояния от точки *О* до оси *O***p**, то это равенство выражает известную теорему Штейнера о том, что *момент инерции тела относительно произвольной оси равен моменту инерции этого тела относительно параллельной оси, проходящей через центр инерции тела, увеличенному на произведение массы тела на квадрат расстояния между осями.*

Пусть $\boldsymbol{p}=p_i\boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{a}=a_i\boldsymbol{e}_i$. Тогда $(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a})^2$ может быть преобразовано так:

$$(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{p}^2-(\boldsymbol{a}\boldsymbol{p})^2=(a^2\delta_{ij}-a_ia_j)\,p_ip_j.$$

Теперь, используя формулу (5), получим для момента инерции I' выражение

$$I'=[I_{ij}+m\,(a^2\delta_{ij}-a_ia_j)]\,p_ip_j.$$

Отсюда ясно, что при переходе от точки O к точке O' тензор инерции преобразуется следующим образом:

$$I'_{ij}=I_{ij}+m\,(a^2\delta_{ij}-a_ia_j).$$

Отнесем тензор I_{ij} к главным осям инерции. Тогда его матрица будет иметь вид

$$(I_{ij})=\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0\\ 0 & I_2 & 0\\ 0 & 0 & I_3\end{pmatrix}.$$

Компоненты тензора инерции I'_{ij} в этом случае будут:

$$\begin{aligned}
I'_{11}&=I_1+m\,(a_2^2+a_3^2),\\
I'_{22}&=I_2+m\,(a_1^2+a_3^2),\\
I'_{33}&=I_3+m\,(a_1^2+a_2^2),\\
I'_{ij}&=-ma_ia_j \quad \text{при} \quad i\neq j.
\end{aligned}$$

Эти формулы показывают, что главные оси тензора I_{ij}, вообще говоря, не совпадают с главными осями тензора I'_{ij}. Легко видеть, что *главные оси обоих тензоров совпадают тогда и только тогда, когда точка O' лежит на одной из главных осей инерции тела* $(\mathscr{K})$. В самом деле, пусть, например, точка O' лежит на оси $Oe^0{}_1$. Тогда $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1^0$ и $I'_{ij}=0$ при $i\neq j$. Обратно, если $I'_{ij}=0$ при $i\neq j$, то две из трех координат a_i должны быть равны нулю.

5. С тензором инерции тела связан его *момент импульса.* Пусть тело $(\mathscr{K})$ вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ относительно оси, проходящей через его произвольную точку *O.* Элемент массы *dm* этого тела, сосредоточенный в окрестности точки *M,* движется с линейной скоростью $\boldsymbol{v}$ и несет импульс, равный $\boldsymbol{v}dm$. Момент этого импульса

относительно точки O равен векторному произведению радиуса-вектора $\overline{OM} = \boldsymbol{x}$ точки M на этот импульс:

$$d\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v})\, dm.$$

А полный момент импульса тела $(\mathscr{K})$ относительно точки M находится интегрированием:

$$\boldsymbol{M} = \int\limits_{(\mathscr{K})} (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v})\, dm.$$

Но

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}.$$

Поэтому

$$\boldsymbol{M} = \int\limits_{(\mathscr{K})} [\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x})]\, dm. \qquad (6)$$

Это выражение показывает, что момент импульса $\boldsymbol{M}$ линейно зависит от вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Следовательно, векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{M}$ связаны некоторым линейным преобразованием. Покажем, что матрица этого линейного преобразования совпадает с тензором инерции тела $(\mathscr{K})$.

Для этого преобразуем подынтегральное выражение предыдущего интеграла, пользуясь выведенной ранее формулой для двойного векторного произведения:

$$\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{x}).$$

Если $\boldsymbol{x} = x_i \boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{\omega} = \omega_i \boldsymbol{e}_i$, то это равенство может быть записано в таком виде:

$$\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}) = (\delta_{ij}\omega_j\delta_{kl}x_k x_l - \delta_{ik}x_k\delta_{jl}\omega_j x_l)\,\boldsymbol{e}_i = \\ = (\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl})\,\omega_j x_k x_l \boldsymbol{e}_i.$$

Подставляя найденное выражение в интеграл (6), получим следующие формулы для вычисления координат M_i вектора $\boldsymbol{M}$:

$$M_i = (\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl})\,\omega_j \int\limits_{(\mathscr{K})} x_k x_l\, dm.$$

Сравнивая эти формулы с выражениями (2) для компонент тензора инерции, убеждаемся, что

$$M_i = I_{ij}\omega_j, \qquad (7)$$

что и требовалось доказать. Формулы (7) могут быть переписаны в виде

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega},$$

где $\boldsymbol{I}$—симметричный линейный оператор, соответствующий тензору I_{ij}.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти тензор инерции и эллипсоид инерции для следующих однородных сплошных тел, считая, что центр вращения совпадает с их центром инерции, а масса равна *m:*

а) тонкого стержня длины l;

б) диска радиуса R;

в) прямоугольной пластинки со сторонами a и b;

г) шара радиуса R;

д) круглого цилиндра радиуса R и высоты h,

е) прямоугольного параллелепипеда с ребрами a, b, с;

ж) трехосного эллипсоида с полуосями a, b, c.

2. Найти тензор инерции и эллипсоид инерции следующих тел, считая, что их масса равна *m:*

а) прямого кругового конуса радиуса R и высоты h, если его центр вращения совпадает с вершиной;

б) шара радиуса R, если его центр вращения лежит на поверхности шара;

в) кругового цилиндра радиуса R и высоты h, если его центр вращения совпадает с центром основания.

3. Найти тенчор и эллипсоид инерции для следующих молекул, рассматриваемых как системы частиц, находящихся на неизменном расстоянии друг от друга, причем их центр вращения предполагается совмещенным с центром инерции:

а) молекула состоит из n атомов массы m_α (α=1, ..., n), расположенных на одной прямой, так что расстояние между атомами α и β равно $l_{\alpha\beta}$;

б) молекула состоит из трех атомов, расположенных в виде равнобедренного треугольника ABC с основанием $BC=a$ и высотой h, атомы, расположенные в точках B и C, имеют массу m_1, а в точке A — массу m_2;

в) молекула состоит из четырех атомов одинаковой массы m, расположенных в вершинах правильного тетраэдра с ребром a.

4. Найти кинетическую энергию и момент импульса однородного прямоугольного параллелепипеда с ребрами a, b и с и массой m, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг одной из своих диагоналей

5. Найти кинетическую энергию и момент импульса однородного цилиндра радиуса R, высоты h и массы m, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг прямой, соединяющей его центр

инерции с одной из точек окружности, по которой его боковая поверхность пересекается с основанием.

2. Некоторые свойства кристаллов, связанные с тензорами второй валентности

1. Тензорное исчисление оказывается очень полезным при изучении свойств кристаллов. Это объясняется тем, что при описании многих явлений, таких, например, как электропроводность, теплопроводность, упругость, кристалл можно рассматривать как однородную сплошную среду, физические свойства которой во всех ее точках одинаковы. Физические свойства кристаллов определяют соотношения между физическими величинами, связанными с кристаллом или воздействующими на него. Естественно считать, что эти физические величины также являются однородными. Например, если изучают тепловые свойства кристалла, то считают, что температура (или градиент температуры) кристалла во всех его точках постоянна; при изучении его электрических свойств считают постоянной напряженность электрического поля; при изучении магнитных свойств — напряженность магнитного поля и т. д.

Различают два типа физических свойств кристалла. Физические свойства, относящиеся к первому типу, не зависят от направления в кристалле. К таким свойствам относятся, например, плотность и теплоемкость кристалла. В силу однородности кристалла эти свойства описываются постоянными скалярными величинами. Плотность, например, характеризует связь между массой и объемом. И так как масса и обьем не зависят от направления, то и плотность обладает этим свойством.

Физические свойства второго типа зависят от направления в кристалле. К таким свойствам относится, например, удельная электропроводность, связывающая напряженность электрического поля и плотность тока в кристалле. Говорят, что кристалл анизотропен по отношению к таким свойствам. Эта анизотропность кристалла по отношению к некоторым его свойствам связана с особенностями его молекулярного строения.

Свойства кристалла, зависящие от направления, могут быть описаны тензорами, если физические величины, воздействующие на кристалл, считать малыми. Покажем это на примере удельной электропроводности кристалла. Пусть ***E***— напряженность электрического тока и $\boldsymbol{j}$—плотность тока в кристалле, постоянные во всех его точках. Тогда $\boldsymbol{j}$ является функцией от $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}).$$

Если координаты векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{j}$ по отношению к ортонормированному базису $\{\boldsymbol{e}_i\}$ обозначить через E_i и j_i, то это соотношение может быть переписано в виде

$$j_i = f_i(E_k),$$

где f_i — функции, зависящие от трех аргументов $E_к$, которые можно считать непрерывными и дифференцируемыми функциями. Последнее обстоятельство вытекает из физического смысла функций f_i. Дадим вектору $\boldsymbol{E}$ приращение $\Delta\boldsymbol{E}$, одинаковое во всех точках кристалла, тогда вектор $\boldsymbol{j}$ получит приращение $\Delta\boldsymbol{j}$, также одинаковое во всех точках кристалла. Поскольку функции f_i дифференцируемы, это приращение может быть записано в виде

$$\Delta j_i = \frac{\partial f_i}{\partial E_k}\Delta E_k + \alpha_{ik}\Delta E_k,$$

где величины α_{ik} стремятся к нулю при $\Delta E_k \to 0$. Считая величины ΔE_k малыми, можно второе слагаемое этой суммы отбросить и написать

$$\Delta j_i = \frac{\partial f_i}{\partial E_k}\Delta E_k.$$

Так как ΔE_k и Δj_i- — координаты векторов, то частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial E_k}$ представляют собой компоненты тензора второй валентности:

$$\frac{\partial f_i}{\partial E_k} = \sigma_{ik}.$$

Тензор σ_{ik} называют *тензором удельной электропроводности.* Таким образом,

$$\Delta j_i = \sigma_{ik}\Delta E_k. \tag{1}$$

При этом значения компонент тензора σ_{ik} зависят от исходного значения вектора напряженности, $\sigma_{ik}=\sigma_{ik}(\boldsymbol{E})$. Полагая $\sigma^0_{ik} = \sigma_{ik}(0)$, можно записать предыдущее соотношение в виде

$$j_i = \sigma^0_{ik}E_k,$$

где теперь уже сами векторы $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{E}$ считаются достаточно малыми.

Если обозначить через $\boldsymbol{\sigma}$ линейное преобразование, соответствующее тензору σ_{ik}, то соотношение (1) может быть переписано в виде

$$\Delta\boldsymbol{j} = \boldsymbol{\sigma}\Delta\boldsymbol{E},$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ зависит от начального значения вектора напряженности $\boldsymbol{E}$. В частности, полагая $\boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{\sigma}(0)$, получим

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{\sigma}^0 \boldsymbol{E}$$

для малых $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{j}$. Эти соотношения представляют собой обобщенный закон Ома.

В некоторых случаях зависимость между физическими величинами оказывается линейной не только для малых, но и для любых их значений. Такие зависимости описываются тензорами, не зависящими от начальных значений этих величин.

Но может оказаться, что некоторое свойство кристалла, которое, вообще говоря, является свойством второго типа, для некоторого конкретного кристалла будет одинаковым во всех его направлениях. Такой кристалл называют *изотропным* по отношению к этому свойству. Например, если кристалл обладает одинаковой электропроводностью во всех направлениях, то говорят, что он изотропен по отношению к этому свойству. Закон Ома в этом случае принимает вид

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E},$$

и тензор удельной электропроводности становится шаровым тензором:

$$\sigma_{ik} = \sigma \delta_{ik}.$$

Скаляр σ будет *удельной электропроводностью* кристалла, одинаковой во всех направлениях.

2. Рассмотрим еще одно свойство кристаллов, по отношению к которому они могут быть анизотропными, а именно рассмотрим теплопроводность кристалла. Обозначим через h вектор потока тепла, равный количеству тепла, протекающему через единичную площадку, перпендикулярную этому вектору, в единицу времени. Если кристалл изотропен по отношению к теплопроводности, то

$$\boldsymbol{h} = -\ k \operatorname{grad} T,$$

где вектор $\operatorname{grad} T = \frac{\partial T}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i$ показывает скорость изменения температуры в кристалле. Этот вектор будем считать одинаковым во всех точках кристалла. Коэффициент k называется *коэффициентом теплопроводности* кристалла.

Если кристалл анизотропен по отношению к теплопроводности, то вектор $\boldsymbol{h}$, вообще говоря, не будет коллинеарен вектору grad T. Обозначая его координаты через h_i, запишем зависимость между этими векторами (для малых значений grad T) в виде

$$h_i = -k_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j}, \qquad (2)$$

где k_{ij}—*тензор теплопроводности кристалла.* Экспериментальное исследование показывает, что тензор k_{ij} является симметричным тензором: $k_{ij}=k_{ji}$. Из физических соображений ясно, что k_{ij} — невырожденный тензор (вырождение этого тензора означало бы, что по некоторому направлению кристалл вовсе не проводит тепла). Тензор r_{ij}, обратный тензору k_{ij}, называют *тензором теплового сопротивления.* Разрешив уравнения (2) относительно компонент grad T, получим

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = -r_{ij}h_j.$$

Из симметрии тензора k_{ij} следует симметрия тензора r_{ij}.
Тензор k_{ij}, как всякий симметричный тензор, может быть приведен ортогональным преобразованием к диагональному виду:

$$(k_{ij}) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения k_i этого тензора называются *главными коэффициентами теплопроводности* кристалла, а его собственные направления $\boldsymbol{e}^0{}_1$ — *главными направлениями тензора теплопроводности.* Из физических соображений ясно, что $k_i>0$. Одновременно с тензором k_{ij} к диагональному виду приведется и тензор r_{ij}. Его собственные значения r_i связаны с главными коэффициентами теплопроводности k_i соотношениями

$$r_i = \frac{1}{k_i}.$$

Уравнение характеристической поверхности тензора k_{ij} записывается в виде

$$k_{ij}x_ix_j = 1,$$

а после приведения к главным осям—в виде

$$k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + k_2x_3^2 = 1.$$

Так как $k_i > 0$, то эта поверхность является трехосным эллипсоидом, который называется *эллипсоидом теплопроводности кристалла.*

Рассмотрим несколько задач, связанных с распространением тепла в кристаллах.

а) Пусть поверхности плоскопараллельной кристаллической пластинки находятся в контакте с двумя хорошими проводниками тепла, имеющими разную температуру (рис. 2).

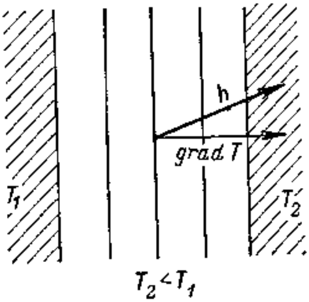


Рис. 2.

Предположим, что длина и ширина пластинки значительно больше ее толщины. Тогда поверхности уровня температуры T пластинки будут параллельны ее граничным плоскостям, а вектор grad T будет направлен перпендикулярно им. Если вектор $\boldsymbol{e}_1$ направить перпендикулярно поверхности пластинки, а векторы $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$ — параллельно ей, то

$$\operatorname{grad} T = \frac{\partial T}{\partial x_1} \boldsymbol{e}_1.$$

Вектор потока тепла $\boldsymbol{h}$ определится так:

$$\boldsymbol{h} = -(k_{11}\boldsymbol{e}_1 + k_{21}\boldsymbol{e}_2 + k_{31}\boldsymbol{e}_3) \frac{\partial T}{\partial x_1}.$$

б) Рассмотрим теперь распространение тепла вдоль длинного стержня. В этом случае вектор потока тепла должен быть направлен вдоль оси стержня. Следовательно, изотермические плоскости будут наклонены к оси стержня. Так как теперь $\boldsymbol{h} = h_1\boldsymbol{e}_1$, то вектор grad T может быть вычислен по формуле

$$\operatorname{grad} T = -(r_{11}\boldsymbol{e}_1 + r_{21}\boldsymbol{e}_2 + r_{31}\boldsymbol{e}_3) h_1.$$

в) Рассмотрим в заключение задачу о распространении тепла, создаваемого точечным источником в бесконечно большом кристалле. Здесь нам придется отступить от предположения об однородности физической величины, воздействующей на кристалл, так как в рассматриваемом случае поле градиента температуры не будет однородным. Уравнение теплопроводности в кристалле, имеющем плотность ρ и удельную теплоемкость c, имеет вид

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} \boldsymbol{h}.$$

Мы рассматриваем случай установившегося распределения температуры, в силу чего $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. Тогда уравнение теплопроводности примет вид

$$\operatorname{div} \boldsymbol{h} = 0$$

или, в координатной форме,

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial h_1}{\partial x_1} + \frac{\partial h_2}{\partial x_2} + \frac{\partial h_3}{\partial x_3} = 0.$$

Но в анизотропном кристалле вектор потока тепла ***h*** связан с градиентом температуры *T* уравнениями (2). Подставляя выражения для компонент вектора ***h*** в последнее уравнение, получим

$$k_{ij} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \qquad (3)$$

так как компоненты тензора k_{ij} можно считать постоянными.

Чтобы решить уравнение (3), перейдем к той системе координат, в которой тензор k_{ij} приводится к диагональному виду. В этом случае уравнение (3) запишется так:

$$k_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + k_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + k_3 \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} = 0.$$

Сделаем в этом уравнении замену переменных, полагая

$$\xi_i = \frac{x_i}{\sqrt{k_i}}.$$

Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial T}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} = \frac{\partial T}{\partial \xi_i} \frac{1}{\sqrt{k_i}},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi_i^2} \frac{1}{k_i}$$

(где по индексу *i* суммирования нет) и уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \xi_3^2} = 0.$$

Это уравнение представляет собой уравнение Лапласа, и его решение при наличии единственного точечного источника тепла, расположенного в начале координат, записывается так:

$$T = \frac{A}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}} + T_\infty,$$

где T_∞ — постоянная температура вдали от источника. Константа A связана с производительностью источника тепла. Если перейти обратно к переменным x_i, то это выражение может быть записано следующим образом:

$$T = \frac{A}{\sqrt{\frac{x_1^2}{k_1} + \frac{x_2^2}{k_2} + \frac{x_3^2}{k_3}}} + T_\infty.$$

Так как $\frac{1}{k_i} = r_i$, то

$$T = \frac{A}{\sqrt{r_1 x_1^2 + r_2 x_2^2 + r_3 x_3^2}} + T_\infty$$

или, если перейти к произвольной системе координат,

$$T = \frac{A}{\sqrt{r_{ij} x_i x_j}} + T_\infty.$$

Отсюда ясно, что изотермические поверхности в кристалле определяются уравнением

$$r_{ij} x_i x_j = \left(\frac{T - T_\infty}{A}\right)^2 = \text{const}.$$

Эти поверхности будут эллипсоидами, подобными характеристическому эллипсоиду тензора теплового сопротивления. Вектор $\boldsymbol{h}$ будет направлен из точки O в точку M изотермической поверхности, а векгор grad T будет ортогонален ей в этой точке.

3. Рассмотрим еще один эффект, который описывается тензором второй валентности, — электрическую поляризацию кристалла. Если кристалл диэлектрика находится в однородном электрическом поле напряженности $\boldsymbol{E}$, его молекулы, представляющие собой диполи, стремятся повернуться определенным образом по отношению к направлению вектора $\boldsymbol{E}$. Электрический момент единицы объема такого кристалла называется *поляризацией* диэлектрика и обозначается буквой $\boldsymbol{P}$. Если диэлектрик изотропен, то вектор $\boldsymbol{P}$ имеет то же направление, что и вектор $\boldsymbol{E}$, и уравнение, связывающее эти два вектора, имеет вид

$$\boldsymbol{P} = \alpha \boldsymbol{E},$$

где α — коэффициент, характеризующий *поляризуемость* диэлектрика. Если диэлектрик анизотропен, то уравнение, связывающее векторы $\boldsymbol{E} = E_i \boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{P} = p_i \boldsymbol{e}_i$, записывается в виде

$$p_i = \alpha_{ij} E_j,$$

где α_{ij} — *тензор поляризуемости* диэлектрика.

Наряду с вектором поляризации $\boldsymbol{P}$ диэлектрика рассматривают *вектор его электрической индукции,* который определяется формулой

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P}.$$

Если обозначить координаты вектора $\boldsymbol{D}$ через D_i, то мы получим для них выражение

$$D_i = (\delta_{ij} + 4\pi\alpha_{ij}) E_j.$$

Тензор $\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + 4\pi\alpha_{ij}$ называется *тензором диэлектрической проницаемости* диэлектрика. Можно доказать, что тензор α_{ij}, как и тензор ε_{ij}, является симметричным тензором. Главные значения тензора ε_{ij} называются *главными диэлектрическими проницаемоетями кристалла.*

Совершенно аналогично описывается магнитная восприимчивость в пара- и диамагнитных кристаллах. Если кристалл помещен в однородное магнитное поле, напряженность которого равна $\boldsymbol{H}$, то он намагничивается. Интенсивность его намагничивания характеризуется вектором $\boldsymbol{I}$, который равен средней плотности магнитного момента молекулярных токов. Для изотропной парамагнитной и диамагнитной среды имеет место соотношение

$$\boldsymbol{I} = \varkappa \boldsymbol{H},$$

где $\varkappa$ —*коэффициент магнитной восприимчивости.* Для парамагнитных кристаллов $\varkappa > 0$, а для диамагнитных $\varkappa < 0$. Если кристалл анизотропен, то соотношение между векторами $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{I}$ описывается симметричным тензором $\varkappa_{ij}$, который называется *тензором магнитной восприимчивости.* Если $\boldsymbol{H} = H_i \boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{I} = I_k \boldsymbol{e}_k$, то этосоотношение принимает вид

$$I_k = \varkappa_{ki} H_i.$$

Наряду с вектором $\boldsymbol{I}$ при изучении явлений магнетизма рассматривается вектор магнитной индукции $\boldsymbol{B}$, определяемый формулой

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi \boldsymbol{I}.$$

Координаты B_i этого вектора связаны с координатами H_j вектора $\boldsymbol{H}$ соотношениями

$$B_i = (\delta_{ij} + 4\pi\varkappa_{ij}) H_j.$$

Тензор $\mu_{ij} = \delta_{ij} + 4\pi\varkappa_{ij}$ носит название *тензора магнитной проницаемости.* Этот тензор также симметричен. Его главные значения μ_i называются *главными коэффициентами магнитной* *проницаемости.* Если $\mu_i>1$, то кристалл парамагнитен в соответствующем главном направлении; если $\mu_i<1$, то он диамагнитен в этом направлении.

4. Одним из основных свойств кристаллов является наличие у них определенной симметрии. Кристалл оказывается инвариантным относительно конечного числа ортогональных точечных преобразований, образующих группу. Она называется *группой точечных преобразований кристалла.* По наличию тех или иных видов симметрии кристаллы разделяются на 32 кристаллографических класса. Все физические свойства кристаллов оказываются связанными с их симметрией. А именно, *элементы симметрии любого физического свойства кристалла должны включать элементы симметрии его точечной группы преобразований.* Это утверждение носит название принципа Неймана и играет важную роль в кристаллофизике.

Рассмотрим, как связаны с симметрией кристалла свойства, описываемые симметричными тензорами второй валентности. Напомним сначала, что *осью симметрии кристалла порядка n* называется прямая l, поворот вокруг которой на угол $\frac{2\pi}{n}$ совмещает кристалл с его первоначальным положением. Пусть a_{ij} — симметричный тензор, описывающий некоторое свойство кристалла, и $a_{ij}x_ix_j$ — его характеристическая поверхность. Если кристалл имеет ось симметрии порядка *n,* то эта ось, согласно принципу Неймана, должна являться осью симметрии такого же порядка и для характеристической поверхности тензора a_{ij}. Если прямая l является осью симметрии второго порядка, то одна из главных осей характеристической поверхности тензора a_{ij} - должна совпадать с прямой l. Если же прямая l является осью симметрии порядка $n>2$, то она должна являться осью вращения для характеристической поверхности, так как поверхность второго порядка, не являющаяся поверхностью вращения, не может иметь осей симметрии порядка выше второго. Следовательно, при $n>2$ характеристическая поверхность является поверхностью вращения, а сам этот тензор имеет два одинаковых собственных значения.

Упомянутые выше кристаллографические классы объединяются в системы по количеству и характеру имеющихся в кристалле осей симметрии. Различают семь кристаллографических систем: *кубическую, тригональную, тетрагональную, гексагональную, ромбическую, моноклинную и триклинную.* Посмотрим, какие особенности будет иметь форма и расположение характеристической поверхности симметричного тензора a_{ij} для каждой из этих кристаллографических систем.

Кристаллы кубической системы имеют три оси четвертого порядка. Характеристическая поверхность тензора a_{ij} для таких кристаллов должна иметь три оси вращения. Но таким свойством обладает только сфера. Поэтому тензор a_{ij} для кристаллов кубической системы лишь множителем отличается от единичного тензора. А это означает, что такие кристаллы изотропны по отношению к свойствам, описываемым симметричными тензорами второй валентности.

Кристаллы тригональной, тетрагональной и гексагональной систем имеют по одной оси соответственно третьего, четвертого и шестого порядка. Для таких кристаллов характеристическая поверхность тензора a_{ij} является поверхностью вращения, ось которой параллельна оси кристалла. Тензор a_{ij} имеет два одинаковых собственных значения.

Кристаллы ромбической системы имеют три взаимно перпендикулярные оси второго порядка. Характеристическая поверхность тензора a_{ij} может быть произвольной поверхностью второго порядка, главные оси которой параллельны осям кристалла. Тензор a_{ij} может иметь три различных собственных значения.

Кристаллы моноклинной системы имеют одну ось второго порядка. Характеристическая поверхность тензора a_{ij} в таком кристалле может иметь произвольную форму, но одна из ее осей должна быть параллельна оси кристалла.

Наконец, кристаллы триклинной системы не имеют осей симметрии. В таком кристалле характеристическая поверхность может иметь любую форму и любое расположение.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Тензор удельной электропроводности σ_{ij} некоторого кристалла в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ имеет следующие компоненты:

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -3\sqrt{3} \\ 0 & -3\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix} \cdot 10^7$$

(электропроводность выражена в системе СИ и имеет размерность *ом*$^{-1}$*м*$^{-1}$).

а) Найти главные направления e_1^0, e_2^0, e_3^0 тензора σ_{ij} и его главные коэффициенты электропроводности.

б) Написать уравнение характеристической поверхности тензора σ_{ij} в старой и новой системах координат.

в) Электрическое поле напряженности 1 *в/м* действует в направлении единичного вектора

$$e = \frac{1}{2}e_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_3.$$

Найти плотность тока $\boldsymbol{j}$, индуцируемого этим полем в кристалле.

Тензор ρ_{ij}, обратный тензору удельной электропроводности σ_{ij}, называется *тензором удельного электрического сопротивления.*

2. Записать зависимость между плотностью тока $\boldsymbol{j}$ и напряженностью электрического поля $\boldsymbol{E}$ при помощи тензора удельного электрического сопротивления ρ_{ij}.

3. Вычислить компоненты тензора ρ_{ij} для кристалла, тензор удельной электропроводности которого задан в задаче 1.

4. Главные коэффициенты теплопроводности кварца имеют следующие значения: $k_1 = k_2 = 6{,}5$; $k_3 = 11{,}3$ (в единицах системы СИ, имеющих размерность *вт/(м · град)).*

а) Найти уравнение характеристической поверхности тензора удельной теплопроводности для этого кристалла.

б) Найти уравнения изотермических поверхностей, если тепло в кристалле кварца распространяется от точечного источника.

5. Между пластинами плоского конденсатора находится диэлектрик. В системе координат, вектор $\boldsymbol{e}_1$ которой направлен перпендикулярно пластинам конденсатора, компоненты тензора ε_{ij} диэлектрика имеют следующие значения:

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Напряженность электрического поля в конденсаторе направлена перпендикулярно пластинам и равна $\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}_1$. Требуется:

а) найти тензор α_{ij} поляризуемости этого диэлектрика;

б) найти его поляризацию $\boldsymbol{P}$ и электрическую индукцию $\boldsymbol{D};$

в) найти углы, которые образуют векторы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{D}$ с вектором $\boldsymbol{e}_1$, и их проекции на этот вектор;

г) найти главные направления тензора диэлектрической проницаемости и главные диэлектрические постоянные кристалла.

3. **Тензоры напряжений и деформации**

1. Рассмотрим однородное тело, находящееся под воздействием внешних сил. На элемент объема этого тела действуют силы двух типов. К первому типу относятся силы, величина которых пропорциональна объему элемента. Такие силы называются *объемными.* К ним, например, относятся сила тяжести, силы притяжения, центробежные силы и т. д. Ко второму типу относятся силы, действующие на поверхность элемента со стороны окружающих его частей тела и пропорциональные площади поверхности элемента. Такая сила, отнесенная к единице площади, называется *напряжением.* Мы будем рассматривать *однородное напряжение,* считая, что его действие на поверхность элемента определенной формы и ориентации не зависит от положения этого элемента в теле. Будем считать, кроме того, что тело под действием указанных выше сил находится в статическом равновесии.

Пусть M — произвольная точка рассматриваемого однородного тела и Δs—содержащий эту точку элемент плоскости π, проходящей через точку M. Ориентация элемента Δs определяется единичным вектором $\boldsymbol{n}$, нормальным плоскости π (рис. 3).

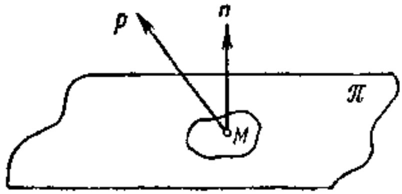


Рис. 3.

Сила $\Delta\boldsymbol{p}$, действующая на элемент Δs, будет равна

$$\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}\,\Delta s,$$

где $\boldsymbol{p}$ — напряжение в точке M, соответствующее элементу Δs. Это напряжение будет зависеть от ориентации элемента Δs, т. е. от вектора $\boldsymbol{n}$, так что

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{n}).$$

Так как мы рассматриваем однородное напряжение, то эта функция будет *одинаковой во всех точках тела.*

Оказывается, эта функция $\boldsymbol{\sigma}$ будет линейной вектор-функцией аргумента $\boldsymbol{n}$. Чтобы доказать это, заметим прежде всего, что так как напряжения на разных сторонах одной и той же площадки имеют одинаковую величину и противоположные направления, то функция $\boldsymbol{\sigma}$ удовлетворяет условию $\boldsymbol{\sigma}(-\boldsymbol{n}) = -\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{n})$.

Рассмотрим, далее, ортогональную систему координат с началом в точке M и базисными векторами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. Проведем плоскость π'

параллельно плоскости π, так, чтобы она образовала вместе с координатными плоскостями тетраэдр $MA_1A_2A_3$ (рис. 4).

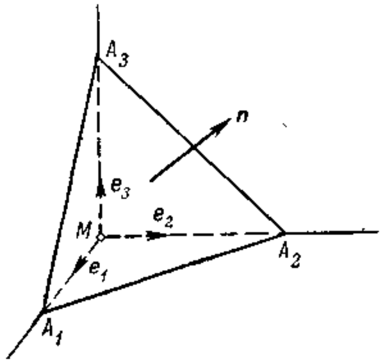


Рис. 4.

Рассмотрим, какие силы действуют на элемент объема нашего тела, заключенного внутри тетраэдра. На него, во-первых, действует объемная сила $\boldsymbol{f}\Delta v$, где через $\boldsymbol{f}$ обозначена сила, отнесенная к единице объема. Затем на каждую из четырех граней тетраэдра действует сила со стороны окружающих частей тела. Если положить $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{e}_1)$, то на грань MA_2A_3 тетраэдра будет действовать сила — $\boldsymbol{p}_1\Delta s_1$, где через Δs_1 обозначена площадь этой грани. Знак минус в этом выражении стоит потому, что внешняя нормаль к грани MA_2A_3 тетраэдра совпадает с вектором — $\boldsymbol{e}_1$. Точно так же силы, действующие на грани MA_3A_1 и MA_1A_2, будут равны соответственно — $\boldsymbol{p}_2\Delta s_2$ и —$\boldsymbol{p}_3\Delta s_3$, где $\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{e}_2)$, $\boldsymbol{p}_3=\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{e}_3)$, а Δs_2 и Δs_3 — площади этих граней. На грань $A_1A_2A_3$ будет действовать сила $\boldsymbol{p}\Delta s$, где $\boldsymbol{p}= \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{n})$ и Δs —площадь треугольника $A_1A_2A_3$. Так как рассматриваемый элемент объема находится в статическом равновесии, то имеет место равенство

$$\boldsymbol{f}\Delta v — \boldsymbol{p}_1\Delta s_1 — \boldsymbol{p}_2\Delta s_2 — \boldsymbol{p}_3\Delta s_3 + \boldsymbol{p}\Delta s = 0.$$

Первое слагаемое этой суммы имеет более высокий порядок малости, чем остальные. Поэтому им можно пренебречь и написать предыдущее равенство в виде

$$\boldsymbol{p}\Delta s = \boldsymbol{p}_1\Delta s_1 + \boldsymbol{p}_2\Delta s_2 + \boldsymbol{p}_3\Delta s_3 = \boldsymbol{p}_i\Delta s_i. \qquad (1)$$

Но легко проверить, что

$$\frac{\Delta s_i}{\Delta s} = \cos\alpha_i,$$

где α_i — угол, который нормаль $\boldsymbol{n}$ к плоскости π образует с вектором $\boldsymbol{e}_i$ Так как вектор $\boldsymbol{n}=n_i\boldsymbol{e}_i$ единичный, то $n_i = \cos\alpha_i$. Поэтому равенство (1) можно переписать так:

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_i n_i.$$

Запишем разложение векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{p}_i$ по базису $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_3}$.

$$\boldsymbol{p}=p_i\boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{p}_j = \sigma_{ij}\boldsymbol{e}_i$$

Подставляя эти разложения в предыдущее равенство и приравнивая коэффициенты при линейно независимых векторах $\boldsymbol{e}_i$, получим

$$p_i = \sigma_{ij}n_j$$

Это равенство доказывает наше утверждение: напряжение $\boldsymbol{p}$ линейно зависит от нормали $\boldsymbol{n}$ к элементу поверхности, функция $\boldsymbol{\sigma}$ является линейной вектор-функцией, а матрица σ_{ij} этой линейной вектор-функции образует тензор второй валентности, который называют *тензором напряжений.*

2. Докажем теперь, что тензор напряжений σ_{ij} является симметричным тензором. Для этого выделим из нашего тела куб с ребром Δl и гранями, параллельными координатным плоскостям (рис. 5), и посмотрим, какие силы на него действуют.

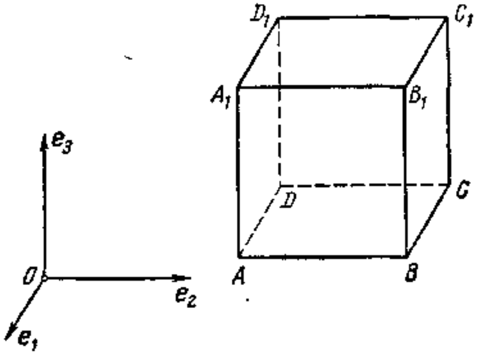


Рис. 5.

Обозначим через Δs площадь грани куба. Тогда на его грани ABB_1A_1 и DCC_lD_1 действуют силы $\boldsymbol{p}_1\Delta s$ и —$\boldsymbol{p}_1\Delta s$, на грани BCC_1B_1 и ADD_1A_1 — силы $\boldsymbol{p}_2\Delta s$ и —$\boldsymbol{p}_2\Delta s$, на грани $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$ — силы $\boldsymbol{p}_3\Delta s$ и —$\boldsymbol{p}_3\Delta s$. Эти силы можно считать приложенными в центрах граней. Подсчитаем момент этих сил относительно точки P, расположенной в центре куба. Легко видеть, что этот момент будет равен следующему выражению:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{e}_1\Delta l \times \boldsymbol{p}_1\Delta s+ \boldsymbol{e}_2\Delta l \times \boldsymbol{p}_2\Delta s + \boldsymbol{e}_3\Delta l \times \boldsymbol{p}_3\Delta s.$$

Вычисляя входящие сюда векторные произведения по известным формулам, получим

$$\boldsymbol{M} = \varepsilon\left\{(\sigma_{32}-\sigma_{23})\,e_1 + (\sigma_{13}-\sigma_{31})\,e_2 + (\sigma_{21}-\sigma_{12})\,e_3\right\}\Delta v.$$

Но так как выделенный кубик находится в статическом равновесии, то $\boldsymbol{M} = 0$. Отсюда следует симметрия тензора σ_{ij}:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}.$$

Диагональные компоненты σ_{11}, σ_{22}, σ_{33} тензора напряжений называются *нормальными компонентами,* так как определяемые ими составляющие векторов $\boldsymbol{p}_i$ действуют перпендикулярно соответствующим координатным плоскостям. Положительное значение компоненты σ_{ii} характеризует растяжение, а отрицательное — сжатие тела. Компоненты σ_{12}, σ_{23}, σ_{31} называются *сдвиговыми компонентами* тензора напряжений, так как определяемые ими составляющие векторов $\boldsymbol{p}_i$ действуют параллельно соответствующим координатным плоскостям.

Тензор напряжений σ_{ij}, как всякий симметричный тензор, может быть приведен к диагональному виду

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

при помощи ортогонального преобразования. При этом сдвиговые компоненты тензора σ_{ij} обращаются в нуль, а нормальные компоненты совпадают с собственными значениями этого тензора. Их называют *главными напряжениями,* а соответствующие им собственные направления — *главными направлениями тензора напряжений.*

Уравнение характеристической поверхности тензора напряжений записывается в виде

$$\sigma_{ij} x_i x_j = 1.$$

Эта поверхность называется *поверхностью напряжений.* Если принять за базисные главные направления тензора σ_{ij}, то уравнение этой поверхности примет вид

$$\sigma_1 x_1^2 + \sigma_2 x_2^2 + \sigma_3 x_3^2 = 1.$$

Так как числа σ_i могут быть как положительными, так и отрицательными, то эта поверхность может иметь любой из четырех известных видов.

Отметим еще некоторые частные формы тензора напряжений. Будем считать при этом, что за базисные направления $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ приняты главные направления этого тензора.

а) *Линейное напряженное состояние (одноосное напряжение)* характеризуется тензором σ_{ij}, имеющим вид

$$(\sigma_{ij})=\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Такое строение тензор напряжений имеет, например, в длинном однородном вертикальном стержне, к концу которого подвешен груз.

б) *Плоское напряженное состояние (двуосное напряжение)* характеризуется тензором σ_{ij} вида

$$(\sigma_{ij})=\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Частным случаем плоского напряженного состояния является чистый сдвиг, при котором тензор напряжений имеет вид

$$(\sigma_{ij})=\begin{pmatrix}-\sigma & 0 & 0\\ 0 & \sigma & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Путем поворота базиса на 45° вокруг вектора $\boldsymbol{e}_3$ матрица чистого сдвига приводится к виду

$$(\sigma_{ij})=\begin{pmatrix}0 & \sigma & 0\\ \sigma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

в) *Объемное напряженное состояние (трехосное напряжение)*— наиболее общая система напряжений с тремя отличными от нуля главными напряжениями. Его частным случаем является гидростатическое сжатие, при котором тензор σ_{ij} является шаровым:

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij},$$

где $\boldsymbol{p}$ — давление, постоянное в рассматриваемом объеме жидкости.

3. Предположим, что тело подвергается однородной малой деформации. В результате этой деформации точка M тела с радиусом-вектором $\boldsymbol{x}$ переходит в точку N с радиусом-вектором $\boldsymbol{y}$, так что

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u},$$

где вектор $\boldsymbol{u}$, определяющий перемещение точки M, зависит от вектора $\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\ (\boldsymbol{x})$. Рассмотрим, как деформируется при этом окрестность точки M. Пусть M_1 — принадлежащая этой окрестности точка с радиусом-вектором $\boldsymbol{x}_1$ (рис. 6), так что

$$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}.$$

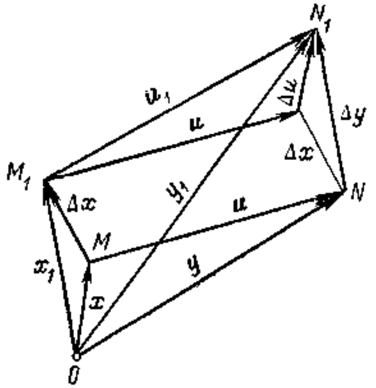


Рис. 6.

Она перейдет в точку N_1 с радиусом-вектором

$$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{u}_1,$$

где $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_1)$. Если положить $\Delta\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}$, то получим

$$\Delta\boldsymbol{y} = \Delta\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{u}, \qquad (2)$$

где

$$\Delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}).$$

Вектор $\Delta\boldsymbol{u}$ определяет деформацию окрестности точки M. И так как эта деформация предполагается однородной, т. е. одинаковой во всех точках рассматриваемого тела, то вектор $\Delta\boldsymbol{u}$ не должен зависеть от вектора $\boldsymbol{x}$, а будет зависеть только от векгора $\Delta\boldsymbol{x}$:

$$\Delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(\Delta\boldsymbol{x}).$$

Покажем, что зависимость вектора $\Delta\boldsymbol{u}$ от вектора $\Delta\boldsymbol{x}$ является линейной зависимостью. Будем считать при этом, что функция $\boldsymbol{f}$ является непрерывной функцией аргумента $\Delta\boldsymbol{x}$, — это согласуется с физическим смыслом функции $\boldsymbol{f}$.

Итак, пусть M_1, $M_г$ — две точки из окрестности точки M, определяемые радиусами-векторами $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_1)$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_2)$,

$$\Delta\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}, \qquad \Delta\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1,$$

$$\Delta\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}, \qquad \Delta\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1.$$

Тогда

$$\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1).$$

Складывая эти равенства, получим

$$\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1).$$

Но $\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\Delta\boldsymbol{x}_1 + \Delta\boldsymbol{x}_2)$. Поэтому предыдущее равенство может быть переписано в виде

$$\boldsymbol{f}(\Delta\boldsymbol{x}_1 + \Delta\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{f}(\Delta\boldsymbol{x}_1) + \boldsymbol{f}(\Delta\boldsymbol{x}_2),$$

что совпадает с первым условием, которому удовлетворяет линейная вектор-функция.

Для доказательства выполнения второго ее свойства заметим, что из предыдущего равенства следует, что

$$\boldsymbol{f}(n\,\Delta\boldsymbol{x}) = n\boldsymbol{f}(\Delta\boldsymbol{x})$$

при целом *n*. Далее, если *m* — целое, то

$$\boldsymbol{f}(\Delta\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}\left(m\,\frac{\Delta\boldsymbol{x}}{m}\right) = m\boldsymbol{f}\left(\frac{\Delta\boldsymbol{x}}{m}\right),$$

откуда

$$\boldsymbol{f}\left(\frac{\Delta\boldsymbol{x}}{m}\right) = \frac{1}{m}\boldsymbol{f}(\Delta\boldsymbol{x}).$$

Сопоставляя предыдущие равенства, получим

$$\boldsymbol{f}\left(\frac{n}{m}\,\Delta\boldsymbol{x}\right) = \frac{n}{m}\boldsymbol{f}(\Delta\boldsymbol{x}),$$

т. е. второе условие, определяющее линейную вектор-функцию, выполняется для рациональных множителей $\alpha = \frac{n}{m}$. Но так как $\boldsymbol{f}$ по предположению непрерывна, то это условие будет выполняться и для любых действительных α:

$$\boldsymbol{f}(\alpha\,\Delta\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{f}(\Delta\boldsymbol{x}).$$

Таким образом, мы доказали, что при однородной деформации вектор $\Delta\boldsymbol{u}$, определяющий деформацию окрестности точки *M* рассматриваемого тела, является линейной вектор-функцией от $\Delta\boldsymbol{x}$. Если обозначить через Δx_i и Δu_i координаты векторов $\Delta\boldsymbol{x}$ и $\Delta\boldsymbol{u}$ относительно ортонормированного базиса $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, то эта линейная вектор-функция может быть записана в виде

$$\Delta u_i = e_{ij}\Delta x_j,$$

где e_{ij} — тензор второй валентности. Если обозначить через Δy_i координаты вектора $\Delta\boldsymbol{y}$, характеризующего положение точки N_1 тела относительно точки *N*, то из равенства (2) получим

$$\Delta y_i = (\delta_{ij} + e_{ij})\,\Delta x_j. \tag{3}$$

Так как деформация предполагается малой, то компоненты тензора e_{ij} следует считать настолько малыми, что их произведениями при вычислениях можно пренебрегать.

Тензор e_{ij} описывает не только деформацию окрестности точки *M* рассматриваемого тела, но и ее вращение вокруг точки *M*. Чтобы выделить из него часть, которая определяет чистую деформацию, рассмотрим, как меняются метрические свойства (длины и углы) при переходе от окрестности точки *M* к окрестности точки *N*. Метрические свойства в окрестности точки *M* определяются квадратичной формой $\Delta\boldsymbol{x}^{2}$, а в окрестности точки *N* — квадратичной формой $\Delta\boldsymbol{y}^{2}$. Но из равенства (2) следует, что

$$\Delta\boldsymbol{y}^2=\Delta\boldsymbol{x}^2+2\Delta\boldsymbol{x}\,\Delta\boldsymbol{u}+\Delta\boldsymbol{u}^2.$$

Так как деформация малая, то третьим слагаемым в правой части равенства можно пренебречь, и мы получим

$$\Delta\boldsymbol{y}^2=\Delta\boldsymbol{x}^2+2\Delta\boldsymbol{x}\,\Delta\boldsymbol{u},$$

откуда

$$\Delta\boldsymbol{y}^2-\Delta\boldsymbol{x}^2=2\Delta\boldsymbol{x}\,\Delta\boldsymbol{u}.$$

Полученная величина характеризует чистую деформацию окрестности точки *M*. Правая часть этого выражения может быть записана в виде

$$2\Delta\boldsymbol{x}\,\Delta\boldsymbol{u}=2e_{ij}\Delta x_i\Delta x_j. \qquad (4)$$

Разложим теперь тензор e_{ij} на симметричную часть ε_{ij} и кососиммегричную часть ω_{ij}:

$$e_{ij}=\varepsilon_{ij}+\omega_{ij},$$

где

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(e_{ij}+e_{ji}),\qquad \omega_{ij}=\frac{1}{2}(e_{ij}-e_{ji}).$$

Подставляя это разложение тензора e_{ij} в равенство (4), получим

$$2\Delta\boldsymbol{x}\,\Delta\boldsymbol{u}=2\varepsilon_{ij}\Delta x_i\Delta x_j,$$

так как $\omega_{ij}\Delta x_i\Delta x_j=0$. Следовательно, деформация окрестности точки *M* определяется только симметричным тензором ε_{ij}, который и называется *тензором деформации.* Кососимметричный тензор ω_{ij} не влияет на изменение метрических - свойств окрестности точки *M* и, следовательно, определяет ее вращение вокруг точки *M*.

4. Рассмотрим отдельно случаи, когда тензор e_{ij} является симметричным или кососимметричным. Пусть сначала e_{ij} = ω_{ij} — кососимметричный тензор. Покажем, что этот тензор порождает малый поворот окрестности точки *M* вокруг оси, определяемой вектором $\boldsymbol{\omega}=\omega_i\boldsymbol{e}_i$, где

$$\omega_i=-\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_{jk}.$$

В самом деле, если $\boldsymbol{\Omega}$ — линейное преобразование, имеющее кососимметричную матрицу (ω_{ik}), то, как было показано ранее,

$$\boldsymbol{\Omega}\,\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\omega} \times \Delta \boldsymbol{x}.$$

Поэтому

$$\Delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\omega} \times \Delta \boldsymbol{x}$$

и

$$\Delta \boldsymbol{y} = \Delta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\omega} \times \Delta \boldsymbol{x}.$$

Но легко видеть, что последнее преобразование представляет собой поворот на малый угол $|\boldsymbol{\omega}|$ вокруг оси, проходящей через точку *O* и определяемой вектором $\boldsymbol{\omega}$ (рис. 7).

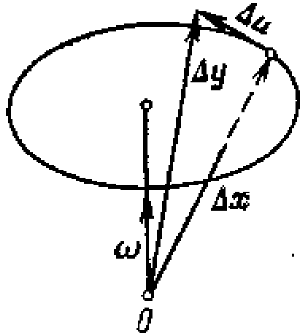


Рис. 7.

Действительно, вектор $\Delta \boldsymbol{u}$ будет касательным к окружности, описываемой концом вектора $\Delta \boldsymbol{x}$ при его вращении вокруг оси $O\boldsymbol{\omega}$, и его длина равна $|\Delta \boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{\omega}|\rho$, где ρ — расстояние конца вектора $\Delta \boldsymbol{x}$ до оси $O\boldsymbol{\omega}$.

Пусть теперь $e_{ij} = \varepsilon_{ij}$— симметричный тензор. Этот тензор определяет чистую деформацию окрестности точки *М.* Тогда

$$\Delta y_i = (\delta_{ij} + \varepsilon_{ij})\,\Delta x_j.$$

Вектор $\Delta \boldsymbol{x} = \Delta x_1 \boldsymbol{e}_1$ переходит в вектор

$$\Delta \boldsymbol{y} = [(1 + \varepsilon_{11})\,\boldsymbol{e}_1 + \varepsilon_{21}\boldsymbol{e}_2 + \varepsilon_{31}\boldsymbol{e}_3]\,\Delta x_1.$$

При этом с точностью до величин второго порядка малосги

$$|\Delta \boldsymbol{y}| = (1 + \varepsilon_{11})\,|\Delta \boldsymbol{x}|.$$

Следовательно, компонента ε_{11} тензора ε_{ij} определяет относительное удлинение тела вдоль направления $\boldsymbol{e}_1$. Компоненты ε_{21} и ε_{31} будут определять поворот этого направления по отношению к векторам $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$. Точно так же компоненты ε_{22} и ε_{33} определяют относительное удлинение тела вдоль направлений $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$, а компоненты ε_{ij} при $i \neq j$ — поворот этих направлений. Кроме того, так как $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, то поворот вектора $\boldsymbol{e}_j$ в направлении вектора $\boldsymbol{e}_i$ совпадает с поворотом вектора $\boldsymbol{e}_i$ в направлении вектора $\boldsymbol{e}_j$. Компоненты ε_{ij} при $i \neq j$ называют *сдвиговыми компонентами* тензора деформации.

Найдем теперь относительное удлинение тела вдоль произвольного направления, определяемого единичным вектором $\boldsymbol{l} = l_i \boldsymbol{e}_i$. Пусть $\Delta \boldsymbol{x} = \Delta x \boldsymbol{l}$. Тогда

$$\Delta u_i = \varepsilon_{ij} l_j \Delta x.$$

Удлинение тела вдоль направления вектора l равно проекции вектора $\Delta \boldsymbol{u}$ на l, которая вычисляется следующим образом:

$$\text{Пр}_{\boldsymbol{l}}\, \Delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{l} \cdot \Delta \boldsymbol{u} = \varepsilon_{ij} l_i l_j \Delta x.$$

Относительное удлинение тела вдоль направления вектора l равно отношению этой проекции к первоначальной длине вектора $\Delta \boldsymbol{x}$, т. е. к Δx. Если обозначить относительное удлинение через $\varepsilon(l)$, то

$$\varepsilon(\boldsymbol{l}) = \varepsilon_{ij} l_i l_j.$$

Легко найти величину относительного удлинения $\varepsilon(l)$ тела, построив характеристическую поверхность тензора ε_{ij}, уравнение которой имеет вид

$$\varepsilon_{ij} x_i x_j = 1.$$

Используя результат, полученный ранее, можно написать, что

$$\varepsilon(\boldsymbol{l}) = \frac{1}{OM^2},$$

где OM — расстояние от центра O характеристической поверхности до точки M, в коюрой она пересекается с лучом $O\boldsymbol{l}$.

Определим еще, как изменится объем при деформации тела, определяемой тензором ε_{ij}. Как было доказано ранее, коэффициент искажения объемов при линейном преобразовании равен определителю матрицы этого линейного преобразования. Если обозначить через Δv_x объем элемента тела до деформации, а через Δv_y— объем того же элемента после деформации, то получим

$$\frac{\Delta v_y}{\Delta v_x} = |\delta_{ij} + \varepsilon_{ij}| \approx 1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33},$$

где в правой части отброшены слагаемые, содержащие произведения компонент тензора деформации, являющиеся величинами не ниже второго порядка малости. Из этого соотношения видно, что коэффициент относительного обьемного расширения тела при деформации, определяемой тензором ε_{ij}, равен следу этого тензора:

$$\mu = \frac{\Delta v_y - \Delta v_x}{\Delta v_x} = \mathrm{Sp}\,\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ii}.$$

Приведем симметричный тензор ε_{ij} к главным осям. Тогда его матрица примет диагональный вид:

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения ε_i тензора ε_{ij} называются *главными коэффициентами деформации* тела, а его главные оси — *главными направлениями деформации.* Главные направления деформации тела характеризуются тем, что они остаются взаимно ортогональными при деформации. Главные коэффициенты деформации ε_i определяют удлинение тела вдоль главных направлений деформации.

5. Вернемся теперь к общему случаю. Пусть однородная малая деформация тела определяется уравнениями

$$\Delta y_i = (\delta_{ij} + e_{ij})\,\Delta x_j, \tag{5}$$

где $e_{ij} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$. Так как с точностью до величин второго порядка малости

$$\delta_{ij} + e_{ij} \approx (\delta_{ik} + \omega_{ik})(\delta_{kj} + \varepsilon_{kj}),$$

то произвольная деформация окресгноаи точки M представляет произведение чистой деформации, определяемой симметричным тензором деформации ε_{kj}, и поворота, определяемого кососимметричным тензором ω_{ij}. При этом главные направления тензора деформации, оставаясь неподвижными в теле, поворачиваются вместе с ним под влиянием тензора поворота ω_{ij} вокруг вектора $\boldsymbol{\omega}$ с

$$\omega_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_{jk}$$

координатами на угол $|\boldsymbol{\omega}|$.

Рассмотрим поверхность, в которую перейдет сфера радиуса ρ с центром в точке M при малой деформации тела. Уравнение этой сферы может быть записано в виде

$$\Delta x^2 = \rho^2. \tag{6}$$

Чтобы получить уравнение искомой поверхности, нужно в уравнении (6) выразить координаты вектора $\Delta\boldsymbol{x}$ через координаты вектора $\Delta\boldsymbol{y}$ с помощью уравнений (5). С точностью до величин второго порядка малости мы имеем

$$\Delta x_i = (\delta_{ij} - e_{ij})\,\Delta y_j.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (6) и снова отбрасывая члены второго порядка малости, получаем

$$(\delta_{ij} - 2e_{ij})\, \Delta y_i \Delta y_j = \rho^2.$$

Но так как $e_{ij} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$, где

$$\omega_{ij} = -\,\omega_{ji},$$

то последнее уравнение может быть переписано в виде

$$(\delta_{ij} - 2\varepsilon_{ij})\, \Delta y_i \Delta y_j = \rho^2. \qquad (7)$$

Таким образом, при рассматриваемой деформации сфера с центром в точке *M,* определяемая уравнением (6), переходит в центральную поверхность второго порядка с центром в точке *N,* определяемую уравнением (7). Легко доказать, что эта поверхность будет эллипсоидом. В самом деле, приведем тензор ε_{ij} к каноническому виду. Тогда уравнение (7) запишется так:

$$(1 - 2\varepsilon_1)\, \Delta y_1^2 + (1 - 2\varepsilon_2)\, \Delta y_2^2 + (1 - 2\varepsilon_3)\, \Delta y_3^2 = \rho^2.$$

Пользуясь малостью величин ε_i, перепишем его в виде

$$\frac{\Delta y_1^2}{\rho^2 (1+\varepsilon_1)^2} + \frac{\Delta y_2^2}{\rho^2 (1+\varepsilon_2)^2} + \frac{\Delta y_3^2}{\rho^2 (1+\varepsilon_3)^2} = 1.$$

А это уравнение представляет собой уравнение эллипсоида, полуоси которого $\rho_i = \rho\,(1 + \varepsilon_i)$. Этот эллипсоид называется *эллипсоидом деформации.*

6. Заметим, что рассмотренные тензоры напряжений и деформации не связаны с симметрией кристалла. Это происходит потому, что указанные тензоры описывают не свойства кристалла, а первый из них описывает внешнее воздействие на кристалл, а второй — реакцию кристалла на это или какое-либо другое воздействие. Такие тензоры в кристаллографии называют *полевыми* тензорами. Тензоры же, описывающие свойства кристалла, называют *материальными* тензорами. К ним относятся рассмотренные выше тензор удельной электропроводности, тензор теплопроводности, тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости и целый ряд тензоров, которые будут рассмотрены в следующем пункте.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Однородное тело находится под действием растягивающего усилия, направленного вдоль единичного вектора $\boldsymbol{l} = l_i \boldsymbol{e}_i$ и равного σ *кг/см*^{2}. Определить тензор напряжений этого тела.
2. Доказать, что если след тензора напряжений σ_{ij} равен нулю, то этот тензор может быть приведен к виду

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Это означает, чта тензор σ_{ij} определяет напряжение сдвига.

3. Доказать, что произвольное напряженное состояние тела, определяемое тензором напряжения σ_{ij}, может быть представлено в виде суммы гидростатического сжатия и напряжения сдвига.

4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ компоненты тензора напряжений одно-родного тела имеют следующие значения:

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

а) Найти главные направления и главные напряжения этого тензора.

б) Написать уравнение характеристической поверхности тен-зора σ_{ij} в старой и новой системах координат.

в) Представить тензор σ_{ij} в виде суммы тензора σ''_{ij}, определяющего гидростатическое сжатие, и тензора σ_{ij}', определяющего сдвиг.

г) Найти базис, в котором тензор σ_{ij}' будет иметь только сдвиговые компоненты.

5. Однородное тело подвергается деформации сдвига так, что все плоскости, параллельные плоскости x_1Ox_2, переходят в себя и все точки тела перемещаются в направлении единичного вектора $\boldsymbol{l} = l_1\boldsymbol{e}_1 + l_2\boldsymbol{e}_2$, параллельного этой плоскости. Найти тензор деформации тела.

6. Малая деформация тела задается тензором

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 1 & 6 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6}.$$

а) Определить тензор чистой деформации ε_{ij} и тензор поворота ω_{ij}.

б) Найти главные коэффициенты и главные направления деформации тела.

в) Написать уравнение эллипсоида деформации в старой и новой системах координат.

г) Найти направление оси вращения и угол поворота тела.

7. Доказать, что тензор деформации ε_{ij} может быть представлен в виде

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} + \varepsilon''_{ij},$$

где тензор ε'_{ij} определяет деформацию чистого сдвига, т. е. удовлетворяет условию $\varepsilon'_{ij} = 0$, а тензор ε''_{ij}, определяет всестороннее сжатие и пропорционален тензору δ_{ij}. Найти тензоры ε'_{ij} и ε''_{ij}.

4. Дальнейшие свойства кристаллов

1. В п.2 мы рассмотрели некоторые свойства кристаллов. Все они были связаны с воздействием на кристалл некоторой векторной величины, вызывающей в ней эффект, характеризуемый снова векторной величиной. Такие свойства кристаллов описываются тензорами второй валентносш. Сейчас мы рассмотрим свойства кристаллов, которые связаны либо с воздействием на кристалл не векторных величин, либо с тем, что эффект, вызываемый в кристалле этим воздействием, характеризуется не векторной величиной.

Самым простым свойством такого рода является *тепловое расширение* кристалла. При изменении температуры кристалла на величину ΔT происходит деформация кристалла, описываемая тензором деформации ε_{ij}, которая для малых значений ΔT пропорциональна изменению температуры. Поэтому должно иметь место соотношение

$$\varepsilon_{ij} = \alpha_{ij}\Delta T.$$

Так как ΔT — скаляр, а ε_{ij} — симметричный тензор второй валентности, то α_{ij} будет также симметричным тензором второй валентности, который называется *тензором теплового расширения.* Главные направления тензора α_{ij} называются *главными направлениями теплового расширения,* а его собственные значения α_i — *главными коэффициентами расширения.* Характеристическая поверхность тензора расширения имеет уравнение

$$\alpha_{ij}x_i x_j = 1.$$

Форма и положение этой поверхности в кристалле, согласно принципу Неймана, связаны с симметрией, которой обладает кристалл.

2. В некоторых кристаллах под действием напряжений возникает электрическая поляризация. Это явление называется *прямым пьезоэлектрическим эффектом.* Напряжение в кристалле описывается тензором напряжений σ_{ij}, а электрическая поляризация — вектором $\boldsymbol{p} = p_i \boldsymbol{e}_i$. Связь между этими величинами при достаточно малых напряжениях оказывается линейной, и поэтому

$$p_i = d_{ijk}\sigma_{jk}, \qquad (1)$$

где d_{ijk} — тензор валентности три. Компоненты этого тензора называют *пьезоэлектрическими модулями,* а сам тензор — *тензором* *пьезоэлектрических модулей* кристалла. Так как тензор напряжений σ_{ij} симметричен по индексам j и k, то и тензор d_{ijk} можно считать симметричным по этим индексам, $d_{ijk}=d_{ikj}$. Поэтому он имеет 18 независимых компонент.

Если пьезоэлектрический кристалл помешен в электрическое поле, то его форма меняется — в нем возникает деформация. Это явление называется *обратным пьезоэлектрическим эффектом.* Напряженность электрического ноля описывается вектором $E=E_i\boldsymbol{e}_i$, а деформация кристалла — тензором деформации ε_{ij}. Так как зависимость между этими величинами при достаточно малых напряжениях $\boldsymbol{E}$ линейная, то она может быть выражена уравнениями

$$\varepsilon_{jk}=d'_{ijk}E_i,$$

где d'_{ijk} — тензор валентности три, симметричный по индексам j и k. В кристаллофизике доказывается, что прямой и обратный пьезоэлектрические эффекты описываются одним и тем же тензором, т. е. что $d'_{ijk}=d_{ijk}$. Поэтому связь между напряжением электрического поля E_i и деформацией кристалла записывается в виде

$$\varepsilon_{jk}=d_{ijk}E_i, \qquad (2)$$

где d_{ijk} — снова тензор пьезоэлектрических модулей.

Рассмотрим теперь, как влияет симметрия кристалла на строение тензора d_{ijk}. Предположим, что кристалл переводится в себя ортогональным преобразованием с матрицей A. В силу принципа Неймана пьезоэлектрические свойства кристалла при этом не изменяются. Произведем преобразование ортонормированного базиса $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, связанного с кристаллом, при помощи матрицы $\Gamma = A^{-1}$. Тогда в новом базисе $\{\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}\}$ компоненты тензора пьезоэлектрических модулей должны совпадать с соответствующими компонентами в старом базисе, т. е.

$$d_{i'j'k'}=d_{ijk},$$

где $i'=i,\ \ j'=j,\ \ k'=k$. Но если матрица Γ имеет вид $\Gamma=(\gamma_{i'p})$, то при преобразовании базиса компоненты тензора $d_{i'j'k'}$ преобразуются по обычным формулам:

$$d_{i'j'k'}=\gamma_{i'p}\gamma_{j'q}\gamma_{k'r}d_{pqr}.$$

Сравнивая два последних соотношения, найдем условие инвариантности пьезоэлектрических свойств кристалла по отношению к преобразованию *A:*

$$d_{ijk}=\gamma_{i'p}\gamma_{j'q}\gamma_{k'r}d_{pqr}. \qquad (3)$$

Пусть, например, преобразование A представляет собой симметрию кристалла относительно некоторой точки — центра симметрии кристалла. Тогда матрица A имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и $\Gamma = A^{-1}=A$. Поэтому уравнения (3) принимают вид

$$d_{ijk}=-d_{ijk},$$

откуда следует, что $d_{ijk}=0$. Это означает, что *кристалл, обладающий центральной симметрией, не может быть пьезоэлектриком.*

Предположим, далее, что кристалл имеет ось симметрии второго порядка, пусть этой осью будет ось Ox_3. Тогда этот кристалл переходит в себя при преобразовании A с матрицей

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае снова Г = А, и из условия (3) инвариантности тензора d_{ijk} получим

$$d_{111}=d_{112}=d_{211}=d_{122}=d_{212}=d_{222}=0,$$
$$d_{133}=d_{233}=d_{313}=d_{323}=0.$$

Отличными от нуля будут лишь те восемь компонент тензора d_{ijk}, в которых либо один, либо все три индекса принимают значение 3. Подобным образом можно определить строение тензора d_{ijk} для всех кристаллографических классов.

Рассмотрим характеристическую поверхность тензора пьезоэлектрических модулей. Ее уравнение записывается в виде

$$d_{ijk}x_ix_jx_k=1.$$

Выясним, какой физический смысл имеет эта поверхность.

Предположим, что кристалл подвергается однородному растяжению вдоль направления, определяемого единичным вектором ***l***. Обозначим через σ величину нормального напряжения, действующего на площадку, перпендикулярную этому направлению.
Тогда тензор напряжения этого кристалла имеет вид

$$\sigma_{ij}=l_il_j\sigma$$

Поэтому уравнение (1) перепишетсяв форме

$$p_i=d_{ijk}l_jl_k\sigma.$$

Найдем составляющую вектора $\boldsymbol{p}$ электрической поляризации кристалла по направлению вектора $\boldsymbol{l}$. Так как $|\boldsymbol{l}|=1$, то эта составляющая определяется по формуле

$$\text{Пр}_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{l}\boldsymbol{p} = l_i p_i,$$

в силу чего

$$\text{Пр}_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{p} = d_{ijk} l_i l_j l_k \sigma.$$

Но, как мы видели ранее,

$$d_{ijk} l_i l_j l_k = \frac{1}{OM^3}, \qquad (4)$$

где OM — расстояние от начала координат до точки M характеристической поверхности тензора d_{ijk}, в которой она пересекается с прямой $O\boldsymbol{l}$. Поэтому

$$\frac{\text{Пр}_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{p}}{\sigma} = \frac{1}{OM^3},$$

т. е. *при растяжении пьезоэлектрического кристалла отношение проекции вектора электрической поляризации на направление растяжения к величине нормального напряжения кристалла равно единице, деленной на куб расстояния от начала координат до лежащей в направлении удлинения точки характеристической поверхности тензора пьезоэлектрических модулей.*

Пусть, далее, $\boldsymbol{E}$ — напряженность электрического поля, и котором находится кристалл, и $\boldsymbol{E}=E\boldsymbol{l}$, где $\boldsymbol{l}$ — единичный вектор с координатами l_i. Формула (2) теперь имеет вид

$$\varepsilon_{ij} = d_{ijk} l_k E.$$

Найдем относительное удлинение кристалла в направлении вектора $\boldsymbol{l}$, которое произойдет в нем под воздействием напряженности $\boldsymbol{E}$. Это относительное удлинение, как было показано ранее, равно

$$\varepsilon(\boldsymbol{l}) = \varepsilon_{ij} l_i l_j.$$

Поэтому

$$\varepsilon(\boldsymbol{l}) = d_{ijk} l_i l_j l_k E.$$

Пользуясь соотношением (4), мы получим, что

$$\frac{\varepsilon(\boldsymbol{l})}{E} = \frac{1}{OM^3},$$

где OM — расстояние от начала координат до точки характеристической поверхности тензора пьезоэлектрических модулей, лежащей в направлении вектора $\boldsymbol{l}$.

Заметим, что так как тензор d_{ijk} не является симметричным, то его характеристическая поверхность описывает не все свойства этого тензора, а только свойства его симметричной части.

3. В предыдущем параграфе мы рассматривали тензоры напряжений и деформации однородного тела независимо друг от друга. Но обычно напряжения, которые возникают в теле, вызывают его деформацию. Если величина напряжений не превышают некоторых предельных значений, то деформация тела является обратимой, т. е. она исчезает при снятии напряжений. Такая деформация называется *упругой.* Упругая деформация тела линейно зависит от его напряжений. Так как деформация тела описывается тензором деформации ε_{ij}, а его напряженное состояние — тензором напряжения σ_{ij}, то линейная зависимость между этими тензорами может быть записана в виде

$$\varepsilon_{ij}=s_{ijkl}\sigma_{kl}. \qquad (5)$$

Как следует из ранее доказанной теоремы, входящие в эти соотношения коэффициенты s_{ijkl} образуют тензор четвертой валентности. Этот тензор называют *тензором модулей податливости* кристалла.

Так как тензоры ε_{ij} и σ_{ij} симметричны, то и тензор s_{ijkl} будет симметричным по двум первым и двум последним индексам:

$$s_{ijkl}=s_{jikl}, \qquad s_{ijkl}=s_{ijlk}. \qquad (6)$$

Но в теории упругости показывается, что тензор s_{ijkl} обладает еще одной симметрией,

$$s_{ijkl}=s_{klij}. \qquad (7)$$

Тензор s_{ijkl} имеет всего $3^4 = 81$ компоненту. Но в силу указанных здесь симметрии число различных из этих компонент значительно уменьшается. Как показывает несложный подсчет, число различных компонент этого тензора в общем случае равно 21.

Часто вместо уравнений (5) рассматривают выражение тензора деформации через тензор напряжений. Это выражение может быть записано в виде

$$\sigma_{ij}=c_{ijkl}\varepsilon_{kl}. \qquad (8)$$

Входящие сюда коэффициенты c_{ijkl} также образуют четырехвалентный тензор, который называют *тензором модулей упругости.* Этот тензор обладает такими же симметриями, как и тензор s_{ijkl}. Тензор c_{ijkl} является в некотором смысле обратным тензором для тензора s_{ijkl}. Если подставить выражения тензора σ_{ij} по формулам (8) в уравнения (5), то получатся соотношения

$$\varepsilon_{ij}=s_{ijpq}c_{pqkl}\varepsilon_{kl}.$$

Отсюда следует, что

$$s_{ijpq}c_{pqkl}=\delta_{i(k}\delta_{|j|l)},$$

где в правой части этого равенства произведено симметрирование по индексам k и l. Здесь

$$\delta_{i(k}\delta_{|j|l)} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

— тензор, симметричный по индексам i, j и k, l и не меняющийся также при перестановке этих пар индексов.

4. Из принципа Неймана следует, что наличие той или иной симметрии у кристалла влечет за собой соответствующую симметрию его упругих свойств, т. е. приводит к появлению определенных зависимостей между компонентами тензоров s_{ijkl} и c_{ijkl}. Будем для определенности рассматривать тензор модулей упругости c_{ijkl}. При переходе от базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ к новому базису $\{e_{1'}, e_{2'}, e_{3'}\}$ коэффициенты тензора c_{ijkl} преобразуются по формулам

$$c_{i'j'k'l'} = \gamma_{i'p}\gamma_{j'q}\gamma_{k'r}\gamma_{l's}c_{pqrs}.$$

Если свойства кристалла относительно обоих рассматриваемых базисов оказываются одинаковыми, то имеют место соотношения

$$c_{i'j'k'l'} = c_{ijkl},$$

где $i'=i$, $j'=j, k'=k$, $l'=l$. Сравнивая два предыдущих равенства, мы найдем искомые соотношения между компонентами тензора c_{ijkl} в виде

$$c_{ijkl} = \gamma_{i'p}\gamma_{j'q}\gamma_{k'r}\gamma_{l's}c_{pqrs},$$

где преобразование координат, определяемое матрицей $\Gamma = (\gamma_{i'p})$, принадлежит точечной группе преобразований кристалла.

Посмотрим, как отразится на строении тензора наличие некоторых элементов симметрии в кристалле c_{ijkl}. Заметим прежде всего, что наличие центра симметрии не влияет на строение этого тензора, так как центральная симметрия определяется матрицей $\Gamma_0 = -E$, подстановка которой в равенства (9) приводит к тождеству. Предположим, далее, что кристалл имеет ось симметрии. Примем эту ось за ось Oe_3. Тогда матрица Г будет иметь вид

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

вследствие чего равенства (9) запишутся так:

$$c_{ijkl} = (-1)^{\nu} c_{ijkl},$$

где ν равно числу единиц или двоек среди индексов i, j, k, l. Поэтому обратятся в нуль все те компоненты тензора у которых три или один индекс равны трем. В силу c_{ijkl} условий симметрии (6) и (7) эти равенства могут быть записаны в виде

$$c_{i333}=0,\ c_{ijk3}=0, \tag{10}$$

где индексы *i*, *j*, *k* принимают только значения 1 и 2. Мы имеем здесь 8 независимых соотношений для компонент тензора c_{ijkl}. Следовательно, при наличии оси симметрии тензор модулей упругости имеет только 13 независимых компонент вместо 21 в общем случае.

Покажем теперь, что *если тензор c_{ijkl} допускает симметрию кристалла относительно некоторой оси, то он допускает также его симметрию относительно плоскости, перпендикулярной этой оси.* В самом деле, переход к новой системе координат, симметричной исходной относительно плоскости x_1Ox_2, определяется матрицей

$$\Gamma_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

и легко проверить, что $\Gamma_2=\Gamma_1\Gamma_0$. Но так как тензор c_{ijkl} инвариантен по отношению к преобразованиям, определяемым матрицами Γ_0 и Γ_1, то он будет инвариантен и по отношению к произведению этих преобразований. Очевидно, чго справедливым будет и обратное предложение: *если тензор c_{ijkl} допускает симметрию относительно некоторой плоскости, то он допускает симметрию и относительно любой перпендикулярой ей оси.* Отсюда вытекает, что если кристалл допускает симметрию относительно плоскости x_1Ox_2, то тензор модулей упругости этого кристалла снова связан восемью соотношениями (10) и имеет только 13 независимых компонент.

Подобным же образом, пользуясь соотношениями (9), можно найти зависимость между компонентами тензора c_{ijkl} при наличии других элементов симметрии в кристалле и найти эти зависимости для всех кристаллографических систем и классов.

5. Рассмотрим еще вопрос о том, каково будет строение тензора c_{ijkl} в изотропной среде. Для такой среды уравнения (9) должны выполняться тождественно. Однако эти уравнения содержат четвертые степени величин $\gamma_{i'p}$, которые к тому же не являются независимыми, а связаны соотношениями

$$\gamma_{i'p}\gamma_{j'p}=\delta_{i'j'}.$$

Поэтому непосредственное их исследование оказывается трудным. Чтобы облегчить решение задачи, будем считать, что преобразование ортонормированного базиса, определяемое матрицей Г, есть бесконечно малый поворот вокруг некоторой оси. Тогда эта матрица может быть записана в виде

$$\Gamma = E + \Omega,$$

где $\Omega = (\omega_{ij})$ — матрица, квадратами и произведениями компонент которой мы можем пренебречь. Основное соотношение

$$\Gamma\Gamma^* = E,$$

которому удовлетворяет ортогональная матрица, теперь может быть переписано в виде

$$(E + \Omega)(E + \Omega)^* = E,$$

откуда

$$E + \Omega + \Omega^* + \Omega\Omega^* = E.$$

Отбрасывая в этом равенстве матрицу $\Omega\Omega^*$, компонентами которой будут величины второго порядка малости, мы получим отсюда, что

$$\Omega + \Omega^* = N,$$

т. е. Ω — кососимметричная матрица.

Теперь компоненты матрицы Γ могут быть записаны в виде

$$\gamma_{i'p} = \delta_{ip} + \omega_{ip},$$

где $\omega_{ip} + \omega_{pi} = 0$ и $i = i'$. Подставляя значения этих компонент в, равенства (9) и отбрасывая в них величины, порядок малости которых выше первого, получим

$$c_{ijkl} = (\delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{kr}\delta_{ls} + \delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{kr}\omega_{ls} + \\ + \delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{ls}\omega_{kr} + \delta_{ip}\delta_{kr}\delta_{ls}\omega_{jq} + \delta_{jq}\delta_{kr}\delta_{ls}\omega_{ip})\, c_{pqrs} = \\ = c_{ijkl} + \omega_{lp}c_{ijkp} + \omega_{kp}c_{ijpl} + \omega_{jp}c_{ipkl} + \omega_{ip}c_{pjkl}.$$

Отсюда следуют соотношения

$$\omega_{lp}c_{ijkp} + \omega_{kp}c_{ijpl} + \omega_{jp}c_{ipkl} + \omega_{ip}c_{pjkl} = 0, \qquad (11)$$

которые должны выполняться тождественно относительно трех независимых компонент ω_{12}, ω_{23} и ω_{31} матрицы Ω. Индексы *i, j, k* и *l* в этих соотношениях могут принимать независимо друг от друга любые значения из 1, 2, 3. Поэтому число этих соотношений равно $3^4 = 81$. Однако в силу условий симметрии (6) и (7), которым удовлетворяет тензор c_{ijkl}, количество этих соотношений снижается до 21. Рассмотрим соотношения (11) для всех возможных значений индексов *i,j,k,l*.

а) Пусть $i = j = k = l$. Тогда соотношения (11) принимают вид

$$\omega_{ip}c_{piii} = 0,$$

где только по индексу *p* производится суммирование. Распишем эту сумму подробно, учитывая, что $\omega_{ii} = 0$:

$$\omega_{im}c_{mili} + \omega_{in}c_{nili} = 0.$$

Здесь мы считаем, что по индексам i, m и n суммирование не производится, они не равны между собой и представляют некоторую комбинацию из чисел 1, 2, 3. Так как величины ω_{im} и ω_{in} независимы, а эти соотношения должны выполняться тождественно, то получим отсюда, что

$$c_{miii} = 0. \tag{12}$$

б) Пусть $i = j = k \neq l$. Тогда соотношения (11) перепишутся в виде

$$\omega_{lp}c_{iiip} + \omega_{ip}(c_{iipl} + 2c_{ipil}) = 0.$$

Расписывая подробно эту сумму, учитывая, что $\omega_{ll} = 0$ и что выполняются соотношения (12), получим

$$\omega_{li}c_{iiii} + \omega_{il}(c_{iill} + 2c_{ilil}) + \omega_{im}(c_{iiml} + 2c_{imil}) = 0,$$

где снова i, l, m — некоторая комбинация из разных чисел 1, 2, 3 и суммирования по этим индексам нет. Так как $\omega_{li} = -\omega_{il}$ и величины ω_{il} и ω_{im} независимы, то отсюда следуют два равенства:

$$c_{iiii} = c_{illl} + 2c_{ilil}, \tag{13}$$

$$c_{iiml} + 2c_{imil} = 0. \tag{14}$$

в) Пусть $i = j \neq k = l$. Тогда соотношения (11) дают

$$\omega_{kp}c_{iikp} + \omega_{ip}c_{ipkk} = 0.$$

Если записать эту сумму подробно, как было сделано выше для предыдущих случаев, и использовать независимость величин ω_{ik}, ω_{im} и ω_{km}, то отсюда подучим новые соотношения

$$c_{iikm} = 0, \tag{15}$$

где i, k, m — произвольная комбинация из трех разных чисел 1, 2, 3.

г) При $i = k \neq j = l$; соотношения (11) дадут

$$c_{ijim} = 0. \tag{16}$$

Заметим, что в силу (15) и (16) соотношения (14) удовлетворяются тождественно.

д) Пусть, наконец, $i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$, $k = l$. Тогда получим

$$2\omega_{kp}c_{ijkp} + \omega_{jp}c_{ipkk} + \omega_{ip}c_{pjkk} = 0,$$

где суммирование производится только по индексу p. Рассуждения, подобные проведенным выше, показывают, что из этих соотношений следуют равенства

$$c_{iikk} = c_{jjkk}. \tag{17}$$

Перепишем (13) в виде

$$c_{iiil} = c_{iikk} + 2c_{ikik}.$$

Вычитая эти соотношения из исходных равенств (13) и учитывая, что в силу (17)

$$c_{iijj} = c_{iikk},$$

получим

$$c_{ijij} = c_{ikik}. \tag{18}$$

Больше никаких соотношений на компоненты тензора c_{ijkl} получить нельзя, так как мы использовали все независимые соотношения (11), общее число которых, как уже указывалось ранее, равно 21. Соотношения (17) можно переписать в виде

$$c_{1122} = c_{1133} = c_{2233} = \lambda,$$

а соотношения (18) — в виде

$$c_{1212} = c_{1313} = c_{2323} = \mu.$$

Тогда равенства (13) дадуг

$$c_{1111} = c_{2222} = c_{3333} = \lambda + 2\mu.$$

Таким образом, для изотропной среды тензор c_{ijkl} имеет всего две независимые компоненты, 9 отличных от нуля компонент, и 15 его компонент равны нулю. Величины λ и μ, через которые выражаются компоненты этого тензора, называются *коэффициентами Ламе.*

Рассмотрим теперь тензор

$$t_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}).$$

Он обладает симметриями типа (6) и (7). Непосредственной проверкой легко убедиться, что компоненты этого тензора в точности совпадают с полученными выше значениями компонент тензора c_{ijkl}. Поэтому для изотропной среды тензор модулей упругости может быть записан в виде

$$c_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}).$$

Соотношения (8), которые связывают тензор деформации ε_{ij} и тензор напряжений σ_{ij} в изотропной среде могут быть переписаны так:

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}. \tag{19}$$

Представим деформацию, определяемую тензором ε_{ij}, в виде суммы деформации чистого сдвига и всесторрннего сжатия. Тогда

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} + \varepsilon''_{ij},$$

где

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}, \qquad \varepsilon''_{ij} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}.$$

Подставляя это разложение в соотношения (19), получим

$$\sigma_{ij} = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon'_{ij}. \qquad (20)$$

Коэффициент

$$k = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

называют *модулем всестороннего сжатия* упругой среды, а коэффициент μ — *модулем сдвига.*

Соотношения (19) и (20) позволяют получить обратные формулы, выражающие тензор деформации ε_{ij} через тензор напряжений σ_{ij}. Свертывая соотношения (20) по индексам *i* и *j* и учитывая, что $\varepsilon'_{ii} = 0$, мы получим

$$\sigma_{kk} = 3k\varepsilon_{kk},$$

откуда

$$\varepsilon_{kk} = \frac{1}{3k}\sigma_{kk}.$$

Подставляя это соотношение в (19), заменим там коэффициент λ через $k - \frac{2}{3}\mu$ и разрешим полученное соотношение относительно ε_{ij}. Тогда найдем

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{9k}\delta_{ij}\sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}\right).$$

Первый член суммы, стоящей в правой части, определяет всестороннее сжатие тела, а второй — его деформацию сдвига. Последнее соотношение может быть переписано также в форме

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2\mu - 3k}{18\mu k}\delta_{ij}\sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}.$$

Отсюда ясно, что тензор модулей податливости однородной изотропной среды может быть записан в виде

$$s_{ijkl} = \frac{2\mu - 3k}{18\mu k}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{4\mu}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}).$$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Главные коэффициенты теплового расширения кристалла гипса равны

$$\alpha_1 = 1{,}6\cdot 10^{-6}, \quad \alpha_2 = 42\cdot 10^{-6}, \quad \alpha_3 = 29\cdot 10^{-6}$$

град$^{-1}$. Определить:

а) коэффициент объемного расширения гипса;

б) коэффициент расширения гипса в направлении, образующем равные углы с главными направлениями теплового расширения.

2. Найти строение тензора пьезоэлектрических модулей для кристаллов, обладающих следующими элементами симметрии:

а) плоскостью симметрии;

б) осью симметрии третьего порядка;

в) осью симметрии четвертого порядка;

г) осью симметрии шестого порядка;

д) допускающих циклическую перестановку осей.

3. Найти строение тензора пьезоэлектрических модулей для кристаллов, принадлежащих к следующим кристаллическим системам:

а) кубической (имеющей три взаимно перпендикулярные оси четвертого порядка);

б) ромбической (имеющей три взаимно перпендикулярные оси второго порядка).

4. Найти уравнение характеристической поверхности тензора пьезоэлектрических модулей

а) для кристаллов, имеющих ось симметрии второго порядка;

б) для кристаллов, указанных в задаче 2;

в) для кристаллов, указанных в задаче 3.

5. Найти строение тензора модулей упругости для кристаллов, обладающих следующими элементами симметрии:

а) осью симметрии третьего порядка;

б) осью симметрии четвертого порядка;

в) осью симметрии шестого порядка;

г) допускающих циклическую перестановку осей.

6. Найти строение тензора модулей упругости для кристаллов, принадлежащих к следующим кристаллическим системам:

а) кубической;

б) ромбической.

Литература

Основная

1. Горбатов В.А. Основы дискретной математики. - М.: Высшая школа, 1986.

2. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики. - М.:Энергия, 1980.

3. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. - М.:Энергия, 1980.

4. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика.- М.: Наука, 1990.

5. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера.-К.: Техника, 1977.

6. Кузичев А.С. Диаграммы Венна.- М.: Наука, 1968.

7. Кононюк А.Ю. Высшая математика. В 2 ч. Ч.1, 2 - К:Цвета, 2007.

8. Аверкин А.Н., Батыршин И.З. и др. Нечеткие множества в моделях управления и икусственного интелекта.- М.: Наука, 1986.

9. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств.- М.: Радио и связь, 1982.

10. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику.- М.: Наука, 1975.

11. Згуровский М.З. Интегрированные системы оптимального управления и проектирования.- К.: Высшая школа, 1990.

13. Минский М. Фреймы для представления знаний. - М.:Энергия, 1979.

14. Вильсон А. Дж. Энтропийные методы моделирования сложных систем.- М.: Наука, 1978.

15. В.Ю. Юрков, О.В. Лукина /Прикладная геометрия, вып. 8, N 18 (2006), стр. 9-36.

16. И.И. Ежев, А.В. Скороход, М.И. Ядренко. Элементы комбинаторики.-М.: Наука, 1977.
17. Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп. Под ред. М.А. Арбиба. - М.: Статистика, 1975.
18. Минк Х. Перманенты. М.: Мир, 1982.
19. Холл. М. М.: Мир, 1970.
20. Ф.Р. Гантмахер. Теория матриц. - М.: Наука, 1967.
21. М.А. Акивис, В.В. Гольдберг. Тензорное исчисление. - М.: Наука, 1972.

Дополнительная

1. Айне Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, ДНТВУ, 1939, гл. XIX.
2. Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, ГостехизДат, 1948, гл. I.
3. Ахиезер Н. И. и Крейн М. Г., О некоторых вопросах теории моментов, ДНТВУ, 1938.
4. Беркштейн С. Н., Теория вероятностей, 4-е изд., ГостехизДат, 1946.
5. Б о хер М., Введение в высшую алгебру, ОНТИ, 1933.
6. Булгаков Б. В., Колебания, т. I, ГостехизДат, 1949, гл. I.
7. Г а н т м а х е р Ф. Р. и Крейн М. Г., Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, 2-е изд., Гостехиздат, 1950.
8. Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, 3-е изд., Изд-во «Наука», 1966.
9. Геронимус Я. Л., Теория ортогональных многочленов, Гостехиздат, 1950, гл. II.
10. Граве Д. А., Элементы высшей алгебры, Киев, 1914.
11. Еругин Н. П., Приводимые системы, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. XIII (1946).
12. Еругин Н. П., Метод Лаппо-Данилевского в теории линейных дифференциальных уравнений, Изд-во Лешшгр. ун-та, 1956.
13. Каган В. Ф., Основания теории определителей, Гос. изд-во Украины, 1922.
14. Клейн Ф., Высшая геометрия, ГОНТИ, 1939, §§ 96—99.
15. Крейн М. Г., Основные положения теории Х-зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, Сб. «Памяти А. А. Андронова», Изд-во Академии наук СССР, 1955.

16. Крейн М. Г. и Наймарк М. А., Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений, Харьков, 1936.
17. Крейн М. Г. и Рутман М. А., Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, УМН 3, № 1 (23) (1948).
18. Кудрявцев Л. Д., О некоторых математических вопросах теории электрических цепей, УМН 3, № 4 (26) (1948).
19. Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. I, 3-е изд., Гостехиздат, 1951, гл. I, П.
20. К у р о ш А. Г., Курс высшей алгебры, 3-е изд., Гостехиздат, 1952.
21. Л а п п о-Д анилевский И. А., а) Теория функций от матриц и систем линейных дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1934. б) Mernoires sur la theorie des systemes des equations differentielles lineaires, т. I, 11, III, Труды Физико-матем. ин-та им. В. А. Стеклова, VI—VIII (1934—1936).
22. Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950.
23. Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, Гостехиздат, 1952.
24. Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, Гостехиздат, 1948.
25. Марков А. А., Избранные труды, Гостехиздат, 1948.
26. М е й м а н Н. Н., Некоторые вопросы расположения корней полиномов, УМН 4, № 6 (34) (1949).
27. Наймарк Ю. И., Устойчивость линеаризованных систем, Изд-во Ленингр. Военно-воздушной инж. академии, 1949.
28. П о т а п о в В. П., Мультипликативная структура *J*-нерастягивающих матриц функций/ Труды Моск. матем. о-ва 4 (1955).
29. Романовский В. И., Дискретные цепи Маркова, Гостехиздат, 1948.
30. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III**,** Физматгиз, 1958.
31. Стильтьес Т. И., Исследование о непрерывных дробях, ОНТИ, Харьков, 1936.

Научно-практическое издание

Кононюк Анатолий Ефимович

Дискретная математика

Книга 3

Матрицы

Часть 2

Авторская редакция

Подписано в печать 30.09.2011 г.
Формат 60х84/16.
Усл. печ. л. 16,5. Тираж 300 экз.

Издатель и изготовитель:
Издательство «Освита Украины»
04214, г. Киев, ул. Героев Днепра, 63, к. 40
Свидетельство о внесении в Государственный реестр
издателей ДК №1957 от 23.04.2009 г.
Тел./факс (044) 411-4397; 237-5992