Парадигма развития науки

Методологическое обеспечение

А.Е. Кононюк

ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНАЯ МАТЕМАТИКА

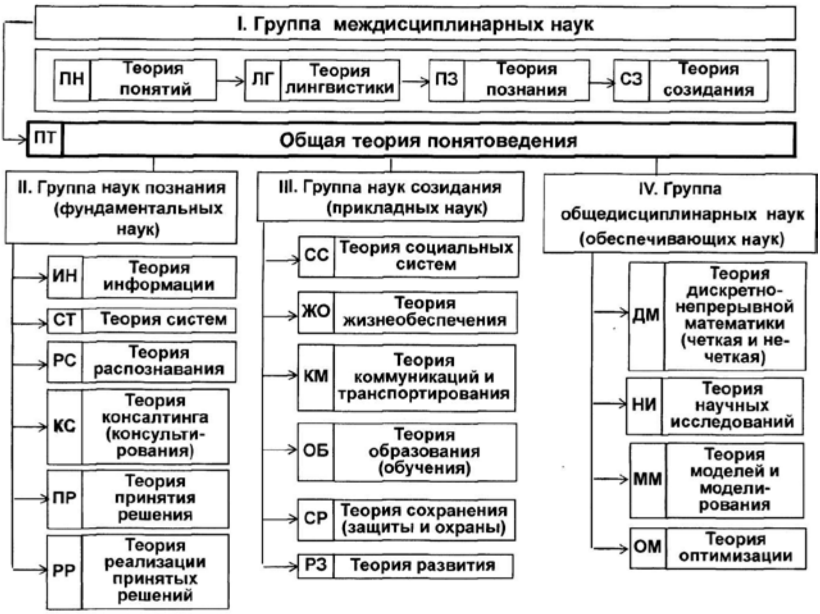
Книга 5

Матрицы

Часть 4

Киев
Освіта України
2012

Структурная схема развивающейся панмедийной системы наук



УДК 51 (075.8)
ББК В161.я7
К 213

Рецензенты: *М.К.Печурин* **-** д-р техн. наук, проф. (Национальный авиационный университет).

Кононюк А.Е.
К65 Дискретно-непрерывная математика. Матрицы. К.5.Ч.4.
К.4:"Освіта України", 2012. - 508 с.
ISBN 978-966-7599-50-8

Многотомная работа содержит систематическое изложение математических дисциплин, иссползуемых при моделировании и исследованиях математических моделей систем.

В работе излагаются основы теории множеств, отношений, поверхностей, пространств, алгебраических систем, матриц, графов, математической логики, теории формальных грамматик и автоматов, теории алгоритмов, которые в совокупности образуют единную методолгически взамосвязанную математическую систему «Дискретно-непрерывная математика».

Для бакалавров, специалистов, магистров, аспирантов, докторантов и просто ученых и специалистов всех специальностей.

ББК В161.я7

ISBN 978-966-7599-50-8

Оглавление

Модуль 14. Введение в матричный анализ……………………………4
Микромодуль 43. Векторные пространства, матрицы, определители…………………………………………………………4
Микромодуль 44. Ранг, невырожденность, скалярное произведение, блочные матрицы……………………………………18
Микромодуль 45. Специальные матрицы……………………..33
Модуль 15. Собственные значения, собственные векторы и подобие…………………………………………………………..45
Микромодуль 46. Собственные значения…………………………..45
Микромодуль 47. Подобие и собственные векторы……………...58
Модуль 16. Унитарная эквивалентность и нормальные матрицы……82
Микродуль 48. Унитарная эквивалентность………………………..82
Микромодуль 49.Нормальные матрицы и *QR*-разложения………124
Модуль 17. Канонические формы………………………………145
Микромодуль 50. Жордановы канонические формы……………...145
Микромодуль 51. Многочлены и матрицы………………………...172
Модуль 18. Эрмитовы и симметричные матрицы…………………...200
Микромодуль 52. Эрмитовы матрицы……………………………200
Микромодуль 53. Симметричные матрицы………………………243
Модуль 19. Нормы векторов и матриц………………………………..312
Микромодуль 54. Нормы векторов………………………………..312
Микромодуль 55. Нормы матриц…………………………………352
Модуль 20. Локализация и возмущения собственных значений…….412
Микромодуль 56. Локализаци собственных значений……………412
Микромодуль 57. Возмущение собственных значений…………..434
Микромодуль 58. Неравенства для собственных и сингулярных чисел……………………………………………………………463
Приложения……………………………………………………………...492
Литература……………………………………………………………502
Указатель обозначений………………………………………………505

Модуль 14.
Введение в матричный анализ

Излагаемый в этой книге материал по матричному анализу базируется на труде известных американских математиков Р.Хорна, Ч.Джонсона «Матричный анализ», представляющий собой исчерпывающее изложение теории матриц, которая находит применение практически в любой области математики и во всех ее приложениях. Она содержит как классический материал, так и последние достижения в этой обширной области, в ней много упражнений и задач разной степени трудности. Книга сопоставима с известной книгой Ф. Р. Гантмахера, но гораздо шире ее в таких разделах, как оценки погрешностей при решении линейных уравнений, локализация собственных значений, теория возмущений.

В настоящем модуле приводится (сжато и без доказательств) ряд полезных понятий и фактов, на многие из которых явно или неявно опирается основной материал настоящей книги. Большинство из них в той или иной форме должно входить в элементарный курс линейной алгебры. Однако есть и не столь широко известные; некоторые из них рассматриваются здесь, а не в последующих главах из-за того, что плохо вписываются в их структуру. Таким образом, данный модуль может служить кратким обзором, предваряющим книгу, или справочником, к которому удобно обращаться по мере необходимости. Для дальнейших ссылок здесь даются также основные обозначения и некоторые определения. Мы предполагаем, однако, что читатель уже хорошо знаком с элементарными понятиями линейной алгебры и техникой выполнения таких матричных операций, как умножение и сложение матриц.

Микромодуль 43.
Векторные пространства, матрицы, определители

14.1. Векторные пространства

В нашем изложении понятие векторного пространства будет использоваться, как правило, неявно. Тем не менее оно является фундаментальным для всей теории матриц.

14.1.1. Основное поле.

Определение векторного пространства базируется на понятии поля, или множества скаляров, на которые можно умножать векторы. В наших построениях это поле почти всегда будет полем **R** вещественных чисел или полем **C** комплексных чисел (см. приложение А) с обычными операциями сложения и умножения. Однако это может быть и поле рациональных чисел, поле вычетов по простому модулю или какое-то иное поле. В случае когда не указано, какое именно поле имеется в виду, будем использовать для него символ **F**. **Множество скаляров будет полем, если оно замкнуто относительно двух заданных бинарных операций (называемых сложением и умножением)**, причем выполняются следующие условия: обе эти операции ассоциативны и коммутативны и каждая обладает нейтральным элементом; обратные элементы относительно операции сложения существуют (и содержатся в том же множестве) для всех элементов, относительно операции умножения - для всех элементов, кроме нейтрального элемента 0 операции сложения; операция умножения дистрибутивна относительно операции сложения.

14.1.2. Векторные пространства.

Векторное пространство (Часто используется также термин *линейное пространство*) *V* над полем **F** — это множество объектов (называемых *векторами),* замкнутое относительно бинарной операции (называемой *сложением),* которая ассоциативна, коммутативна и обладает нейтральным элементом (0); для каждого элемента существует обратный элемент относительно этой операции, принадлежащий тому же множеству. Это множество замкнуто также относительно операции левого умножения вектора на скаляр из поля **F**, причем для любых $a,\ b \in \mathbf{F}$ и для любых $x,\ y \in V$ выполняются следующие соотношения: $a(x+y)=ax+ay,\quad (a+b)x=ax+bx,\ a(bx)=(ab)x,\ ex=x,$ где $e \in \mathbf{F}$ — нейтральный элемент относительно умножения.

Для заданного поля **F** и целого положительного числа *n* множество $\mathbf{F}^n$ упорядоченных *n*-членных наборов с компонентами из **F** образует векторное пространство над **F** при очевидном определении операций (наборы складываются покомпонентно). В частных случаях получаем векторные пространства $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{C}^n$ — основные для данной книги. Другие примеры векторных пространств (над **R** или **C**): многочлены с вещественными или комплексными коэффициентами (степени не выше заданной или же всевозможных степеней) и непрерывные или произвольные функции на отрезке $[a, b] \subset \mathbf{R}$ с вещественными либо комплексными значениями. Конечно, имеется существенное различие между конечномерным пространством $\mathbf{R}^n$ и бесконечномерным векторным пространством непрерывных функций на [0, 1] с вещественными значениями.

14.1.3. Подпространства и линейная оболочка.

Подпространство U векторного пространства V — это подмножество в V, которое само является векторным пространством над тем же самым полем. Например, множество $\{[a, b, 0]^T\colon\ a,\ b \in \mathbf{R}\}$ есть подпространство в $\mathbf{R}^3$. Как правило, подпространство векторного пространства V определяется при помощи некоторых соотношений, выделяющих часть векторов из V таким образом, чтобы обеспечить ее замкнутость относительно сложения элементов в V; например, подпространство составляют векторы из $\mathbf{R}^3$ с последней компонентой 0. При этом получающееся множество полезно рассматривать именно как подпространство, а не как самостоятельное векторное пространство. В любом случае пересечение двух подпространств есть снова подпространство.

Если S — подмножество векторного пространства V, то его *линейной оболочкой* называется множество

$$\operatorname{Span} S \equiv \{a_1v_1 + a_2v_2 + \ \dots\ + a_kv_k\colon\ a_1,\ \dots,\ a_k \in \mathbf{F},\\ v_1,\ \dots,\ v_k \in S,\ k = 1,\ 2,\ \dots\}.$$

Заметим, что Span S — всегда подпространство, даже если S подпространством не является. Говорят, что S *порождает* векторное пространство V, если Span $S = V$.

14.1.4. Линейная зависимость и независимость.

Множество векторов $\{x_1,\ \dots,\ x_k\}$ в векторном пространстве называется *линейно зависимым,* если существуют коэффициенты $a_1,\ \dots\ \ \dots,\ a_k \in \mathbf{F}$, такие, что не все из них равны нулю и

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ \dots\ + a_kx_k = 0.$$

Это эквивалентно тому, что один из векторов x_i выражается в виде линейной комбинации остальных векторов с коэффициентами из $\mathbf{F}$ (эквивалентность имеет место при $k \geq 2$.). Например, множество $\{[1,\ 2,\ 3]^T,\ \ [1, 0, -1]^T,\ [2, 2, 2]^T\}$ линейно зависимо в $\mathbf{R}^3$.

Подмножество в *V*, не являющееся линейно зависимым над **F**, называется *линейно независимым.* Например, множество $\{[1,2,3]^T,\ [1,0,-1]^T\}$ линейно независимо в $\mathbf{R}^3$. Важно заметить, что оба понятия по сути своей относятся к *множествам* векторов. Любое подмножество линейно независимого множества также линейно независимо; {0}—линейно зависимое множество и, следовательно, любое множество, содержащее вектор 0, линейно зависимо. Множество векторов может быть линейно зависимым, в то время как любое его собственное подмножество линейно независимо.

14.1.5. Базис.

Подмножество *S* векторного пространства *V* *порождает V,* если любой элемент из *V* можно представить как линейную комбинацию элементов из *S* (с коэффициентами из соответствующего основного поля). Например, множество $\{[1,0,0]^T,\ [0,1,0]^T,\ [0,0,1]^T,\ [1,0,-1]^T\}$ порождает $\mathbf{R}^3$ над **R** (или $\mathbf{C}^3$ над **C**). Линейно независимое множество, порождающее векторное пространство *V*, называется его *базисом.* Существует много различных базисов. Однако все они обладают следующим замечательным свойством: любой элемент из V можно разложить по базису единственным способом, но это утверждение становится неверным как при пополнении базиса каким-либо элементом, так и при исключении любого из элементов. Линейно независимое множество элементов из V составляет базис в том и только в том случае, если при любом его пополнении оно становится линейно зависимым. Для того чтобы множество, порождающее *V*, являлось базисом, необходимо и достаточно, чтобы ни одно из его собственных подмножеств не порождало *V*. Любое векторное пространство имеет базис.

14.1.6. Дополнение до базиса.

Любое линейно независимое множество векторов в векторном пространстве *V* можно дополнить до базиса; другими словами, для любого линейно независимого множества $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset V$ всегда найдутся дополнительные векторы $x_{k+1}, \ldots, x_n, \ldots \in V$, такие, что множество $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ есть базис в *V*. Дополнительные векторы, конечно, определяются неоднозначно (например, линейно независимое множество $\{[1,0,0]^T,\ [0,1,0]^T\}$ дополняется до базиса в $\mathbf{R}^3$ любым вектором с ненулевой третьей компонентой). Пример вещественного векторного пространства **C** [0, 1] непрерывных вещественнозначных функций на [0, 1] показывает, что базис в общем случае может не быть конечным. Бесконечное множество одночленов $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ линейно независимо в **C** [0, 1]

14.1.7. Размерность.

Если один из базисов векторного пространства *V* состоит из конечного числа элементов, то и любой базис содержит такое же число элементов, и это число называется *размерностью* векторного пространства *V*. В этом случае *V* называется *конечномерным,* а в противном — *бесконечномерным.* Между любыми двумя базисами в бесконечномерном пространстве (например, в **C** [0,1]) существует взаимно однозначное соответствие. Размерность вещественного векторного пространства $\mathbf{R}^n$ равна *n.* Векторное пространство $\mathbf{C}^n$ имеет размерность *n* над полем **C** и 2*n* над полем **R**. Базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, в котором *i*-я компонента вектора e_i равна 1, а остальные равны нулю, называется иногда *стандартным* или *естественным базисом* в $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{C}^n$.

14.1.8. Изоморфизм.

Пусть *U* и *V* — векторные пространства над одним и тем же полем **F** и $f\colon U \to V$ — обратимая функция, такая, что $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$ для всех $x, y \in U$ и для всех $a, b \in \mathbf{F}$. В этом случае *f* называется *изоморфизмом,* а *U* и *V* называются *изоморфными* («одинаково устроенными»). Два конечномерных векторных пространства над одним и тем же полем изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность. Таким образом, любое «-мерное векторное пространство над полем F изоморфно F". Всякое *n*-мерное вещественное или комплексное векторное пространство, следовательно, изоморфно соответственно $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{C}^n$. Конкретно: если *V* есть *n*-мерное векторное пространство над полем **F** и $\mathscr{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — его базис, то, поскольку любой элемент $x \in V$ однозначно записывается в виде $x = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$, где $a_i \in \mathbf{F}$, $i = 1, \ldots, n$, мы можем вектору *x* поставить в соответствие столбец $[x]_{\mathscr{B}} = [a_1, \ldots, a_n]^T$, и отображение $x \to [x]_{\mathscr{B}}$ является изоморфизмом между *V* и F^n, отвечающим базису $\mathscr{B}$.

14.2. Матрицы

При изучении матриц важно иметь в виду следующие два подхода к их определению: с одной стороны, матрица рассматривается как прямоугольный массив скаляров; с другой стороны, она представляет линейное отображение одного векторного пространства в другое, когда в каждом из них фиксирован базис.

14.2.1. Прямоугольный массив.

Матрица — это массив размера $m \times n$, заполненный скалярами из поля **F**. В случае $m = n$ матрица называется *квадратной.* Множество всех $m \times n$-матриц, или матриц размера $m \times n$, над **F** обозначается через $M_{m,n}(\mathbf{F})$ или $M_n(\mathbf{F})$, *если* $m = n$ (при $m = n$ говорят о матрице *порядка* n). В наиболее распространенном случае, когда **F=C**, вместо $M_n(\mathbf{C})$ и $M_{m,n}(\mathbf{C})$ будем писать M_n и $M_{m,n}$. Как правило, матрицы обозначаются заглавными буквами. Например, матрица

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -1 & \pi & 4 \end{bmatrix}$$

принадлежит $M_{2,3}(\mathbf{R})$. *Подматрица* какой-либо матрицы — это прямоугольный массив, расположенный в выделенных строках и столбцах исходной матрицы. Для матрицы A, приведенной выше, в качестве подматрицы можно рассмотреть, например, $[\pi \ 4]$ — это подматрица, расположенная во второй строке и во втором и третьем столбцах матрицы A.

14.2.2. Линейные отображения.

Пусть U есть n-мерное, а V есть m-мерное векторные пространства над одним и тем же полем **F**. Базисы в U и в V обозначим соответственно через $\mathscr{B}_U$ и $\mathscr{B}_V$. С помощью изоморфизмов $x \to [x]_{\mathscr{B}_U}$ и $y \to [y]_{\mathscr{B}_V}$ векторы из U и V представим как столбцы соответственно с n и m компонентами, принадлежащими **F**. *Линейное отображение* — это функция $T\colon U \to V$, удовлетворяющая соотношению $T(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1T(x_1) + a_2T(x_2)$ для любых скаляров a_1, a_2 и люоых векторов x_1, x_2. (Если $U=V$, то такое отображение называется *линейным преобразованием.*) Всякому линейному отображению $T\colon U \to V$ отвечает матрица

$A \in M_{m,n}(\mathbf{F})$, такая, что вектор y имеет вид $y = T(x)$ тогда и только тогда, когда $[y]_{\mathscr{B}_V} = A[x]_{\mathscr{B}_U}$.

Говорят, что матрица A *представляет* линейное отображение T в базисах $\mathscr{B}_U$ и $\mathscr{B}_V$ (представляющая матрица A зависит от выбранных базисов). Итак, изучая матрицу A, мы по существу изучаем линейное отображение по отношению к каким-то базисам, но явное указание этих базисов во многих случаях не обязательно.

14.2.3. Векторные пространства, связанные с заданной матрицей или линейным отображением.

В качестве векторного пространства размерности n над полем $\mathbf{F}$, не ограничивая общности, можно всегда рассматривать $\mathbf{F}^n$. Матрицу $A \in M_{m,n}(\mathbf{F})$ мы будем рассматривать как линейное отображение из $\mathbf{F}^n$ в $\mathbf{F}^m$ (и, конечно, как массив). *Областью определения* такого линейного отображения является $\mathbf{F}^n$, а *областью значений* — множество $\{y \in \mathbf{F}^m\colon\ y = Ax,\ x \in \mathbf{F}^n\}$. *Нуль-пространство* (или *ядро)* матрицы A есть $\{x \in \mathbf{F}^n\colon Ax = 0\}$. Область значений матрицы A является подпространством в $\mathbf{F}^m$, а нуль-пространство — подпространством в $\mathbf{F}^n$. Справедливо следующее соотношение:

n = размерность нуль-пространства матрицы A+
+ размерность области значений матрицы A.

14.2.4. Матричные операции.

Сложение матриц определяется как покомпонентное сложение массивов одинаковых размеров и обозначается символом + (A+B). Оно отвечает сложению линейных отображений, заданных относительно одной и той же пары базисов, и наследует коммутативность и ассоциативность операции сложения скаляров в соответствующем поле. В роли нейтрального элемента выступает нулевая матрица, т. е. матрица с нулевыми элементами. Множество $M_{m,n}(\mathbf{F})$ само является векторным пространством над $\mathbf{F}$. Умножение матриц определяется обычным способом и отвечает композиции линейных отображений; произведение матриц A и B обозначается через AB. При этом предполагается, что $A \in M_{m,n}(\mathbf{F})$, $B \in M_{p,q}(\mathbf{F})$, где $p = n$.
Умножение матриц ассоциативно, но, вообще говоря, не коммутативно. Например,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Однако коммутативность может иметь место для матриц из каких-то подмножеств множества $M_n(\mathbf{F})$. Нейтральным элементом относительно умножения является единичная матрица $I \in M_n(\mathbf{F})$ вида

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Эта матрица и все матрицы, полученные из нее умножением на скаляр — так называемые *скалярные матрицы,* — коммутируют с любыми матрицами из $M_n(\mathbf{F})$, и никакие другие матрицы таким свойством не обладают. Умножение матриц дистрибутивно относительно сложения матриц.

Заметим, что символ 0 используется для обозначения числа «нуль», нулевого вектора (все координаты этого вектора равны нулю) и нулевой матрицы (все элементы этой матрицы равны нулю). Обычно из контекста ясно, о чем идет речь, и путаницы не возникает. Символ I используется для обозначения единичной матрицы произвольного размера. При необходимости вводится индекс, указывающий ее размер.

14.2.5. Транспонированные и сопряженные матрицы.

Если $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbf{F})$, то *транспонированная* матрица A^T принадлежит $M_{n,m}(\mathbf{F})$ и представляет собой матрицу с элементами a_{ji}, т. е. строки и столбцы меняются местами. Например,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Разумеется, $(A^T)^T = A$. Для $A \in M_{m,n}(\mathbf{C})$ *сопряженная матрица* A^* определяется соотношением $A^* = \bar{A}^T$, где $\bar{A}$ получается из A заменой всех ее элементов на комплексно-сопряженные. Например,

$$\begin{bmatrix} 1+i & 2-i \\ -3 & -2i \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 1-i & -3 \\ 2+i & 2i \end{bmatrix}.$$

И транспонированные, и сопряженные (и обратные) матрицы подчиняются следующему *закону обращения порядка:*
$(AB)^* = B^*A^*$ и $(AB)^T = B^TA^T$, при условии, что умножение выполнимо. В то же время $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$, т.е. при переходе к комплексно-сопряженным матрицам не происходит перестановки сомножителей. Если x, $y \in M_{n,1} = \mathbf{C}^n$, то y^*x есть скаляр и применительно к нему сопряжение и комплексное сопряжение дают один н тот же результат, т. е. $(y^*x)^* = \overline{y^*x} = x^*y = y^T\bar{x}$.

14.2.6. Техника матричного умножения.

Отметим некоторые весьма и весьма полезные свойства умножения матриц.

1. Если b_j обозначает j-й столбец матрицы B, то j-й столбец произведения AB имеет вид Ab_j.
2. Если a_i обозначает i-ю строку матрицы A, то i-я строка произведения AB имеет вид a_iB.

Другими словами, произведение AB можно рассматривать как результат умножения столбцов матрицы B на матрицу A слева и как результат умножения строк матрицы A на матрицу B справа. Дальше мы обсудим аналогичные наблюдения в случае, когда один из сомножителей является диагональной матрицей.

3. Если $A \in M_{m,n}(\mathbf{F})$ и $x \in \mathbf{F}^n$, то Ax есть линейная комбинация столбцов матрицы A, где коэффициентами служат координаты вектора x.
4. Если $A \in M_{m,n}(\mathbf{F})$ и $y \in \mathbf{F}^m$, то y^TA есть линейная комбинация строк матрицы A, где коэффициентами служат координаты вектра y.

14.3. Определители

Часто в математике бывает полезно охарактеризовать объект, определяемый многими параметрами, с помощью одной величины. Определитель — пример такого рода. Он вводится только для квадратных матриц $A \in M_n(\mathbf{F})$. Мы рассмотрим два важных способа его определения — различных, но, естественно, эквивалентных. Определитель матрицы $A \in M_n(\mathbf{F})$ обозначается через $\det A$.

14.3.1. Разложение Лапласа.

Определитель матрицы $A=[a_{ij}]\in M_n(\mathbf{F})$ можно ввести, используя индукцию по *n*. Предположим, что уже известно, что такое определитель матриц из $M_{n-1}(\mathbf{F})$. Для матрицы $A\in M_n(\mathbf{F})$ рассмотрим подматрицы $A_{ij}\in M_{n-1}(\mathbf{F})$, получаемые после удаления *i*-й строки и *j*-го столбца. Тогда для всех $i\leqslant n,\ j\leqslant n$

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A_{ij}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A_{ij},$$

и это число по определению есть det *A*. Левая часть данного равенства представляет собой разложение Лапласа по *i*-й строке, а правая — по *j*-му столбцу матрицы *A*. Любое из них можно использовать для выражения определителя. Это индуктивное построение начинается с того, что определителем матрицы размера 1×1 называется значение единственного ее элемента. Таким образом,

$$\det[a_{11}]=a_{11},$$

$$\det\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\det\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

и т. д. Очевидно также, что $\det A^T=\det A$ и $\det A^*=\overline{\det A}$ для $A\in M_n(\mathbf{C})$.

14.3.2. Альтернирующая сумма.

В соответствии с приведенными выше примерами определителей 1-го, 2-го и 3-го порядка для произвольной матрицы $A=[a_{ij}]\in M_n(\mathbf{F})$ имеем

$$\det A=\sum_{\sigma}\operatorname{sgn}\sigma\prod_{i=1}^{n}a_{i\sigma(i)},$$

где σ пробегает множество всех *n!* перестановок из *n* чисел $\{1,\ \dots,\ n\}$ (для числа, поставленного на *i*-е место, используется обозначение σ*(i)*. Обычно функцию σ(*i*) называют *подстановкой*) и sgn σ есть знак перестановки σ, т. е. это +1 либо —1 в зависимости от того, четно или нечетно число транспозиций (т. е. перемен местами какой-либо пары чисел), необходимое для того, чтобы от расположения $\{1, 2, \ldots, n\}$ перейти к σ. Итак, каждое произведение

$$a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}$$

входит в определитель со знаком + в случае четной перестановки σ и со знаком — в случае нечетной.

Заменив sgn σ на какую-либо другую функцию, получим вместо det A так называемую *обобщенную матричную функцию.* Например, заменим sgn σ на постоянную, равную 1. Полученная функция называется *перманентом,* и перманент матрицы A обозначается через per A.

14.3.3. Элементарные преобразования.

Используя три простых и основополагающих преобразования, можно любую матрицу привести к простой и однозначно определяемой канонической форме, очень удобной для таких задач, как решение систем линейных уравнений, вычисление определителей, обращение матрицы и нахождение ранга. Опишем эти типы преобразований, ориентируясь на действия со строками.

1. Перестановка двух строк

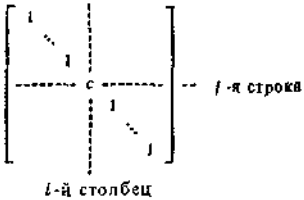
Для того чтобы в матрице поменять местами i-ю и j-ю строки**,** нужно умножить ее слева на матрицу

$$\begin{array}{cl}
\begin{bmatrix}
1 & & & \vdots & & & & \vdots & & \\
& \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & \\
& & 1 & \vdots & & & & \vdots & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots \\
& & & \vdots & 1 & & & \vdots & & \\
& & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\
& & & \vdots & & & 1 & \vdots & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\
& & & \vdots & & & & \vdots & \ddots & \\
& & & \vdots & & & & \vdots & & 1
\end{bmatrix}
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \text{--- } i\text{-я строка} \\ \\ \\ \\ \text{--- } j\text{-я строка} \\ \\ \\
\end{array}
\\
\qquad\qquad i\text{-й столбец} \quad j\text{-й столбец} &
\end{array}$$

в которой лишь два внедиагональных элемента отличны от нуля, они равны 1 и занимают позиции (i,j) и (j,i); элементы, не указанные явно, нулевые.

2. Умножение строки на ненулевое число

Умножение i-й строки матрицы A на число c можно выполнить с помощью умножения слева на матрицу



в которой c находится в позиции i, i.

3. Прибавление к строке другой строки, умноженной на число

Чтобы к j-й строке матрицы A прибавить i-ю строку, предварительно умноженную на число c, умножим A слева на матрицу

в которой число c расположено в позиции (j, i).

Заметим, что матрицы любого из трех элементарных преобразований получаются в результате применения соответствующего преобразования к единичной матрице I.

При выполнении преобразования 1-го, 2-го или 3-го типа определитель соответственно умножается на —1, умножается на c или не изменяется. Вследствие этого у матрицы, имеющей нулевую строку или две линейно зависимые строки, или k линейно зависимых строк, определитель равен нулю. Матрица имеет нулевой определитель в том и только в том случае, когда множество ее строк линейно зависимо.

14.3.4. Ступенчатая форма.

Всякой матрице $A \in M_{m,n}(\mathbf{F})$ соответствует каноническая форма в $M_{m,n}(\mathbf{F})$ — *(строчная) ступенчатая форма* матрицы A, к которой она приводится посредством (неоднозначно определенной) последовательности элементарных преобразований. Многие матрицы обладают одной и той же ступенчатой формой, но любая из них имеет единственную ступенчатую форму, не зависящую от последовательности элементарных преобразований, используемой для ее построения. Ступенчатая форма полностью определяется следующими свойствами:

(a) В любой ненулевой строке первый ненулевой элемент, называемый ведущим, равен 1.

(b) Все остальные элементы столбца, содержащего ведущий элемент, равны нулю.

(c) Любая строка, состоящая только из нулей, находится ниже всех ненулевых строк.

(d) Ведущие «единицы» образуют ступенчатую конфигурацию слева направо, т. е. ведущий элемент данной строки должен находиться правее ведущего элемента строки, лежащей выше ее. Например, матрица

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

является ступенчатой. Определитель матрицы $A \in M_n(\mathbf{F})$ отличен от нуля в том и только в том случае, когда ее ступенчатая форма является единичной матрицей

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

(определитель матрицы *I* равен 1). Чтобы вычислить определитель матрицы *A*, достаточно проследить, как он изменялся в ходе элементарных преобразований, приводящих матрицу к ступенчатой форме.

Рассмотрим систему линейных уравнений $Ax = b$, где матрица $A \in M_{m,n}(\mathbf{F})$ и вектор $b \in \mathbf{F}^n$ заданы, а $x \in \mathbf{F}^n$— неизвестный вектор. Множество решений этой системы не изменится, если одни и те же элементарные преобразования проводятся одновременно для матрицы *A* и для вектора *b*. Решение легко находится по ступенчатой форме расширенной матрицы $[A \ \ b]$. Две системы *эквивалентны,* или *равносильны* (т. е. имеют одно и то же множество решений), тогда и только тогда, когда их расширенные матрицы имеют одинаковую ступенчатую форму.

Несколько позже мы обсудим роль ступенчатой формы прн изучении рангов и обратных матриц.

14.3.5. Мультипликативность.

Определитель является мультипликативной функцией, т. е. для $A,\ B \in M_n(\mathbf{F})$ выполняется соотношение

$$\det AB = \det A \det B.$$

Это одно из важнейших свойств определителей. Его можно доказать с помощью элементарных преобразований, приводящих к ступенчатому виду матрицы *A* и *B*.

14.3.6. Характеристические свойства определителя как функции.

Если зафиксировать все строки матрицы, кроме одной, и рассматривать определитель как функцию только одной этой строки, то это будет линейная функция элементов данной строки. То же справедливо и в отношении столбцов. Линейность очевидна в силу разложения Лапласа: любой элемент строки входит в определитель с постоянным коэффициентом, равным дополнительному минору, взятому со знаком + или —. Функция называется *полилинейной,* если при некотором разбиении множества ее переменных она линейна по совокупности переменных из каждого подмножества, входящего в это разбиение. Это довольно широкий класс функций. Например, функция $f(x_1, x_2) = x_1x_2$ полилинейна (соответствующее разбиение — это $\{x_1\},\ \{x_2\})$. Определитель является *полилинейной* функцией элементов матрицы по отношению к разбиению их на подмножества, отвечающие ее строкам (или столбцам).

Естественно попытаться выделить какие-то свойства скалярной функции от n^2 переменных (т. е. от элементов матрицы $A \in M_n)$, которые в совокупности присущи определителю и только ему. Определитель есть единственная функция $f\colon M_n(\mathbf{F}) \to \mathbf{F}$, которая является одновременно

(a) полилинейной;

(b) альтернирующей (т. е. перестановка пары строк изменяет ее знак);

(c) нормированной, т. е. такой, что $f(I) = 1$, где $I \in M_n(\mathbf{F})$— единичная матрица.

Перманент также является полилинейной (как и другие обобщенные матричные функции) и нормированной, но не альтернирующей функцией.

Микромодуль 44.
Ранг, невырожденность, скалярное произведение, блочные матрицы

14.4. Ранг

С любой матрицей $A \in M_{m,n}(\mathbf{F})$ связывается целое неотрицательное число, называемое ее рангом — для него мы используем обозначение rank A.

14.4.1. Определение.

Ранг матрицы $A \in M_{m,n}$ $(\mathbf{F})$ — это наибольшее число ее столбцов, образующих линейно независимое множество. Такое множество столбцов, конечно, определяется неоднозначно, но каким бы оно ни было, число столбцов в нем неизменно. Примечательно, что всегда имеет место равенство rank A^T = rank A. Поэтому можно предложить другое, но эквивалентное определение ранга в терминах линейно независимых строк. Имея в виду эквивалентность двух определений ранга, часто используют следующую формулировку: строчный ранг равен столбцовому рангу.

14.4.2. Ранг и системы линейных уравнений.

Система линейных уравнений $Ax=b$ может иметь 0, 1 или бесконечно много решений — и других возможностей нет. Если существует хотя бы одно решение, то система называется *совместной.* Для совместности системы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение $\operatorname{rank}[A\ \ b] = \operatorname{rank} A$. Матрица $[A\ \ b]$ называется *расширенной матрицей* системы в отличие от A, называемой *матрицей коэффициентов.* То, что эти две матрицы имеют одинаковый ранг, означает не что иное, как возможность выразить вектор b в виде линейной комбинации столбцов матрицы A. В этом случае при добавлении b к столбцам матрицы A ранг не увеличивается. Решением системы линейных уравнений $Ax=b$ является вектор коэффициентов, с помощью которых b записывается в виде линейной комбинации столбцов матрицы A.

14.4.3. Ступенчатая форма и ранг.

Элементарные преобразования не изменяют ранг, и потому ранг матрицы A совпадает с рангом ее ступенчатой формы. В то же время ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк. При вычислении ранга путем преобразования к ступенчатой форме нужно учитывать *плохую обусловленность* задачи: ошибки округления результатов промежуточных вычислений могут нулевую строку сделать ненулевой и как следствие привести к неправильному определению ранга.

14.4.4. Характеризации ранга.

В различных ситуациях оказываются полезными следующие эквивалентные утверждения относительно любой заданной матрицы $A \in M_{m,n}(\mathbf{F})$:

(a) rank $A = k$;

(b) в матрице A содержатся k линейно независимых строк и в ней не существует более чем k линейно независимых строк;

(c) в матрице A содержатся k линейно независимых столбцов и в ней не существует более чем k линейно независимых столбцов;

(d) в матрице A имеется подматрица размера $k \times k$ с ненулевым определителем и все подматрицы размера $(k+1)\times(k+1)$ имеют нулевой определитель;

(e) размерность области значений матрицы A равна k;

(f) существует k и не больше чем k линейно независимых векторов b, таких, что система линейных уравнений $Ax = b$ является совместной;

(g) $k = n$ — (размерность нуль-подпространства матрицы A).

14.4.5. Неравенства для рангов.

(a) $\operatorname{rank} A \leqslant \min\{m, n\}$ для $A \in M_{m,n}(\mathbf{F})$.

(b) При вычеркивании каких-то строк и (или) столбцов получаем подматрицу, ранг которой не больше ранга исходной матрицы.

(c) Если $A \in M_{m,k}(\mathbf{F})$ и $B \in M_{k,n}(\mathbf{F})$, то

$$(\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B) - k \leqslant \operatorname{rank} AB \leqslant \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}.$$

(d) $\operatorname{rank}(A+B) \leqslant \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \quad (A, B \in M_{m,n}(\mathbf{F}))$.

(e) Если $A \in M_{m,k}(\mathbf{F})$, $B \in M_{k,p}(\mathbf{F})$, $C \in M_{p,n}(\mathbf{F})$, то

$$\operatorname{rank} AB + \operatorname{rank} BC \leqslant \operatorname{rank} B + \operatorname{rank} ABC.$$

Все эти неравенства можно получить как следствия последнего неравенства, несколько более тонкого по сравнению с предыдущими. Это неравенство Фробениуса.

14.4.6. Равенства для рангов.

(a) $\operatorname{rank} A^* = \operatorname{rank} A^T = \operatorname{rank} \bar{A} = \operatorname{rank} A \quad (A \in M_{m,n}(\mathbf{C}))$.

(b) Если $A \in M_m(\mathbf{F})$ и $C \in M_n(\mathbf{F})$ невырожденны и $B \in M_{m,n}(\mathbf{F})$, то $\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} B = \operatorname{rank} BC = \operatorname{rank} ABC$, т. е. ранг не изменяется при умножении слева и справа на невырожденную матрицу.

(c) Если $A, B \in M_{m,n}(\mathbf{F})$, то $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$ в том и только в том случае, когда существуют невырожденные матрицы $X \in M_m(\mathbf{F})$ и $Y \in M_n(\mathbf{F})$, такие, что $B = XAY$.

(d) $\operatorname{rank} A^*A = \operatorname{rank} A \quad (A \in M_{m,n}(\mathbf{C}))$.

(e) Для любой матрицы $A \in M_{m,n}(\mathbf{F})$ ранга k имеет место разложение (иногда такое разложение называется *скелетным*, разложением матрицы)

$$A = XBY,$$

где $X \in M_{m,k}(\mathbf{F})$, $Y \in M_{k,n}(\mathbf{F})$ и матрица $B \in M_k(\mathbf{F})$ невырожденна. В частности, любая матрица A ранга 1 может быть записана в виде $A = xy^T$ для некоторых $x \in \mathbf{F}^m$, $y \in \mathbf{F}^n$.

14.5. Невырожденность

Линейное отображение (или матрица) называется *невырожденным (невырожденной),* если в 0 переводится только 0. В противном случае отображение (или матрица) называется *вырожденным (вырожденной).* Если $A \in M_{m,n}(\mathbf{F})$ и $m < n$, то матрица A заведомо вырожденная. Матрица $A \in M_n(\mathbf{F})$ называется *обратимой,* если существует матрица $A^{-1} \in M_n(\mathbf{F})$, такая, что $A^{-1}A = I$. Матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице A. Это эквивалентно тому, что линейное отображение, отвечающее матрице A, осуществляет взаимно однозначное соответствие, и потому существует обратное (тоже линейное) отображение. Если $A \in M_n(\mathbf{F})$ и $A^{-1}A = I$, то $AA^{-1} = I$; если матрица A^{-1} существует, то она определяется однозначно.

Полезно иметь различные способы распознавания невырожденности матрицы. Следующие утверждения относительно матрицы $A \in M_n(\mathbf{F})$ эквивалентны:

(a) матрица A невырожденна;
(b) существует A^{-1};
(c) rank $A = n$;
(d) строки матрицы A линейно независимы;
(e) столбцы матрицы A линейно независимы;
(f) $\det A \neq 0$;
(g) размерность области значений матрицы A равна n;
(h) размерность нуль-пространства матрицы A равна 0;
(i) система линейных уравнений $Ax=b$ совместна для любого вектора $b \in \mathbf{F}^n$;
(j) если система линейных уравнений $Ax = b$ совместна, то она имеет единственное решение;
(к) система линейных уравнений $Ax = b$ имеет единственное решение для любого вектора $b \in \mathbf{F}^n$;
(I) система линейных уравнений $Ax = 0$ имеет единственное решение $x = 0$;
(m) число 0 не является собственным значением матрицы A.

Все невырожденные матрицы в $M_n(\mathbf{F})$ образуют группу по умножению, которая называется *полной линейной группой* и часто обозначается через $GL(n, \mathbf{F})$.

14.6. Обычнее скалярное произведение

Условимся рассматривать элементы из $\mathbf{F}^n$ как векторы-столбцы (т. е. $\mathbf{F}^n = M_{n,1}(\mathbf{F})$). При этом если $x \in \mathbf{C}^n$, то x^T и x^* представляют собой векторы-строки. Заметим, что если $x \in \mathbf{R}^n$, то $x^* = x^T$.

14.6.1. Определение.

Число y^*x называется *скалярным* (или *внутренним) произведением* векторов $x, y \in \mathbf{C}^n$ и часто записывается в виде $\langle x, y \rangle = y^*x$. Вследствие того что можно определить и другие скалярные произведения, приведенное здесь мы будем называть *обычным* или *стандартным* скалярным произведением в векторном пространстве $\mathbf{C}^n$. Заметим, что функция $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *линейна* по первому аргументу $(\langle\alpha x_1+\beta x_2, y\rangle=\alpha\langle x_1, y\rangle+\beta\langle x_2, y\rangle$ для всех $\alpha,\beta\in\mathbf{C}$ и $x_1, x_2\in\mathbf{C}^n)$ и *сопряженно линейна* по второму $(\langle x,\alpha y_1+\beta y_2\rangle=\bar\alpha\langle x, y_1\rangle+\bar\beta\langle x, y_2\rangle$ для всех $\alpha,\beta\in$ $\in\mathbf{C}$ и $y_1, y_2\in\mathbf{C}^n)$.

14.6.2. Ортогональность.

Два вектора $x, y\in\mathbf{C}^n$ называются *ортогональными,* если $\langle y, x\rangle=0$. В случае двух или трех измерений ортогональность векторов имеет естественную геометрическую интерпретацию — это обычная перпендикулярность. Множество векторов $\{x_1, \ldots, x_k\}\subset\mathbf{C}^n$ называется *ортогональным,* если любая пара его векторов ортогональна. Всякое ортогональное множество векторов, не содержащее нулевого вектора, будет линейно независимым.

14.6.3. Неравенство Коши—Шварца.

Неотрицательное число $\langle x, x\rangle^{1/2}$ называется *евклидовой длиной* вектора $x\in\mathbf{C}^n$. Вектор евклидовой длиной, равной 1, называется *нормированным* (или иногда *единичным).* Для произвольного ненулевого $x\in\mathbf{C}^n$ вектор $\langle x, x\rangle^{-1/2}x$ является нормированным и имеет одинаковое направление с вектором *x.* В силу фундаментального неравенства Коши — Шварца

$$|\langle y, x\rangle|\leqslant\langle x, x\rangle^{1/2}\langle y, y\rangle^{1/2}$$

для всех $x, y\in\mathbf{C}^n$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы *x* и *y* линейно зависимы. Как обобщение понятия ортогональности вводится понятие *угла* между двумя ненулевыми векторами $x, y\in\mathbf{C}^n$. Это единственный угол θ, удовлетворяющий соотношениям

$$\cos\theta=\frac{|\langle y, x\rangle|}{\langle x, x\rangle^{1/2}\langle y, y\rangle^{1/2}},\qquad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

14.6.4. Ортонормирование Грама—Шмидта.

На интуитивном уровне вполне правдоподобной представляется возможность замены произвольной линейно независимой системы на *ортонормированную* (т. е. ортогональную систему, состоящую из нормированных векторов), которая порождает то же векторное пространство, что и исходная система. В принципе такую замену можно выполнить бесконечно многими способами. Однако существует очень простой и важный алгоритм ее реализации — *процесс ортонормирования Грама — Шмидта.* Пусть $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — множество из n линейно независимых векторов в комплексном векторном пространстве и $\{z_1, \ldots, z_n\}$ — искомое ортогональное множество нормированных векторов. Тогда векторы z_i можно вычислить рекуррентно следующим образом. Положим $y_1 = x_1$ и возьмем

$$z_1 = \frac{y_1}{\langle y_1, y_1\rangle^{1/2}},$$

так что z_1 — нормированный вектор. Далее построим вектор $y_2 = x_2 - \langle x_2, z_1\rangle z_1$. Вектор z_2 ортогонален вектору z_1, и, нормируя его, получаем

$$z_2 = \frac{y_2}{\langle y_2, y_2\rangle^{1/2}},$$

так что z_2 — нормированный вектор, ортогональный вектору z_1. Процесс продолжается по аналогии. В предположении, что уже построены векторы $z_1, \ldots, z_{k-1}$, находим

$$y_k = x_k - \langle x_k, z_{k-1}\rangle z_{k-1} - \langle x_k, z_{k-2}\rangle z_{k-2} - \ldots - \langle x_k, z_1\rangle z_1,$$

так что вектор y_k ортогонален векторам $z_1, \ldots, z_{k-1}$. После нормирования получаем

$$z_k = \frac{y_k}{\langle y_k, y_k\rangle^{1/2}}.$$

Подобные действия выполняем до тех пор, пока не построим искомую ортонормированную систему $z_1, \ldots, z_n$. Заметим, что в бесконечномерном векторном пространстве посредством аналогичной процедуры от бесконечной счетной линейно независимой системы можно перейти к бесконечной ортонормированной системе.

На любом шаге процесса Грама — Шмидта ортонормированные векторы $z_1, \ldots, z_k$ выражаются в виде линейных комбинаций только первых k исходных линейно независимых векторов $x_1, \ldots, x_k$ (и наоборот). Образуем матрицы $Z = [z_1\, z_2\, \ldots\, z_n]$ и

$X = [x_1\, x_2\, \ldots\, x_n]$, в которых в качестве столбцов взяты соответственно векторы z_i и x_i. Тогда $Z = XR$ для некоторой невырожденной матрицы $R = [r_{ij}]$, которая является верхней треугольной, т. е. $r_{ij} = 0$ при $i > j$.

Наконец, обратим внимание, что процесс Грама — Шмидта можно применять к любой конечной или счетной не обязательно линейно независимой последовательности векторов. В случае линейно зависимого множества получаем $y_k = 0$, где k — наименьший номер, для которого множество $\{x_1, \ldots, x_k\}$ линейно зависимо. В этом случае x_k есть линейная комбинация векторов $x_1, \ldots, x_{k-1}$. Чтобы продолжить процесс Грама — Шмидта, нужно вместо x_k взять x_{k+1}. В итоге мы найдем базис и размерность линейной оболочки векторов $x_1, \ldots, x_n$.

14.6.5. Ортонормированные базисы.

Ортонормированная система векторов — это ортогональная система нормированных векторов. Она не может содержать вектор 0 и всегда линейно независима. Ортонормированный базис — это базис, составляющий ортонормированную систему. С помощью процесса Грама— Шмидта любой базис преобразуется в ортонормированный; поэтому любое конечномерное комплексное векторное пространство обладает ортонормированным базисом. С такими базисами работать особенно приятно, так как скалярное произведение в них вычисляется просто как сумма произведений координат с одинаковыми индексами.

14.6.6. Ортогональные дополнения.

Для любого подмножества $S \subset \mathbf{C}^n$ его *ортогональным дополнением* называется множество

$$S^\perp \equiv \{x \in \mathbf{C}^n\colon\ x^* y = 0 \ \text{для всех}\ y \in S\}.$$

Множество $S^\perp$ всегда будет подпространством, даже если S таковым не является. Имеем $(S^\perp)^\perp = \operatorname{Span} S$, и если S — подпространство, то $(S^\perp)^\perp = S$. В любом случае $\dim S^\perp + \dim (S^\perp)^\perp = n$. Теперь рассмотрим линейную систему $Ax = b$, где $A \in M_{m,\,n}$. Полезно иметь в виду, что область значений матрицы A есть ортогональное дополнение к нуль-пространству матрицы A^*; таким образом, система $Ax=b$ имеет решение (не обязательно единственное) тогда и только тогда, когда $b^* z = 0$ для всех $z \in \mathbf{C}^m$, таких, что $A^* z = 0$.

14.7. Блочные матрицы

По аналогии с разбиением множества на подмножества под разбиением матрицы на блоки понимается полное расчленение ее на непересекающиеся подматрицы (блоки), при котором любой ее элемент попадает в одну и только одну из этих подматриц. Разбиение матрицы на блоки часто оказывается удобным средством, позволяющим прояснить особенности ее строения.

14.7.1. Подматрицы.

Возьмем матрицу $A \in M_{m,n}(\mathbf{F})$ и два набора индексов $\alpha \subseteq \{1, \ldots, m\}$ и $\beta \subseteq \{1, \ldots, n\}$ (чтобы обозначить нестрогое включение, часто пользуются и символом С). Для подматрицы, лежащей в строках с номерами из α и столбцах с номерами из β, примем обозначение $A(\alpha, \beta)$. Например,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}(\{1, 3\}, \{1, 2, 3\}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Если $m = n$ и $\alpha = \beta$, то подматрица $A(\alpha, \alpha)$ называется *главной* и обозначается через $A(\alpha)$. Любую подматрицу или главную подматрицу можно получить из A путем выбрасывания каких-то ее строк и столбцов. Во многих случаях более удобно задавать подматрицу, указывая именно эти выбрасываемые строки и столбцы, а не те, в которых она лежит. Пусть α' и β' обозначают дополнения к подмножествам α и β. Тогда $A(\alpha', \beta')$ представляет собой подматрицу, полученную из A *выбрасыванием* строк с номерами из α и столбцов с номерами из β.

Определитель любой квадратной подматрицы матрицы A называется *минором* матрицы A. Если подматрица главная, то и минор называется *главным.* Миноры, взятые с определенными знаками — подобно слагаемым вида $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ в разложении Лапласа (14.3.1), — называются *алгебраическими дополнениями.* Условимся пустой главный минор считать равным 1, т.е.

$$\det A(\varnothing) = 1.$$

14.7.2. Умножение блочных матриц.

Если множества $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ и $\beta_1, \ldots, \beta_s$ составляют разбиения соответственно множеств $\{1, \ldots, m\}$ и $\{1, \ldots, n\}$, то матрицы $A(\alpha_i, \beta_j)$ $(1 \leqslant i \leqslant t,\ 1 \leqslant j \leqslant s)$ образуют *блочное разбиение* матрицы $A \in M_{m,n}(\mathbf{F})$. Если $A \in M_{m,n}(\mathbf{F})$ и $B \in M_{n,p}(\mathbf{F})$ разбиты на блоки с использованием одного и того же разбиения множества $\{1, \ldots, n\}$, то эти их блочные разбиения будем называть *согласованными.* Пусть $A(\alpha_i, \beta_k)$ и $B(\beta_k, \gamma_j)$ — блоки согласованных разбиений матриц A и B. Тогда

$$[AB](\alpha_i, \gamma_j) = \sum_{k=1}^{s} A(\alpha_i, \beta_k) B(\beta_k, \gamma_j).$$

В левой части здесь записана подматрица произведения $AB,$ полученного обычным умножением матриц, в правой части — сумма обычных произведений матриц. Таким образом, умножение блочных матриц с согласованными блочными разбиениями напоминают обычное матричное умножение. Для матриц с одинаковыми блочными разбиениями очевидным образом определяется также и сложение.

14.7.3. Обращение блочной матрицы.

В случае невырожденной блочной матрицы A бывает полезно получить соответствующее блочное разбиение обратной матрицы. Это можно сделать многими различными, но эквивалентными способами в предположении, что некоторые подматрицы в $A \in M_n(\mathbf{F})$ и A^{-1} невырожденны. Для простоты рассмотрим следующее разбиение на блоки:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

Где $A_{ii} \in M_{n_i}(\mathbf{F})$ $(i = 1, 2)$ и $n_1 + n_2 = n.$ Соответствующее разбиение матрицы A^{-1} при этом имеет вид

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} [A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}]^{-1} & A_{11}^{-1}A_{12}[A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} - A_{22}]^{-1} \\ [A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} - A_{22}]^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & [A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}]^{-1} \end{bmatrix}$$

при условии, что все вошедшие сюда обратные матрицы существуют. В других обозначениях это можно записать следующим образом:

$$A^{-1}(\alpha) = \left[A(\alpha) - A(\alpha, \alpha') A(\alpha')^{-1} A(\alpha', \alpha)\right]^{-1},$$

$$A^{-1}(\alpha, \alpha') = A(\alpha)^{-1} A(\alpha, \alpha') \left[A(\alpha', \alpha) A(\alpha)^{-1} A(\alpha, \alpha') - A(\alpha')\right]^{-1},$$

где снова предполагается, что использованные здесь обратные матрицы существуют. Возможны и другие представления. Заметим, что $A^{-1}(\alpha)$ — это подматрица в A^{-1}, в то время как $A(\alpha)^{-1}$ — это матрица, обратная к некоторой подматрице в A,— в общем случае это не одно и то же.

14.7.4. Изменение обратной матрицы при малоранговой модификации.

В случае когда для какой-либо матрицы известна обратная, нередко приходится изучать, как изменится эта обратная матрица, если к исходной прибавить матрицу малого ранга. Существует простая формула, позволяющая легче вычислять новую обратную матрицу, чем если бы это надо было делать «на голом месте» (при условии, что прибавляется достаточно простая матрица). Предположим, что матрица $A \in M_n(\mathbf{F})$ невырожденна и матрица A^{-1} известна. Рассмотрим матрицу

$$B = A + XRY,$$

где X, Y, R — матрицы соответственно размеров $n \times r$, $r \times n$, $r \times r$, причем матрица R невырожденна. Если B невырожденна, то

$$B^{-1} = A^{-1} - A^{-1}X\left(R^{-1} + YA^{-1}X\right)^{-1} YA^{-1}.$$

Пусть r много меньше n. Тогда матрицы R и $R^{-1} + YA^{-1}X$ обратить существенно легче, чем B, и использование данной формулы имеет преимущества по сравнению с прямым обращением матрицы B, если обратная матрица для A находится легко и в такой форме, которая позволяет упростить матричное умножение. Например, если добавляется матрица ранга 1, то матрицы X, Y, R имеют размеры $n \times 1$, $1 \times n$, 1×1 соответственно, R=[1] и формула приобретает вид

$$B^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + YA^{-1}X} A^{-1}XYA^{-1}$$

(в этом случае $XY = B — A$). В частности, если

$$B = I + xy^T,$$

где $x,\ y \in \mathbf{F}^n,\ I \in M_n(\mathbf{F})$, то получаем

$$B^{-1} = I - \frac{1}{1+y^T x} x y^T$$

в предположении, что $y^T x \neq -1$.

14.8. Еще об определителителях

Приведем для дальнейшего использования некоторые полезные дополнительные сведения об определителях. Большинство из них нелегко найти в элементарных учебниках.

14.8.1. Ассоциированные матрицы.

Для матрицы $A \in M_{m,n}(\mathbf{F})$ массив, составленный из всех ее миноров заданного порядка, называется ее *ассоциированной матрицей.* В случае когда берутся миноры порядка *k,* говорят о *k*-й *ассоциированной матрице.* Она обозначается через $C_k(A)$, имеет размер $\binom{m}{k} \times \binom{n}{k}$ и в позиции, отвечающей подмножествам α, β, содержит минор $\det A(\alpha, \beta)$. Здесь $\alpha \subseteq \{1, \ldots, m\}$ и $\beta \subseteq \{1, \ldots, n\}$ — подмножества мощности $k \leqslant \min\{m, n\}$, и они обычно упорядочиваются лексикографически, так что, в частности, $\{1, 2, 4\}$ предшествует $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 2, 5\}$ предшествует $\{1, 3, 4\}$ и т. д. Например, пусть

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$C_2(A) = \begin{bmatrix} \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \\ \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \\ \det\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -6 & -3 \\ -6 & -12 & -6 \\ -3 & -6 & -3 \end{bmatrix}.$$

Для $A = M_{m,k}(\mathbf{F})$, $B \in M_{k,n}(\mathbf{F})$ имеем

$$C_r(AB) = C_r(A)\,C_r(B), \qquad r \leqslant \min\{m, k, n\}.$$

Кроме того,

$C_r(tA) = t^r C_r(A)$ для любого $t \in \mathbf{F}$;

$C_k(I) = I \in M_{\binom{n}{k}}$ для $I \in M_n$;

если матрица $A \in M_n$ невырожденна, то $C_k(A)^{-1} = C_k(A^{-1})$;

$C_k(A^T) = C_k(A)^T$ для $A \in M_{m,n}(\mathbf{F})$;

$C_k(A^*) = C_k(A)^*$ для $A \in M_{m,n}(\mathbf{F})$.

14.8.2. Присоединенная и обратная матрицы.

В матрице $A \in M_n(\mathbf{F})$ заменим элементы на их алгебраические дополнения и затем перейдем к транспонированной матрице $B = [b_{ij}] \in M_n(\mathbf{F})$. Последняя определяется соотношениями

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(\{j\}', \{i\}'),$$

обычно обозначается adj A и называется *(классической) присоединенной* матрицей для A. Заметим, что

$$\operatorname{adj} A = EC_{n-1}(A)^T E,$$

где

$$E = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & -1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \\ 0 & & & & & \cdot & \pm 1 \end{bmatrix}.$$

В силу разложения Лапласа находим, что

$$(\operatorname{adj} A)\,A = A\,(\operatorname{adj} A) = (\det A)\,I,$$

и, следовательно, если матрица A невырожденна, то

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A.$$

Присоединенные матрицы, как правило, не играют какой-либо важной роли при вычислении обратной матрицы, но полезны для ее аналитического представления.

14.8.3. Правило Крамера.

Правило Крамера — это один из способов представления единственного решения линейной системы $Ax = b$ с невырожденной матрицей $A \in M_n(\mathbf{F})$. При численном решении линейных систем правило Крамера имеет столь же малое значение, как и присоединенные матрицы при численном обращении. Оно полезно в основном, когда нужно найти аналитическое выражение какой-либо компоненты решения. Если x_i есть i-я компонента решения $x \in \mathbf{F}^n$, то, согласно правилу Крамера,

$$x_i = \frac{\det \left(A \underset{i}{\leftarrow} b\right)}{\det A}.$$

Выражение $A \underset{i}{\leftarrow} b$ означает $n \times n$-матрицу, в которой i-й столбец равен b, а остальные столбцы совпадают с соответствующими столбцами матрицы A. Правило Крамера непосредственно вытекает из мультипликативности определителя. Систему $Ax = b$ можно записать в виде

$$A\,(I \underset{i}{\leftarrow} x) = A \underset{i}{\leftarrow} b.$$

Переходя к определителям, получаем

$$\det A \,\det (I \underset{i}{\leftarrow} x) = \det (A \underset{i}{\leftarrow} b).$$

Остается заметить, что $\det (I \underset{i}{\leftarrow} x) = x_i$.

14.8.4. Миноры обратной матрицы.

Приведем важное соотношение, обобщающее представление для обратной матрицы с помощью присоединенной. Оно связывает миноры матрицы A^{-1} и миноры матрицы $A \in M_n(\mathbf{F})$, а именно

$$\det A^{-1}(\alpha', \beta') = (-1)^{\left(\sum_{i \in \alpha} i + \sum_{j \in \beta} j\right)} \frac{\det A(\beta, \alpha)}{\det A}.$$

В случае главных подматриц эта формула принимает более простой вид:

$$\det A^{-1}(\alpha') = \frac{\det A(\alpha)}{\det A}.$$

14.8.5. Дополнения по Шуру и формулы для определителей.

Пусть задана матрица $A \in M_n(\mathbf{F})$, и пусть для некоторого множества индексов $\alpha \subseteq \{1, \ldots, n\}$ ее подматрица $A(\alpha)$ невырожденна. Обратную матрицу для $A(\alpha)$ обозначим через $A(\alpha)^{-1}$.

Рассматривая A как блочную матрицу блочного размера 2×2, получаем для det A следующую важную формулу:

$$\det A = \det A(\alpha) \det \left[A(\alpha') - A(\alpha', \alpha) A(\alpha)^{-1} A(\alpha, \alpha')\right].$$

Это обобщение похожей формулы для определителя 2×2-матрицы (см. 14.3.1). Матрица

$$A(\alpha') - A(\alpha', \alpha) A(\alpha)^{-1} A(\alpha, \alpha')$$

называется *дополнением по Шуру* подматрицы $A(\alpha)$ в матрице A. Приведенная выше формула проверяется вычислением матричного произведения

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A_{11}^{-1} A_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

где A_{11} нужно отождествить с $A(\alpha)$. Заметим, что дополнение по Шуру уже встречалось в блочном представлении матрицы A^{-1} (14.7.3).

14.8.6. Тождество Сильвестра.

Зафиксируем множество индексов $\alpha \subseteq \{1, \ldots, n\}$ мощности k и образуем матрицу $B = [b_{ij}] \in M_{n-k}(\mathbf{F})$, считая, что

$$b_{ij} = \det A(\alpha \cup \{i\}, \alpha \cup \{j\}),$$

где $A \in M_n(\mathbf{F})$, а индексы $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ не входят в α. Еще одно полезное тождество для определителей таково:

$$\det B = [\det A(\alpha)]^{n-k-1} \det A.$$

14.8.7. Формула Коши — Бине.

Эту формулу легко запомнить, так как она аналогична по форме правилу матричного умножения. И это не случайно, поскольку здесь выражается мультипликативность ассоциированных матриц (14.8.1). Пусть $A \in M_{m,k}(\mathbf{F})$, $B \in M_{k,n}(\mathbf{F})$ и $C = AB$.

Предположим, что $1 \leqslant r \leqslant \min\{m, k, n\}$ и множества $\alpha \subseteq \{1, \ldots, m\}$ и $\beta \subseteq \{1, \ldots, n\}$ содержат по r индексов. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$\det C(\alpha, \beta) = \sum_{\gamma} \det A(\alpha, \gamma) \det B(\gamma, \beta),$$

где сумма берется по всем множествам $\gamma \subseteq \{1, \ldots, k\}$ мощности r.

14.8.8. Соотношения между минорами.

Пусть заданы матрица $A \in M_{m,n}(\mathbf{F})$ и множество индексов $\alpha \subseteq \{1, \ldots, m\}$ мощности k. Миноры

$$\det A\ (\alpha, \omega),$$

где $\omega \subseteq \{1, \ldots, n\}$ пробегает *упорядоченные* множества индексов мощности k, не могут быть алгебраически независимыми, так как их больше, чем различных элементов во всех подматрицах. Между этими минорами имеют место квадратичные соотношения. Возьмем k различных индексов $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$, причем не обязательно в естественном порядке, и построим матрицу

$$A(\alpha;\ i_1, \ldots, i_k),$$

номера строк которой принадлежат множеству α, а в качестве j-го столбца берется столбец матрицы $A(\alpha, \{1, \ldots, n\})$ с номером ij. Отличие от прежнего обозначения состоит в том, что теперь столбцы идут не обязательно в естественном порядке. Например, в матрице $A(\{1,3\};4,2)$ первый столбец состоит из двух элементов, которые в A занимают позиции (1,4) и (3,4). Для любого $s = 1, \ldots, k$ и любых последовательностей различных индексов

$$i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\} \quad \text{и} \quad j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}$$

справедливо соотношение

$$\det A(\alpha;\ i_1, \ldots, i_k) \det A(\alpha;\ j_1, \ldots, j_k) = \\ = \sum_{t=1}^{k} \det A(\alpha;\ i_1, \ldots, i_{s-1}, j_t, i_{s+1}, \ldots, i_k) \cdot \\ \cdot \det A(\alpha;\ j_1, \ldots, j_{t-1}, i_s, j_{t+1}, \ldots, j_k).$$

Микромодуль 45.
Специальные матрицы

14.9. Матрицы специального вида

Некоторые матрицы специального вида встречаются очень часто и обладают важными свойствами. Ряд таких матриц заслуживает того, чтобы перечислить их здесь и ввести терминологию, нужную для дальнейшего.

14.9.1. Диагональные матрицы.

Матрица $D = [d_{ij}] \in M_n$ называется *диагональной,* если $d_{ij} = 0$ при $j \neq i$. Для нее используются обозначения $D = \mathrm{diag}\,(d_{11}, \ldots, d_{nn})$ или $D = \mathrm{diag}\, d$, где d — вектор, составленный из диагональных элементов матрицы D. Если все диагональные элементы диагональной матрицы являются положительными (неотрицательными) вещественными числами, то будем говорить, что это *положительная (неотрицательная) диагональная матрица.* Обратим внимание на то, что термин «положительная диагональная матрица» означает, что матрица имеет положительные диагональные элементы и в дополнение является диагональной; по отношению к произвольной матрице с положительными диагональными элементами этот термин не употребляется. Пример положительной диагональной матрицы — единичная матрица $I \in M_n$. Диагональная матрица D называется *скалярной,* если все ее диагональные элементы равны между собой; следовательно, $D = \alpha I$ для некоторого $\alpha \in \mathbf{C}$. При умножении матрицы на скалярную матрицу слева или справа получается тот же результат, что и при умножении ее на соответствующий скаляр.

Определитель диагональной матрицы есть не что иное, как произведение ее диагональных элементов: $\det D = \prod_{i=1}^{n} d_{ii}$. Таким образом, диагональная матрица невырожденна в том и только в том случае, когда ни один из ее диагональных элементов не равен нулю. При вычислении произведения DA, где $A \in M_n$ и D — диагональная матрица, т. е. при умножении A *слева* на D, *строки* матрицы A умножаются на диагональные элементы матрицы D (i*-я* строка в A умножается на число d_{ii}, $i = 1, \ldots, n$). При вычислении произведения AD, т. е. при умножении A *справа* на D, *столбцы* матрицы A умножаются на диагональные элементы матрицы D. Следовательно, любые диагональные матрицы коммутируют, а для того чтобы диагональная матрица D коммутировала с какой-либо матрицей $A = [a_{ij}] \in M_n$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $a_{ij} = 0$ для всех пар i, j, таких, что i-й и j-й диагональные элементы в D различны. Произведение диагональных матриц остается диагональной матрицей — ее диагональные элементы суть попарные произведения соответствующих элементов сомножителей. Диагональной матрицей будет и любая целая положительная степень произвольной диагональной матрицы.

14.9.2. Блочно-диагональные матрицы.

Матрица $A \in M_n$, имеющая вид

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & & & 0 \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_{kk} \end{bmatrix},$$

где $A_{ii} \in M_{n_i}$ $(i = 1, \dots, k)$ и $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, называется *блочно-диагональной.* Для такой матрицы часто используется обозначение $A = A_{11} \oplus A_{22} \oplus \dots \oplus A_{kk}$, или, короче, $A = \oplus \sum_{i=1}^{k} A_{ii}$; она называется *прямой суммой* матриц $A_{11}, \dots, A_{kk}$. Многие свойства блочно-диагональных матриц, описанные в терминах блочного умножения, обобщают аналогичные свойства диагональных матриц. Например,

$$\det\left(\oplus \sum_{i=1}^{k} A_{ii}\right) = \prod_{i=1}^{k} \det A_{ii},$$

так что матрица $A = \oplus \sum_{i=1}^{k} A_{ii}$ невырожденна в том и только в том случае, если A_{ii} невырожденна для всех $i = 1, \dots, k$. Далее, две прямые суммы

$$A = \oplus \sum_{i=1}^{k} A_{ii} \text{ и } B = \oplus \sum_{i=1}^{k} B_{ii},$$

где матрицы в каждой паре A_{ii}, B_{ii} имеют одинаковые размеры, коммутируют тогда и только тогда, когда коммутируют A_{ii} и B_{ii} для всех i=1, . .., k. Еще одно свойство:

$$\operatorname{rank}\left(\oplus \sum_{i=1}^{k} A_{ii}\right) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{rank} A_{ii}.$$

14.9.3. Треугольные матрицы.

Матрица $T = [t_{ij}] \in M_n$ называется *верхней треугольной,* если $t_{ij} = 0$ при $j < i$ Если $t_{ij} = 0$ при $i \leq j$, то T называется *верхней строго треугольной.* Аналогично T называется *нижней треугольной (нижней строго треугольной),* если ее транспонированная матрица — верхняя треугольная (верхняя строго треугольная) матрица. Треугольные матрицы сходны с диагональными в том смысле, что их определитель равен произведению диагональных элементов. Однако треугольные матрицы (любого типа) не обязательно коммутируют с другими треугольными матрицами. Умножение матрицы $A \in M_n$ слева на нижнюю треугольную матрицу L заменяет i-ю строку матрицы A на линейную комбинацию ее строк с 1-й и по i-ю. Иногда вместо терминов «верхняя» и «нижняя» в отношении треугольных матриц употребляют соответственно термины «правая» и «левая». Ранг треугольной матрицы не меньше числа ее ненулевых диагональных элементов; на самом деле он может быть больше этого числа.

14.9.4. Блочно-треугольные матрицы.

Матрица $A \in M^n$, имеющая вид

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & & & * \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_{kk} \end{bmatrix}.$$

где

$$A_{ii} \in M_{n_i} \quad (i = 1, \ldots, n), \quad \sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

и * обозначает произвольные элементы, называется *верхней блочно-треугольной.* Аналогично определяются *нижняя блочно-треугольная,* *нижняя строго блочно-треугольная* и *верхняя строго блочно-треугольная* матрицы. Определитель блочно-треугольной матрицы равен произведению определителей диагональных блоков. Ранг блочпо-треугольной матрицы не меньше суммы рангов диагональных блоков и может быть больше этой суммы.

14.9.5. Матрицы перестановок.

Матрица $P \in M_n$ называется *матрицей перестановки* в том случае, когда в любой ее строке и в любом ее столбце в точности один элемент равен 1, а все остальные равны 0. Умножение на такую матрицу сводится к перестановке строк либо столбцов в зависимости от того, слева или справа производится умножение. Например,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3$$

есть матрица перестановки, и равенство

$$P \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

показывает, что *P* переставляет строки, в данном случае компоненты вектора

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

а именно первая компонента становится второй, вторая — первой, а третья остается на своем месте. В общем случае при умножении матрицы $A \in M_{m,n}$ слева на матрицу перестановки $P \in M_m$ переставляются строки матрицы *A,* а при умножении справа на $P \in M_n$ в Л переставляются столбцы. Матрица, выполняющая элементарное преобразование 1-го типа (14.3.3), является примером специального вида матрицы перестановки и называется *транспозицией.*

Определитель матрицы перестановки равен ±1 (в формуле (14.3.2) лишь одно слагаемое отлично от нуля, так что все матрицы перестановки невырожденные). Матрицы перестановки, вообще говоря, не коммутируют между собой, однако их произведение остается матрицей перестановки. Поскольку единичная матрица является матрицей перестановки и для любой матрицы перестановки P имеем $P^T = P^{-1}$, все матрицы перестановок образуют подгруппу в группе $GL(n, \mathbf{C})$ всех невырожденных матриц из M_n. В этой подгруппе $n!$ элементов. Любая матрица перестановки есть произведение транспозиций.

Матрица $P^T = P^{-1}$ переставляет столбцы точно так же, как $P \in M_n$ переставляет строки. Поэтому преобразование $A \to PAP^T$ осуществляет одинаковую перестановку строк и столбцов матрицы A. В контексте системы линейных уравнений с матрицей коэффициентов A это преобразование сводится к переупорядочению неизвестных. Если матрица $A \in M_n$ такова, что для некоторой матрицы перестановки P матрица PAP^T становится треугольной, то говорят, что матрица *A в основном треугольная.* Такие матрицы имеют много общего с треугольными.

14.9.6. Циркулянтные матрицы.

Матрица $A \in M_n$, имеющая вид

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{bmatrix},$$

называется *циркулянтной матрицей* или *циркулянтом.* Любая ее строка получается из предыдущей путем циклического сдвига на одну позицию вправо, так что элементы любой строки представляют циклическую перестановку элементов первой строки. Матрица перестановки

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

называется *основной циркулянтной матрицей перестановки.* Матрицу $A \in M_n$ можно записать в виде

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} C^k$$

в том и только в том случае, когда она является циркулянтной. Здесь $C^0 \equiv I \equiv C^n$ и коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — не что иное, как элементы первой строки матрицы *A*. Вследствие этого представления произвольная циркулянтная матрица имеет хорошую структуру, которую можно связать со структурой матрицы *C*. Поскольку $C^n = I$, произведение циркулянтов есть снова циркулянт. Кроме того, циркулянты коммутируют относительно умножения. Можно рассматривать также и обобщения циркулянтных матриц, например такие матрицы, где строки циклически сдвигаются не на одну, а на несколько позиций (влево или вправо).

14.9.7. Тёплицевы матрицы.

Матрица $A = [a_{ij}] \in M_{n+1}$, имеющая вид

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & a_1 \\ a_{-n} & a_{-n+1} & \ldots & a_{-1} & a_0 \end{bmatrix},$$

называется *тёплицевой матрицей.* Она определяется последовательностью $a_{-n}, a_{-n+1}, \ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbf{C}$, причем $a_{ij} = a_{j-i}$. Элементы любой диагонали матрицы *A*, параллельной главной, одинаковы. Тёплицевы матрицы

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

называются соответственно *сдвигом назад* и *сдвигом вперед* из-за их действия на элементы стандартного базиса $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$. Матрицу $A \in M_{n+1}$ можно записать в виде

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_{-k} F^k + \sum_{k=0}^{n} a_k B^k$$

в том и только в том случае, когда она тёплицева. Тёплицевы матрицы непосредственно возникают в связи с тригонометрической проблемой моментов.

14.9.8. Ганкелевы матрицы.

Матрица $A \in M_{n+1}$, имеющая вид

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots\cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots a_n & a_{n+1} \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots\cdots & a_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ \vdots & a_n & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots\cdots & a_{2n} \end{bmatrix}.$$

называется *еанкелевой матрицей.* Она определяется последовательностью $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}$, причем $a_{ij} = a_{i+j-2}$. Элементы любой диагонали матрицы *A*, перпендикулярной главной, одинаковы. Ганкелевы матрицы непосредственно возникают в связи со степенной проблемой моментов. Заметим, что *перъединичная* матрица перестановки

$$P = \begin{bmatrix} 0 & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

такова, что матрица *PT* ганкелева в том и только в том случае, когда *T* тёплицева, и матрица *PH* тёплицева в том и только втом случае, когда *H* ганкелева. Равенство $P = P^T = P^{-1}$ и симметричность ганкелевых матриц позволяют сделать вывод о том, что произвольная тёплицева матрица выражается произведением двух симметричных матриц *(P* и *H***)**.

14.9.9. Хессенберговы матрицы.

Матрица $A = [a_{ij}] \in M_n$ называется верхней *хессенберговой матрицей* (или *верхней матрицей Хессенберга;* говорят также, что матрица имеет *верхнюю хессенбергову форму),* если $a_{ij} = 0$ при $i > j + 1$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & & \vdots \\ 0 & a_{32} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Матрица $A \in M_n$ называется *нижней хессенберговой,* если матрица A^T верхняя хессенбергова.

14.9.10. Трехдиагональные матрицы.

Матрица $A = [a_{ij}] \in M_n$ называется *трехдиагональной,* если она одновременно верхняя и нижняя хессенбергова; для нее $a_{ij} = 0$ при $|i - j| > 1$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \\ & a_{32} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & & & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Определитель трехдиагональной матрицы легко вычисляется по индукции, а именно,

$$\det A(\{1,2,\ldots,k+1\}) = a_{k+1,k+1} \det A(\{1,\ldots,k\}) - a_{k+1,k}\, a_{k,k+1} \det A(\{1,\ldots,k-1\}),$$
$$k = 2,\ldots,n-1.$$

14.9.11. Матрицы, связанные с лагранжевой интерполяцией.

Матрицей Вандермонда называется матрица $A \in M_n(\mathbf{F})$, имеющая вид

$$A=\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}, \qquad (14.9.11.1)$$

где $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n \in \mathbf{F}$, т. е. $A=[a_{ij}]$, где $a_{ij}=x_i^{j-1}$. Известно, что

$$\det A=\prod_{\substack{i,\ j=1 \\ i>j}}^{n}(x_i-x_j). \qquad (14.9.11.2)$$

Поэтому матрица Вандермонда невырожденна в том и только в том случае, когда параметры $x_1, \dots x_n$ различны.

Матрица Вандермонда возникает в следующей *задаче интерполяции:* найти многочлен $p(x)=a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\dots+a_1x+a_0$ степени не выше *n*—1 с коэффициентами из поля **F**, удовлетворяющий соотношениям

$$\begin{aligned} p(x_1)&=a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\dots+a_{n-1}x_1^{n-1}=y_1, \\ p(x_2)&=a_0+a_1x_2+a_2x_2^2+\dots+a_{n-1}x_2^{n-1}=y_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p(x_n)&=a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\dots+a_{n-1}x_n^{n-1}=y_n, \end{aligned} \qquad (14.9.11.3)$$

где $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ и $y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n$ — заданные элементы из F.

Интерполяционные соотношения (14.9.11.3) представляют собой систему *n* уравнений с *n* неизвестными $a_0,\ a_1,\ \dots,\ a_{n-1}$, и ее можно записать в виде $Aa=y$, где $a=[a_0,\ a_1,\ \dots,\ a_{n-1}]^T\in\mathbf{F}^n$, $y=[y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n]^T\in\mathbf{F}^n$ и $A\in M_n(\mathbf{F})$ — матрица Вандермонда (14.9.11.1). Эта задача интерполяции всегда имеет решение, если точки $x_1, x_2, \dots, x_n$ различны, поскольку в этом случае матрица *A* невырожденна.

Если точки x_1, x_2, ..., x_n различны, то коэффициенты интерполяционного многочлена в принципе можно найти, решая систему (14.9.11.3). Однако удобнее представить интерполяционный многочлен *p(x)* с помощью *элементарных лагранжевых интерполяционных многочленов*

$$L_i(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Каждый многочлен $L_i(x)$ имеет степень n—1 и обладает тем свойством, что $L_i(x_k) = 0$, если $k \neq i$, и $L_i(x_i) = 1$. Таким образом, получаем *интерполяционную формулу Лагранжа*

$$p(x) = y_1L_1(x) + y_2L_2(x) + \ldots + y_nL_n(x), \qquad (14.9.11.4)$$

которая дает явное выражение для многочлена *p(x),* имеющего степень не более *n*—1 и удовлетворяющего уравнениям (14.9.11.3).

14.10. Замена базиса

Пусть *V* — некоторое *n*-мерное пространство над полем **F** и $\mathscr{B}_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ — его базис. Поскольку множество $\mathscr{B}_1$ порождает *V*, любой вектор $x \in V$ имеет разложение $x = \alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \ldots + \alpha_nv_n$. Если бы существовало какое-то другое разложение $x = \beta_1v_1 + \beta_2v_2 + \ldots + \beta_nv_n$ по тому же базису, то выполнялось бы равенство

$$0 = x - x = (\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)v_n,$$

откуда в силу линейной независимости множества $\mathscr{B}_1$ получаем $\alpha_i - \beta_i = 0$. Линейное отображение

$$x \to [x]_{\mathscr{B}_1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \text{ где } x = \alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \ldots + \alpha_nv_n,$$

корректно определено, является взаимно однозначным и отображает *V* на F^n. Числа α_i называются *координатами* вектора *x* в базисе $\mathscr{B}_1$; вектор-столбец $[x]_{\mathscr{B}_1}$ является единственным *координатным представлением* вектора *x* в базисе $\mathscr{B}_1$.

Пусть задано линейное преобразование $T\colon V \to V$. Его действие на произвольный вектор $x \in V$ полностью определяется заданием *n* векторов $Tv_1, Tv_2, \ldots, Tv_n$, потому что $x \in V$ имеет единственное разложение $x = \alpha_1v_1 + \ldots + \alpha_nv_n$ и вследствие линейности

$$T(\alpha_1v_1 + \ldots + \alpha_nv_n) = T(\alpha_1v_1) + \ldots + T(\alpha_nv_n) =$$

$= \alpha_1 Tv_1 + \ldots + \alpha_n Tv_n$. Таким образом, чтобы найти вектор Tx, достаточно знать $[x]_{\mathscr{B}_1}$.

Пусть $\mathscr{B}_2 = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ — другой базис в V. Предположим, что координатные представления векторов Tv_j в базисе $\mathscr{B}_2$ имеют вид

$$[Tv_j]_{\mathscr{B}_2} = \begin{bmatrix} t_{1j} \\ t_{2j} \\ \cdots \\ t_{nj} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда для любого $x \in V$ имеем

$$[Tx]_{\mathscr{B}_2} = \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j Tv_j\right]_{\mathscr{B}_2} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j [Tv_j]_{\mathscr{B}_2} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \begin{bmatrix} t_{1j} \\ t_{2j} \\ \cdots \\ t_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & \ldots & t_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Массив $[t_{ij}]$ размера $n \times n$ зависит от T и от выбора базисов $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$, но не зависит от x. *Представлением линейного преобразования T в паре базисов* $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ будем называть матрицу

$$_{\mathscr{B}_2}[T]_{\mathscr{B}_1} = \begin{bmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & \ldots & t_{nn} \end{bmatrix} = [[Tv_1]_{\mathscr{B}_2} \ldots [Tv_n]_{\mathscr{B}_2}].$$

Мы уже установили, что $[Tx]_{\mathscr{B}_2} = {_{\mathscr{B}_2}[T]_{\mathscr{B}_1}} [x]_{\mathscr{B}_1}$ для любого $x \in V$.
На практике наиболее часто полагают $\mathscr{B}_2 = \mathscr{B}_1$; матрицу $_{\mathscr{B}_1}[T]_{\mathscr{B}_1}$ будем называть *представлением линейного преобразования T в базисе* $\mathscr{B}_1$.

Рассмотрим тождественное линейное преобразование I: $V \to V$ ($Ix = x$ для любого x). Для произвольного $x \in V$

$$[x]_{\mathscr{B}_2} = [Ix]_{\mathscr{B}_2} = {_{\mathscr{B}_2}[I]_{\mathscr{B}_1}} [x]_{\mathscr{B}_1} = {_{\mathscr{B}_2}[I]_{\mathscr{B}_1}} [Ix]_{\mathscr{B}_1} = {_{\mathscr{B}_2}[I]_{\mathscr{B}_1}} {_{\mathscr{B}_1}[I]_{\mathscr{B}_2}} [x]_{\mathscr{B}_2}.$$

Последовательно выбирая x равным $w_1, w_2, \ldots, w_n$, получаем отсюда столбцы матрицы $_{\mathscr{B}_2}[I]_{\mathscr{B}_1} {_{\mathscr{B}_1}[I]_{\mathscr{B}_2}}$ и убеждаемся, что

$$_{\mathscr{B}_2}[I]_{\mathscr{B}_1} {_{\mathscr{B}_1}[I]_{\mathscr{B}_2}} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Мы допускаем обычную нестрогость в обозначениях, используя символ I и для единичной матрицы, и для тождественного линейного преобразования. Записав аналогичные соотношения, начиная с $[x]_{\mathcal{B}_1} = [Ix]_{\mathcal{B}_1} = \ldots,$ находим, что

$${}_{\mathcal{B}_1}[I]_{\mathcal{B}_2}\,{}_{\mathcal{B}_2}[I]_{\mathcal{B}_1} = I.$$

Таким образом, матрица ${}_{\mathcal{B}_2}[I]_{\mathcal{B}_1}$ является обратной к матрице ${}_{\mathcal{B}_1}[I]_{\mathcal{B}_2}$, т. е. если $S = {}_{\mathcal{B}_2}[I]_{\mathcal{B}_1}$, то $S^{-1} = {}_{\mathcal{B}_1}[I]_{\mathcal{B}_2}$. Следовательно, любая матрица вида ${}_{\mathcal{B}_2}[I]_{\mathcal{B}_1}$ обратима. В то же время любая обратимая матрица $S = [s_1\ \ s_2\ \ \ldots\ \ s_n] \in M_n(\mathbf{F})$ имеет вид ${}_{\mathcal{B}_1}[I]_{\mathcal{B}}$ для некоторого базиса $\mathcal{B}$. В качестве $\mathcal{B}$ можно взять систему векторов $\{\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \ldots, \tilde{s}_n\}$, определенных соотношениями $[\tilde{s}_i]_{\mathcal{B}_1} = s_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. В силу обратимости матрицы S это множество $\mathcal{B}$ линейно независимо. Заметим, что

$${}_{\mathcal{B}_2}[I]_{\mathcal{B}_1} = [[Iv_1]_{\mathcal{B}_2} \ldots [Iv_n]_{\mathcal{B}_2}] = [[v_1]_{\mathcal{B}_2} \ldots [v_n]_{\mathcal{B}_2}],$$

так что матрица ${}_{\mathcal{B}_2}[I]_{\mathcal{B}_1}$ выражает элементы базиса $\mathcal{B}_1$ через базис $\mathcal{B}_2$. Теперь возьмем $x \in V$ и проведем следующие вычисления:

$${}_{\mathcal{B}_2}[T]_{\mathcal{B}_2}[x]_{\mathcal{B}_2} = [Tx]_{\mathcal{B}_2} = [I(Tx)]_{\mathcal{B}_2} = {}_{\mathcal{B}_2}[I]_{\mathcal{B}_1}[Tx]_{\mathcal{B}_1} = {}_{\mathcal{B}_2}[I]_{\mathcal{B}_1}\,{}_{\mathcal{B}_1}[T]_{\mathcal{B}_1}[x]_{\mathcal{B}_1} =$$

$$= {}_{\mathcal{B}_2}[I]_{\mathcal{B}_1}\,{}_{\mathcal{B}_1}[T]_{\mathcal{B}_1}[Ix]_{\mathcal{B}_1} = {}_{\mathcal{B}_2}[I]_{\mathcal{B}_1}\,{}_{\mathcal{B}_1}[T]_{\mathcal{B}_1}\,{}_{\mathcal{B}_1}[I]_{\mathcal{B}_2}[x]_{\mathcal{B}_2}.$$

Последовательно выбирая вектор x равным $w_1, w_2, \ldots, w_n$, заключаем, что

$${}_{\mathcal{B}_2}[T]_{\mathcal{B}_2} = {}_{\mathcal{B}_2}[I]_{\mathcal{B}_1}\,{}_{\mathcal{B}_1}[T]_{\mathcal{B}_1}\,{}_{\mathcal{B}_1}[I]_{\mathcal{B}_2}.$$

Это соотношение показывает, как представление линейного преобразования в каком-либо базисе изменяется при переходе к другому базису. По этой причине матрица ${}_{\mathcal{B}_2}[I]_{\mathcal{B}_1}$ называется *матрицей перехода от* $\mathcal{B}_2$ к $\mathcal{B}_1$.

Произвольную матрицу $A \in M_n(\mathbf{F})$ можно рассматривать как представление некоторого линейного преобразования $T\colon V \to V$. Если T определить равенством $[Tx]_{\mathcal{B}} = A[x]_{\mathcal{B}}$, то, как легко видеть, ${}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}} = A$.

Модуль 15
Собственные значения, собственные векторы и подобие

Микромодуль 46
Собственные значения

15.0. Введение

В этом модуле, как и в последующих, при обсуждении ряда ключевых понятий мы объясняем на примерах, каким образом они возникают в теории или приложениях.

15.0.1. Замена базиса и подобие.

Всякая обратимая матрица есть матрица перехода для какой-то пары базисов, и всякая матрица перехода является обратимой (см. разд. 14.10). Таким образом, если в векторном пространстве V заданы линейное преобразование T и базис $\mathcal{B}$ и если $A = {}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}$ есть представление преобразования T в базисе $\mathcal{B}$, то множество всех возможных представлений этого преобразования имеет вид

$$\{{}_{\mathcal{B}_1}[I]_{\mathcal{B}}\,{}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}\,{}_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}_1}\colon \mathcal{B}_1 \text{ — базис в } V\} =$$
$$= \{S^{-1}AS\colon S \text{ — обратимая матрица из } M_n(\mathbf{F})\}.$$

Это в точности множество всех матриц, которые *подобны* матрице A. Как мы видим, подобные, но не совпадающие матрицы являются различными представлениями одного и того же линейного преобразования.

Естественно ожидать, что подобные матрицы обладают многими важными общими свойствами — по крайней мере теми, которые присущи соответствующему линейному преобразованию — и это одна из важных тем в линейной алгебре. Часто, изучая свойства какой-либо матрицы, бывает полезно обратиться к исследованию каких-то свойств, характеризующих линейное преобразование, для которого данная матрица является лишь одним из многих возможных представлений. Понятие подобия — ключевое в этом модуле.

15.0.2. Условные экстремумы и собственные значения.

Понятие собственного вектора и собственного значения — второе ключевое понятие этой главы. Мы увидим, что ненулевые векторы *x*, такие, что вектор *Ax* пропорционален вектору *x*, играют главную роль при анализе структуры произвольной матрицы или линейного преобразования. Однако такие векторы возникают в более элементарном контексте — в задаче о поиске максимума (или минимума) вещественной симметричной квадратичной формы при некотором геометрическом ограничении, которая формулируется так:

Найтн максимум функции x^TAx при условии, что

$$x^Tx = 1, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Здесь $A = A^T$ — заданная матрица из $M_n(\mathbf{R})$. Чтобы решить эту задачу условной оптимизации, обычно вводят функцию Лагранжа $L = x^TAx - \lambda x^Tx$. Необходимое условие экстремума имеет вид

$$0 = \nabla L = 2(Ax - \lambda x) = 0.$$

Поэтому для того чтобы экстремум функции x^TAx достигался на векторе $x \in \mathbf{R}^n$, таком, что $x^Tx = 1$ (следовательно, $x \neq 0$), необходимо, чтобы вектор *x* удовлетворял уравнению $Ax = \lambda x$. Другими словами, вектор *Ax* есть кратное ненулевого вектора *x*. Такая пара λ, *x* называется *собственной парой,* в которой λ — *собственное значение, x — собственный вектор.*

15.1. Определение собственных значений и собственных векторов

15.1.1. Обозначения.

Как и раньше, $M_n(\mathbf{F})$ — множество $n \times n$-матриц над полем **F**; как правило, в качестве **F** рассматривается поле **R** вещественных чисел или поле **C** комплексных чисел. Мы обсуждаем факты, которые за редкими исключениями справедливы для комплексных матриц; $M_n(\mathbf{C})$ записывается сокращенно как M_n. Читатель, не интересующийся комплексными матрицами, может интерпретировать материал в терминах только вещественных чисел — обычно это не потребует сколько-нибудь существенного изменения изложения, выкладок или формулировок. Однако здесь нужна осторожность, так как между **R** и **C** имеются важные различия — «более широкое» поле **C** обеспечивает существование корней многочленов и большую свободу при проведении выкладок. Часто вещественную матрицу лучше рассматривать как комплексную матрицу с ограничением на вид ее элементов. Напомним также, что множество (векторное пространство) всех вещественных или комплексных векторов размерности *n* обозначается соответственно через $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{C}^n$. Векторы в $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{C}^n$ рассматриваются как векторы-столбцы. Наконец, для матрицы $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbf{F})$ *транспонированная* матрица $[a_{ij}] \in M_n(\mathbf{F})$ обозначается через A^m (см. 14.2.5); в случае $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{C}$ *сопряженная матрица* $[\bar{a}_{ji}]$ — транспонированная матрица с комплексно-сопряженными к элементам a_{ij} элементами — обозначается через A^*. Если $x \in \mathbf{F}^n$, то x^T обозначает вектор-строку с теми же координатами, что и у вектора *x*. Если $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{C}$, то x^* обозначает вектор-строку, координаты которой являются комплексно-сопряженными к соответствующим координатам вектора *x*. Черта сверху обозначает переход от комплексного числа к его комплексно-сопряженному (см. приложение А) или от матрицы (или вектора) к матрице (или вектору) с элементами, комплексно-сопряженными к исходным.

Матрицу $A \in M_n$ можно рассматривать как линейное преобразование из $\mathbf{C}^n$ в $\mathbf{C}^n$ (в каком-либо базисе в $\mathbf{C}^n$) или же — и это также полезно — как массив чисел. Оба подхода взаимосвязаны, и сущность теории матриц, а также ключ к приложениям — это выяснение свойств линейного преобразования на основе изучения именно соответствующего массива чисел. Возможно, понятие собственного значения является единственным важнейшим понятием теории матриц. Множество *n* собственных значений матрицы *A* обозначается через $\sigma(A)$.

15.1.2. Определение.

Пусть $A \in M_n$ и $x \in \mathbf{C}^n$. Рассмотрим уравнение

$$Ax = \lambda x, \quad x \neq 0, \tag{15.1.1}$$

где λ — число. Если λ и ненулевой вектор *x* удовлетворяют данному уравнению, то λ называется *собственным значением* матрицы *A,* а *x* — *собственным вектором* матрицы *A,* отвечающим λ. Заметим, что λ и *x* образуют неразделимую пару и собственный вектор не может быть нулевым.

15.1.3. Определение.

Совокупность всех собственных значений $\lambda \in \mathbf{C}$ матрицы $A \in M_n$ называется *спектром* матрицы *A* и обозначается через $\sigma(A)$. Неотрицательное вещественное число $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$ называется *спектральным радиусом* матрицы *A*. Это есть не что иное, как радиус наименьшего круга с центром в начале координат на комплексной плоскости, который содержит все собственные значения матрицы *A*.

Согласно (15.1.1), собственный вектор — это такой вектор, для которого умножение на матрицу *A* описывается очень просто — это умножение на скаляр (собственное значение). Уже одно только это свойство собственных значений и собственных векторов, даже если бы с ними и не было связано ничего более важного, вызывает интерес к ним с алгебраической точки зрения.

Пример. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \in M_2.$$

Для нее $3 \in \sigma(A)$, а соответствующий собственный вектор есть $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, так как

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Кроме того, $5 \in \sigma(A)$. Соответствующий собственный вектор предлагается найти читателю.

Напомним, что значение многочлена

$$p(t) = a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} + \ldots + a_1 t + a_0$$

при $t = A$, где $A \in M_n$, корректно определено, так как мы можем возводить квадратную матрицу в целую положительную степень и составлять произвольные линейные комбинации матриц одинакового размера. Таким образом,

$$p(A) = a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I. \qquad (15.1.2)$$

Полезно заметить, что любая матрица, являющаяся значением какого-то многочлена при $t = A$, имеет те же собственные векторы, что и матрица *A;* существует также простая связь между собственными значениями этой матрицы и матрицы *A*.

1.1.6. Теорема. *Пусть* $p(\cdot)$ *— заданный многочлен, λ — собственное значение матрицы* $A \in M_n$ *их — соответствующий собственный вектор. Тогда p(X) — собственное значение, а x — отвечающий ему собственный вектор матрицы p(A).*

Доказательство. Рассмотрим вектор $p(A)x$. Во-первых,

$$p(A)x = a_k A^k x + a_{k-1} A^{k-1} x + \ldots + a_1 A x + a_0 x.$$

Во-вторых,

$A^l x = A^{l-1} A x = A^{l-1} \lambda x = \lambda A^{l-1} x = \ldots = \lambda^l x$ — здесь последовательно применяется определение собственного вектора и собственного значения. Таким образом,

$$p(A)x = a_k \lambda^k x + \ldots + a_0 x = (a_k \lambda^k + \ldots + a_0) x = p(\lambda) x. \ \square$$

1.1.7. Утверждение. *Матрица $A \in M_n$ вырожденна в том и только в том случае, когда $0 \in \sigma(A)$.*

Доказательство. Для вырожденности матрицы A необходимо и достаточно, чтобы равенство $Ax=0$ выполнялось для некоторого $x \neq 0$. Это возможно в том и только в том случае, когда $Ax = 0 \cdot x$ для некоторого $x \neq 0$, т. е. тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$ является собственным значением.

15.2. Характеристический многочлен

В отношении собственных значений матрицы $A \in M_n$ естественно поставить следующие вопросы: сколько их и как их можно охарактеризовать?

Уравнение (15.1.1), определяющее собственные значения и собственные векторы, эквивалентно уравнению

$$(\lambda I - A)x = 0, \quad x \neq 0. \tag{15.2.1}$$

Таким образом, $\lambda \in \sigma(A)$ в том и только в том случае, когда матрица $\lambda I — A$ вырожденна, т. е.

$$\det(\lambda I - A) = 0. \tag{15.2.2}$$

15.2.3.Определение. *Характеристический многочлен* матрицы $A \in M_n$, рассматриваемый как формальный многочлен от t, определяется выражением

$$p_A(t) \equiv \det(tI - A).$$

Замечание. Мы используем букву t как формальную переменную характеристического многочлена для того, чтобы отличать ее от буквы λ, которой обычно обозначается собственное значение или корень многочлена. Тем не менее иногда и для переменной, и для собственного значения используется одна и та же буква.

15.2.4. Утверждение. *Характеристический многочлен $p_A(\cdot)$ матрицы $A \in M_n$ имеет степень n, и множество корней уравнения $p_A(t) = 0$ совпадает с $\sigma(A)$.*

Доказательство. Тот факт, что $p_A(\cdot)$ имеет степень *n,* получается по индукции из разложения Лапласа для $\det(tI - A)$: каждая строка в $tI - A$ вносит в разложение одну и только одну степень буквы *t.* Вторая часть утверждения равносильна (15.1.1) и (15.2.2).

15.2.5. Определение. *Главная k×k-подматрица в* $A \in M_n$ — это подматрица, расположенная на пересечении строк и столбцов с одинаковыми множествами номеров (см. разд. 14.7.1); ее определитель называется *главным минором* порядка *k.* В матрице $A = [a_{ij}] \in M_n$ существует $\binom{n}{k}$ различных главных миноров порядка *k;* их сумма обозначается через $E_k(A)$. В частности, $E_1(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ называется *следом* матрицы *A* и обычно обозначается через tr *a.* Заметим, что $E_n(A) = \det A$. *Упражнение.* Найти $\sigma(A^2)$, если $\sigma(A) = \{-1,\ 2\}$, $A \in M_2$.

15.2.6. Утверждение. *Всякая матрица* $A \in M_n$ *имеет в точности n (комплексных) собственных значений с учетом их кратности.*

Замечание. Когда мы говорим о «кратности» собственного значения λ матрицы $A \in M_n$, то имеем в виду кратность λ как корня характеристического многочлена $p_A(\cdot)$. Более подробно о кратности собственных значений речь пойдет в разд. 15.4. Однако полезно уже сейчас отметить взаимосвязь между производными многочлена и кратностью его корня. Для любого многочлена *p(t)* число λ является его корнем кратности $k \geq 1$ в том и только в том случае, когда *p(t)* можно записать в виде $p(t) = (t - \lambda)^k q(t)$, где многочлен *q(t)* такой, что $q(\lambda) \neq 0$. Дифференцируя это соотношение, получаем $p'(t) = k(t - \lambda)^{k-1} q(t) + (t - \lambda)^k q'(t)$. Следовательно, $p'(\lambda) = 0$ в случае, когда $k > 1$, и ни в каком другом случае. Если $k>1$, то $p''(t) = k(k-1)(t-\lambda)^{k-2} q(t) +$ [сумма одночленов с общим множителем $(t - \lambda)^m$, где $m \geqslant k - 1$], так что $p''(\lambda) = 0$, когда $k > 2$, и ни в каком другом случае. Повторение этого вычисления показывает, что λ есть корень кратности *k* многочлена *p(t)* в том и только в том случае, когда $p(\lambda) = p'(\lambda) = \ldots \ldots = p^{(k-1)}(\lambda) = 0$ и $p^{(k)}(\lambda) \neq 0$.

15.2.7. Примеры. Утверждение 15.2.6 по существу использует тот факт, что поле комплексных чисел *алгебраически замкнуто* — последнее означает, что в этом поле любой многочлен степени *n* с коэффициентами из этого поля имеет *n* корней. Когда речь идет о матрицах над другими полями, например, такими, как вещественные или рациональные числа, в общем случае не очень много можно сказать о том, сколько у них будет собственных значений из этого же поля. Задача 8 из разд. 15.1, однако, описывает ситуацию, когда это можно выяснить. Отметим, кроме того, что матрица над произвольным полем может иметь очень небольшое количество различных собственных значений. Матрица

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (15.2.7a)$$

не имеет вещественных собственных значений, хотя и состоит из вещественных элементов. Матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & & 0 \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \qquad (15.2.7b)$$

имеет только одно собственное значение (1 кратности *n)* независимо от ее порядка.

В соответствии с утверждением 15.2.6 для матрицы $A \in M_n$ мы можем составить последовательность ее собственных значений

$$\lambda_1, \ \lambda_2, \ \ldots, \ \lambda_n,$$

выбирая произвольное их упорядочение и повторяя каждое собственное значение столько раз, какова его кратность. Тогда, согласно утверждению 15.2.4, получаем

$$p_A(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \ldots (t - \lambda_n). \qquad (15.2.8)$$

15.2.9. Определение. *Элементарная симметрическая функция* степени *k* от *n* величин $\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_n \quad (k \leqslant n)$ имеет вид

$$S_k(\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_n) \equiv \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \prod_{j=1}^{k} \lambda_{i_j},$$

т. е. является суммой всех $\binom{n}{k}$ *k*-членных произведений различных величин, выбираемых среди $\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_n$.

Например, $S_1(\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_n) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ — сумма всех λ_i и $S_n(\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_n) = \lambda_1 \ldots \lambda_n$ — произведение всех λ_i. Вследствие (15.2.8) и в силу того, что $p_A(t)$ вводится с помощью некоторого определителя, имеется взаимосвязь между элементарными симметрическими функциями $S_k(\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_n)$ собственных значений матрицы *A* и суммами $E_k(A)$ ее главных миноров порядка *k* (см. разд. 15.2.5). Справедливы следующие тождества:

$$(t-\lambda_1)\ldots(t-\lambda_n)=t^n-S_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)t^{n-1}+$$
$$+S_2(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)t^{n-2}-\ldots\pm S_n(\lambda_1,\ldots,\lambda_n); \quad (15.2.10)$$
$$p_A(t)=t^n-E_1(A)t^{n-1}+E_2(A)t^{n-2}-\ldots\pm E_n(A). \quad (15.2.11)$$

Они проверяются непосредственно (хотя и не без труда).

Упражнение. Убедиться в справедливости тождеств (15.2.10) и (15.2.11). Первое можно проверить непосредственным вычислением коэффициента при t^{n-k} в произведении $(t-\lambda_1)\ \ldots\ (t-\lambda_n)$. Последнее можно доказать по индукции, используя разложение Лапласа.

Объединяя (15.2.10), (15.2.11) с (15.2.8), получаем следующую теорему.

15.2.12. Теорема. *Пусть* $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n$ *— собственные значения матрицы* $A\in M_n$. *Тогда*

$$S_k(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)=E_k(A),$$

т. е. элементарная симметрическая функция степени k от собственных значений матрицы A есть сумма всех главных миноров порядка k в матрице A. В частности,

$$\operatorname{tr} A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i,\quad \det A=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i.$$

Микромодуль 46
Индивидуальные тестовые задачи

1. Объяснить, почему рассмотренная выше задача на условный экстремум обязательно имеет решение. Вывести отсюда, что любая симметричная матрица обладает хотя бы одним вещественным собственным значением. *Указание.* Применить теорему Вейерштрасса (см. приложение Е) к непрерывной функции $f(x)=x^TAx$.

2. Пусть матрица $A\in M_n(\mathbf{R})$ симметричная $(A^T=A)$. Показать, что максимальное значение квадратичной формы x^TAx при условии, что $x^Tx=1$, равно наибольшему собственному значению матрицы A.

Упражнение. Пусть x является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению λ. Показать, что любое ненулевое кратное вектора x также представляет собой собственный вектор.

3. Найти $\sigma(D)$, где $D=\operatorname{diag}(d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_n)$ — диагональная матрица (14.9.1). Для каждого собственного значения построить отвечающий ему собственный вектор. *Указание.* Рассмотреть векторы e_i (i=1, ..., n) стандартного базиса.

4. Предположим, что матрица $A \in M$ невырожденна. Согласно 15.1.7, это равносильно тому, что 0 не является ее собственным значением. Показать, что если $\lambda \in \sigma(A)$, то $\lambda^{-1} \in \sigma(A^{-1})$. Считая известными λ и $x \neq 0$, такие, что $Ax = \lambda x$, найти собственный вектор матрицы A^{-1}, отвечающий собственному значению λ^{-1}.

5. Показать, что если сумма элементов любой строки матрицы $A \in M_n$ равна 1, то $1 \in \sigma(A)$. *Указание.* Рассмотреть вектор $e = [1, 1, \ldots, 1]^T$ и заметить, что суммы элементов любой строки матрицы *A* одинаковы в том и только в том случае, когда *e* является собственным вектором этой матрицы. Показать, что если матрица *A* невырожденна, то сумма элементов любой строки матрицы A^{-1} одна и та же и равна 1. Доказать, что для любого многочлена *p(t)* суммы элементов любой строки матрицы *p(A)* одинаковы. Чему равны эти суммы?

6. Пусть матрица имеет $A \in M_n(\mathbf{R})$ собственное значение $\lambda \in \mathbf{R}$. Доказать, что существует вещественный собственный вектор $x \in \mathbf{R}^n$, отвечающий λ. Далее, доказать, что для любого собственного вектора $x \in \mathbf{C}$ ~ его вещественная и чисто мнимая составляющие (они берутся покомпонентно) также являются (если они ненулевые) собственными векторами матрицы *A*, отвечающими λ. Показать, что собственный вектор $x \in \mathbf{R}^n$ матрицы $A \in M_n(\mathbf{R})$ отвечает непременно вещественному собственному значению.

7. Показать, что собственные значения блочно-диагональной матрицы (14.9.2)

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_{ii} \in M_{n_i},$$

совпадают с собственными значениями блоков A_{11} и A_{22}. *Указание.* Для начала выразить собственные векторы матрицы *A* через собственные векторы матриц A_{11} и A_{22}.

8. Матрица $A \in M_n$ называется *идемпотентной,* если $A^2=A$. Доказать, что все собственные значения идемпотентной матрицы равны 0 или 1.

9. Матрица $A \in M_n$ называется *нильпотентной,* если $A^q = 0$ для некоторого целого положительного числа *q*. Наименьшее значение такого *q* называется *индексом нильпотентности.* Доказать, что все собственные значения нильпотентной матрицы равны 0. Привести пример ненулевой матрицы, все собственные значения которой равны 0.

10. В конечномерном случае любая комплексная или вещественная матрица имеет комплексное собственное значение (позже это будет

доказано). Однако линейное преобразование бесконечномерного векторного пространства может не иметь ни одного собственного значения. Возьмем в качестве V векторное пространство всех формальных бесконечных последовательностей комплексных чисел:

$$V = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots): a_i \in \mathbf{C}, i = 1, 2, \ldots\}$$

и определим линейное преобразование S на V таким образом:

$$S(a_1, a_2, \ldots) = (0, a_1, a_2, \ldots).$$

Это преобразование иногда называют *оператором сдвига.* Проверить, что S есть линейное преобразование и показать, что оно не имеет собственных значений. *Указание.* Показать, что для того, чтобы вектор был собственным вектором, необходимо, чтобы все его компоненты были одинаковы и при этом они не могут быть ничем иным, кроме 0. Этот вектор, следовательно, нулевой и не может быть собственным вектором.

11. Матрица $A \in M_n$ называется *эрмитовой,* если $A^* = A$ (см. 14.2.5). Доказать, что любая эрмитова матрица имеет только *вещественные* собственные значения. *Указание.* Взять произвольное число $\lambda \in \sigma(A)$ и отвечающий ему собственный вектор x. Тогда в силу (15.1.1) $x^*Ax = \lambda x^*x$. В то же время $\overline{x^*Ax} = x^*A^*x = x^*Ax$, и, значит, число x^*Ax вещественное. Поскольку число x^*x положительно, $\lambda = x^*Ax/x^*x$ также вещественно.

12. Показать, что уравнение $\det(A - tI) = 0$ имеет те же корни, что и уравнение $\det(tI - A) = 0$ и при этом $\det(A - tI) = (-1)^n \det(tI - A)$. Таким образом, характеристический многочлен можно было бы определить (и так иногда делают) иначе — как $\det(A - tI)$. Показать, что принятое нами определение гарантирует, что (старший) коэффициент при t^n всегда равен +1.

Упражнение. Показать, что если $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, то $p_A(t) = t^2 - (a + d)t + (ad - bc)$ и

$$\sigma(A) = \left\{ \frac{a + d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2} \right\}.$$

Доказать, что собственные значения матрицы $A \in M_2(\mathbf{R})$ вещественны, если $bc \geqslant 0$. Более того, они вещественны в том и только в том случае, когда $(a - d)^2 + 4bc \geqslant 0$. Не будучи вещественными, они образуют пару комплексно-сопряженных чисел. Наконец, показать, что собственные значения различны, если $(a - d)^2 + 4bc \neq 0$.

13. Показать, что если матрица $T \in M_n$ треугольна:

$$T=\begin{bmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & t_{nn} \end{bmatrix},$$

то $\sigma(T)=\{t_{11}, t_{22}, \dots, t_{nn}\}$— множество диагональных элементов матрицы T.

14. Все элементы матрицы $J_n \in M_n$ равны 1:

$$J_n=\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Каковы собственные значения матрицы J_2? Показать, что все собственные значения матрицы J_3 — это 0 (появляющийся дважды) и 3. Что будет в случае произвольного n? *Указание.* Рассмотреть вектор $e=[1, 1, \dots, 1]^T$.

15. Найти все собственные значения и соответствующие собственные векторы матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

16. Записать $A=4I-J_3$ и воспользоваться предыдущим упражнением.

17. Показать, что для $A \in M_2$

$$p_A(t)=t^2-(\operatorname{tr} A)t+\det A, \quad \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda = \operatorname{tr} A, \quad \prod_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda = \det A.$$

Один из фундаментальных и непростых фактов — так называемая основная теорема алгебры (см. приложение С) — утверждает, что в множестве комплексных чисел любой многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет в точности n корней с учетом их кратности. Опираясь на эту теорему, мы можем высказать следующее важное предложение.

18. Доказать, что если $A \in M_n(\mathbf{R})$ и n нечетно, то матрица A обладает хотя бы одним вещественным собственным значением. *Указание.* Все невещественные комплексные корни многочлена с вещественными коэффициентами разбиваются на пары комплексно-сопряженных чисел. Для $A \in M_n(\mathbf{R})$ многочлен $p_A(\cdot)$ имеет вещественные коэффициенты.

19. Проверить утверждение 15.1.7, используя теорему 15.2.12.

20. Пусть $A \in M_{m,\,n}$, $B \in M_{n,\,m}$ (см. разд. 14.2.1). Доказать прямым вычислением, что $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$. Вывеети отсюда, что для любой матрицы $A \in M_n$ и для любой невырожденной матрицы $S \in M_n$ выполнйется равенство $\operatorname{tr} S^{-1}AS = \operatorname{tr} A$. Матрица $S^{-1}AS$ называется *подобной* матрице *A,* и то, что предлагается доказать, означает инвариантность следа при переходе к подобной матрице. Подобие изучается в следующем разделе, и там мы увидим, что все суммы $E_k(A)$ главных миноров суть инварианты подобия. Заметим, что определитель, очевидно, является инвариантом подобия вследствие мультипликативности.

21. Вычислить характеристический многочлен $p_D(t)$ диагональной матрицы $D \in M_n$ и доказать, что $p_D(D) = 0$.

22. Пусть $A \in M_n$ и $A_i = A(\{i\}') \in M_{n-1}$ — главная подматрица в *A*, полученная в результате вычеркивания строки и столбца с номером i $(i = 1, \ldots, n)$. Доказать, что

$$\frac{d}{dt} p_A(t) = \sum_{i=1}^{n} p_{A_i}(t). \quad (15.2.13)$$

23. Показать, что след нильпотентной матрицы (см. задачу 6 из § 1.1) равен 0. Каков характеристический многочлен нильпотентной матрицы?

24. Пусть $A \in M_n$ и $\lambda \in \sigma(A)$ имеет кратность 1 (как корень уравнения $p_A(t) = 0$). Показать, что $\operatorname{rank}(A - \lambda I) = n - 1$. Обратное не всегда верно —достаточно рассмотреть матрицу (15.2.7b). *Указание.* Воспользоваться соотношением (15.2.13) и тем, что $(d/dt)p_A(t) \neq 0$ при $t = \lambda$;, вывести отсюда существование в $A - \lambda I$ невырожденной главной подматрицы порядка *n* — 1.

24. С помощью теоремы 15.2.12 построить характеристический многочлен матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Попробовать эту же процедуру применить для вычисления характеристического многочлена произвольной трехдиагональной $n \times n$-матрицы (см. разд. 14.9.10).

26. Показать, что если матрица $A \in M_n$ имеет собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то

$$\operatorname{tr} A^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$$

для любого целого положительного k. Сумма справа называется k-м *моментом* собственных значений матрицы A.

27. Явно выписать $S_2(\lambda_1, \ldots, \lambda_6)$ $S_3(\lambda_1, \ldots, \lambda_6)$, $S_4(\lambda_1, \ldots, \lambda_6)$ и $S_5(\lambda_1, \ldots, \lambda_6)$.

28. Пусть V — векторное пространство над полем **F**. Собственное значение линейного преобразования $T\colon V \to V$ — это число $\lambda \in \mathbf{F}$, такое, что для некоторого ненулевого вектора $v \in V$ имеем $Tv = \lambda v$. Доказать, что если **F** есть поле комплексных чисел и V конечномерно, то любое линейное преобразование T имеет собственное значение. Привести примеры того, что, исключив любое из условий — конечномерность пространства V или то, что **F** = **C**, — можно получить преобразование T, не имеющее собственных значений. *Указание.* Взять в V базис $\mathscr{B}$ и рассмотреть матрицу ${}_{\mathscr{B}}[T]_{\mathscr{B}}$.

29. Пусть $p(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$, $a_n = 1$, — некоторый многочлен со старшим коэффициентом 1 и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — его корни (с учетом кратиостей); k-*й* момент корней обозначим через $\mu_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \ldots + \lambda_n^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Установить *тождества Ньютона*

$$ka_{n-k} + \mu_1 a_{n-k+1} + \mu_2 a_{n-k+2} + \ldots + \mu_k a_n = 0, \quad k = 1, \ldots, n, \qquad (15.2.14)$$

и объяснить, почему первые n моментов корней однозначно определяют коэффициенты многочлена $p(t)$ (а значит, и его корни), и наоборот. *Указание.* Показать, что для некоторого R>0 при $|t| > R$ имеем $(t - \lambda_i)^{-1} = t^{-1} + \lambda_i t^{-2} + \lambda_i^2 t^{-3} + \ldots$ и, следовательно,

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} (t - \lambda_i)^{-1} = nt^{-1} + \mu_1 t^{-2} + \mu_2 t^{-3} + \ldots, \quad |t| > R.$$

Доказать, что $p'(t) = p(t) f(t)$; сравнение коэффициентов приводит к тождествам Ньютона и к дополнительным соотношениям

$$\mu_k a_0 + \mu_{k+1} a_1 + \ldots + \mu_{n+k-1} a_{n-1} + \mu_{n+k} a_n = 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

для моментов более высокого порядка.

30. Пусть заданы матрицы $A, B \in M_n$. Доказать, что для того, чтобы A и B имели одни и те же собственные значения, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{tr} A^k = \operatorname{tr} B^k$ для всех k (k = 1, 2.....n). *Указание.* Установить совпадение характеристических многочленов матриц A и B, а для этого воспользоваться задачей 8 и тождествами Ньютона (15.2.14).

Микромодуль 47
Подобие и собственные векторы

15.3. Подобие

Как уже отмечалось в 15.0, преобразование подобия для матрицы из M_n соответствует представлению линейного преобразования пространства $\mathbf{C}^n$ в другом базисе. Таким образом, можно считать, что, изучая подобные матрицы, мы будем устанавливать свойства, присущие соответствующему линейному преобразованию, или свойства, общие для всех его представлений в различных базисах.

15.3.1. Определение. Матрица $B \in M_n$ называется *подобной* матрице $A \in M_n$, если существует невырожденная матрица $S \in M_n$, такая, что

$$B = S^{-1}AS.$$

Преобразование $A \to S^{-1}AS$ называется *преобразованием подобия* (или просто *подобием),* осуществляемым посредством *трансформирующей матрицы S*. Отношение «B подобна A» иногда записывается сокращенно $B \sim A$.

15.3.2. Утверждение. *Подобие является* отношением эквивалентности *на M_n, а именно оно*

(a) *рефлексивно: $A \sim A$;*

(b) *симметрично: $B \sim A$ влечет за собой $A \sim B$;*

(c) *транзитивно: $C \sim B$ и $B \sim A$ влекут за собой $C \sim A$.*

Как и любое отношение эквивалентности, отношение подобия разбивает множество M_n на непересекающиеся классы эквивалентности. Любой класс эквивалентности состоит из множества всех матриц, подобных любой заданной входящей в него матрице — представительнице этого класса. Все матрицы из одного класса эквивалентности подобны и никакие матрицы из двух разных классов не являются подобными. В произвольной последовательности матриц, в которой соседние матрицы подобны, вследствие транзитивности подобия первая и последняя матрицы принадлежат одному и тому же классу подобия. Наиболее существенно, что матрицы из одного класса эквивалентности обладают многими одинаковыми важными свойствами. Некоторые из них мы рассмотрим уже здесь, но более полное описание *инвариантов подобия* (например, канонической жордановой формы) будет дано позже.

15.3.3. Теорема. *Если матрица* $B \in M_n$ *подобна матрице* $A \in M_n$, *то B имеет такой же характеристический многочлен, как и A.*
Доказательство. Для любого t

$$\begin{aligned} p_B(t) &= \det(tI - B) = \\ &= \det(tS^{-1}S - S^{-1}AS) = \det S^{-1}(tI - A)S = \\ &= \det S^{-1} \det(tI - A) \det S = (\det S)^{-1}(\det S)\det(tI - A) = \\ &= \det(tI - A) = p_A(t). \ \square \end{aligned}$$

15.3.4. Следствие. *Любые подобные матрицы A и B* $(A, B \in M_n)$ *имеют одинаковые собственные значения с учетом кратности.*

15.3.5. Пример. Тот факт, что данные матрицы имеют одинаковые собственные значения, является необходимым, но не достаточным условием подобия. Рассмотрим матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Каждая имеет собственное значение 0 кратности 2, но они не подобны.
Упражнение. Показать, что единственная матрица, подобная нулевой матрице, есть она сама. Отсюда вывести утверждения из примера 15.3.5.
Упражнение. Пусть матрицы $A, \ B \in M_n$ подобны и $q(\cdot)$ — любой многочлен. Доказать, что матрицы *q(A)* и *q(B)* подобны, в частности $A + \alpha I$ и $B + \alpha I$ подобны для любого числа α.
Упражнение. Пусть $A, \ B, \ C, \ D \in M_n$ и подобия $A \sim B$ и $C \sim D$ осуществляются одной и той же матрицей *S*. Доказать, что $A + C \sim B + D$.
Упражнение. Доказать, что если $A, \ S \in M_n$ и матрица *S* невырожденна, то $E_k(S^{-1}AS) = E_k(A)$, в частности $\det S^{-1}AS = \det A$ и $\operatorname{tr} S^{-1}AS = \operatorname{tr} A$, т. е. определитель, след и другие суммы главных миноров порядка *k* суть инварианты подобия.
Упражнение. Доказать, что ранг также является инвариантом подобия: если матрица $B \in M_n$ подобна матрице $A \in M_n$, то $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} A$. *Указание.* См. разд. 14.4.6.

Поскольку диагональные матрицы особенно просты и обладают многими приятными свойствами, интересно знать, для каких $A \in M_n$ в классе эквивалентности матрицы *A* содержится диагональная матрица. Другими словами, какие матрицы подобны диагональным матрицам?

15.3.6. Определение. Матрица $A \in M_n$ называется *диагонализуемой* (матрицей *простой структуры*), если она подобна диагональной матрице.

15.3.7. Теорема. *Матрица* $A \in M_n$ *диагонализуема тогда и только тогда, когда существует система n линейно независимых векторов, каждый из которых является собственным вектором матрицы A.*

Доказательство. Пусть *A* имеет *n* линейно независимых собственных векторов $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$. Составим из них, взяв их в качестве столбцов, невырожденную матрицу *S*. Тогда

$$S^{-1}AS = S^{-1}\left[Ax^{(1)} \;\; Ax^{(2)} \;\ldots\; Ax^{(n)}\right] =$$
$$= S^{-1}\left[\lambda_1 x^{(1)} \;\ldots\; \lambda_n x^{(n)}\right] = S^{-1}\left[x^{(1)} \;\ldots\; x^{(n)}\right]\Lambda = S^{-1}S\Lambda = \Lambda,$$

где

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы *A*.

Обратно, предположим, что имеется трансформирующая матрица *S*, такая, что матрица $S^{-1}AS = \Lambda$ диагональна. Тогда $AS = S\Lambda$, а это означает, что умноженный слева на *A j*-й столбец матрицы *S* (это есть *j*-и столбец матрицы *AS)* совпадает с *j*-м столбцом матрицы *S*, умноженным на *j*-й диагональный элемент в *A* (это есть *j*-й столбец матрицы $S\Lambda$), т. е. *j*-й столбец матрицы *S* есть не что иное, как собственный вектор матрицы *A,* отвечающий *j*-му диагональному элементу матрицы Λ. Вследствие невырожденности матрицы *S* налицо система *n* линейно независимых собственных векторов.

Заметим, что доказательство теоремы 15.3.7 по существу устанавливает алгоритм диагонализации произвольной диагонализуемой матрицы: найти собственные значения матрицы *A*; найти соответствующие собственные векторы (с учетом кратности) и составить из них матрицу *S*. *Если* собственные векторы линейно независимы, то *S* осуществляет диагонализацию. Однако подчеркнем, что этот алгоритм *нельзя* считать практической вычислительной процедурой, за исключением его применений для аналитических примеров небольшого порядка.

Замечание. Если матрица $A \in M_n$ диагонализуема, то диагональные элементы любой диагональной матрицы, к которой она приводится преобразованием подобия, будут собственными значениями матрицы *A* (с соответствующими кратностями). Более того, линейно независимые собственные векторы (которые составляют трансформирующую матрицу) должны отвечать различным собственным значениям с учетом кратности, т. е. если $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ — линейно независимые собственные векторы и $p_A(t) = (t - \lambda_1) \ldots (t - \lambda_n)$, то

$$Ax^{(i)} = \lambda_{\tau(i)} x^{(i)}$$

для некоторой перестановки τ индексов i.

Упражнение. Доказать, что матрица $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *не* диагонализуема.

Рассуждать можно любым из следующих способов: с одной стороны, будучи диагонализуемой, она была бы подобна нулевой матрице — а это не так; с другой стороны, можно убедиться в том, что эта матрица имеет лишь один с точностью до ненулевого множителя собственный вектор, отвечающий собственному значению 0.

Упражнение. Показать, что если A диагонализуема и $q(\cdot)$ — какой-то многочлен, то $q(A)$ тоже диагонализуема. *Указание.* $q(SAS^{-1}) = Sq(A)S^{-1}$.

Упражнение. Пусть задана матрица $A \in M_n$ и ее собственное значение $\lambda \in \sigma(A)$ имеет кратность m. Доказать, что если $\operatorname{rank}(A - \lambda I) > n - m$, то A не диагонализуема.

Имеется простое условие, обеспечивающее диагонализуемость, — когда все собственные значения различны. Чтобы установить этот факт, нам понадобится следующая важная лемма, имеющая также самостоятельное значение.

15.3.8. Лемма. *Предположим, что* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *— попарно различные собственные значения матрицы* $A \in M_n$ *и* $x^{(i)}$ *— собственный вектор, отвечающий* λ_i $(i = 1, \ldots, k)$. *Тогда множество* $\{x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}\}$ *линейно независимо.*

Доказательство. Допустим от противного, что $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$ в действительности линейно зависимы. Тогда для них существует нетривиальная линейная комбинация, выражающая вектор 0, в частности такая, в которой *наименьшее* число ненулевых коэффициентов. Предположим, что такое минимальное соотношение линейной зависимости имеет вид

$$\alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(2)} + \ldots + \alpha_r x^{(r)} = 0, \quad r \leqslant k.$$

Здесь $r > 1$, так как $x^{(i)} \neq 0$ для всех i. Для удобства мы взяли первые r векторов, чего всегда можно добиться перенумерацией. Тогда

$$A(\alpha_1 x^{(1)} + \ldots + \alpha_r x^{(r)}) = \alpha_1 A x^{(1)} + \ldots + \alpha_r A x^{(r)} =$$
$$= \alpha_1 \lambda_1 x^{(1)} + \ldots + \alpha_r \lambda_r x^{(r)} = 0$$

и это еще одно соотношение линейной зависимости. Теперь первое соотношение умножим на λ_r и вычтем его из второго. Получаем

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_r)x^{(1)}+\ldots+\alpha_{r-1}(\lambda_{r-1}-\lambda_r)x^{(r-1)}=0$$

и это есть третье соотношение линейной зависимости, причем с меньшим числом ненулевых коэффициентов, чем в двух предыдущих. Последняя линейная комбинация нетривиальна, так как $\lambda_i\neq\lambda_r \quad (i=1,\ \ldots,\ r-1)$. Это противоречит предположению о минимальности первого соотношения линейной зависимости и завершает доказательство.

15.3.9. Теорема. *Если матрица $A\in M_n$ имеет n различных собственных значений, то она диагонализуема.*

Доказательство. Пусть $\sigma(A)=\{\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n\}$ и $x^{(i)}$ — собственный вектор, отвечающий $\lambda_i \quad (i=1,\ \ldots,\ n)$. Поскольку собственные значения все различны, то в силу леммы 15.3.8 множество $\{x^{(1)},\ \ldots,\ x^{(n)}\}$ линейно независимо и вследствие теоремы 15.3.7 матрица *A* диагонализуема.

Упражнение. Привести пример диагонализуемой матрицы $A\in M_n$, такой, что не все ее собственные значения различны.

Упражнение. Напомним (см. разд. 14.9.5), что матрица перестановки *P* в любой позиции содержит 0 или 1 и в любой строке и в любом столбце в точности один ее элемент равен 1; таким образом, $P^T=P^{-1}$. Показать, что если преобразование подобия матрицы $A\in M_n$ осуществляется матрицей перестановки, то оно переупорядочивает диагональные элементы матрицы *A*. Показать, что от любой диагональной матрицы с помощью трансформирующей матрицы перестановки можно перейти к матрице, в которой те же диагональные элементы расположены в любом заданном порядке, в частности когда повторяющиеся диагональные элементы стоят подряд.

В общем случае матрицы $A,\ B\in M_n$ не коммутируют относительно умножения. Однако если *A* и *B* обе диагональные, то они всегда коммутируют. Это наблюдение можно в некотором смысле обобщить; в этом отношении полезна следующая лемма.

15.3.10. Лемма. *Пусть заданы матрицы $A\in M_n$, $B\in M_m$ и матрица*

$$C=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

есть прямая сумма матриц A и B. Тогда C диагонализуема в том и только в том случае, когда обе матрицы A и B диагонализуемы.

Доказательство. Пусть невырожденные матрицы $S_1\in M_n$ и $S_2\in M_m$ таковы, что матрицы $S_1^{-1}AS_1$ и $S_2^{-1}BS_2$ диагональные. Тогда несложно проверить, что матрица $S^{-1}CS$ будет диагональной, если в качестве *S* взять прямую сумму матриц S_1 и S_2:

$$S=\begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}.$$

Наоборот, если C диагонализуема, то для некоторой невырожденной матрицы $S \in M_{n+m}$ матрица $S^{-1}CS = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \ldots, \lambda_{n+m})$ диагональная. Запишем S в виде $S=[s_1\ s_2\ \ldots\ s_{n+m}]$, где

$$s_i=\begin{bmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{n+m},\ \xi_i \in C^n,\ \eta_i \in \mathbf{C}^m,\ i=1, \ldots, n+m.$$

Тогда $Cs_i=\lambda_i s_i$ влечет за собой $A\xi_i=\lambda_i\xi_i$ и $B\eta_i=\lambda_i\eta_i$ для всех $i=1, 2, \ldots, n+m$. Если в множестве $\{\xi_1, \ldots, \xi_{n+m}\}$ меньше n линейно независимых векторов, то столбцовый (а значит, и строчный) ранг матрицы

$$[\xi_1\ \ \xi_2 \ldots \xi_{n+m}] \in M_{n,\ n+m}$$

меньше n. Аналогично если в множестве $\{\eta_1, \ldots, \eta_{n+m}\}$ меньше m линейно независимых векторов, то столбцовый (а значит, и строчный) ранг матрицы

$$[\eta_1\ \ \eta_2 \ldots \eta_{n+m}] \in M_{m,\ n+m}$$

меньше m. Если реализуется одна или обе из рассмотренных возможностей, то для матрицы

$$S=[s_1\ \ldots\ s_{n+m}]=\begin{bmatrix} \xi_1 & \ldots & \xi_{n+m} \\ \eta_1 & \ldots & \eta_{n+m} \end{bmatrix} \in M_{n+m}$$

строчный ранг (а значит, и ранг) будет меньше $n+m$, что невозможно вследствие обратимости матрицы S. Таким образом, в множестве $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+m}\}$ существует в точности n линейно независимых векторов, и поскольку каждый из них есть собственный вектор матрицы A, то она должна быть диагонализуемой. По той же причине диагонализуема и матрица B.

15.3.11. Определение. Две диагонализуемые матрицы $A,\ B \in M_n$ называются *одновременно диагонализуемыми,* если существует трансформирующая матрица $S \in M_n$, для которой обе матрицы $S^{-1}AS$ и $S^{-1}BS$ диагональны, или, другими словами, если существует базис, в котором представления обоих соответствующих линейных преобразований имеют диагональный вид.

Упражнение. Доказать, что если $A,\ B \in M_n$ одновременно диагонализуемы. то они коммутируют. *Указание.* Записать $A=SDS^{-1}$ и $B=SES^{-1}$, где D и E — диагональные матрицы. Затем вычислить AB и BA и воспользоваться тем, что диагональные матрицы коммутируют. Этот прием используется довольно часто.

Упражнение. Доказать, что если $A \in M_n$ диагонализуема и

λI — произвольная скалярная матрица в M_n, то A и λI одновременно диагонализуемы.

15.3.12. Теорема. *Пусть матрицы* $A, B \in M_n$ *диагонализуемы. Тогда A и B коммутируют в том и только в том случае, когда они одновременно диагонализуемы.*

Доказательство. Предположим, что A и B коммутируют, и применим к обеим этим матрицам преобразование подобия с одной и той же трансформирующей матрицей, такое, что A приводится к диагональному виду. Таким образом, не ограничивая общности, будем считать, что матрица A диагональная. Предположим далее, не ограничивая общности, что на главной диагонали в A кратные собственные значения расположены рядом. Поскольку $AB = BA$ (при переходе к подобным матрицам это равенство остается в силе, когда применяется одна и та же трансформирующая матрица), получаем

$$\lambda_i b_{ij} = b_{ij}\lambda_j,$$

где $B = [b_{ij}]$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы A. Поскольку $(\lambda_i - \lambda_j) b_{ij} = 0$, то $b_{ij} = 0$, когда $\lambda_i \neq \lambda_j$. Таким образом, для заданного упорядочения величин λ_i матрица B является блочно-диагональной:

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & & B_k \end{bmatrix}, \tag{15.3.13}$$

где блоки B_i соответствуют различным собственным значениям матрицы A. Для любого i блок B_i квадратный, и его порядок равен кратности соответствующего ему собственного значения матрицы A. В силу леммы 15.3.10 вследствие диагонализуемости матрицы B каждый блок B_i является диагонализуемым. Пусть матрица T_i невырожденная и такая, что матрица $T_i^{-1} B_i T_i$ диагональна. Поскольку A имеет блочную форму

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 I & & & & 0 \\ & \lambda_2 I & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & \lambda_k I \end{bmatrix}, \tag{15.3.14}$$

где каждая скалярная матрица $\lambda_i I$ имеет тот же размер, что и матрица B_i, мы видим, что матрицы $T^{-1}AT$ и $T^{-1}\hat{B}T$ обе диагональные, если T— прямая сумма матриц $T_1, T_2, \ldots, T_k$:

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & & & & 0 \\ & T_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & T_k \end{bmatrix}. \qquad (15.3.15)$$

Заметим, что $T_i^{-1}\lambda_i I T_i = \lambda_i I$.

Обратное утверждение составляет содержание первого упражнения после определения 15.3.11.

В заключительной части этого параграфа мы распространим теорему 15.3.12 на более широкое множество матриц и приведем некоторое более слабое утверждение для случая недиагонализуемых матриц.

15.3.16. Определения. *Семейство* $\mathcal{F} \subseteq M_n$ матриц — это произвольное (конечное или бесконечное) множество матриц; *коммутативное семейство* — это такое семейство, в котором любые две матрицы коммутируют относительно умножения. Для матрицы $A \in M_n$ подпространство $W \subseteq \mathbf{C}^n$ называется *A-инвариантным* или *инвариантным относительно A,* если $Aw \in W$ для всех $w \in W$; для семейства $\mathcal{F} \subseteq M_n$ подпространство W называется $\mathcal{F}$*-инвариантным,* если W является A-инвариантным для всех $A \in \mathcal{F}$.

Заметим, что для $A \in M_n$ любой ненулевой элемент одномерного A-инвариантного подпространства в $\mathbf{C}^n$ — это собственный вектор матрицы A.

Упражнение. Пусть $A \subseteq M_n$, а W— инвариантное относительно A подпространство в $\mathbf{C}^n$ и его размерность не меньше 1. Доказать, что в W существует собственный вектор матрицы A. *Указание.* В W выбрать базис и рассмотреть матрицу, представляющую в этом базисе линейное преобразование T: $w \to Aw$, действующее в W. Доказать, что эта матрица имеет собственное значение. Главный вопрос — почему T есть линейное преобразование в W?

Следующая лемма представляет собой одно из ключевых предложений.

15.3.17. Лемма. *Пусть* $\mathcal{F} \subseteq M_n$ *— коммутативное семейство. Тогда существует вектор* $x \in \mathbf{C}^n$, *являющийся собственным вектором для каждой матрицы* $A \in \mathcal{F}$.

Доказательство. Пусть $W \subseteq \mathbf{C}^n$ — инвариантное относительно $\mathscr{F}$ подпространство *наименьшей положительной* размерности; такое подпространство существует, хотя и не обязательно единственно. Заведомо имеется $\mathscr{F}$-инвариантное подпространство размерности *n,* так как $\mathbf{C}^n$ является $\mathscr{F}$-инвариантным. Если существует $\mathscr{F}$-инвариантное подпространство размерности *n*—1, то можно спросить, не найдется ли $\mathscr{F}$-инвариантное подпространство размерности *n* — 2 и т. д. В действительности — к этому мы и ведем — любой ненулевой вектор из *W* есть собственный вектор для каждой матрицы $A \in \mathscr{F}$ (и этого достаточно, чтобы завершить доказательство). Если это не так, то для некоторой матрицы $A \in \mathscr{F}$ не каждый ненулевой вектор из *W* будет собственным вектором. Однако вследствие того что *W* $\mathscr{F}$-инвариантно, оно и *А*-инвариантно, поэтому существует вектор $x \neq 0$, такой, что $Ax = \lambda x$ для некоторого собственного значения *А*. Образуем множество $W_0 = \{y \in W\colon\ Ay = \lambda y\}$, так что $x \in W_0$ и $W_0 \subseteq W$ есть подпространство. Согласно предположению относительно A, $W_0 \neq W$, и, значит, W_0 по сравнению с *W* имеет строго меньшую (положительную) размерность. Если $B \in \mathscr{F}$, то $Bx \in W$ при $x \in W_0$, так как $W_0 \subseteq W$ и *W* — инвариантное относительно $\mathscr{F}$ подпространство. Однако $\mathscr{F}$ является коммутативным семейством и потому $A(Bx) = (AB)x = (BA)x = B(Ax) = B\lambda x = \lambda(Bx)$, откуда следует, что $Bx \in W_0$. Следовательно, подпространство W_0 тоже $\mathscr{F}$-инвариантно. Поскольку размерность подпространства W_0 положительна и строго меньше размерности подпространства *W*, мы приходим к противоречию, что и завершает доказательство.

Лемма 15.3.17 справедлива для коммутативного семейства произвольной мощности. В частности, семейство $\mathscr{F} = \{A, B\}$ может состоять только из двух матриц. Тогда лемма утверждает, что любая пара коммутирующих матриц обладает общим собственным вектором. Теорема 15.3.12 говорит о том, что если *А* и *В* не только коммутируют, но еще и таковы, что каждая из них диагонализуема, то они являются одновременно диагонализуемыми. Следующий наш результат показывает, что фактически то же справедливо и в том случае, когда диагонализуемые матрицы составляют коммутативное семейство произвольной мощности.

15.3.18. Определение. *Одновременно диагонализуемое* семейство $\mathscr{F} \subset M_n$ — это такое семейство, в котором любая матрица $A \in \mathscr{F}$ диагонализуется с помощью одной и той же невырожденной матрицы $S \in M_n$, т. е. матрица $S^{-1}AS$ диагональна для всех $A \in \mathscr{F}$.

15.3.19. Теорема. *Пусть* $\mathcal{F} \subset M_n$ — *семейство диагонализуемых матриц. Тогда* $\mathcal{F}$ *является коммутативным семейством в том и только в том случае, когда оно одновременно диагонализуемо.*

Доказательство. Если семейство $\mathcal{F}$ одновременно диагонализуемо, то оно будет коммутативным согласно первому упражнению после определения 15.3.11. Обратное утверждение докажем с помощью индукции по *n*. При $n = 1$ доказывать нечего, так как всякое семейство в данном случае состоит из диагональных матриц и является коммутативным. Теперь предположим, что $n \geq 2$ и для $k=1, 2, ..., n—1$ утверждение доказано по отношению ко всем коммутативным семействам диагонализуемых матриц порядка *k*. Если $\mathcal{F}$ содержит только скалярные матрицы, то доказывать нечего. Поэтому мы можем считать, что существует диагонализуемая $n\times n$-матрица $A \in \mathcal{F}$, имеющая *k* различных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, где $2 \leqslant k \leqslant n$. При этом $AB = BA$ для любой матрицы $B \in \mathcal{F}$ и всякая матрица $B \in \mathcal{F}$ диагонализуема. Используя те же соображения, что и в теореме 15.3.12, мы можем ограничиться случаем, когда матрица *A* в действительности диагональна, — пусть, как и там, ее кратные собственные значения расположены рядом, все собственные значения упорядочены, так что *A* имеет вид (15.3.14). Поскольку всякая матрица $B \in \mathcal{F}$ коммутирует с *A*, то по тем же причинам, что и в доказательстве теоремы 15.3.12, *B* есть прямая сумма (15.3.13) матриц, каждая из которых имеет порядок $n—1$ или меньше. Размеры и расположение блоков в (13.3.13) полностью определяются кратностями и упорядочением собственных значений матрицы *A,* и, следовательно, они одинаковы для всех $B \in \mathcal{F}$. Все матрицы $B \in \mathcal{F}$ коммутируют между собой (а не только с *A*), и любая из них имеет вид прямой суммы (15.3.13); поэтому каждый из *k* блоков матрицы из $\mathcal{F}$ коммутирует с соответствующим блоком любой другой матрицы из $\mathcal{F}$, и каждый из этих блоков диагонализуем согласно лемме 15.3.10. В силу предположения индукции найдутся *k* трансформирующих матриц $T_1, T_2, \ldots, T_k$ подходящих размеров, которые диагонализуют соответствующие блоки всякой матрицы из $\mathcal{F}$. Прямая сумма $T_1 \oplus \ldots \oplus T_k$ (как в (15.3.15)) диагонализует произвольную матрицу из $\mathcal{F}$.

Замечания. С данным параграфом связаны два важных вопроса, которые мы отложим до гл. 3. Во-первых, как определить по двум заданным матрицам $A, B \in M_n$, будут ли они подобны? Это повлечет за собой изучение канонических форм по отношению к подобию. Во-вторых, как узнать по заданной матрице $A \in M_n$, диагонализуема ли она, не вычисляя ее собственные векторы?

Наконец, в качестве последнего замечания по поводу коммутативности отметим, что, несмотря на то, что матрицы *AB* и *BA* (если обе они определены), вообще говоря, разные (и даже могут иметь разные размеры), они предельно близки в том, что касается их собственных значений. Если матрицы *A* и *B* обе квадратные, то *AB* и *BA* имеют в точности одни и те же собственные значения.

15.3.20. Теорема. *Предположим, что* $A \in M_{m,n}$, $B \in M_{n,m}$ *и* $m \leq n$. *Тогда BA имеет те же, с учетом кратностей, собственные значения, что и AB и, кроме того, еще n — m собственных значений, равных* 0. *Таким образом,* $p_{BA}(t) = t^{n-m}p_{AB}(t)$. *Если m = n и хотя бы одна из матриц A или B невырожденна, то матрицы AB и BA подобны.*

Доказательство. Рассмотрим следующие тождества (для блочных матриц из M_{m+n}):

$$\begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} AB & ABA \\ B & BA \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} AB & ABA \\ B & BA \end{bmatrix}.$$

Поскольку блочная матрица

$$\begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix} \in M_{m+n}$$

невырожденна (все ее собственные значения равны +1), получаем

$$\begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{bmatrix}.$$

Таким образом, две $(m + n)\times(m + n)$-матрицы

$$C_1=\begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix},\quad C_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{bmatrix}$$

подобны. Собственные значения матрицы C_1 — это собственные значения матрицы *AB* вместе с *n* нулями. Собственные значения матрицы C_2 — это собственные значения матрицы *BA* вместе с *m* нулями. В силу следствия 15.3.4 C_1 и C_2 имеют одни и те же собственные значения с учетом кратностей — отсюда и вытекает основное утверждение теоремы. Ее заключительное утверждение следует из соотношения $AB = A(BA)A^{-1}$, которое очевидным образом выполняется, если $m = n$ и матрица *A* невырожденна.

15.4. Собственные векторы

До сих пор собственным значениям уделялось больше внимания, чем собственным векторам. Однако собственные векторы также важны не только ввиду их роли, связанной с диагонализуемостью, но и вследствие того, что они оказываются полезными в различных прикладных вопросах. Здесь мы несколько продвинемся в изучении собственных векторов, но начнем с дополнительного замечания по поводу собственных значений.

15.4.1. Утверждение. *Пусть* $A \in M_n$. *Тогда:* (a) *с учетом кратностей* A^T *имеет те же собственные значения, что и А;* (b) *с учетом кратностей А* имеет собственные значения, являющиеся комплексно-сопряженными к собственным значениям для А.*

Доказательство. Поскольку $\det(tI - A^T) = \det(tI - A)^T = \det(tI - A)$, имеем $p_{A^T}(t) = p_A(t)$, т. е. предложение (a) установлено. Аналогично $\det(\bar{t}I - A^*) = \det(tI - A)^* = \overline{\det(tI - A)}$, вследствие чего $p_{A^*}(t) = \overline{p_A(t)}$, что и доказывает предложение (b).

Упражнение. Показать, что если собственные векторы *x*, $y \in \mathbf{C}^n$ матрицы $A \in M_n$ отвечают одному и тому же собственному значению λ, то и любая линейная комбинация векторов *x* и *y* представляет собой собственный вектор, отвечающий тому же собственному значению λ. Вывести отсюда, что множество всех собственных векторов, отвечающих одному $\lambda \in \sigma(A)$, вместе с вектором 0 образует подпространство в $\mathbf{C}^n$.

Упражнение. Показать, что подпространство, описанное в предыдущем упражнении, есть не что иное, как нуль-пространство матрицы $A - \lambda I$.

15.4.2. Определение. Пусть заданы $A \in M_n$ и $\lambda \in \sigma(A)$. Множество всех векторов $x \in \mathbf{C}^n$, удовлетворяющих соотношению $Ax = \lambda x$, называется *собственным подпространством матрицы А,* отвечающим собственному значению λ. Заметим, что всякий ненулевой элемент из собственного подпространства является собственным вектором для *А,* отвечающим λ.

Упражнение. Доказать, что собственное подпространство матрицы *А,* отвечающее некоторому собственному значению λ, является *А*-инвариантным; обратное неверно. Доказать, что любое *минимальное* *А*-инвариантное подпространство (не содержащее никакого нетривиального *А*-инвариантного подпространства строго меньшей размерности) представляет собой линейную оболочку, натянутую на какой-то один из собственных векторов матрицы *A*. *Указание.* Использовать идеи из доказательства леммы 15.3.17, считая, что $\mathcal{F}=\{A\}$.

Пусть найдено какое-то собственное значение матрицы $A \in M_n$. Тогда теоретически (хотя и не всегда практически) простой способ вычисления соответствующего собственного вектора заключается в отыскании решения линейной системы

$$(A-\lambda I)\,x=0.$$

Множество всех ее решений составляет собственное подпространство.

15.4.3. Определение. Размерность собственного подпространства матрицы $A \in M_n$, отвечающего собственному значению λ, называется *геометрической кратностью* собственного значения λ. Кратность числа λ как корня характеристического многочлена $p_A(\cdot)$ (с этой кратностью мы постоянно имели дело до сих пор) называется *алгебраической кратностью* собственного значения λ. Вообще говоря, это два разных понятия. Если термин *кратность* используется без какого-либо уточнения, то обычно имеется в виду алгебраическая кратность. Мы будем придерживаться этой договоренности.

Заметим, что геометрическая кратность есть не что иное, как максимальное число линейно независимых собственных векторов, отвечающих данному собственному значению.

Упражнение. Доказать, что геометрическая кратность собственного значения λ для всех $A \in M_n$ никогда не превышает (и может быть меньше) его алгебраической кратности. Если алгебраическая кратность не меньше 1, то и геометрическая кратность не меньше 1. *Указание.* Обозначим через *k* геометрическую кратность собственного значения λ и возьмем какую-либо невырожденную матрицу $S \in M_n$, в которой первые *k* столбцов составляют линейно независимые собственные векторы матрицы *A,* отвечающие λ. С помощью рассуждений наподобие тех, что были использованы в доказательстве теоремы 15.3.7, показать, что матрица $S^{-1}AS$ имеет вид $\left[\begin{array}{c|c} \lambda I & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right]$, где $I \in M_k$. Вывести отсюда, что алгебраическая кратность λ не меньше *k*.

15.4.4. Определения. Матрица $A \in M_n$, для которой геометрическая кратность каких-то собственных значений строго меньше их алгебраической кратности, называется *дефектной.* Если для каждого собственного значения геометрическая кратность совпадает с алебраической кратностью, то *A* называется *недефектной.* Если всякое собственное значение матрицы $A \in M_n$ имеет геометрическую кратность 1 (независимо от алгебраической кратности), то A называется *простой.* Все эти определения являются классическими, но в настоящее время используются не очень широко. Заметим, что простая недефектная матрица — это матрица с различными собственными значениями. Далее, матрица диагонализуема тогда и только тогда, когда она является недефектной. Это есть не что иное, как еще одна формулировка леммы 15.3.7, подчеркивающая необходимость существования для каждого собственного значения достаточного числа линейно независимых отвечающих ему собственных векторов.

15.4.5. Пример. Несмотря на то что A и A^T имеют одни и те же собственные значения, их собственные векторы, отвечающие данному собственному значению, могут сильно различаться. Например, для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

имеется одномерное собственное подпространство, отвечающее собственному значению 2, и оно натянуто на вектор $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. В то же время соответствующее собственное подпространство матрицы A^T натянуто на вектор $\begin{bmatrix} 1 \\ -3/2 \end{bmatrix}$.

Упражнение. Проверить утверждения примера 15.4.5.

Ясно, что теорию собственных значений и собственных векторов, которую мы развивали до сих пор, можно было бы развивать параллельно для умножения матриц слева на векторы-строки. Собственные значения при этом были бы те же самые, а собственные векторы, вообще говоря, другие (даже если строки рассматривать как столбцы и наоборот).

15.4.6. Определение. Ненулевой вектор $y \in \mathbf{C}^n$ называется *левым собственным вектором* матрицы $A \in M_n$, отвечающим $\lambda \in \sigma(A)$, если

$$y^* A = \lambda y^*.$$

При необходимости вектор x из соотношения (15.1.3) мы будем для ясности называть также *правым собственным вектором.*

Напомним, что два вектора x, $y \in \mathbf{C}^n$ называются *ортогональными,* если $y^*x = 0$. Следующий результат известен как *принцип биортогональности.*

15.4.7.Теорема. *Для матрицы $A \in M_n$ и чисел λ, $\mu \in \sigma(A)$, где $\lambda \neq \mu$, любой левый собственный вектор, отвечающий* μ, *ортогонален любому правому собственному вектору, отвечающему* λ.

Доказательство. Пусть $y \in \mathbf{C}^n$ — левый собственный вектор матрицы *A,* отвечающий μ, и $x \in \mathbf{C}^n$ — ее правый собственный вектор, отвечающий λ. Вычислим y^*Ax двумя способами:

$$y^*Ax = y^*(\lambda x) = \lambda(y^*x),$$
$$y^*Ax = (\mu y^*)x = \mu(y^*x).$$

Поскольку $\lambda \neq \mu$, то получить равенство $\lambda y^*x = \mu y^*x$ возможно, лишь когда $y^*x = 0$. Таким образом, векторы *x* и *у* ортогональны.

Упражнение. Показать, что если $A^* = A \in M_n$, т. е. матрица *A* эрмитова, и все ее собственные значения различны, то *A* имеет *n* попарно ортогональных (правых) собственных векторов. Напомним, что, все собственные значения матрицы *A* вещественны. *Указание.* Вследствие того что $A^* = A$, левые собственные векторы совпадают с правыми собственными векторами. Применить теорему 15.4.7.

В следующей главе мы увидим, что в утверждении из этого упражнения предположение о том, что собственные значения различны, не является необходимым.

Теперь отметим, что есть простой закон преобразования собственных векторов при переходе к подобной матрице. Собственные значения при этом не изменяются.

15.4.8. Теорема. *Пусть матрицы* A, $B \in M_n$ *таковы, что B подобна A и преобразование подобия осуществляется матрицей S. Тогда если* $x \in \mathbf{C}^n$ *— собственный вектор для B, отвечающий* $\lambda \in \sigma(B)$, *то Sx — собственный вектор для A, отвечающий собственному значению λ.*

Доказательство. Вследствие равенств $B = S^{-1}AS$ и $Bx = \lambda x$ имеем $S^{-1}ASx = \lambda x$, или $ASx = \lambda Sx$. Поскольку матрица *S* невырожденна и $x \neq 0$, получаем $Sx \neq 0$ и, следовательно, *Sx* есть собственный вектор матрицы *A*.

Упражнение. Проверить, что $e = [1, 1, 1]^T$ есть собственный вектор матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пусть $D = \mathrm{diag}(1, 2, 3)$. Для матрицы *D~^1^AD* найти собственный вектор, имеющий положительные компоненты.

В заключительной части этого параграфа мы покажем, что собственные векторы можно использовать для получения информации о собственных значениях главных подматриц. Эта информация позволяет дать еще одно доказательство неравенства между геометрической и алгебраической кратностями собственного значения.

15.4.9. Теорема. *Пусть заданы матрица* $A \in M_n$, *ее собственное значение* $\lambda \in \mathbf{C}$ *и произвольное целое положительное* $k \geqslant 1$. *Рассмотрим следующие три высказывания:*

(a) λ — *собственное значение матрицы A геометрической кратности не меньше k;*

(b) λ *является собственным значением любой главной подматрицы* $\hat{A} \in M_m$ *матрицы A, если m>n — k;*

(c) λ— *собственное значение матрицы A алгебраической кратности не меньше k.*

Тогда (a) *влечет за собой* (b) *и* (b) *влечет за собой* (c). *В частности, алгебраическая кратность собственного значения не меньше его геометрической кратности.*

Доказательство. Предположим, что (a) имеет место и рассмотрим в *A* произвольную главную подматрицу $\hat{A} \in M_m$, считая, что *m*> *n* — *k*. Не ограничивая общности, будем считать, что $\hat{A}$ находится в левом верхнем углу матрицы *A* (с помощью перестановок можно перейти к подобной матрице и воспользоваться теоремой 15.4.8). Пусть собственному значению λ отвечают линейно независимые собственные векторы $v_1, \ldots, v_k$. Матрицу *A* и каждый из векторов v_i представим в блочном виде.

Векторы $w_1, \ldots, w_k$ линейно зависимы, так как это *k* векторов

$$A = \begin{bmatrix} \hat{A} & * \\ * & * \end{bmatrix}, \quad \hat{A} \in M_m;$$

$$v_i = \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \end{bmatrix}, \quad u_i = \mathbf{C}^m,\ w_i = \mathbf{C}^{n-m}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k.$$

в пространстве размерности $n - m < n - (n - k) = k$. Значит, существуют скаляры $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbf{C}$, такие, что $\alpha_1 w_1 + \ldots$ $\ldots + \alpha_k w_k = 0$, и при этом не все эти скаляры нулевые. Получаем

$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = \left[\begin{smallmatrix} u \\ 0 \end{smallmatrix}\right] \neq 0$, где $u = \alpha_1 u_1 + \ldots$ $\ldots + \alpha_k u_k \neq 0$ и $Av = \lambda v$. Последнее равенство запишем в блочной форме:

$$Av = \begin{bmatrix} \hat{A} & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}u \\ * \end{bmatrix} = \lambda v = \begin{bmatrix} \lambda u \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Как видим, λ есть собственное значение для $\hat{A}$, что и утверждается в п. (b).

Теперь допустим, что (b) имеет место. Вспомним соотношение (15.2.13), связывающее производную характеристического многочлена $p_A(t)$ с характеристическими многочленами $p_{A_i}(t)$ для *n* главных подматриц $A_1, \ldots, A_n$ матрицы *A*. При *k* = 1 доказывать нечего. Если *k*> 1, то (b) утверждает, что λ является собственным значением для *A*, при всех *i* и потому

$$p_{A_i}(\lambda) = 0$$

для всех *i* и $p'_A(\lambda) = 0.$ Если *k*>2, то, дифференцируя (15.2.13), находим

$$p''_A(t) = \sum_{i=1}^{n} p'_{A_i}(t). \qquad (15.4.10)$$

Используя (15.2.13), заменим каждую производную в правой части на сумму характеристических многочленов главных подматриц матриц A_i. Поскольку любая главная подматрица в A_i, полученная вычеркиванием одной строки и одного столбца, является также главной подматрицей порядка *n* — 2 в *A,* то предложение (b) и соотношение (15.2.13), применяемые ко всем подматрицам A_i, позволяют заключить, что $p''_A(\lambda) = 0.$ Повторное использование тех же доводов показывает, что кратные производные $p_A^{(i)}(\lambda)$ обращаются в нуль для $i = 0, 1, \ldots, k-1.$ Следовательно, для λ алгебраическая кратность не меньше *k*.

Микромодуль 47
Индивидуальные тестовые задания

1. Доказать, что если $A, B \in M_n$ и *A* и *B* коммутируют, то *A* коммутирует с любым многочленом от *B*.
2. Пусть $A, B \in M_n, \sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}, \sigma(B) = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}.$ Доказать, что если *A* и *B* диагонализуемы и коммутируют, то *A*+*B* имеет собственные значения

$$\lambda_1 + \mu_{i_1}, \ \lambda_2 + \mu_{i_2}, \ \ldots, \ \lambda_n + \mu_{i_n},$$

где $i_1, \ldots, i_n$ — некоторая перестановка индексов 1, ..., *n*.
3. Доказать, что если $A \in M_n, A = S^{-1}DS, D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ и $p(\cdot)$ — произвольный многочлен, то $p(A) = S^{-1}p(D)S$ и $p(D) = \mathrm{diag}(p(d_1), \ldots, p(d_n))$. Этим обеспечивается простой способ вычисления значения *p(A)* в случае, когда для *A* проведена диагонализация.

4. Привести пример двух коммутирующих матриц, которые не являются одновременно диагонализуемыми. Противоречит ли это теореме 15.3.12?

5. Доказать, что если матрица $A \in M_n$ имеет различные собственные значения и коммутирует с заданной матрицей $B \in M_n$, то B есть многочлен от A степени не выше n— 1. *Указание.* Показать (с помощью метода, примененного при доказательстве теоремы 15.3.12), что A и B одновременно диагонализуемы. Затем учесть, что для заданных различных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и (произвольных) чисел $\beta_1, \ldots, \beta_n$ существует многочлен $p(\cdot)$ степени не выше n—1, такой, что $p(\alpha_i) = \beta_i$ (интерполяционный многочлен Лагранжа; см. разд. 14.9.11).

6. Для диагонализуемой матрицы $A \in M_n$ рассмотреть характеристический многочлен $p_A(t)$ и показать, что матрица $p_A(A)$ нулевая.

7. Матрица $A \in M_n$ называется *квадратным корнем* из матрицы $B \in M_n$, если $A^2 = B$. Доказать, что любая диагонализуемая матрица имеет квадратный корень.

8. Пусть матрицы A, $B \in M_n$ таковы, что хотя бы одна из них имеет различные собственные значения (и ничего — даже диагонализуемости — не предполагается в отношении другой матрицы). Доказать, что A и B коммутируют тогда и только тогда, когда они одновременно диагонализуемы. *Подсказка.* В одну сторону утверждение доказывается легко; чтобы доказать его в другую сторону, надо попытаться использовать следующие рассуждения в отличие от тех, что применялись в доказательстве теоремы 15.3.12. Предположим, что B имеет различные собственные значения, $\lambda \in \sigma(B)$ и $Bx = \lambda x$ для $x \neq 0$. Тогда $B(Ax) = A(Bx) = A\lambda x = \lambda Ax$, и, значит, Ax есть также собственный вектор матрицы B, отвечающий λ. Поскольку не может быть двух таких линейно независимых векторов (так как λ имеет кратность 1), то Ax есть кратное вектора x, т. е. $Ax = \mu x$. Таким образом, любой собственный вектор для B является также собственным вектором для A, и A диагонализуема посредством той же самой матрицы из собственных векторов, которая диагонализует матрицу B. См. задачи 12 и 13 — в них осуществляется иной подход к тому же факту.

9. Разобраться в деталях следующего (еще одного) доказательства теоремы 15.3.20.

(a) Сначала предположить, что из матриц A, $B \in M_n$ хотя бы одна невырожденная. Показать, что AB подобна BA, и, следовательно, характеристические многочлены для AB и BA совпадают. *Указание.* Если A невырожденна, то $BA = A^{-1}(AB)A$, вследствие чего $\sigma(AB) = \sigma(BA)$.

(b)Рассмотреть вырожденные матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Показать, что AB и BA не подобны, но имеют одни и те же собственные значения.

(c) Доказать, что если A, $B \in M_n$, то AB и BA обладают одинаковыми собственными значениями с учетом кратностей. *Указание.* Рассмотреть следующий аналитический подход. Для всех достаточно малых ε>0 матрица $A_\varepsilon \equiv A + \varepsilon I$ невырожденна; поэтому матрицы $A_\varepsilon B$ и BA_ε подобны и их характеристические многочлены одинаковы. При $\varepsilon \to 0$ в пределе подобие может не сохраниться, но равенство характеристических многочленов остается в силе, так как $p_{A_\varepsilon B}(t) = \det(tI - A_\varepsilon B)$ зависит непрерывно от ε. Таким образом, матрицы AB и BA имеют одинаковые характеристические многочлены и, следовательно, *одинаковые собственные значения* с учетом кратностей.

(d) Наконец, пусть $A \in M_{m,n}$ и $B \in M_{n,m}$. Показать, что AB и BA имеют одни и те же собственные значения с учетом кратностей, за исключением того, что, BA имеет дополнительно $n - m$ собственных значений, равных нулю (в предположении, что $n>m$); другими словами, $p_{BA}(t) = t^{n-m}p_{AB}(t)$. *Указание.* Дополнить A нулевыми строками, а B нулевыми столбцами с тем, чтобы в результате получились матрицы порядка n. К новым матрицам применить последний результат и сравнить два новых произведения (при подходящем блочном разбиении) с двумя старыми произведениями.

10. Используя лемму 15.3.8, доказать следующее обобщение. Пусть задана матрица $A \in M_n$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — ее различные собственные значения. Предположим, что для любого i=1, 2, ..., k множество $\{x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_{n_i}^{(i)}\}$ линейно независимо и состоит из $n_i \geq 1$ собственных векторов матрицы A, отвечающих собственному значению λ_i. Доказать, что объединение множеств

$$\{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}\} \cup \ldots \cup \{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{n_k}^{(k)}\}$$

линейно независимо. *Указание.* Пусть какая-то линейная комбинация равна нулю, скажем

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} c_{ij} x_j^{(i)} = \sum_{i=1}^{k} y^{(i)}.$$

Используя лемму 15.3.8, показать, что $y^{(i)} = 0$ для всех i. Разобраться в деталях следующего (еще одного) доказательства леммы 15.3.17.

(a) Показать, что если A, $B \in M_n$ коммутируют, то у них есть общий собственный вектор. *Указание.* Взять собственный вектор x матрицы A $(x \neq 0$ и $Ax = \lambda x)$ и рассмотреть последовательность $x, Bx, B^2x, B^3x, \ldots$. В ней должен быть первый элемент, линейно зависящий от своих предшественников, — пусть это $B^k x$. Тогда подпространство $S = \operatorname{Span}\{x, Bx, B^2x, \ldots, B^{k-1}x\}$ инвариантно относительно B и, следовательно, для некоторого ненулевого $y \in S$ имеем $By = \mu y$. Однако $AB^j x = B^j Ax = B^j \lambda x = \lambda B^j x$, так что каждый вектор из S является в то же время собственным вектором для A.

(b) С помощью индукции показать, что в конечном коммутативном семействе $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ все матрицы A_i обладают общим собственным вектором. *Указание.* Пусть $y \neq 0$ — общий собственный вектор для $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$. Рассмотреть

Последовательность $y, A_m y, A_m^2 y, A_m^3 y, \ldots$, как и в п. (a).

(c) Установить, что в коммутативном семействе $\mathcal{F} \subset M_n$ бесконечной мощности не может быть больше чем n^2 линейно независимых матриц. Выбрать максимальное линейно независимое множество и использовать п. (b). Доказать, что общий собственный вектор для этого конечного множества является общим собственным вектором для всего семейства $\mathcal{F}$.

12. Пусть $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ имеет n различных диагональных элементов. Использовать идеи из доказательства теоремы 15.3.12, для того чтобы доказать, что равенство $\Lambda B = B\Lambda$ для некоторой матрицы $B \in M_n$ выполняется в том и только в том случае, когда матрица B сама диагональна (но не обязательно с различными диагональными элементами).

13. Предположим, что матрица $A \in M_n$ имеет n различных собственных значений. Доказать, что если $AB = BA$ для некоторой матрицы $B \in M_n$, то B диагонализуема и при этом A и B одновременно диагонализуемы. *Указание.* Показать, что если матрица A диагональна и $A = S\Lambda S^{-1}$, то A коммутирует с $S^{-1}BS$. Использовать задачу 12.

14. Распространить результат задачи 13 на случай произвольного коммутативного семейства $\mathcal{F} \subset M_n$, содержащего хотя бы одну матрицу с различными собственными значениями. Сравнить этот результат с теоремой 15.3.19, в которой предполагается

диагонализуемость каждой матрицы, входящей в семейство $\mathcal{F}$. Будет ли этот результат более сильным?

15. Рассмотреть блочно-диагональную матрицу $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1 I_1, \lambda_2 I_2, \ldots, \lambda_k I_k) \in M_n$,

где $I_i \in M_{n_i}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Показать, что равенство $\Lambda B = B\Lambda$ для некоторой матрицы $B \in M_n$ выполняется в том и тольков том случае, когда *B* имеет блочно-диагональный вид $B = \operatorname{diag}(B_1, B_2, \ldots, B_k)$, где $B_j \in M_{n_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Как этот результат связан с задачей 12?

16. Предположим, что A, $B \in M_n$ и при этом *A* или *B* невырожденна. Показать, что если матрица *AB* диагонализуема, то и матрица *BA* диагонализуема. Рассмотреть матрицы $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и показать, что это, вообще говоря, неверно, если обе матрицы *A* и *B* вырожденны.

17. Доказать, что матрица

$$A \in M_n$$

имеет ранг 1 в том и только в том случае, когда

$$A = xy^*$$

для каких-то ненулевых векторов x, $y \in \mathbf{C}^n$. Показать, что:

(a) такая матрица *A* обладает, самое большее, одним ненулевым собственным значением (алгебраической кратности 1);

(b) это собственное значение есть y^*x; (c) x и y — соответственно правый и левый собственные векторы, отвечающие этому собственному значению. Какова геометрическая кратность собственного значения 0?

18. Доказать, что любую матрицу $A \in M_n$ ранга *k* можно записать в виде

$$A = x^{(1)}y^{(1)*} + \ldots + x^{(k)}y^{(k)*},$$

где $x^{(i)}$, $y^{(i)} \in \mathbf{C}^n$ $(i = 1, \ldots, k)$, т. е. *A* выражается суммой *k* матриц ранга 1. *Указание.* Найти *k* линейно независимых строк и столбцов и использовать тот факт, что через них можно выразить все остальные строки и столбцы.

19. Предположим, что $T \in M_n$ — верхняя треугольная матрица с различными собственными значениями $t_{11}, \ldots, t_{nn}$, которые расположены на диагонали от левого верхнего угла к правому нижнему. Показать, что числу t_{ii} отвечает правый собственный вектор матрицы *T*, в котором последние $n - i$ компонент нулевые, и

левый собственный вектор матрицы T, в котором первые i— 1 компонент нулевые. Что будет, если не все t_{ii} различны?

20. Показать, что для матрицы (15.2.7b) (единственное) собственное значение 1 имеет геометрическую кратность 1. Описать соответствующее собственное подпространство.

21. Рассмотреть блочно-треугол.ьную матрицу

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_{ii} \in M_{n_i}, \quad i = 1,\ 2.$$

Доказать, что ее собственными значениями являются собственные значения матрицы A_{11} вместе с собственными значениями матрицы A_{22} с учетом кратностей. Пусть $x \in \mathbf{C}^{n_1}$ — правый собственный вектор для A_{22}, отвечающий $\lambda \in \sigma(A_{11})$, и $y \in \mathbf{C}^{n_2}$ — левый собственный вектор для A_{22}, отвечающий $\mu \in \sigma(A_{22})$. Доказать, что векторы $\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{n_1+n_2}$— правый и левый собственные векторы для A, отвечающие соответственно λ и μ. Что можно сказать о левом и правом собственных векторах матрицы A, отвечающих соответственно λ и μ? Нельзя ли обобщить эти утверждения на случай блочно-треугольных матриц с произвольным числом блоков на диагонали?

22. Предположим, что для какого-то собственного значения матрицы $A \in M_n$ геометрическая кратность равна 1 и ему отвечают левый и правый собственные векторы с положительными компонентами. Доказать, что A не имеет никаких других собственных векторов с неотрицательными компонентами, кроме кратных данным.

23. В этой задаче мы набросаем схему *степенного метода* нахождения наибольшего собственного значения и соответствующего собственного вектора для $A \in M_n$. Сделаем некоторые упрощающие предположения и только упомянем аналитические детали, которые можно было бы описать вполне точно. Предположим, что $A \in M_n$ имеет различные собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и в точности одно из них — именно λ_n — обладает наибольшим модулем, равным $\rho(A)$. Пусть вектор $x^{(0)} \in \mathbf{C}^n$ *не* ортогонален левому собственному вектору, отвечающему λ_n. Показать, что в этом случае последовательность

$$x^{(k+1)} = \frac{1}{(x^{(k)*}x^{(k)})^{1/2}} Ax^{(k)}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

сходится к собственному вектору матрицы A, а отношения одноименных ненулевых компонент последовательных векторов $Ax^{(k)}$ и $x^{(k)}$ сходятся к λ_n. *Указание.* Не ограничивая общности, можно считать, что $\lambda_n = 1$. Пусть $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$ — линейно независимые собственные векторы, отвечающие $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Вектор $x^{(0)}$ допускает единственное разложение

$$x^{(0)} = \alpha_1 y^{(1)} + \ldots + \alpha_n y^{(n)},$$

где $\alpha_n \neq 0$. Заметим, что с точностью до скалярного множителя вектор $x^{(k)}$ имеет вид $\alpha_1 \lambda_1^k y^{(1)} + \ldots + \alpha_n \lambda_n^k y^{(n)}$. Поскольку $|\lambda_i| < 1$, имеем $|\lambda_i|^k \to 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, и эта сумма сходится к вектору, пропорциональному вектору $y^{(n)}$.

24. При помощи степенного метода можно вычислить не только максимальное, но и остальные собственные значения (и собственные векторы). Для этого используется редукция задачи, называемая *понижением порядка* или *исчерпыванием;* она приводит к некоторой квадратной матрице, которая имеет порядок на 1 меньше и собственные значения которой совпадают с остальными собственными значениями матрицы $A \in M_n$.

Пусть λ_n и $y^{(n)}$ — собственное значение и собственный вектор для A (вычисленные посредством степенного метода или как-то иначе), и пусть матрица $S \in M_n$ невырожденна и ее первый столбец есть $y^{(n)}$. Доказать, что

$$S^{-1}AS = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_n & * \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right]$$

и $A_1 \in M_{n-1}$ имеет собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ в обозначениях задачи 23. Другие собственные значения можно вычислить, работая с A_1 и проводя повторное понижение порядка и т. д.

25. Пусть $A \in M_n$ имеет собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, 0,$ так что $\operatorname{rank} A \leqslant n-1$. Предположим, что последняя строка в A является линейной комбинацией остальных строк.

(a) В случае когда A имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & a_{12} \\ a_{21}^T & a_{22} \end{bmatrix},$$

где $A_{11} \in M_{n-1}$, показать, что для некоторого вектора $b \in \mathbf{C}^{n-1}$ выполняются равенства

$$a_{21}^T = b^T A_{11}, \quad a_{22} = b^T a_{12}.$$

Найти связь вектора b с левым собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению 0.

(b) Доказать также, что собственными значениями матрицы $A_{11} + a_{12}b^T \in M_{n-1}$ являются $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$. *Указание.* Рассмотреть для A преобразование подобия, осуществляемое матрицей

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ b^T & 1 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что это еще один способ понижения порядка, так как здесь также строится матрица меньшего порядка, обладающая остающимися собственными значениями. Если найдено какое-то собственное значение λ матрицы *A,* то процесс, описываемый в этой задаче, можно применить к матрице $P(A - \lambda I) P^{-1}$, где *P* — подходящая матрица перестановки.

26. Пусть матрица $T \in M_n$ невырожденна и ее столбцы являются левыми собственными векторами матрицы $A \in M_n$. Доказать, что столбцы матрицы $(T^*)^{-1}$ — это правые собственные векторы для *A*.

Модуль 16
Унитарная эквивалентность и нормальные матрицы

Здесь изучается специальный тип преобразований подобия, тесно связанный с многими вопросами из области приложений матричного анализа.

Микродуль 48
Унитарная эквивалентность

В модуле 15 мы провели первоначальное изучение подобия, осуществляемого произвольной невырожденной матрицей $S \in M_n$. Теперь среди невырожденных матриц *S* мы выделим весьма специфические — так называемые унитарные матрицы, для которых обратная матрица выражается очень просто: $S^{-1} = S^*$. Подобие $A \to S^*AS \quad (A \in M_n)$, осуществляемое унитарной матрицей, отличается не только тем, что его легче изучать по сравнению с общим преобразованием подобия (*S** намного проще определяется, чем S^{-1}). Оно обладает, помимо этого, многими привлекательными особенностями, которые прояснятся в ходе изучения. Как правило, унитарное подобие предпочтительнее обычного подобия, и потому полезно знать, что же именно можно получить при помощи унитарного подобия. Классы эквивалентности, связанные с унитарным подобием, однако, уже, чем для обычного подобия (две матрицы могут быть подобными и не быть унитарно подобными) — в этом смысле обычное подобие имеет более богатые возможности. По этой причине мы еще вернемся к дальнейшему его изучению.

Преобразование $A \to S^*AS$ $(A \in M_n)$, где предполагается, что S невырожденна, но не обязательно унитарна, называется преобразованием *эрмитовой конгруэнтности* и будет изучаться позже. Это преобразование также задает на M_n некоторое отношение эквивалентности и обладает многими привлекательными свойствами (иными, чем подобие). Важно отметить, что преобразование подобия, осуществляемое унитарной матрицей, является *одновременно* преобразованием подобия и преобразованием эрмитовой конгруэнтности, и любое преобразование, сочетающее в себе эти свойства, будет не чем иным, как унитарным подобием.

16.1. Унитарные матрицы

16.1.1. Определение. Напомним, что векторы $x_1, \ldots, x_k \in \mathbf{C}^n$ образуют *ортогональное множество,* если $x_i^*x_j = 0$ для всех *i, j,* где $1 \leqslant i < j \leqslant k$. Если к тому же сами векторы нормированы, т. е. $x_i^*x_i = 1$ $(i = 1, \ldots, k)$, то такое множество называется *ортонормированным.*

Упражнение. Доказать, что для любого ортогонального множества $\{y_1, \ldots, y_k\}$ ненулевых векторов множество $\{x_1, \ldots, x_k\}$, где $x_i = (y_i^*y_i)^{-1/2} y_i$ $(i = 1, \ldots, k)$, будет ортонормированным.

16.1.2. Теорема. *Любое ортонормированное множество линейно независимо.*

Доказательство. Возьмем ортонормированное множество $\{x_1, \ldots, x_k\}$ и запишем $0 = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k$. Вследствие ортогональности векторов x_i получаем

$$0 = 0^*0 = \sum_{i,j} \bar{\alpha}_i \alpha_j x_i^* x_j = \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 x_i^* x_i$$

и, поскольку векторы x_i нормированы, находим, что

$$\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 x_i^* x_i = \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 = 0.$$

Таким образом, $\alpha_i = 0$ для всех i и, следовательно, множество $\{x_1, \ldots, x_k\}$ линейно независимо.

Упражнение. Доказать, что любое ортогональное множество ненулевых векторов линейно независимо.

Упражнение. Доказать, что для любой ортогональной системы $x_1, \ldots, x_k \in \mathbf{C}^n$ либо $k \leq n$, либо по меньшей мере $k — n$ векторов x_i равны нулю.

Произвольное линейно независимое множество не обязано быть ортонормированным. Однако, применяя процесс Грама — Шмидта (см. разд. 14.6.4), можно построить ортонормированное множество, имеющее ту же линейную оболочку, что и исходное множество.

Упражнение. Показать, что любое k-мерное вещественное или комплексное векторное пространство имеет ортонормированный базис (т. е. базис, являющийся ортонормированным множеством).

16.1.3. Определение. Матрица $U \in M_n$ называется *унитарной,* если $U^*U = I$. Если к тому же то $U \in M_n(\mathbf{R})$, U называется *вещественной ортогональной.*

Унитарные матрицы образуют в M_n важное множество. В теореме 16.1.4 мы перечислим некоторые условия, эквивалентные унитарности матрицы U.

Упражнение. Пусть матрица $A \in M_n$ невырожденна и матрица $B \in M_n$ такова, что $BA = I$. Доказать, что:

(a) B определяется однозначно;

(b) имеет место равенство $AB = I$. Конечно, при этом мы пишем $B = A^{-1}$.

Указание. Вследствие невырожденности матрицы A каждое из уравнений $Ax = y$ и $x^TA = y^T$ имеет единственное решение для любого вектора $y \in \mathbf{C}^n$. Рассматривая соответственно столбцы и строки, установить, что уравнения $AB_R = I$ и $B_LA = I$ имеют единственные решения $B_L, B_R \in M_n$. Затем вычислить B_LAB_R двумя способами и отсюда вывести, что $B_L = B_R$.

16.1.4. Теорема. *Пусть $U \in M_n$. Следующие предложения эквивалентны:*

(a) *U унитарна;*

(b) *U невырожденна и $U^* = U^{-1}$;*

(c) $UU^* = I$;

(d) *U^* унитарна;*

(e) *столбцы в U образуют ортоноржированное множество;*

(f) *строки в U образуют ортонормированное множество;*

(g) *для любого вектора $x \in \mathbf{C}^n$ евклидова длина вектора $y = Ux$ равна евклидовой длине вектора x, т. е. $y^*y = x^*x$.*

Доказательство. Предложение (a) влечет за собой (b), так как матрица U^{-1} (при условии, что она существует) — это единственная матрица, при умножении на которую слева получается I; определение унитарности гарантирует, что fU^*—именно такая матрица. Поскольку $BA = I$ тогда и только тогда, когда $AB = I$ $(A, B \in M_n)$, из предложения (b) следует (c). Поскольку $(U^*)^* = U$, в п. (c) записано не что иное, как определение унитарности матрицы U^*. Поэтому (c) влечет за собой (d). Для каждой из этих импликаций обращение проводится аналогично. Итак, предложения (a) — (d) эквивалентны.

Механика матричного умножения такова, что если $u^{(i)}$ обозначает i-й столбец в U $(i = 1, \ldots, n)$, то равенство $U^*U = I$ означает, что

$$u^{(i)*}u^{(j)} = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq i, \\ 1, & \text{если } j = i. \end{cases}$$

Таким образом, равенство $U^*U = I$ есть еще одно выражение факта ортонормированности столбцов матрицы U. Поэтому (a) эквивалентно (e). Аналогично (d) эквивалентно (f). Пусть имеет место (a) и $y = Ux$. Тогда $y^*y = x^*U^*Ux = x^*Ix = x^*x$, так что (a) влечет за собой (g). Чтобы установить обратное, потребуются несколько более сложные вычисления. Впоследствии в книге появится техника, которая поможет несколько проще установить этот факт. Сначала рассмотрим случай n=2. Предположим, что имеет место (g), и возьмем $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Имеем $1 = x^*x = y^*y = x^*U^*Ux$ и это есть не что иное, как элемент матрицы U^*U в позиции (1,1). Аналогично, полагая $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, находим, что в позиции (2,2) матрица U^*U также содержит 1. Значит, матрица U^*U должна иметь вид

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ \bar{a} & 1 \end{bmatrix},$$

где a — скалярное произведение 1-го и 2-го столбцов и $\bar{a}$ — скалярное произведение 2-го и 1-го столбцов матрицы U. Полагая $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, в силу (g) имеем $2 = x^*x = y^*y = x^*U^*Ux = 2 + (a + \bar{a})$.
Полагая $x = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$, получаем $2 = 2 + i(a - \bar{a})$. Таким образом,
$a + \bar{a} = 2\,\mathrm{Re}\,a = 0$ и $a - \bar{a} = 2i\,\mathrm{Im}\,a = 0$. Следовательно, a=0.
Это означает, что если для всех $x \in \mathbf{C}^2$ выполняется равенство $x^*U^*Ux = x^*x$, то $U^*U = I$, т. е. матрица U унитарна (если $U \in M_2$). Теперь рассмотрим $n > 2$ и положим $A = U^*U$. Возьмем вектор $x \in \mathbf{C}^n$, у которого все компоненты нулевые, кроме i-й и j-й $(i \leqslant j)$. Тогда

$$x^*Ax = [\bar{x}_i,\ \bar{x}_j]\, A(\{i,\ j\}) \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix}$$

(обозначения см. в разд. 14.7.1), и уже доказано, что (g) влечет за собой $A(\{i, j\}) = I \in M_2$. Поскольку i и j произвольные, заключаем, что в A любая главная подматрица порядка 2 совпадает с единичной матрицей порядка 2. Единственная матрица $A \in M_n$ с этим свойством — единичная матрица порядка n. Случай n = 1 очевиден. Таким образом, из (g) следует (а), что и завершает доказательство.

16.1.5. Определение. Предложение (g) теоремы 16.1.4 показывает, что унитарные матрицы являются *изометричными* — так называют линейные преобразования, сохраняющие евклидову длину. Далее будут обсуждаться другие способы определения «длины» и отвечающие им другие типы изометричных преобразований.

Упражнение. Рассмотрим матрицу

$$T(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

где θ — вещественный параметр.

(а) Доказать, что матрица $U \in M_2(\mathbf{R})$ будет вещественной ортогональной тогда и только тогда, когда $U = T(\theta)$ или

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} T(\theta)$$

для некоторого $\theta \in \mathbf{R}$.

(b) Доказать, что матрица $U \in M_2(\mathbf{R})$ будет вещественной ортогональной тогда и только тогда, когда $U = T(\theta)$ или

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} T(\theta)$$

для некоторого $\theta \in \mathbf{R}$. Таким образом, для вещественных ортогональных 2×2-матриц получаем два разных представления, использующих параметр 0. Найти для них геометрическую интерпретацию

16.1.6. Утверждение. *Для любых унитарных (вещественных ортогональных) матриц U, $V \in M_n$ произведение UV является также унитарной (вещественной ортогональной) матрицей.*

Упражнение. Доказать утверждение 16.1.6, используя предложение (b) теоремы 16.1.4.

Упражнение. Доказать, что если множество $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \mathbf{C}^n$ ортонормированное и матрица $U \in M_n$ унитарна, то множество $\{Ux_1, \ldots, Ux_k\}$ тоже ортонормированное.

16.1.7. Утверждение. *Множество унитарных (вещественных ортогональных) матриц в* M_n *образуют группу. Обычно эту группу называют* унитарной (ортогональной) группой размерности *n. Она является подгруппой в* $GL(n, \mathbf{C})$ (см. 14.5).

Упражнение. Напомним, что *группа* — это множество, замкнутое относительно какой-то одной *ассоциативной* бинарной операции (умножения) и такое, что в нем содержится *нейтральный* элемент и *обратные* ко всем элементам этого множества относительно рассматриваемой операции. Доказать утверждение 16.1.7. *Указание.* Замкнутость следует из утверждения 16.1.6; умножение матриц ассоциативно; матрица $I \in M_n$ унитарна; матрица $U^* = U^{-1}$ также унитарна.

Множество (группа) унитарных матриц из M_n имеет еще одно очень важное свойство. Мы будем использовать понятия «сходимости» и «предела» для последовательности матриц, соотнося их со сходимостью и пределом для числовых последовательностей, отвечающих каждой позиции (i, j). Более точно эти понятия будут определены дальше. Из определения унитарности $U^*U = I$ вытекает, что в U каждый столбец имеет евклидову длину 1 и потому любой элемент $u_{i,j}$ матрицы $U = [u_{i,j}]$ по модулю не превосходит 1. Рассматривая множество унитарных матриц как подмножество в $\mathbf{C}^{n^2}$, приходим к выводу об *ограниченности* этого подмножества. Пусть имеется последовательность унитарных матриц $U_k \equiv [u_{ij}^{(k)}]$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и для нее существуют пределы $\lim\limits_{k\to\infty} u_{ij}^{(k)} = u_{ij}^{(0)}$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда так как равенство $U_k^*U_k = I$ выполняется для всех $k = 1, 2, \ldots,$ то

$$\lim_{k\to\infty} U_k^*U_k = U_0^*U_0 = I,$$

где $U_0 = [u_{ij}^{(0)}]$. Таким образом, предельная матрица U_0 также унитарна. Это говорит о том, что множество унитарных матриц является в $\mathbf{C}^{n^2}$ замкнутым подмножеством.

Замкнутое и ограниченное подмножество в конечномерном евклидовом пространстве является *компактным* (см. приложение Е). Вследствие этого множество (группа) унитарных-матриц в M_n компактно. Для наших целей наиболее важное следствие этого факта — следующий *принцип выбора* для унитарных матриц.

16.1.8. Лемма. *Пусть в* M_n *задана произвольная последовательность унитарных матриц* $U_1, U_2, \ldots$ *. Тогда в ней можно выбрать подпоследовательность* $U_{k_1}, U_{k_2}, \ldots,$ *такую, что все элементы* *матриц U_{k_i} сходятся (как последовательности комплексных чисел) при $i \to \infty$ к элементам некоторой унитарной матрицы U_0.*

Доказательство. Все, что здесь требуется, вытекает из того факта, что из произвольной бесконечной последовательности в каком-либо компактном множестве всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Как уже отмечалось, если последовательность унитарных матриц сходится к какой-то матрице, то эта предельная матрица должна быть унитарной.

В лемме ничего не говорится по поводу единственности получаемой в пределе унитарной матрицы; в действительности она зависит от выбранной подпоследовательности.

Упражнение. Рассмотреть последовательность унитарных матриц

$$U_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

и показать, что здесь имеются два возможных предела подпоследовательностей.

Упражнение. Принцип выбора 16.1.8 остается в силе и для ортогональной группы, т. е. всякая последовательность вещественных ортогональных матриц имеет подпоследовательность, сходящуюся к вещественной ортогональной матрице. Доказать это с помощью той же логической схемы, но для вещественного случая.

Компактность унитарной группы понадобится при решении задачи 3 в следующем параграфе. В дальнейшем встретятся и другие возможности ее использования.

Если U унитарна, то U^{-1} *совпадает* с U^*. Рассмотрим такие матрицы U, для которых U^{-1} *подобна* U^* — это одно из обобщений понятия унитарной матрицы. Все множество таких матриц можно легко охарактеризовать как область значений отображения $A \to A^{-1}A^*$ для всех невырожденных матриц $A \in M_n$.

16.1.9. Теорема. *Пусть матрица $A \in M_n$ невырожденна. Тогда A^{-1} подобна A^* в том и только в том случае, когда $A = B^{-1}B^*$ для некоторой невырожденной матрицы $B \in M_n$.*

Доказательство. Пусть матрица $B \in M_n$ невырожденна и $A = B^{-1}B^*$. Тогда $A^{-1} = (B^*)^{-1}B$ и $B^*A^{-1}(B^*)^{-1} = B(B^*)^{-1} = (B^{-1}B^*)^* = A^*$, так что A^{-1} подобна A^* и это подобие осуществляется трансформирующей матрицей B^*. Обратно, если A^{-1} подобна A^*, то $SA^{-1}S^{-1} = A^*$ для какой-то невырожденной матрицы $S \in M_n$. Положим $S_\theta = e^{i\theta}S$, где $\theta \in \mathbf{R}$, и заметим, что $S_\theta A^{-1}S_\theta^{-1} = e^{i\theta}SA^{-1}(e^{-i\theta}S^{-1}) = SA^{-1}S^{-1} = A^*$. Но тогда

$S_\theta = A^* S_\theta A$ и $S^*_\theta = A^* S^*_\theta A.$ После сложения этих двух равенств получим $H_\theta = A^* H_\theta A,$ где матрица $H_\theta \equiv S_\theta + S^*_\theta$ эрмитова. Если матрица θ_0 вырожденна, то $0 = H_\theta x = S_\theta x + S^*_\theta x$ для некоторого ненулевого вектора $x \in \mathbf{C}^n,$ так что $-x = S_\theta^{-1} S^*_\theta x =$ $= e^{-2i\theta} S^{-1} S^* x$ и $S^{-1} S^* x = -e^{2i\theta} x.$ Если выбрать $\theta = \theta_0 \in [0, 2\pi]$ таким, чтобы число $-e^{2i\theta_0}$ не являлось собственным значением для $S^{-1}S^*$, то соответствующая эрмитова матрица $H \equiv H_{\theta_0}$ будет невырожденной и при этом $H = A^* H A.$

Теперь возьмем любое комплексное число α, считая, что $|\alpha| = 1$ и α не является собственным значением для A^*. Положим $B \equiv \beta(\alpha I - A^*) H,$ где комплексное число $\beta \neq 0$ — это параметр, который еще нужно определить. Заметим, что матрица B невырожденна. Мы хотим получить равенство $A = B^{-1} B^*,$ или $BA = B^*.$ Вычислим $B^* = H(\bar{\beta}\bar{\alpha} I - \bar{\beta} A)$ и $BA = \beta(\alpha I - A^*) HA =$ $= \beta(\alpha HA - A^* HA) = \beta(\alpha HA - H) = H(\alpha\beta A - \beta I).$ Все будет доказано, если мы сможем выбрать такое ненулевое β, для которого $\beta = -\bar{\beta}\bar{\alpha}.$ Если $\alpha = e^{i\psi},$ то $\beta = e^{i(\pi - \psi)/2}.$

16.2. Унитарная эквивалентность

Для унитарной матрицы U преобразование $A \to U^* A U,$ определенное на M_n, является подобием, так как в силу унитарности $U^* = U^{-1}.$ Этот специальный тип подобия называется *унитарным подобием* или *унитарной эквивалентностью.*

16.2.1. Определение. Матрица $B \in M_n$ называется *унитарно эквивалентной* матрице $A \in M_n,$ если найдется унитарная матрица $U \in M_n,$ такая, что $B = U^* A U.$ Если U можно выбрать вещественной (а значит, вещественной ортогональной), то B называется *(вещественно) ортогонально эквивалентной* матрице A.

Упражнение. Доказать, что унитарная эквивалентность является отношением эквивалентности.

16.2.2.Теорема. *Для унитарно эквивалентных матриц* $A = [a_{ij}]$ *и* $B = [b_{ij}]$ *из* M_n *имеет место равенство*

$$\sum_{i, j=1}^{n} |b_{ij}|^2 = \sum_{i, j=1}^{n} |a_{ij}|^2.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\sum_{i, j} |a_{ij}|^2 = \operatorname{tr} A^* A$$

(в силу определения матричного умножения). Таким образом, достаточно убедиться в том, что $\operatorname{tr} B^*B = \operatorname{tr} A^*A.$ Поскольку $B = U^*AU,$ то $\operatorname{tr} B^*B = \operatorname{tr} U^*A^*UU^*AU = \operatorname{tr} U^*A^*AU = \operatorname{tr} A^*A$ (нужно учесть, что след является инвариантом преобразования подобия).

Упражнение. Теорема 16.2.2 показывает, что $\operatorname{tr} A^*A$ — это инвариант унитарного подобия. Придумать другое доказательство теоремы 16.2.2, в котором не рассматривается матрица *A*A,* а вместо этого используется неизменность евклидовой длины при умножении вектора на унитарную матрицу (этот факт установлен в 16.1). Заметим, что если матрица умножается на какую-то матрицу слева, то в результате происходит умножение ее столбцов, а если она умножается справа, то происходит умножение ее строк.

Упражнение. Показать, что матрицы

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

подобны, но не унитарно эквивалентны.

Подобие следует из унитарной эквивалентности, но не наоборот. Поэтому по отношению унитарной эквивалентности M_n разбивается на *более мелкие* классы, чем по отношению подобия. Унитарное подобие, как и обычное подобие, соответствует изменению базиса, но это изменение специального типа — от одного *ортонормированного* базиса к другому. При ортонормированном изменении базиса не изменяется сумма квадратов модулей элементов матрицы, но она может изменяться при неортонормированном изменении базиса. С вычислительной точки зрения унитарная эквивалентность более проста для реализации по сравнению с подобием, так как транспонирование и комплексное сопряжение выполняются намного проще, чем обращение матрицы. При наличии ошибок округления при этом обеспечивается лучшая точность. Поэтому унитарная эквивалентность имеет преимущества и с точки зрения численной реализации. Строгое объяснение здесь не приводится, однако интуитивно понятно, что оно опирается на факт сохранения длины при умножении на унитарную матрицу.

Рассмотрим два специальных типа унитарных матриц, которые осуществляют преобразования унитарной эквивалентности, весьма важные для вычисления собственных значений.

16.2.3. Пример: плоские вращения. Пусть $U(\theta; i, j)$ имеет вид

$$
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & & & \vdots & & & \vdots & & \\
& \ddots & & \vdots & & 0 & \vdots & & \\
& & 1 & \vdots & & & \vdots & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cos\theta & 0 & \cdots & 0 & \sin\theta & \cdots \\
& & & 0 & 1 & & \vdots & & \\
& 0 & & \vdots & & \ddots & \vdots & 0 & \\
& & & 0 & 0 & 1 & \vdots & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & -\sin\theta & 0 & \cdots & 0 & \cos\theta & \cdots \\
& & & \vdots & & & \vdots & 1 & \\
& & & \vdots & & 0 & \vdots & & \ddots \\
& & & \vdots & & & \vdots & & & 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \cdots i\text{-я строка} \\ \\ \\ \\ \cdots j\text{-я строка} \\ \\ \\ \\
\end{array}
\\
i\text{-й столбец} \quad j\text{-й столбец}
\end{array}
$$

Эта матрица отличается от единичной лишь элементами в позициях (i, i) и (j, j), которые заменяются на cos θ, и в позициях (i, j) и (j, i), которые заменяются соответственно на $\sin\theta$ и - $\sin\theta$.

Упражнение. Проверить, что $U(\theta; i, j)$ является ортогональной матрицей из $M_n(\mathbf{R})$ для любой пары индексов $1 \leqslant i < j \leqslant n$ и любой величины угла $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Матрица $U(\theta; i, j)$ просто осуществляет вращение (на угол θ) в плоскости координат *i, j*. Заметим, что если матрица умножается слева на $U(\theta; i, j)$, то в ней изменяются только *i*-я и *j*-я строки, а если она умножается справа, то изменяются только *i*-й и *j*-й столбцы. Таким образом, при переходе к унитарно эквивалентной матрице, осуществляемом с помощью $U(\theta; i, j)$, происходит изменение только строк и столбцов с номерами *i* и *j*. Унитарная эквивалентность, осуществляемая посредством плоских вращений, — это основной элемент схем Якоби и Гивенса (см. задачи 1 и 2), предназначенных для вычисления собственных значений.

16.2.4. Пример: преобразования Хаусхолдера. Возьмем произвольный ненулевой вектор $w \in \mathbf{C}^n$ и образуем матрицу $U_w = I - tww^*$ $(U_w \in M_n)$, где $t = 2(w^*w)^{-1}$. Заметим, что $ww^* \in M_n$ и вместе с тем w^*w — это положительный скаляр. Если вектор ш был нормирован $(w^*w = 1)$, то / должно быть равно *w*, а матрица U_w должна иметь вид $U_w = I - 2ww^*$. Часто образуют матрицу U_w, выбирая заранее именно нормированный вектор w.

Упражнение. Показать, что U_w оставляет на месте элементы дополнительного подпространства $w^\perp$, а на одномерном подпространстве, натянутом на w, U_w действует как отражение, т. е. $U_w x = x$, если $x \perp w$, и $U_w w = -w$.

Упражнение. Показать, что матрица U_w одновременно унитарна и эрмитова $(U_w^* = U_w)$. Любая матрица U_w называется *преобразованием Хаусхолдера.* Иногда то же название используют и для преобразования унитарной эквивалентности, осуществляемого при помощи U_w. Эти преобразования возникают в различных ситуациях, в том числе при вычислении собственных значений по схеме Хаусхолдера (см. задачи 4 и 5) и при проведении других унитарных преобразований. Заметим, что преобразования Хаусхолдера, примененные к матрице или вектору, как правило, изменяют все их компоненты. Однако для ряда задач они обеспечивают исключительно эффективную и точную редукцию.

Теорема 16.2.2 предлагает необходимое, но не достаточное условие унитарной эквивалентности двух заданных матриц. Однако к нему можно присоединить дополнительные соотношения, которые в совокупности составят необходимые и достаточные условия. Ключевую роль здесь играет следующее простое понятие. Пусть *s*, *t* обозначают две некоммутирующие переменные. Рассмотрим произвольное конечное формальное произведение неотрицательных степеней переменных *s*, *t*

$$W(s,\ t) = s^{m_1}t^{n_1}s^{m_2}t^{n_2}\ \ldots\ s^{m_k}t^{n_k},\ m_1,\ n_1,\ \ldots,\ m_k,\ n_k \geqslant 0 \quad (16.2.5)$$

и будем называть его *словом* от *s* и *t*. *Степень* слова $W(s,\ t)$ — это неотрицательное целое число $m_1 + n_1 + m_2 + n_2 + \ldots$ $\ldots + m_k + n_k$, т. е. сумма всех его показателей. Для $A \in M_n$ мы можем формально составить *слово от А и А*:*

$$W(A,\ A^*) = A^{m_1}(A^*)^{n_1}A^{m_2}(A^*)^{n_2}\ \ldots\ A^{m_k}(A^*)^{n_k}.$$

Выражение для $W(A, A^*)$, вообще говоря, не упрощается, так как степени *А* и *А** могут не коммутировать и поэтому переставлять сомножители в этом произведении нельзя.

Пусть матрица *А* унитарно эквивалентна некоторой матрице $B \in M_n$. Тогда $A = UBU^*$ для какой-то унитарной $U \in M_n$ и в результате несложного вычисления находим

$$\begin{aligned} W(A,\ A^*) &= (UBU^*)^{m_1}(UB^*U^*)^{n_1}\ \ldots\ (UBU^*)^{m_k}(UB^*U^*)^{n_k} = \\ &= UB^{m_1}U^*U(B^*)^{n_1}U^*\ \ldots\ UB^{m_k}U^*U(B^*)^{n_k}U^* = \\ &= UB^{m_1}(B^*)^{n_1}\ \ldots\ B^{m_k}(B^*)^{n_k}U^* = UW(B,\ B^*)U^*. \end{aligned}$$

Таким образом, $\operatorname{tr} W(A, A^*) = \operatorname{tr} UW(B, B^*)U^* = \operatorname{tr} W(B, B^*)$. Для слова $W(s,\ t) = ts$ получаем соотношение из теоремы 16.2.2.

Если рассматриваются все возможные слова $W(s,\ t)$, то можно теперь предложить бесконечно много условий, необходимых для унитарной эквивалентности двух матриц. Теорема Шпехта, которая приводится ниже без доказательства, гарантирует также и достаточность этого бесконечного множества необходимых условий.

16.2.6. Теорема. *Две заданные матрицы унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{tr} W(A, A^*) = \operatorname{tr} W(B, B^*) \qquad (16.2.7)$$

для всех слов $W(s, t)$ *от двух некоммутирующих переменных.*

Теорему Шпехта можно использовать, чтобы показать, что какие-то две матрицы не являются унитарно эквивалентными, но, за исключением редких случаев (см. задачу 6), установить с ее помощью унитарную эквивалентность практически невозможно, так как требуется проверка бесконечного множества условий. К счастью, имеется теорема Пирси, которая улучшает теорему Шпехта и позволяет ограничиться проверкой соотношений (16.2.7) лишь для конечного набора слов.

16.2.8. Теорема. *Две заданные матрицы* $A,\ B \in M_n$ *унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда* $\operatorname{tr} W(A, A^*) = \operatorname{tr} W(B, B^*)$ *для всех слов* $W(s, t)$ *степени не выше* $2n^2$.

Конечная оценка для числа слов в теореме Пирси — это существенное улучшение теоремы Шпехта, но и она очень сильно завышена. В действительности при $n=2$ достаточно проверить соотношения (16.2.7) только для трех слов $W(s, t) = s,\ s^2,\ ts$ — совсем не обязательно рассматривать все слова степени не выше $2(2^2) = 8$. При $n = 3$ можно ограничиться проверкой соотношений (16.2.7) только для девяти слов $W(s, t) = s,\ s^2,\ ts,\ s^3,\ ts^2,\ t^2s^2,\ tsts,\ ts^2ts,\ ts^2t^2s$ и снова не нужно перебирать все слова степени не выше $2(3^2)=18$.

16.3. Теорема Шура об унитарной триангуляризации

Произвольная матрица $A \in M_n$ унитарно эквивалентна какой-то верхней треугольной матрице T (а также и какой-то нижней треугольной матрице) — и это, возможно, самый полезный и фундаментальный факт во всей элементарной теории матриц. Конечно, главная диагональ в T содержит собственные значения матрицы A. Несмотря на неединственность матрицы T, она является наиболее просто устроенной матрицей, к которой всегда можно перейти посредством унитарной эквивалентности.

16.3.1. Теорема (Шура об унитарной триангуляризации). *Пусть задана матрица* $A \in M_n$ *и зафиксирован какой-то порядок ее* *собственных значений* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. *Тогда существует унитарная матрица* $U \in M_n$, *такая, что*

$$U^* AU = T = [t_{ij}]$$

— верхняя треугольная матрица с диагональными элементами $t_{ii} = \lambda_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. *Таким образом, любая квадратная матрица А унитарно эквивалентна треугольной матрице, в которой диагональные элементы представляют собой собственные значения для А, записанные в произвольном заранее заданном порядке. Кроме того, если* $A \in M_n(\mathbf{R})$ *и все ее собственные значения вещественны, то U можно выбрать вещественной и ортогональной.*

Доказательство. Доказательство носит алгоритмический характер и сводится к последовательности однотипных редукций. Пусть $x^{(1)}$ — нормированный собственный вектор матрицы *А*, отвечающий собственному значению λ. Вектор $x^{(1)}$ ненулевой и в $\mathbf{C}^n$ его можно дополнить до базиса

$$x^{(1)},\ y^{(2)},\ y^{(3)},\ \ldots,\ y^{(n)}.$$

Применим процесс ортонормирования Грама — Шмидта (см. разд. 14.6.4) и перейдем в $\mathbf{C}^n$ к ортонормированному базису

$$x^{(1)},\ z^{(2)},\ z^{(3)},\ \ldots,\ z^{(n)}.$$

Эти векторы — в порядке слева направо — будем считать столбцами унитарной матрицы U_1. В матрице AU_1 первый столбец есть $\lambda_1 x^{(1)}$, поэтому матрица $U_1^*(AU_1)$ имеет вид

$$U_1^* AU_1 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right].$$

Собственные значения матрицы $A_1 \in M_{n-1}$ — это $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Пусть $x^{(2)} \in \mathbf{C}^{n-1}$ есть нормированный собственный вектор для A_1, отвечающий λ_2. Далее все повторяется. Для некоторой унитарной матрицы $U_2 \in M_{n-1}$

$$U_2^* A_1 U_2 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_2 & * \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right],$$

и полагаем

$$V_2 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U_2 \end{array}\right].$$

Матрицы V_2 и U_1V_2 унитарны и при этом

$$V_2^* U_1^* A U_1 V_2 = \left[\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & * & \\ 0 & \lambda_2 & * \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & A_2 \end{array}\right].$$

Продолжаем редукцию и находим унитарные матрицы $U_i \in M_{n-i+1}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ и унитарные матрицы $V_i \in M_n$ $(i = 2, \ldots, n-1)$. Матрица

$$U = U_1 V_2 V_3 \ldots V_{n-1}$$

унитарна, и она обеспечивает треугольный вид матрицы U^*AU. Если все собственные значения матрицы $A \in M_n(\mathbf{R})$ оказались вещественными, то отвечающие им собственные векторы тоже можно выбрать вещественными, т. е. все шаги, описанные выше, реализуются в вещественной арифметике, что и доказывает заключительное утверждение.

Замечание. Из доказательства теоремы 16.3.1 видно, что в ее формулировке можно говорить не о верхних треугольных, а о нижних треугольных матрицах. При этом унитарная эквивалентность будет осуществляться другой матрицей *U*.

16.3.2. Пример. В теореме 16.3.1 неоднозначно определяются и *U*, и *T*. Для *T* неоднозначность связана не только с главной диагональю (ее элементы — собственные значения для *A* — можно расставлять в любом порядке). То, что находится выше главной диагонали, для унитарно эквивалентных верхних треугольных матриц может различаться весьма сильно. Например, матрицы

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad T_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3\sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

унитарно эквивалентны и соответствующее преобразование осуществляется матрицей

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

В общем случае в один и тот же класс по отношению унитарной эквивалентности могут входить многие различные верхние треугольные матрицы.

Замечание. Обратим внимание на то, что техника, использованная при доказательстве теоремы 16.3.1, — это не что иное, как последовательное понижение порядка, о чем говорилось в задаче 8 из 15.4.

Упражнение. Если $A \in M_n$ унитарно эквивалентна какой-то верхней треугольной матрице $T = [t_{ij}] \in M_n$, то, несмотря на неоднозначность определения элементов t_{ij}, величина $\sum_{i<j} |t_{ij}|^2$ определяется уже однозначно. Выразить ее в терминах элементов и собственных значений матрицы *А*. *Указание.* Использовать теорему 16.2.2.

Упражнение. Показать, что если матрицы $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}] \in M_2$ подобны и при этом

$$\sum_{ij} |a_{ij}|^2 = \sum_{ij} |b_{ij}|^2,$$

то *А* и *В* унитарно эквивалентны. Показать на примере, что это не переносится на случай более высокой размерности. *Указание.* Если *А* и *В* унитарно эквивалентны, то *А+А** н *В+В** тоже унитарно эквивалентны. Рассмотреть матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Теорему 2.3.1 полезно дополнить утверждением о том, что матрицы, принадлежащие коммутативному семейству, можно привести к треугольному виду с помощью одной и той же матрицы.

16.3.3. Теорема. *Пусть семейство* $\mathcal{F} \subseteq M_n$ *коммутативно. Тогда существует унитарная матрица* $U \in M_n$, *такая, что матрица* U^*AU *будет верхней треугольной для всех* $A \in \mathcal{F}$.

Доказательство. Вернемся к доказательству теоремы 16.3.1. На каждом его шаге происходит выбор собственного вектора (и унитарной матрицы) и при этом, согласно лемме 15.3.17, для всех $A \in \mathcal{F}$ можно выбрать *общий* собственный вектор (и унитарную матрицу). Кроме того, унитарная эквивалентность сохраняет для матриц свойство коммутативности, и, как нетрудно проверить, если блочные матрицы

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}$$

коммутируют, то блоки A_{22} и B_{22} тоже коммутируют. Таким образом, на каждом этапе редукции, осуществляемой в ходе доказательства теоремы 16.3.1, мы получаем коммутативное семейство матриц A_i. Остается заметить, что все матрицы, используемые для определения *U*, можно выбирать одинаковыми для всех членов коммутативного семейства; тем самым теорема 16.3.3 доказана. Обратим внимание на то, что теперь ничего не говорится о каком-либо упорядочении собственных значений для различных членов семейства. Мы получаем их в том порядке, в каком они появляются в результате применения леммы 15.3.17.

Ниже предлагается чисто вещественный вариант теоремы 16.3.1.

16.3.4. Теорема. *Для любой матрицы* $A \in M_n(\mathbf{R})$ *существует, вещественная ортогональная матрица* $Q \in M_n(\mathbf{R})$*,такая, что*

$$Q^T A Q = \begin{bmatrix} A_1 & & & & * \\ & A_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & A_k \end{bmatrix}. \tag{16.3.5}$$

где для каждого i матрица A_i *имеет размер* 1 × 1 *или* 2×2*, отвечая соответственно вещественному собственному значению или невещественной паре комплексно-сопряженных собственных значений матрицы А. Блоки* A_i *можно расположить в любом заданном порядке.*

В общем случае нельзя рассчитывать на то, что произвольную вещественную матрицу удастся привести к верхнему треугольному виду с помощью вещественного преобразования подобия (не говоря уже о вещественном ортогональном подобии), так как диагональ должна состоять из собственных значений, а они могут и не быть вещественными. Матрица вида (16.3.5) максимально близка к треугольной с точки зрения того, чего можно добиться с помощью вещественного ортогонального подобия. Если *А* имеет невещественные собственные значения, то привести ее к верхней треугольной форме нельзя, однако в любом случае мы получаем верхнюю хессенбергову форму.

Упражнение. Доказать теорему 16.3.4, видоизменив рассуждения, связанные с теоремой 16.3.1. *Указание.* Если λ — вещественное собственное значение вещественной матрицы *А,* то имеется отвечающий ему вещественный собственный вектор и его можно использовать для понижения порядка, как это было сделано в теореме 16.3.1. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ — невещественное собственное значение матрицы *А* и для $x = u + iv \neq 0$ имеем $Ax = \lambda x$ $(u, v \in \mathbf{R}^n)$. Установить равенства $Au = \alpha u - \beta v$, $Av = \alpha v + \beta u$ и $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ и показать, что множество $\{x, \bar{x}\}$ линейно независимо. Убедиться в линейной независимости множества *{u, v}* и, применяя к нему процесс ортонормирования Грама — Шмидта, получить вещественное ортонормированное множество $\{w, z\}$. Пусть Q_1 обозначает вещественную ортогональную матрицу с двумя первыми столбцами, совпадающими с *w* и *z*. Показать, что

$$Q_1^T A Q_1 = \left[\begin{array}{cc|c} * & * & \\ * & * & * \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \tilde{A} \end{array}\right]$$

так что в данном случае порядок понижается сразу на 2. Остается убедиться в том, что блоки A_i, каждый из которых отвечает вещественному собственному значению либо паре комплексно-сопряженных собственных значений, можно расставить в любом заданном порядке.

Имеется также вещественный вариант теоремы 16.3.3.

16.3.6. Теорема. *Пусть семейство* $\mathcal{F} \subseteq M_n(\mathbf{R})$ *коммутативно. Тогда существует вещественная ортогональная матрица* $Q \in M_n(\mathbf{R})$, *такая, что матрица* $Q^T AQ$ *имеет вид* (16.3.5) *для всех* $A \in \mathcal{F}$.

Упражнение. Доказать теорему 16.3.6, видоизменив рассуждения, относящиеся к теореме 16.3.3. *Указание.* Сначала для всех членов семейства $\mathcal{F}$ выполнить понижение порядка, используя общие вещественные собственные векторы. Затем рассмотреть общие невещественные собственные векторы и проводить понижение порядка с помощью сразу двух столбцов (как в доказательстве теоремы 16.3.4). Обратим внимание на то, что разные члены семейства $\mathcal{F}$ после выполнения преобразования ортогонального подобия могут иметь разное число блоков размера 2×2. Однако если какой-то член имеет в каком-то месте блок размера 2×2, то любой другой член, не обладающий таким блоком, должен в этом же месте иметь пару одинаковых блоков размера 1 ×1.

16.4. Некоторые следствия теоремы Шура

Чтобы показать, какую пользу приносит теорема Шура, мы рассмотрим несколько ее элементарных следствий.

Упражнение. С помощью теоремы 16.3.1 показать, что если $A \in M_n$ имеет собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (с учетом кратностей), то

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{и} \quad \operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i .$$

Напомним, что это было доказано другим способом в гл. 15. *Указание.* Что касается следа, то полезно вспомнить равенство $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$, которое проверяется прямым вычислением. Как мы видим, след является инвариантом подобия. Что можно сказать о других симметрических функциях от собственных значений?

Устанавливаемый теоремой 16.4.2 факт, что каждая матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению, следует из теоремы Шура и простого наблюдения, относящегося к умножению треугольных матриц.

16.4.1. Лемма. *Предположим, что матрицы* $R=[r_{ij}]$, $T=[t_{ij}]\in M_n$ *верхние треугольные,* $r_{ij}=0$ *при* $1\leqslant i,\ j\leqslant k<n$ *и* $t_{k+1,\,k+1}=0$. *Пусть* $T'=[t'_{ij}]=RT$. *Тогда* $t'_{ij}=0$, *где* $1\leqslant i,\ j\leqslant k+1$.

Доказательство. Поскольку $R(\{1,\ 2,\ \ldots,\ k\})=0$ и

$$t_{k+1,\,k+1}=0,$$

матрицы R и T имеют вид

$$R=\left[\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 0 & \begin{matrix} * & \ddots & * \\ 0 & & * \end{matrix} \end{array}\right],\qquad T=\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} * & \ddots & * \\ 0 & & * \end{matrix} & * \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & & \\ & * & \ddots & * \\ & 0 & & * \end{matrix} \end{array}\right]$$

где в обеих матрицах левый верхний блок имеет размер $k\times k$. В T' левый верхний блок размера $k\times k$, очевидно, нулевой в силу правила умножения блочных матриц (см. 14.7, где даются обозначения и элементарные сведения). Далее, легко видеть, что первые $k+1$ строк в R имеют нули во всех позициях, соответствующих ненулевым элементам $k+1$-го столбца в T, и первые $k+1$ столбцов в T имеют нули во всех позициях, соответствующих ненулевым элементам $k+1$-й строки в R. Если T' разбить на блоки таким же способом, как R и T, то в результате матричного умножения находим, что

$$T'=\left[\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 0 & \\ \vdots & * \\ 0 & \end{matrix} \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & & & \\ \vdots & * & \ddots & * \\ 0 & 0 & & * \end{matrix} \end{array}\right]$$

т. е. $T'(\{1,\ \ldots,\ k+1\})=0$, что и требовалось доказать.

Упражнение. Показать, что произведение двух верхних треугольных матриц будет верхней треугольной матрицей и произведение двух блочных верхних треугольных матриц (с одинаковым блочным разбиением) будет блочной верхней треугольной матрицей.

Упражнение. Обобщить лемму 16.4.1, показав, что если матрицы R и T верхние треугольные и $T'=RT$, то

$$T'(\{i,\ i+1,\ \ldots,\ i+j\})=$$
$$=R(\{i,\ i+1,\ \ldots,\ i+j\})\,T(\{i,\ i+1,\ \ldots,\ i+j\}).$$

16.4.2. Теорема (Кэли — Гамильтон). *Если* $p_A(t)$ — *характеристический многочлен матрицы* $A \in M_n$, *то* $p_A(A) = 0.$

Доказательство. Поскольку $p_A(t)$ — это многочлен степени n со старшим коэффициентом 1 и корни уравнения $p_A(t) = 0$ совпадают с собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A (с учетом кратностей), то для $p_A(t)$ имеет место разложение

$$p_A(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \ldots (t - \lambda_n).$$

Согласно теореме 16.3.1, запишем

$$A = UTU^*,$$

где T — верхняя треугольная матрица с λ_i в i-й диагональной позиции $(i = 1, \ldots, n)$. Далее,

$$\begin{aligned} p_A(A) = p_A(UTU^*) &= (UTU^* - \lambda_1 I)(UTU^* - \lambda_2 I) \ldots (UTU^* - \lambda_n I) = \\ &= [U(T - \lambda_1 I)U^*][U(T - \lambda_2 I)U^*] \ldots [U(T - \lambda_n I)U^*] = \\ &= U[(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \ldots (T - \lambda_n I)]U^* = Up_A(T)U^*. \end{aligned}$$

Заметим, что $p_A(A) = 0$ тогда и только тогда, когда $p_A(T) = 0$. Последнее и вытекает из леммы 16.4.1. В матрице $T - \lambda_1 I$ левый верхний 1 × 1-блок есть 0, в матрице $T - \lambda_2 I$ позиция (2,2) содержит 0 и обе эти матрицы верхние треугольные, следовательно, в матрице $(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I)$ левый верхний 2×2-блок есть 0. По индукции, поскольку в матрице $(T - \lambda_1 I) \ldots (T - \lambda_k I)$ левый верхний $k \times k$-блок нулевой и позиция $(k+1, k+1)$ матрицы $T - \lambda_{k+1} I$ содержит 0, заключаем, что левый верхний $(k+1) \times (k+1)$-блок матрицы $(T - \lambda_1 I) \ldots (T - \lambda_{k+1} I)$ есть 0. Это построение проводим до тех пор, пока не придем к равенству $(T - \lambda_1 I) \ldots (T - \lambda_n I) = 0$, и теорема доказана.

Упражнение. Что не верно в следующем «доказательстве» равенства $p_A(A) = 0$? Для любого собственного значения λ матрицы $A \in M_n$ имеем $p_A(\lambda) = 0$, и для любого многочлена q собственные значения матрицы $q(A)$ равны $q(\lambda)$. Отсюда вытекает равенство нулю всех собственных значений матрицы $p_A(A)$. Следовательно, $p_A(A) = 0$. Это типичная ошибка при обосновании теоремы Кэли — Гамильтона. Приведите пример, который ясно показывает, что же именно здесь ошибочно.

Упражнение. Что не верно в следующем «доказательстве»? Так как $p_A(t) = \det(tI - A)$, то $p_A(A) = \det(AI - A) = \det(A - A) = \det 0 = 0$ и, следовательно, $p_A(A) = 0$. Если *характеристический многочлен* для $A \in M_n$ определяется как

$p_A(t) = \det(tI - A)$, то *характеристическое уравнение* — это уравнение вида $p_A(t) = 0$. Корни характеристического уравнения — это собственные значения матрицы *A*. Теорему Кэли — Гамильтона часто формулируют так: «всякая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению». Однако в действительности под этим понимается следующее: сначала мы вычисляем скалярный многочлен $p_A(t) = \det(tI - A)$ и только после этого, исходя из него, образуем матрицу $p_A(A)$.

Теорема Кэли — Гамильтона установлена нами для матриц с комплексными элементами, а значит, она справедлива и по отношению к матрицам с элементами из какого-либо подполя поля комплексных чисел (например, для вещественных или рациональных чисел). В действительности теорема Кэли — Гамильтона без какого-либо изменения переносится и на случай матриц с элементами из произвольного поля или, более общо, из произвольного коммутативного кольца. См. задачу 3.

Одно из важных следствий теоремы Кэли — Гамильтона — это возможность записать при $k \geqslant n$ степени A^k матрицы $A \in M_n$ в виде линейных комбинаций матриц $I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$. Легко показать, что степени A^{n^2} и выше выражаются в виде линейных комбинаций более низких степеней (вследствие того, что если M_n рассматривать как векторное пространство над полем комплексных чисел, то его размерность будет равна n^2). Как мы видим, теорема Кэли — Гамильтона обеспечивает значительное уточнение этого результата.

16.4.3. Пример. Положим

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$A^2 = 3A - 2I$, $A^3 = A(A^2) = 3A^2 - 2A = 3(3A - 2I) - 2A = 7A -$
$p_A(t) = t^2 - 3t + 2$ и $A^2 - 3A + 2I = 0$. Таким образом.
$- 6I$, $A^4 = 7A^2 - 6A = 15A - 14I$ и т. д. В то же время постоянная в $p_A(t)$' равна определителю матрицы *A* и здесь он отличен от нуля; поэтому матрица *A* невырожденна и A^{-1} можно записать как многочлен от *A*. Действительно, вследствие равенства $p_A(A) = A^2 - 3A + 2I$ получаем $2I = -A^2 + 3A = A(-A + 3I)$ или

$$I = A\left[\frac{1}{2}(-A + 3I)\right].$$

Это означает, что $A^{-1} = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & 3/2 \end{bmatrix}$.

Упражнение. Пусть $A \in M_n$ имеет характеристический многочлен

$$p_A(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + \ldots + a_1 t + a_0.$$

Записать A^n как многочлен от A степени не выше n—1. Проделать то же самое для нескольких последующих степеней. В предположении, что матрица A невырожденна ($a_0 \neq 0$), записать A^{-1} как многочлен от A степени не выше n—1. Мы сформулируем этот факт как следствие теоремы 16.4.2.

16.4.4. Следствие. *Если матрица $A \in M_n$ невырожденна, то существует многочлен $q(t)$ степени не выше n—1 (его коэффициенты зависят от A), такой, что* $A^{-1} = q(A)$.

Упражнение. Показать, что если две матрицы $A,\ B \in M_n$ подобны, то и значение любого многочлена на одной из них подобно значению этого же многочлена на другой. В частности, если одна из этих матриц является корнем какого-то матричного многочлена, то корнем этого многочлена будет и другая матрица. Продумать возможность обратного утверждения: если для любого многочлена две матрицы одновременно являются или не являются его корнями, то эти матрицы подобны — верно это или нет?

16.4.5. Пример. Как установлено, любая матрица $A \in M_n$ является корнем какого-то многочлена степени n, например характеристического многочлена. Однако матрица $A \in M_n$ может быть корнем и какого-то многочлена степени меньше n. Так, матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3$$

удовлетворяет уравнению $q(A) = 0$, где многочлен $q(t) = t^2 - 2t + 1$ имеет степень 2.

Упражнение. Доказать, что любая диагонализуемая матрица является корнем многочлена степени, равной числу ее различных собственных значений, и меньшую степень получить нельзя. Многочлен (со старшим коэффициентом 1) минимальной степени, которому удовлетворяет заданная матрица, — ее минимальный многочлен — будет изучаться в гл. 17 в связи с жордановой канонической формой. *Указание.* Рассмотреть

$$q(t) = (t - \lambda_1) \ldots (t - \lambda_k), \quad \text{где} \quad \lambda_i \neq \lambda_j.$$

Еще одно применение теоремы Шура позволит нам установить «почти» диагонализуемость любой матрицы, причем смысл этой фразы можно интерпретировать двумя способами. Первый: для любой матрицы существует сколь угодно близкая к ней диагональная матрица. Второй: любая матрица подобна верхней треугольной матрице с произвольно малыми внедиагональнымн элементами.

16.4.6. Теорема. *Пусть* $A=[a_{ij}]\in M_n$. *Для любого* $\varepsilon>0$ *существует матрица* $A(\varepsilon)=[a_{ij}(\varepsilon)]\in M_n$, *имеющая n различных собственных значений (и, значит, диагонализуемая) и такая, что*

$$\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}-a_{ij}(\varepsilon)|^2<\varepsilon.$$

Доказательство. Пусть матрица $U\in M_n$ унитарна и такая, что $U^*AU=T$ — верхняя треугольная матрица. Образуем матрицу $E=\operatorname{diag}(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ и при этом числа $e_1,\ldots,e_n$ выберем таким образом, чтобы для всех *i* выполнялось неравенство

$$|e_i|<\left(\frac{\varepsilon}{n}\right)^{1/2}$$

и, кроме того, числа $t_{11}+e_1,\ t_{22}+e_2,\ \ldots,\ t_{nn}+e_n$ были различны (нужно лишь небольшое усилие, чтобы увидеть, что это можно сделать). Матрица *T+E* имеет *n* различных собственных значений $t_{11}+e_1,\ \ldots,\ t_{nn}+e_n$ и матрица $A+UEU^*$ тоже имеет *n* различных собственных значений, так как она подобна *T+E.* Положим $A(\varepsilon)=A+UEU^*$, так что $A-A(\varepsilon)=-UEU^*$. Согласно теореме 16.2.2, получаем

$$\sum_{i,j}|a_{ij}-a_{ij}(\varepsilon)|^2=\sum_{i=1}^{n}|e_i|^2<n\left(\frac{\varepsilon}{n}\right)=\varepsilon.$$

Таким образом, матрица $A(\varepsilon)$ именно та, о которой говорится в теореме.

Упражнение. Показать, что условие

$$\sum_{i,j}|a_{ij}-a_{ij}(\varepsilon)|^2<\varepsilon$$

в теореме 16.4.6 можно заменить условием

$$\max_{i,j}|a_{ij}-a_{ij}(\varepsilon)|<\varepsilon.$$

Указание. Применить теорему 16.4.6, заменив ε на ε^2, и воспользоваться тем, что если сумма квадратов модулей каких-то величин меньше ε^2, то каждая из этих величии по модулю меньше ε.

16.4.7. Теорема. *Пусть* $A\in M_n$. *Для любого* ε > 0 *существует невырожденная матрица* $S_\varepsilon\in M_n$, *такая, что матрица*

$$S_\varepsilon^{-1}AS_\varepsilon=T_\varepsilon=[t_{ij}(\varepsilon)]$$

верхняя треугольная и $|t_{ij}(\varepsilon)|<\varepsilon$ для $1\leqslant i<j\leqslant n$.

Доказательство. Сначала, согласно теореме Шура, запишем

$$U^*AU=T,$$

где $U \in M_n$ — унитарная, а $T \in M_n$ — верхняя треугольная матрицы. Образуем матрицу $D_\alpha = \operatorname{diag}(1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1})$ для ненулевого числа α и положим

$$t = \max_{i<j} |t_{ij}|.$$

Предположим, что ε < 1, — в действительности достаточно рассмотреть только этот случай. Положим $S_\varepsilon = UD_\varepsilon$, если $t \leqslant 1$, и $S_\varepsilon = UD_{1/t}D_\varepsilon$, если $t>1$. В обоих случаях S_ε является искомой матрицей. Если $t\leq 1$, то простое вычисление обнаруживает, что $t_{ij}(\varepsilon) = t_{ij}\varepsilon^{-i}\varepsilon^{j} = t_{ij}\varepsilon^{j-i}$ и по модулю это не больше ε^{j-i}, а следовательно, не больше, чем ε, при $i < j$. С другой стороны, если $t > 1$, то, произведя преобразование подобия с помощью трансформирующей матрицы $D_{1/t}$, мы приходим к матрице, внедиагональные элементы которой по модулю не больше, чем 1.

Упражнение. Доказатьследующее видоизменение теоремы 16.4.7: если $A \in M_n$ и $\varepsilon > 0$, то существует невырожденная матрица $S_\varepsilon \in M_n$, такая, что матрица $S_\varepsilon^{-1}AS_\varepsilon = T_\varepsilon = [t_{ij}(\varepsilon)]$ верхняя треугольная и $\sum_{j>i} |t_{ij}(\varepsilon)| < \varepsilon$. *Указание.* Применить теорему 16.4.7, заменив ε на $(2/(n(n-1)))\varepsilon$.

Рассмотрим обобщение теоремы Шура, которое легко доказывается с ее помощью и является важным шагом на пути к жордановой канонической форме, которой посвящается следующая глава.

16.4.8. Теорема. *Предположим, что $A \in M_n$ имеет различные собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ и кратность λ_i равна n_i $(i = 1, \ldots, k)$. В этом случае A подобна матрице вида*

$$\begin{bmatrix} T_1 & & & 0 \\ & T_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & T_k \end{bmatrix},$$

где $T_i \in M_{n_i}$ — верхняя треугольная матрица с диагональными элементами, равными λ_i $(i = 1, \ldots, k)$. Если $A \in M_n(\mathbf{R})$ и все собственные значения для A вещественны, то матрица, осуществляющая это подобие, может быть выбрана вещественной.

Доказательство. Сначала применим теорему Шура, чтобы перейти от A к (унитарно) подобной верхней треугольной матрице $T = [t_{rs}]$, и предположим, что собственные значения на диагонали в T упорядочены таким образом, что сначала идут равные λ_1, затем равные λ_2 и т. д. После этого мы выполним для T последовательность простых (неунитарных) преобразований подобия, чтобы получить желаемые внедиагональные нули, оставляя без изменения диагональ и сохраняя также верхнюю треугольную форму матрицы T. Пусть E_{rs} обозначает матрицу из M_n, имеющую нули всюду, кроме позиции (r, s), где стоит 1. Заметим, что для любого числа α матрица $I+\alpha E_{rs}$ невырождена, если $r \neq s$, и $(I+\alpha E_{rs})^{-1} = I-\alpha E_{rs}$. Далее, прямое вычисление обнаруживает, что если при $r<s$ с помощью трансформирующей матрицы $I+\alpha E_{rs}$ перейти от T к подобной матрице

$$(I+\alpha E_{rs})^{-1} T (I+\alpha E_{rs}) = (I-\alpha E_{rs}) T (I+\alpha E_{rs}),$$

то в T ничего не изменится, кроме элементов в r-й строке, расположенных правее s-го столбца, элементов в s-м столбце, расположенных выше r-й строки, и элемента t_{rs}, который станет равным $t_{rs}+\alpha(t_{rr}-t_{ss})$, т. е. получится матрица вида

$$\left[\ \underset{r,s}{\llcorner}\ \right]$$

Таким образом, если $t_{rr} \neq t_{ss}$, то выбор

$$\alpha = \frac{-t_{rs}}{t_{rr}-t_{ss}}$$

позволяет получить нуль в позиции (r, s), не изменяя при этом верхней треугольной формы и диагонали матрицы T. Теперь для T
$n-1)$, $(n-2, n)$, $(n-3, n-2)$, $(n-3, n-1)$,, $(n-3, n)$,
установим следующий порядок позиций: $(n-1, n)$, $(n-2,$
$(n-4,\ n-3)$, $\ldots$. В каждой из них, если $t_{ss} \neq t_{rr}$, последовательно будем получать нули, используя подобие указанного выше типа; уже полученные нули не будут портиться. В результате будет построена матрица, которая подобна A и имеет искомую форму.

Упражнение. Показать, что для матрицы $A \in M_n(\mathbf{R})$ с вещественными собственными значениями все операции, проводимые для доказательства теоремы 16.4.8, можно выполнить в вещественной арифметике. Таким образом, в этом случае теорема гарантирует существование вещественной блочно-диагональной матрицы, к которой можно перейти с помощью вещественного подобия.

Замечание. Предположим, что заданная матрица $A \in M_n$ верхняя треугольная, и пусть она (после выполнения преобразования подобия с матрицей перестановки в качестве трансформирующей, если это необходимо) имеет вид

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{kk} \end{bmatrix},$$

где каждый блок A_{ii} верхний треугольный и содержит на диагонали только λ_i; предположим также, что $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. В доказательстве теоремы 16.4.8 предлагается алгоритм, показывающий, что *А* подобна матрице

$$\begin{bmatrix} A_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{kk} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, все внедиагональные блоки можно заменить на нулевые и при этом будет получена подобная матрица. Заметим, что если хотя бы один внедиагональный блок A_{ij} ненулевой, то такого результата нельзя достичь посредством унитарного подобия из-за того, что при унитарном подобии сохраняется сумма квадратов модулей всех элементов.

Теперь обратимся к коммутативным семействам и теореме 16.3.3 (аналогу теоремы Шура), чтобы установить, что при сложении коммутирующих матриц происходит «сложение» их собственных значений — в определенном порядке.

16.4.9. Теорема. *Пусть матрицы* $A,\ B \in M_n$ *имеют собственные значения* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_1, \ldots, \beta_n$ *соответственно. Если A и B коммутируют, то собственные значения для A + B имеют вид* $\alpha_1+\beta_{i_1}, \alpha_2+\beta_{i_2}, \ldots, \alpha_n+\beta_{i_n}$, *где* $i_1, \ldots, i_n$ *— некоторая перестановка индексов* 1, ..., *n. В частности, для коммутирующих AB имеем* $\sigma(A+B)\subseteq\sigma(A)+\sigma(B)$. Здесь под суммой множеств понимается множество чисел, получаемых путем сложения всевозможных пар чисел, взятых из миожеств-слагаемых

Доказательство. Если *A* и *B* коммутируют, то, согласно теореме 16.3.3, они приводятся к треугольному виду одновременно, т. е. существует унитарная матрица $U \in M_n$, такая, что обе матрицы

$$U^*AU = T, \quad U^*BU = R$$

верхние треугольные с диагональными элементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_n}$ соответственно. Легко видеть, что

$$U^*(A+B)U = T+R,$$

и, значит, $T+R$ имеет собственные значения

$$\alpha_1+\beta_{i_1},\quad \alpha_2+\beta_{i_2},\ \ldots,\ \alpha_n+\beta_{i_n}.$$

Остается заметить, что $A + B$ имеет те же собственные значения, что и $T+R$, так как эти матрицы подобны.

16.4.10. Пример. Если A и B коммутируют, то это вовсе не означает, что каждое из чисел $\alpha_i+\beta_j$ будет собственным значением для $A + B$. Рассмотрим диагональные матрицы

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}3&0\\0&4\end{bmatrix};$$

как видим, $1+4+5\notin\{4,6\}=\sigma(A+B)$. Таким образом, для коммутирующих A, B множество $\sigma(A+B)$ содержится в $\sigma(A)+ +\sigma(B)$, но это, вообще говоря, несовпадающие множества.

16.4.11. Пример. Если A и B *не* коммутируют, то трудно говорить о какой-либо связи $\sigma(A+B)$ с $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$. В частности, $\sigma(A+B)$ может и не содержаться в $\sigma(A)+\sigma(B)$. Возьмем матрицы

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}.$$

Для них $\sigma(A+B)=\{-1,\ 1\}$, в то время как $\sigma(A)=\sigma(B)=\{0\}$.

16.4.12. Пример. Можно ли обратить утверждение теоремы 16.4.9? Должны ли A и B коммутировать, если их собственные значения складываются в каком-то порядке? Ответ отрицательный, причем далее в том случае, когда собственные значения складываются (в определенном порядке) для матриц αA и βB с произвольно взятыми числами α, β. Это явление,

а полное описание всех таких пар матриц (то есть таких пар матриц, при сложении которых собственные значения тоже складываются — в определенном порядке) — нерешенная проблема! Положим

$$A=\begin{bmatrix}1&4&5\\0&2&6\\0&0&3\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}2&1&2\\0&3&3\\0&0&4\end{bmatrix}.$$

Для них собственные значения складываются, хотя A и B не коммутируют. Ясно, что возможность одновременного приведения с помощью преобразования подобия к верхнему треугольному виду для суммируемости собственных значений достаточна, но она вместе с тем необходимой не является. При этом, верхние треугольные матрицы совсем не обязательно коммутируют.

16.4.13. Следствие. *Предположим, что матрицы* $A, B\in M_n$ *коммутируют и обладают соответственно собственными значениями*

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_1, \ldots, \beta_n$. *Если* $\alpha_i \neq -\beta_j$ *для всех* $i, j = 1, \ldots, n$, *то матрица A+ B невырожденна.*

Упражнение. Доказать это следствие, исходя из теоремы 16.4.9.

Упражнение. Показать, что для любой пары матриц $A, B \in \in M_n$ (независимо от того, коммутируют они или не коммутируют) сумма всех собственных значений матрицы *A+ B* есть сумма всех собственных значений матрицы *A* плюс сумма всех собственных значений матрицы *B*. *Указание.* Найти $\operatorname{tr}(A+B)$.

Мы рассмотрели для диагонализуемых матриц возможность их одновременной диагонализуемости — для нее коммутативность является легко проверяемым необходимым и достаточным условием. Мы изучили также возможность одновременного приведения к треугольному виду с помощью унитарного подобия — для нее коммутативность является достаточным условием, но необходимым это условие не будет. В то же время иногда бывает полезно для двух заданных матриц установить невозможность такого одновременного приведения к треугольному виду. Для этого нужны более сильные необходимые условия, чем суммируемость собственных значений. Следующий пример указывает путь к таким условиям.

16.4.14. Пример. Положим

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Обе матрицы *A* и *B* имеют собственное значение 0 кратности 3. Если взять любую линейную комбинацию $aA + bB$, то ее собственные значения также нулевые, т. е. имеет место суммируемость собственных значений, а это есть довод в пользу предположения о том, что *A* и *B* одновременно триангуляризуемые. Однако, если бы для некоторой невырожденной матрицы $S \in M_3$ обе матрицы SAS^{-1} и SBS^{-1} оказались верхними треугольными, то собственные значения матрицы $(SAS^{-1})(SBS^{-1}) = SABS^{-1}$ были бы произведениями — в определенном порядке — собственных значений матриц *A* и *B*. В данном случае собственные значения для *AB* составляют множество {—1, 0, 1}, которое нельзя получить, перемножая числа из множеств {0} и {0}. Остается заключить, что для *A* и *B* одновременное приведение к верхнему треугольному виду преобразованием подобия невозможно.

Упражнение. Проверить утверждения, связанные с этим примером. В частности, показать, что если обе матрицы $C, D \in M_n$ верхние треугольные, то собственные значения для CD суть произведения собственных значений для С и D (в определенном порядке), т. е.

$$\sigma(CD) \subseteq \sigma(C)\,\sigma(D).$$

Если рассматривать одновременное приведение к верхнему треугольному виду преобразованием подобия, не обязательно унитарным (см. 16.6), то оно полностью характеризуется следующей теоремой Маккоя, доказательство которой мы опустим. Напомним, что можно говорить о многочленах от любого числа переменных; это просто какие-то линейные комбинации произведений степеней нескольких переменных. Если переменные не коммутируют, то различные степени одних и тех же переменных в произведении могут встречаться несколько раз, чередуясь со степенями других переменных.

16.4.15. Теорема. *Пусть* $A,\ B \in M_n$, $\sigma(A) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ *и* $\sigma(B) = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ *(с учетом кратностей). Для существования невырожденной матрицы* $S \in M_n$, *такой, что обе матрицы* $S^{-1}AS$ *и* $S^{-1}BS$ *верхние треугольные, необходимо и достаточно, чтобы для какой-то перестановки* $i_1, \ldots, i_n$ *индексов* 1, 2, ..., n *выполнялось равенстводля всех*

$$\sigma(p(A,\ B)) = \left\{p\left(\alpha_j,\ \beta_{i_j}\right):\ j = 1, \ldots, n\right\}$$

многочленов $p(t,\ s)$ *с комплексными коэффициентами от двух некомму тирующих переменных.*

Упражнение. Установить, что условие для многочленов из теоремы 16.4.15 является необходимым для одновременного приведения к треугольному виду матриц A и B. Другими словами, показать, что если $A,\ B \in M_n$ коммутируют, то $\sigma(p(A,\ B)) = \left\{p\left(\alpha_j,\ \beta_{i_j}\right):\ j = 1, \ldots, n\right\}$ для всех многочленов p от двух переменных. Каким образом теорема 16.4.15 объясняет пример 16.4.14? *Замечание.* Утверждение теоремы 16.4.15 остается в силе для матриц и многочленов над произвольным полем, лишь бы оно содержало собственные значения рассматриваемых матриц. Аналогичный результат имеет место и для одновременной триангуляризуемости k =3,4 ... матриц (в этом случае нужно рассматривать многочлены от k переменных). Есть даже его обобщение, учитывающее только какую-то часть собственных значений, а именно:

$$p\left(\alpha_j,\ \beta_{i_j}\right) \in \sigma(p(A,\ B))\ \ (j = 1, \ldots, r)$$

для многочленов $p(s,\ t)$' тогда и только тогда, когда A и B одновременно приводятся преобразованием подобия к блочнотреугольным матрицам, таким, что в каких-то позициях на диагонали в одной из них размещаются блоки, содержащие $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, ив тех же позициях в другой — 1×1 блоки, содержащие $\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_r}$.

Микромодуль 48
Индивидуальные тестовые задания

Задачи к п. 16.1.

1. Доказать, что если матрица унитарна, $U \in M_n$ то $|\det U| = 1.$

2. Доказать, что если $\lambda \in \sigma(U)$ и матрица $U \in M_n$ унитарна, то $|\lambda| = 1.$ *Указание.* Использовать свойство изометричности (п. (g) теоремы 16.1.4).

3. Показать, что для любых вещественных $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ матрица

$$U = \mathrm{diag}\left(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \ldots, e^{i\theta_n}\right)$$

унитарна.

4. Охарактеризовать диагональные вещественные ортогональные матрицы.

5. Показать, что в M_n матрицы перестановок (см. разд. 14.9.5) являются ортогональными и образуют подгруппу (т. е. подмножество, которое само есть группа) в группе вещественных ортогональных матриц. Сколько в M_n различных матриц перестановок?

6. Нельзя ли получить какое-либо параметрическое представление для ортогональной группы размерности 3? Вспомнить два представления для ортогональной группы размерности 2 (см. упражнение после определения 16.1.5).

7. Разобраться в деталях следующего доказательства того, что в теореме 16.1.4 (g) влечет за собой (a). Показать, что вследствие (g) $x^*(U^*U - I)x = 0$, для любого $x \in \mathbf{C}^n$. Положить $H \equiv U^*U - I$ и заметить, что $H = H^*$. Рассмотреть равенство $0 = (x + e^{i\theta}y)^*H(x + e^{i\theta}y)$, справедливое для всех $x, y \in \mathbf{C}^n$ и для всех $\theta \in \mathbf{R}$. Получить более общее равенство $x^*Hy = 0,$ справедливое для всех $x,\ y \in \mathbf{C}^n$. Вывести отсюда, что $H = 0$

(при помощи подходящего выбора пар векторов *x* и *y).*
8. Матрица $A \in M_n$, такая, что $A\hat{A}^T = I$, называется *ортогональной.* Вещественная ортогональная матрица всегда унитарна, а невещественная ортогональная матрица может и не быть унитарной.
(a) Пусть

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbf{R}).$$

Показать,что матрица $A(t) = (\operatorname{ch} t)I + i(\operatorname{sh} t)K \in M_2$ будет ортогональной для всех $t \in \mathbf{R}$, но унитарной *A(t)* будет лишь при $t = 0$. Здесь $\operatorname{ch} t = (e^t + e^{-t})/2$, $\operatorname{sh} t = (e^t - e^{-t})/2$ — так называемые гиперболические функции.
(b) Показать, что в отличие от унитарных матриц множество комплексных ортогональных матриц не является ограниченным, а значит, не является и компактным.
(c) Показать, что, как и в случае унитарных матриц, множество комплексных ортогональных матриц одного порядка образует группу. Несмотря на это, термин «ортогональная группа» обычно используется по отношению к менее широкой (и компактной) группе вещественных ортогональных матриц одного порядка.
(d) Доказать, что если матрица ортогональна, $A \in M_n$ то $|\det A| = 1$, но *A* может иметь собственные значения λ, такие, что $|\lambda| \neq 1$. *Указание.* Рассмотреть матрицу *A(t)* из п. (a) и показать, что $|\lambda(t)|$ может быть как угодно большим.
(e) Доказать, что если матрица $A \in M_n$ ортогональна, то матрицы $\overline{A}$, A^T и A^* тоже ортогональны и при этом матрица *A* невырожденна. Верно ли, что строки или столбцы матрицы *A* образуют ортогональное множество?
(f) Охарактеризовать диагональные ортогональные матрицы. Ср. с задачей 4.

Чтобы избежать путаницы, некоторые авторы, говоря об ортогональных и не обязательно вещественных матрицах, называют их *комплексными ортогональными матрицами,* хотя это и нельзя считать общепринятым. Термин *ортогональная матрица* иногда означает то, что здесь называется *вещественной ортогональной матрицей.*
9. Доказать, что если матрица $U \in M_n$ унитарна, то и матрицы $\overline{U}$, U^T и U^* унитарны.
10. Пусть матрица $U \in M_n$ унитарна. Доказать, что в этом случае для ортогональности векторов $x, y \in \mathbf{C}^n$ необходимо и достаточно, чтобы векторы Ux, Uy были ортогональны.
11. Если матрица $A \in M_n$ такова, что $A^{-1} = -A^T$, то ее

можно было бы называть *кособртогональной.* Доказать, что кособртогональность матрицы A эквивалентна ортогональности матрицы $\pm iA$. Более общо, показать, что для $\theta \in \mathbf{R}$ равенство $A^{-1} = e^{i\theta}A^T$ выполняется в том и только в том случае, когда матрица $e^{i\theta/2}A$ ортогональна. Что это за матрица, если $\theta = \pi$ или $\theta = 0$?

12. Доказать, что если $A \in M_n$ подобна какой-либо унитарной матрице, то A^{-1} подобна A^*.

13. Рассмотреть матрицу $\operatorname{diag}(2, {}^1/_2) \in M_2$ и показать, что множество матриц, подобных унитарным матрицам, является собственным подмножеством множества матриц A, для которых A^{-1} подобна A^*.

14. Показать, что в M_n пересечение группы унитарных матриц с группой комплексных ортогональных матриц совпадает с группой вещественных ортогональных матриц. *Указание. Записать* $U = A + iB$, где $U, A, B \in M_n$ и матрицы A, B вещественные. Показать, что если U — одновременно унитарная и комплексная ортогональная матрица, то $B^TB = 0$ и, следовательно, $(Be_i)^T(Be_i) = 0$ для каждого единичного вектора $e_i \in \mathbf{R}^n$ из стандартного базиса. Поэтому любой столбец в B нулевой.

Задачи к п. 16.2.

1. Пусть матрица $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbf{R})$ симметрична $(A^T = A)$ и не дпагональна. Предположим, что индексы $i \neq j$ выбраны таким образом, что обеспечивается максимально возможное значение $|a_{ij}|$. Определим θ из соотношения $(a_{ii} - a_{jj})/2a_{ij} = \operatorname{ctg}(2\theta)$ и рассмотрим плоское вращение $U(\theta; i, j)$, о котором говорилось в примере 16.2.3. Используя теорему 16.2.2, доказать, что если

$$B = U(\theta; i, j)^* AU(\theta; i, j) = [b_{ij}],$$

то

$$\sum_{i \neq j} |b_{ij}|^2 < \sum_{i \neq j} |a_{ij}|^2.$$

Показать, что повторные применения таких плоских вращений (выбираемых для B и последующих матриц по тому же принципу) будут уменьшать суммы квадратов *внедиагональных элементов,* сохраняя при этом суммы квадратов всех элементов; на каждом шаге матрица преобразуется в «более близкую к диагональной». Это и есть метод Якоби для вычисления собственных значений вещественной симметричной матрицы. В нем строится последовательность матриц, сходящаяся к некоторой диагональной матрице. Почему в пределе диагональ состоит из собственных значений матрицы A?

2. Метод Гивенса для вычисления собственных значений вещественной симметричной матрицы (или произвольной вещественной матрицы) также использует плоские вращения, но по-другому. Показать, что всякая симметричная матрица $A=[a_{ij}]\in M_n(\mathbf{R})$ ортогонально эквивалентна некоторой трехдиагональной (симметричной) матрице и произвольная матрица $A\in M_n(\mathbf{R})$ ортогонально эквивалентна (нижней) хессенберговой матрице — преобразования проводятся с помощью плоских вращений. Определения трехдиагональных и хессенберговых матриц см. в разд. 14.9.9 и 14.9.10. *Указание.* Выбрать плоское вращение $U_{1,3}$ таким образом, чтобы в позиции (1,3) матрица $U^*_{1,3}AU_{1,3}$ имела 0. Выбрать другое плоское вращение, чтобы получить нуль в позиции (1,4) и, продолжая таким же образом, получить нуль в позиции $(1,n)$. Затем вернуться к позиции (2,4) и т. д. Убедиться, что последовательность этих действий не портит уже полученные нули, а также что ортогональная эквивалентность сохраняет симметричность. Характеристический многочлен трехдиагоналышй матрицы можно вычислить непосредственно и, чтобы получить собственные значения, нужно затем найти его корни. Обратить внимание на то, что методом Гивенса после выполнения *конечного* числа шагов находятся не собственные значения или собственные векторы, а только лишь некоторая трехдиагональная матрица. Поэтому необходимы еще и дополнительные вычисления. Метод Якоби в общем случае требует бесконечно большого числа плоских вращений, однако он приводит непосредственно к собственным значениям и ортонормированному множеству собственных векторов.

3. Доказать, что всякая матрица $A\in M_n$ унитарно эквивалентна матрице с равными элементами на главной диагонали. *Указание,* (а) Для $A\in M_2$ рассмотреть $A-(1/2)(\operatorname{tr}A)I$ и показать, что достаточно изучить лишь случай tr A=0. Доказать, что если вектор $x\in\mathbf{C}^2$ нормирован, удовлетворяет условию $x^*Ax=0$ и матрица $U=[x,y]\in M_2$ унитарна, то матрица U^*AU содержит нуль в позиции (1,1), а вследствие равенства следов нуль будет и в позиции (2,2). Чтобы найти такой вектор x, надо рассмотреть нормированные собственные векторы матрицы A, w и z, отвечающие собственным значениям λ и — λ. Если $\lambda=0$, то положить $x=w$. Если $\lambda\neq 0$, то рассмотреть $x(\theta)\equiv e^{i\theta}w+z$. Показать, что $x(\theta)\neq 0$ для всех $\theta\in\mathbf{R}$ и $x(\theta)^*Ax(\theta)=0$ для некоторого $\theta\in\mathbf{R}$; поэтому можно

взять вектор $x = x(\theta)/[x(\theta)^*x(\theta)]^{1/2}$, отвечающий этому θ. *Замечание.* Если $A \in M_2(\mathbf{R})$, то легко строится (вещественное) плоское вращение $U = U(\theta; 1, 2)$, которое обеспечивает в U^TAU равенство диагональных элементов, однако это не помогает в комплексном случае. В буквальном смысле это верно. Однако в комплексном случае ничто не мешает использовать обобщенные плоские вращения — они определяются тремя вещественными параметрами θ, ψ_1, ψ_2 и в M_2 имеют — вид

$$\begin{bmatrix} e^{i\psi_1}\cos\theta & -e^{i\psi_2}\sin\theta \\ e^{-i\psi_2}\sin\theta & e^{-i\psi_1}\cos\theta \end{bmatrix}.$$

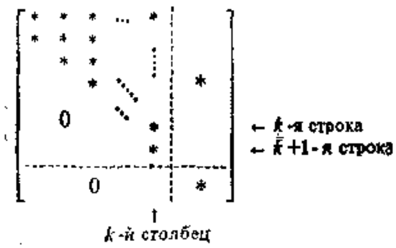
(b) Для $A = [a_{ij}] \in M_n$ положим

$f(A) \equiv \max\{|a_{ii} - a_{jj}|: \ i, j = 1, \ldots, n\}$ и $A_2 \equiv \begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{bmatrix}$,

где индексы *i, j* таковы, что $f(A) = |a_{ii} - a_{jj}|$. Пусть $U_2 \in M_2$ — такая унитарная матрица, для которой $U_2^*A_2U_2$ имеет равные диагональные элементы. Перейдем от нее к матрице $U(i, j) \in M_n$, действуя так же, как и в разд. 16.2.3, где матрица $U(\theta; i, j)$ строилась на базе плоского вращения порядка 2. Показать, что если максимальной по модулю разности диагональных элементов отвечает только одна пара индексов *i, j*, то $f(U(i, j)^*AU(i, j)) < f(A)$, в противном случае эту процедуру, возможно, придется повторить. В итоге обосновать существование унитарной матрицы $U \in M_n$, такой, что $f(U^*AU) < f(A)$, при условии, что $f(A) \neq 0$. Показать, что множество $R(A) \equiv \{U^*AU\colon \ U \in M_n$ — унитарная, матрица} является компактным и f — непрерывная функция на *R(A).* Пусть матрица $C \in R(A)$ такова, что $f(C) = \min\{f(B)\colon \ B \in R(A)\}$. Доказать, что неравенство $f(C) > 0$ невозможно. Поэтому $f(C) = 0$, откуда и вытекает то, что требовалось доказать.

4. Показать, что с помощью преобразования Хаусхолдера любой вектор $x \in \mathbf{R}^n$ евклидовой длины $r = (x^Tx)^{1/2}$ можно перевести в любой вектор $y \in \mathbf{R}^n$, $y \neq x$, той же длины. *Указание.* Построить U_w для $w = x - y$. Что можно сказать о случае, когда $x, y \in \mathbf{C}^n$?

5. Метод Хаусхолдера для вычисления собственных значений матрицы $A \in M_n(\mathbf{R})$, подобно методу Гмвенса, сначала приводит *A* к (верхней) хессенберговой форме (или к трехдиагональному виду в симметричном случае). Пусть матрица имеет вид



где для всех $j = 1, ..., k$ в j-м столбце ниже j+1-й компоненты идут нули. Построить преобразование Хаусхолдера, которое осуществляет ортогональное подобие, преобразующее данную матрицу в матрицу, имеющую ту же форму с заменой k на k+1. Вывести отсюда, что любую матрицу $A \in M_n(\mathbf{R})$ можно привести к хессенберговой форме в результате выполнения n — 2 преобразований подобия Хаусхолдера. При этом симметричная матрица $A \in M_n(\mathbf{R})$ преобразуется в трехдиагональную. *Указание.* Для k+1-го столбца нужно взять преобразование Хаусхолдера $U \in M_{n-k}$, которое вектор размерности n—k, составленный из поддиагональных элементов, переводит в подходящее кратное вектора $[1, 0, \ldots, 0]^T \in \mathbf{R}^{n-k}$. Для всей матрицы подобие реализуется ортогональной матрицей

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix} = M_n.$$

При этом получается именно то расположение нулей, которого мы добиваемся.

6. Пусть заданы матрицы $A \in M_n$ и $B,\ C \in M_m$. Используя теорему Шпехта 16.2.6 или теорему Пнрси 16.2.8, доказать, что B и C унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих условий:

(а) $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$ унитарно эквивалентны;

(b) $\begin{bmatrix} B & & & 0 \\ & B & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} C & & & 0 \\ & C & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & C \end{bmatrix}$ унитарно эквивалентны

(обе матрицы представляют собой прямые суммы с одинаковым числом членов);

(c) $\begin{bmatrix} A & & & 0 \\ & B & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} A & & & 0 \\ & C & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & C \end{bmatrix}$ унитарно эквивалентны

(в этих прямых суммах одинаковое число членов).

7. Показать, что имеется 2^k различных слов $W(s, t)$ вида (16.2.5) заданной степени k. Вывести отсюда, что различных слов степени не выше $2n^2$ будет не больше 4^{n^2}.

8. Привести пример двух матриц порядка 2, которые удовлетворяют соотношению из теоремы 16.2.2 и не являются унитарно эквивалентными. Объяснить, почему.

Задачи к п. 16.3.

1. Пусть $x \in \mathbf{C}^n$—заданный единичный вектор $(x^*x = 1)$. Запишем $x = [x_1, y^T]^T$, где $x_1 \in \mathbf{C}$ и $y \in \mathbf{C}^{n-1}$. Выберем $\theta \in \mathbf{R}$, такое, что $e^{i\theta}x_1 \geqslant 0$, и образуем вектор $z = e^{i\theta}x = [z_1, \zeta^T]^T$, где число $z_1 \in \mathbf{R}$ неотрицательно и $\zeta \in C^{n-1}$. Доказать, что матрица

$$V = \left[\begin{array}{c|c} z_1 & \zeta^* \\ \hline \zeta & -I + \frac{1}{1+z_1}\zeta\zeta^* \end{array}\right]$$

унитарна. *Указание.* Установить равенство $V^*V = V^2$ и убедиться в том, что матрица $U = e^{-i\theta}V = [xu_2 \ldots u_n]$ унитарна и ее первым столбцом служит заданный вектор x. Это дает конструктивный метод нахождения унитарных матриц, необходимых для последовательного понижения порядка в доказательстве теоремы Шура.

2. Пусть задан вещественный единичный вектор $x \in \mathbf{R}^n$. Приспособить конструкцию, описанную в задаче 1, для нахождения вещественной ортогональной матрицы $Q \in M_n(\mathbf{R})$ с первым столбцом, равным x. Доказать, что эта конструкция будет работать.

3. Пусть $A \in M_n(\mathbf{R})$. Объяснить, почему невещественные собственные значения для A (если они есть) можно разбить на пары комплексно-сопряженных чисел.

4. Рассмотреть семейство

$$\mathcal{F} = \left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}$$

и показать, что коммутативность, предполагаемая в теореме 16.3.3, будучи достаточной для одновременного приведения семейства $\mathcal{F}$ к верхнему треугольному виду преобразованием унитарного подобия, не является необходимой.

5. Пусть задано семейство $\mathcal{F}=\{A_1, \ldots, A_k\}\subset M_n$ и рассматривается семейство

$$\mathcal{G}=\{A_iA_j\colon i, j=1, 2, \ldots, k\},$$

составленное из попарных произведений матриц, входящих в $\mathcal{F}$. Известно, что если $\mathcal{G}$ коммутативно, то одновременное приведение матриц из $\mathcal{F}$ к верхнему треугольному виду с помощью унитарного подобия возможно в том и только в том случае, когда каждый коммутатор $A_iA_j - A_jA_i$ имеет лишь нулевые собственные значения. Показать, что предположение о коммутативности $\mathcal{G}$ является более слабым по сравнению с предположением о коммутативности $\mathcal{F}$. Показать, что для семейства $\mathcal{F}$ из задачи 4 отвечающее ему семейство $\mathcal{G}$ коммутативно и что $\mathcal{F}$ удовлетворяет также условию на собственные значения коммутаторов.

6. Пусть заданы матрицы $A, B\in M_n$ и одно и то же преобразование подобия приводит A и B к верхнему треугольному виду, т. е. для некоторой невырожденной матрицы $S\in M_n$ обе матрицы $S^{-1}AS$ и $S^{-1}BS$ верхние треугольные. Доказать, что все собственные значения матрицы AB— BA равны нулю. *Указание.* Пусть обе матрицы $\Delta_1, \Delta_2\in M_n$ верхние треугольные. Найти главную диагональ матрицы $\Delta_1\Delta_2-\Delta_2\Delta_1$.

7. Каждая квадратная матрица приводится к верхнему треугольному виду с помощью преобразования унитарного подобия, но это не верно по отношению к комплексному ортогональному подобию. Пусть матрица $A\in M_n$ записана в виде $A=Q\Delta Q^T$, где $Q\in M_n$ — комплексная ортогональная матрица и $\Delta\in M_n$ — верхняя треугольная матрица. Доказать, что A имеет хотя бы один собственный вектор $x\in \mathbf{C}^n$, такой, что $x^Tx\neq 0$. Рассмотреть $A=\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1\end{bmatrix}$ и показать, что не каждую матрицу $A\in M_n$ можно привести к верхнему треугольному виду, если использовать для этого преобразования комплексного ортогонального подобия.

8. Пусть $Q\in M_n$— заданная комплексная ортогональная матрица, и предположим, что $x\in \mathbf{C}^n$ — ее собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda\neq\pm 1$. Доказать, что $x^Tx=0$. *Указание.* Обе части равенства $Qx=\lambda x$ умножить на транспонированные к ним. См. задачу 8(а) из 16.1— там приводится пример семейства комплексных ортогональных матриц размера 2×2, у которых оба собственных значения отличны от ±l. Показать, что ни

одну из этих матриц нельзя привести к верхнему треугольному виду с помощью ортогонального подобия.

Задачи к п. 16.4.

1. Предположим, что $A,\ B \in M_n$ коммутируют и имеют собственные значения $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n$ и $\beta_1,\ \ldots,\ \beta_n$ соответственно.

(a) Доказать, что собственные значения для *AB* имеют вид

$$\alpha_1\beta_{i_1},\ \ \alpha_2\beta_{i_2},\ \ldots,\ \alpha_n\beta_{i_n}$$

для некоторой перестановки $i_1,\ \ldots,\ i_n$ индексов 1, ..., *n*.

(b) Доказать, что для произвольного многочлена $p(t,\ s)$ от двухпеременных матрица $p(A,\ B)$ имеет собственные значения

$$p\left(\alpha_1,\ \beta_{i_1}\right),\ \ldots,\ p\left(\alpha_n,\ \beta_{i_n}\right).$$

(c) Наконец, показать, что последнее утверждение верно и при более слабом (по сравнению с коммутативностью) предположении об одновременной приводимости к верхнему треугольному виду; коммутативность не является необходимой.

2. Показать, что ранг матрицы $A \in M_n$ не меньше числа ее ненулевых собственных значений (в этом и аналогичных случаях нужно учитывать кратности собственных значений). *Указание.* Показать, что ранг верхней треугольной матрицы не меньше числа ненулевых элементов на ее главной диагонали. Далее воспользоваться теоремой Шура. Используя матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

объяснить, почему ранг матрицы *A* может оказаться больше, чем число ненулевых собственных значений.

3. Цель этой задачи — установить, что теорема Кэли — Гамильтона справедлива и для матриц с элементами из любого *коммутативного кольца* (а не только из комплексного поля). Коммутативное кольцо — это математическая структура, в которой выполняются все аксиомы поля, *кроме* существования обратных элементов по умножению. Таким образом, имеются коммутативные операции «сложения» и «умножения», подчиняющиеся обычным законам ассоциативности и дистрибутивности. Мы предполагаем дополнительно, что в кольце имеется единица по умножению, т. е. элемент 1, такой, что *a* = *a* для всех его элементов *a*. Один из примеров кольца, которое может и не быть полем, — это кольцо Z_k целых чисел по модулю *k*. В Z_k «сложение» и «умножение» выполняются как обычно, только результат приводится по модулю *k*. Кольцо Z_k является полем тогда и

только тогда, когда k простое. Другой пример — множество многочленов с комплексными коэффициентами от k формальных переменных.

(a) Напомним, что если $A \in M_n$, то $\operatorname{adj} A \in M_n$ — это однозначно определенная матрица, которая в позиции (i, j) содержит алгебраическое дополнение к элементу матрицы A, стоящему в позиции (j, i) (см. разд. 14.8.2). Показать, что фундаментальное тождество

$$A(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)A = (\det A)I$$

есть не что иное, как запись разложения Лапласа для определителя матрицы A с учетом того факта, что $\det A = 0$, если в A совпадают какие-либо две строки или какие-то два столбца. В этой формуле участвуют только умножение и сложение, но деления в ней нет. Доказать, что эта формула справедлива для матриц с элементами из произвольного коммутативного кольца.

(b) Используя п. (a), доказать, что равенство

$$(tI - A)[\operatorname{adj}(tI - A)] = [\operatorname{adj}(tI - A)](tI - A) = \\ = \det(tI - A)I = p_A(t)I$$

справедливо не только для любой матрицы $A \in M_n$, но и для любой $n \times n$-матрицы с элементами из произвольного коммутативного кольца. Показать, что $\operatorname{adj}(tI - A)$ — это матрица, элементы которой являются многочленами от t степени не выше $n - 1$ и поэтому ее можно записать так:

$$\operatorname{adj}(tI - A) = A_{n-1}t^{n-1} + A_{n-2}t^{n-2} + \ldots + A_1 t + A_0,$$

где элементы $n \times n$ -матриц A_k суть значения многочленов от элементов матрицы A. Многочлен $p_A(t)$ — это характеристический многочлен матрицы A.

(c) Доказать, что для всех $k = 0, 1, \ldots$

$$t^k I - A^k = (tI - A)(It^{k-1} + At^{k-2} + \ldots + A^{k-2}t + A^{k-1}) \equiv \\ \equiv (tI - A)(G_k A, t)$$

при условии, что A есть $n \times n$-матрица с элементами из коммутативного кольца. Вывести отсюда, что

$$t^k I = It^k = A^k + (tI - A)G_k(A, t), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

(d) Показать, что многочлен $p_A(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots$ $\ldots + a_1 t + a_0 = \det(tI - A)$, т. е. характеристический многочлен матрицы A (здесь a_n=1), определен корректно и в том случае, когда A есть $n \times n$-матрица с элементами из произвольного коммутативного кольца. Используя п. (c), установить равенство

$$p_A(t)\,I = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k I = \sum_{k=0}^{n} a_k\,[A^k + (tI - A)\,G_k(A,\,t)] =$$
$$= p_A(t) + (tI - A)\,G(A,\,t),$$

где

$$G(A,\,t) = \sum_{k=0}^{n} a_k G_k(A,\,t)$$

есть многочлен от t степени не выше $n—1$ и его коэффициентами являются матрицы, в которых каждый элемент представляет собой многочлен от элементов матрицы A. Далее, используя п. (b), показать, что

$$p_A(A) = p_A(t)\,I - (tI - A)\,G(A,\,t) =$$
$$= (tI - A)\operatorname{adj}(tI - A) - (tI - A)\,G(A,\,t) =$$
$$= (tI - A)\,H(A,\,t) \equiv Q_A(t),$$

где $H(A,\,t) = B_{n-1}t^{n-1} + B_{n-2}t^{n-2} + \ldots + B_1 t + B_0$ и для всех k матрица B_k имеет размер $n \times n$ и любой ее элемент представляет собой многочлен от элементов матрицы A, не зависящий от t. Таким образом, $Q_A(t)$ — это многочлен от t с матричными коэффициентами, имеющий степень не выше n.

(e) Вычислить значение и $Q_A(A)$ вывести отсюда, что $p_A(A) = 0$.

4. Доказать, что любая матрица, коммутирующая с невырожденной матрицей $A \in M_n$, коммутирует также и с A^{-1}. *Указание.* См. разд. 16.4.4; привести также прямое доказательство.

5. Используя теорему 16.3.1, доказать, что если матрица имеет собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k = \operatorname{tr} A^k, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots .$$

6. Показать, что матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

не приводятся одновременно к верхним треугольным матрицам преобразованием подобия, однако $\sigma(aA + bB) = \{a - 2b,\ 2a - 2b,\ 3a + b\}$ для всех чисел $a,\ b \in \mathbf{C}$.

7. Доказать невозможность одновременного приведения к треугольному виду двух матриц из примера 16.4.14, используя

условие из задачи 6 из 16.3. Это же условие применить к двум матрицам из предыдущей задачи.

8. Следующее утверждение в духе теоремы (Маккоя) 16.4.15 иногда оказывается полезным для того, чтобы установить, что какие-либо две матрицы не являются унитарно эквивалентными. Пусть $p(t, s)$ обозначает произвольный многочлен с комплексными коэффициентами от двух некоммутирующих переменных и унитарная эквивалентность матриц $A, B \in M_n$ выражается соотношением $A = UBU^*$, где U — какая-то унитарная матрица. Доказать, что $p(A, A^*) = Up(B, B^*)U^*$. Отсюда вывести, что если A и B унитарно эквивалентны, то $\operatorname{tr} p(A, A^*) = \operatorname{tr} p(B, B^*)$ для любого комплексного многочлена $p(s,t)$ от двух некоммутирующих переменных. Как это связано с теоремой 16.2.6?

9. Пусть заданы матрицы $A \in M_n$, $B \in M_m$, и предположим, что они не имеют общих собственных значений, т. е. множество $\sigma(A) \cap \sigma(B)$ пусто. Используя теорему Кэли — Гамильтона 16.4.2, показать, что уравнение $AX — XB = 0$ оотносительно $X \in M_{n,m}$ имеет только одно решение $X = 0$. Вывести отсюда, что уравнение $AX — XB = C$ имеет единственное решение $X \in M_{n,m}$ для любой заданной матрицы $C \in M_{n,m}$. *Указание.* Показать по индукции, что так как $AX = XB$, то $A^kX = XB^k$ для всех $k = 1, 2.....$и потому $p(A)X = Xp(B)$ для любого многочлена $p(t)$. В качестве $p(t)$ взять характеристический многочлен для A и получить равенство $p_A(A)X = 0 = Xp_A(B)$. Поскольку $p_A(B) = (B - \lambda_1 I) \dots (B - \lambda_n I)$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы A, матрица $p_A(B)$ невырожденна и уравнение $Xp_A(B) = 0$ имеет единственное решение $X = 0$. Существование решения уравнения $AX — XB = C$ для любой правой части вытекает из единственности решения однородного уравнения и утверждений (k) и (I) из 14.5. примененных к линейному преобразованию $X \to T(X) = AX - XB$ на $M_{n,m}$.

10. С помощью задачи 9 предложить доказательство теоремы 16.4.8, основанное на редукции, проводимой не более k — 1 раз. *Указание.* Записать A в виде

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & & A_{1k} \\ 0 & A_{22} & & \cdot \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \cdot & & & \\ 0 & 0 & \dots & A_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & R_1 \\ 0 & T \end{bmatrix},$$

где каждый блок A_{ii} верхний треугольный и на его главной диагонали находится только λ_i. Положим $R_1 = [A_{12} \ \ldots \ A_{1k}]$. Рассмотрим матрицы

$$S = \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

где X имеет те же размеры, что и R_1. Показать, что

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}$$

при условии, что в качестве X выбрано решение уравнения $A_{11}X - XT = -R_1$. То же проделать со следующими строками и в итоге установить, что A подобна $\operatorname{diag}(A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{kk})$.

11. Для заданных A, $B \in M_n$ рассмотрим их *коммутатор* $C = AB - BA$. Доказать, что $\operatorname{tr} C = 0$. На примере матриц $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ показать, что этот коммутатор может и не быть нильпотентным, т. е. какие-то его собственные значения могут быть отличными от нуля, несмотря на то что сумма всех его собственных значений равна нулю.

12. Для A, $B \in M_n$ положим $C = AB - BA$ и предположим, что A коммутирует с C. Доказать, что матрица C нильпотентна. В этой связи прокомментировать ситуацию в задаче 11. *Указание.* Существует невырожденная матрица $S \in M_n$, такая, что $SCS^{-1} = \operatorname{diag}(C_{11}, C_{22}, \ldots, C_{kk}) \equiv C_1$, для всех i=1,...,k матрица $C_{ii} \in M_{n_i}$ верхняя треугольная, $\sigma(C_{ii}) = \{\lambda_i\}$ и при этом $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ и $\lambda_i \neq \lambda_j$, если $i \neq j$. Почему? Положить $A_1 \equiv SAS^{-1}$, $B_1 \equiv SBS^{-1}$ и рассмотреть блочные разбиения $A_1 = (A_{ij})$ и $B_1 = (B_{ij})$, согласованные с блочно-диагональным видом матрицы C_1 Доказать, что $A_1C_1 = C_1A_1$ и — с помощью задачи 9 — что $A_{ij} = 0$, если $k > 1$ и $i \neq j$. Тогда при всех i для $C_{ii} = A_{ii}B_{ii} - B_{ii}A_{ii}$ имеем $\operatorname{tr} C_{ii} = 0$, и, значит, λ_i=0 и k=1.

13. Получить в обозначениях задачи 9 еще одно доказательство того факта, что уравнение $AX - XB = C$ имеет единственное решение для любой матрицы $C \in M_n$ при условии, что A и B не имеют общих собственных значений. Для этого использовать теорему 16.4.9. *Указание.* Рассмотреть линейные преобразования T_1, T_2: $M_{n,m} \to M_{n,m}$, определенные соотношениями $T_1(X) = AX$, $T_2(X) = XB$. Доказать, что T_1 и T_2 коммутируют и, согласно теореме 16.4.9, собственные значения для T суть разности

собственных значений для T_1 и T_2. Установить, что λ будет собственным значением для T_1 в том и только в том случае, когда $AX - \lambda X = 0$ для какой-то ненулевой матрицы $X \in M_{n,m}$, а это возможно в том и только в том случае, когда λ является собственным значением для A (рассмотреть в X столбцы, отличные от нуля). Таким образом, множества собственных значений для T_1 и A совпадают (но не нх кратности) и то же справедливо по отношению к T_2 и B. Итак, преобразование T невырожденное при условии, что A и B не имеют общих собственных значений. Пусть x — собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению λ, и y — собственный вектор матрицы B^T, отвечающий собственному значению λ. Показать, что если $X = xy^T$, то $T(X) = (\lambda - \mu)X$. Отсюда вывести, что множество собственных значений для T состоит из всех возможных разностей собственных значений матриц A и B.

14. Пусть семейство $\mathcal{F} = \{A_i : i \in \mathcal{T}\} \subset M_n$ коммутативное. Доказать, что для $\mathcal{F}$ возможно одновременное преобразование подобия к верхнему треугольному виду, причем таким способом, что некоторая произвольно выбранная матрица из $\mathcal{F}$ приводится к блочно-диагональному виду, описанному в теореме 16.4.8, и при этом все остальные матрицы из $\mathcal{F}$ становятся блочно-диагональными верхними треугольными матрицами с аналогичным блочным разбиением. Другими словами, для любой заданной матрицы $A_0 \in \mathcal{F}$ можно найти невырожденную матрицу $S \in M_n$, такую, что $A_i = S\,\mathrm{diag}\left(T_1^{(i)}, \ldots, T_k^{(i)}\right)S^{-1}$ для всех $\in \mathcal{T}$, матрица $T^{(i)} \in M_n$ $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n)$ верхняя треугольная для всех $j = 1, ..., k$ и для всех $i \in \mathcal{T}$, все элементы на главной диагонали в $T_j^{(0)}$ равны λ_j и $\lambda_j \neq \lambda_i$ при $j \neq i$. *Указание.* Выбрать S таким образом, чтобы матрица $S^{-1}A_0S$ имела блочно-диагональный вид, описанный в теореме 16.4.8. Заметить, что семейство $\{S^{-1}A_iS : i \in \mathcal{T}\}$ будет коммутативным. Для всех матриц $S^{-1}A_iS$ рассмотреть одинаковые блочные разбиения, согласованные с блочным разбиением матрицы $S^{-1}A_0S$. Используя коммутативность и результат задачи 9 или 13 (так же, как в задаче 12), показать, что все внедиагональные блоки для каждой матрицы $S^{-1}A_iS$ должны быть нулевыми. Теперь теорему 16.3.3 можно применить для k семейств, состоящих из блоков, занимающих на диагонали одно и то же место.

За исключением матрицы $S^{-1}A_0S$, уже нельзя гарантировать, что все собственные значения одного диагонального блока в $S^{-1}A_iS$ равны или что собственные значения разных блоков обязательно различны.

Говорят, что любая пара матриц $A,B \in M_n$, такая, что $\sigma\,(aA + bB) = \{a\alpha_j + b\,\beta_{i_j} \; : j = 1, ..., n\}$

для всех $a,b \in \mathbf{C}$, обладает *свойством* L, а условие, рассмотренное в теореме 16.4.15, называется *свойством* P. Очевидно, что из свойства P вытекает свойство L, но не наоборот. Более слабое свойство L изучено еще не полностью; впрочем, известно, что любая пара нормальных матриц (см. 16.5), обладающая свойством L, коммутирует и поэтому одновременно диагонализуется с помощью унитарного подобия.

Микромодуль 49
Нормальные матрицы и QR-разложения

16.5. Нормальные матрицы

Нормальные матрицы, возникающие естественным образом в связи с унитарной эквивалентностью, имеют важное значение для всего матричного анализа. Класс нормальных матриц включает в себя унитарные, вещественные симметричные и эрмитовы матрицы.

16.5.1. Определение. Матрицаназывается $A \in M_n$ *нормальной,* если $A^*A = AA^*$, другими словами, если A коммутирует со своей сопряженной матрицей.

Упражнение. Доказать, что для нормальности матрицы $A \in M_n$ необходимо и достаточно, чтобы любая унитарно эквивалентная ей матрица была нормальной. Унитарная эквивалентность не выводит из класса нормальных матриц.

16.5.2. Примеры.

(a) Если матрица U унитарна, то $U^*U = I = UU^*$; поэтому все унитарные матрицы нормальны.

(b) Если $A^* = A$, то очевидно, что $A^*A = AA^*$; поэтому все эрмитовы матрицы нормальные.

(c) Если матрица $A \in M_n$ такова, что $A^* = -A$, то она называется *косоэрмитовой.* В этом случае $A^*A = -A^2 = AA^*$; поэтому все косоэрмитовы матрицы тоже нормальны.

(d) Матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ нормальна и не относится ни к одному из перечисленных выше классов.

Упражнение. Охарактеризовать нормальные матрицы в $M_2(\mathbf{R})$ с помощью каких-либо соотношений для их элементов. Представить результат, используя классы матриц из приведенных выше пп. (а), (b) и (с). *Указание.* Установить, что если нормальная матрица $A \in M_2(\mathbf{R})$ имеет хотя бы один нулевой элемент, то $A = A^T$ или $A = —A^T$. Если в A все элементы ненулевые, то или $A=A^T$, или $AA^T = aI$ для некоторого $a > 0$.

Упражнение. Привести какой-либо пример вещественной матрицы размера 2×2, которая не будет нормальной. Привести также пример вещественной 2× 2-матрнцы, которая является нормальной, не будучи симметричной, кососнмметричной (т. е. такой, что $A^T = —A$) или ортогональной.

Упражнение. Доказать, что классы матриц, приведенные в пп. (а), (b) и (с), замкнуты относительно преобразования унитарной эквивалентности.

Упражнение. Доказать, что любая диагональная эрмитова матрица должна иметь вещественные элементы, а любая диагональная косоэрмнтова — чисто мнимые.

16.5.3. Определение. Если матрица $A \in M_n$ унитарно эквивалентна какой-либо диагональной матрице, то A называется *унитарно диагонализуемой.* Аналогично вводится определение *ортогональной диагонализуемости.* Заметим, что унитарная (или ортогональная) диагонализуемость влечет за собой диагонализуемость (но не наоборот).

Упражнение. Рассмотреть доказательство теоремы 15.3.7 и установить, что матрица $A \in M_n$ будет унитарно диагонализуемой в том и только в том случае, когда в $\mathbf{C}^n$ можно найти n ортонормированных векторов, каждый из которых является собственным вектором для A.

Ниже мы перечисляем наиболее фундаментальные факты, относящиеся к нормальным матрицам. Один из них — эквивалентность утверждений (а) и (b) в следующей теореме — часто называется *спектральной теоремой для нормальных матриц.*

16.5.4. Теорема. *Для матрицы* $A = [a_{ij}] \in M_n$ *с собственными значениями* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *следующие утверждения эквивалентные*

(а) *А нормальна;*

(b) *А унитарно диагонализуема;* (с) $\sum_{i,j}^{n} |a_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2;$

(d) *для А существует ортонормированное множество из собственных векторов.*

[Утверждение (b) означает, что матрицу A можно представить в виде $A = UDU^*$, где D — диагональная, а U — унитарная матрицы, причем диагональные элементы матрицы D составляют спектр матрицы A. Это разложение мы в дальнейшем будем называть *спектральным.*]

Доказательство. Будем считать, что всюду здесь $T = [t_{ij}] \in M_n$ обозначает верхнюю треугольную матрицу, унитарно эквивалентную матрице A; ее существование обеспечивается теоремой Шура 16.3.1. Таким образом, $T = U^*AU$ для некоторой унитарной матрицы $U \in M_n$. Поскольку T унитарно эквивалентна A, утверждение (a) равносильно нормальности T. Покажем, что (a) равносильно (b), (b) равносильно (c) и (c) равносильно (d). Чтобы установить, что (a) влечет за собой (b), проведем следующее вычисление. Если A нормальна, то и T нормальна. Но треугольная нормальная матрица должна быть диагональной, в чем можно убедиться, приравнивая диагональные элементы матриц TT^* и T^*T. Равенство их элементов в позиции (1,1) означает, что

$$\bar{t}_{11}t_{11} = t_{11}\bar{t}_{11} + \sum_{j=2}^{n} t_{1j}\bar{t}_{1j} = |t_{11}|^2 + \sum_{j=2}^{n} |t_{1j}|^2.$$

Следовательно,

$$0 = \sum_{j=2}^{n} |t_{1j}|^2.$$

— сумма неотрицательных членов равна нулю и поэтому каждый из них должен быть нулем. Значит,

$$t_{1j} = 0, \quad j = 2, \ldots, n.$$

Матрицы T^*T и TT^* имеют одинаковые элементы и в позициях (2,2), т.е.

$$\bar{t}_{22}t_{22} = t_{22}\bar{t}_{22} + \sum_{j=3}^{n} t_{2j}\bar{t}_{2j} = |t_{22}|^2 + \sum_{j=3}^{n} |t_{2j}|^2.$$

Отсюда получаем, что

$$t_{2j} = 0, \quad j = 3, \ldots, n.$$

Действуя в том же духе, предположим, что мы уже установили равенства

$$t_{ij} = 0, \quad j > i, \quad i = 1, \ldots, k-1.$$

Тогда можно доказать, что имеют место также равенства

$$t_{ij} = 0, \quad j > i, \quad i = k.$$

Проводя аналогичные рассуждения последовательно для каждого диагонального элемента, в конце концов получим

$$t_{ij} = 0, \quad j > i, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Учитывая также, что вследствие верхнего треугольного вида матрицы T

$$t_{ij} = 0, \quad j < i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

приходим к выводу о дпагональностн матрицы *T*. Итак, утверждение (b) доказано. Поскольку диагональные матрицы, очевидно, нормальны и это свойство сохраняется при унитарной эквивалентности, то из (b) также следует (a).

Чтобы установить равносильность (b) и (c), обратимся к теореме 16.2.2. При диагонализации матрицы *A* мы получаем диагональную матрицу, в которой на диагонали располагаются (в каком-то порядке) собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$; поэтому теорема 16.2.2 позволяет нам вывести (c) из (b). С другой стороны, поскольку $\lambda_i \quad (i = 1, \ldots, n)$ являются в *T* диагональными элементами, в силу теоремы 16.2.2 получаем

$$\sum_{i, j=1}^{n} |a_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 + \sum_{i<j} |t_{ij}|^2.$$

В то же время (c) означает, что

$$\sum_{i<j}^{n} |t_{ij}|^2 = 0,$$

т. е. матрица *T* диагональна. Отсюда следует (b).

Равносильность (b) и (d) составляет содержание предшествующего этой теореме упражнения.

Упражнение. Показать, что если матрица $T \in M_n$ треугольная и *i*-е диагональные элементы матриц *T*T* и *TT** одинаковы для всех $i = 1, \ldots, n$, то матрица *T* диагональна. Объяснить, почему этот факт вместе с инвариантностью нормальности относительно унитарного подобия является главной причиной унитарной диагонализуемости нормальной матрицы.

Упражнение. Доказать, что нормальная матрица недефектна (для каждого собственного значения геометрическая кратность совпадает с алгебраической кратностью).

Упражнение. Пусть матрица $A \in M_n$ нормальна. Доказать, что вектор $x \in \mathbf{C}^n$ является для *A* правым собственным вектором, отвечающим собственному значению λ, тогда и только тогда, когда *x* является левым собственным вектором, отвечающим λ, т. е. $Ax = \lambda x$ равносильно $x^*A = \lambda x^*$. *Указание.* Нормировать *x* и записать $A = U\Lambda U^*$, взяв *x* в качестве первого столбца в *U*. Как выглядит *A*? A*x?* Другое доказательство см. в задаче 20 в конце п.16.5.

Упражнение. Доказать, что если матрица $A \in M_n$ нормальна и x и y — собственные векторы, отвечающие ее различным собственным значениям, то x и y ортогональны. *Указание.* Исходя из $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$, показать, что $\mu x^* y = x^*(Ay) = (A^* x)^* y = (\bar{\lambda} x)^* y = \lambda x^* y$. Если $\lambda \neq \mu$, то $x^* y = 0$. Другое доказательство см. в задаче 21 п.16.5.

Если собственные значения какой-либо нормальной матрицы известны, то можно провести ее унитарную диагонализацию, руководствуясь следующим общим предписанием. Определим все ее собственные подпространства и выберем в каждом из них ортонормированный базис (например, с помощью процесса Грама — Шмидта). Вследствие нормальности матрицы A н совпадения размерности каждого собственного подпространства с кратностью соответствующего собственного значения объединение этих базисов будет ортонормированным базисом всего пространства. Составим из этих векторов, располагая их по столбцам, некоторую унитарную матрицу — она и будет осуществлять искомую диагонализацию.

Теперь отметим, что коммутирующие между собой нормальные матрицы одновременно диагонализуемы.

16.5.5. Теорема. *Если $\mathcal{N} \subseteq M_n$ — коммутативное семейство нормальных матриц, то оно одновременно унитарно диагонализуемо, т. е. каждая матрица из $\mathcal{N}$ превращается в диагональную посредством одного и того же преобразования унитарного подобия.*

Упражнение. Доказать эту теорему, опираясь на теорему 16.3.3 и факт диагональности любой треугольной нормальной матрицы. Объяснить, почему и предположения, и утверждения теоремы 16.5.5 сильнее, чем предположения и выводы в теореме 15.3.19.

Теперь применим теорему 16.5.4 к случаю эрмитовых матриц. Это один из фундаментальных результатов, часто называемый *спектральной теоремой для эрмитовых матриц.*

16.5.6. Теорема. *Если матрица $A \in M_n$ эрмитова, то*

(a) *все ее собственные значения вещественны;*

(b) *A унитарно диагонализуема. Если матрица $A \in M_n(\mathbf{R})$ симметрична, то она вещественно ортогонально диагонализуема.*

Доказательство. Любая диагональная эрмитова матрица имеет вещественные элементы, поэтому (a) следует из (b) и замкнутости множества эрмитовых матриц относительно преобразования унитарной эквивалентности. Утверждение (b) следует из теоремы 16.5.4, потому что эрмитовы матрицы нормальны. Если матрица $A \in M_n(\mathbf{R})$

симметрична, то она также и эрмитова. При этом все вычисления, необходимые для ее диагонализации, выполнимы над вещественным полем. Вещественность собственных значений матрицы *A* позволяет и собственные векторы выбрать вещественными.

Важно отметить, что в отличие от обсуждения диагонализуемости в гл. 15 тот факт, что собственные значения различны, или что-либо ему подобное не играет роли в теоремах 16.5.4 и 16.5.6, а в теореме 16.5.5 не нужно предполагать диагонализуемости. Нормальность изначально гарантирует наличие полной системы собственных векторов (более того, ортонормированной системы). Это одна из причин, почему эрмитовы и нормальные матрицы так важны и почему они имеют такие свойства.

Мы рассмотрим теперь аналоги теорем 16.5.4 и 16.5.5 для вещественных нормальных матриц. Такие матрицы диагонализуемы вследствие нормальности, но не обязательно при помощи именно вещественного унитарного подобия. Спрашивается, к какому же наиболее простому виду можно привести их посредством *вещественного ортогонального* подобия? Поскольку может случиться так, что вещественная нормальная матрица вообще не имеет вещественных собственных значений, то нет никакой гарантии насчет ее диагонализуемости с помощью вещественного подобия. С другой стороны, согласно теореме 16.3.4, любая вещественная матрица преобразованием вещественного ортогонального подобия приводится к специальному блочно-треугольному виду. Это наводит на соображения, что можно в этом плане сделать, если матрица также нормальна. Наше рассуждение использует теорему 16.3.4 в том же духе, в каком теорема 16.3.1 используется при доказательстве теоремы 16.5.4. Следующая лемма избавляет нас от технических подробностей, которые не фигурируют в доказательстве теоремы 16.5.4.

16.5.7. Лемма. *Если матрица* $A \in M_n$ *эрмитова и* $x^*Ax \geqslant 0$ *для всех* $x \in \mathbf{C}^n$, *то все собственные значения матрицы A неотрицательны. Если к тому же* tr $A = 0$, *то* $A = 0$.

Доказательство. Согласно теореме 16.5.6, запишем $A = U\Lambda U^*$, где $U=[u_1\, u_2 \ldots u_n]\in M_n$ — унитарная матрица ,$\Lambda=\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ $\ldots, \lambda_n)$. Тогда $\Lambda = U^*AU$, так что $\lambda_k = u_k^*Au_k \geqslant 0$, согласно предположению, и, следовательно, для $\lambda_k \geqslant 0$ всех *k.* Наконец, $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} U\Lambda U^* = \operatorname{tr} \Lambda U^*U = \operatorname{tr} \Lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$. Поэтому если $\operatorname{tr} A = 0$ и $\lambda_k \geqslant 0$ для всех *k,* то $\lambda_k = 0$ для всех *k,* а значит, $\Lambda = 0$ и $A = U\Lambda U^* = U0U^* = 0$.

16.5.8. Теорема. *Пусть* $A \in M_n(\mathbf{R})$. *Тогда A нормальна в том и только в том случае, когда существует вещественная ортогональная матрица* $Q \in M_n(\mathbf{R})$, *такая, что*

$$Q^T A Q = \begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{bmatrix} \in M_n(\mathbf{R}), \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad (16.5.9)$$

где для всех j блок A_j *представляет собой вещественную* 1×1-*матрицу либо вещественную* 2 × 2-*матрицу вида*

$$A_j = \begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{bmatrix}. \qquad (16.5.10)$$

Доказательство. Прямое вычисление показывает, что всякая матрица вида (16.5.10) нормальна $(A_j A_j^T = \mathrm{diag}(\alpha_j^2 + \beta_j^2, \alpha_j^2 + \beta_j^2) = A_j^T A_j)$; поэтому любая прямая сумма вида (16.5.9) будет также нормальной. В силу теоремы 16.3.4 очевидно, что нам достаточно доказать нашу теорему для нормальной матрицы вида (16.3.5). Так как блоки на главной диагонали в матрице (16.3.5) можно располагать в любом заданном порядке, то мы будем считать, что матрица

$$A = \begin{bmatrix} R & A_{01} & A_{02} & \dots & A_{0k} \\ & A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1k} \\ & & A_{22} & \dots & A_{2k} \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & A_{kk} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbf{R}) \qquad (16.5.11)$$

нормальна, причем

$$R = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{bmatrix} \in M_n(\mathbf{R})$$

верхняя треугольная, $A_{01}, A_{02}, \dots, A_{0k} \in M_{p,2}(\mathbf{R})$ и $A_{ij} \in M_2(\mathbf{R})$, если $i, j = 1, 2, \dots, k$ и $j \geqslant i$. Мы покажем, что матрица R диагональна и $A_{ij} = 0$ для всех $j > i$.

Рассмотрим равенство $A^T A = A A^T$. Приравнивая первые

$p\times p$-блоки на главной диагонали, отвечающие блоку R в (16.5.11), получаем

$$R^TR = RR^T + A_{01}A_{01}^T + \dots + A_{0k}A_{0k}^T. \qquad (16.5.12)$$

Заметим, что любая матрица $B \in M_p(\mathbf{C})$, имеющая вид $B = EE^*$ для какой-либо матрицы $E \in M_{p,q}$, эрмитова, причем $x^*Bx = x^*EE^*x = (E^*x)^*(E^*x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathbf{C}^n$. Сумма таких матриц обладает тем же свойством. В силу общего принципа

$$\operatorname{tr} R^TR = \operatorname{tr} RR^T$$

и вследствие равенства (16.5.12)

$$\operatorname{tr} R^TR = \operatorname{tr} RR^T + \operatorname{tr} A_{01}A_{01}^T + \dots + \operatorname{tr} A_{0k}A_{0k}^T.$$

Поэтому

$$0 = \operatorname{tr} A_{01}A_{01}^T + \dots + \operatorname{tr} A_{0k}A_{0k}^T.$$

Согласно лемме 16.5.7 и сделанному выше замечанию по поводу свойств вещественной матрицы $B = A_{0j}A_{0j}^* = A_{0j}A_{0j}^T$, получаем, что $\operatorname{tr} A_{0j}A_{0j}^T \geqslant 0$. Поскольку их сумма равна нулю, каждый из ее членов тоже равен нулю и, следовательно, $A_{0j}A_{0j}^T = 0$ $(j = 1, \dots, k)$. В $A_{0j}A_{0j}^T$ i-й элемент на главной диагонали есть сумма квадратов (вещественных) элементов i-й строки матрицы A_{0j}, поэтому все эти элементы должны быть нулями, т. е. $A_{0j} = 0$ для всех $j = 1, \dots, k$ и (16.5.12) принимает вид

$$R^TR = RR^T.$$

В то же время мы знаем из доказательства теоремы 16.5.4, что треугольная нормальная матрица не может быть ничем иным, кроме диагональной матрицы. Поэтому

$$R = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p),$$

как и утверждалось.

Теперь в равенстве $A^TA = AA^T$ приравняем 2×2-блоки главной диагонали, отвечающие блоку A_{11} в (16.5.11). С учетом того факта, что $A_{0j} = 0$ для $j = 1, 2, \dots, k$, получаем

$$A_{11}^TA_{11} = A_{11}A_{11}^T + A_{12}A_{12}^T + \dots + A_{1k}A_{1k}^T. \qquad (16.5.13)$$

Имеем $\operatorname{tr}(A_{11}^TA_{11}) = \operatorname{tr}(A_{11}A_{11}^T)$ и вследствие этого

$$\operatorname{tr}(A_{12}A_{12}^T) + \dots + \operatorname{tr}(A_{1k}A_{1k}^T) = 0.$$

Так как $\operatorname{tr}(A_{1j}A_{1j}^T) \geqslant 0$, то $\operatorname{tr}(A_{1j}A_{1j}^T) = 0$, а значит $A_{1j}A_{1j}^T = 0$ и $A_{1j} = 0$, $j = 2, 3, \dots, k$ (здесь, как и раньше, используется лемма 16.5.7). Таким образом, (16.5.13) принимает вид $A_{11}^T A_{11} = A_{11}A_{11}^T$, т. е. 2 ×2-блок A_{11} нормален.

Последовательно просматриваем 2 × 2-блоки на главной диагонали в $AA^T = A^TA$, отвечающие блоку A_{ii} в (16.5.11) $(i = 2, 3, \ldots, k-1)$. Проводя те же рассуждения, приходим к выводу, что, как и утверждалось, все впедиагональные блоки нулевые и все блоки A_{ii}, расположенные на главной диагонали, нормальные.

Мы показали, что любое вещественное преобразование ортогонального подобия, приводящее вещественную нормальную матрицу к виду (16.3.5), приводит ее в действительности к блочно-диагоналыюму виду (16.5.9). Остается установить, что все блоки на диагонали имеют вид (16.5.10).

Если матрица $A_{jj} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_n(\mathbf{R})$ нормальна, то, приравнивая в $A_{jj}^T A_{jj} = A_{jj} A_{jj}^T$ элементы в позициях (1.1) и (1.2), получаем

$$b^2 = c^2, \quad \text{откуда} \quad c = \pm b,$$

и

$$ac + bd = ab + cd, \quad \text{откуда} \quad 2b(a-d) = 0, \quad \text{если} \quad c = -b.$$

Случаи $c = +b$ и $b = 0$ можно исключить, так как матрица A_{jj} при этом будет вещественной симметричной и все ее собственные значения будут вещественные. По нашему построению блоки A_{jj} имеют сопряженные пары невещественных собственных значений. Таким образом, $c = -b$, $a = d$ и A_{ij} имеет вид (16.5.10). Как показывает вычисление, вещественная матрица $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ имеет пару комплексно-сопряженных собственных значений $\lambda = a + ib$ и $\bar{\lambda} = a - ib$.

Как следствие этой теоремы для вещественных нормальных матриц легко получаются вещественные канонические формы для вещественных матриц специального типа: симметричных, кососпмметричных или ортогональных.

16.5.14. Следствие. *Пусть* $A \in M_n(\mathbf{R})$. *Тогда*

(а) $A=A^T$ *в том и только в том случае, когда для некоторой вещественной ортогональной матрицы* $Q \in M_n(\mathbf{R})$ *имеем*

$$Q^TAQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \text{где } \lambda_i \in \mathbf{R} \text{ для всех } i;$$

(b) $A = -A^T$ *в том и только в том случае, когда для некоторой вещественной ортогональной матрицы* $Q \in M_n(\mathbf{R})$ *имеем*

$$Q^TAQ = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & A_1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & & A_k \end{bmatrix},$$

где $A_j \in M_2(\mathbf{R})$ *для всех j и при этом*

$$A_j = \begin{bmatrix} 0 & \beta_j \\ -\beta_j & 0 \end{bmatrix};$$

(c) $AA^T = I$ *в том и только в том случае, когда для некоторой вещественной ортогональной матрицы* $Q \in M_n(\mathbf{R})$ *имеем*

$$Q^TAQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_p & & & & \\ & & & A_1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & & A_k \end{bmatrix},$$

где $\lambda_j = \pm 1$ $(j = 1, \ldots, p)$, $A_j \in M_2(\mathbf{R})$ $(j = 1, \ldots, k)$ *и при этом*

$$A_j = \begin{bmatrix} \cos\theta_j & \sin\theta_j \\ -\sin\theta_j & \cos\theta_j \end{bmatrix}, \quad \theta_j \in \mathbf{R}.$$

Доказательство. В любом случае исходное предположение обеспечивает нормальность вещественной матрицы A. Поэтому A можно записать в виде (16.5.9), (16.5.10). Если $A = A^T$, то $A_j = — A^T{}_j$ для всех j; поэтому $\beta_j = 0$ и матрица Q^TAQ оказывается диагональной. Если $A = -A^T$, то $\lambda_j = -\lambda_j$ и $A_j = -A_j^T$; поэтому $\lambda_j = 0$ и $\alpha_j = 0$ для всех j. Если $AA^T = I$, то $\lambda_j\lambda_j = 1$ и $A_j\ \ A^T{}_j = I$; поэтому $\lambda_j^2 = 1$ и $\alpha_j^2 + \beta_j^2 = 1$ для всех j; в этом случае получаем $\lambda_j = \pm 1$ и $\alpha_j = \cos\theta_j$, $\beta_j = \sin\theta_j$.

Если имеется какое-либо коммутативное семейство вещественных и нормальных матриц, то для них одновременная вещественная диагонализуемость может и не иметь места; однако все эти матрицы можно одновременно привести к блочно-диагональной форме (16.5.9).

16.5.15. Теорема. *Для любого коммутативного семейства* $\mathcal{N} \subseteq M_n(\mathbf{R})$ *вещественных нормальных матриц существует вещественная ортогональная матрица Q, такая, что* Q^TAQ *имеет вид* (16.5.9), (16.5.10) *для всех* $A \in \mathcal{N}$.

Доказательство. Согласно теореме 16.3.6, все матрицы из $\mathcal{N}$ одновременно приводятся к виду (16.3.5) с помощью одной и той же вещественной ортогональной матрицы *Q*. Рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 16.5.8, показывают, что все матрицы вида (16.3.5) должны иметь вид (16.5.9).

16.6. *QR*-разложение и *QR*-алгоритм

QR-алгоритм—это особый способ реализации теоремы Шура 16.3.1 об унитарной триангуляризации заданной матрицы $A \in M_n$ и популярный численный метод вычисления собственных значений (при некоторых предположениях). Его основу составляет так называемое *QR* -разложение произвольной матрицы $A \in M_{n,\, m}$.

16.6.1. Теорема (о *QR* -разложеиии). *Если* $A \in M_{n,\, m}$ *и* $n \geqslant m$, *то существуют матрица* $Q \in M_{n,\, m}$ *с ортонормированными столбцами и верхняя треугольная матрица* $R \in M_m$, *такие, что* $A = QR$. *Если* $m = n$, *то Q унитарна; если к тому же A невырожденна, то R можно выбрать таким образом, что все ее диагональные элементы будут положительны, и в этом случае Q и R определяются однозначно. Если* $A \in M_{n,\, m}(\mathbf{R})$, *то Q и R можно выбрать вещественными.*

Доказательство. Если $A \in M_{n,\, m}$ и $\operatorname{rank} A = m$, то *QR-разло*жение матрицы *A* есть не что иное, как матричная запись результата применения процесса 14.6.4 Грама — Шмидта к столбцам матрицы *A,* образующим в $\mathbf{C}^n$ линейно независимое множество. Естественное обобщение алгоритма Грама — Шмидта позволяет таким же способом записать его применение в общем случае, когда столбцы матрицы *A* могут быть зависимы. Пусть $A = [a_1 \ \dots \ a_m]$ имеет столбцы $a_i \in \mathbf{C}^n$. Если $a_1 = 0$, то положим $q_1=0$, в противном случае $q_1 = a_1/(a_1^*a_1)^{1/2}$. Для каждого $k = 2, 3, \dots, m$ вычислим

$$y_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} (q_i^* a_k)\, q_i$$

точно так же, как в обычном процессе Грама — Шмидта. Если $y_k = 0$ (а это может произойти в том и только в том случае, когда a_k есть линейная комбинация векторов $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$), то положим q_k=0, в противном случае $q_k = y_k/(y_k^* y_k)^{1/2}$. Векторы $q_1, \ldots, q_m$, таким образом, составляют ортогональное множество, каждый элемент которого является единичным (т.е. нормированным) или нулевым вектором. Каждый вектор q_i -— это линейная комбинация векторов $a_1, \ldots, a_j$, и, обратно, согласно построению, каждый столбец a_j, — это линейная комбинация векторов $q_1, \ldots, q_j$. Следовательно, найдутся числа r_{kj}, такие, что

$$a_j = \sum_{k=1}^{j} r_{kj} q_k, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{16.6.2}$$

При $k > j$ положим $r_{kj} = 0$, и пусть $r_{jj} = 0$, если $q_j = 0$ ($j = 1, \ldots, m$). Таким образом, исходя из $a_1, a_2, \ldots, a_m$, с помощью описанной процедуры мы определим верхнюю треугольную матрицу $R = [r_{ij}] \in M_n$ и векторы $q_1, q_2, \ldots, q_m$. Матрица $Q \equiv [q_1 \ \ldots \ q_m] \in M_{n,m}$ имеет ортогональные столбцы (некоторые из них могут равняться нулю), и в силу (16.6.2) A=R.

Если rank $A = m$, то Q имеет ортонормированные столбцы, и мы получаем разложение с нужными свойствами. В частности, если $m = n$ и матрица A невырожденна, то Q должна быть унитарной в силу утверждения (е) теоремы 16.1.4, и все диагональные элементы невырожденной матрицы $R = Q^* A$ отличны от нуля. В этом случае вследствие того, что матрица R верхняя треугольная, вектор q_1 есть кратное вектора a_1 и при i = 2,3, ..., m вектор q_i лежит в одномерном пространстве, которое является ортогональным дополнением линейной оболочки векторов $a_1, \ldots, a_{i-1}$ в линейной оболочке векторов $a_1, \ldots, a_i$. Следовательно, каждый вектор q_i определяется однозначно с точностью до скалярного множителя, по модулю равного 1. Поэтому, заменяя R на $R' = \operatorname{diag}(|r_{11}|/r_{11}, \ldots, |r_{mm}|/r_{mm}) R$ и Q на $Q' \equiv Q \operatorname{diag}(r_{11}/|r_{11}|, \ldots, r_{mm}/|r_{mm}|)$, получаем то единственное разложение $A = Q'R'$, о котором говорится в утверждении теоремы. Если столбцы в A зависимы, то возьмем (ортонормированное) множество ненулевых столбцов в Q и дополним его до ортонормированного базиса в $\mathbf{C}^n$; новые векторы, полученные этим способом, обозначим через $z_1, z_2, \ldots, z_p$. Теперь заменим первый нулевой столбец в Q на z_1 второй — на z_2 и т. д. до тех пор, пока не будут заменены все нулевые столбцы. Полученную в результате матрицу обозначим через Q'. Она имеет ортонормированные столбцы, и $QR = Q'R$, потому что новые столбцы в Q' соответствуют нулевым строкам в R. Итак, $A = Q'R$ — разложение нужного вида.

Если A — вещественная матрица, то все необходимые операции можно выполнить в вещественной арифметике, и тогда Q и R получаются вещественными. D

Упражнение. Доказать, что если $A \in M_{n,m}$ и $n \leqslant m$, то для A существует разложение $A = LP$, где матрица $L \in M_n$ нижняя треугольная и матрица $P \in M_{n,m}$ имеет ортогональные строки, и по отношению к этому разложению справедливы утверждения, аналогичные остальным утверждениям из формулировки теоремы 16.6.1.

Упражнение. Доказать, что любая матрица $B \in M_n$ вида $B = A^*A$ $(A \in M_n)$ представима также в виде $B = LL^*$, где матрица $L \in M_n$ нижняя треугольная с неотрицательными диагональными элементами. Доказать, что если A невырожденна, то это разложение единственно. Оно называется *разложением Холецкого* для B и имеет место для любой положительно определенной матрицы. *Указание.* Записать $A = QR$.

QR-разложение имеет исключительно важное значение для вычислительной практики (см. разд. 16.6.3), но оно также весьма интересно и как теоретический инструмент. Например, для заданной матрицы $A \in M_n$ ее приводимость к верхней треугольной форме посредством унитарного подобия следует непосредственно из ее приводимости к такой форме посредством обычного подобия. Пусть $S^{-1}AS = T$ — верхняя треугольная матрица и $S=QR$ — разложение, описанное теоремой 16.6.1. Тогда $R^{-1}Q^*AQR = T$ и матрица $Q^*AQ = RTR^{-1}$ верхняя треугольная, так как она есть произведение верхних треугольных матриц. Таким же способом можно установить, что теоремы (типа 16.4.15) об одновременной триангуляризации в действительности являются также теоремами об одновременной унитарной триангуляризации. Другими словами, если заданное семейство матриц из M_n одновременно триангуляризуемо каким-либо преобразованием подобия, то оно также одновременно триангуляризуемо каким-то преобразованием унитарной эквивалентности.

Теперь мы сформулируем QR-алгоритм вычисления собственных значений и вкратце расскажем о некоторых его свойствах (без доказательства).

16.6.3. QR-алгоритм. Пусть задана матрица $A_0 \in M_n$. В соответствии с теоремой 16.6.1 запишем $A_0 = Q_0 R_0$ и образуем матрицу $A_1 = R_0 Q_0$. Снова запишем $A_1 = Q_1 R_1$, где Q_1 — унитарная, а R_1 — верхняя треугольная матрицы, и продолжим по аналогии. Итак, на каждом шаге выполняется QR–разложение $A_k = Q_k R_k$ и вычисляется матрица $A_{k+1} = R_k Q_k$.

Упражнение. Доказать, что все матрицы A_k, полученные с помощью QR -алгоритма, унитарно эквивалентны A_0 (k = 1,2, ...).

При определенных условиях (например, если все собственные значения матрицы A_0 различаются по модулю) QR-алгоритм вырабатывает последовательность матриц A_k, при $k \to \infty$ сходящуюся к верхней треугольной матрице. Поскольку эта верхняя треугольная матрица унитарно эквивалентна A_0, то мы получаем в то же время собственные значения матрицы A_0.

Если матрица A_0 вещественна, то QR-алгоритм можно реализовать в вещественной арифметике. Однако, если A_0 имеет невещественные собственные значения, то нет никакой надежды на то, что QR-итерации сойдутся к какой-либо верхней треугольной матрице, так как в пределе должна получиться вещественная матрица. При определенных условиях, тем не менее, итерации A_k могут быть осуществлены таким образом, что будет обеспечена их сходимость к вещественной верхней блочно-треугольной матрице, имеющей на главной диагонали блоки размеров 1×1 и 2×2. Для этого достаточно, чтобы все собственные значения различались по модулю, за исключением невещественных комплексно-сопряженных пар собственных значений, имеющих одинаковые модули. Поскольку собственные значения блочно-треугольной матрицы — это совокупность собственных значений блоков на диагонали, собственные значения матрицы A_0 — это элементы блоков размера 1 × 1 (на диагонали в предельной блочно-треугольной матрице) вместе с собственными значениями блоков размера 2×2. Последние можно вычислить, используя вещественную арифметику и формулу для корней квадратного уравнения.

16.6.4. Пример. Покажем, что QR-алгорптм не всегда сходится к треугольной матрице. Возьмем

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда $\sigma(A) = \{\pm 1\}$ и собственные значения не различаются по модулю. Полагаем $A_0 = A$ и, следуя QR-алгоритму, строим одну из возможных последовательностей

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A_0.$$

Возможна и другая реализация:

$$A_0 = A_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A_0.$$

В обоих случаях происходит циклическое повторение и последовательность $\{A_k\}$ не сходится к верхней треугольной матрице. Однако можно так выбрать последовательность $\{A_k\}$, чтобы она сходилась к верхней блочно-треугольной матрице.

Микромодуль 49

Индивидуальные тестовые задания

Задачи к п. 16.5.

Можно составить намного более длинный, чем в теореме 16.5.4, список условий на матрицу $A \in M_n$, эквивалентных ее нормальности. Некоторые из таких условий включены в задачи.

1. Доказать, что матрица $A \in M_n$ нормальна в том и только в том случае, когда векторы Ax и A^*x имеют одинаковую евклидову длину для любого $x \in \mathbf{C}^n$. Напомним, что для $y \in \mathbf{C}^n$ евклидова длина есть $(y^*y)^{1/2}$.
2. Доказать, что нормальная матрица является унитарной в том и только в том случае, когда все ее собственные значения по модулю равны 1.
3. Доказать, что нормальная матрица является эрмитовой в том и только в том случае, когда все ее собственные значения вещественны.
4. Доказать, что нормальная матрица является косоэрмитовой в том и только в том случае, когда все ее собственные значения чисто мнимы.
5. Показать, что если матрица $A \in M_n$ косоэрмитова (эрмитова), то матрица iA эрмитова (косоэрмитова).

6. Доказать, что матрица $A \in M_n$ является нормальной в том и только в том случае, когда она коммутирует с какой-либо нормальной матрицей с различными собственными значениями.

7. Рассмотрим матрицы $A \in M_n$, представимые в виде $A=B^{-1}B^*$ для каких-то невырожденных матриц $B \in M_n$ (см. теорему 16.1.9).

(a) Доказать, что унитарность A равносильна нормальности B.

(b) Доказать, что если B имеет вид $B=HNH$, где N и H соответственно нормальная и эрмитова матрицы (обе невырожденные), то A подобна унитарной матрице.

8. Для $A \in M_n$ определим *эрмитову часть* $H(A) = (A + A^*)/2$ и *косоэрмитову часть* $S(A) = (A - A^*)/2$. Тогда $A=H(A)+S(A)$. Доказать, что A нормальна в том и только в том случае, когда $H(A)$ и $S(A)$ коммутируют между собой.

9. Доказать, что если две нормальные матрицы коммутируют, то их произведение нормально. Показать на примере, что произведение двух нормальных матриц может быть нормальным и без условия коммутативности сомножителей.

10. В обозначениях задачи 8 доказать, что A будет нормальной, если любой собственный вектор для $И(A)$ будет также собственным вектором для $S(A)$ (соответственно для A).

11. Показать, что для любого комплексного числа $z \in \mathbf{C}$ можно найти число $\theta \in \mathbf{R}$, такое, что $\bar{z} = e^{i\theta}z$. При этом матрица $[e^{i\theta}] \in M_1$ унитарна. Как выглядят диагональные унитарные матрицы $U \in M_n$?

12. Обобщить задачу 11 и показать, что для всякой диагональной матрицы $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in M_n$ можно найти диагональную унитарную матрицу U, такую, что $\bar{\Lambda} = U\Lambda = \Lambda U$.

13. Используя задачу 12, доказать, что матрица $A \in M_n$ нормальна в том и только в том случае, когда $A^* = AV$ для некоторой унитарной матрицы $V \in M_n$. Как это связано с задачей 7?

14. Доказать, что если все собственные значения матрицы $A \in M_n(\mathbf{R})$ вещественны, то нормальность A эквивалентна ее симметричности.

15. Доказать, что две нормальные матрицы одного порядка подобны (на самом деле унитарно эквивалентны) в том и только в том случае, когда они имеют одинаковые характеристические многочлены. Верно ли это для матриц, не являющихся нормальными? *Указание.* Рассмотреть $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

16. Показать, что произведение AB нормальных матриц $A,B \in M_n$ может не быть нормальным и потому невырожденные нормальные матрицы одного порядка не образуют группу по умножению. Однако унитарные нормальные матрицы образуют группу. Будет ли мультипликативной группой множество невырожденных эрмитовых матриц?
17. Пусть матрица $A \in M_n$ нормальна и $p(t)$ — заданный многочлен. Используя определение 16.5.1, доказать нормальность матрицы $p(A)$. Придумать также другое доказательство, использующее теорему 16.5.4.
18. Пусть матрица $A \in M_n$ такова, что для какого-то ненулевого многочлена $p(t)$ матрица $p(A)$ оказалась нормальной. Будет ли A нормальной? *Указание.* Рассмотреть $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ и A^2.
19. Пусть заданы $A \in M_n$ и $a \in \mathbf{C}$. Доказать, что A нормальна в том и только в том случае, когда $A + aI$ нормальна.
20. Пусть матрица $A \in M_n$ нормальна и вектор $x \in \mathbf{C}^n$ удовлетворяет соотношению $Ax = \lambda x$. Используя задачи 1 и 19, показать, что $A^*x = \bar{\lambda} x$. *Указание.* Установить, что если евклидова длина вектора $(A - \lambda I)x$ равна нулю, то и евклидова длина вектора $(A - \lambda I)^*x$ равна нулю.
21. Используя теорему 16.5.4, доказать, что если матрица $A \in M_n$ нормальна и $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$ при $\lambda \neq \mu$, то x и y ортогональны. *Указание.* Записать $A = U\Lambda U^*$, где $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ и $U \in M_n$ — унитарная матрица. Пусть $U^*x = x' = [x'_i]$ и $U^*y = y' = [y'_i]$. Показать, что $\Lambda x' = \lambda x'$, и отсюда вывести, что $x'_i = 0$ для любого индекса i, такого, что $\lambda_i \neq \lambda$; то же проделать с y'. Установить ортогональность x' и y' и отсюда вывести ортогональность x и y.
22. Используя теорему 16.5.6, доказать, что характеристический многочлен эрмитовой матрицы имеет вещественные коэффициенты, даже если не все элементы в A вещественные.
23. Показать, что комплексные матрицы $\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} i & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$ симметричны $(A = A^T)$ и при этом одна из них нормальна, а другая— нет. Таким образом, имеется существенное различие между вещественными симметричными и комплексными симметричными матрицами.
24. Показать, что если матрица $A \in M_n$ одновременно нормальна и нильпотентна, то $A = 0$.

25. Пусть задана матрица $A \in M_n$. Доказать, что, для того чтобы A была нормальной, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого многочлена $p(t)$ степени не выше $n—1$ выполнялось равенство $A^* = p(A)$. *Указание.* Используя интерполяцию Лагранжа, построить для $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ такой многочлен $p(t)$, для которого $p(\Lambda) = \bar{\Lambda}$. Затем обратиться к теореме 16.5.4.
Как это «объясняет», почему нормальная матрица коммутирует со своей сопряженной? Показать дополнительно, что если A вещественна, то интерполяционный многочлен Лагранжа $p(\cdot)$, обеспечивающий равенство $A^* = p(A)$, имеет вещественные коэффициенты. Таким образом, $A^T = p(A)$: для вещественной нормальной матрицы A имеем $A^T = p(A)$ для некоторого вещественного многочлена $p(\cdot)$. См. формулу (14.9.11.4).
26. Привести пример вещественной нормальной матрицы, которая унитарно подобна диагональной матрице и не приводится к диагональному виду никаким вещественным ортогональным подобием. Показать, что вещественная матрица A вещественно ортогонально подобна диагональной матрице в том и только в том случае, когда A симметрична $(A = A^T)$.
27. Доказать, что заданная матрица $A \in M_n$ нормальна в том н только в том случае, когда

$$(Ax)^* (Ay) = (A^*x)^* (A^*y)$$

для всех $x, y \in \mathbf{C}^n$. Геометрически это означает, что угол между векторами Ax и Ay тот же самый, что и между векторами A^*x и A^*y для всех $x, y \in \mathbf{C}^n$. Как это связано с задачей 1?
28. Доказать, что если матрица $A \in M_n$ нормальна, то равенство $Ax=0$ равносильно $A^*x=0$. Это означает, что нуль-пространства матриц A и A^* совпадают. Рассмотреть $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ и показать, что это неверно в общем случае.
29. Рассмотрим систему линейных уравнений $Ax = y$, где $y \in \mathbf{C}^n$ и $A \in M_n$ заданы, и предположим, что A вырожденна.
Заданная система имеет (неединственное) решение в том и только в том случае, когда $y^*z = 0$ для всех $z \in \mathbf{C}^n$, таких, что $A^*z = 0$ (см. разд. 14.6.6). Показать, что если A нормальна, то заданная система имеет решение в том и только в том случае, когда $y^*w = 0$ для всех $w \in \mathbf{C}^n$, таких, что $Aw = 0$, т. е. когда вектор y ортогонален нуль-пространству матрицы A. Если нужно найти все решения вырожденной системы $Ax=y$, то более экономичные вычисления будут отвечать именно случаю нормальной матрицы A. Объяснить, почему!

30. Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_k$ — заданные целые положительные числа, и пусть $A_j \in M_{n_j}$ $(j = 1, \ldots, k)$. Доказать, что прямая сумма $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$ нормальна в том и только в том случае, когда A_j нормальна для всех j.
31. Доказать, что две нормальные матрицы подобны тогда и только тогда, когда они унитарно эквивалентны. *Указание.* Установить, что $U\Lambda U^*$ и $V\Lambda V^*$ унитарно эквивалентны, если U и V унитарные. Привести пример двух (не являющихся нормальными) матриц, которые подобны, но не являются унитарно эквивалентными.
32. Заметим, что вещественная ортогональная матрица $A \in M_3(\mathbf{R})$ имеет одно или три вещественных собственных значения. Используя теорему 16.5.14, показать, что если определитель матрицы A положителен, то она ортогонально эквивалентна прямой сумме матрицы $[1] \in M_1$ и какого-то плоского вращения. Это преобразование геометрически интерпретируется как вращение на угол θ вокруг некоторой неподвижной оси, проходящей в $\mathbf{R}^3$ через начало координат. Продумать эту интерпретацию. Она представляет собой часть теоремы Эйлера из механики: любое движение твердого тела есть композиция параллельного переноса и вращения вокруг какой-то оси.
33. Доказать, что если коммутативное семейство состоит из нормальных матриц, то существует эрмитова матрица *B,* такая, что каждая матрица $A_\alpha \in \mathcal{F}$ имеет вид $A_\alpha = p_\alpha(B)$ для какого-то многочлена $p_\alpha(t)$ степени не выше n—1. Обратить внимание на то, что B фиксирована для всего $\mathcal{F}$, но многочлены могут зависеть от элементов семейства $\mathcal{F}$. *Указание.* Пусть унитарная матрица $U \in M_n$ одновременно диагонализует любой член семейства $\mathcal{F}$. Положить $B = U \operatorname{diag}(1, 2, \ldots, n) U^*$,
$A_\alpha = U\Lambda_\alpha U^*$, где $\Lambda_\alpha = \operatorname{diag}\left(\lambda_1^{(\alpha)}, \ldots, \lambda_n^{(\alpha)}\right)$, и взять в качестве $p_\alpha(t)$ интерполяционный многочлен Лагранжа, обеспечивающий равенства $p_\alpha(k) = \lambda_k^{(\alpha)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.
34. Доказать, что матрица $A \in M_n$ нормальна в том и только в том случае, когда всякий собственный вектор для A является также собственным вектором для A^*. *Указание.* Пусть $U \in M_n$ — унитарная матрица с первым столбцом, совпадающим с собственным вектором для A (и, следовательно, для A^*). Рассмотреть вместе U^*AU и $U^*A^*U = (U^*AU)^*$ и продолжить доказательство.
35. Проверить следующее усиление теоремы 16.2.8 для случая нормальных матриц $A, B \in M_n$: матрица A унитарно эквивалентна B

тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} A^k = \operatorname{tr} B^k$ для k = 1, 2, ..., n. *Указание.* Использовать задачу 15 и задачу 12 из 15.2.

36. Пусть $A \in M_n(\mathbf{R})$, и предположим, что $AA^T = A^TA$, т. е. A — вещественная нормальная матрица. Доказать, что если все собственные значения для AA^T различны, то A симметрична. *Указание.* Использовать теорему 16.5.8.

Задачи к п. 16.6.

1.Пусть в $\mathbf{C}^n$ заданы векторыи $x_1, \ldots, x_m X \equiv [x_1 x_2 \ldots x_m] \in$ $\in M_{n,m}$. Предположим, что процесс Грама — Шмидта (см. разд. 14.6.4) применяется к векторам $x_1, \ldots, x_m$ и производит ортонормированную систему $z_1, \ldots, z_m$.Пусть $Z \equiv [z_1 \ldots z_m] \in$ $\in M_{n,m}$.

(a) При k=1,...,m положим $Z_k \equiv [z_1 z_2 \ldots z_k x_{k+1} x_{k+2} \ldots x_m]$, где z_k — единичный вектор, полученный на k–м шаге процесса ортогонализации Грама — Шмидта. При этом $Z_m = Z$. Доказать, что $Z_1 = X\Delta_1$, $Z_2 = Z_1\Delta_2, \ldots, Z_m = Z_{m-1}\Delta_m$, где$\Delta_i$ — невырожденная верхняя треугольная матрица, отличающаяся от I лишь i-м столбцом.

(b) Положим $T_k \equiv \Delta_1\Delta_2 \ldots \Delta_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Показать, что T_k — верхняя треугольная матрица и $Z_k = XT_k$ $(k =$ $= 1, 2, \ldots, m)$. Пусть $T \equiv T_m$, так что $Z = XT$.

(c) Какова связь между этой матрицей T и верхней треугольной матрицей R из доказательства теоремы 16.6.1?

(d) Показать, что первые k столбцов в Z_j и T_j не изменяются при $j = k+1, k+2, \ldots, m$, так что k-й шаг процесса Грама—Шмидта вырабатывает k-е столбцы в окончательных матрицах Z и T.

2. Пусть в $\mathbf{C}^n$ заданы линейно независимые векторы $x_1, \ldots, x_m$ и $X \equiv [x_1 \ldots x_m] \in M_{n,m}$. Рассмотрим следующий алгоритм.

I. Положим $Z \equiv X$, и пусть $Z = [z_1 \ldots z_m]$, т. е. в начале $z_i = x_i \quad (i = 1, \ldots, m)$.

II. Для k = 1, 2, ..., m выполняем следующее:

(i) сначала заменяем столбец z_k на $z_k/\langle z_k, z_k\rangle^{1/2}$; затем

(ii) для $j = k+1, k+2, \ldots, m$ заменяем каждый столбец z_j на $z_j - \langle z_j, z_k\rangle z_k$.

Здесь $\langle x, y\rangle \equiv y^* x$ — обычное скалярное произведение в $\mathbf{C}^n$.

(a) Доказать, что в итоге этого процесса будет получена матрица Z с ортонормированными столбцами, и это та же самая матрица Z, которая строится с помощью процесса Грама — Шмидта в задаче 1.

(b) Пусть Z_k обозначает содержимое матрицы Z после выполнения *k*-го шага алгоритма $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Показать, что $Z_1 = X\Delta_1, Z_2 = Z_1\Delta_2, \ldots, Z_m = Z_{m-1}\Delta_m$, где каждая матрица Δ_i невырожденная верхняя треугольная, отличающаяся от *I* только *i*-й строкой.

(c) Пусть $T_k = \Delta_1\Delta_2 \ldots \Delta_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Показать, что T_k — верхняя треугольная матрица и $Z_k = XT_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Проверить, что первые *k* столбцов в каждой T_k такие же, как и в матрице T_k из задачи 1, хотя соответствующие матрицы Δ_k и Z_k могут различаться. Положим $T = T_m$.

(d) Доказать, что первые *k* столбцов в Z_j и T_j не изменяются при $j = k + 1, k + 2, \ldots, m$, так что на *k*-м шаге алгоритма вырабатываются *k*-е столбцы в окончательных матрицах Z и *T*. Этот алгоритм известен как *модифицированный процесс Грама—Шмидта.* Он приводит к тому же самому результату, что и обычный процесс Грама — Шмидта — различие лишь в порядке вычислений. Несмотря на то что модифицированный и обычный процессы Грама — Шмидта математически эквивалентны, первый имеет преимущество с точки зрения численной реализации, потому что требует меньше памяти и в трудных ситуациях, когда столбцы в *X* почти параллельны, здесь вырабатывается Z со столбцами, более близкими к ортогональным, чем в Z, полученной в обычном процессе Грама — Шмидта. Чтобы еще улучшить характеристики процесса в сложных ситуациях, можно ввести стратегию выбора ведущего столбца: прежде чем выполнять предписание II (i), выберем в качестве z_k из оставшихся столбец z_j $(j \geqslant k)$ с наибольшим квадратом длины $z_j^* z_j$. При численной реализации на самом деле Δ_i^{-1} находятся на каждом шаге (не требуется выполнять обращения) и накапливаются произведения этих матриц, с тем чтобы вычислить треугольный сомножитель в *QR*-разложении матрицы *X*.

3. Получить *QR*-разложение с помощью последовательности умножений на преобразования Хаусхолдера. Показать, что потребуется *n*—1 преобразований Хаусхолдера и *Q* будет их произведением. Известно, что этот метод с вычислительной точки зрения предпочтительнее по сравнению с процессом Грама — Шмидта, использованным в доказательстве теоремы 16.6.1.

4. Пусть *QR*-алгоритм для $A_0 \in M_m$ сходится к верхней треугольной матрице. Как вычислить собственные векторы для A_0? *Указание.*

Нужно решить (вырожденную) треугольную систему с нулевой правой частью.

5. Пусть QR -алгоритм применяется к заданной матрице $A \in M_n$ и последовательность QR -итераций $\{A_k\}$ сходится:

$$\lim_{k\to\infty} A_k = B.$$

Используя принцип выбора 16.1.8, объяснить почему B унитарно эквивалентна A. Почему это важно?

Модуль 17
Канонические формы

Микромодуль 50
Жордановы канонические формы

Когда две заданные матрицы подобны? Мы знаем, что у подобных матриц одинаковы следы, определители, характеристические многочлены и собственные значения. Однако есть матрицы, например,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{17.0.1}$$

которые имеют один и тот же след, определитель и т. д., не будучи подобными. Если бы A и B были подобны, то для какой-то невырожденной матрицы $S \in M_2$ выполнялось бы равенство $A = SBS^{-1} = SOS^{-1} = 0$, а этого не может быть, так как $A \neq 0$.

Упражнение. Вычислить след, определитель, характеристический многочлен и собственные значения двух матриц (17.0.1). Показать, что $A^2 = 0$.

Две матрицы, внешне ничем не похожие, могут, тем не менее, быть подобными. Поэтому, чтобы определить, подобны ли две заданные матрицы, можно пойти по такому пути: описать какое-то множество матриц «простой» формы и затем для заданных матриц смотреть, приводятся ли они преобразованием подобия к одной и той же «простой» форме. Если они приводятся, то они подобны (вследствие симметричности и транзитивности отношения подобия). Какие же «простые» формы отвечали бы этой цели?

Произвольная комплексная матрица A (унитарно) подобна некоторой верхней треугольной матрице, в которой диагональные элементы (собственные значения для A) можно расположить в любом заданном порядке (см. теорему 16.3.1). Поэтому две матрицы подобны, если они подобны одной и той же верхней треугольной матрице. Однако две верхние треугольные матрицы с одной и той же главной диагональю и разными внедиагональными элементами, тем не менее, могут быть подобными. Таким образом, если какие-то две матрицы нам удалось привести к двум не равным верхним треугольным матрицам с одной и той же главной диагональю, то мы не можем утверждать, что матрицы не подобны. Неопределенность здесь слишком велика; любая верхняя треугольная матрица имеет $n(n+1)/2$ ненулевых элементов (точнее, элементов, которые могут быть отличны от нуля), и это слишком много для того, чтобы по ним легко распознавалось подобие. Все дело в неединственности треугольной формы.

Для наших целей класс верхних треугольных матриц оказывается слишком широким. А что если обратиться к классу диагональных матриц? Если каждая из двух заданных матриц подобна какой-либо диагональной матрице, то подобие исходных матриц имеет место в том и только в том случае, когда эти диагональные матрицы имеют одни и те же диагональные элементы с учетом кратностей, но без учета их упорядочения. Причина состоит в том, что подобие вида PDP^T, где P — матрица перестановки, позволяет расставить в любом заданном порядке диагональные элементы любой диагональной матрицы D. Теперь снимается проблема неоднозначности, возникавшая для верхних треугольных матриц, но вместе с тем возникает проблема существования: не всякая комплексная матрица подобна какой-либо диагональной матрице.

Упражнение. Показать, что матрица A из (17.0.1) недиагонализуема. *Указание.* Если $A = S\Lambda S^{-1}$, то $A = B$.

Если наш поиск будет ограничен верхними треугольными матрицами, которые близки к диагональным настолько, насколько это возможно, и которые при этом можно получить с помощью преобразования подобия из любой матрицы, то в результате мы придем к жордановой канонической форме, которая изучается в следующем параграфе.

До сих пор мы говорили о подобии двух заданных матриц $A, B \in M_n$. Однако в теории матриц представляют интерес и некоторые другие отношения эквивалентности. Например, можно интересоваться, преобразуется ли A в B с помощью *унитарного* подобия или, скажем, только с помощью элементарных преобразований строк и столбцов. Для вещественных A и B можно попытаться узнать, будут ли они вещественно подобны. Если матрицы A и B эрмитовы, то можно спросить, существует ли невырожденная матрица $S \in M_n$, такая, что $A = SBS^*$. Если матрицы A и B симметричны, то можно поставить вопрос, существует ли невырожденная матрица $S \in M_n$, такая, что $A = SBS^T$.

В каждой из этих ситуаций мы имеем какое-то отношение эквивалентности на множестве матриц и ставим вопрос, будут ли две заданные матрицы находиться в одном классе эквивалентности. Один из подходов к решению этой проблемы заключается в выделении «простого» набора матриц-представителей определенного типа по одной из каждого класса эквивалентности и в попытке преобразовать любую заданную матрицу к одной из этих выделенных. Для того чтобы этот подход оказался успешным, нужно в каждом классе эквивалентности иметь представитель выделенного типа (это не так, если рассматривать диагональные матрицы и отношение подобия) и весьма желательно иметь только один «представитель» (или, возможно, небольшое и легко описываемое множество эквивалентных представителей) в каждом классе (это не так, если рассматривать отношение подобия и верхние треугольные матрицы). Такой набор представителей часто называется *канонической формой.* Несколько примеров канонических форм мы рассмотрим в этой главе, другие появятся в соответствующих разделах последующих глав.

17.1. Жорданова каноническая форма: доказательство

Жорданова каноническая форма — это набор «почти диагональных» матриц, называемых жордановыми матрицами. Сюда входят и все диагональные матрицы. На множестве квадратных комплексных матриц каждый класс эквивалентности (по отношению подобия) содержит какую-то жорданову матрицу и любые две жордановы матрицы из одного класса эквивалентности одинаковы с точностью до тривиального различия. Жорданова матрица, подобная какой-либо заданной матрице, называется *жордановой канонической формой* (иногда — *жордановой нормальной формой)* этой матрицы. Если для какой-то матрицы найдена ее жорданова каноническая форма, то можно считать, что об этой матрице (или линейном преобразовании) известно все, чем обычно интересуются в линейной алгебре, и, чтобы получить необходимую информацию, достаточно лишь взглянуть на жорданову каноническую форму.

17.1.1. Определение. *Жордановым блоком* или *жордановой клеткой* $J_k(\lambda)$ называется верхняя треугольная матрица размера $k \times k$, имеющая вид

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{bmatrix}. \qquad (17.1.2)$$

Над главной диагональю k—1 раз ставится 1; на главной диагонали k раз повторяется число λ.. Все остальные элементы равны нулю. По определению $J_1(\lambda) = [\lambda]$. *Жордановой матрицей* $J \in M_n$ называется любая прямая сумма жордановых клеток

$$J = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{bmatrix}, \quad n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n, \qquad (17.1.3)$$

где порядки n_i каких-то клеток могут совпадать и числа λ_i не обязательно различны.

Заметим, что если каждая жорданова клетка $J_{n_i}(\lambda_i)$ в (17.1.3) имеет порядок 1, т. е. $n_i = 1$ для всех i и $k = n$, то жорданова матрица J диагональна. Если для какой-то жордановой клетки $J_m(\lambda)$ в (17.1.3) $m > 1$, то мало того, что J не является диагональной, — оиа вообще не диагонализуема. Если $J_m(\lambda) = S\Lambda S^{-1}$ и Λ — диагональная матрица, то обязательно $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \ldots \lambda) = \lambda I$. Таким образом, $J_m(\lambda) - \lambda I = S\Lambda S^{-1} - \lambda I = \lambda I - \lambda I = 0$, а это невозможно при $m > 1$. Однако обратим внимание на то, что для каждой жордановой клетки имеется один отвечающий ей собственный вектор матрицы J — это вектор стандартного базиса, соответствующий первому диагональному элементу этой клетки $J_m(\lambda)$. Собственными векторами матрицы J являются *лишь* кратные этих векторов, а для дефектных матриц и линейные комбинации некоторых из этих векторов. Основной результат этого параграфа заключается в том, что всякая комплексная матрица подобна по существу единственной жордаиовой матрице. Мы проведем доказательство в три этапа.

Этап 1. Заметим, что всякая комплексная матрица подобна верхней треугольной матрице с собственными значениями, расположенными на главной диагонали в произвольном заданном порядке, — это теорема 16.3.1 Шура о триангуляризацнн.

Этап 2. Далее, для любой верхней треугольной матрицы существует преобразование подобия, превращающее ее в блочио-диагональную матрицу, в которой каждый диагональный блок имеет верхнюю треугольную форму и на его главной диагонали располагаются равные элементы (наподобие жордановой клетки (17.1.2)). Это теорема 16.4.8.

Этап 3. Наконец, покажем, что любая верхняя треугольная матрица с равными элементами на главной диагонали подобна прямой сумме жордановых клеток вида (17.1.2).

Как только будет установлено последнее предложение, мы сможем для любой комплексной матрицы построить ее жорданову форму, сочетая преобразования подобия, отвечающие каждому этапу.

Было бы хорошо, если бы вещественная матрица с вещественными собственными значениями приводилась к жордановой канонической форме с помощью *вещественного* подобия, Чтобы обосновать эту возможность, заметим, что, согласно теореме 16.3.1, для любой вещественной матрицы A, имеющей только вещественные собственные значения, существует вещественная унитарная (вещественная ортогональная) матрица U, такая, что матрица U^TAU верхняя треугольная и ее элементы вещественные. Далее, доказательство теоремы 16.4.8 позволяет утверждать, что если верхняя треугольная матрица A вещественна, то подобие можно осуществить вещественной матрицей S, причем матрица $S^{-1}AS$ будет вещественной блочно-диагональной и каждый ее блок будет верхней треугольной матрицей с равными элементами на главной диагонали. Таким образом, достаточно убедиться в реализуемости этапа 3 и в том, что если на этом этапе верхняя треугольная матрица вещественная, то и матрица, осуществляющая преобразование подобия ее в прямую сумму жордановых клеток, может быть выбрана вещественной.

Следующая лемма поможет доказать выполнимость этапа 3. Она устанавливается с помощью прямого вычисления.

17.1.4. Лемма. *Пусть заданы $k \geq 1$ и жорданова клетка*

$$J_k(0)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$J_k^T(0)\,J_k(0)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{k-1}\end{bmatrix}$$

$$(J_k(0))^p=0 \quad \text{при} \quad p\geqslant k.$$

Кроме того,

$$J_k(0)\,e_{i+1}=e_i, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ k-1;$$

$$\left[I-J_k^T(0)\,J_k(0)\right]x=\left(x^Te_1\right)e_1.$$

Здесь $I_{k-1}\in M_{k-1}$ обозначает единичную матрицу, e_i есть i-й единичный вектор стандартного базиса и $x\in \mathbf{C}^n$.

Теперь докажем, что редукция на этапе 3 всегда осуществима. Напомним, что верхняя строго треугольная матрица — это верхняя треугольная матрица с нулями на главной диагонали. Обратим внимание на то, что любая верхняя треугольная матрица с равными элементами на главной диагонали есть какое-то кратное единичной матрицы плюс верхняя строго треугольная матрица.

17.1.5. Теорема. *Пусть матрица $A\in M_n$ строго верхняя треугольная. Существуют невырожденная матрица $S\in M_n$ и целые числа $n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_m$, такие, что $n_1\geqslant n_2\geqslant\ \ldots\ \geqslant n_m\geqslant 1,\ n_1+n_2+\ \ldots\ +n_m=n$ и*

$$A=S\begin{bmatrix}J_{n_1}(0) & & & 0\\ & J_{n_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{n_m}\end{bmatrix}S^{-1}. \qquad (17.1.6)$$

Если A вещественна, то и S можно выбрать вещественной.

Доказательство. Если n=1, то A=[0] и утверждение очевидно. Проведем индукцию по n и предположим, что n>1 и утверждение уже доказано для всех строго верхних треугольных матриц порядка меньше n. Представим матрицу A в виде

$$A=\begin{bmatrix}0 & a^T\\ 0 & A_1\end{bmatrix},$$

где $a\in\mathbf{C}^{n-1}$ и матрица $A_1\in M_{n-1}$ строго верхняя треугольная. Согласно предположению индукции, для некоторой невырожденной матрицы $S_1\in M_{n-1}$ матрица $S_1^{-1}A_1S_1$ имеет искомую форму (17.1.6), т. е.

$$S_1^{-1}A_1S_1=\begin{bmatrix} J_{k_1} & & & & 0 \\ & J_{k_2} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & J_{k_s} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} J_{k_1} & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}, \qquad (17.1.7)$$

где
$k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_s \geqslant 1,\ k_1+k_2+\ldots+k_s=n-1,\ J_{k_i}\equiv J_{k_i}(0)$ и

$$J\equiv\begin{bmatrix} J_{k_2} & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & J_{k_s} \end{bmatrix}\in M_{n-k_1-1}.$$

Заметим, что порядок любой жордановой клетки на диагонали в J не выше k_1; поэтому, согласно лемме 17.1.4, $J^{k_1}=0.$ Простое вычисление показывает, что

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_1^{-1} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & a^TS_1 \\ 0 & S_1^{-1}A_1S_1 \end{bmatrix}. \qquad (17.1.8)$$

Запишем $a^TS_1=[a_1^Ta_2^T]$, считая, что это разбиение согласовано с блочным строением правой части в (17.1.7); таким образом, $a_1\in\mathbf{C}^{k_1},\ a_2\in\mathbf{C}^{n-k_1-1}$ и соотношение (17.1.8) принимает вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_1^{-1} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & a_1^T & a_2^T \\ 0 & J_{k_1} & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}.$$

Теперь рассмотрим следующее преобразование подобия:

$$\begin{bmatrix} 1 & -a_1^TJ_{k_1}^T & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a_1^T & a_2^T \\ 0 & J_{k_1} & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a_1^TJ_{k_1}^T & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & a_1^T(I-J_{k_1}^TJ_{k_1}) & a_2^T \\ 0 & J_{k_1} & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & (a_1^Te_1)e_1^T & a_2^T \\ 0 & J_{k_1} & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}. \qquad (17.1.9)$$

Здесь использовано равенство $(I-J_k^TJ_k)\,x=(x^Te_1)\,e_1$ из леммы 17.1.4. В зависимости от того, выполняется или не выполняется равенство $a_1^Te_1=0$, существуют две возможности.

Если $a_1^Te_1\neq 0$, то

$$\begin{bmatrix} 1/a_1^Te_1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & (1/a_1^Te_1)I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & (a_1^Te_1)e_1^T & a_2^T \\ 0 & J_{k_1} & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1^Te_1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & a_1^Te_1I \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & e_1^T & a_2^T \\ 0 & J_{k_1} & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \tilde{J} & e_1a_2^T \\ 0 & J \end{bmatrix}.$$

Заметим, что

$$\tilde{J}=\begin{bmatrix} 0 & e_1^T \\ 0 & J_{k_1} \end{bmatrix}=J_{k_1+1}(0)$$

есть жорданова клетка порядка k_1+1 с нулевой главной диагональю. Если учесть, что $Je_{i+1}=e_i \ (i=1,2,\ldots,k_1)$, то легко проверяется соотношение

$$\begin{bmatrix} I & e_2a_2^T \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{J} & e_1a_2^T \\ 0 & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -e_2a_2^T \\ 0 & I \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \tilde{J} & -\tilde{J}e_2a_2^T+e_1a_2^T+e_2a_2^TJ \\ 0 & J \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \tilde{J} & e_2a_2^TJ \\ 0 & J \end{bmatrix}.$$

Действуя аналогично, получаем следующую серию преобразований подобия:

$$\begin{bmatrix} I & e_{i+1}a_2^TJ^{i-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{J} & e_ia_2^TJ^{i-1} \\ 0 & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -e_{i+1}a_2^TJ^{i-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \tilde{J} & e_{i+1}a_2^TJ^i \\ 0 & J \end{bmatrix},\quad i=2,\ 3,\ \ldots .$$

Поскольку $J^{k_1}=0$, то, самое большее, после k_1 шагов в этой серии внедиагональный блок станет нулевым. Значит, матрица A подобна матрице

$$\begin{bmatrix} \tilde{J} & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix},$$

и это верхняя строго треугольная жорданова матрица искомого вида.

Если $a_1^Te_1=0$, то в силу (17.1.9) матрица A подобна матрице

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_2^T \\ 0 & J_{k_1} & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix},$$

от которой с помощью матриц перестановок можно перейти к подобной матрице

$$\begin{bmatrix} J_{k_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2^T \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}. \qquad (17.1.10)$$

По предположению индукции для некоторой невырожденной матрицы $S_2 \in M_{n-k_1}$

$$S_2^{-1} \begin{bmatrix} 0 & a_2^T \\ 0 & J \end{bmatrix} S_2 = \hat{J} \in M_{n-k_1},$$

где $\hat{J}$ — жорданова матрица с нулями на главной диагонали. Таким образом, матрица вида (17.1.10), а значит, и матрица *A,* подобна матрице

$$\begin{bmatrix} J_{k_1} & 0 \\ 0 & \hat{J} \end{bmatrix},$$

которая является жордановой матрицей искомого вида, за исключением того, что жордановы блоки на диагонали расположены не обязательно по убыванию их порядка. Требуемое расположение можно обеспечить, используя при необходимости подобие, осуществляемое блочными матрицами перестановок.

Наконец, заметим, что если *A* вещественна, то все преобразования подобия, использованные в этом доказательстве, можно выбрать вещественными. Поэтому *A* вещественно подобна искомой жордановой матрице.

Теорема 17.1.5 по существу завершает этап 3 намеченной нами программы выявления жордановой канонической формы. Заметим, что если

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & & & & * \\ & \lambda & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & \lambda \end{bmatrix}$$

— верхняя треугольная матрица, в которой все диагональные элементы равны λ, то матрица $A_0 = A - \lambda I$ будет верхней строго треугольной. Если матрица $S \in M_n$ невырожденна и матрица $S^{-1}A_0S$ является прямой суммой жордановых клеток $J_{n_i}(0)$ в согласии с теоремой 17.1.5, то $S^{-1}AS = S^{-1}A_0S + \lambda I$ — это прямая сумма жордановых клеток $J_{n_i}(\lambda)$. Этапы 1 и 2, изученные в 16.3 и 16.4, вместе с этапом 3 доказывают половину общей *теоремы о жордановой канонической форме,* а именно утверждение о существовании такой формы.

17.1.11. Теорема. *Пусть задана комплексная матрица* $A \in M_n$. *Существует невырожденная матрица* $S \in M_n$, *такая, что*

$$A = S\begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{bmatrix} S^{-1} = SJS^{-1}, \quad (17.1.12)$$

где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. *Жорданова матрица J для матрицы A определяется однозначно с точностью до перестановки жордановых клеток на ее главной диагонали. Собственные значения* λ_i $(i = 1, \ldots, k)$ *не обязательно различные. Если матрица A вещественна и обладает только вещественными собственными значениями, то подобие может быть реализовано с помощью вещественной матрицы S.*

Доказательство. Все, что здесь утверждается, за исключением единственности, уже установлено. Чтобы доказать единственность, возьмем две подобные жордановы матрицы и покажем, что они имеют один и тот же набор жордановых клеток с учетом кратностей (нескольких экземпляров одной и той же клетки). Поскольку для подобных матриц собственные значения с учетом кратностей совпадают, то достаточно убедиться в совпадении жордановых клеток (с учетом кратностей) для двух подобных жордановых матриц, обладающих единственным собственным значением. Вследствие совпадения числа диагональных блоков, отвечающих какому-то собственному значению, с его геометрической кратностью (она одинакова для любых подобных матриц) эти две жордановы матрицы должны иметь одно и то же число жордановых клеток. Пусть клетки расположены таким образом, что их порядки не возрастают. Тогда нужно доказать, что последовательность порядков для обеих матриц в точности одна и та же. Итак, положим

$$J(\lambda) = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_k}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad \tilde{J}(\lambda) = \begin{bmatrix} J_{m_1}(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_k}(\lambda) \end{bmatrix},$$

считая, что $J(\lambda)$ подобна $\tilde{J}(\lambda)$ и при этом $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_k$ и $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_k$, $n_1 + \ldots + n_k = n$ и $m_1 + \ldots + m_k = n$. Если $n_1 = m_1$, то первые клетки совпадают; тогда их можно исключить из рассмотрения и перейти к двум матрицам, начинающимся со второй клетки. Повторяя это рассуждение, в конце концов мы установим, что все соответствующие пары клеток имеют одинаковый порядок, либо встретится первая пара клеток разных порядков. Итак, достаточно рассмотреть неравенство $n_1 > m_1$. В этом случае $(\tilde{J}(\lambda) - \lambda I)^{m_1} = 0$, так как $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_k$, но $(J(\lambda) - \lambda I)^{m_1} \neq 0$. Подобие двух жордановых матриц означает существование невырожденной матрицы $S \in M_n$, такой, что $\tilde{J}(\lambda) = S\tilde{J}(\lambda)S^{-1}$, $J(\lambda) - \lambda I = S[\tilde{J}(\lambda) - \lambda I]S^{-1}$. Следовательно, $[J(\lambda) - \lambda I]^{m_1} = S[\tilde{J}(\lambda) - \lambda I]^{m_1} S^{-1} = S0S^{-1} = 0$, и полученное противоречие завершает доказательство.

Чтобы ввести какое-то стандартное представление жордановой канонической формы (17.1.12), обычно принимается соглашение о том, что при выборе какого-то упорядочения собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы *A* в жордановой матрице сначала идут клетки, отвечающие λ_1, затем — отвечающие λ_2, и т.д. Для каждого собственного значения отвечающие ему жордановы клетки располагают по убыванию (невозрастанию) их порядка — сначала самая большая клетка, затем следующая по размеру и т. д. Если какому-то собственному значению отвечают несколько клеток одного размера, то эти клетки ничем не отличаются. Поэтому мы получаем представление жордановой формы, определенное однозначно с точностью до заданного первоначального упорядочения собственных значений. В каждом классе эквивалентности (относительно подобия) матриц из M_n содержится одна и только одна (с точностью до перестановок совокупностей клеток, отвечающих разным собственным значениям) такая жорданова каноническая форма.

Наш вывод жордановой канонической формы содержит явный алгоритм, который в принципе можно использовать для нахождения жордановой формы произвольной заданной матрицы. Однако это не тот алгоритм, который можно рекомендовать для численной реализации на компьютере. С сожалением приходится констатировать, что здесь дело не в том, что именно этот алгоритм может приводить к каким-то подозрительным результатам. В действительности вообще не существует численно устойчивого способа вычисления жордановых канонических форм. Простой пример сделает это утверждение совершенно ясным.

Пусть $\varepsilon \neq 0$ и $A_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Тогда $A_\varepsilon = S_\varepsilon J_\varepsilon S_\varepsilon^{-1}$, где $S_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ и $J_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$. Если $\varepsilon \to 0$, то $J_\varepsilon \to \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Однако ясно, что эта матрица не может быть жордановой формой ненулевой матрицы $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. На самом деле A_0 имеет жорданову форму $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Жорданова форма матрицы не является непрерывной функцией ее элементов. Поэтому малые изменения элементов матрицы могут приводить к большим изменениям элементов ее жордановой формы. Обеспечить устойчивость при вычислении такого объекта — дело достаточно сложное. Именно поэтому жордановы формы редко используют в вычислительной практике. (Вычислительно устойчивая модификация жордановой канонической формы обсуждается в работах Арнольда В. И., Галина Д. М «О матрицах (вещественных), зависящих от параметров»). Вопреки этому ограничению, теория жордановой канонической формы заслуживает изучения и дает богатые возможности для понимания свойств матриц. Что касается общего подхода, то, чтобы доказать что-то о матрицах, сначала стоит посмотреть, верно ли это для диагональных матриц, а уже затем, если ответ положительный, попытаться установить результат в общем случае с помощью предельного перехода (используя тот факт, что любая комплексная матрица может быть как угодно точно приближена диагонализуемой матрицей). Если этого сделать не удается или же желательно избежать обращения к математическому анализу, можно попытаться доказать рассматриваемый результат для верхних треугольных или жордановых матриц.

Иногда бывает полезно иметь в виду, что произвольная матрица подобна матрице вида (17.1.12), где в каждой жордановой клетке число J над диагональю заменено на $\varepsilon \neq 0$, причем ε можно взять сколь угодно малым.

17.1.13. Следствие. *Пусть заданы произвольная комплексная матрица* $A \in M_n$ *и число* $\varepsilon \neq 0$. *Тогда существует невырожденная матрица* $S = S(\varepsilon) \in M_n$, *такая, что*

$$A = S \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1, \varepsilon) & & & & 0 \\ & J_{n_2}(\lambda_2, \varepsilon) & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & J_{n_k}(\lambda_k, \varepsilon) \end{bmatrix} S^{-1}, \qquad n_1 + \ldots + n_k = n, \tag{17.1.14}$$

$$J_m(\lambda, \varepsilon) = \begin{bmatrix} \lambda & \varepsilon & & & 0 \\ & \lambda & \varepsilon & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \varepsilon \\ 0 & & & & \lambda \end{bmatrix} \in M_m.$$

Если матрица A вещественна и ε вещественно, то и S можно выбрать вещественной.

Доказательство. Сначала найдем невырожденную матрицу $S_1 \in M_n$, такую, что $S_1^{-1}AS_1$ есть жорданоза каноническая форма (считая, что S_1 вещественна, если A вещественна и имеет вещественные собственные значения). Затем возьмем $D_\varepsilon = \mathrm{diag}\left(1,\ \varepsilon,\ \ldots,\ \varepsilon^{n-1}\right)$ и вычислим матрицу $D_\varepsilon^{-1}\left(S_1^{-1}AS_1\right)D_\varepsilon$ — она имеет вид (17.1.14), так что $S = S(\varepsilon) = S_1 D_\varepsilon$ удовлетворяет всем требованиям теоремы.

17.2. Жорданова каноническая форма: некоторые свойства и приложения

17.2.1. Структура жордановой матрицы.

Жорданова матрица

$$J = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{bmatrix}, \quad n_1 + \ldots + n_k = n, \tag{17.2.1.1}$$

имеет вполне определенную структуру, которая делает наглядными некоторые из основных свойств этой матрицы и всех матриц, ей подобных.

1. Число k ее жордановых клеток (с учетом повторов одних и тех же клеток) равно максимальному числу ее линейно независимых собственных векторов.
2. Матрица J диагонализуема тогда и только тогда, когда $k = n$.
3. Число жордановых клеток, отвечающих какому-то одному собственному значению, совпадает с его геометрической кратностью, т. е. с размерностью соответствующего собственного подпространства. Сумма порядков всех жордановых клеток, отвечающих одному собственному значению, совпадает с его алгебраической кратностью.
4. Знание собственных значений вместе с их алгебраическими и геометрическими кратностями в общем случае не дает полной информации о жордановой матрице. Необходимо еще выяснить, каковы размеры жордановых клеток для каждого собственного значения. Порядок наибольшей жордановой клетки, отвечающей

собственному значению λ, — это кратность числа λ как корня минимального многочлена (см. теорему 17.3.6),

5. Размеры жордановых клеток, отвечающих какому-то одному собственному значению, определяются по рангам некоторых степеней вспомогательной матрицы. Например, для

$$J=\left[\begin{array}{ccc:cc:cc:c} 2 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 2 & 1 & & & \multicolumn{2}{c}{0} & \\ 0 & 0 & 2 & & & & & \\ \hdashline & & & 2 & 1 & & & \\ & & & 0 & 2 & & & \\ \hdashline & & & & & 2 & 1 & \\ & 0 & & & & 0 & 2 & \\ \hdashline & & & & & & & 2 \end{array}\right]$$

вычисляем следующие матрицы:

$$J-2I=\left[\begin{array}{ccc:cc:cc:c} 0 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \multicolumn{2}{c}{0} & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \\ \hdashline & & & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & 0 & & & \\ \hdashline & & & & & 0 & 1 & \\ & 0 & & & & 0 & 0 & \\ \hdashline & & & & & & & 0 \end{array}\right],$$

$$(J-2I)^2=\left[\begin{array}{ccc:cc:cc:c} 0 & 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \multicolumn{2}{c}{0} & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \\ \hdashline & & & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & 0 & & & \\ \hdashline & & & & & 0 & 0 & \\ & 0 & & & & 0 & 0 & \\ \hdashline & & & & & & & 0 \end{array}\right],$$

$$(J-2I)^3=0.$$

Таким образом, мы располагаем следующими данными: матрица $J - 2I$ имеет размер 8×8;

$$(J-2I)^3=0;$$
$$\operatorname{rank}(J-2I)^2=1;$$
$$\operatorname{rank}(J-2I)=4.$$

Этой совокупностью данных строение матрицы *J* определяется полностью. Равенство $(J-2I)^3=0$ позволяет утверждать, что наибольшая клетка имеет порядок 3. Ранг матрицы $(J-2I)^2$ совпадает с числом клеток порядка 3, в данном случае получаем одну клетку. Ранг матрицы $J-2I$ есть удвоенное число клеток порядка 3 плюс число клеток порядка 2. Как видим, должно быть две клетки порядка 2. Число клеток порядка 1 равно 8 — (2×2) — 3=1. Аналогичную процедуру можно применить и по отношению к прямой сумме жордановых блоков произвольных размеров, если все блоки отвечают одному и тому же собственному значению. Пусть *J* есть прямая сумма жордановых клеток, отвечающих собственному значению λ. Тогда самая большая клетка имеет порядок k_1, где k_1 есть наименьшее целое число, такое, что $(J-\lambda I)^{k_1}=0$. Ранг матрицы $(J-\lambda I)^{k_1-1}$ равен числу клеток порядка k_1, ранг матрицы $(J-\lambda I)^{k_1-2}$ есть удвоенное число клеток порядка k_1 плюс число клеток порядка k_1—1 и т. д. Последовательность рангов матриц $(J-\lambda I)^{k_1-i}$, где $i=0,1,2,\ldots,k_1-1$, позволяет рекурсивно определить порядки всех клеток в матрице *J*.

6. Размеры всех жордановых клеток в жордановой матрице общего вида (17.2.1.1) определяются по рангам некоторых степеней вспомогательных матриц. Если λ_1 является одним из собственных значений жордановой матрицы *J*, то, образуя матрицы $(J-\lambda_1 I)$, $(J-\lambda_1 I)^2, \ldots,$ мы сможем превратить в нулевые лишь клетки, отвечающие λ_1, вследствие того, что все другие клетки $J-\lambda_1 I$ будут иметь ненулевую диагональ. В конечном счете ранг матрицы $(J-\lambda_1 I)^k$ с ростом *k* перестанет убывать (очевидно, нет нужды рассматривать *k>n);* наименьшее значение *k,* минимизирующее ранг матрицы $(J-\lambda_1 I)^k$, равно порядку наибольшей клетки, отвечающей λ_1. Такое минимальное значение *k* называется *индексом* собственного значения λ_1. Для того чтобы определить размеры и число жордановых клеток, отвечающих λ_1 достаточно проанализировать ранги последовательности степеней матрицы $J-\lambda_1 I$. Затем то же нужно проделать по отношению к

λ_2, λ_3 и т. д. — для каждого собственного значения клетки ищутся одним и тем же способом.

Несмотря на то что во всех этих утверждениях речь идет о жордановой матрице J, любое из них справедливо, если заменить J на произвольную подобную ей матрицу. Таким образом, для любой заданной матрицы $A \in M_n$ ее жорданову каноническую форму (без выяснения, каким именно преобразованием подобия она достигается) можно определить, выполняя следующие действия:

1. Найти для A все ее различные собственные значения — например, как корни характеристического многочлена.
2. Для каждого из различныхобразовать λ_i степени $(A - \lambda_i I)^k$, где k = 0,1, ..., n, и, анализируя последовательность рангов этих матриц, установить для A размеры и число жордановых клеток, отвечающих собственному значению λ_i.

Этот алгоритм бывает полезен для обработки вручную небольших матриц простого вида, но он непригоден для машинных вычислений в силу неустойчивости самой задачи определения ранга матрицы. Последнее очевидно, если взять, например, матрицу $A_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$, имеющую ранг 2 при всех $\varepsilon \neq 0$ и 1 при $\varepsilon = 0$.

Чтобы показать ситуацию, в которой этот алгоритм оказывается полезным, рассмотрим построение жордановой канонической формы для квадрата какой-либо жордановой клетки $J_k(0) \in M_n$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & 0 & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Для A все собственные значения равны нулю; $A^m = 0$ при $m = [(k+1)/2]$ (это наибольшее целое число, не превосходящее $(k+1)/2$) и $A^p \neq 0$ при $p = 1, 2, \dots, m-1$. Для каждого p = 1, 2, ...,m — 2 ранг степени A^{p+1} на 2 меньше, чем ранг предыдущей степени A^p; для A^{m-1} ранг равен 2, если k четно, и 1, если k нечетно. Таким образом, для $A = J_k^2(0)$ жорданоза каноническая форма имеет вид

$$\begin{bmatrix} J_m(0) & 0 \\ 0 & J_m(0) \end{bmatrix}, \text{ если } k = 2m \text{ четно,}$$

и

$$\begin{bmatrix} J_m(0) & 0 \\ 0 & J_{m-1}(0) \end{bmatrix}, \text{ если } k = 2m - 1 \text{ нечетно.}$$

Это наблюдение полезно, когда для некоторой заданной матрицы нужно выяснить, имеет ли она квадратный корень. Например, отсюда вытекает, что ни для какой матрицы $A \in M_2$ не может быть получено равенство $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

17.2.2. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Одно из приложений жордановой канонической формы — исключительно важное для теории — связано с анализом решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Пусть задана матрица $A \in M_n$ и вектор x_0 и для системы дифференциальных уравнений первого порядка рассматривается задача Коши

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \qquad (17.2.2.1)$$

где $x(t) = [x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t)]^T$ и «штрих» обозначает дифференцирование по t. Если матрица A не является диагональной, то эта система уравнений будет *связанной,* т. е. $x_i'(t)$ зависит не только от $x_i(t)$, но и от других компонент вектора $x(t)$. Связанность затрудняет решение задачи. Если же привести A к диагональному (или почти диагональному) виду, то связанность исчезает (или степень связанности уменьшается) и преобразованная задача решается проще. Запишем $A = SJS^{-1}$, где J — жорданова каноническая форма матрицы A. Тогда задача (17.2.2.1) преобразуется к такому виду:

$$\begin{aligned} y'(t) &= Jy(t), \\ y(0) &= y_0, \end{aligned} \qquad (17.2.2.2)$$

где $x(t) = Sy(t)$ и заданным считается вектор $y_0 = S^{-1}x_0$. Если найдено решение задачи (17.2.2.2), то каждая компонента решения $x(t)$ задачи (17.2.2.1) есть не что иное, как линейная комбинация компонент решения задачи (17.2.2.2), причем коэффициенты линейной комбинации определяются матрицей *S*.

Если матрица *A* диагонализуема, то *J* есть диагональная матрица и (17.2.2.2) представляет собой несвязанное множество уравнений вида $y'_k(t) = \lambda_k y_k(t)$, имеющих решения $y_k(t) = y_k(0)\, e^{\lambda_k t}$. Это простая экспоненциальная функция, если собственное значение λ_k вещественное, и это осциллирующая функция $y_k(t) = y_k(0)\, e^{a_k t}[\cos(b_k t) + i \sin(b_k t)]$, если $\lambda_k = a_k + i b_k$ комплексное.

В случае недиагональной матрицы *J* решение несколько усложняется. Несвязанными будут такие группы компонент вектора *y(t),* которые отвечают различным жордановым клеткам в *J*. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда *J* представляет собой одну жорданову клетку

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} \in M_m.$$

Система (17.2.2.2) принимает вид

$$\begin{aligned} y'_1(t) &= \lambda y_1(t) + y_2(t), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ y'_{m-1}(t) &= \lambda y_{m-1}(t) + y_m(t), \\ y'_m(t) &= \lambda y_m(t) \end{aligned}$$

и может быть решена прямой подстановкой, выполняемой снизу вверх. Начиная с последнего уравнения, получаем

$$y_m(t) = y_m(0)\, e^{\lambda t},$$

вследствие чего

$$y'_{m-1}(t) = \lambda y_{m-1}(t) + y_m(0)\, e^{\lambda t}.$$

Решая это уравнение, находим

$$y_{m-1}(t) = y_m(0)\, t e^{\lambda t} + y_{m-1}(0)\, e^{\lambda t}.$$

Следующее уравнение после подстановки в него этого выражения принимает вид

$$y'_{m-2}(t) = \lambda y_{m-2}(t) + y_m(0)\, t e^{\lambda t} + y_{m-1}(0)\, e^{\lambda t}.$$

Отсюда

$$y_{m-2}(t) = y_m(0)\frac{t^2}{2}e^{\lambda t} + y_{m-1}(0)\,te^{\lambda t} + y_{m-2}(0)\,e^{\lambda t},$$

и т. д. Ясно, что каждая компонента решения имеет вид

$$y_k(t) = e^{\lambda t} q_k(t),$$

где $q_k(t)$ — многочлен степени не выше $m-k,\ k = 1, \ldots, m.$

Как следствие этого анализа делаем вывод о том, что для любого начального условия x_0 компоненты решения $x(t)$ задачи (17.2.2.1) выражаются в виде

$$x_j(t) = p_1(t)\,e^{\lambda_1 t} + p_2(t)\,e^{\lambda_2 t} + \ldots + p_k(t)\,e^{\lambda_k t},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ суть различные собственные значения для A и для любого i многочлен $p_i(t)$ имеет степень, строго меньшую, чем порядок наибольшей жордановой клетки, отвечающей λ_i. Вещественным собственным значениям соответствуют чисто экспоненциальные члены в этой сумме, а комплексным — члены с произведениями экспоненциальных и осциллирующих сомножителей.

17.2.3. Подобие матрицы и ее транспонированной матрицы.

Любая жорданова клетка — это матрица, подобная своей транспонированной матрице, причем подобие осуществляется матрицей перестановки следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & 1 & & \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & 1 & & \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Следовательно, если задана матрица $A \in M_n$ и J — ее жорданова каноническая форма, то $A = SJS^{-1}$, т. е. A подобна J, но J подобна J^T и J^T подобна A^T, так как $A^T = (S^T)^{-1}J^T(S^T)$. Поэтому любая комплексная матрица подобна своей транспонированной матрице. Отсюда следует, что строчный ранг (максимальное число линейно независимых строк) комплексной матрицы совпадает со столбцовым рангом (максимальным числом линейно независимых столбцов), так как ранг является инвариантом подобия. Отсюда также вытекает, что A и A^T имеют одни и те же собственные значения. Впрочем, все эти следствия можно установить непосредственно — и такой путь будет более простым.

Верно также и то, что для любого поля $\mathbf{F}$ всякая матрица из $M_n(\mathbf{F})$ подобна (подобие осуществляется некоторой матрицей из $M_n(\mathbf{F})$) своей транспонированной матрице. Совсем не обязательно ограничиваться предположением $\mathbf{F} = \mathbf{C}$. В действительности это подобие можно осуществить с помощью симметричной матрицы.

17.2.4. Коммутирующие и простые матрицы.

Если $p(t)$ — любой многочлен и $A \in M_n$ — некоторая матрица, то $p(A)$ коммутирует с A. Это полезное, хотя и очевидное утверждение. Нельзя ли его обратить? Пусть заданы матрицы $A, B \in M_n$ и известно, что A коммутирует с B. Обязательно ли B будет многочленом от A? Очевидно, нет, так как можно взять $A = I$ и тогда A будет коммутировать с любой матрицей, а $p(I) = p(1)I$ не может дать нескалярную матрицу. Дело тут в том, что, с одной стороны, вид матрицы A позволяет ей коммутировать с многими матрицами, а с другой стороны, совсем не много имеется матриц, представимых в виде $p(A)$. Чтобы получить какой-либо результат в этом направлении, нужно найти компромисс между этими двумя аспектами.

17.2.4.1. Определение. Матрица $A \in M_n$ называется *простой,* если любое ее собственное значение имеет геометрическую кратность 1.
Геометрическая кратность собственного значения жордановой матрицы равна числу отвечающих ему жордановых клеток. Поэтому матрица является простой в том и только в том случае, когда для всякого ее собственного значения имеется в точности одна жорданова клетка. Матрица $A \in M_n$ проста, если, например, она имеет n различных собственных значений или же собственное значение только одно и его геометрическая кратность равна 1. Скалярная матрица — это антипод простой матрицы.

17.2.4.2.Теорема. *Пусть — $A \in M_n$ данная простая матрица. Матрица $B \in M_n$ коммутирует с A в том и только в том случае, когда $B = p(A)$ для какого-то многочлена $p(\cdot)$степени не выше n — 1.*

Доказательство. Если $B = p(A)$, то, конечно, A коммутирует с B. Чтобы установить обратное, положим $A = SJS^{-1}$,где J — жорданова каноническая форма матрицы A. Если $AB=BA$, то $BSJS^{-1} = SJS^{-1}B$ и

$(S^{-1}BS)J = J(S^{-1}BS)$. Если мы докажем, что $S^{-1}BS = p(J)$,то будет $B = Sp(J)S^{-1} = p(SJS^{-1}) = p(A)$. Итак, достаточно считать, что *A* есть жорданова матрица. Вследствие ее простоты можно записать

$$A = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & & 0 \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{bmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ суть *k* различных собственных значений матрицы *A*. Для *B* рассмотрим блочное разбиение $B = [B_{ij}]$, согласованное с данным разбиением матрицы *A*. Тогда соответствующие этим разбиениям внедиагональные блоки матрицы *AB* — *B A* имеют вид

$$J_{n_i}(\lambda_i)B_{ij} - B_{ij}J_{n_j}(\lambda_j) = 0, \quad i \neq j.$$

Так как собственные значения λ_i и λ_j различны, отсюда можно вывести, что $B_{ij} = 0$ есть единственное решение этих уравнений (см. задачу 9 из 16.4). Значит, матрица *B* имеет блочно-диагональный вид

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & & & & 0 \\ & B_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & B_k \end{bmatrix},$$

где $B_i \in M_{n_i}$. В силу предположения о коммутативности $B_iJ_{n_i}(\lambda_i) = J_{n_i}(\lambda_i)B_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$. Запишем $J_{n_i}(\lambda_i) = \lambda_i I + N_i$, где

$$N_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \in M_{n_i}.$$

Тогда $B_iN_i = N_iB_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$. Непосредственное вычисление показывает, что вследствие специального вида матрицы N_i для любого *i* матрица B_i должна быть верхней треугольной тёплицевой матрицей (см. раздел 14.9.7), т. е.

$$B_i = \begin{bmatrix} b_1^{(i)} & b_2^{(i)} & \cdots & b_{n_i}^{(i)} \\ & b_1^{(i)} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & b_2^{(i)} \\ 0 & & & b_1^{(i)} \end{bmatrix}, \qquad (17.2.4.3)$$

где элементы постоянны на каждой из диагоналей. Если мы для каждого i построим многочлен $p_i(t)$ степени не выше n— 1, такой, что $p_i(J_{n_j}(\lambda_j)) = 0$ при $i \neq j$ и $p_i(J_{n_i}(\lambda_i)) = B_i$, то многочлен

$$p(t) = p_1(t) + \ldots + p_k(t)$$

будет искомым. Положим

$$q_i(t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} (t - \lambda_j)^{n_j}, \quad \deg q_i(t) = n - n_i,$$

и заметим, что $q_i(J_{n_j}(\lambda_j)) = 0$ при $i \neq j$, потому что $(J_{n_j}(\lambda_j) - \lambda_j I)^{n_j} = 0$. Хотя $q_i(J_{n_i}(\lambda_i))$ может и не совпадать с B_i, это невырожденная матрица (потому что все λ_i различны), которая, как и всякий многочлен от $J_{n_i}(\lambda_i)$, сохраняет вид (17.2.4.3).

Для любой невырожденной матрицы вида (17.2.4.3) обратная матрица имеет ту же форму и произведение матриц этого вида остается матрицей такого же вида. Поэтому матрица

$$[q_i(J_{n_i}(\lambda_i))]^{-1} B_i$$

есть верхняя треугольная тёплицева матрица вида (17.2.4.3). Любую такую матрицу можно записать как многочлен от $J_{n_i}(\lambda_i)$ например,

$$B_i = b_1^{(i)} (J_{n_i}(\lambda_i) - \lambda_i I)^0 + b_2^{(i)} (J_{n_i}(\lambda_i) - \lambda_i I)^1 + \ldots$$
$$\ldots + b_{n_i}^{(i)} (J_{n_i}(\lambda_i) - \lambda_i I)^{n_i - 1}.$$

Таким образом, имеется многочлен $r_i(t)$ степени не выше $n_i - 1$, такой, что

$$[q_i(J_{n_i}(\lambda_i))]^{-1} B_i = r_i(J_{n_i}(\lambda_i)).$$

Если теперь положить $p_i(t) = q_i(t) r_i(t)$, то это будет многочлен степени не выше n— 1 и для него при $i \neq j$

$$p_i(J_{n_j}(\lambda_j)) = q_i(J_{n_j}(\lambda_j))\, r_i(J_{n_j}(\lambda_j)) = 0 r_i(J_{n_j}(\lambda_j)) = 0$$

и, кроме того, $p_i(J_{n_i}(\lambda_i)) = q_i(J_{n_i}(\lambda_i))\, r_i(J_{n_i}(\lambda_i)) = B_i$.

Справедливо обращение этой теоремы, позволяющее охарактеризовать простые матрицы, а именно: матрица $A \in M_n$ проста в том и только в том случае, когда любая коммутирующая с A матрица является многочленом от A.

17.2.5. Сходящиеся матрицы.

Матрица $A \in M_n$, для которой все элементы матрицы A^T стремятся к нулю при $m \to \infty$, называется *сходящейся.* Такие матрицы играют важную роль при изучении алгоритмов численной линейной алгебры. Если матрица A диагональная, то, очевидно, она будет сходящейся в том и только в том случае, когда все ее собственные значения по модулю строго меньше 1. То же справедливо и по отношению к диагонализуемым матрицам. Чтобы распространить этот результат и на общий случай не обязательно диагонализуемых матриц, можно было бы рассмотреть доводы, связанные с малыми возмущениями. Однако неясно, что они могут дать при выполнении предельного перехода. Во всяком случае, мы можем использовать жорданову каноническую форму. Если $A = SJS^{-1}$ (J—жорданова форма матрицы A), то $A^m = SJ^mS^{-1}$ и, значит, $A^m \to 0$ при $m \to \infty$ тогда и только тогда, когда $J^m \to 0$ при $m \to \infty$. Поскольку J является прямой суммой жордановых клеток, достаточно рассмотреть поведение степеней одной жордановой клетки

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot \quad 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \cdot & \\ & & \cdot \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot \quad 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda I + N_k \in M_k; \quad N_k \equiv J_k(0).$$

Так как $N_k^m = 0$ для всех $m \geqslant k$, то

$$[J_k(\lambda)]^m = (\lambda I + N_k)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \lambda^i N_k^{m-i} =$$

$$= \sum_{i=m-k+1}^{m} \binom{m}{i} \lambda^i N_k^{m-i}.$$

Все диагональные элементы равны λ^m. Поэтому для того, чтобы $J^m \to 0$, необходимо, чтобы $\lambda^m \to 0$, а это означает, что $|\lambda| < 1$. Наоборот, если $|\lambda| < 1$, то достаточно доказать, что

$$\binom{m}{m-j}\lambda^{m-j} \to 0 \text{ при } m \to \infty, \; j = 0, 1, 2, \ldots, k-1.$$

Но

$$\left|\binom{m}{m-j}\lambda^{m-j}\right| = \left|\frac{m(m-1)(m-2)\ \ldots\ (m-j+1)\lambda^m}{j!\,\lambda^j}\right| \leqslant \left|\frac{m^j\lambda^m}{j!\,\lambda^j}\right|,$$

так что достаточно установить, что $m^j|\lambda|^m \to 0$ при $m \to \infty$. Наверное, проще всего перейти к логарифмам и заметить, что при $m \to \infty$

$$j\log m + m\log|\lambda| \to -\infty,$$

потому что $\log|\lambda| < 0$ и

$$(\log x)/x \to 0$$

при $x \to \infty$ в силу правила Лопиталя. В этом рассуждении, как видим, существенна роль жордановой канонической формы. Доказано, что $A^m \to 0$ при $m \to \infty$ том и только в том случае, когда все собственные значения матрицы A по модулю строго меньше единицы. Еще одно доказательство — без какого-либо использования жордановой формы — будет приведено в разд. 19.6.12.

17.2.6. Неравенство между геометрической и алгебраической кратностями.

Для заданной матрицы $A \in M_n$ геометрическая кратность любого ее собственного значения совпадает с числом отвечающих ему жордановых клеток. Это число не больше суммы порядков всех жордановых клеток для этого собственного значения. Эта сумма равна алгебраической кратности. Таким образом, геометрическая кратность любого собственного значения не выше его алгебраической кратности — для сравнения см. разд. 15.4.9.

17.2.7. Диагонализуемые и нильпотентные матрицы.

Матрица $A \in M_n$ называется *нильпотентной,* если $A^k = 0$ для какого-то целого положительного k. Любую жорданову клетку $J_k(\lambda)$ можно записать в виде $J_k(\lambda) = \lambda I + N_k$, где $(N_k)^k = 0$. Таким образом, произвольная жорданова клетка есть сумма двух матриц— диагональной и нильпотентной.

В более общем случае жорданову матрицу (17.2.1.1) можно записать в виде $J = D + N$, где матрица D диагональная и ее главная диагональ такая же, как и в J; при этом $N = J - D$. Матрица N нильпотентна: $N^k = 0$, если k равно порядку наибольшей жордаиовой клетки в J.

Наконец, пусть задана произвольная матрица $A \in M_n$ и построена ее жорданова форма J. Тогда $A = SJS^{-1} = SDS^{-1} +$ $+ SNS^{-1} = A_D + A_N$, где A_D диагонализуема, A_N нильпотентна и $A_D A_N = A_N A_D$, так как обе матрицы D и N являются блочно-диагональными с соответствующими блоками одинакового размера и блоки в D суть скалярные матрицы.

Итак, любая матрица $A \in M_n$ представима в виде суммы двух матриц — диагонализуемой и нильпотеитной, причем таким образом, что эти две матрицы коммутируют.

Микромодуль 50
Индивидуальные тестовые задания

Задачи к п. 17.1.

1. Провести вычисления, доказывающие лемму 17.1.4.
2. Реализовать три этапа, отвечающие доказательству теоремы 17.1.11, и найти жорданову каноническую форму матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Пусть матрица $A \in M_n$ комплексна, но с вещественными собственными значениями. Показать, что A подобна некоторой вещественной матрице. Можно ли это подобие осуществить с помощью вещественной матрицы?

Задачи к п. 17.2.

1. Пусть задано какое-то семейство матриц $\mathcal{F} = \{A_\alpha : \alpha \in$ $\in \mathcal{T}\} \subset M_n$, где индексы принадлежат множеству индексов $\mathcal{T}$, и предположим, что существует простая матрица $A_0 \in \mathcal{F}$, такая, что $A_\alpha A_0 = A_0 A_\alpha$ для всех $\alpha \in \mathcal{T}$. Доказать, что для каждого $\alpha \in \mathcal{T}$ можно указать многочлен $p_\alpha(t)$ степени не выше n—1, такой, что $A_\alpha = p_\alpha(A_0)$, и, следовательно, семейство $\mathcal{F}$ коммутативно.

2. Пусть задана матрица $A \in M_n$ и λ_i — какое-то ее собственное значение. Доказать, что для A порядок наибольшей жордановой клетки, отвечающей λ_i, — *индекс* собственного значения λ_i — равен наименьшему $k = 1, 2, \ldots, n-1$, для которого $\operatorname{rank}(A - \lambda_i I)^k = \operatorname{rank}(A - \lambda_i I)^{k+1}$.

3. Показать, что если $A^k = 0$ $(A \in M_n)$ для некоторого $k > n$, то $A^r = 0$ для какого-то $r \leqslant n$. Поэтому любая нильпотентная матрица обращается в нуль при возведении ее в такую степень, которая не превышает порядок матрицы. *Указание.* Установить, что для A единственное ее собственное значение есть 0. Как выглядит жорданова каноническая форма матрицы A? Далее рассмотреть ее степени.

4. Пусть задана жорданова клетка $J_k(0)$. Определить в том же духе, как и в конце разд. 17.2.1, три возможных типа жордановой канонической формы для $J_k^3(0)$.

5. Пусть матрица $A \in M_n$ нильпотентна, так что $A^k = 0$ для некоторого k. Показать, что характеристический многочлен матрицы A имеет вид $p_A(t) = t^n$.

6. Линейное преобразование $d/dt\colon\ p(t) \to p'(t)$, действующее на векторном пространстве всех многочленов степени не выше 3, в базисе $B = \{1, t, t^2, t^3\}$ имеет представление

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Какова жорданова каноническая форма этой матрицы?

7. Каковы возможные жордановы формы матрицы $A \in M_n$, такой, что $A^3 = I$?

8. Каковы возможные жордановы канонические формы матрицы $A \in M_6$ с характеристическим многочленом $p_A(t) = (t+3)^4(t-4)^2$?

9. По методу, описанному в разд. 17.2.1, определить жорданову каноническую форму матрицы

$$A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}.$$

10. Проверить утверждение из доказательства теоремы 17.2.4.2 о том, что произведение матриц вида (17.2.4.3) имеет такой же вид. *Указание.* Для A обратная матрица является многочленом от A.

11. Пусть $A, B \in M_n$. Показать, что невырожденные блоки в жордановых формах матриц *AB* и *BA* одинаковы. При этом использовать равенства из доказательства теоремы 15.3.20. Будут ли *AB* и *BA* подобны? Если *AB* и *BA* не подобны, то насколько они далеки от подобия?

12. Пусть заданы матрицы $A_1, \ldots, A_k$, где $A_i \in M_{n_i}$ $(i = 1, \ldots, k)$, и они имеют соответственно жордановы формы $J_1, \ldots, J_k$. Доказать, что прямая сумма

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{bmatrix} \in M_n, \quad n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n,$$

имеет (с точностью до перестановки диагональных блоков) жорданову каноническую форму

$$\begin{bmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_k \end{bmatrix}.$$

13. Пусть $A \in M_n$ и $B, C \in M_m$. Показать, что прямая сумма $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \in M_{n+m}$ подобна прямой сумме

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

в том и только в том случае, когда *B* подобна *C*.

14. Пусть $B, C \in M_n$. Показать, что две *k*-членные прямые суммы

$$\begin{bmatrix} B & & & 0 \\ & B & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B \end{bmatrix} \in M_{km}, \quad \begin{bmatrix} C & & & 0 \\ & C & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & C \end{bmatrix} \in M_{km}$$

подобны тогда и только тогда, когда *B* и *C* подобны.

15. Пусть $A \in M_n$ и $B, C \in M_m$. Показать, что прямые суммы

$$\begin{bmatrix} A & & & 0 \\ & B & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B \end{bmatrix} \in M_{n+km}, \quad \begin{bmatrix} A & & & 0 \\ & C & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & C \end{bmatrix} \in M_{n+km}$$

подобны тогда и только тогда, когда *B* и *C* подобны.

16. Пусть матрица $A \in M_n$ имеет жорданову каноническую форму $J_{n_1}(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus J_{n_k}(\lambda_k)$. Показать, что если *A* невырожденна, то A^2 имеет жорданову каноническую форму $J_{n_1}(\lambda_1^2) \oplus \ldots \oplus J_{n_k}(\lambda_k^2)$, т. е. жорданова каноническая форма для A^2 состоит в точности из такого же набора жордановых клеток, что и для *A,* а соответствующие собственные значения возводятся в квадрат. Справедливо ли аналогичное утверждение для произвольных степеней A^k, $k \geqslant 2$? Показать на примере матрицы размера 2×2, что для вырожденной матрицы это уже не верно. *Указание.* Доказать, что если $\lambda \neq 0$, то для квадрата $J_k^2(\lambda)$ простой жордановой клетки жорданова каноническая форма имеет вид $J_k(\lambda^2)$. Установить, что при $\lambda \neq 0$

$$\operatorname{rank}[J_k(\lambda) - \lambda I]^m = \operatorname{rank}[J_k^2(\lambda) - \lambda^2 I]^m, \quad m = 1, 2, \ldots, k.$$

17. Доказать, что если $A \in M_n$, то $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^2$ в том и только в том случае, когда геометрическая и алгебраическая кратности собственного значения $\lambda = 0$ равны, т. е. в жордаиовой канонической форме матрицы *A* любая клетка, отвечающая $\lambda = 0$, имеет размер 1×1.

Микромодуль 51
Многочлены и матрицы

17.3. Многочлены и матрицы: минимальный многочлен

Пусть задан произвольный многочлен $p(t) = t^k + a_{k-1}t^{k-1} + \ldots + a_1 t + a_0$. Тогда для любой матрицы $A \in M_n$ можно определить матрицу

$$p(A) \equiv A^k + a_{k-1}A^{k-1} + a_{k-2}A^{k-2} + \ldots + a_1 A + a_0 I.$$

Имеется важная взаимосвязь между многочленами и матрицами. В этом плане роль характеристического многочлена уже отмечалась, однако есть и другие многочлены, связанные с произвольной квадратной матрицей. Один из них — минимальный многочлен. Согласно теореме Кэли — Гамильтона 16.4.2, для любой матрицы $A \in M_n$ можно указать многочлен (характеристический многочлен) $p_A(t)$ степени *n,* такой, что $p_A(A) = 0$. Если многочлен принимает на *А* значение 0, то говорят, что он *аннулирует* матрицу *А.* Возможно, *А* аннулируется также каким-то многочлэном степени *n*—1 или, скажем, *n* — 2; однако ясно, что для каждой матрицы $A \in M_n$ существует аннулирующий ее многочлен минимальной степени (в силу конечного числа возможностей) и степень этого многочлена не выше *n.* Если $p(A) = 0$, то $cp(A) = 0$ для любого $c \in \mathbf{C}$, а стало быть, понятно, что любой нетривиальный аннулирующий многочлен всегда можно нормировать таким образом, чтобы старший коэффициент был равен +1. Многочлен со старшим коэффициентом +1 называется *нормированным.* Заметим, что нормированный многочлен не может быть тождественно нулевым.

17.3.1. Теорема. *Пусть задана матрица* $A \in M_n$. *Существует единственный нормированный многочлен* $q_A(t)$, *имеющий минимальную степень среди аннулирующих А многочленов. Степень этого многочлена не выше п. Любой многочлен* $p(t)$, *такой, что* $p(A) = 0$, *делится на* $q_A(t)$.

Доказательство. Матрица *А* аннулируется, в частности, характеристическим многочленом, имеющим степень *n.* Поэтому найдется минимальное положительное целое $m \leqslant n$, для которого существует нормированный многочлен $q(t)$ степени *ь,* такой, что $q(A) = 0$. Если *p(t)* аннулирует *А* и *q{t)* есть аннулирующий *А* нормированный многочлен минимальной степени, то степень многочлена *q(t)* не выше степени многочлена *p(t).* Следовательно, согласно, алгоритму Евклида, существуют многочлены *h(t)* и *r(t),* такие, что $p(t) = q(t)h(t) + r(t)$ и степень *r(t)* меньше, чем степень *q(t).* Тогда $0 = p(A) = q(A)h(A) +$ $+ r(A) = 0h(A) + r(A)$, и, значит, $r(A) = 0$. Если $r(t) \not\equiv 0$, то после его нормирования мы получили бы нормированный аннулирующий *А* многочлен, степень которого меньше, чем степень *q(t).* Поскольку это противоречит минимальности многочлена *q(t),* не остается ничего другого, кроме как считать, что $r(t) \equiv 0$. Следовательно, *p(t)* делится на *q(t)* и при этом частное есть *h(t).* Таким образом, любые два нормированных аннулирующих *А* многочлена, имеющие минимальную степень, обязаны делиться один на другой, а так как их степени одинаковы, каждый из них есть не что иное, как скалярное кратное другого. Вследствие нормированности обоих многочленов этот скалярный множитель должен быть равен +1, а значит, эти многочлены совпадают.

17.3.2. Определение. Пусть задана матрица $A \in M_n$. Единственный нормированный многочлен ,$q_A(t)$, имеющий минимальную степень среди аннулирующих *A* многочленов, называется *минимальным многочленом* матрицы *A*.

17.3.3. Следствие. *Подобные матрицы имеют один и тот же минимальный многочлен.*

Доказательство. Если $A,\ B,\ S \in M_n$, и $A = SBS^{-1}$, то $q_B(A) = q_B(SBS^{-1}) = Sq_B(B)S^{-1} = 0$, поэтому степень $q_B(t)$ не меньше степени $q_A(t)$. Запись $B = S^{-1}AS$ позволяет в силу тех же доводов утверждать, что степень $q_A(t)$ не меньше, чем степень $q_B(t)$. Таким образом, эти два нормированных многочлена имеют одну и ту же минимальную степень и оба аннулируют матрицу *A*. По теореме 17.3.1 они должны совпадать.

17.3.4. Следствие. *Для всякой матрицы* $A \in M_n$ *минимальный многочлен* $q_A(t)$ *является делителем характеристического многочлена* $p_A(t)$. *Кроме того,* $q_A(\lambda) = 0$ *тогда и только тогда, когда* λ *есть собственное значение матрицы A, т. е. каждый корень уравнения* $p_A(t) = 0$ *является корнем уравнения* $q_A(t) = 0$.

Доказательство. Имеем $p_A(A) = 0$; поэтому из теоремы 17.3.1 вытекает существование многочлена $h(t)$, такого, что $p_A(t) = h(t)\,q_A(t)$. Из этого разложения ясно, что каждый корень уравнения $q_A(t) = 0$ есть также корень уравнения $p_A(t) = 0$, и, следовательно, каждый корень уравнения $q_A(t) = 0$ является собственным значением матрицы *A*. Пусть матрица *A* имеет собственное значение λ, и отвечающий ему собственный вектор $x \neq 0$. Тогда $Ax = \lambda x$ и, значит,

$$0 = q_A(A)\,x = q_A(\lambda)\,x,$$

а стало быть, и $q_A(\lambda) = 0$.

Это последнее следствие показывает, что если характеристический многочлен $p_A(t)$ полностью разложен на множители, т. е.

$$p_A(t) = \prod_{i=1}^{m} (t - \lambda_i)^{s_i}, \quad 1 \leqslant s_i \leqslant n, \quad s_1 + s_2 + \ldots + s_m = n, \qquad (17.3.5a)$$

где $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_m$ различны, то минимальный многочлен $q_A(t)$ имеет вид

$$q_A(t) = \prod_{i=1}^{m} (t - \lambda_i)^{r_i}, \quad 1 \leqslant r_i \leqslant s_i. \qquad (17.3.5b)$$

В принципе на этом можно основать следующий алгоритм построения минимального многочлена произвольной заданной матрицы *А*.

1. Сначала для *А* вычисляем собственные значения вместе с их алгебраическими кратностями (возможно, для этого придется определить характеристический многочлен и найти его полное разложение на множители), т. е. тем или иным способом получаем разложение (17.3.5а).

2. Теперь имеется конечное число многочленов, представимых в виде (17.3.5b). Начиная с произведения, в котором $r_i = 1$ для всех *i*, прямым вычислением определяем такой многочлен наименьшей степени, который аннулирует матрицу *А*. Это и будет минимальный многочлен.

С вычислительной точки зрения это не очень хороший алгоритм, если по ходу дела нужно искать разложение характеристического многочлена какой-либо большой матрицы. Однако он очень эффективен при вычислениях вручную для небольших матриц простого вида. Есть и другой подход к вычислению минимального многочлена, где не требуется находить характеристический многочлен или собственные значения. Он указывается в задаче 5 в конце этого параграфа.

Минимальный многочлен матрицы *А* и ее жорданова каноническая форма весьма тесно связаны между собой. Запишем $A = SJS^{-1}$, где *J* — жорданова каноническая форма для *А,* и сначала предположим, что *J* — это в точности одна жорданова клетка:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} \in M_n.$$

Характеристический многочлен матрицы *А* имеет вид $(t-\lambda)^n$, и так как $(J-\lambda I)^k \neq 0$ при $k < n$, минимальный многочлен тоже есть $(t-\lambda)^n$. Если

$$J = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda) & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda) \end{bmatrix} \in M_n,$$

где $n_1 \geqslant n_2$, то характеристический многочлен для *J* по-прежнему имеет вид $(t-\lambda)^n$, но теперь $(J-\lambda I)^{n_1} = 0$ и матрица $J - \lambda I$, возведенная в любую степень, меньшую n_1, отлична от нуля. Следовательно, минимальный многочлен есть $(t-\lambda)^{n_1}$. При еще большем числе клеток получаем по существу то же самое:

минимальный многочлен матрицы J имеет вид $(t-\lambda)^r$, где r равно порядку наибольшей жордановой клетки, отвечающей λ. Минимальный многочлен произвольной жордановой матрицы J разлагается на множители $(t-\lambda_i)^{r_i}$, отвечающие всем различным собственным значениям λ_i, и степень r_i равна порядку наибольшей жордановой клетки для λ_i. Чтобы аннулировать все клетки, отвечающие λ_i, большей степени не требуется, но никакой меньшей степенью этого добиться невозможно. Так как подобные матрицы имеют один и тот же минимальный многочлен, мы сейчас доказали следующую теорему.

17.3.6. Теорема. *Пусть матрица* $A \in M_n$ *имеет различные собственные значения* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. *Тогда минимальный многочлен матрицы A имеет вид*

$$q_A(t) = \prod_{i=1}^{m}(t-\lambda_i)^{r_i}, \qquad (17.3.7)$$

где r_i *равно порядку наибольшей жордановой клетки матрицы A, отвечающей собственному значению* λ_i.

Для практического вычисления минимального многочлена этот результат не очень полезен, так как построение жордановой канонической формы какой-либо матрицы обычно является задачей более трудной, чем получение ее минимального многочлена. Кроме того, если известны только собственные значения матрицы, то минимальный многочлен можно построить просто методом проб и ошибок. Однако нужно отметить важные теоретические следствия. Так, диагонализуемость матрицы равносильна тому, что все ее жордановы клетки имеют порядок 1, и, следовательно, для диагонализуемости необходимо и достаточно, чтобы $r_i = 1$ для всех J в (17.3.7).

17.3.8. Следствие. *Пусть матрица* $A \in M_n$ *имеет различные собственные значения* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. *Тогда A диагонализуема в том и только в том случае, когда* $q(A) = 0$, где

$$q(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\ \ldots\ (t-\lambda_m). \qquad (17.3.9)$$

Этот критерий действительно удобен для выяснения диагонализуемости заданной матрицы: если для матрицы известны собственные значения, то легко образовать многочлен (17.3.9) и посмотреть, аннулирует ли он матрицу *A*. Если да, то это минимальный многочлен матрицы *A,* так как никакой многочлен меньшей степени не может в качестве корней иметь *m* различных собственных значений матрицы *A*. Иногда бывает полезна та или иная эквивалентная формулировка этого результата.

17.3.10. Следствие. *Пусть задана матрица* $A \in M^n$. *Необходимым и достаточным условием ее диагонализуемости является каждое из следующих свойств:*

(a) *минимальный многочлен* $q_A(t)$ *разлагается на различные линейные множители;*

(b) *все корни уравнения* $q_A(t) = 0$ *имеют кратность* 1;

(c) *для любого* t, *такого, что* $q_A(t) = 0$, *выполняется неравенство* $q'_A(t) \neq 0$ $(q'_A(t)$ *— производная многочлена* $q_A(t))$.

До сих пор мы рассматривали проблему определения по заданной матрице $A \in M_n$ нормированного аннулирующего ее многочлена минимальной степени. Теперь обсудим обратную задачу. Пусть задан нормированный многочлен

$$p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + \ldots + a_1 t + a_0. \qquad (17.3.11)$$

Спрашивается, существует ли такая матрица *A,* для которой *p(t)* является минимальным многочленом? Если да, то порядок матрицы *A* не меньше *n;* в действительности такой матрицей может быть $A \in M_n$ и она ищется без труда. Положим

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & 0 & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in M_n \qquad (17.3.12)$$

и заметим, что

$$\begin{aligned}
Ie_1 &= e_1 = A^0 e_1, \\
Ae_1 &= e_2 = Ae_1, \\
Ae_2 &= e_3 = A^2 e_1, \\
Ae_3 &= e_4 = A^3 e_1, \\
&\cdots\cdots \\
Ae_{n-1} &= e_n = A^{n-1} e_1, \\
Ae_n &= -a_{n-1}e_n - a_{n-2}e_{n-1} - \ldots - a_1 e_2 - a_0 e_1 = \\
&= -a_{n-1}A^{n-1}e_1 - a_{n-2}A^{n-2}e_1 - \ldots - a_1 Ae_1 - a_0 e_1 = A^n e_1 = \\
&= [A^n - p(A)]\, e_1.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
p(A)\, e_1 &= (a_0 e_1 + a_1 Ae_1 + a_2 A^2 e_1 + \ldots + a_{n-1}A^{n-1}e_1) + A^n e_1 = \\
&= [p(A) - A^n]\, e_1 + [A^n - p(A)]\, e_1 = 0.
\end{aligned}$$

Далее, $p(A)e_k = p(A)A^{k-1}e_1 = A^{k-1}p(A)e_1 = A^{k-1}0 = 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Так как $p(A)e_k = 0$ для каждого базисного вектора e_k, получаем $p(A) = 0$. Значит, $p(t)$ — это нормированный многочлен степени n, аннулирующий матрицу A. Если A аннулируется также многочленом $q(t) = t^m + b_{m-1}t^{m-1} + \ldots + b_1t + b_0$ степени $m < n$, то получаем

$$0 = q(A)e_1 = A^m e_1 + b_{m-1}A^{m-1}e_1 + \ldots + b_1Ae_1 + b_0e_1 =$$
$$= e_{m+1} + b_{m-1}e_m + \ldots + b_1e_2 + b_0e_1 = 0,$$

а это означает, что базисный вектор e_{m+1} линейно зависит от базисных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_m$. Это невозможно. Поэтому $p(t)$ не может быть ничем иным, кроме единственного нормированного аннулирующего A многочлена минимальной степени. Кроме того, степень многочлена $p(t)$ равна n и $A \in M_n$, поэтому с учетом того, что характеристический многочлен $p_A(t)$ — это также нормированный аннулирующий A многочлен степени n, находим, что многочлен (17.3.11) есть не что иное, как характеристический многочлен матрицы (17.3.12).

17.3.13. Определение. Матрица (17.3.12) называется *сопровождающей матрицей* многочлена (17.3.11).

(Нередко используют и другие определения сопровождающей матрицы —см. задачу 11 в конце параграфа; иногда называют ее также *матрицей Фробениуса.* В любом случае это простая матрица такого же типа и в ней явным образом содержатся коэффициенты ее характеристического многочлена (совпадающего с минимальным многочленом).

Нами уже доказано следующее утверждение.

17.3.14. Теорема. *Любой нормированный многочлен является одновременно характеристическим и минимальным многочленом своей сопровождающей матрицы.*

Впоследствии мы изучим методы определения областей, содержащих собственные значения матрицы. Ввиду того что корни многочлена являются собственными значениями его сопровождающей матрицы, эти методы можно использовать и для локализации корней многочлена. См. 19.6.

Для заданной матрицы $A \in M_n$ можно определить характеристический многочлен $p_A(t)$ и его сопровождающую матрицу (17.3.12). Если матрица A подобна этой сопровождающей матрице, то (поскольку для подобных матриц минимальные многочлены одинаковы), согласно теореме 17.3.14, минимальный многочлен $q_A(t)$ матрицы A совпадает с ее характеристическим многочленом $p_A(t)$. В общем случае это не так, но если для матрицы $A \in M_n$ минимальный многочлен $q_A(t)$ и характеристический многочлен $p_A(t)$ совпадают, то ее жорданова каноническая форма (17.1.12) должна содержать в точности по одной жордановой клетке для каждого из ее различных собственных значений. Размер каждой жордановой клетки равен кратности соответствующего собственного значения как корня характеристического (минимального) многочлена матрицы *A*. Однако жорданова каноническая форма сопровождающей матрицы многочлена $p_A(t)$ имеет в точности такую же структуру жордановых клеток[1]), а стало быть, сопровождающая матрица подобна матрице *A*. (Для каждого собственного значения сопровождающей матрицы геометрическая кратность (а значит, и число жордановых клеток), как легко видеть, равна 1.) Это рассуждение доказывает следующую теорему.

17.3.15. Теорема. *Матрица* $A \in M_n$ *подобна сопровождающей матрице своего характеристического многочлена тогда и только тогда, когда характеристический и минимальный многочлены совпадают.*

Упражнение. Показать, что матрица $A \in M_n$ подобна сопровождающей матрице своего характеристического многочлена в том и только в том случае, когда *A* проста.

17.4. Другие канонические формы и разложения

Одно из разложений матрицы связано с ее жордановой канонической формой. Однако в различных ситуациях бывают полезны и некоторые другие разложения.

Мы начнем с изучения варианта жордановой канонической формы (17.1.12) для матрицы *A* с вещественными элементами. В этом случае все невещественные собственные значения разбиваются на комплексно-сопряженные пары. Более того, если матрица *A* вещественная, то $\operatorname{rank}(A-\lambda I)^k = \operatorname{rank}\overline{(A-\lambda I)}^k =$
$= \operatorname{rank}(A-\bar{\lambda} I)^k$ для всех $\lambda \in \mathbf{C}$ и всех k= 1,2, ..., и, следовательно, структура жордановых клеток, отвечающих любому собственному значению λ, в точности такая же, как и структура кордановых клеток, отвечающих комплексно-сопряженному собственному значению $\bar{\lambda}$. Таким образом, жордановы клетки всех размеров (а не только 1 × 1), отвечающие невещественным собственным значениям, разбиваются на «сопряженные» пары матриц одного порядка.

Например, пусть λ — невещественное собственное значение вещественной матрицы A. Тогда если в жорданову каноническую форму для A клетка $J_2(\lambda)$ входит с какой-то кратностью, то клетка $J_2(\bar{\lambda})$ входит в нее с такой же кратностью. Блочная матрица

$$\begin{bmatrix} J_2(\lambda) & 0 \\ 0 & J_2(\bar{\lambda}) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \bar{\lambda} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\lambda} \end{array}\right] \qquad (17.4.1)$$

перестановочно подобна (достаточно переставить строки и столбцы с номерами 2 и 3) блочной матрице (матрицы перестановочно подобны, когда они подобны и подобие осуществляется матрицей перестановки)

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\lambda} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} D(\lambda) & I \\ 0 & D(\lambda) \end{bmatrix},$$

где

$$D(\lambda) \equiv \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix} \in M_2, \qquad I \in M_2.$$

В общем случае жорданова матрица вида

$$\begin{bmatrix} J_k(\lambda) & 0 \\ 0 & J_k(\bar{\lambda}) \end{bmatrix} \in M_{2k} \qquad (17.4.2)$$

перестановочно подобна блочной матрице

$$\begin{bmatrix} D(\lambda) & I & & & 0 \\ & D(\lambda) & I & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & I \\ 0 & & & & D(\lambda) \end{bmatrix} \in M_{2k},$$

где на главной диагонали находятся k блоков $D(\lambda)$, а на соседней с ней k— 1 единичных матриц размера 2×2.

Каждый 2 × 2-блок $D(\lambda)$ подобен вещественной 2×2-матрице

$$SD(\lambda)S^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \equiv C(a, b), \qquad (17.4.3)$$

где $\lambda = a + ib,\ a, b \in \mathbf{R}$ и $S = \begin{bmatrix} -i & -i \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Поэтому любая блочная пара сопряженных жордановых клеток (17.4.1) размера 2×2 с невещественным λ подобна (подобие осуществляется матрицей $\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$) вещественной 4×4-матрице, имеющей вид

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{array}\right] = \begin{bmatrix} C(a, b) & I \\ 0 & C(a, b) \end{bmatrix}.$$

В общем случае любая блочная пара сопряженных жордановых клеток (17.4.2) размера $k \times k$ с невещественным λ подобна вещественной $2k \times 2k$-матрице

$$C_k(a, b) = \begin{bmatrix} C(a, b) & I & & 0 \\ & C(a, b) & I & \\ & & \ddots & I \\ 0 & & & C(a, b) \end{bmatrix}. \qquad (17.4.4)$$

Эти наблюдения приводят нас к *вещественной жордановой канонической форме.*

17.4.5. Теорема. *Любая вещественная матрица* $A \in M_n(\mathbf{R})$ *подобна блочно-диагональной вещественной матрице вида*

$$\begin{bmatrix} C_{n_1}(a_1, b_1) & & & & & & 0 \\ & C_{n_2}(a_2, b_2) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & C_{n_p}(a_p, b_p) & & & \\ & & & & J_{n_q}(\lambda_q) & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & J_{n_r}(\lambda_r) \end{bmatrix},$$

где $\lambda_k = a_k + ib_k$ *— невещественные собственные значения матрицы A при* $k = 1, 2, \ldots, p$, a_k, b_k *вещественны, а ее вещественные собственные значения — это* $\lambda_q, \ldots, \lambda_r$. *Каждая вещественная* *блочно-треугольная матрица* $C_{n_k}(a_k,\ b_k) \in M_{2n_k}$ *имеет вид* (17.4.4) *и в жордановой канонической форме* (17.1.12) *для А соответствует паре сопряженных жордановых клеток* $J_{n_k}(\lambda_k),\ J_{n_k}(\bar{\lambda}_k) \in$ $\in M_{n_k}$ *с невещественным* λ_k*. Вещественные жордановы клетки* $J_{n_k}(\lambda_k)$ *в* (17.4.6) *в точности совпадают с жордановыми клетками в* (17.1.12), *отвечающими вещественным* λ_k*.*

Вещественную жорданову каноническую форму вещественной матрицы мы получили как следствие общей (комплексной) жордановой канонической формы (17.1.12). Преимущество такого подхода — в точном указании связи размеров и числа вещественных блоков $C_{n_k}(a_k,\ b_k)$ со структурой комплексных жордановых клеток матрицы *А*. Однако в таком подходе есть и недостаток — неясно, можно ли подобие, преобразующее *А* в матрицу (17.4.6), выполнить с помощью вещественной матрицы.

В действительности если матрица *А* вещественная, то всегда найдется *вещественная* невырожденная матрица *S*, такая, что матрица $S^{-1}AS$ есть вещественная жорданова форма (17.4.6). Это можно доказать, следуя тем трем этапам, которые составляли наше доказательство теоремы о жордановой канонической форме (см. 17.1), только начать нужно именно с вещественного варианта (теорема 16.3.4) триангуляризации по Шуру, а не с комплексного (теорема 16.3.1). На этапах 2 и 3 можно повторить те же построения, что и в комплексном случае, — при этом нужно показать, что возможно использование только вещественных преобразований подобия и с их помощью будут получены модифицированные треугольные или жордановы диагональные блоки, в которых на главной диагонали могут находиться вещественные 2×2-матрицы *C(a,b)* вида (17.4.3).

Комплексная жорданова каноническая форма (17.1.12) — это прямая сумма верхних треугольных матриц. Вещественная жорданова форма (17.4.6) — это прямая сумма хессенберговых, или «почти треугольных», матриц, так как каждый вещественный блок *C (a, b)* имеет порядок 2 и в нем только один элемент находится ниже главной диагонали.

Можно также развить теорию канонических форм, являющихся прямыми суммами сопровождающих матриц. Такие формы можно строить для всех комплексных матриц, но их преимущество состоит в том, что они применимы и для полей, отличных от **С**, когда жордановой канонической формы просто нет.

Пусть задана матрица $A \in M_n$ и ее жорданова каноническая форма имеет вид (17.1.12). Для всех различных собственных значений соберем вместе все жордановы клетки, отвечающие общему собственному значению. В каждой группе клеток выберем клетку наибольшего порядка и исключим ее из своей группы. Пусть B_1 обозначает прямую сумму всех этих исключенных клеток. В прямой сумме B_1 будет столько слагаемых, сколько у A имеется различных собственных значений. Теперь из оставшихся клеток в каждой группе выберем жорданову клетку наибольшего порядка и снова исключим ее из своей группы. Пусть B_2 обозначает прямую сумму всех этих клеток. Прямая сумма B_2 может состоять из меньшего числа слагаемых, чем B_1, поскольку теперь какие-то группы клеток могли оказаться пустыми, т. е. каким-то собственным значениям для A отвечает только одна жорданова клетка. Продолжим эту процедуру получения прямых сумм $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_s$ до тех пор, пока все группы жордановых клеток не сделаются пустыми. Размеры матриц B_k монотонно не возрастают. Матрица $B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_s$ перестановочно подобна исходной жордановой форме (17.1.12) матрицы A.

Вследствие способа определения прямых сумм B_k для каждого k матрица B_k имеет совпадающие характеристический и минимальный многочлены. Для B_1 характеристический (минимальный) многочлен на самом деле есть не что иное, как минимальный многочлен матрицы A. Таким образом, согласно теореме 17.3.15, для каждого k матрица B_k подобна сопровождающей матрице своего характеристического (минимального) многочлена.

Характеристические (минимальные) многочлены матриц B_k известны как *инвариантные множители* $f_k(t)$ матрицы A. Обратим внимание на то, что их степени монотонно не возрастают и $f_k(t)$ делится на $f_{k+1}(t)$ для каждого $k = 1, 2, \ldots, s-1$. Первый инвариантный множитель $f_1(t) = q_{B_1}(t)$ — это минимальный многочлен матрицы A, а произведение всех инвариантных множителей равно характеристическому многочлену матрицы A. Инвариантные множители однозначно определяются структурой жордановых клеток матрицы A, а последняя в свою очередь — собственными значениями λ_i и последовательностью рангов степеней матриц $A - \lambda_i I$. Таким образом, для подобных матриц инвариантные множители одни и те же. К тому же они полностью определяют структуру жордановых клеток, и поэтому две матрицы с одинаковыми инвариантными множителями должны быть подобны. Итак, последовательность инвариантных множителей матрицы (в нее входит минимальный многочлен и по ней определяется характеристический многочлен) является *полным набором многочленов — инвариантов подобия:* две матрицы A,

$B \in M_n$ подобны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые инвариантные множители.

Рассмотрим еще один способ, позволяющий охарактеризовать инвариантные множители матрицы *A*. Пусть $f_1(t) = (t - \lambda_1)^{r_1} \ldots$

$\ldots (t - \lambda_m)^{r_m}$ — минимальный многочлен матрицы *A*. Из жордановой формы матрицы исключаем жордановы клетки, соответствующие множителям $(t - \lambda_i)^{r_i}$ многочлена $f_1(t)$ (это в точности те жордановы клетки, которые составляют матрицу B_1), и рассмотрим $f_2(t) = (t - \lambda_1)^{s_1} \ldots (t - \lambda_m)^{s_m}$ — минимальный многочлен матрицы с оставшимися жордановыми клетками. Теперь исключим по одному блоку, соответствующему каждому множителю $(t - \lambda_i)^{s_i}$, и обозначим через $f_3(t)$ минимальный многочлен новой матрицы после исключения блоков и т. д. Инвариантные множители $f_k(t)$ — это не что иное, как минимальные многочлены серии матриц, порядок которых на каждом шаге последовательно понижается за счет исключения некоторых жордановых клеток.

Характеризация подобных матриц в терминах инвариантных множителей, привлекает в теоретическом плане, так как с очевидностью показывает, почему минимального и характеристического многочленов недостаточно для того, чтобы распознать подобие. В то же время она по существу ничего нового не добавляет к тому, что мы уже знаем: две матрицы подобны тогда и только тогда, когда одинаковы их жордановы канонические формы.

С другой стороны, эта характеризация приводит к новой канонической форме матрицы *A*, известной как *рациональная форма,* вследствие того, что инвариантные множители можно вычислить, используя только рациональные операции над элементами матрицы *A*.

17.4.7. Теорема. *Любая матрица* $A \in M_n$ *подобна прямой сумме сопровождающих матриц ее инвариантных множителей.*

Для комплексных матриц мы уже располагаем жордановой канонической формой, и потому может показаться, что рациональная форма из теоремы 17.4.7 не обладает никакими преимуществами. Причина, по которой рассматривается рациональная форма, заключается в возможности ее использования для матриц над *произвольным* полем, а не только в случае комплексных чисел. Любая матрица над полем **F** подобна *над* **F** прямой сумме сопровождающих матриц своих инвариантных множителей — однозначно определенных многочленов с коэффициентами из **F**. Проиллюстрируем это для вещественного поля.

Произвольная заданная вещественная матрица $A \in M_n(\mathbf{R})$ подобна (возможно, преобразование осуществляется комплексной матрицей) прямой сумме $B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_s$, которая в свою очередь подобна прямой сумме сопровождающих матриц своих инвариантных множителей (характеристических многочленов матриц B_k, где $k = 1, ..., s$). Жордановы клетки матрицы A, отвечающие невещественным собственным значениям, разбиваются на сопряженные пары. Следовательно, если какая-то клетка, со-ответствующая невещественному собственному значению, входит в матрицу B_k, то сопряженная клетка должна принадлежать той же самой матрице B_k $(k = 1, \ldots, s)$. Таким образом, каждая матрица B_k имеет *вещественный* характеристический многочлен, что согласуется с вещественностью формы, обеспечиваемой теоремой 17.4.7. Это рациональная форма вещественной матрицы, и в действительности она достигается с помощью вещественного подобия — доказательство мы опускаем.

17.4.8. Теорема. *Любая вещественная матрица* $A \in M_n(\mathbf{R})$ *подобна над* **R** *прямой сумме сопровождающих матриц вещественных нормированных многочленов* $p_1(t), p_2(t), \ldots, p_s(t)$, *где* $p_k(t)$ *делится на* $p_{k+1}(t)$ *при* $k = 1, 2, \ldots, s-1$. *Многочлен* $p_1(t)$ *является минимальным многочленом для A над* **R**, *произведение* $p_1(t) \ldots p_s(t)$ *есть характеристический многочлен матрицы A и для каждого k многочлен* $p_k(t)$ *— это инвариантный множитель матрицы A над* **R**. *Многочлены* $p_k(t)$ *определяются однозначно, так что две матрицы подобны над* **R** *в том и только в том случае, когда они имеют одни и те же инвариантные множители.*

Подчеркнем, что теорема такого же типа справедлива и в случае поля ***Q*** рациональных чисел или какого угодно другого поля. Свое название рациональная форма получила благодаря тому, что любая матрица $A \in M_n(\mathbf{R})$ приводится к этой форме в принципе с помощью конечного числа рациональных вычислений над элементами матрицы A, не выводящих из поля **F**. Так, если **F** есть поле рациональных чисел, то будут использоваться многочлены с рациональными коэффициентами и подобия, осуществляемые матрицами с рациональными элементами.

С сопровождающими матрицами связана еще одна каноническая форма, к которой тоже можно прийти, исходя из жордановой канонической формы (17.1.12). Заметим, что любой отдельно взятый жорданов блок обладает тем свойством, что его характеристический и минимальный многочлены совпадают. Значит, каждый жорданов блок $J_{n_i}(\lambda_i)$ подобен сопровождающей матрице своего характеристического многочлена $(t-\lambda_i)^{n_i}$. В целом жорданова каноническая форма, следовательно, подобна прямой сумме сопровождающих матриц многочленов $(t-\lambda_i)^{n_i}$; эти многочлены известны как *элементарные делители* матрицы *A*. Обратим внимание на то, что в общем случае этот способ разложения матрицы *A* приводит к большему числу слагаемых в прямой сумме, чем рациональная форма; каждый инвариантный множитель может порождать несколько элементарных делителей. Произведение всех элементарных делителей совпадает с характеристическим многочленом матрицы *A*.

Пусть $A \in M_n(\mathbf{R})$. Построим для *A* жорданову форму и элементарные делители над **C** и заметим, что они разбиваются на сопряженные пары. Если клетки $J_{n_i}(\lambda)$ и $J_{n_i}(\bar{\lambda})$ объединить в прямую сумму, то в результате будет получен блок, для которого вещественный многочлен $(t-\lambda)^{n_i}(t-\bar{\lambda})^{n_i}$ будет характеристическим и одновременно минимальным многочленом. Следовательно, этот блок подобен вещественной сопровождающей матрице многочлена $(t^2-(2\operatorname{Re}\lambda)t+|\lambda|^2)^{n_i}$ — вещественного элементарного делителя матрицы *A*. Для каждого вещественного собственного значения матрицы *A* элементарными делителями будут степени вещественных линейных множителей.

Каноническую форму, связанную с элементарными делителями, во избежание путаницы называют обычно *рациональной канонической формой.*

17.4.9. Теорема. *Любая матрица* $A \in M_n(\mathbf{R})$ *подобна над* **R** *прямой сумме сопровождающих матриц своих (вещественных) элементарных делителей.*

Результат такого же типа справедлив по отношению к произвольному полю **F**: любая матрица $A \in M_n(\mathbf{F})$ подобна над **F** прямой сумме сопровождающих матриц своих элементарных делителей, являющихся многочленами с коэффициентами из F.

В качестве примера рассмотрим матрицы

$$A_1=[1],\quad A_2=\begin{bmatrix}0 & -4\\ -1 & 4\end{bmatrix},\quad A_3=\begin{bmatrix}0 & -9\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad A_4=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

и положим $A = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_3 \oplus A_4 \in M_9$. Тогда рациональная каноническая форма для *A* над **R** имеет вид $A = A_1 \oplus$ $\oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_3 \oplus [4] \oplus [4]$ и элементарные делители таковы: $x-1,\ (x-2)^2,\ x^2+9,\ x^2+9,\ x-4,\ x-4$. Над **C** рациональная каноническая форма для *A* имеет вид $A_1 \oplus A_2 \oplus [3i] \oplus$

$\oplus [3i] \oplus [-3i] \oplus [-3i] \oplus [4] \oplus [4]$, а элементарными делителями будут многочлены $x-1$, $(x-2)^2$, $x-3i$, $x-3i$, $x+3i$, $x+3i$, $x-4$, $x-4$. Рациональная форма матрицы A над **R** есть прямая сумма сопровождающей матрицы, подобной матрице $A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus [4]$, и сопровождающей матрицы, подобной матрице $A_3 \oplus [4]$. Инвариантные множители таковы:

$$f_1(t) = (t-1)(t-2)^2(t^2+9)(t-4), \qquad f_2(t) = (t^2+9)(t-4).$$

Рациональная форма матрицы A над полем **C** есть прямая сумма сопровождающей матрицы, подобной матрице $A_1 \oplus \oplus A_2 \oplus [3i] \oplus [-3i] \oplus [4]$, и сопровождающей матрицы, подобной матрице $[3i] \oplus [-3i] \oplus [4]$. Заметим, что два слагаемых прямой суммы и инвариантные множители получаются одинаковыми независимо от того, рассматривается ли A как матрица из $M_n(\mathbf{R})$ или из $M_n(\mathbf{C})$. Это не так, если речь идет о рациональной канонической форме и элементарных делителях. См. задачи 2 и 3 в конце этого параграфа.

Вещественная жорданова форма, рациональная форма, рациональная каноническая форма, инвариантные множители и элементарные делители — все это по существу не будет использоваться в оставшейся части этой книги. Мы рассмотрели их здесь исключительно из-за их исторического значения, а также имея в виду потребности матричного анализа в случае полей, отличных от **C**.

Имеется много других полезных канонических форм и матричных разложений. Вот некоторые из них.

(a) **Полярное разложение**. Любую матрицу $A \in M_n$ можно записать как $A = PU$, где $P \in M_n$ — положительно полуопределенная матрица такого же ранга, как и A; матрица $U \in M_n$ унитарна. Всякую невырожденную матрицу $A \in M_n$ можно также записать как $A = GQ$, где $G \in M_n$ — (комплексная) симметричная матрица $(G = G^T)$ и $Q \in M_n$ — (комплексная) ортогональная матрица $(QQ^T = I)$.

(b) **Сингулярное разложение**. Всякую матрицу $A \in M_n$ можно записать как $A = V\Sigma W^*$, где V, $W \in M_n$ — унитарные матрицы и $\Sigma \in M_n$ — диагональная матрица с неотрицательными элементами главной диагонали и такого же ранга, как и A.

(c) **Треугольное разложение** (в 17.5 рассматривается другое треугольное разложение (LU-разложение), в котором матрица записывается как произведение нижней и верхней треугольных матриц.). Любую матрицу $A \in M_n$ можно записать как $A = URU^*$, где $U \in M_n$ — унитарная матрица, а $R \in M_n$ —

верхняя треугольная матрица. Всякую вещественную матрицу $A \in M_n(\mathbf{R})$ можно записать как $A = QRQ^T$, где Q, $R \in M_n(\mathbf{R})$ — соответственно ортогональная и верхняя хессенбергова матрицы специального строения. См. формулу (16.3.5).

(d) Для любой эрмитовой матрицы $A \in M_n$ имеет место разложение $A = SI(A)S^*$, где матрица $S \in M_n$ невырожденная, а матрица $I(A) \in M_n$ диагональная с диагональными элементами, равными +1, —1 или 0. При этом элементов, равных +1 и —1, столько, сколько имеется соответственно положительных и отрицательных собственных значений матрицы *A;* число нулевых диагональных элементов равно *n* — rank *Ф*. См. теорему 18.5.8.

(e) Для любой нормальной матрицы $A \in M_n$ справедливо разложение $A = U\Lambda U^*$, где $U \in M_n$ — унитарная матрица, а $\Lambda \in M_n$ — диагональная матрица с диагональными элементами, равными собственным значениям матрицы *A,* Всякую вещественную нормальную матрицу $A \in M_n(\mathbf{R})$ можно записать как $A = QDQ^T$, где Q, $D \in M_n(\mathbf{R})$ — соответственно ортогональная и блочно-диагональная матрицы специального строения. См. разд. 16.5.8.

(f) Всякую матрицу $A \in M_n$, такую, что $A = A^T$, можно записать как $A = SK(A)S^T$, где $S \in M_n$ — невырожденная матрица, а $K(A) \in M_n$ — диагональная матрица с диагональными элементами, равными +1 или 0, и такого же ранга, как и *A*. См. теорему 18.5.12.

(g) Всякую матрицу $A \in M_n$, такую, что $A=A^T$, можно записать в виде $A = U\Sigma U^T$, где $U \in M_n$ — унитарная матрица, а Σ — диагональная матрица с неотрицательными элементами главной диагонали. Ранг матрицы Σ равен рангу матрицы *A*. См. следствие 18.4.4.

(h) Всякую унитарную матрицу $U \in M_n$ можно записать в виде $U = Qe^{iE}$, а всякую (комплексную) ортогональную матрицу $P \in M_n$ можно записать в виде $P = Qe^{iF}$, где Q, E, $F \in M_n(\mathbf{R})$, Q — вещественная ортогональная матрица $(QQ^T = I)$, E — вещественная симметричная матрица $(E = E^T)$ и F — вещественная кососимметричная матрица $(F = -F^T)$.

(i) Всякую матрицу $A \in M_n$ можно записать как $A = SU\Sigma U^T S^{-1}$, где S — невырожденная матрица, U — унитарная матрица, а Σ—диагональная матрица с неотрицательными диагональными элементами. См. следствие 18.4.10.

17.5. Треугольные разложения

Если система линейных уравнений $Ax = b$ имеет невырожденную треугольную (см. разд. 14.9.3) матрицу коэффициентов $A \in M_n$, то ее единственное решение x вычисляется легко. Например, пусть A имеет верхний треугольный вид:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тогда $\det A = a_{11}a_{22} \ldots a_{nn} \neq 0$ и применяется *обратная подстановка:* уравнение $a_{nn}x_n = b_n$ определяет неизвестную x_n; после этого уравнение $a_{n-1,\,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,\,n}x_n = b_{n-1}$ становится уравнением с одной неизвестной и позволяет найти x_{n-1}; в общем случае i-е уравнение для каждого i в последовательности уравнений

$$\sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = n,\ n-1,\ \ldots,\ 2,\ 1,$$

имеет только одну неизвестную (так как $x_{i+1}, \ldots, x_n$ уже определены) и позволяет вычислить x_i.

Упражнение. Подсчитать число операций скалярного умножения и деления, необходимых для того, чтобы решить систему $Ax=b$, где матрица $A \in M_n$ невырожденная верхняя треугольная, при условии, что используется обратная подстановка.

Упражнение. Описать *прямую подстановку* как способ решения системы $Ax=b$ с невырожденной нижней треугольной матрицей $A \in M_n$.

Обратим внимание на то, что если матрица $A \in M_n$ невырожденная, но не треугольная, то решение системы $Ax = b$ почти так же удобно вычислять, если для A найдено разложение

$$A = LU,$$

где L — нижняя треугольная, а U — верхняя треугольная матрицы.

Упражнение. Показать, что если матрица A невырожденна и, как выше, $A=LU$, то обе матрицы L и U обязаны быть невырожденными и, следовательно, должны обладать ненулевыми диагональными элементами.

Для того чтобы решить систему $Ax = b$, сначала выполним прямую подстановку, чтобы решить систему

$$Ly = b,$$

а затем — обратную подстановку для системы

$$Ux = y.$$

При этом вычислительные затраты будут только в два раза превосходить необходимые для простого треугольного случая. Таким образом, разложения типа LU могут быть полезны при решении линейных систем, если стоимость их построения не окажется слишком высокой. Мы говорим об этих разложениях именно в данной главе потому, что их можно рассматривать как специальные формы представления матриц — только мотивировка теперь связана не с собственными значениями, а с линейными системами.

17.5.1. Лемма. *Предположим, что матрица* $A \in M_n$ *может быть представлена в виде*

$$A = LU,$$

где $L \in M_n$ *— нижняя треугольная матрица, а* $U \in M_n$ *— верхняя треугольная матрица. Тогда для любого блочного разбиения*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \qquad L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix},$$

где $A_{11}, L_{11}, U_{11} \in M_k$, $k \leqslant n$, *справедливы соотношения*

$$L_{11}U_{11} = A_{11},$$

$$L_{11}U_{12} = A_{12}, \qquad L_{21}U_{11} = A_{21},$$

$$L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22} = A_{22}.$$

В частности, верхние левые блоки матриц L и U образуют разложение такого же типа для соответствующего блока матрицы A.

Упражнение. Проверить лемму 17.5.1, выполнив умножение блочных матриц.

17.5.2. Теорема. *Предположим, что* $A \in M_n$ *и* $\operatorname{rank} A = k$. *Если*

$$\det A(\{1, \ldots, j\}) \neq 0, \qquad j = 1, \ldots, k,$$

то для A справедливо разложение

$$A = LU,$$

где L, $U \in M_n$ *— соответственно нижняя треугольная и верхняя треугольная матрицы. Более того, возможно и такое разложение, в котором одна из матриц L или U невырожденная; L и U обе невырожденны в том и только в том случае, когда A невырожденна.*

Доказательство. Покажем сначала, что вследствие условия на ведущие миноры подматрицу $A(\{1, \ldots, k\})$ можно представить произведением $L(\{1, \ldots, k\})U(\{1, \ldots, k\})$ с невырожденными сомножителями. Это можно сделать, последовательно определяя соответствующие элементы матриц L и U. Пусть $L=[l_{ij}]$ и $U=[u_{ij}]$. Положим $u_{11}=1$ и $l_{i1}=a_{i1}$ $(i=1,\ \dots,\ k)$. Т огда

$$u_{1j}=\frac{a_{1j}}{l_{11}},\qquad j=2,\ \dots,\ k.$$

Продолжаем. Положим

$$u_{22}=1 \text{ и } l_{i2}=a_{i2}-l_{i1}u_{12}\ (i=2,\ \dots,\ k).$$

Тогда получаем

$$u_{2j}=\frac{a_{2j}-l_{21}u_{1j}}{l_{22}},\qquad j=3,\ \dots,\ k.$$

Продолжаем. Диагональные элементы матрицы U последовательно полагаем равными 1, затем определяем очередной столбец в $L(\{1,\ \dots,\ k\})$ и после этого — очередную строку в $U(\{1,\ \dots,\ k\})$. Каждый раз нужно решить одно уравнение с одним неизвестным. Разрешимость этих уравнений обеспечивается отличием от нуля элементов l_{ii} вследствие равенства

$$\det L(\{1,\ \dots,\ i\})\cdot\det U(\{1,\ \dots,\ i\})=\det A(\{1,\ \dots,\ i\}),$$

вытекающего из леммы 17.5.1. Итак, разложение для $A(\{1,\ ...,\ k\})$ построено.

Разобьем матрицу A на блоки так же, как в лемме 17.5.1. Поскольку $\operatorname{rank} A=k=\operatorname{rank} A_{11}$, то строки подматрицы $[A_{21}\,A_{22}]$ однозначно выражаются как линейные комбинации строк подматрицы $[A_{11}\,A_{12}]$, так что

$$A_{21}=BA_{11},\qquad A_{22}=BA_{12},$$

где матрица $B\in M_{n-k,\ k}$ определяется единственным образом. Теперь разобьем на блоки искомые матрицы L и U так же, как в лемме 17.5.1. При этом L_{11} и U_{11} уже получены. Вновь обращаясь к лемме 17.5.1, находим

$$U_{12}=L_{11}^{-1}A_{12},\qquad L_{21}=A_{21}U_{11}^{-1}.$$

Теперь получаем

$$A_{22}=L_{21}U_{12}+L_{22}U_{22}=A_{21}U_{11}^{-1}L_{11}^{-1}A_{12}+L_{22}U_{22}=$$
$$=BA_{11}A_{11}^{-1}A_{12}+L_{22}U_{22}=A_{22}+L_{22}U_{22}$$

и, чтобы завершить разложение, необходимо и достаточно обеспечить равенство

$$L_{22}U_{22}=0.$$

В качестве L_{22} (или U_{22}) можно взять, например, совершенно произвольную невырожденную нижнюю (или верхнюю) треугольную матрицу из M_{n-k}, и тогда U_{22} (или L_{22}) будет нулевой матрицей. Вследствие невырожденности матриц L_{11} и U_{11} одну из матриц L или U

всегда можно выбрать невырожденной. Если $k=n$, то матрицы $L = L_{11}$ и $U = U_{11}$ обе невырожденные; если $k<n$, то одновременно невырожденными матрицы L и U быть не могут в силу вырожденности матрицы A. Теорема доказана.

17.5.3. Пример. Не для всякой матрицы существует LU-разложение. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Если бы A имела вид

$$A = LU = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix},$$

то равенство $l_{11}u_{11} = 0$ означало бы вырожденность одной из матриц L или U, а это противоречит невырожденности матрицы $A = LU$.

Упражнение. Доказать, что невырожденная матрица, в которой какая-то левая верхняя главная $k \times k$-подматрица вырожденная, не может иметь LU -разложения.

17.5.4 Пример. Матрица $A \in M_n$ может иметь LU -разложение, не удовлетворяя условиям теоремы 17.5.2 на ведущие миноры. Так, матрица

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

имеет ранг 1, но ее позиция (1,1) содержит 0.

Упражнение. Для матрицы из приведенного выше примера LU-разложение неединственно, даже если в U диагональные элементы считать равными 1. Построить несколько различных разложений матрицы $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Теперь уже должно быть ясно, что LU -разложение в одних случаях существует, в других — не существует, причем для любой заданной матрицы ее LU-разложение может быть в высшей степени неединственным. Однако в основном неопределенность вызывается вырожденностью самой матрицы A или ее ведущих подматриц. На базе леммы 17.5.1 и теоремы 17.5.2 тем не менее можно дать полное описание для невырожденного случая, в котором с помощью нормирования удается добиться единственного (канонического) разложения.

17.5.5. Следствие. *Предположим, что матрица* $A \in M_n$ *невырожденна. Тогда она представима в виде*

$$A = LU,$$

где $L,\ U \in M_n$ — соответственно нижняя и верхняя треугольные матрицы, в том и только в том случае, когда

$$\det A(\{1, \ldots, j\}) \neq 0, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Кроме того, матрицы L и U невырожденны и разложение по существу однозначно. Для A справедливо представление

$$A = L' DU',$$

где L' и U' — нижняя и верхняя треугольные матрицы из M_n с диагональными элементами, равными 1, *а D — невырожденная диагональная матрица, определенная соотношениями*

$$\det D(\{1, \ldots, j\}) = \det A(\{1, \ldots, j\}), \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Матрицы L', U' и D по A определяются однозначно.

Упражнение. Продумать детали доказательства этого следствия, опираясь на лемму 17.5.1, теорему 17.5.2 и предыдущие упражнения.

Возвращаясь к решению системы линейных уравнений

$$Ax=b,$$

предположим, что матрицу $A \in M_n$ нельзя представить в виде *LU*, но можно — в виде *PLU*, где $P \in M_n$ —*матрица перестановки* (см. разд. 14.9.5), а *L* и *U* — как и раньше, нижняя и верхняя треугольные матрицы. Это отвечает переупорядочению уравнений перед выполнением *LU*-разложения. Решение системы $Ax = b$ и в этом случае находится достаточно просто — путем решения двух треугольных систем

$$Ly = P^T b \quad \text{и} \quad Ux = y.$$

Важно отметить, что такое разложение выполнимо для любой невырожденной матрицы $A \in M_n$. К тому же совершенно *произвольную* матрицу $A \in M_n$ можно разложить в произведение *PLUQ*, где матрица $Q \in M_n$ также реализует перестановку.

17.5.6. Лемма. *Пусть матрица $A \in M_k$ невырожденна. Тогда существует матрица перестановки $P \in M_k$, такая, что*

$$\det(P^T A)(\{1, \ldots, j\}) \neq 0, \qquad j = 1, \ldots, k.$$

Отметим, что матрица $P^T A$ есть не что иное, как матрица A с переставленными строками.

Доказательство. Проведем индукцию по *k*. Если *k* = 1 или 2, этот результат проверяется непосредственно. Предположим, что он уже установлен для всех порядков вплоть до *k*—1 включительно. Рассмотрим невырожденную матрицу $A \in M_k$ и вычеркнем ее последний столбец. Оставшиеся *k*—1 столбцов будут линейно независимы и, следовательно, содержат *k*—1 линейно независимых строк. Сделаем эти k—1 строк первыми и применим предположение индукции к невырожденной ведущейподматрице порядка k—1. Мы описали нужную нам полную перестановку. Для завершения доказательства остается заметить, что матрица P^TA невырожденна. D

17.5.7. Теорема. *Пусть* $A \in M_n$. *Существуют матрицы перестановок* P, $Q \in M_n$, *нижняя треугольная матрица* и $L \in M_n$ *верхняя треугольная матрица* $U \in M_n$, *такие, что*

$$A = PLUQ.$$

Если A невырожденна, то можно выбрать Q = I и тогда

$$A = PLU.$$

Доказательство. Если rank A=k, то в A имеется невырожденная подматрица размера $k\times k$ (см. свойство 14.4.4.2), которую перестановками строк и столбцов можно переместить в левый верхний угол. Теперь применение леммы 17.5.6 и теоремы 17.5.2 обеспечивает построение разложения первого типа. Если матрица A невырожденна, то, согласно лемме 17.5.6, переставлять столбцы не потребуется. После перестановки мы можем применить теорему 17.5.2, которая приводит к разложению второго типа и завершает это доказательство.

Микромодуль 51
Индивидуальные тестовые задания

Задачи к п.17.3.

1. Пусть матрицы A, $B \in M_3$ нильпотентны. Доказать, что A и B подобны тогда и только тогда, когда они имеют один и тот же минимальный многочлен. Верно ли это для матриц из M_4?

2. Предположим, что известны собственные значения λ_1, λ_2, ..., λ_m матрицы $A \in M_n$. Используя теорему 17.3.6, показать, что минимальный многочлен (17.3.7) определяется по следующему алгоритму: для $i = 1, 2, \dots, m$ найти $(A - \lambda_i I)^k$ при $k = 1, 2, \dots, n$ и положить n равным наименьшему значению k, для которого $\operatorname{rank}(A - \lambda_i I)^k = \operatorname{rank}(A - \lambda_i I)^{k+1}$. Число n — это *индекс* собственного значения λi.

3. Матрица $A \in M_n$ называется *идемпотентной,* если A^2=A, Используя следствие 17.3.10, доказать, что любая идемпотентиая матрица диагонализуема. *Указание.* Показать, что A аннулируется многочленом $t^2 - t = t(t-1)$. Каким будет минимальный

многочлен для *A?* Что можно сказать по поводу *трипотентной* матрицы *A,* т. е. такой, что $A^3=A$? А что будет, если $A^k = A$?

4. Доказать, что еслии $A \in M_n$ для $A^k = 0$ какого-то $k>n$, то $A^r = 0$ для некоторого $r \leqslant n$. Таким образом, всякая нильпотентная матрица обращается в нуль при возведении в некоторую степень, не превосходящую ее порядка. *Указание.* Если многочлен $p(t) = t^k$ аннулирует *A,* то как он связан (см. теорему 17.3.1) с ее минимальным многочленом?

5. Доказать, что следующее применение процесса Грама — Шмидта позволяет вычислить минимальный многочлен заданной матрицы $A \in M_n$ непосредственно — без определения характеристического многочлена или собственных значений.

(a) Определим отображение T: $M_n \to \mathbf{C}^{n^2}$ следующим правилом: любую матрицу $A \in M_n$ со столбцами a_1, a_2, $\dots$, a_n запишем в виде $A = [a_1\, a_2\, \dots\, a_n]$ и обозначим через $T(A)$ единственный вектор из $\mathbf{C}^{n^2}$, в котором первые n компонент — это элементы первого столбца a_1, компоненты с n+1-й по $2n$-ю — это элементы второго столбца a_2 и т. д. Доказать, что отображение T есть изоморфизм (отображение линейное, взаимно однозначное и «на») векторных пространств M_n и $\mathbf{C}^{n^2}$.

(b) Рассмотреть векторы

$$v_0 = T(I), \quad v_1 = T(A), \quad v_2 = T(A^2), \ \dots, \ v_k = T(A^k), \ \dots,$$

считая, что они из $\mathbf{C}^{n^2}$ и $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Используя теорему Кэли—Гамильтона, установить линейную зависимость множества $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$.

(c) Применить процесс Грама — Шмидта для последовательности $v_0, v_1, \dots, v_n$— вплоть до его остановки при получении первого нулевого вектора. Почему обязательно будет получен нулевой вектор?

(d) Показать, что если процесс Грама — Шмидта производит нулевой вектор впервые на k-м шаге, то степень минимального многочлена матрицы *A* равна k— 1.

(e) Показать, что если на k-м шаге процесса Грама — Шмидта вычисляется вектор $\alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{k-1} v_{k-1} = 0$, то

$$T^{-1}(\alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{k-1} v_{k-1}) =$$
$$= \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_{k-1} A^{k-1} = 0.$$

Вывести отсюда, что $q_A(t) = (\alpha_{k-1}t^{k-1} + \ldots + \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0)/\alpha_{k-1}$ есть минимальный многочлен матрицы *A*. Почему $\alpha_{k-1} \neq 0$?

6. Проводя вычисления, указанные алгоритмом задачи 5, найти минимальные многочлены матриц $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

7. Рассмотреть матрицы $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и показать, что минимальные многочлены для *AB* и *BA* не обязательно одинаковы. Между тем характеристические многочлены для *AB* и *BA* всегда совпадают. Объяснить, почему наблюдается это различие в свойствах характеристических и минимальных многочленов.

8. Пусть $A_i = M_{n_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ и $q_i(t)$ обозначает минимальный многочлен для A_i. Доказать, что для прямой суммы

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & & 0 \\ & A_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & A_k \end{bmatrix}$$

минимальный многочлен равен наименьшему общему кратному многочленов $q_1(t), q_2(t), \ldots, q_k(t)$. Это единственный нормированный многочлен наименьшей степени, делящийся на $q_i(t)$ для каждого *i*. Обратим внимание на то, что это рассуждение по-новому доказывает лемму 15.3.10.

9. Матрица имеет $A \in M_5$ характеристический многочлен $p_A(t) = (t - 4)^3(t + 6)^2$ и минимальный многочлен $q_A(t) = (t - 4)^2(t + 6)$. Какова жорданова каноническая форма для *A*?

10. С помощью прямого вычисления убедиться в том, что многочлен (17.3.11) является характеристическим многочленом сопровождающей матрицы (17.3.12). *Указание.* Чтобы вычислить определитель, использовать алгебраические дополнения.

11. Сопровождающая матрица многочлена (17.3.11) иногда определяется по-другому — как матрица вида

$$\begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Доказать, что каждая из этих двух матриц, как и (17.3.12), обладает тем свойством, что многочлен (17.3.11) является для нее одновременно характеристическим и минимальным.

12. Доказать, что не существует вещественной 3×3-матрицы с минимальным многочленом x^2+1, но имеются вещественные 2×2-матрицы, а также комплексные 3×3-матрицы, обладающие именно таким минимальным многочленом. *Указание.* Использовать следствие 17.3.4.

13. Показать, что матрицы, имеющие один и тот же характеристический многочлен и один и тот же минимальный многочлен, тем не менее могут не быть подобными — рассмотреть матрицы порядка 4 или более высокого порядка. *Указание.* Взять матрицы

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Доказать, что 4 — наименьший порядок, для которого может наблюдаться это явление.

14. Если матрицы $A, B \in M_n$ подобны и $p(t)$ — произвольный многочлен, то $p(A)=0$ тогда и только тогда, когда $p(B) = 0$. Показать, используя пример из предыдущей задачи, что возможна ситуация, когда для любого многочлена $p(t)$ имеет место эквивалентность равенств $p(A) = 0$ и $p(B) = 0$, но матрицы A и B не подобны. Как это может быть?

15. Пусть задана матрица $A \in M_n$ и образовано множество $P(A) = \{p(A): p(t)$ — произвольный многочлен$\}$. Доказать, что $P(A)$ в M_n является подпространством и даже подалгеброй ($P(A)$ замкнуто относительно умножения). Доказать, что размерность подпространства $P(A)$ равна степени минимального многочлена матрицы A.

16. Матрицы $A, B \in M_n$ имеют один и тот же характеристический многочлен и один и тот же минимальный многочлен. Доказать, что если их характеристические многочлены совпадают с минимальными

многочленами, то они подобны. Используя этот факт, установить, что различные формы сопровождающей матрицы, отмеченные в задаче 11, подобны матрице (17.3.12).

Задачи к п.17.4.

1. Для матриц

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

найти минимальный и характеристический многочлены, инвариантные множители, элементарные делители, рациональную форму и рациональную каноническую форму над **R** и **C**.

2. Пусть $A \in M_n(\mathbf{R})$. Предположим, что *q(t)*—минимальный многочлен для *A* над **R** и *f(t)* — минимальный многочлен для *A* над **C**, Почему степень *f(t)* не выше, чем степень *q(t)?* Почему *q(t)* делится на *f(t)?* Показать, что $f(t) = q(t)$, используя запись $f(t) = p_1(t) + ip_2(t)$, где многочлены $p_1(t)$ и $p_2(t)$ с вещественными коэффициентами. Почему $p_1(A) = p_2(A) = 0$?

3. Используя теорему 17.4.7, доказать, что если A, $B \in M_n(\mathbf{F})$ и **F** есть подполе в **C** (например, $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ или ***Q***), то *A* и *B* подобны над **F** тогда и только тогда, когда они подобны над **C**. *Указание.* Убедиться в том, что рациональные формы матрицы *A* над **F** и над **C** одинаковы и что то же справедливо и по отношению к матрице *B*. Как это обобщает задачу 2?

4. Пусть $A \in M_n(\mathbf{R})$, и предположим, что $A^2 = -I$. Показать, что *n* должно быть четным и что существует вещественная невырожденная матрица $S \in M_n$, такая, что

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix},$$

где $I \in M_{n/2}$.

Задачи к п.17.5.

1. В этом разделе была развита теория *LU*-разложения, где *L* и *U* — нижняя и верхняя треугольные матрицы. Показать, что параллельно можно развить теорию *UL*-разложения. Сомножители в этих разложениях, вообще говоря, будут разными.

2. Напомним, что, согласно задаче 3 из 16.6, *QR*-разложение произвольной матрицы $A \in M_n$ (см. разд. 16.6.1) эффективно строится с помощью *n*—1 преобразований Хаусхолдера. Здесь *Q* —

унитарная, а R — верхняя треугольная матрицы. Описать способ решения системы $Ax = b$, основанный на QR -разложении матрицы A.

3. Доказать, что для любой матрицы $A \in M_n$ имеет место разложение

$$A = LP_0U,$$

где $L,\ U \in M_n$ — невырожденные соответственно нижняя и верхняя треугольные матрицы, а P_0 есть *матрица субперестановки* (получаемая из матрицы перестановки заменой некоторых единиц на нули, причем замен столько, на сколько ранг матрицы A меньше, чем n). *Указание.* Использовать элементарные преобразования строк и столбцов.

4. Пусть все ведущие миноры матрицы $A \in M_n$ отличны от нуля. Описать способ построения ее LU-разложения, основанный на строчных элементарных преобразованиях типа 3, позволяющих получить нули на месте поддиагональных элементов.

5 (алгоритм трехдиагонализации Ланцоша). Пусть заданы матрица $A \in M_n$ и вектор $x \in \mathbf{C}^n$. Образуем матрицу $X = [x\ Ax\ A^2x\ \ldots\ A^{n-1}x]$; ее столбцы составляют так называемую *последовательность Крылова.* Предположим, что X невырожденна.

(a) Доказать, что $X^{-1}AX$ — сопровождающая матрица вида (17.3.12) характеристического многочлена матрицы A.

(b) Доказать, что если $R \in M_n$ — произвольная заданная невырожденная верхняя треугольная матрица и $S = XR$, то матрица $S^{-1}AS$ имеет верхнюю хессенбергову форму.

(c) Пусть $y \in \mathbf{C}^n$, и пусть $Y = [y\ A^*y\ (A^*)^2y\ \ldots\ (A^*)^{n-1}y]$. Предположить, что Y невырожденная и $Y^*X = LDU$, где L и U — нижняя и верхняя треугольные, а D — диагональная матрицы и все три они невырожденпы, и доказать существование невырожденных треугольных матриц R и T, таких, что $(XR)^{-1} = T^*Y^*$ и матрица T^*Y^*AXR трехдиагональна и подобна матрице A.

(d) Пусть матрица $A \in M_n$ эрмитова. На базе изложенных выше идей сформулировать алгоритм построения трехдиаго-нальной эрмитовой матрицы, подобной матрице A.

6. Две матрицы $A,\ B \in M_{mn}$ называются *эквивалентными,* если для каких-то невырожденных матриц $S \in M_m$ и $T \in M_n$ выполняется соотношение

$$B = SAT.$$

(a) Показать, что это есть отношение эквивалентности на множестве $M_{m,\,n}$.

(b) Доказать, что любая матрица $A \in M_{m,n}$ эквивалентна матрице вида $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{m,n}$, где $I \in M_k$ и $k \leqslant \min\{m, n\}$. *Указание.* С помощью элементарных преобразований над строками от A перейти к ступенчатой матрице. Затем использовать элементарные преобразования над столбцами.

(c) Доказать, что две матрицы из $M_{m,n}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый ранг.

(d) Предположим, что матрица $A \in M_{m,n}$ эквивалентна матрице специального вида, указанной в п. (b). Пусть $S\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}T = A$. Развить теорию решения системы линейных уравнений $Ax = b$ в терминах эквивалентности.

Модуль 18
Эрмитовы и симметричные матрицы

Микромодуль 52
Эрмитовы матрицы

18.0. Введение

18.0.1. Пример. Если $f: D \to \mathbf{R}$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция в некоторой области $D \subset \mathbf{R}^n$, то вещественную матрицу

$$H(x) = [h_{ij}(x)] \equiv \left[\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \, \partial x_j}\right] \in M_n$$

называют *гессианом* этой функции (ногда эту матрицу называют матрицей Гессе, а гессианом — ее определитель). Гессиан сам является функцией от x. Это понятие играет важную роль в теории оптимизации, поскольку с его помощью можно определить, является ли некоторая критическая точка локальным максимумом или минимумом (см. 21.0).

Для наших целей здесь существенно лишь одно свойство гессиана, связанное с важным фактом равенства смешанных производных:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i} \quad \text{для всех} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Для гессиана $H=[h_{ij}]$ это означает поэлементное равенство $h_{ij}=h_{ji}$ для всех индексов $i, j=1, 2, \ldots, n$; другими словами, $H=H^T$. Матрицу $A \in M_n$, удовлетворяющую условию $A=A^T$, называют *симметричной.* Таким образом, гессиан дважды непрерывно дифференцируемой вещественной функции всегда будет вещественной симметричной матрицей.

18.0.2. Пример. В качестве второго примера рассмотрим некоторую матрицу $A=[a_{ij}] \in M_n$ с вещественными или комплексными элементами и связанную с этой матрицей квадратичную форму на $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{C}^n$

$$Q(x) \equiv x^T A x = \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i,\, j=1}^{n} \frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji}) x_i x_j = \\ = x^T \left[\frac{1}{2}(A+A^T)\right] x.$$

Из приведенных равенств видно, что матрицы A и $(1/2)(A+A^T)$ приводят к одной и той же квадратичной форме. Однако последняя матрица симметрична, поэтому при изучении вещественных или комплексных форм достаточно ограничиться только формами, связанными с симметричными матрицами. Вещественные квадратичные формы естественным образом возникают в физике, например, как выражение для энергии физического тела.

18.0.3. Пример. Для третьего примера возьмем линейный дифференциальный оператор L второго порядка с частными производными, определенный выражением

$$Lf(x) \equiv \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}. \qquad (18.0.4)$$

Предположим, что коэффициенты $a_{ij}(x)$. . . и функция $f(x)$ определены в некоторой области $D \subset \mathbf{R}^n$. Функция f должна быть дважды непрерывно дифференцируемой в D. Оператору L естественным образом сопоставляется матрица его коэффициентов. Эта матрица $A=[a_{ij}(x)]$ не обязательно симметрична, однако в силу равенства смешанных частных производных функции f имеем

$$Lf = \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,\, j=1}^{n} \frac{1}{2}\left[a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + a_{ji}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right] = \\ = \sum_{i,\, j=1}^{n} \frac{1}{2}\left[a_{ij}(x) + a_{ji}(x)\right] \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Следовательно, симметричная матрица $(1/2)(A+A^T)$ приводит к тому же оператору *L*, что и матрица *A*, и при изучении вещественных или комплексных линейных дифференциальных операторов с частными производными вида (18.0.4) без ограничения общности можно рассматривать лишь случай симметричной матрицы коэффициентов.

f Рассмотрим неориентированный граф Г, т. е. граф Г, состоящий из набора *N* вершин $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ и набора *E* неупорядоченных пар вершин, называемых ребрами,

$$E=\{\{P_{i_1}P_{j_1}\}, \{P_{i_2}, P_{j_2}\}, \ldots\}.$$

Этот граф Г можно описать очень кратко, если воспользоваться так называемой *матрицей смежности* $\mathbf{A}=[a_{ij}]$, где

$$a_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{если } \{P_i, P_j\}\in E, \\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

(Если ребро $\{P_i, P_j\}$ встречается *k* раз в наборе *E,* то обычно полагают $a_{ij}=k$. Тогда матрица смежности *A* однозначно определяет неориентированный граф Г.)

Поскольку Г— неориентированный граф, вещественная матрица *A* будет симметричной, т. е. $A^T=A$.

18.0.6. Пример. Пусть $A=[a_{ij}]\in M_n$ — вещественная матрица. Рассмотрим вещественную билинейную форму

$$Q(x, y)=y^TAx=\sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}y_ix_j, \quad x,\ y\in\mathbf{R}^n, \tag{18.0.7}$$

которая переходит в обычное скалярное произведение при *A=I.* Условие симметричности этой билинейной формы $(Q(x, y)= Q(y, x)$ для всех векторов *x, y)* эквивалентно условию симметричности матрицы A $(a_{ij}=a_{ji}$ для всех индексов $i,\ j=1, \ldots, n)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что при $x=e_j$ и $y=e_i$ имеют место равенства $Q(e_j, e_i)=a_{ij}$ и $Q(e_i, e_j)=a_{ji}$. Таким образом, симметричные вещественные билинейные формы естественным образом связаны с симметричными вещественными матрицами.

Пусть теперь $A=[a_{ij}]\in M_n$ — вещественная или комплексная матрица. Рассмотрим комплексную форму

$$H(x, y)=y^*Ax=\sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}\bar{y}_ix_j, \quad x,\ y\in\mathbf{C}^n, \tag{18.0.8}$$

которая, подобно (18.0.7), сводится к обычному скалярному произведению при *A = I.* Эта форма уже не является билинейной, но она линейна по своему первому переменному и полулинейна («сопряженно линейна») по второму $(H(ax, by) = a\bar{b}H(x, y))$, как и комплексное евклидово скалярное произведение. Такие формы иногда называют *полуторалинеиными.* Если мы хотим, чтобы, как и для скалярного произведения, имело место равенство $H(x, y) = \overline{H(y, x)}$, то обязательно придем к условиям $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$, т. е. $A = \bar{A}^T \equiv A^*$. Обоснованием служат те же аргументы, что и приведенные выше для симметричных форм. Заметим, что если *А* — вещественная матрица, то $A^* = A^T$.

Класс матриц $A \in M_n$, подчиненных условию $A = A^*$, оказывается во многих отношениях естественным обобщением на случай пространства $M_n(\mathbf{C})$ класса вещественных симметричных матриц. Такие матрицы называют *эрмитовыми.* Отметим, что вещественная эрмитова матрица — это просто вещественная симметричная матрица. В классе комплексных невещественных симметричных матриц теряются многие важные свойства, характерные для вещественных симметричных матриц. В данном модуле мы изучим комплексные эрмитовы и симметричные матрицы и укажем особенности случая вещественных симметричных матриц.

18.1. Определения, свойства и характерные особенности эрмитовых матриц

18.1.1. Определение. Матрицу $A = [a_{ij}] \in M_n$ называют *эрмитовой,* если $A = A^*$, где $A^* = \bar{A}^T = [\bar{a}_{ji}]$, и *косоэрмитовой,* если $A = -A^*$.

Перечислим некоторые утверждения о матрицах $A,\ B \in M_n$:

1. Матрицы $A + A^*$, AA^*, A^*A эрмитовы для любой матрицы $A \in M_n$.
2. Если матрица *А* эрмитова, то ее степень A^k эрмитова для всех $k = 1, 2, 3, \ldots$. Если матрица *А* также невырожденна, то и обратная к ней матрица A^{-1} эрмитова.
3. Если *А* и *В* — эрмитовы матрицы, то матрица $aA + bB$ эрмитова для любых вещественных чисел *a, b*.
4. Матрица $A - A^*$ косоэрмитова для любой матрицы $A \in M_n$.
5. Если матрицы *А* и *В* косоэрмитовы, то матрица $aA + bB$ косоэрмитова для всех вещественных чисел *a, b*.
6. Если *А* эрмитова, то *iA* косоэрмитова.
7. Если *А* косоэрмитова, то *iA* эрмитова.

8. Любую матрицу $A \in M_n$ можно записать в виде

$$A = \frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2}(A - A^*) \equiv H(A) + S(A),$$

где $H(A) = (1/2)(A + A^*)$ — эрмитова часть матрицы *A*, а $S(A) = = (1/2)(A - A^*)$ — косоэрмитова часть матрицы *A*.

9. Если матрица *A* эрмитова, то все элементы на ее главной диагонали вещественны. Для того чтобы задать все n^2 элементов матрицы *A*, достаточно указать *n* вещественных чисел (элементов главной диагонали) и $n(n-1)/2$ комплексных чисел (внедиагональиых элементов).

18.1.2. Теорема. *Любую матрицу $A \in M_n$ можно записать единственным образом в виде $A = S + iT$, где обе матрицы S и T эрмитовы. Имеется также единственное представление вида $A = B + C$, в котором матрица B эрмитова, а матрица C косоэрмитова.*

Доказательство. Запишем $A = (1/2)(A + A^*) + i[(-i/2)(A - A^*)]$ и заметим, что обе матрицы $S = (1/2)(A + A^*)$ и $T = (-i/2)(A - A^*)$ эрмитовы. Утверждение о единственности основано на следующем замечании. Если $A = E + iF$, где матрицы *E* и *F* эрмитовы, то

$$2S = A + A^* = (E + iF) + (E + iF)^* = E + iF + E^* - iF^* = 2E,$$

следовательно, *E* = *S*. Аналогично можно установить равенство *F* = *T*. Тем же способом доказывается существование единственного представления вида $A = B + C$.

Если провести аналогию между пространством M_n и комплексными числами, то приведенные выше наблюдения наводят на мысль, что аналогами вещественных чисел окажутся эрмитовы матрицы. Операции комплексного сопряжения чисел в **C** тогда соответствует операция * сопряжения матриц в пространстве M_n. Вещественное число — это комплексное число *z*, такое, что $z = \bar{z}$; эрмитова матрица — это матрица $A \in M_n$, удовлетворяющая равенству $A = A^*$. Подобно тому как каждое комплексное число *z* может быть записано в форме $z = s + it$, где $s, t \in \mathbb{R}$, каждая комплексная матрица *A* единственным образом представима в виде $A = S + iT$, где матрицы *S* и *T* эрмитовы. Эта аналогия подкрепляется следующими свойствами.

18.1.3. Теорема. *Пусть матрица $A \in M_n$ эрмитова. Тогда*

(a) *функция x^*Ax принимает вещественные значения для всех векторов $x \in \mathbf{C}^n$;*

(b) все собственные значения матрицы A вещественны:

(c) *матрица S^*AS эрмитова для любой матрицы $S \in M_n$.*

Доказательство. Выкладки $\overline{(x^*Ax)} = (x^*Ax)^* = x^*A^*x = x^*Ax$ убеждают нас, что величина x^*Ax совпадает со своей комплексно-сопряженной и, следовательно, является вещественной. Если $Ax = \lambda x$ и $x^*x=1$, то число $\lambda = \lambda x^*x = x^*\lambda x = x^*Ax$ вещественно в силу уже доказанного утверждения (a). Наконец, $(S^*AS)^* = S^*A^*S = S^*AS$; следовательно, матрица S^*AS всегда будет эрмитовой.

Упражнение. Что означают приведенные выше свойства эрмитовой матрицы $A \in M_n$ при $n = 1$?

Каждое из свойств в теореме 18.1.3 на самом деле (почти) характеризует эрмитовы матрицы.

18.1.4. Теорема. *Пусть задана матрица* $A = [a_{ij}] \in M_n$. *Матрица A эрмитова тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

(a) *функция* x^*Ax *принимает вещественные значения для всех векторов* $x \in \mathbf{C}^n$;

(b) *матрица A нормальна и все ее собственные значения вещественны;*

(c) *матрица* S^*AS *эрмитова для любой матрицы* $S \in M_n$.

Доказательство. Только достаточность каждого условия еще не обоснована. Если число x^*Ax вещественно при всех $x \in \mathbf{C}^n$, то число

$$(x+y)^* A (x+y) = (x^*Ax + y^*Ay) + (x^*Ay + y^*Ax)$$

вещественно для любых $x, y \in \mathbf{C}^n$. Поскольку $x^*Ax + y^*Ay$ вещественно по предположению, величина $x^*Ay + y^*Ax$ принимает вещественное значение для любых векторов $x, y \in \mathbf{C}^n$. Выбирая $x = e_k$ и $y = e_j$, убеждаемся в вещественности суммы $a_{kj} + a_{jk}$; следовательно, $\operatorname{Im} a_{kj} = -\operatorname{Im} a_{jk}$. Выбирая $x = ie_k$ и $y = ie_j$, видим, что число $-ia_{kj} + ia_{jk}$ также вещественно, по-этому $\operatorname{Re} a_{kj} = \operatorname{Re} a_{jk}$. Это равенство вместе с полученным ранее означает, что $a_{kj} = \bar{a}_{jk}$. Поскольку индексы j и k произвольны, приходим к требуемому заключению $A = A^*$.

Нормальная матрица A унитарно подобна диагональной матрице: $A = U\Lambda U^*$, где $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ составлена из собственных значений матрицы A. В общем случае справедливо равенство $A^* = U\bar{\Lambda}U^*$, но матрица Λ вещественна по предположению; тогда $A^* = U\Lambda U^* = A$.

Если в последнем условии положить $S = I$, то матрица A окажется эрмитовой.

Эрмитова матрица, очевидно, является нормальной $(AA^* = A^2 = A^*A)$, и к ней применимы все результаты модуля 16 о нормальных матрицах.

Например, собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны; существует базис из ортонормированных собственных векторов; эрмитова матрица унитарно диагонализуема и т. д.

Для дальнейших ссылок сформулируем следующий важный результат:

18.1.5. Теорема (о спектральном разложении эрмитовых матриц). *Пусть задана матрица* $A \in M_n$. *Матрица A эрмитова в том и только в том случае, когда существуют унитарная матрица* $U \in M_n$ *и вещественная диагональная матрица* $\Lambda \in M_n$, *такие, что справедливо равенство* $A = U\Lambda U^*$. *Кроме того, матрица A вещественна и эрмитова (симметрична) в том и только в том случае, когда существуют вещественная ортогональная матрица* $P \in M_n$ *и вещественная диагональная матрица* $\Lambda \in M_n$, *такие, что* $A = P\Lambda P^T$.

Линейные комбинации эрмитовых матриц с вещественными коэффициентами всегда эрмитовы, однако в общем случае комплексных коэффициентов это уже не всегда так. Например, если матрица A эрмитова, то матрица iA эрмитова, только когда A=0. Далее, если матрицы A и B эрмитовы, то выполнены равенства $(AB)^* = B^*A^* = BA$; следовательно, произведение AB эрмитово тогда и только тогда, когда матрицы A и B коммутируют.

Одним из наиболее известных результатов о коммутирующих эрмитовых матрицах (поскольку его обобщение для операторов важно в квантовой механике) является следующий частный случай теоремы 16.6.5.

18.1.6. Теорема. *Пусть* $\mathcal{F}$ *— заданное семейство эрмитовых матриц. Унитарная матрица U, такая, что UAU* — диагональная матрица для всех матриц* $A \in \mathcal{F}$, *существует тогда и только тогда, когда AB = BA для любых матриц* $A, B \in \mathcal{F}$.

Определяющее свойство эрмитовой матрицы A состоит в том, что матрица A равна своей сопряженной A^*. Одна из возможностей обобщения понятия эрмитовой матрицы заключается в рассмотрении класса матриц, в котором каждая матрица A *подобна* своей сопряженной A^*. В следующей теореме перечислены некоторые свойства, характеризующие этот класс с различных сторон. Первое свойство гласит, что каждая такая матрица должна быть подобна (но не обязательно унитарно подобна) вещественной (но не обязательно диагональной) матрице.

18.1.7. Теорема. *Пусть задана матрица* $A \in M_n$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(a) *матрица A подобна некоторой матрице* $B \in M_n(\mathbf{R})$;

(b) *матрица A подобна своей сопряженной A*;*
(c) *матрица A подобна своей сопряженной A*, причем подобие осуществляется с помощью эрмитовой матрицы;*
(d) *имеет место разложение A = НК, в котором матрицы* $H, K \in M_n$ *эрмитовы и хотя бы одна из них невырожденна;*
(e) *имеет место разложение A = НК, в котором матрицы* $H, K \in M_n$ *эрмитовы.*

Доказательство. Сначала докажем эквивалентность утверждений (a) и (b): если выполняется условие (a),то

$$S^{-1}AS = B = T^{-1}B^TT = T^{-1}B^*T = T^{-1}S^*A^*(S^{-1})^*T,$$

а это означает, что $A^* = (ST^{-1}S^*)^{-1}A(ST^{-1}S^*)$. Следовательно, (b) выполнено. Если предположить, что выполняется (b), то жордановы канонические формы матриц *A* и *A** совпадают. Поскольку матрицы *A* и A^T всегда подобны, это означает, что жорданова матрица *J* матрицы *A* должна быть подобна матрице $\bar{J}$. Следовательно, каждому жорданову блоку $J_k(\lambda)$ в матрице *J* соответствует жорданов блок $J_k(\bar{\lambda})$ (таких же размеров) в матрице $\bar{J}$. Это утверждение не несет новой информации, когда собственные значения λ вещественны. Если же собственное значение λ не является вещественным, отсюда следует, что жордановы блоки матрицы *A,* отвечающие каждому невещественному собственному значению и сопряженному к нему, должны располагаться парами. Используя аргументы, которые ранее привели к теореме 17.4.5, заключаем, что жорданова форма *J* подобна прямой сумме вещественных матриц вида (17.4.4); тем самым утверждение (a) доказано.

Проверим, что (b) влечет за собой (c). Предположим, что $S^{-1}AS = A^*$, и заметим, что $T^{-1}AT = A^*$, если $T = \alpha S$ для произвольного ненулевого числа $\alpha = re^{i\theta} \in \mathbf{C}$. Таким образом, $AT = TA^*$ или, что эквивалентно, $AT^* = T^*A^*$. Складывая эти два равенства, получаем $A(T + T^*) = (T + T^*)A^*$. Если матрица *T* + *T** невырожденна, последнее соотношение будет означать, что матрица *A* подобна своей сопряженной матрице *A*,* причем трансформирующей будет эрмитова матрица *T*+*T**. Чтобы матрица *T*+*T** была невырожденной, следует удачно выбрать параметр α. Матрица *T*+*T** является невырожденной тогда и только тогда, когда невырожденна матрица $T^{-1}(T + T^*) = I + T^{-1}T^*$. Последняя же матрица невырождениа в том и только в том случае, когда $-1 \notin \sigma(T^{-1}T^*)$. Однако $T^{-1}T^* = e^{-2i\theta}S^{-1}S^*$. Поскольку допускаются значения параметра а с произвольным аргументом

$\theta \in [0, 2\pi)$, следует только выбрать этот параметр так, чтобы $-e^{2i\theta} \notin \sigma(S^{-1}S^*)$. Таким образом, из (b) следует (c).

Теперь предположим, что выполнено (c) и $R^{-1}AR = A^*$, где матрица $R \in M_n$ невырожденна и эрмитова. Тогда $R^{-1}A = A^*R^{-1}$ и $A = R(A^*R^{-1})$. Но $(A^*R^{-1})^* = R^{-1}A = A^*R^{-1}$, и, следовательно, матрица *A* является произведением двух эрмитовых матриц *R* и A^*R^{-1} и сомножитель *R* невырожден. Тем самым (d) выполняется.

Если имеет место (d) и матрица *H* в представлении *A=HK* невырожденна, то $H^{-1}AH = KH = (HK)^* = A^*$, и мы приходим к (b). Аналогичное рассуждение применимо, когда невырожденна матрица *K*.

Из утверждения (d), очевидно, вытекает (e); осталось показать, что (e) влечет за собой (a). Пусть в представлении *A = HK* сомножители *H* и *K* эрмитовы и вырожденны. Рассмотрим матрицу $U^*AU = (U^*HU)(U^*KU)$, где $U \in M_n$ — это та унитарная матрица, которая приводит матрицу *H* к диагональному виду:

$$U^*HU = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = H'$$

с некоторой невырожденной диагональной матрицей $D \in M_k$, $k < n$. Разобьем матрицу U^*KU на блоки в соответствии с разбиением матрицы *H'*; тогда

$$U^*AU = H'(U^*KU) = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K' & * \\ * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} DK' & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица $DK' \in M_k$ является произведением двух эрмитовых матриц, одна из которых невырожденна; следовательно, в силу эквивалентности утверждений (d) и (a) эта матрица подобна некоторой вещественной матрице $B \in M_k$. Обозначим жорданову каноническую форму для *B* через $J \in M_k$; тогда матрица *A* подобна некоторой матрице *C* вида

$$C = \begin{bmatrix} J & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Множество всех собственных значений верхней треугольной матрицы *C* состоит из собственных значений жордановой формы *J* и *n* — *k* нулевых собственных значений. Для любых *ненулевых* собственных значений структура жордановых блоков канонической жордановой формы матрицы *C* должна быть такой же, как в *J*. В самом деле, при $\lambda \neq 0$ (столбцовый) ранг каждой степени $(C - \lambda I)^r$, очевидно, равен числу $n - k + \operatorname{rank}(J - \lambda I)^r$, $r = 1, 2, \ldots, n$. В частности, жордановы блоки матрицы C, отвечающие произвольным невещественным собственным значениям, будут встречаться соответствующими сопряженными парами; таким образом, жорданова каноническая форма матрицы C подобна некоторой матрице вида (17.4.6) с вещественными элементами.

18.2. Вариационные описания собственных значений эрмитовых матриц

В случае произвольной матрицы $A \in M_n$ по существу единственное описание ее собственных значений состоит в том, что это решения характеристического уравнения $p_A(t) = 0$. Для эрмитовых матриц, однако, собственные значения можно также охарактеризовать как решения ряда задач оптимизации.

Поскольку все собственные значения эрмитовой матрицы $A \in M_n$ вещественны, условимся в дальнейшем упорядочивать их по возрастанию (неубыванию):

$$\lambda_{\min} = \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \lambda_n = \lambda_{\max}. \quad (18.2.1)$$

Наименьшее и наибольшее собственные значения допускают простое описание как решения соответственно некоторой задачи минимизации и некоторой задачи максимизации с ограничениями. Это описание связано с именами двух известных физиков — Рэлея и Ритца, и выражение x^*Ax/x^*x, играющее ключевую роль, известно как *отношение Рэлея — Ритца* (чаще употребляется название «отношение Рэлея». *)*.

18.2.2. Теорема (Рэлея — Ритца). *Пусть матрица* $A \in M_n$ *эрмитова и ее собственные значения упорядочены, как в (18.2.1).*
Тогда

$$\lambda_1 x^*x \leqslant x^*Ax \leqslant \lambda_n x^*x \quad \textit{для всех} \quad x \in \mathbf{C}^n,$$

$$\lambda_{\max} = \lambda_n = \max_{x \neq 0} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \max_{x^*x=1} x^*Ax,$$

$$\lambda_{\min} = \lambda_1 = \min_{x \neq 0} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \min_{x^*x=1} x^*Ax.$$

Доказательство. Матрица A эрмитова, поэтому существует такая унитарная матрица $U \in M_n$, что $A = U\Lambda U^*$, где $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. При любом векторе $x \in \mathbf{C}^n$ верны равенства

$$x^*Ax = x^*U\Lambda U^*x = (U^*x)^* \Lambda (U^*x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |(U^*x)_i|^2.$$

Каждый сомножитель $|(U^*x)_i|^2$ неотрицателен, поэтому

$$\lambda_{min}\sum_{i=1}^{n}|(U^*x)_i|^2 \leqslant x^*Ax = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i|(U^*x)_i|^2 \leqslant \lambda_{max}\sum_{i=1}^{n}|(U^*x)_i|^2.$$

Поскольку матрица U унитарна, имеют место равенства

$$\sum_{i=1}^{n}|(U^*x)_i|^2 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|^2 = x^*x.$$

Тем самым получены соотношения

$$\lambda_1 x^*x = \lambda_{min}x^*x \leqslant x^*Ax \leqslant \lambda_{max}x^*x = \lambda_n x^*x. \qquad (18.2.3)$$

Оценки здесь точны. В самом деле, если x — собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению λ_1, то $x^*Ax = x^*\lambda_1 x = \lambda_1 x^*x$. Точность оценки сверху устанавливается аналогично.

Остальные утверждения оказываются простыми следствиями соотношений (18.2.3). При $x \neq 0$ выполнено неравенство

$$\frac{x^*Ax}{x^*x} \leqslant \lambda_n,$$

которое обращается в равенство, когда x является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению λ_n. Следовательно,

$$\max_{x \neq 0}\frac{x^*Ax}{x^*x} = \lambda_n. \qquad (18.2.4)$$

Наконец, при $x \neq 0$ можно перейти к нормированному вектору;

$$\frac{x^*Ax}{x^*x} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^*x}}\right)^* A\left(\frac{x}{\sqrt{x^*x}}\right), \quad \left(\frac{x}{\sqrt{x^*x}}\right)^*\left(\frac{x}{\sqrt{x^*x}}\right) = 1.$$

Таким образом, равенство (18.2.4) эквивалентно следующему:

$$\max_{x^*x=1} x^*Ax = \lambda_n. \qquad (18.2.5)$$

Рассуждения для минимального собственного значения λ_1 аналогичны.

Геометрическая интерпретация равенства (18.2.5) состоит в том, что число λ_n есть наибольшее значение функции x^*Ax, когда вектор x пробегает единичную сферу в пространстве $\mathbf{C}^n$ (которая является компактным множеством).

Соотношение (18.2.3) служит основанием для следующего результата о локализации собственных значений.

18.2.6. Следствие. *Пусть заданы эрмитова матрица $A \in M_n$ и ненулевой вектор $x \in \mathbf{C}^n$, и пусть $\alpha = x^*Ax/x^*x$. Тогда в каждом из полуинтервалов $(-\infty, \alpha]$* и *$[\alpha, \infty)$ найдется по крайней мере одно собственное значение матрицы A.*

Упражнение. Доказать следствие 18.2.6.

Упражнение. Для минимального собственного значения λ_1 выписать утверждение, аналогичное (18.2.5), и дать его геометрическую интерпретацию.

В теореме Рэлея—Ритца приводится вариационное описание наибольшего и наименьшего собственных значений эрмитовой матрицы *A*. Что же можно сказать об остальных собственных значениях? Запишем разложение $A = U\Lambda U^*$, в котором $U = [u_1\, u_2\, \ldots\, u_n]$; столбцы матрицы *U* являются ортонормированными собственными векторами матрицы *A* (отвечающими собственным значениям с теми же индексами). Рассматривая только те векторы $x \in \mathbf{C}^n$, которые ортогональны собственному вектору u_1, приходим к следующей модификации основного равенства теоремы 18.2.2:

$$x^*Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |(U^*x)_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |u_i^*x|^2 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i |u_i^*x|^2.$$

Следовательно, имеют место соотношения

$$x^*Ax = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i |u_i^*x|^2 \geqslant \lambda_2 \sum_{i=2}^{n} |u_i^*x|^2 = \lambda_2 \sum_{i=1}^{n} |(U^*x)_i|^2 = \lambda_2 x^*x,$$

так как вектор *x* ортогонален первому столбцу матрицы *U*. Неравенство здесь становится равенством при $x = u_2$; таким образом, получаем формулу

$$\min_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp u_1}} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \min_{\substack{x^*x=1 \\ x \perp u_1}} x^*Ax = \lambda_2 \qquad (18.2.7)$$

для второго собственного значения.

Упражнение. Обобщая эти рассуждения, обосновать формулу

$$\min_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_{k-1}}} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \min_{\substack{x^*x=1 \\ x \perp u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_{k-1}}} x^*Ax = \lambda_k, \quad k = 2, 3, \ldots, n. \qquad (18.2.8)$$

Упражнение. Показать, что

$$\max_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp u_n,\, u_{n-1},\, \ldots,\, u_{n-k+1}}} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \max_{\substack{x^*x=1 \\ x \perp u_n,\, u_{n-1},\, \ldots,\, u_{n-k+1}}} x^*Ax = \lambda_{n-k},$$

$$k = 1, 2, \ldots, n-1. \qquad (18.2.9)$$

К сожалению, практическая ценность этих формул невелика, поскольку в них явно участвуют некоторые собственные векторы, а собственные векторы обычно неизвестны. Однако представление (18.2.7) и более общие представления (18.2.8) и (18.2.9) станут отправной точкой для нахождения полезного на практике описания собственных значений.

Пусть задан некоторый вектор $w \in \mathbf{C}^n$. Тогда

$$\sup_{\substack{x^*x=1\\ x\perp w}} x^*Ax = \sup_{\substack{x^*x=1\\ x\perp w}} x^*U\Lambda U^*x = \sup_{\substack{x^*x=1\\ x\perp w}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |(U^*x)_i|^2 =$$

$$= \sup_{\substack{z^*z=1\\ x=Uz\perp w}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |z_i|^2 = \sup_{\substack{z^*z=1\\ z\perp U^*w}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |z_i|^2 \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{\substack{z^*z=1\\ z\perp U^*w\\ z_1=z_2=\ldots=z_{n-2}=0}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |z_i|^2 =$$

$$= \sup_{\substack{|z_{n-1}|^2+|z_n|^2=1\\ z\perp U^*w}} \lambda_{n-1}|z_{n-1}|^2 + \lambda_n |z_n|^2 \geqslant \lambda_{n-1}. \quad (18.2.10)$$

Во второй строке в этих выкладках введено обозначение $z \equiv U^*x$; равенство $z^*z = 1$ следует из $x^*x = 1$ в силу унитарности матрицы *U*. Первое неравенство объясняется тем, что наибольшее значение не может возрасти при сужении того множества, по которому берется супремум. Заключительное неравенство следует из того, что $\lambda_n \geqslant \lambda_{n-1}$.

В предыдущих рассуждениях вектор *w* был произвольным фиксированным вектором. Теперь можно взять инфимум по всевозможным векторам *w* в (18.2.10) и получить тем самым неравенство

$$\inf_{w\in \mathbf{C}^n} \sup_{\substack{x^*x=1\\ x\perp w}} x^*Ax \geqslant \lambda_{n-1}.$$

Однако формула (18.2.9) при *k* = 1 означает, что неравенства в (18.2.10) становятся равенствами, когда $w = u_n$. Таким образом, последнее утверждение можно уточнить:

$$\inf_{w\in \mathbf{C}^n} \sup_{\substack{x^*x=1\\ x\perp w}} x^*Ax = \lambda_{n-1}.$$

Это описание собственного числа несколько сложнее по виду по сравнению с (18.2.7), но здесь не требуется знания каких-либо собственных векторов матрицы *A*.

Чаще можно встретить запись с «max» вместо «sup» и с «min» вместо «inf», поскольку $x^*Ax = \lambda_{n-1}$ при $x = u_{n-1}$. (Более точно, возможность указанной замены терминов, начиная уже с соотношений (18.2.10), обусловлена тем, что проводится оптимизация непрерывных функций на компактных, по существу, множествах (не ограничивая общности, всюду можно ввести дополнительное условие нормировки, например $w^*w = 1$.) Такая замена используется на последнем этапе доказательства следующей теоремы «о минимаксе» Куранта — Фишера.

18.2.11. Теорема (Куранта — Фишера). *Обозначим собственные значения эрмитовой матрицы* $A \in M_n$ *через* $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$. *Пусть задано натуральное число* k, $1 \leqslant k \leqslant n$. *Тогда*

$$\min_{w_1, w_2, \ldots, w_{n-k} \in \mathbb{C}^n} \quad \max_{\substack{x \neq 0,\ x \in \mathbb{C}^n \\ x \perp w_1, w_2, \ldots, w_{n-k}}} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \lambda_k \tag{18.2.12}$$

и

$$\max_{w_1, w_2, \ldots, w_{k-1} \in \mathbb{C}^n} \quad \min_{\substack{x \neq 0,\ x \in \mathbb{C}^n \\ x \perp w_1, w_2, \ldots, w_{k-1}}} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \lambda_k. \tag{18.2.13}$$

Замечание. При $k = n$ в (18.2.12) и при $k = 1$ в (184.2.13) внешнюю задачу оптимизации не следует принимать во внимание, поскольку множество, по которому проводится оптимизация, становится пустым. Для этих двух случаев утверждения (18.2.12) и (18.2.13) уже присутствовали в теореме 18.2.2 Рэлея — Ритца.

Доказательство. Приведем обоснование только для утверждения (18.2.12); для (18.2.13) рассуждения аналогичны. Выпишем представление $A = U\Lambda U^*$, в котором матрица U унитарна и $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, и будем считать, что $1 < k \leqslant n$. Для вектора $x \neq 0$

$$\frac{x^*Ax}{x^*x} = \frac{(U^*x)^* \Lambda (U^*x)}{x^*x} = \frac{(U^*x)^* \Lambda (U^*x)}{(U^*x)^* (U^*x)}$$

и $\{U^*x\colon x \in \mathbb{C}^n,\ x \neq 0\} = \{y \in \mathbb{C}^n\colon y \neq 0\}$. Таким образом, если заданы векторы $w_1, w_2, \ldots, w_{n-k} \in \mathbb{C}^n$, то справедливы соотношения

$$\sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp w_1, \ldots, w_{n-k}}} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \sup_{\substack{y \neq 0 \\ y \perp U^*w_1, \ldots, U^*w_{n-k}}} \frac{y^*\Lambda y}{y^*y} =$$

$$= \sup_{\substack{y^*y = 1 \\ y \perp U^*w_1, \ldots, U^*w_{n-k}}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |y_i|^2 \geqslant \sup_{\substack{y^*y = 1 \\ y \perp U^*w_1, \ldots, U^*w_{n-k} \\ y_1 = y_2 = \ldots = y_{k-1} = 0}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |y_i|^2 =$$

$$= \sup_{\substack{|y_k|^2 + |y_{k+1}|^2 + \ldots + |y_n|^2 = 1 \\ y \perp U^*w_1, \ldots, U^*w_{n-k}}} \sum_{i=k}^{n} \lambda_i |y_i|^2 \geqslant \lambda_k.$$

Таким образом, справедливы неравенства

$$\sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp w_1, \ldots, w_{n-k}}} \frac{x^* A x}{x^* x} \geqslant \lambda_k$$

для любых $n - k$ векторов $w_1, \ldots, w_{n-k}$. Однако, согласно (18.2.9), это неравенство при некотором выборе векторов w_i, например $w_i = u_{n-i+1}$, где u_{n-i+1} — столбец матрицы $U = [u_1 \ \ldots \ u_n]$, обращается в равенство:

$$\inf_{w_1, \ldots, w_{n-k}} \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp w_1, \ldots, w_{n-k}}} \frac{x^* A x}{x^* x} = \lambda_k.$$

Мы можем заменить здесь «inf» и «sup» на «min» и «max», поскольку экстремальные значения достигаются. Как уже отмечалось, доказательство (18.2.13) проводится аналогично.

Упражнение. Провести детальное доказательство утверждения (18.2,13).

18.3. Некоторые приложения вариационных описаний

Среди многочисленных важных приложений теоремы Куранта—Фишера одно из простейших связано с задачей сравнения собственных значений матриц *A*+*B* и *A*. Собственные значения матрицы *A* обозначим через $\lambda_i(A)$.

18.3.1. Теорема (Вейля). *Пусть матрицы* $A, B \in M_n$ *эрмитовы и собственные значения* $\lambda_i(A)$, $\lambda_i(B)$ *и* $\lambda_i(A + B)$ *упорядочены по возрастанию, как в* (18.2.1). *Тогда при каждом* $k = 1, 2, \ldots, n$ *выполняются неравенства*

$$\lambda_k(A) + \lambda_1(B) \leqslant \lambda_k(A + B) \leqslant \lambda_k(A) + \lambda_n(B). \qquad (18.3.2)$$

Доказательство. Для любого ненулевого вектора $x \in \mathbf{C}^n$ отношение Рэлея—Ритца можно оценить при помощи неравенств

$$\lambda_1(B) \leqslant \frac{x^* B x}{x^* x} \leqslant \lambda_n(B).$$

Следовательно, при любом $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\lambda_k(A+B) = \min_{w_1, \ldots, w_{n-k} \in \mathbf{C}^n} \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp w_1, \ldots, w_{n-k}}} \frac{x^*(A+B)x}{x^*x} =$$

$$= \min_{w_1, \ldots, w_{n-k} \in \mathbf{C}^n} \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp w_1, \ldots, w_{n-k}}} \left[\frac{x^*Ax}{x^*x} + \frac{x^*Bx}{x^*x}\right] \geqslant$$

$$\geqslant \min_{w_1, \ldots, w_{n-k} \in \mathbf{C}^n} \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp w_1, \ldots, w_{n-k}}} \left[\frac{x^*Ax}{x^*x} + \lambda_1(B)\right] =$$

$$= \lambda_k(A) + \lambda_1(B).$$

Оценка сверху доказывается аналогично.

Упражнение. Показать, что каждое из неравенств в (18.3.2) может обращаться в равенство. *Указание.* Пусть $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ — ортонормированное множество собственных векторов матрицы A и $Au_i = \lambda_i(A)u_i$. Рассмотреть $B = \alpha u_i u_i^*$ для $\alpha > 0$ и затем для $\alpha < 0$.

В теореме Вейля установлены двусторонние границы для собственных значений суммы $A+B$ произвольных эрмитовых матриц A и B. Эти границы можно уточнить, рассматривая в качестве B только матрицы специального вида, например положительно определенные матрицы, матрицы ранга 1, матрицы ранга k или окаймленные матрицы.

Матрица $B \in M_n$, подчиненная неравенству для $x^*Bx \geqslant 0$ всех векторов $x \in \mathbf{C}^n$, называется *положительно полуопределенной.* Это эквивалентно условию, что матрица B эрмитова и всеее собственные значения неотрицательны (см. модуль 22). Приведенный ниже результат, известный как *теорема о монотонности,* является непосредственным следствием теоремы Вейля. Он гласит, что собственные значения эрмитовой матрицы не уменьшаются, если к ней прибавить положительно полуопределенную матрицу.

18.3.3. Следствие. *Пусть матрицы* A, $B \in M_n$ *эрмитовы. Предположим, что B положительно полуопределена и что собственные значения матриц A и A +B упорядочены по возрастанию, как в* (18.2.1). *Тогда*

$$\lambda_k(A) \leqslant \lambda_k(A+B) \quad \textit{для всех} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказательство. Надо привлечь оценку снизу в (18.3.2) и учесть, что $\lambda_1(B) \geqslant 0$.

Если B — матрица ранга 1, то оценки собственных значений матрицы $A + B$ через собственные значения матрицы A формулируются как *теорема о разделении:* между каждыми последовательными собственными значениями матрицы $A + B$ с четными (или нечетными) номерами содержится по меньшей мере одно собственное значение матрицы *A*.

18.3.4. Теорема. *Пусть матрица* $A \in M_n$ *эрмитова и задан вектор* $z \in \mathbf{C}^n$. *Если собственные значения матриц A и* $A \pm zz^*$ *упорядочены по возрастанию, как в* (18.2.1), *то имеют место неравенства*

(a) $\lambda_k(A \pm zz^*) \leqslant \lambda_{k+1}(A) \leqslant \lambda_{k+2}(A \pm zz^*), \quad k = 1, 2, \ldots, n-2,$

(b) $\lambda_k(A) \leqslant \lambda_{k+1}(A \pm zz^*) \leqslant \lambda_{k+2}(A), \quad k = 1, 2, \ldots, n-2.$

Доказательство. Пусть $1 \leqslant k \leqslant n-2$; используя представление (184.2.12), получаем

$$\lambda_{k+2}(A \pm zz^*) = \min_{w_1, \ldots, w_{n-k-2} \in \mathbf{C}^n} \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp w_1, \ldots, w_{n-k-2}}} \frac{x^*(A \pm zz^*)x}{x^*x} \geqslant$$

$$\geqslant \min_{w_1, \ldots, w_{n-k-2} \in \mathbf{C}^n} \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp w_1, \ldots, w_{n-k-2} \\ x \perp z}} \frac{x^*(A \pm zz^*)x}{x^*x} =$$

$$= \min_{\substack{w_1, \ldots, w_{n-k-2} \in \mathbf{C}^n \\ w_{n-k-1} = z}} \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp w_1, \ldots, w_{n-k-2}, w_{n-k-1}}} \frac{x^*Ax}{x^*x} =$$

$$= \min_{w_1, \ldots, w_{n-k-2}, w_{n-k-1} \in \mathbf{C}^n} \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp w_1, \ldots, w_{n-k-2}, w_{n-k-1}}} \frac{x^*Ax}{x^*x} =$$

$$= \lambda_{k+1}(A).$$

Теперь пусть $2 \leqslant k \leqslant n-1$. При помощи представления (18.2.13) получаем

$$\lambda_k(A \pm zz^*) = \max_{w_1, \ldots, w_{k-1} \in \mathbf{C}^n} \min_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp w_1, \ldots, w_{k-1}}} \frac{x^*(A \pm zz^*)x}{x^*x} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{w_1, \ldots, w_{k-1} \in \mathbf{C}^n} \min_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp w_1, \ldots, w_{k-1} \\ x \perp z}} \frac{x^*(A \pm zz^*)x}{x^*x} =$$

$$= \max_{\substack{w_1, \ldots, w_{k-1} \in \mathbf{C}^n \\ w_k = z}} \min_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp w_1, \ldots, w_{k-1}, w_k}} \frac{x^*Ax}{x^*x} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{w_1, \ldots, w_{k-1}, w_k \in \mathbf{C}^n} \min_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp w_1, \ldots, w_{k-1}, w_k}} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \lambda_{k+1}(A).$$

Эти два семейства неравенств эквивалентны указанным в утверждении теоремы.

Для эрмитовой матрицы $B \in M_n$ имеется разложение $B = U\Lambda U^*$, в котором матрица $U = [u_1 \; u_2 \; \ldots \; u_n]$ унитарна и

$\Lambda = \mathrm{diag}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. Следовательно, ранг матрицы B совпадает с числом ненулевых собственных значений. Если он не превосходит r, то можно положить $\beta_{r+1} = \ldots = \beta_n = 0$. Если ранг строго меньше, чем r, то некоторые из чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ будут также равны нулю. Представление

$$B = \sum_{i=1}^{r} \beta_i u_i u_i^* \tag{18.3.5}$$

можно воспринимать как другую форму записи разложения $B = U\Lambda U^*$. В обратную сторону, ранг любой матрицы вида (18.3.5), когда все β_i отличны от нуля и векторы линейно независимы, равен r. Если же допускается линейная зависимость векторов u_i, то можно утверждать лишь, что ранг матрицы B не превосходит r. Следующий результат, первоначально полученный Вейлем в рамках теории интегральных уравнений, позволяет найти границы для собственных значений суммы $A + B$, когда ранг матрицы B равен r. Это простое обобщение теоремы 18.3.4 об одноранговом возмущении.

18.3.6. Теорема. *Пусть матрицы $A, B \in M_n$ эрмитовы. Предположим, что ранг матрицы B не превосходит r. Тогда*

(a) $\lambda_k(A + B) \leqslant \lambda_{k+r}(A) \leqslant \lambda_{k+2r}(A + B)$, $k = 1, 2, \ldots, n - 2r$;

(b) $\lambda_k(A) \leqslant \lambda_{k+r}(A + B) \leqslant \lambda_{k+2r}(A)$, $k = 1, 2, \ldots, n - 2r$;

(c) *если задано разложение $A = U\Lambda U^*$, в котором $U = [u_1\ u_2 \ldots u_n] \in M_n$ — унитарная матрица и $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, где $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$, и возмущение имеет вид*

$$B = \lambda_n u_n u_n^* + \lambda_{n-1} u_{n-1} u_{n-1}^* + \ldots + \lambda_{n-r+1} u_{n-r+1} u_{n-r+1}^*,$$

то $\lambda_{\max}(A - B) = \lambda_{n-r}(A)$.

Доказательство. Пусть $B = \alpha_1 v_1 v_1^* + \ldots + \alpha_r v_r v_r^*$, где векторы $v_1, \ldots, v_r \in \mathbf{C}^n$ не обязательно линейно независимы.

Неравенства в (a) и (b) доказываются так же, как и соответствующие им неравенства в теореме 18.3.4 со следующими изменениями. Прежнее условие $x \perp z$ теперь заменяется на r условий $x \perp v_1, \ldots, x \perp v_r$ и доказательство завершается с учетом этой замены. Чтобы доказать п. (c), заметим, что все векторы $u_1, \ldots, u_n$ являются собственными векторами матрицы $A—B$ и что $(A - B)u_k = 0$, $k = n - r + 1, n - r + 2, \ldots, n$ и $(A - B)u_k = \lambda_k u_k$, $k = 1, 2, \ldots, n - r$. В силу неравенств $\lambda_{n-r} \geqslant \lambda_{n-r-1} \ldots \geqslant \lambda_1$ наибольшим собственным значением матрицы $A — B$ будет число λ_{n-r}.

Упражнение. Подробно доказать утверждения (a) и (b) теоремы 18.3.6.

Теперь наших знаний достаточно, чтобы установить следующий общий результат Вейля о собственных значениях суммы эрмитовых матриц.

18.3.7. Теорема (Вейля). *Пусть заданы эрмитовы матрицы* A, $B \in M_n$, *и пусть собственные значения матриц A, B и A + B упорядочены по возрастанию, как в* (18.2.1). *Если пара индексов j, k подчинена условиям* $1 \leqslant j,\ k \leqslant n$ *и* $j + k \geqslant n + 1$, *то*

$$\lambda_{j+k-n}(A + B) \leqslant \lambda_j(A) + \lambda_k(B);$$

если пара индексов j, k подчинена условиям $1 \leqslant j,\ k \leqslant n$ *и* $j + k \leqslant n + 1$, *то*

$$\lambda_j(A) + \lambda_k(B) \leqslant \lambda_{j+k-1}(A + B).$$

Доказательство. Пусть индексы *j*, *k* подчинены первым условиям. Запишем разложения $A = U\Lambda(A)U^*$ и $B = V\Lambda(B)V^*$, в которых матрицы $U = [u_1\, u_2\, \ldots\, u_n] \in M_n$ и $V = [v_1\, v_2\, \ldots\, v_n] \in M_n$ унитарны,

$$\Lambda(A) = \operatorname{diag}(\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)) \in M_n,$$
$$\Lambda(B) = \operatorname{diag}(\lambda_1(B), \ldots, \lambda_n(B)) \in M_n.$$

Тогда ранг матрицы

$$A_j \equiv \lambda_n(A)\, u_n u_n^* + \lambda_{n-1}(A)\, u_{n-1} u_{n-1}^* + \ldots + \lambda_{j+1}(A)\, u_{j+1} u_{j+1}^*$$

не превосходит $n - j$, ранг матрицы

$$B_k \equiv \lambda_n(B)\, v_n v_n^* + \ldots + \lambda_{k+1}(B)\, v_{k+1} v_{k+1}^*$$

не превосходит $n - k$ и ранг суммы $A_j + B_k$ не превосходит $2n - j - k$. Далее,

$$\lambda_n(A - A_j) = \lambda_j(A), \quad \lambda_n(B - B_k) = \lambda_k(B)$$

в силу утверждения (c) теоремы 18.3.6 и

$$\lambda_n(A - A_j + B - B_k) = \lambda_n(A + B - (A_j + B_k)) \geqslant$$
$$\geqslant \lambda_{n-(2n-j-k)}(A + B) = \lambda_{j+k-n}(A + B)$$

в силу утверждения (b) теоремы 18.3.6 (при $k + r = n$ и $r = 2n - j - k$). Кроме того, неравенство (18.3.2) (с $k = n$) в данном случае принимает вид

$$\lambda_n(A - A_j + B - B_k) \leqslant \lambda_n(A - A_j) + \lambda_n(B - B_k).$$

Таким образом, приходим к соотношениям

$$\lambda_j(A) + \lambda_k(B) = \lambda_n(A - A_j) + \lambda_n(B - B_k) \geqslant \lambda_n(A - A_j + B - B_k) =$$
$$= \lambda_n((A + B) - (A_j + B_k)) \geqslant \lambda_{j+k-n}(A + B).$$

Первое утверждение теоремы доказано. Второе утверждение непосредственно следует из первого, примененного к матрицам —*A* и —*B*.

Упражнение. Подробно обосновать вывод второго утверждения теоремы 18.3.7 из первого. *Указания.* Получить оценку сверху для $\lambda_{i+k-n}(-A-B)$ и использовать равенство $\lambda_i(-A) = -\lambda_{n-i+1}(A)$, которое верно для эрмитовой матрицы $A \in M_n$.

Как заключительный результат о разделении собственных значений матрицы *A*+*B* приведем теорему, в которой матрицы *A и B* имеют специальный вид, а именно *теорему о разделении собственных значений для окаймленных матриц.* Утверждение этой теоремы аналогично утверждению теоремы 18.3.4, где в качестве *B* бралась матрица ранга 1.

18.3.8. Теорема. *Пусть заданы эрмитова матрица* $A \in M_n$, *вектор* $y \in \mathbf{C}^n$ *и число* $a \in \mathbf{R}$. *Рассмотрим эрмитову матрицу* $\hat{A} \in M_{n+1}$ *— результат окаймления матрицы A вектором y и числом a:*

$$\hat{A} = \left[\begin{array}{c|c} A & y \\ \hline y^* & a \end{array}\right].$$

Предположим, что собственные значения $\{\lambda_i\}$ *и* $\{\hat{\lambda}_i\}$ *матриц A и* $\hat{A}$ *соответственно упорядочены по возрастанию:*

$$\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n, \quad \hat{\lambda}_1 \leqslant \hat{\lambda}_2 \leqslant \ldots \leqslant \hat{\lambda}_n \leqslant \hat{\lambda}_{n+1}.$$

Тогда

$$\hat{\lambda}_1 \leqslant \lambda_1 \leqslant \hat{\lambda}_2 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \hat{\lambda}_n \leqslant \lambda_n \leqslant \hat{\lambda}_{n+1}. \quad (18.3.9)$$

Доказательство. Зададим натуральное число *k,* такое, что $1 \leqslant k \leqslant n$. Докажем неравенства $\hat{\lambda}_k \leqslant \lambda_k \leqslant \hat{\lambda}_{k+1}$. Пусть

$$\hat{x} = [x^T\ \xi]^T \in \mathbf{C}^{n+1},\ x \in \mathbf{C}^n,\ \xi \in \mathbf{C},\ \hat{w}_i = [w_i^T\ \omega]^T \in \mathbf{C}^{n+1},$$
$$w_i \in \mathbf{C}^n,\ \omega \in \mathbf{C}.$$

Применяя вариационный принцип (18.2.12) теоремы Куранта—Фишера, получаем

$$\hat{\lambda}_{k+1} = \min_{\hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{(n+1)-(k+1)} \in \mathbf{C}^{n+1}} \; \max_{\substack{\hat{x} \neq 0,\; \hat{x} \in \mathbf{C}^{n+1} \\ \hat{x} \perp \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{(n+1)-(k+1)}}} \frac{\hat{x}^* \hat{A} \hat{x}}{\hat{x}^* \hat{x}} \geqslant$$

$$\geqslant \min_{\hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{n-k} \in \mathbf{C}^{n+1}} \; \max_{\substack{\hat{x} \neq 0 \\ \hat{x} \perp \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{n-k} \\ \hat{x} \perp e_{n+1}}} \frac{\hat{x}^* \hat{A} \hat{x}}{\hat{x}^* \hat{x}} =$$

$$= \min_{w_1, \ldots, w_{n-k} \in \mathbf{C}^n} \; \max_{\substack{x \neq 0,\; x \in \mathbf{C}^n \\ x \perp w_1, \ldots, w_{n-k}}} \frac{x^* A x}{x^* x} = \lambda_k.$$

Чтобы оценить λ_k снизу, используем вариационное представленние (18.2.13):

$$\hat{\lambda}_k = \max_{\hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{k-1} \in \mathbf{C}^{n+1}} \; \min_{\substack{\hat{x} \neq 0,\; \hat{x} \in \mathbf{C}^{n+1} \\ \hat{x} \perp \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{k-1}}} \frac{\hat{x}^* \hat{A} \hat{x}}{\hat{x}^* \hat{x}} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{k-1} \in \mathbf{C}^{n+1}} \; \min_{\substack{\hat{x} \neq 0 \\ \hat{x} \perp \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{k-1} \\ \hat{x} \perp e_{n+1}}} \frac{\hat{x}^* \hat{A} \hat{x}}{\hat{x}^* \hat{x}} =$$

$$= \max_{w_1, \ldots, w_{k-1} \in \mathbf{C}^n} \; \min_{\substack{x \neq 0,\; x \in \mathbf{C}^n \\ x \perp w_1, \ldots, w_{k-1}}} \frac{\hat{x}^* \hat{A} \hat{x}}{\hat{x}^* \hat{x}} = \lambda_k.$$

Мы уже видели два примера теорем о разделении собственных значений: если заданная эрмитова матрица изменяется путем прибавления однорангового возмущения или посредством окаймления, то новые и старые собственные значения перемежаются. Верно ли обратное? Если заданы два множества перемежающихся вещественных чисел, можно ли рассматривать их как собственные значения некоторой эрмитовой матрицы и ее подходящей модификации? Ответ положительный (более того, существует единственная трехдиагональная матрица с положительными внедиагональными элементами, имеющая заданный спектр и допускающая трехдиагональное окаймление также с заданным спектром. Известны явные формулы для всех элементов такой матрицы и такого окаймления. См. § 7.12 книги: Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. — М.: Мир, 1983), и мы приведем пример утверждения, обратного к теореме 18.3.8.

18.3.10. Теорема. *Пусть заданы натуральное число n и два набора вещественных чисел*

$$\{\lambda_i:\ \ i = 1, 2, \ldots, n\},\ \{\hat{\lambda}_i:\ \ i = 1, 2, \ldots, n, n+1\},$$

подчиненных условию

$$\hat{\lambda}_1 \leqslant \lambda_1 \leqslant \hat{\lambda}_2 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-2} \leqslant \hat{\lambda}_n \leqslant \lambda_n \leqslant \hat{\lambda}_{n+1}.$$

Пусть $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. *Тогда существуют вещественное число а и вектор* $y \in \mathbf{R}^n$ *с вещественными компонентами, такие, что каждое число из множества* $\{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \ldots, \hat{\lambda}_{n+1}\}$ *является собственным значением вещественной симметричной матрицы*

$$\hat{A} = \left[\begin{array}{c|c} \Lambda & y \\ \hline y^T & a \end{array}\right] \in M_{n+1}(\mathbf{R}).$$

Доказательство. Множество $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, очевидно, содержит все собственные значения матрицы Λ, и в силу равенства $\operatorname{tr} \hat{A} = \operatorname{tr} \Lambda + a$

$$a = \operatorname{tr} \hat{A} - \operatorname{tr} \Lambda = \sum_{i=1}^{n+1} \hat{\lambda}_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Несложно вычислить характеристический многочлен $p_{\hat{A}}(t)$ матрицы $\hat{A}$:

$$\det(tI - \hat{A}) =$$
$$= \det \left[\begin{array}{c|c} tI - \Lambda & -y \\ \hline -y^T & t - a \end{array}\right] =$$
$$= \det \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline [(tI-\Lambda)^{-1} y]^T & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} tI - \Lambda & -y \\ \hline -y^T & t - a \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I & (tI-\Lambda)^{-1} y \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] =$$
$$= \det \left[\begin{array}{c|c} tI - \Lambda & 0 \\ \hline 0 & (t-a) - y^T (tI-\Lambda)^{-1} y \end{array}\right] =$$
$$= \left[(t-a) - y^T (tI - \Lambda)^{-1} y\right] \det(tI - \Lambda) =$$
$$= \left[(t-a) - \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \frac{1}{t - \lambda_i}\right] \prod_{i=1}^{n} (t - \lambda_i) = p_{\hat{A}}(t).$$

Мы уже определили единственно возможное значение величины a; осталось найти такие n вещественных чисел y_i для (18.3.11), что $p_{\hat{A}}(\hat{\lambda}_k) = 0$ при $k = 1, 2, \ldots, n+1$.

Введем в рассмотрение многочлены

$$f(t) = \prod_{i=1}^{n+1} (t - \hat{\lambda}_i), \qquad \deg f = n+1, \tag{18.3.12}$$

$$g(t) = \prod_{i=1}^{n} (t - \lambda_i), \qquad \deg g = n. \tag{18.3.13}$$

Алгоритм Евклида приводит к разложению

$$f(t) = g(t)(t - c) + r(t),$$

в котором c — вещественное число и $r(t)$ — многочлен степени не выше n—1. Несложно явно определить значение $c = \sum_{i=1}^{n+1} \hat{\lambda}_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = a.$ Кроме того,

$$f(\lambda_k) = g(\lambda_k)(\lambda_k - a) + r(\lambda_k) = r(\lambda_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

поскольку $g(\lambda_k) = 0.$ Таким образом, многочлен $r(t)$ задан своими значениями в n точках и может быть выписан явно с помощью интерполяционных многочленов Лагранжа, если среди узлов интерполяции $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ нет кратных. При этом предположении все корни многочлена $g(t)$ простые и интерполяционная формула Лагранжа для $r(t)$ имеет вид

$$r(t) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) \frac{g(t)}{g'(\lambda_i)(t - \lambda_i)}.$$

Следовательно,

$$\frac{f(t)}{g(t)} = (t - a) + \frac{r(t)}{g(t)} = (t - a) - \sum_{i=1}^{n} \frac{-f(\lambda_i)}{g'(\lambda_i)} \frac{1}{t - \lambda_i}.$$

Из условий $f(\hat{\lambda}_k) = 0,\ k = 1, 2, \ldots, n + 1,$ обязательно вытекает

$$(\hat{\lambda}_k - a) - \sum_{i=1}^{n} \frac{-f(\lambda_i)}{g'(\lambda_i)} \frac{1}{\hat{\lambda}_k - \lambda_i} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n + 1. \quad (18.3.14)$$

Заметим, что при $\hat{\lambda}_k = \lambda_i$ для $i = k - 1$ либо $i = k$ коэффициент при соответствующем члене $1/(t - \lambda_i)$ равен нулю и в точке $t = \hat{\lambda}_k$ нет особенности (другими словами, в (18.3.14) величина $\hat{\lambda}_k - \lambda_i$ присутствует не только в знаменателе, но и в числителе — она входит как сомножитель в $f(\lambda_i)$, см. (18.3.12). Поэтому при $\hat{\lambda}_k = \lambda_i$ не возникает никаких неприятностей). Если подставить выражения $y_i^2 = -f(\lambda_i)/g'(\lambda_i),\ i = 1, 2, \ldots, n,$ в уравнение (18.3.11), то $p_{\hat{A}}(\hat{\lambda}_k) = 0,$ что и требовалось. Следовательно, осталось установить неравенство $f(\lambda_i)/g'(\lambda_i) \leqslant 0$ для $i = 1, 2, 3, \ldots, n,$ и именно теперь следует привлечь предположение о разделении. Используя определения многочленов $f(t)$ и $g(t)$ и предположение о разделении, получаем, что

$$f(\lambda_i)=(-1)^{n-i+1}\prod_{j=1}^{n+1}|\lambda_i-\hat{\lambda}_j|,\quad g'(\lambda_i)=(-1)^{n-i}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{n}|\lambda_i-\lambda_j|,$$

а это показывает, что числа $f(\lambda_i)$ и $g'(\lambda_i)$ всегда имеют противоположные знаки.

В случае когда некоторые из чисел λ_i совпадают, рассуждения лишь немного видоизменяются. Пусть для определенности $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_k<\lambda_{k+1}\leqslant\ldots$ для некоторого $k\geqslant 2$; тогда $\hat{\lambda}_2=\ldots=\hat{\lambda}_k=\lambda_1$. Многочлен $f(t)$ в (18.3.12) содержит сомножитель $(t-\lambda_1)^{k-1}(t-\hat{\lambda}_1)$, многочлен $g(t)$ в (18.3.13) содержит сомножитель $(t-\lambda_1)^k$, причем кратность корня λ_1 в многочлене $g(t)$ в точности равна k. Следовательно, можно разделить каждый из многочленов $f(t)$, $g(t)$ и $r(t)$ на $(t-\lambda_1)^{k-1}$. Для модифицированного таким образом многочлена $g(t)$ точка λ_1 будет простым корнем. Все кратные корни многочлена $g(t)$ аналогичным образом преобразуются в простые, последующие рассуждения можно продолжать, как и ранее, и заключение сохраняет силу.

В предшествующих результатах эрмитова матрица «окаймляется» снизу и справа новыми строкой и столбцом, однако можно также считать, что в этих результатах описывается поведение собственных значений эрмитовой матрицы при *исключении* из нее последних строки и столбца. Необязательно привязываться к *последним* строке и столбцу. Если в теореме 18.3.8 в матрице A вычеркиваются i-е строка и столбец вместо последних, то в доказательстве векторы e_{n+1} и e_i просто меняются ролями и заключительные неравенства разделения (18.3.9) остаются в силе.

Теоремы 18.3.8 и 18.3.10 позволяют утверждать, что неравенства разделения (18.3.9) полностью описывают связь между собственными значениями эрмитовой матрицы и собственными значениями любой ее заданной главной подматрицы порядка n— 1. Если одновременно рассматривать все n главных подматриц порядка n—1 матрицы A, то можно установить более тонкие результаты. Обозначим через A_j главную подматрицу, полученную отбрасыванием j-х строки и столбца матрицы A, $j=1, 2, \ldots, n$, и упорядочим собственные значения матриц A и A_j по возрастанию. Тогда при каждом $i=1, 2, \ldots, n-1$

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \lambda_i(A_j) \geqslant \frac{n-i}{n}\lambda_1(A) + \frac{i}{n}\lambda_{i+1}(A),$$

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n} \lambda_i(A_j) \leqslant \frac{n-i}{n}\lambda_i(A) + \frac{i}{n}\lambda_n(A),$$

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \lambda_{n-1}(A_j) - \min_{1\leqslant j\leqslant n} \lambda_i(A_j) \geqslant \left(\frac{n-2}{n}\right)^{1/2}[\lambda_n(A) - \lambda_1(A)].$$

Если все собственные значения матрицы A неотрицательны, т. е. если матрица A положительно полуопределена, то первое из этих трех неравенств позволяет заключить, что по крайней мере для одной главной подматрицы A_j справедливо неравенство

$$\lambda_{n-1}(A_j) \geqslant \frac{n-1}{n}\lambda_n(A).$$

Таким образом, спектральный радиус каждой главной подматрицы положительно полуопределенной эрмитовой матрицы не может быть «маленьким».

Как изменятся собственные значения, если исключить из эрмитовой матрицы несколько строк и соответствующих столбцов так, чтобы оставшаяся матрица являлась главной подматрицей основной? Следующий результат можно получить многократным применением неравенств разделения (18.3.9), однако прямое доказательство с использованием теоремы Куранта — Фишера оказывается более простым. Этот результат иногда называют *принципом вложения.*

18.3.15. Теорема. *Пусть* $A \in M_n$ *— эрмитова матрица,* r *— натуральное число, такое, что* $1 \leqslant r \leqslant n$, *а* A_r *— произвольная главная* $r \times r$*-подматрица матрицы* A *(полученная отбрасыванием* $n - r$ *строк и соответствующих столбцов исходной матрицы). Тогда при любом целом* k, *таком, что* $1 \leqslant k \leqslant r$, *справедливы неравенства*

$$\lambda_k(A) \leqslant \lambda_k(A_r) \leqslant \lambda_{k+n-r}(A).$$

Доказательство. Пусть подматрица $A_r \in M_n$ дополняется до целой матрицы строками и столбцами с номерами $i_1, \ldots, i_{n-r}$. Используя вариационный принцип (18.2.12), получаем, что

$$\lambda_{k+n-r}(A)=\min_{w_1,\ldots,w_{r-k}\in\mathbb{C}^n}\ \max_{\substack{x\neq0,\ x\in\mathbb{C}^n\\ x\perp w_1,\ldots,w_{r-k}}}\frac{x^*Ax}{x^*x}\geqslant$$

$$\geqslant\min_{w_1,\ldots,w_{r-k}\in\mathbb{C}^n}\ \max_{\substack{x\neq0,\ x\in\mathbb{C}^n\\ x\perp w_1,\ldots,w_{r-k}\\ x\perp e_{i_1},\ldots,e_{i_{n-r}}}}\frac{x^*Ax}{x^*x}=$$

$$=\min_{v_1,\ldots,v_{r-k}\in\mathbb{C}^r}\ \max_{\substack{y\neq0,\ y\in\mathbb{C}^r\\ y\perp v_1,\ldots,v_{r-k}}}\frac{y^*A_ry}{y^*y}=\lambda_k(A_r).$$

При помощи (18.2.13) получаем

$$\lambda_k(A)=\max_{w_1,\ldots,w_{k-1}\in\mathbb{C}^n}\ \min_{\substack{x\neq0,\ x\in\mathbb{C}^n\\ x\perp w_1,\ldots,w_{k-1}}}\frac{x^*Ax}{x^*x}\leqslant$$

$$\leqslant\max_{w_1,\ldots,w_{k-1}\in\mathbb{C}^n}\ \min_{\substack{x\neq0,\ x\in\mathbb{C}^n\\ x\perp w_1,\ldots,w_{k-1}\\ x\perp e_{i_1},\ldots,e_{i_{n-r}}}}\frac{x^*Ax}{x^*x}=$$

$$=\max_{v_1,\ldots,v_{k-1}\in\mathbb{C}^r}\ \min_{\substack{y\neq0,\ y\in\mathbb{C}^r\\ y\perp v_1,\ldots,v_{k-1}}}\frac{y^*A_ry}{y^*y}=\lambda_k(A_r).$$

Следующее простое следствие теоремы 18.3.15 известно как *теорема Пуанкаре о разделении* и может применяться в таких ситуациях (например, в квантовой механике), когда имеется информация о величине скалярных произведений $u_i^*Au_j$ некоторой системы векторов $u_1,\ldots,u_r$. (Если в линейной оболочке векторов $u_1,\ldots,u_r$ имеются хорошие приближения к некоторым собственным векторам матрицы *A,* то соответствующие им собственные значения будут весьма точно аппроксимироваться некоторыми из собственных значений матрицы B_r, описанной в следствии 18.3.16. Вычисление элементов матрицы B_r и определение ее собственных значеиий, рассматриваемых как приближения к некоторым собственным значениям матрицы *A,* составляет содержание классического метода Рэлея—Ритца — одного из основных методов нахождения собственных значений самосопряженных операторов.)

18.3.16. Следствие. *Пусть заданы эрмитова матрица* $A\in M_n$, *натуральное число* r, $1\leqslant r\leqslant n$, *и набор* $u_1,\ldots,u_r\in\mathbb{C}^n$ *из r ортонормированных векторов. Положим* $B_r\equiv[u_i^*Au_j]\in M_r$. *Если собственные значения матриц A и* B_r *упорядочены по возрастанию, как в* (18.2.1), *то справедливы неравенства*

$$\lambda_k(A) \leqslant \lambda_k(B_r) \leqslant \lambda_{k+n-r}(A), \quad k = 1, 2, \ldots, r. \quad (18.3.17)$$

Доказательство, Если $r < n$, выберем $n - r$ дополнительных векторов $u_{r+1}, \ldots, u_n$ так, чтобы множество $\{u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n\}$ было ортонормированным базисом, и образуем матрицу $U = [u_1 \ldots u_n] \in M_n$. Матрица U унитарна, собственные значения матриц U^*AU и A совпадают, и в матрице U^*AU матрица B_r является главной подматрицей, полученной вычеркиванием последних $n - r$ строк и столбцов. В такой формулировке требуемое утверждение вытекает из теоремы 18.3.15.

Матрицу $B_r \in M_r$ в предыдущем результате можно записать в виде $B_r = U^*AU$, где $U \in M_{n,r}$ — матрица с r ортонормированными столбцами. Суммируя неравенства (18.3.17) по индексу k и учитывая равенство $\operatorname{tr} B_r = \lambda_1(B_r) + \ldots + \lambda_r(B_r)$, приходим к следующему вариационному описанию суммы собственных значений.

18.3.18. Следствие. *Пусть матрица $A \in M_n$ эрмитова, задано натуральное число к и $1 \leqslant r \leqslant n$. Тогда*

(18.3.19)

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1(A) + \ldots + \lambda_r(A) &= \min_{U^*U = I \in M_n} \operatorname{tr} U^*AU, \\ \lambda_{n-r+1}(A) + \ldots + \lambda_n(A) &= \max_{U^*U = I \in M_r} \operatorname{tr} U^*AU. \end{aligned}\right\} U \in M_{n,r}.$$

(18.3.20)

Минимум в (18.3.19) достигается, когда столбцы матрицы U совпадают с ортонормированными собственными векторами, отвечающими *к* минимальным собственным значениям матрицы *A*. Аналогичный выбор обеспечивает максимум в (18.3.20). Можно считать, что эти два утверждения обобщают теорему Рэлея — Ритца 18.2.2. С их помощью можно получить многочисленные неравенства.

Иногда известны границы изменения квадратичной формы x^*Ax на некотором подпространстве. В этом случае можно определить границы для собственных значений матрицы *A* при помощи теоремы Куранта — Фишера.

18.3.21. Теорема. *Пусть матрица $A \in M_n$ эрмитова, задано натуральное число k, такое, что $1 \leqslant k \leqslant n$, и k-мерное подпространство S_k в $\mathbf{C}^n$. Собственные значения матрицы A предполагаются упорядоченными по возрастанию, как в* (18.2.1). *Если существует такая константа c_2, что $x^*Ax \geqslant c_2x^*x$ для всех векторов $x \in S_k$, то*

$$\lambda_n \geqslant \lambda_{n-1} \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{n-k+1} \geqslant c_2.$$

Если существует такая константа c_1, что $x^*Ax \leqslant c_1x^*x$ для всех *векторов* $x \in S_k$, *то*

$$c_1 \geqslant \lambda_k \geqslant \ldots \geqslant \lambda_1.$$

Доказательство. Пусть векторы $u_1, \ldots, u_{n-k}$ образуют ортонормированный базис подпространства $S_k^{\perp}$. Используя вариационный принцип (18.2.13), получаем

$$c_2 \leqslant \min_{\substack{x \neq 0 \\ x \in S_k}} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \min_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp u_1, \ldots, u_{n-k}}} \frac{x^*Ax}{x^*x} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{w_1, \ldots, w_{n-k} \in \mathbb{C}^n} \min_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp w_1, \ldots, w_{n-k}}} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \lambda_{n-k+1}. \qquad (18.3.22)$$

Аналогично, применяя (18.2.12), получаем

$$c_1 \geqslant \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \in S_k}} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp u_1, \ldots, u_{n-k}}} \frac{x^*Ax}{x^*x} \geqslant$$

$$\geqslant \min_{w_1, \ldots, w_{n-k} \in \mathbb{C}^n} \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp w_1, \ldots, w_{n-k}}} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \lambda_k.$$

18.3.23. Следствие. *Если матрица* $A \in M_n$ *эрмитова и неравенства* $x^*Ax \geqslant 0$ *выполняются для всех векторов x некоторого k-мерного подпространства, то по меньшей мере k собственных значений матрицы A неотрицательны. Если неравенство строгое,* т. е. $x^*Ax > 0$ *для всех ненулевых векторов x некоторого k-мерного подпространства, то матрица A имеет не менее k положительных собственных значений.*

Доказательство. Первое утверждение следует из предыдущей теоремы при $c_2 = 0$. Второе утверждение докажем от противного. Если $\lambda_{n-k+1} = 0$, то неравенство в (18.3.22) обращается в равенство

$$0 = \min_{\substack{x \neq 0 \\ x \in S_k}} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \min_{\substack{x^*x = 1 \\ x \in S_k}} x^*Ax.$$

Однако подпространство S_k конечномерно, следовательно, множество $D = \{x \in S_k:\ x^*x = 1\}$ компактно (см. утверждение 19.5.6) и непрерывная функция x^*Ax принимает минимальное значение на множестве D в некоторой точке $x_0 \in S_k$, подчиненной условию $x_0^*x_0 = 1$. Но тогда $x_0 \neq 0$, и равенство $x_0^*Ax_0 = 0$ противоречит предположению, что неравенство $x^*Ax > 0$ строгое для всех векторов $x \in S_k$ при $x \neq 0$.

Собственные значения и элементы на главной диагонали эрмитовой матрицы являются вещественными числами, и сумма всех собственных значений равна сумме всех диагональных элементов (следу матрицы). Точная связь между элементами главной диагонали и собственными значениями задается понятием *мажоризации.*

18.3.24. Определение. Пусть заданы векторы $\alpha = [\alpha_i] \in \mathbf{R}^n$ и $\beta = [\beta_i] \in \mathbf{R}^n$. Говорят, что вектор β *мажорирует* вектор α, если

$$\min\left\{ \sum_{j=1}^{k} \beta_{i_j}:\ 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n \right\} \geqslant$$
$$\geqslant \min\left\{ \sum_{j=1}^{k} \alpha_{i_j}:\ 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n \right\}$$

для всех $k = 1, 2, \ldots, n$, причем при $k = n$ неравенство обращается в *равенство.* Если упорядочить компоненты векторов α и β по возрастанию:

$$\alpha_{j_1} \leqslant \alpha_{j_2} \leqslant \ldots \leqslant \alpha_{j_n}, \quad \beta_{m_1} \leqslant \beta_{m_2} \leqslant \ldots \leqslant \beta_{m_n},$$

то определяющее неравенство можно записать в эквивалентной форме

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_{m_i} \geqslant \sum_{i=1}^{k} \alpha_{j_i}, \qquad (18.3.25)$$

где $k = 1, 2, \ldots, n$ и при $k = n$ должно выполняться *равенство.*

Таким образом, вещественный вектор β мажорирует вещественный вектор α, если сумма k наименьших компонент вектора β не меньше суммы k наименьших компонент вектора α при $k = 1, 2, \ldots, n - 1$, и суммы всех компонент векторов β и α совпадают. Отметим, что произвольные перестановки компонент векторов β и α не оказывают влияния на факт мажоризации вектором β вектора α.

Понятие мажоризации во многих разделах теории матриц играет важную роль — устанавливает точное взаимоотношение между двумя множествами вещественных чисел. Следующая теорема Шура (1923) является тому примером.

18.3.26. Теорема. *Пусть матрица $A \in M_n$ эрмитова. Тогда вектор ее диагональных элементов мажорирует вектор, составленный из ее собственных значений.*

Доказательство. Проведем доказательство по индукции, параметром индукции послужит размерность. При $n = 1$ утверждение теоремы тривиально. Предположим, что оно верно для эрмитовой матрицы порядка k для всех значений $k \leqslant n - 1$. Пусть $A \equiv [a_{ij}] \in M_n$ — данная эрмитова матрица, и пусть $A_1 \in M_{n-1}$ — ее главная подматрица, полученная исключением тех строки и столбца, на пересечении которых расположен наибольший диагональный элемент матрицы A. Обозначим через $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$

собственные значения матрицы *A,* через $\lambda'_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda'_{n-1}$ собственные значения матрицы A_1 и через $a_{i_1 i_1} \leqslant a_{i_2 i_2} \leqslant \ldots \leqslant a_{i_n i_n}$ диагональные элементы матрицы *A,* расположенные по возрастанию. По предположению индукции

$$\sum_{j=1}^{k} a_{i_j i_j} \geqslant \sum_{j=1}^{k} \lambda'_j \quad \text{для всех } k = 1, \ldots, n-1.$$

В силу теоремы 18.3.8

$$\lambda_1 \leqslant \lambda'_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda'_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda'_{n-1} \leqslant \lambda_n$$

и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda'_j \geqslant \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \quad \text{для всех } k = 1, \ldots, n-1.$$

Таким образом,

$$\sum_{j=1}^{k} a_{i_j i_j} \geqslant \sum_{j=1}^{k} \lambda_j, \qquad k = 1, \ldots, n-1,$$

и при *k* — *n* это неравенство становится равенством, потому что след равен сумме собственных значений.

Понятие мажоризации также полезно для выражения связи между собственными значениями слагаемых и суммы.

18.3.27. Теорема. *Пусть матрицы* $A,\ B \in M_n$ *эрмитовы. Через*

$$\lambda(A) = [\lambda_i(A)], \quad \lambda(B) = [\lambda_i(B)], \quad \lambda(A+B) = [\lambda_i(A+B)]$$

обозначим вектор-столбцы в $\mathbf{R}^n$, *компоненты которых являются собственными значениями матриц A, B, A + B, упорядоченными по возрастанию, как в* (18.2.1). *Тогда вектор* $\lambda(A+B)$ *мажорирует вектор* $\lambda(A) + \lambda(B)$.

Доказательство. При любом $k = 1, 2, \ldots, n$, используя следствие 18.3.18, получаем

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(A+B) &= \min_{U^*U = I \in M_k} \operatorname{tr} U^*(A+B)U = \\ &= \min_{U^*U = I \in M_k} (\operatorname{tr} U^*AU + \operatorname{tr} U^*BU) \geqslant \\ &\geqslant \min_{U^*U = I \in M_k} \operatorname{tr} U^*AU + \min_{U^*U = I \in M_k} \operatorname{tr} U^*BU = \\ &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(A) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(B) = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i(A) + \lambda_i(B)).\end{aligned}$$

При *k* = *n* здесь фактически имеет место равенство, поскольку

$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B.$$

Мы утверждали, что понятие мажоризации *точно* описывает связь между элементами главной диагонали эрмитовой матрицы и ее собственными значениями, но доказали в теореме 18.3.26 только половину этого утверждения. Чтобы обосновать его до конца, потребуется следующая лемма технического характера.

18.3.28. Лемма. *Пусть* $n \geqslant 2$ *и заданы вещественные числа* $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n$, $\beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \ldots \leqslant \beta_n$. *Если вектор* $\beta = [\beta_i]^T$ *мажорирует вектор* $\alpha = [\alpha_i]^T$, *то найдутся вещественные числа* $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$, *такие, что*

$$\alpha_1 \leqslant \gamma_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \gamma_2 \leqslant \alpha_3 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_{n-1} \leqslant \gamma_{n-1} \leqslant \alpha_n$$

и что вектор $\beta' = [\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}]^T \in \mathbf{R}^{n-1}$ *мажорирует вектор*

$$\gamma = [\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}]^T \in \mathbf{R}^{n-1}.$$

Доказательство. При $n = 2$ имеем $\alpha_1 \leqslant \beta_1$ и $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$, или

$$\alpha_2 = (\beta_1 - \alpha_1) + \beta_2 \geqslant \beta_2 \geqslant \beta_1.$$

Таким образом, выполняются неравенства $\alpha_1 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_2$, поэтому можно положить $\gamma_1 = \beta_1$ и утверждение леммы будет справедливо. Теперь пусть $n \geqslant 2$. Обозначим через $\Delta = \{[\delta_1, \ldots, \delta_{n-1}]^T\} \subset \mathbf{R}^{n-1}$ множество точек, подчиненных неравенствам

$$\alpha_1 \leqslant \delta_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \delta_2 \leqslant \alpha_3 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_{n-1} \leqslant \delta_{n-1} \leqslant \alpha_n, \tag{18.3.29a}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \delta_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} \beta_i, \quad k = 1, 2, \ldots, n-2. \tag{18.3.29b}$$

Поскольку вектор β мажорирует вектор α, точка $\delta = \hat{\alpha} = [\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}]^T$ всегда принадлежит Δ; следовательно, множество Δ непусто. Множество Δ, очевидно, ограничено, замкнуто и, таким образом, компактно. Легко убедиться в его выпуклости. Если $\delta = [\delta_1, \ldots, \delta_{n-1}]^T \in \Delta$, положим $f(\delta) \equiv \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_{n-1}$. Заметим, что $f(\hat{\alpha}) = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1} \leqslant \beta_1 + \ldots + \beta_{n-1}$. Если мы сможем указать некоторую точку $\hat{\delta} \in \Delta$, удовлетворяющую неравенству $f(\hat{\delta}) \geqslant \beta_1 + \ldots + \beta_{n-1}$, то в силу выпуклости множества Δ в него будет входить целый отрезок: $t\hat{\alpha} + (1 - t)\hat{\delta} \in \Delta$ для всех $t \in [0, 1]$, и непрерывная функция $g(t) \equiv f(t\hat{\alpha} + (1 - t)\hat{\delta})$ будет подчиняться условиям

$$g(0) \geqslant \beta_1 + \ldots + \beta_{n-1} \geqslant g(1).$$

Отсюда можно заключить, что в некоторой точке $t_0 \in [0, 1]$ будет иметь место равенство $g(t_0) = \beta_1 + \ldots + \beta_{n-1}$. Тогда вектор $\gamma = [\gamma_i]^T = t_0\hat{\alpha} + (1 - t_0)\hat{\delta}$ будет удовлетворять заключению

леммы.
Функция $f(\cdot)$ непрерывна на компактном множестве Δ; тогда существует точка $\hat{\delta} \in \Delta$, для которой

$$\max_{\delta \in \Delta} f(\delta) = f(\hat{\delta}). \qquad (18.3.30)$$

Докажем справедливость неравенства $f(\hat{\delta}) \geqslant \beta_1 + \ldots + \beta_{n-1}$. Экстремальная точка $\hat{\delta} \in \Delta$ удовлетворяет неравенствам (18.3.29a), (18.3.29b); следовательно,

$$\hat{\delta}_k \leqslant \alpha_{k+1}, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1, \qquad (18.3.31a)$$

$$\sum_{i=1}^{k} \hat{\delta}_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} \beta_i, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-2. \qquad (18.3.31b)$$

Пусть *все* неравенства (18.3.31b) строгие. Если хотя бы одно из неравенств (18.3.31a) было строгим, то по меньшей мере одна компонента вектора $\hat{\delta}$ могла бы возрастать и при этом увеличивалось бы значение $f(\hat{\delta})$. Поскольку такая возможность противоречит свойству (18.3.30), заключаем, что все нестрогие неравенства (18.3.31a) должны быть просто равенствами; тогда $\hat{\delta} = [\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n]^T$ и $f(\hat{\delta}) = \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) - \alpha_1 = (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n) - \alpha_1 = (\beta_1 + \ldots + \beta_{n-1}) + \beta_n - \alpha_1 \geqslant (\beta_1 + \ldots + \beta_{n-1}) + \beta_1 - \alpha_1 \geqslant \beta_1 + \ldots + \beta_{n-1}$, чтои требовалось доказать.

Теперь пусть *не все* неравенства (18.3.31b) строгие; таким образом, найдутся такие индексы *k*, при которых в (18.3.31b) имеют место равенства. Обозначим через *r* наибольший такой индекс. Тогда

$$\sum_{i=1}^{r} \hat{\delta}_i = \sum_{i=1}^{r} \beta_i,$$

$$\sum_{i=1}^{k} \hat{\delta}_i < \sum_{i=1}^{k} \beta_i, \quad k = r+1,\ \ldots,\ n-2.$$

Повторяя приведенные в предыдущем абзаце рассуждения, приходим к равенствам $\hat{\delta}_k = \alpha_{k+1}$ для $k = r+1,\ \ldots,\ n-1$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
f(\hat{\delta}) &= (\hat{\delta}_1 + \ldots + \hat{\delta}_r) + (\hat{\delta}_{r+1} + \ldots + \hat{\delta}_{n-1}) = \\
&= (\beta_1 + \ldots + \beta_r) + (\alpha_{r+2} + \ldots + \alpha_n) = \\
&= (\beta_1 + \ldots + \beta_{n-1}) + (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n) - \\
&\quad - (\alpha_1 + \ldots + \alpha_{r+1}) - (\beta_{r+1} + \ldots + \beta_{n-1}) = \\
&= (\beta_1 + \ldots + \beta_{n-1}) + (\beta_1 + \ldots + \beta_n) - \\
&\quad - (\alpha_1 + \ldots + \alpha_{r+1}) - (\beta_{r+1} + \ldots + \beta_{n-1}) = \\
&= (\beta_1 + \ldots + \beta_{n-1}) + [(\beta_1 + \ldots + \beta_{r+1}) - (\alpha_1 + \ldots + \alpha_{r+1})] + \\
&\quad + (\beta_{r+2} + \ldots + \beta_n) - (\beta_{r+1} + \ldots + \beta_{n-1}) \geqslant \\
&\geqslant (\beta_1 + \ldots + \beta_{n-1}) + (\beta_{r+2} - \beta_{r+1}) + \\
&\quad + (\beta_{r+3} - \beta_{r+2}) + \ldots + (\beta_n - \beta_{n-1}) \geqslant \beta_1 + \ldots + \beta_{n-1}.
\end{aligned}$$

Теперь мы можем доказать утверждение, обратное к утверждению теоремы 18.3.26.

18.3.32. Теорема. *Пусть* $n \geqslant 1$, *и пусть заданы вещественные числа* $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ *и* $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$. *Если вектор* $a = [a_i]^T$ *мажорирует вектор* $\lambda = [\lambda_i]^T$, *то существует такая вещественная симметричная матрица* $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbf{R})$, *что* $a_{ii} = a_i$ *для* $i = 1, 2, \ldots, n$ *и каждое число из множества* $\{\lambda_i\}$ *является собственным значением матрицы A.*

Доказательство. При $n = 1$ утверждение тривиально. Предположим, что оно уже доказано для всех векторов a и λ с не более чем $n — 1$ компонентами. По лемме 18.3.28 существуют вещественные числа $\gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \ldots \leqslant \gamma_{n-1}$, такие, что

$$\lambda_1 \leqslant \gamma_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \gamma_{n-1} \leqslant \lambda_n$$

и вектор $a' = [a_1, \ldots, a_{n-1}]^T$ мажорирует вектор $\gamma = [\gamma_i]^T \in \mathbf{R}^{n-1}$. По предположению индукции найдется вещественная симметричная матрица $B = [b_{ij}] \in M_{n-1}$ с диагональными элементами $b_{ii} = a_i$ при $i = 1, 2, \ldots, n-1$, такая, что множество ее собственных значений совпадает с $\{\gamma_i\}$. Введем матрицу собственных значений

$$\Gamma = \operatorname{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}) \in M_{n-1}(\mathbf{R});$$

тогда имеет место разложение $B = Q\Gamma Q^T$, в котором $Q \in M_{n-1}(\mathbf{R})$ — некоторая вещественная ортогональная матрица. В силу теоремы 18.3.10 найдется вещественная симметричная матрица

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \Gamma & y \\ y^T & \alpha \end{bmatrix} \in M_n(\mathbf{R}), \quad y \in \mathbf{R}^{n-1}, \quad \alpha \in \mathbf{R},$$

собственными значениями которой являются λ_i. Положим

$$A = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{A} \begin{bmatrix} Q^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q\Gamma Q^T & Qy \\ (Qy)^T & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & Qy \\ (Qy)^T & \alpha \end{bmatrix}.$$

Множество $\{\lambda_i\}$ — это множество всех собственных значений матрицы *A*, у которой на главной диагонали расположены числа $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \alpha$. Однако из условия мажоризации следует, что

$$\operatorname{tr} A = a_1 + \ldots + a_{n-1} + \alpha = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = a_1 + \ldots + a_n.$$

Таким образом, $\alpha = a_n$ и главная диагональ матрицы *A* составлена из требуемых чисел.

Предыдущий результат не только завершает круг рассуждений о связях между элементами главной диагонали и собственными значениями эрмитовой матрицы, но также позволяет прояснить геометрический смысл собственно понятия мажоризации.

Двояко стохастической называют матрицу $A \in M_n$, все n^2 элементов которой неотрицательны, причем сумма элементов в каждой строке и в каждом столбце равна +1. По теореме Биркгофа 22.7.1 каждая двояко стохастическая матрица является выпуклой комбинацией конечного набора матриц перестановок; верно и обратное утверждение.

18.3.33. Теорема. *Пусть заданы два вещественных вектора* $\alpha = [\alpha_i]^T \in \mathbf{R}^n$ *и* $\beta = [\beta_i]^T \in \mathbf{R}^n$. *Следующие условия эквивалентны:*

(a) *вектор* β *мажорирует вектор* α*;*

(b) *существует двояко стохастическая матрица* $S \in M_n$*, подчиненная равенству* $\beta = S\alpha$*;*

(c) $\beta \in \left\{ \sum\limits_{i=1}^{N} p_i \alpha_{\pi_i} \right\}$, *где* $1 \leqslant N < \infty$, $p_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{N} p_i = 1$

и $\alpha_{\pi_i} \in \mathbf{R}^n$ *— вектор, компоненты которого совпадают с некоторой перестановкой компонент данного вектора* α.

Доказательство. Если предположить, что выполняется (a), то по теореме 18.3.32 существует вещественная симметричная матрица $B = [b_{ij}] \in M_n$ с элементами $b_{ii} = \beta_i$ на главной диагонали и собственными значениями $\lambda_i(B) = \alpha_i$. В силу спектральной теоремы найдется такая унитарная (даже вещественная ортогональная) матрица $U = [u_{ij}] \in M_n$, что $B = U\Lambda U^*$, где $\Lambda = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_2)$. Вычисляя элементы на главной диагонали матрицы *B,* пользуясь этим разложением, приходим к равенству $\beta = S\alpha$, в котором матрица $S = [s_{ij}] \in M_n$ задается формулами $s_{ij} = |u_{ij}|^2$. У такой матрицы *S* сумма элементов в каждой строке и в каждом столбце равна единице, поскольку каждая строка и каждый столбец матрицы U представляют собой единичный вектор; значит, матрица S двояко стохастическая (специального типа, известного как *ортостохастическая* матрица). Таким образом, (a) влечет за собой (b). Доказательство обратного к предыдущему утверждению намечено в задаче 9 в конце данного параграфа. Если предположить (b), то в силу теоремы Биркгофа 22.7.1 справедливо представление

$$S = \sum_{i=1}^{N} p_i P_i, \quad \text{где } p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{N} p_i = 1$$

и P_i — матрицы перестановок. Следовательно,

$$\beta = S\alpha = \sum_{i=1}^{N} p_i P_i \alpha = \sum_{i=1}^{N} p_i \alpha_{\pi_i}, \quad \text{где } P_i \alpha = \alpha_{\pi_i},$$

т. е. условие (c) выполняется. Последнее равенство служит также обоснованием того, что из (c) следует (b).

Итак, множество всех векторов $\beta = [\beta_1, \ldots, \beta_n]^T$, мажорирующих заданный вектор $\alpha = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]^T$, можно получить следующим образом: вычислим $n!$ векторов (не все из них различны, если некоторые числа α_i совпадают), образованных всевозможными перестановками n компонент вектора α, и затем построим выпуклую оболочку этих векторов.

Замечание. Есть общее признание важности идеи мажоризации, однако нет общепризнанного понятия мажоризации. Некоторые авторы определяют мажоризацию, меняя знак в неравенствах (18.3.25) на обратный, другие используют упорядочение по убыванию. По этой причине следует проявлять осторожность, используя или цитируя результаты по мажоризации из разных источников. Наш выбор определения мажоризации обоснован в задаче 11.

Микромодуль 52
Индивидуальные тестовые задания

Задачи к п 18.1

1. Показать, что каждая главная подматрица эрмитовой матрицы сама эрмитова. Сохраняется ли это свойство для косоэрмитовых матриц? Для нормальных матриц?
2. Пусть матрица $A \in M_n$ эрмитова и $S \in M_n$. Убедиться, что произведение SAS^* будет эрмитовой матрицей. Что можно сказать о матрице SAS^{-1} (если S невырожденна)?

3. Пусть матрицы $A,\ B \in M_n$ эрмитовы. Доказать, что A и B подобны в том и только в том случае, когда они унитарно подобны. *Указание.* Полагая $A = SBS^{-1}$, показать, что $A = U\Lambda U^*$ и $B = V\Lambda V^*$, где матрицы U и V унитарны; тогда $U^*AU = \Lambda = V^*BV$.
4. Проверить свойства 1—9, следующие за определением 18.1.1.
5. В некоторых случаях тот факт, что все собственные значения данной матрицы вещественны, удается установить, доказывая, что эта матрица подобна эрмитовой. Приведем следующий классический пример. Пусть матрица $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbf{R})$ трехдиагональна, т. е. $a_{ij} = 0$ при $|i - j| > 1$. Предположим, что ее внедиагональные элементы подчиняются условию (при этом условии трехдиагональные матрицы принято называть *якобиевыми*) $a_{i,\,i+1}a_{i+1,\,i} > 0$ для всех индексов $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$, которое можно рассматривать как весьма слабый аналог условия симметричности. Найти такую вещественную диагональную матрицу D с положительными элементами, чтобы матрица DAD^{-1} стала симметричной. Вывести отсюда, что все собственные значения матрицы A вещественны. На примере матрицы $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ объяснить, почему предположение о согласовании знаков внедиагональных элементов является необходимым. Использовать соображения непрерывности для доказательства того, что собственные значения остаются вещественными, когда выполняются нестрогие неравенства $a_{i,\,i+1}a_{i+1,\,i} \geqslant 0$.
6. Доказать, что каждая матрица $A \in M_n$ определяется связанной с ней эрмитовой формой x^*Ax единственным образом в следующем смысле. Если заданы матрицы $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}] \in M_n$, то равенство эрмитовых форм $x^*Ax = x^*Bx$ для всех векторов $x \in \mathbf{C}^n$ возможно в том и только в том случае, когда $A = B$. *Указание.* Пусть $x^*Ax = 0$ для всех $x \in \mathbf{C}^n$. Раскрыть скобки в выражении $(x + y)^* A(x + y)$ и установить равенство $x^*Ay + y^*Ax = 0$ для всех $x,\ y \in \mathbf{C}^n$. Выбрать $x = e_k$, $y = e^{i\theta}e_j$, $\theta \in \mathbf{R}$, и установить, что $a_{kj}e^{2i\theta} = -a_{jk}$ для всех $\theta \in \mathbf{R}$ и всех $j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.
7. Убедиться, что матрица $A \in M_n$ (более того, даже матрица с вещественными элементами) не определяется полностью связанной с ней квадратичной формой x^TAx при $n \geqslant 2$, т. е. при $n \geqslant 2$ найдутся две матрицы не $A,\ B \in M_n$, равные друг другу и удовлетворяющие равенству $x^TAx = x^TBx$ для всех векторов

$x \in \mathbf{C}^n$. *Указание.* Что представляет собой квадратичная форма x^TCx, когда $C = -C^T$?

8. Показать, что матрица $A \in M_n$ не определяется однозначно абсолютной величиной связанной с ней эрмитовой формы $|x^*Ax|$. *Указание.* Положить $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и проверить равенство $|x^*Ax| = |x^*A^Tx|$ для произвольных векторов $x \in \mathbf{C}^2$.

9. Доказать, что абсолютная величина эрмитовой полуторалинейной формы, связанной с матрицей $A \in M_n$, до некоторой степени определяет эту матрицу в следующем смысле. Для двух заданных матриц A, $B \in M_n$ равенство $|x^*Ay| = |x^*By|$ для всех векторов x, $y \in \mathbf{C}^n$ выполнено тогда и только тогда, когда эти матрицы связаны соотношением $A = e^{i\theta}B$ при некотором $\theta \in \mathbf{R}$. *Указание.* Пусть $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$. Выбор $x = e_i$ и $y = e_j$ приводит к равенству $|a_{ij}| = |b_{ij}|$ для всех индексов i, $j = 1, \ldots, n$, а выбор $x = e_i$, $y = se_j + te_k$ — к равенствам $|sa_{ij} + ta_{ik}|^2 = |sb_{ij} + tb_{ik}|^2$. Следовательно, $\mathrm{Re}(st[a_{ij}\bar{a}_{ik} - b_{ij}\bar{b}_{ik}]) = 0$ при всевозможных s, $t \in \mathbf{C}$. Вывести отсюда, что $a_{ij}/b_{ij} = a_{ik}/b_{ik}$, если $b_{ij}b_{ik} \neq 0$.

10. Доказать, что матрица $A \in M_n$ эрмитова в том и только в том случае, когда матрица *iA* косоэрмитова. Почему собственные значения косоэрмитовой матрицы все чисто мнимые, а собственные значения квадрата косоэрмитовой матрицы все вещественные и неположительные?

11. В предположении, что матрицы A, $B \in M_n$ эрмитовы, обосновать неравенство $\mathrm{tr}(AB)^2 \leq \mathrm{tr}\, A^2B^2$. *Указание.* Проверить, чторазность *AB*— *BA* косоэрмитова, и рассмотреть величину $\mathrm{tr}(AB - BA)^2$.

12. Убедиться, что ранг эрмитовой матрицы $A \in M_n$ равен числу ее ненулевых собственных значений, но для неэрмитовых матриц это, вообще говоря, неверно. *Указание.* Рассмотреть матрицу $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

13. Пусть матрица $A \in M_n$ эрмитова и $A \neq 0$. Установить неравенство

$$\mathrm{rank}(A) \geqslant \frac{[\mathrm{tr}\, A]^2}{\mathrm{tr}\, A^2},$$

в котором равенство имеет место тогда и только тогда, когда $A = \alpha UU^*$, где $U = [u_1 \ldots u_r] \in M_{n,r}$ — матрица с ортонормированными столбцами и $\alpha \in \mathbf{R}$ — некоторое число, т. е. матрица A с точностью до вещественного множителя совпадает с матрицей унитарной проекции. *Указание.* Обозначив через $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ все ненулевые собственные значения матрицы A и привлекая неравенство Коши — Шварца, приходим к соотношениям

$$[\operatorname{tr} A]^2 = \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i\right)^2 \leqslant r \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2 = r \operatorname{tr} A^2,$$

в которых нестрогое неравенство обращается в равенство, когда все числа λ_i совпадают, и только тогда.

14. Кососимметричная матрица $A \in M_n$ удовлетворяет условию $A = -A^*$. Доказать, что если $\theta \in \mathbf{R}$, то $A = e^{i\theta} A^*$ тогда и только тогда, когда матрица $e^{-i\theta/2}A$ эрмитова. Что будет при $\theta = \pi$? При $\theta = 0$? Объяснить, почему класс косоэрмитовых матриц можно трактовать как один из бесконечного множества классов «обобщенно эрмитовых» матриц, и описать структуру каждого такого класса.

15. Пусть эрмитова матрица $A = [a_{ij}] \in M_n$ записана в блочном виде

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & x^* \\ x & \tilde{A} \end{bmatrix},$$

где $x \in \mathbf{C}^{n-1}$ и $\tilde{A} \in M_{n-1}$. Показать, что

$$\det A = a_{11} \det \tilde{A} - x^* (\operatorname{adj} \tilde{A})\, x,$$

где $\operatorname{adj} \tilde{A}$ — присоединенная матрица для $\tilde{A}$ (см. разд. 14.8.2). Какие более слабые условия на матрицу A являются достаточными для того, чтобы эта формула оставалась в силе? *Указание.* Использовать формулу Лапласа 14.3.1 для разложения определителя матрицы по первому столбцу, а затем для разложения полученных алгебраических дополнений по первой строке.

Задачи к п 18.2

1. Пусть $A \in M_n$ — эрмитова матрица с собственными значениями $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$. Используя теорему 18.2.11, проверить, что

$$\lambda_k = \min_{S_k \subset \mathbf{C}^n} \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \in S_k}} \frac{x^* A x}{x^* x}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\lambda_k = \max_{S_{n-k+1} \subset \mathbf{C}^n} \min_{\substack{x \neq 0 \\ x \in S_{n-k+1}}} \frac{x^* A x}{x^* x}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где через S_j обозначено подпространство размерности j и внешняя оптимизация проводится на множестве всевозможных подпространств указанной размерности.

2. Доказать, что для эрмитовой матрицы $A \in M_n$ следующие три задачи оптимизации приводят к одному и тому же решению,

(a) $\max\limits_{x^*x=1} x^*Ax$,

(b) $\max\limits_{x \neq 0} \dfrac{x^*Ax}{x^*x}$.

(c) $\max\limits_{x^*Ax=1} \dfrac{1}{x^*x}$,

если хотя бы одно собственное значение матрицы *A* положительно.

3. Показать, что если $A \in M_n$ — эрмитова матрица и $x^*x = 1$, то

$$\lambda_{\max} \geqslant x^*Ax \geqslant \lambda_{\min}.$$

4. Убедиться в необходимости предположения теоремы 18.2.2, что матрица *A* эрмитова, на примере матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Чему равны

$$\max\{x^TAx/x^Tx\colon\ x \neq 0,\ x \in \mathbf{R}^n\},\ \max\mathrm{Re}\{x^*Ax/x^*x\colon\ x \neq 0,\ x \in \mathbf{R}^n\}?$$

5. Пусть задана матрица $A \in M_n$ с собственными значениями $\{\lambda_i\}$. Показать, что для их абсолютных величин имеют место оценки

$$\min_{x \neq 0}\left|\frac{x^*Ax}{x^*x}\right| \leqslant |\lambda_i| \leqslant \max_{x \neq 0}\left|\frac{x^*Ax}{x^*x}\right|, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

даже если матрица *A* не является эрмитовой. *Указание.* Положить вектор *x* равным собственному вектору матрицы *A*. На примере $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ удостовериться, что каждая из этих оценок может быть грубой.

Задачи к п 18.3

1. Напомним, что спектральный радиус матрицы $A \in M_n$ равен

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_i(A)|\}.$$

Пусть матрицы $A, B \in M_n$ эрмитовы. Используя теорему Вейля 18.3.1, установить справедливость неравенств

$$\lambda_1(B) \leqslant \lambda_k(A + B) - \lambda_k(A) \leqslant \lambda_n(B)$$

и тем самым неравенства

$$|\lambda_k(A + B) - \lambda_k(A)| \leqslant \rho(B)$$

для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Этот простой пример *теоремы о возмущениях* собственных значений эрмитовой матрицы (ср. с результатами п. 20.3).

2. В первой цепочке соотношений из доказательства теоремы 18.3.4 были получены правые неравенства утверждения (a) этой теоремы. На

основе этих неравенств вывести все остальные неравенства из теоремы 18.3.4. *Указание.* Принять во внимание равенство $A = (A \pm zz^*) \mp zz^*$.

3. В теореме 18.3.6 дать подробное доказательство эквивалентности (а) и (b).

4. В доказательстве теоремы Вейля 18.3.7 использовалось только одно неравенство из теоремы 18.3.6, а именно $\lambda_n(A+B) \geqslant \geqslant \lambda_{n-r}(A)$, где ранг матрицы B не превосходит r. Убедиться, что это неравенство можно проверить, не прибегая к вариационному принципу Куранта — Фишера, восстановив детали следующего рассуждения. Пусть $B = \beta_1 y_1 y_1^* + \ldots + \beta_r y_r y_r^*$ и $A = U\Lambda U^*$, где $U = [u_1 \ \ldots \ u_n]$ — унитарная матрица. Найдутся такие числа $\alpha_{n-r}, \alpha_{n-r+1}, \ldots, \alpha_n$, что вектор $x \equiv \alpha_{n-r}u_{n-r} + \ldots + \alpha_n u_n$ удовлетворяет следующим условиям: $x \perp y_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, r$ и $x^*x = |\alpha_{n-r}|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2 = 1$. Тогда

$$\lambda_n(A-B) \geqslant x^*(A-B)x = \sum_{i=n-r}^{n} |\alpha_i|^2 \lambda_i(A) \geqslant \lambda_{n-r}(A).$$

5. Получить утверждение теоремы 18.3.15, применяя n — r раз теорему 18.3.8.

6. Показать, что простые неравенства Вейля (18.3.2) могут потерять силу, если матрицы A и B не являются эрмитовыми. *Указание.* Рассмотреть матрицы $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

7. Пусть $A, B \in M_n$ — эрмитовы матрицы, собственные значения которых упорядочены по возрастанию, и пусть $1 \leqslant k \leqslant n$. Проверить неравенство

$$\lambda_k(A+B) \leqslant \min\{\lambda_i(A) + \lambda_j(B):\ i + j = k + n\}.$$

8. Подробно рассмотреть случай совпадения собственных значений λ_i в доказательстве теоремы 18.3.10. *Указание.* Пусть число λ_1 является решением кратности k уравнения $g(t) = 0$ и $k \geqslant 2$. Показать, что сомножительимеется $(t - \lambda_1)^{k-1}$ как у функции $g'(t)$, так и у функции $f(t)$, поэтому в числителе и знаменателе слагаемых левой части уравнения (18.3.14) такие сомножители сокращаются.

9. Пусть $S = [s_{ij}] \in M_n$—двояко стохастическая матрица (см. § 22.7), и пусть $x \in \mathbf{R}^n$— вещественный вектор. Показать, что вектор Sx мажорирует x. *Указание.* Пусть $y = Sx$. Пусть выполнены неравенства $y_1 \leqslant \ldots \leqslant y_n$ и $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$; в противном случае можно было бы рассмотреть векторы Py и Qx для соответствующих матриц перестановок P и Q, ведь матрица PSQ^T тоже двояко

стохастическая. Положим $w_j^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} s_{ij}$; тогда $0 \leqslant w_j^{(k)} \leqslant 1$ и $\sum_{j=1}^{n} w_j^{(k)} = k$. Доказать, что

$$\sum_{i=1}^{k} (y_i - x_i) = \sum_{j=1}^{n} w_j^{(k)} x_j - \sum_{i=1}^{k} x_i + x_k \left(k - \sum_{j=1}^{n} w_j^{(k)}\right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{k} (1 - w_j^{(k)})(x_k - x_j) + \sum_{j=k+1}^{n} w_j^{(k)} (x_j - x_k)$$

и что все слагаемые в последних суммах неотрицательны.

10. Предложить другое доказательство теоремы 18.3.26, основанное на следующих соображениях. Для эрмитовой матрицы $A = [a_{ij}] \in M_n$ имеет место разложение $A = U\Lambda U^*$, в котором матрица $U = [u_{ij}] \in M_n$ унитарна и $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — вещественная диагональная матрица. Пусть $a = [a_{11}, a_{22}, \ldots \ldots, a_{nn}]^T$ — вектор, состоящий из элементов главной диагонали матрицы *A*, и $x = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]^T$. Установить равенство *a=Px,* где $P = [p_{ij}] = [|u_{ij}|^2]$. Убедиться, что матрица *P* двояко стохастическая, и использовать результат задачи 9.

11. Пусть заданы два вектора и $x = [x_1, \ldots, x_n]^T$ $y = [y_1, \ldots, y_n]^T$ с неотрицательными компонентами, и пусть вектор *y* мажорирует *x*. Доказать, что $y_1 \ldots y_n \geqslant x_1 \ldots x_n$. *Указание.* Применяя теорему 18.3.32, построить вещественную симметричную матрицу $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbf{R})$ с элементами $a_{ii} = y_i$ на главной диагонали и собственными значениями $\lambda_i(A) = x_i$. Тогда из неравенства Адамара 21.8.1 следует, что $a_{11} \ldots a_{nn} \geqslant \det A = \lambda_1 \ldots \lambda_n$. *Замечание.* Именно этот результат служит обоснованием нашего выбора определения 18.3.24 понятия мажорирования. Если в определении 18.3.24 взять противоположное неравенство, то это вызовет замену и неравенства из задачи 11 на противоположное. Таким образом, если *y* «мажорирует» *x* в этом смысле, то произведение компонент y_i оказывается *меньше,* чем произведение компонент x_i. Мы предпочитаем определение, при котором неравенство для произведений компонент направлено в ту же сторону, что и неравенство из самого определения мажоризации.

12. Пусть задана эрмитова матрица $A \in M_n$ с положительными собственными значениями $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ и натуральное

число r, $1 \leqslant r \leqslant n$. Используя результат задачи 11, установить вариационный принцип

$$\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_r = \min (u_1^*Au_1)(u_2^*Au_2) \ldots (u_r^*Au_r),$$

где минимум, берется по всевозможным наборам ортонормированных векторов $\{u_1, u_2, \ldots, u_r\} \subset \mathbf{C}^n$. Объяснить, почему этот результат можно считать мультипликативным аналогом представления (18.3.19), обобщением неравенства Адамара 21.8.1 или трактовать как цепочку неравенств, связывающих теорему Рэлея — Ритца 18.2.2 с неравенством Адамара. *Указание.* Утверждение задачи в случае $r = n$ эквивалентно неравенству 21.8.1. А в случае r=1? При $2 \leqslant r \leqslant n$, привлекая (18.3.19), показать, что вектор $[u_1^*Au_1,\ u_2^*Au_2, \ldots,\ u_r^*Au_r]^T$ мажорирует вектор $[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r]^T$, где $\mu_i = \lambda_i$ при $i = 1, 2, \ldots, r - 1$ и

$$\mu_r = (u_1^*Au_1 + \ldots + u_{r-1}^*Au_{r-1}) - (\lambda_1 + \ldots + \lambda_{r-1}) + u_r^*Au_r \geqslant u_r^*Au_r.$$

Теперь при помощи неравенства из задачи 11 убедиться, что

$$\lambda_1 \ldots \lambda_{r-1}u_r^*Au_r \leqslant \prod_{i=1}^{r} u_i^*Au_i.$$

13. Пусть $A = [a_{ij}] \in M_n$ — эрмитова матрица с неотрицательными собственными значениями $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$. Проверить, что для каждого $r = 1, 2, \ldots, n$ " произведение λ_1 ... λ_r не превосходит произведения r наименьших элементов главной диагонали матрицы A.

14. Пусть матрицы $A, B \in M_n$ эрмитовы и все собственные значения матрицы $A—B$ неотрицательны. Установить неравенство $\lambda_i(A) \geqslant \lambda_i(B)$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$.

15. Использовать следствие 18.3.18 для обоснования теоремы 18.3.26. *Указание.* Переставляя строки и столбцы, перейти к матрице $A = [a_{ij}]$, у которой $a_{11} \leqslant a_{22} \leqslant \ldots \leqslant a_{nn}$. Полагая $U = [e_1\, e_2 \ldots e_r] \in M_{n, r}$, получим соотношения

$$\lambda_1(A) + \ldots + \lambda_r(A) \leqslant \operatorname{tr} U^*AU = a_{11} + \ldots + a_{rr}.$$

16. Пусть матрица $A \in M_n$ эрмитова, $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ — ее собственные значения и $\lambda_{i,1} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{i,n-1}$ — собственные значения ее главной $(n-1)\times(n-1)$-подматрицы $A(\{i\}')$. Показать, что

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_{i,1} \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_{i,2} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{i,n-1} \leqslant \lambda_n.$$

Эти неравенства *разделения* часто приписывают Коши. Удостовериться также, что из этих неравенств следуют неравенства теоремы 18.3.15. *Указание.* Использовать теорему 18.3.8 или теорему 18.3.15.

17. Пусть $A=[a_{ij}]\in M_n$ — эрмитова матрица, и пусть $a_{ii}=\lambda_n$ для некоторого номера *i*. Установить, что $a_{ik}=a_{ki}=0$ для всех $k=1, 2, \ldots, n, k\neq i$.. Проверить аналогичное утверждение в случае $a_{ii}=\lambda_1$. *Указание.* Провести явные вычисления при *n = 2* и применить идею разделения.
18. Пусть $A\in M_n$ — эрмитова матрица и $a_i=\det A(\{1, 2, \ldots, i\}), i=1, 2, \ldots, n$. Доказать, что у матрицы *A* столько отрицательных собственных значений, сколько раз меняется знакв последовательности $+1, a_1, a_2, \ldots, a_n$ при условии, что все a_{ii} отличны от 0. В частности, отрицательные собственные значения вообще отсутствуют, если все эти главные миноры положительны. Что происходит в случае, когда некоторые из определителей a_i равны нулю? *Указание.* Использовать разделение.
19. Показать, что среди собственных значений нормальной матрицы $A=[a_{ij}]\in M_n$ обязательно присутствуют «малые», если *A* содержит «малые» столбцы или строки. Дадим более точную формулировку. Рассмотрим множество $\{|\lambda_i|^2: \ i=1, \ldots, n\}$ квадратов модулей собственных значений матрицы *A*. Элементы этого множества упорядочим по неубыванию и обозначим через $v_1\leqslant v_2\leqslant v_3\leqslant \ldots \leqslant v_n$. Множество

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2: \ i=1, \ldots, n\right\}$$

сумм квадратов модулей элементов в строках также упорядочим по неубыванию и обозначим его элементы через $R_1\leqslant R_2\leqslant \ldots \ldots \leqslant R_n$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{k} v_i\leqslant\sum_{i=1}^{k} R_i, \quad k=1, \ldots, n.$$

Получить такую же оценку сверху, привлекая столбцовые суммы. *Указание.* Числа v_i являются собственными значениями эрмитовой матрицы *AA**. Чему равны элементы главной диагонали матрицы *AA*?* Использовать мажоризацию и теорему 18.3.26. В случае столбцовых сумм рассмотреть матрицу *AA**.

Микромодуль 53
Симметричные матрицы

18.4. Комплексные симметричные матрицы

Матрица $A \in M_n$ *симметрична,* если $A = A^T$. Во многих случаях изучаемые матрицы не только симметричны, но и вещественны, следовательно, это вещественные эрмитовы матрицы, к которым применимы все приведенные выше в этом модуле результаты.

Однако в некоторых ситуациях приходится сталкиваться с комплексными симметричными матрицами, например при изучении регулярных аналитических отображений единичного круга в комплексную плоскость. Если $f(z)$ — регулярная аналитическая функция на единичном круге, нормированная условиями $f(0)=0$ и $f'(0)=1$, то для однолистности функции $f(z)$ необходимо и достаточно, чтобы неравенство

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} x_i\bar{x}_j \log \frac{1}{1-z_i\bar{z}_j} \geqslant \left| \sum_{i,\,j=1}^{n} x_i x_j \log \left[\frac{z_i z_j}{f(z_i) f(z_j)} \frac{f(z_i)-f(z_j)}{z_i - z_j} \right] \right| \tag{18.4.1}$$

выполнялось для всех точек $z_1, \ldots, z_n \in \mathbf{C}$ при $|z_i| < 1$, всех точек $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{C}$ и всех $n = 1, 2 \ldots$. Если $z_i = z_j$, то отношение разностей в правой части следует заменить на производную $f'(z_i)$. Эти громоздкие неравенства, известные как *неравенства Грунского,* допускают очень простую алгебраическую запись

$$x^*Ax \geqslant |x^TBx|, \tag{18.4.2}$$

где $x = [x_i]^T \in \mathbf{C}^n$, $A = [a_{ij}] \in M_n$, $B = [b_{ij}] \in M_n$,

$$a_{ij} = \log \frac{1}{1-z_i\bar{z}_j}, \quad b_{ij} = \log \left[\frac{z_i z_j}{f(z_i) f(z_j)} \frac{f(z_i)-f(z_j)}{z_i - z_j} \right].$$

Заметим, что A—эрмитова, а B — комплексная симметричная матрицы. Другой пример, когда естественно возникает комплексная симметричная матрица, связан с проблемами моментов. Пусть заданы последовательность комплексных чисел $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ и натуральное число n. Положим $A_{2n} = [a_{ij}] \equiv [a_{i+j}] \in M_{2n}$ и заметим, что A_{2n} является комплексной симметричной матрицей. Матрицы такого вида называют *ганкелевыми.* Рассмотрим комплексную квадратичную форму $x^TA_{2n}x$ для $x \in C^{2n}$ и зададимся вопросом, существует ли такая фиксированная константа c>0, что

$$|x^T A_{2n} x| \leqslant c x^* x \quad \text{для всех } x \in \mathbf{C}^{2n} \text{ и всех } n = 1, 2, \ldots .$$

Согласно теореме Нехари, это условие выполнено тогда и только тогда, когда существует измеримая по Лебегу и почти всюду ограниченная функция $F(t)\colon\ \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, коэффициенты Фурье которой совпадают с данными числами $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Существенная граница для $F(t)$ в точности равна константе c в предыдущих неравенствах.

Комплексные симметричные матрицы, по-видимому, встречаются в приложениях значительно реже, чем комплексные эрмитовы (или вещественные симметричные) матрицы, однако они все-таки встречаются, в чем убеждают предшествующие примеры. Комплексная симметричная матрица может не быть диагонализуемой (см. задачу 15 в конце данного параграфа), тем не менее комплексные симметричные матрицы допускают разложения, аналогичные разложению в спектральной теореме 18.1.5 для эрмитовых матриц, и логическая схема доказательства остается той же. Вначале мы докажем аналог теоремы Щура 16.3.1 об унитарной триангуляризации, гласящий, что любая матрица из некоторого класса, содержащего и симметричные матрицы, всегда может быть представлена в виде $A=U\Delta U^T$, где U — унитарная матрица, а Δ — верхняя треугольная матрица. Симметричная верхняя треугольная матрица обязана быть диагональной.

18.4.3. Теорема. *Пусть задана матрица $A \in M_n$. Необходимым и достаточным условием существования унитарной матрицы $U \in M_n$ и верхней треугольной матрицы $\Delta \in M_n$, таких, что $A=U\Delta U^T$, является неотрицательность собственных значений матрицы $A\bar{A}$. При этом условии можно подобрать диагональную матрицу Δ с неотрицательными диагональными элементами.*

Доказательство. Если $A = U\Delta U^T$, то $A\bar{A} = U\Delta U^T \bar{U}\bar{\Delta}U^* = U\Delta\bar{\Delta}U^*$, поскольку матрица $\bar{U}$ унитарна и $U^T = \bar{U}^*$. Элементы главной диагонали верхней треугольной матрицы $\Delta\bar{\Delta}$ неотрицательны, какова бы ни была верхняя треугольная матрица Δ, а матрица $A\bar{A}$ унитарно подобна матрице $\Delta\bar{\Delta}$. Тогда необходимость условия теоремы следует из того факта, что собственные значения верхней треугольной матрицы в точности равны элементам ее главной диагонали.

Обратно, пусть все собственные значения матрицы $A\bar{A}$ неотрицательны. Пусть x — собственный вектор матрицы $A\bar{A}$, т. е. $A\bar{A}x = \lambda x$, где $\lambda \geqslant 0$ и $x \neq 0$. Имеются две возможности:

(a) векторы $A\bar{x}$ и x линейно зависимы либо

(b) векторы $A\bar{x}$ и x линейно независимы.

В первом случае (он обязательно реализуется, (см. задачу 9 в конце данного параграфа) если λ — простое собственное значение матрицы $A\bar{A}$) существует такое число $\mu \in \mathbf{C}$, что $A\bar{x} = \mu x$. Следовательно, $A\bar{A}x = A\bar{\mu}\bar{x} = \bar{\mu}A\bar{x} = \bar{\mu}\mu x = |\mu|^2 x = \lambda x$ и имеет место равенство $|\mu|^2 = \lambda$. Во втором случае (который может осуществиться при кратном соб. ственном значении Δ, матрицы $A\bar{A}$) вектор $y = A\bar{x} + \mu x$ является ненулевым для всех $\mu \in \mathbf{C}$. Выберем в качестве μ произвольное комплексное число, удовлетворяющее условию $|\mu|^2 = \mu\bar{\mu} = \lambda$. Тогда

$A\bar{y} = A(\bar{A}x + \bar{\mu}\bar{x}) = A\bar{A}x + \bar{\mu}A\bar{x} = \lambda x + \bar{\mu}A\bar{x} = \mu\bar{\mu}x + \bar{\mu}A\bar{x} =$
$= \bar{\mu}(A\bar{x} + \mu x) = \bar{\mu}y$. В каждом из вариантов (a) и (b) мы доказали существование некоторого ненулевого вектора $v = \mathbf{C}^n$ и некоторого числа $a \in \mathbf{C}$, подчиненного условию $|a|^2 = \lambda$, таких, что $A\bar{v} = av$. Поскольку это равенство сохраняет силу при умножении вектора *v* на произвольный положительный скаляр, можно считать вектор *v* единичным. Кроме того, при каждом вещественном $\theta \in \mathbf{R}$ справедливы равенства $e^{-i\theta}A\bar{v} = A\overline{(e^{i\theta}v)} = e^{-i\theta}av = (e^{-2i\theta}a)(e^{i\theta}v)$ и вектор $e^{i\theta}v$ будет единичным вектором, если *v* — единичный вектор. Можно выбрать 0 так, чтобы $e^{-2i\theta}a \geqslant 0$; тогда последнее равенство позволяет прийти к следующему заключению. Если задана матрица $A \in M_n$ и λ — неотрицательное собственное значение матрицы $A\bar{A}$, то существует такой единичный вектор *v*, что $A\bar{v} = \sigma v$, где $\sigma = +\sqrt{\lambda} \geqslant 0$.

Теперь дополним этот вектор *v* до ортонормированного базиса $\{v, v_2, \ldots, v_n\}$ пространства $\mathbf{C}^n$ и обозначим через V_1 унитарную матрицу, столбцы которой совпадают с векторами этого базиса. Элементы первого столбца матрицы $\bar{V}_1^T A\bar{V}_1$ равны $v_i A\bar{v} = \sigma v_i v = \sigma\delta_{i1}$ в силу ортонормированности базиса и соотношения $A\bar{v} = \sigma v$. Таким образом, все элементы в первом столбце матрицы $\bar{V}_1^T A\bar{V}_1$, кроме первого, должны обращаться в нуль (первый элемент также может быть нулевым). Если записать эту матрицу в следующем блочном виде:

$$\bar{V}_1^T A\bar{V}_1 = \begin{bmatrix} \sigma & w^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad w \in \mathbf{C}^{n-1}, \quad A_2 \in M_{n-1}, \quad \sigma \geqslant 0, \qquad (18.4.3a).$$

то

$$(\bar{V}_1^T A\bar{V}_1)(\overline{\bar{V}_1^T A\bar{V}_1}) = V_1^* A\bar{A}V_1 = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \sigma\bar{w}^T + w^T\bar{A}_2 \\ 0 & A_2\bar{A}_2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, множество всех собственных значений (неотрицательных по предположению) матрицы $A\overline{A}$ составлено из числа σ^2 и множества собственных значений матрицы $A_2\overline{A}_2$. Отсюда заключаем, что матрица $A_2 \in M_{n-1}$, полученная в этом процессе редукции, также обладает тем свойством, что все собственные значения произведения $A_2\overline{A}_2$ неотрицательны.

Процесс редукции теперь может быть продолжен с матрицей A_2 и ее преемниками, самое большее, n— 1 раз (как в доказательстве теоремы Шура 16.3.1 об унитарной триангуляризации), и в результате получится равенство

$$\overline{V}_{n-1}^T \ldots \overline{V}_2^T \overline{V}_1^T A \overline{V}_1 \overline{V}_2 \ldots \overline{V}_{n-1} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{bmatrix} = \Delta,$$

где Δ — верхняя треугольная матрица с неотрицательными элементами σ_i на главной диагонали. Полагая $U = V_1 V_2 \ldots V_{n-1}$, получаем требуемое представление $A = U \Delta U^T$.

Упражнение. Провести явно выкладки доказательства теоремы 18.4.3 для матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$ и убедиться, что $A = U\Delta U^T$, где

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 2i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}.$$

При $n \geqslant 2$ не каждая матрица $A \in M_n$ обладает тем свойством, что все собственные значения произведения $A\overline{A}$ неотрицательны, простой пример тому — матрица $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Таким образом, теорема 18.4.3 является только частичным аналогом теоремы Шура 16.3.1 об унитарной триангуляризации. Каждая матрица $A \in M_n$ может быть приведена к треугольному виду преобразованием $A \to UAU^*$ с унитарной матрицей $U \in M_n$, но только матрицы $A \in M_n$, у которых собственные значения произведения $A\overline{A}$ неотрицательны, могут быть триангуляризованы преобразованием вида $A \to UAU^T$ с унитарной матрицей $U \in M_n$.

Для каждой симметричной матрицы $A \in M_n$, однако, все собственные значения матрицы $A\overline{A} = AA^*$ будут неотрицательны. Утверждение, в которое переходит теорема 18.4.3 в этом частном случае, обычно приписывают Шуру (1945 г.), но еще ранее его доказали Хуа (1944 г.), Зигель (1943 г.) и Якобсен (1939 г.) Исторический приоритет следует, по-видимому, отдать Такаги (1925 г.).

18.4.4. Следствие (разложение Такаги). *Если матрица* $A \in M_n$ *симметрична* $(A = A^T)$, *то существуют унитарная матрица* $U \in M_n$ *и неотрицательная диагональная матрица* $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, *такие, что* $A = U\Sigma U^T$. *Столбцы матрицы U образуют множество ортонормированных собственных векторов матрицы* $A\bar{A}$, *и соответствующие диагональные элементы матрицы* Σ *являются неотрицательными квадратными корнями из собственных значений матрицы* $A\bar{A}$, *отвечающих этим собственным векторам.*

Доказательство. Если $A = A^T$, то $\bar{A} = A^*$ и $A\bar{A} = AA^*$. Пусть $x \neq 0$ — произвольный собственный вектор эрмитовой матрицы AA^*, т. е. $AA^*x = \lambda x$. Тогда $x^*\lambda x = \lambda(x^*x) = x^*AA^*x = (A^*x)^*(A^*x)$. Поскольку $y^*y \geqslant 0$ для всех векторов $y \in \mathbf{C}^n$ и $y^*y = 0$ тогда и только тогда, когда $y = 0$, то $\lambda = (A^*x)^*(A^*x)/x^*x \geqslant 0$. Таким образом, все собственные значения матрицы $A\bar{A}$ неотрицательны, какова бы ни была симметричная матрица A. В силу предыдущей теоремы существуют унитарная матрица $U \in M_n$ и верхняя треугольнаяматрица $\Delta \in M_n$ вида

$$\Delta = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & * \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & & \sigma_n \end{bmatrix},$$

где все элементы $\sigma_i \geqslant 0$, такие, что справедливо разложение $A = U\Delta U^T$. Но тогда $U\Delta U^T = A = A^T = U\Delta^T U^T$. Следовательно, выполняется равенство $\Delta = \Delta^T$, которое может иметь место только для диагональной матрицы Δ, и эта диагональная матрица неотрицательна по построению. Наконец, разложение $A\bar{A} = U\Sigma U^T \bar{U}\Sigma U^* = U\Sigma^2 U^*$ осуществляет унитарную диагонализацию эрмитовой матрицы $A\bar{A}$; тогда столбцы матрицы U совпадают с собственными векторами произведения $A\bar{A}$.

Любая матрица вида $U\Lambda U^T$ с диагональной (не обязательно неотрицательной) матрицей Λ, очевидно, симметрична; таким образом, необходимым и достаточным условием того, чтобы данная матрица $A \in M_n$ допускала разложение $A = U\Lambda U^T = U\Lambda U^* = U\Lambda\bar{U}^{-1}$ с унитарной матрицей U и диагональной матрицей Λ, является ее симметричность. В теореме 18.6.11 приводятся условия, при которых матрица A записывается в виде произведения $A = S\Lambda\bar{S}^{-1}$ с диагональной матрицей Λ и невырожденной (но необязательно унитарной) матрицей S.

Каждую комплексную матрицу $A \in M_n$ можно записать в форме $A = V\Sigma W^*$, где матрицы $V, W \in M_n$ унитарны и Σ — диагональная матрица с неотрицательными элементами. Это *сингулярное разложение,* обсуждаемое в п. 21.3. Диагональные элементы матрицы Σ называют *сингулярными числами* матрицы A. Разложение Такаги $A = U\Sigma U^T$ симметричной (быть может, комплексной) матрицы можно рассматривать как частный случай сингулярного разложения симметричной матрицы, в котором $V = \bar{W}$.

Алгоритм вычисления разложения Такаги комплексной симметричной матрицы по существу описан в доказательстве теоремы 18.4.3. Получаемая матрица Δ автоматически окажется диагональной вследствие симметричности матрицы A. См. задачу 9 в конце данного параграфа.

Упражнение. Провести явно вычисления из доказательства теоремы 18.4.3 для матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$ и показать, что $A = U\Delta U^T$, где

$$\Delta = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \qquad U = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & i \\ i & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Матрица Δ получается здесь диагональной сама собой.

Поскольку столбцы унитарного сомножителя U в разложении Такаги $A = U\Sigma U^T$ совпадают с собственными векторами эрмитовой матрицы $A\bar{A}$, напрашивается следующее предположение: если задана унитарная диагонализация $A\bar{A} = U\Sigma^2 U^*$, то $A = U\Sigma U^T$. Это предположение неверно, в чем можно убедиться на примере матрицы $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Имеем $A\bar{A} = I$; тогда разложение $A\bar{A} = QI^2Q^T$ справедливо для произвольной вещественной ортогональной 2×2-матрицы Q, однако $QIQ^T = I \neq A$. Суть дела здесь в том, что матрица $A\bar{A}$ имеет кратное собственное значение, поэтому произвольный собственный вектор x матрицы $A\bar{A}$ может не подчиняться условию $A\bar{x} = \alpha x$. Наличие такого собственного вектора не позволяет получить желаемую редукцию матрицы A. Например, рассмотрим базисный вектор e_i; тогда $A\bar{A}e_1 = Ie_1 = 1e_1$, но $A\bar{e}_1 = Ae_1 = e_2$. Тем самым мы приходим к варианту (b) в доказательстве теоремы 18.4.3. В соответствии с последующими рассуждениями в этом доказательстве можно положить $w = A\bar{e}_1 + 1e_1 = e_2 + e_1$ и получить вектор

$v = v_1 = (e_1 + e_2)/\sqrt{2}$, который позволяет провести редукцию матрицы *А*. Учитывая ортогональность векторов $v_2 = (e_1 - e_2)/\sqrt{2}$ и v_i, можно взять

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

и получить

$$V^T A V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}^2 = \Sigma D^2.$$

Следовательно, полагая

$$U = VD = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

приходим к подходящему разложению $A = UIU^T$ матрицы *А*, Заметим, что в разложении Такаги (см. следствие 18.4.4) вещественной симметричной матрицы сомножители могут не быть вещественными.

Только что рассмотренный пример иллюстрирует трудности, связанные с наличием у матрицы $A\bar{A}$ кратных собственных значений. Пусть теперь все собственные значения матрицы $A\bar{A}$ различны. Если использовать метод из доказательства теоремы 18.4.3 для вычисления разложения Такаги комплексной симметричной матрицы *А,* то всегда будет осуществляться вариант (а). (См. задачу 9.) В этом случае каждый собственный вектор *х* матрицы $A\bar{A}$ удовлетворяет равенству $A\bar{x} = ax$ для некоторого числа $a \in \mathbf{C}$, такого, что $a = \sigma e^{2i\theta}$, $\theta \in \mathbf{R}$ и $A\bar{A}x = \sigma^2 x$. Таким образом, если задано разложение $A\bar{A} = V\Sigma^2 V^*$, т. е. унитарная диагонализация эрмитовой матрицы $A\bar{A}$, то $A\bar{V} = V\Sigma D^2$, где $D^2 = \mathrm{diag}\,(e^{2i\theta_1}, \ldots, e^{2i\theta_n})$; это равенство можно использовать для нахождения диагональных элементов матрицы D^2, отвечающих ненулевым диагональным элементам матрицы Σ, по заданным матрицам *V* и Σ (т. е. неотрицательному квадратному корню из Σ^2). Элементы матрицы D^2, отвечающие нулевым элементам матрицы Σ, произвольны и их можно положить равными + 1. Наконец,

$$A = A\bar{V}V^T = V\Sigma D^2 V^T = (VD)\,\Sigma\,(VD)^T = U\Sigma U^T,$$

если положить $U = VD$ и $D = \mathrm{diag}\,(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n})$. Теперь сформулируем результаты этих наблюдений в виде следствия.

18.4.5. Следствие. *Пусть матрица* $A \in M_n$ *симметрична и собственные значения матрицы* $A\bar{A}$ *различны. Если* $A\bar{A} = V\Sigma^2 V^*$ *— унитарная диагонализация матрицы* $A\bar{A}$, *где* $\Sigma = \mathrm{diag}\,(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$

и все σ_i *больше или равны* 0, *то существует такая диагональная матрица* $D = \operatorname{diag}(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n})$, *где все* θ_j *лежат в* $\mathbf{R}$, *что справедливо разложение* $A = U\Sigma U^T$ *с матрицей U=VD. Диагональные элементы множителя D, отвечающие ненулевым диагональным элементам* Σ, *определяются соотношением* $A\bar{V} = V\Sigma D^2$; *диагональные элементы матрицы D, отвечающие нулевым диагональным элементам* Σ, *можно положить равными* + **1.**

Симметричную матрицу $A \in M_n$ можно при помощи следствия 18.4.4 записать в виде $A = U\Sigma U^T$. Это разложение допускает также такую эквивалентную запись: $A = (U\Sigma^{1/2})(U\Sigma^{1/2})^T$, где $\Sigma^{1/2} = \operatorname{diag}(+\sqrt{\sigma_1}, +\sqrt{\sigma_2}, \ldots, +\sqrt{\sigma_n})$. Тем самым доказано

18.4.6. Следствие. *Пусть* $A \in M_n$. *Матрица A симметрична тогда и только тогда, когда существует матрица* $S \in M_n$, *такая, что* $A = SS^T$. *Возможен выбор S = UD, где матрица U унитарна,* $D = \operatorname{diag}(+\sqrt{\sigma_1}, +\sqrt{\sigma_2}, \ldots, +\sqrt{\sigma_n})$ *и* $\{\sigma_i\}$ *— множество всех сингулярных чисел матрицы A; в этом случае* $\operatorname{rank} S = \operatorname{rank} A$.

Хотя вещественная симметричная матрица нормальна, невещественная комплексная симметричная матрица может не обладать этим свойством. Если $A = B + iC \in M_n$, где матрицы *B* и *C* вещественны, то матрица *A* симметрична в том и только в том случае, когда *B* и *C* — вещественные симметричные матрицы. Если матрица *A* одновременно симметрична и нормальна, то

$$AA^* = (B^2 + C^2) + i(CB - BC) = (B^2 + C^2) + i(BC - CB) = A^*A,$$

откуда вытекает, что матрицы *B* и *C* коммутируют. В этом случае *B* и *C* одновременно диагонализуемы посредством вещественной ортогональной матрицы *Q*. Запишем разложения $B = QD_1Q^T$, $C = QD_2Q^T$, где D_1 и D_2 — вещественные диагональные матрицы. Тогда $A = B + iC = QD_1Q^T + iQD_2Q^T = Q(D_1 + iD_2)Q^T = Q\Lambda Q^T$, где $\Lambda = D_1 + iD_2$. Обратно, если матрицу $A \in M_n$ можно записать в виде $A = Q\Lambda Q^T$ с некоторой вещественной ортогональной матрицей *Q* и некоторой диагональной матрицей *Λ*, то $A = A^T$ и $AA^* = Q\Lambda Q^T Q\bar{\Lambda} Q^T = Q|\Lambda|^2 Q^T = Q\bar{\Lambda} Q^T Q\Lambda Q^T = A^*A$, т. е. матрица *A* одновременно симметрична и нормальна. Тем самым доказана следующая теорема.

18.4.7. Теорема. *Пусть задана матрица* $A \in M_n$. *Она одновременно симметрична и нормальна тогда и только тогда, когда существуют вещественная ортогональная матрица* $Q \in M_n(\mathbf{R})$ *и диагональная матрица* $\Lambda \in M_n$, *такие, что* $A = Q\Lambda Q^T$.

Приведем пример комплексной матрицы простого вида, которая одновременно симметрична и нормальна;

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}(I + iB). \tag{18.4.8}$$

Здесь B — *перъединичная* матрица:

$$\begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ & & \cdot & \\ & \cdot & & \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix},$$

которая возникла при доказательстве того, что каждая матрица подобна своей транспонированной, см. разд. 17.2.3.

В силу равенства $B^2 = I$

$$S\bar{S} = \frac{1}{2}(I + iB)(I - iB) = \frac{1}{2}(I - iB + iB + B^2) = I.$$

Таким образом, матрица S одновременно симметрична и унитарна.

Теперь рассмотрим обычный жорданов блок $J_k(0)$ с нулевой главной диагональю при $k \geq 2$; запишем его в виде

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \in M_k.$$

Легко показать, что

$$BNB = \begin{bmatrix} 0 & & & & 0 \\ 1 & \cdot & & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ 0 & & & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$BN = \begin{bmatrix} 0 & & & & 0 \\ & & & \cdot & 1 \\ & & \cdot & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & & \\ 0 & 1 & & & 0 \end{bmatrix},$$

$$NB = \begin{bmatrix} 0 & & 1 & 0 \\ & & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \\ 1 & \cdot & & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, жорданов блок N унитарно подобен матрице

$$SNS^{-1} = SN\bar{S} = \frac{1}{2}(I + iB)N(I - iB) =$$

$$= \frac{1}{2}(N + BNB) + \frac{i}{2}(BN - NB) =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 1 & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{i}{2}\begin{bmatrix} & 0 & & -1 & 0 \\ & & \cdot & \cdot & 1 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ -1 & \cdot & \cdot & & \\ 0 & 1 & & & 0 \end{bmatrix},$$

которая, очевидно, является симметричной. Произвольный жорданов блок $J_k(\lambda)$ при $k \geq 2$ имеет вид $\lambda I + N$; тогда матрица

$$SJ_k(\lambda)S^{-1} = S(\lambda I + N)S^{-1} = \lambda I + SNS^{-1}$$

симметрична, так как симметрична SNS^{-1}.

Каждая матрица $A \in M_n$ подобна жордановой канонической форме J вида (17.1.14) при ε = 2. Эта форма $J = J_{n_1}(\lambda_1, 2) \oplus \ldots \oplus J_{n_k}(\lambda_k, 2)$ есть прямая сумма модифицированных жордановых блоков $J_{n_i}(\lambda_i, 2)$. Если ввести в рассмотрение $n \times n$-матрицы $S_{n_i} \equiv (1/\sqrt{2})(I + iB) \in M_{n_i}$ типа (18.4.8) при $n_i \geqslant 2$ и матрицу $S_1 \equiv [1]$ и положить $T = S_{n_1} \oplus \ldots \oplus S_{n_k}$, то предыдущее рассуждение показывает, что

$$TJT^{-1} = TJ\bar{T} = (S_{n_1}J_{n_1}(\lambda_1, 2)\bar{S}_{n_1}) \oplus \ldots \oplus (S_{n_k}J_{n_k}(\lambda_k, 2)\bar{S}_{n_k}).$$

Последняя матрица есть прямая сумма симметричных матриц и, следовательно, сама симметрична. Матрица T унитарна, поскольку унитарно каждое слагаемое S_{n_i}. Таким образом, мы доказали, что каждая матрица, записанная в канонической жордановой форме, унитарно эквивалентна симметричной матрице. Поскольку любая матрица подобна своей жордановой форме, приходим к следующей теореме.

18.4.9. Теорема. *Каждая матрица $A \in M_n$ подобна некоторой симметричной матрице.*

Фактически мы доказали, что каждая матрица подобна *симметричной жордановой канонической форме* $S_{n_1}(\lambda_1)\oplus\ldots$ $\ldots\oplus S_{n_k}(\lambda_k)$, где

$$S_k(\lambda)=SJ_k(\lambda,\ 2)\bar{S}=\lambda I+2SN\bar{S}.$$

Поскольку эта форма получена из жордановой канонической формы, она определяется единственным образом в том же смысле, что и каноническая жорданова форма.

Из этого результата, в частности, следует, что спектр, жордановы блоки, минимальный и характеристический многочлены или инвариантные множители симметричных комплексных матриц не имеют никакой специфики. Возможные значения этих величин для симметричных матриц те же, что и для произвольных комплексных матриц такого же порядка. Каждый класс подобия в M_n содержит симметричную матрицу, каждому линейному преобразованию пространства $\mathbf{C}^n$ соответствует симметричное представление в некотором базисе. Наличие симметрии в матрице — просто случайное явление, вызванное конкретным выбором базиса для представления данного линейного преобразования. Другой вывод из приведенного выше результата заключается в том, что каждая матрица «диагонализуема» в некотором смысле.

18.4.10. Следствие. *Пусть задана матрица* $A\in M_n$. *Тогда найдутся такие невырожденная матрица S и унитарная матрица U, что* $(US)A(\bar{U}S)^{-1}$ *будет диагональной матрицей с неотрицательными диагональными элементами.*

Доказательство. По теореме 18.4.9 существует невырожденная матрица $S\in M_n$, при которой матрица SAS^{-1} симметрична. Далее, в силу следствия 18.4.4 имеется такая унитарная матрица $U\in M_n$, что матрица $U(SAS^{-1})U^T$диагональна и неотрицательна.

Из теоремы 18.4.9 следует также, что каждая комплексная матрица подобна своей транспонированной и может быть представлена как произведение двух комплексных симметричных матриц. Оба этих результата сохраняют силу для матриц над произвольным полем, но теорема 18.4.9 для произвольных полей уже неверна.

18.4.11. Следствие. *Пусть задана матрица* $A\in M_n$. *Тогда существуют такие матрицы* $B,\ C\in M_n$, *что* $B=B^T$, $C=C^T$ *и* $A=BC$. *Одну из матриц B или C можно выбрать невырожденной.*

Доказательство. Теорема 18.4.9 гласит, что $A=SES^{-1}$, где $E=E^T$ и S невырожденна. Тогда

$$A=(SES^T)(S^T)^{-1}S^{-1}=(SES^T)(SS^T)^{-1}=BC,$$

где обе матрицы $B = SES^T$ и $C = (SS^T)^{-1}$ симметричны. В силу равенства $A = (SS^T)(S^{-1})^T ES^{-1}$ один из сомножителей *B* или *C* можно выбрать невырожденным.

При изучении нормальных матриц широко применяется процесс Гамма-Шмидта. Имеется аналогичный процесс, полезный при изучении комплексных симметричных матриц.

18.4.12. Лемма. *Пусть заданы векторы* $x_1, \ldots, x_k \in \mathbf{C}^n$ *и* $k \leqslant n$. *Тогда найдутся такие векторы* $y_1, \ldots, y_k$, *что* $\operatorname{Span}\{x_1, \ldots, x_k\} = \operatorname{Span}\{y_1, \ldots, y_n\}$, $y_i^T y_j = 0$ *для всех* $i, j = 1, 2, \ldots, k, i \neq j$, $y_i^T y_i = 1$ для $i = 1, 2, \ldots, r$ *и* $y_i^T y_i = 0$ *для* $i = r + 1, \ldots, k$, *где* $r = \operatorname{rank} X^T X$ *и столбцы матрицы* $X = [x_1 \ldots x_k] \in M_{n,k}$ *— это данные векторы* $\{x_i\}$.

Доказательство. Матрица $X^T X$ симметрична и следствие 18.4.4 позволяет записать ее разложение Такаги $X^T X = U \Sigma U^T$, в котором матрица $U \in M_n$ унитарна и $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$, $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_r \geqslant \sigma_{r+1} = 0 = \ldots = \sigma_k$, где $r = \operatorname{rank} X^T X$. Вводя в рассмотрение матрицу $D = \operatorname{diag}(\sqrt{\sigma_1}, \ldots, \sqrt{\sigma_r}, 1, \ldots, 1) \in M_k$ и матрицу $I_r = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) \in M_k$, в которой на диагонали *r* единиц и $k - r$ нулей, получаем разложение $X^T X = (UD) I_r (UD)^T = S^T I_r S$, в котором матрица $S = DU^T$ невырожденна. Таким образом, $(XS^{-1})^T (XS^{-1}) = I_r$. Следовательно, в матрице

$$XS^{-1} \equiv Y = [y_1 \ldots y_k] \in M_{n,k}$$

векторы-столбцы $y_1, \ldots, y_k$ обладают всеми требуемыми свойствами, поскольку $Y^T Y = I_r$.

В предыдущей лемме установлено правило, аналогичное по форме процессу Грама — Шмидта, с той разницей, что произведения вида X^*X теперь заменены на $X^T X$. Однако в процессе Грама — Шмидта каждый вектор y_j может быть получен как линейная комбинация векторов $x_1, \ldots, x_j$ при $j = 1, 2, \ldots, k$, что не всегда возможно в данном аналоге. Еще одно различие проявляется в том, что число векторов y_j, для которых $y_i^* y_i = 1$, в процессе Грама — Шмидта равно rank *X* (т. е. максимальному числу линейно независимых векторов x_i), что всегда совпадает с rank X^*X. В симметричном аналоге процесса Грама — Шмидта, однако, число векторов y_i, для которых $y_i^T y_i = 1$, равно rank $X^T X$, что может быть меньше, чем rank *X*.

Пример. Пусть k=1 и $x_1 = X = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$. Тогда $X^TX = 0$; следовательно, $0 = \operatorname{rank} X^TX$, что строго меньше, чем rank X=1. Вектор y_i может отличаться от вектора x_1 только скалярным множителем; поэтому нельзя выбрать y_i так, чтобы $\operatorname{Span}\{x_1\} = \operatorname{Span}\{y_1\}$, $y_1^Ty_1 = 1$.

Пример. Пусть k = 2 и $X = [x_1,\ x_2] = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$. В этом случае rank X^TX = 2 и существуют векторы y_1, y_2, такие, что $\operatorname{Span}\{y_1,\ y_2\} = \operatorname{Span}\{x_1,\ x_2\}$, $y_1^Ty_1 = 1 = y_2^Ty_2$. Поскольку $x_1^Tx_1 = 0$, нельзя выбрать вектор y_1, так, чтобы он отличался от x_1 лишь скалярным множителем.

Формулируя лемму, мы имели в виду применить ее к частному случаю диагонализуемых комплексных симметричных матриц. Если $A = A^T \in M_n$ и задано разложение $A = S\Lambda S^{-1}$ с диагональной матрицей $\Lambda \in M_n$ и невырожденной матрицей $S \in M_n$, то по нему трудно установить, будет ли матрица A симметричной. Однако когда комплексная матрица S ортогональна, то $S^{-1}=S^T$ и матрица $A = S\Lambda S^{-1} = S\Lambda S^T$, очевидно, симметрична. В следующей теореме показано, что всегда можно выбрать матрицу S комплексной ортогональной.

18.4.13. Теорема. *Пусть матрица $A \in M_n$ симметрична. Тогда она диагонализуема в том и только в том случае, когда она комплексно ортогонально диагонализуема, т. е. $A = S\Lambda S^{-1}$ с диагональной матрицей $\Lambda \in M_n$ и невырожденной матрицей $S \in M_n$ тогда и только тогда, когда*

$$A = Q\Lambda Q^T,$$

где матрица $Q \in M_n$ подчинена условию $Q^TQ = I$.

Доказательство. Предположим, что $A=A^T$, и обозначим через $x,\ y \in \mathbf{C}^n$ собственные векторы матрицы A, такие, что $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$. Если $\lambda \neq \mu$, то $y^TAx = y^T\lambda x = \lambda y^Tx$, $y^TAx = (Ay)^Tx = (\mu y)^Tx = \mu y^Tx$. Таким образом, $\lambda y^Tx = \mu y^Tx$ и y^Tx = 0, поскольку $\lambda \neq \mu$. Здесь просто применяется принцип биортогональности 15.4.7 для симметричных матриц. Если матрица A диагонализуема и $A = S\Lambda S^{-1}$,то, не теряя общности, можно считать равные собственные значения матрицы Aсгруппированными вместе. Тогда $\Lambda = \Lambda_1 \oplus \ldots \oplus \Lambda_d$, где $\Lambda_i = \lambda_i I \in M_{n_i}$, $n_1 + \ldots + n_d = n$ и $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Произведем разбиение столбцов матрицы $S = [s_1 \ldots s_n] = [S_1S_2 \ldots S_d]$ в соответствии с представлением

$\Lambda = \Lambda_1 \oplus \ldots \oplus \Lambda_d$, так что $S_i \in M_{n, n_i}$, $i = 1, 2, \ldots, d$. В силу свойства биортогональности $S_i^T S_j = 0 \in M_{n_i, n_j}$ при $i \neq j$. Кроме того, каждая матрица $S_i^T S_i$, i=1, 2, ..., d, невырожденна, поскольку блочно-диагональная матрица $S^T S$ невырожденна. Таким образом, каждая матрица S_i имеет полный ранг; поэтому, согласно лемме 18.4.12, ее столбцы можно заменить их линейными комбинациями, представляющими ортонормированную систему (в смысле скалярного произведения $(x, y) = y^T x$). Другими словами, найдутся такие невырожденные матрицы $R_i \in M_{n_i}$, что произведения $Q_i \equiv S_i R_i$ будут подчиняться условию $Q_i^T Q_i = R_i^T S_i^T S_i R_i = I \in M_{n_i}$. Учитывая равенства $Q_i^T Q_j = R_i^T S_i^T S_j R_j = 0$ для всех $i \neq j$ и $AQ_i = AS_i R_i = \lambda_i S_i R_i = \lambda_i Q_i$ для всех i=1, 2, ..., d, Заключаем, что матрица $Q = [Q_1 \ldots Q_d] \in M_n$ комплексная ортогональная и $A = Q\Lambda Q^T$.

Представляет интерес формулировка данного результата, объединенного с теоремой 18.4.7: симметричная матрица A диагонализуема тогда и только тогда, когда возможно разложение $A = Q\Lambda Q^T$ с комплексной ортогональной матрицей Q, и нормальна тогда и только тогда, когда в этом разложении можно выбрать Q вещественной ортогональной матрицей.

Теорема 18.4.13 допускает следующее обобщение. Если матрицы $A, B \in M_n$ симметричны, то они подобны в том и только в том случае, когда это подобие осуществляется посредством ортогональной матрицы. В действительности это верно при более слабых условиях существования такого многочлена $p(t)$, что $A^T = p(A)$, $B^T = p(B)$.

18.5. Конгруэнтность и одновременная диагонализация эрмитовых и симметричных матриц

Произвольный вещественный линейный дифференциальный оператор L второго порядка с частными производными можно записать в виде

$$Lf = \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \, \partial x_j} + \text{члены меньшего порядка},$$

$$x = [x_i] \in D \subset \mathbf{R}^n. \quad (18.5.1)$$

Здесь коэффициенты $a_{ij}(x)$ определены в области $D \subset \mathbf{R}^n$ и функция f предполагается дважды непрерывно дифференцируемой в D. Как указывалось в примере 18.0.3, не ограничивая общности, можно считать вещественную матрицу коэффициентов $A(x)=[a_{ij}(x)]$ симметричной в каждой точке $x \in D$. Под «членами меньшего порядка» подразумеваются слагаемые, содержащие только саму функцию f и ее частные производные первого порядка.

Если произвести невырожденную замену независимых переменных на новые переменные $s=[s_i] \in D \subset \mathbf{R}^n$, то каждая компонента s_i есть функция $s_i[x]=s_i(x_1, \ldots, x_n)$ и невырожденность замены означает невырожденность якобиана

$$S(x)=\left[\frac{\partial s_i(x)}{\partial x_j}\right] \in M_n$$

в каждой точке области D. Невырожденность гарантирует локальное существование обратной замены переменных $x=x(s)$.

Прямое применение правила дифференцирования сложной функции приводит к следующему выражению оператора L в новых координатах:

$$Lf=\sum_{i,j=1}^{n}\left[\sum_{p,q=1}^{n}\frac{\partial s_i}{\partial x_p}a_{pq}\frac{\partial s_j}{\partial x_q}\right]\frac{\partial^2 f}{\partial s_i\,\partial s_j}+\text{члены меньшего порядка}=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial s_i\,\partial s_j}+\text{члены меньшего порядка.}$$

Таким образом, новая матрица коэффициентов B (в переменных $s=[s_i]$) связана со старой матрицей A (в переменных $x = [x_i]$) соотношением

$$B=SAS^T, \tag{18.5.3^T}$$

в котором S — вещественная невырожденная матрица. Пусть оператор L связан с некоторым физическим законом (например, таковы лапласиан $L=\nabla^2$ и электростатические потенциалы). Выбор системы координат для независимых переменных не может привести к отмене этого закона, хотя вид оператора L, очевидно, изменяется. Тем самым возникает вопрос об инвариантах множества всех матриц B, связанных с данной матрицей A соотношением (18.5.3^7).

Формула типа (18.5.3^T) возникает также в теории вероятностей и статистике. Рассмотрим такой пример. Пусть X_1, X_2, ..., X_n— вещественные или комплексные случайные величины с конечными вторыми моментами на некотором вероятностном пространстве с оператором математического ожидания E. Через $\mu_i=E(X_i)$

обозначим математические ожидания соответствующих случайных величин. Эрмитова матрица $A=[a_{ij}]=(E[(X_i-\mu_i)(\bar{X}_j-\bar{\mu}_j)])\equiv \mathrm{Cov}(X)$ есть *матрица ковариации* случайного вектора $X=[X_1, \ldots, X_n]^T$. Если задана матрица $S=[s_{ij}]\in M_n$, то компоненты случайного вектора *SX* являются линейными комбинациями компонент вектора *X*. Средние значения компонент вектора *SX* равны

$$E((SX)_i)=E\left(\sum_{k=1}^{n} s_{ik}X_k\right)=\sum_{k=1}^{n} s_{ik}E(X_k)=\sum_{k=1}^{n} s_{ik}\mu_k$$

и выражение для матрицы ковариации вектора *SX* имеет вид

$$\mathrm{Cov}(SX)=(E[((SX)_i-E((SX)_i))((\overline{SX})_j-E((\overline{SX})_j))])=$$

$$=\left(E\left[\left(\sum_{p=1}^{n} s_{ip}(X_p-\mu_p)\right)\left(\sum_{q=1}^{n} \bar{s}_{jq}(\bar{X}_q-\bar{\mu}_q)\right)\right]\right)=$$

$$=\left(\sum_{p,\,q=1}^{n} s_{ip}E[(X_p-\mu_p)(\bar{X}_q-\bar{\mu}_q)]\,\bar{s}_{jq}\right)=$$

$$=\left(\sum_{p,\,q=1}^{n} s_{ip}a_{pq}\bar{s}_{jq}\right)=SAS^*.$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\mathrm{Cov}(SX)=S\,\mathrm{Cov}(X)\,S^*. \qquad (18.5.3^*)$$

Следовательно, формула преобразования матрицы ковариации случайного вектора почти не отличается от (18.5.3^T) и просто совпадает с (18.5.3^T), если матрица *S* вещественна.

В качестве заключительного примера рассмотрим квадратичную форму

$$Q_A(x)=\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j=x^TAx, \quad x=[x_i]\in \mathbf{C}^n,$$

и эрмитову форму

$$H_B(x)=\sum_{i,\,j=1}^{n} b_{ij}\bar{x}_ix_j=x^*Bx, \quad x=[x_i]\in \mathbf{C}^n,$$

где $A=[a_{ij}]$ и $B=[b_{ij}]$. Если *S* — заданная матрица, то

$$Q_A(Sx)=(Sx)^TA(Sx)=x^T(S^TAS)x=Q_{S^TAS}(x),$$
$$H_A(Sx)=(Sx)^*B(Sx)=x^*(S^*BS)x=H_{S^*BS}(x).$$

Здесь не имеет значения, являются матрицы *A, B, S* и вектор *x* вещественными или комплексными.

Итак, на практике возникают два похожих, хотя и различающихся типа преобразований. Это служит обоснованием для следующего определения.

18.5.4. Определение. Пусть заданы матрицы $A,\ B \in M_n$. Если существует такая невырожденная матрица *S*, что

(a) $B = SAS^*$, то матрицу *B* называют *эрмитово конгруэнтной* (или ** конгруэнтной)* к *A*;

(b) $B = SAS^T$, то матрицу *B* называют *конгруэнтной* (или *^{T}конгруэнтной)* к *A*.

Ясно, что эти два понятия конгруэнтности тесно связаны между собой; в случае вещественной матрицы *S* они совпадают. В тех ситуациях, когда различия в этих понятиях не играют роли, мы будем употреблять термин «(эрмитова) конгруэнтность».

Упражнение. Показать, что (эрмитово) конгруэнтные матрицы имеют одинаковый ранг.

Отметим следующие два факта. Если матрица *A* эрмитова, то эрмитовой будет и матрица *SAS** (даже когда *S* вырожденна). Если *A* симметрична, то SAS^T будет также симметричной.

При изучении эрмитовых и симметричных матриц обычно привлекают тот тип конгруэнтности, который не выводит из данного класса матриц: эрмитову конгруэнтность для эрмитовых матриц, конгруэнтность для симметричных матриц. В случае вещественной симметричной матрицы *A,* однако, возможен выбор, поскольку она одновременно эрмитова и симметрична и матрица *SAS** эрмитова, а SAS^T симметрична. Тип конгруэнтности здесь можно выбрать в зависимости от контекста.

Оба отношения конгруэнтности обладают важным свойством, присущим и отношению подобия.

18.5.5. Теорема. *Отношение (эрмитовой) конгруэнтности есть отношение эквивалентности, т. е. для любой матрицы* $A \in M_n$

(a) *A (эрмитово) конгруэнтна себе самой;*

(b) *если A (эрмитово) конгруэнтна B, то B (эрмитово) конгруэнтна A;*

(c) *Если A (эрмитово) конгруэнтна B и B (эрмитово) конгруэнтна C, то A (эрмитово) конгруэнтна C.*

Доказательство. Рассмотрим случай эрмитовой конгруэнтности. Свойство (a) имеется в силу очевидного равенства $A = IAI^*$. Чтобы доказать (b), запишем $A = SBS^*$, где матрица *S* невырожденна; тогда $B = S^{-1}A\left(S^{-1}\right)^*$. Наконец, если $A = S_1BS_1^*$ и $B = S_2CS_2^*$, то $A = \left(S_1S_2\right)C\left(S_1S_2\right)^*$. Доказательство для конгруэнтности проводится аналогично.

Из этой теоремы заключаем, что множество всех $n \times n$-матриц разбивается на классы эквивалентности относительно (эрмитовой) конгруэнтности. Можно поставить задачу определения канонического представителя произвольного класса эквивалентности для каждого из двух видов конгруэнтности. Для эрмитовой конгруэнтности эта теоретическая задача сложнее, и мы рассмотрим ее в первую очередь.

Практическая задача определения типов и классификации дифференциальных операторов посредством выявления инвариантов отношения конгруэнтности сводится к задаче описания канонического представителя класса эквивалентности вещественных симметричных матриц, конгруэнтных (конгруэнтность осуществляется посредством вещественной матрицы *S)* заданной матрице. Решение последней задачи оказывается весьма простым: достаточно подсчитать число положительных, отрицательных и нулевых собственных значений данной матрицы. В связи с этим введем следующий термин.

18.5.6. Определение. Пусть $A \in M_n$ — эрмитова матрица. Ее *инерция* есть упорядоченная тройка чисел

$$i(A) = (i_+(A),\ i_-(A),\ i_0(A)),$$

где $i_+(A)$ — количество положительных собственных значений матрицы A, $i_-(A)$ — отрицательных и $i_0(A)$ — нулевых с учетом их кратности. Заметим, что $\operatorname{rank} A = i_+(A) + i_-(A)$. Разность $i_+(A) - i_-(A)$ называют *сигнатурой* матрицы *A*.

Упражнение. Убедиться, что инерция эрмитовой матрицы $A \in M_n$ однозначно определяется ее сигнатурой и рангом и наоборот.

Для заданной эрмитовой матрицы $A \in M_n$ имеется представление $A = U\Lambda U^*$, в котором $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ и матрица U унитарна. Не ограничивая общности, можно предположить, что первые диагональные элементы матрицы Λ суть все ее положительные собственные значения, затем расположены отрицательные и, наконец, нулевые, т. е. что

$$\lambda_1, \lambda_2, \ \ldots, \lambda_{i_+} > 0, \quad \lambda_{i_++1}, \ \ldots, \quad \lambda_{i_++i_-} < 0, \quad \lambda_{i_++i_-+1} = \ldots$$
$$\ldots = \lambda_n = 0.$$

Положим

$$D = \operatorname{diag}\left(+\sqrt{\lambda_1}, \ldots, +\sqrt{\lambda_{i_+}}, +\sqrt{-\lambda_{i_++1}}, \ldots, +\sqrt{-\lambda_{i_++i_-}},\right.$$
$$\left. 1, \ \ldots, \ 1\right).$$

Тогда D — невырожденная вещественная диагональная матрица и имеет место разложение

$$\Lambda = D\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & \\ & & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}D,$$

в котором на диагонали выписанной матрицы расположены $i_+(A)$ элементов «+1», $i_-(A)$ элементов «—1» и $i_0(A)$ элементов «0». Следовательно, матрицу A можно записать в виде

$$A = U\Lambda U^* = S\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & \\ & & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}S^* = SI(A)S^*, \qquad (18.5.7)$$

где $S \equiv UD$ — невырожденная матрица и $I(A)$ называется *матрицей инерции* для A. Таким образом, каждая эрмитова матрица эрмитово конгруэнтна диагональной матрице очень простого вида, которая определяется лишь инерцией исходной матрицы. Было бы заманчиво использовать матрицу инерции в качестве канонического представителя класса эквивалентности матриц, эрмитово конгруэнтных заданной, но для этого необходима уверенность в том, что инерция эмитово конгруэнтных эрмитовых матриц одинакова. Последнее утверждение, известное как *закон инерции Сильвестра,* составляет содержание следующей теоремы.

18.5.8. Теорема. *Пусть* A, $B \in M_n$ — *эрмитовы матрицы. Необходимым и достаточным условием существования невырожденной матрицы* $S \in M_n$, *подчиненной равенству* $A = SBS^*$, *является совпадение инерции матриц А и В, т. е. равное количество положительных, отрицательных и нулевых собственных значений у этих матриц.*

Доказательство. Если инерция матриц A и B одинакова, то каждая из этих матриц представима в виде (18.5.7) с одной матрицей инерции, но, быть может, с различными матрицами S. Таким образом, матрицы A и B эрмитово конгруэнтны одной матрице и вследствие транзитивности эрмитовой конгруэнтности друг другу.

Доказательство обратного утверждения менее тривиально. Пусть матрицы A и B эрмитово конгруэнтны, т. е. $A = SBS^*$ при некоторой невырожденной матрице $S \in M_n$. Эрмитово конгруэнтные матрицы имеют одинаковый ранг, поэтому $i_0(A)=i_0(B)$ и остается только обосновать равенство $i_+(A) = i_+(B)$. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_{i_+(A)}$ — ортонормированные собственные векторы матрицы A, отвечающие положительным собственным значениям $\lambda_1(A), \ldots, \lambda_{i_+(A)}(A)$, и пусть $S_+(A) = \operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_{i_+(A)}\}$. Размерность подпространства $S_+(A)$ равна $i_+(A)$.
Если

$$x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{i_+(A)} v_{i_+(A)} \neq 0,$$

то

$$x^*Ax = \lambda_1(A)|\alpha_1|^2 + \ldots + \lambda_{i_+(A)}(A)|\alpha_{i_+(A)}|^2 > 0.$$

Но тогда

$$x^*SBS^*x = (S^*x)^*B(S^*x) > 0.$$

Следовательно, $y^*By > 0$ для всех ненулевых векторов y из подпространства $\operatorname{Span}\{S^*v_1, \ldots, S^*v_{i_+(A)}\}$ размерности $i_+(A)$.

В силу следствия 18.3.23 справедливо неравенство $i_+(B) \geqslant i_+(A)$. Однако в приведенных выше рассуждениях A и B можно поменять ролями; поэтому $i_+(B) = i_+(A)$.

Упражнение. Пусть матрица $A \in M_n$ эрмитова. Установить, что необходимым и достаточным условием эрмитовой конгруэнтности матрицы A и единичной матрицы является положительность всех собственных значений матрицы A.

Упражнение. Пусть $A, B \in M_n$ — вещественные симметричные матрицы. Доказать, что они эрмитово конгруэнтны тогда и только тогда, когда они конгруэнтны и конгруэнтность осуществляется посредством вещественной матрицы.

Упражнение. Пусть $A, B \in M_n$ — вещественные симметричные матрицы. Показать, что матрицы A и B конгруэнтны, причем конгруэнтность осуществляется посредством вещественной матрицы, в том и только *в* том случае, когда инерция матриц A и B одинакова.

Упражнение. Сколько различных классов эквивалентности по отношению эрмитовой конгруэнтности имеется на множестве комплексных эрмитовых $n \times n$-матриц? На множестве вещественных симметричных $n \times n$-матриц?

Теорема Сильвестра 18.5.8 позволяет полностью решить вопрос выбора представителя в каждом классе эквивалентности эрмитовых матриц по отношению эрмитовой конгруэнтности на основе того, что *знаки* собственных значений эрмитовой матрицы не изменяются, когда эта матрица подвергается преобразованию эрмитовой конгруэнтности. Пока неясно, однако, насколько изменяются *величины* собственных значений при переходе к эрмитово сопряженной матрице. Использование простейшего варианта теоремы Вейля 18.3.1 позволяет подкрепить закон инерции Сильвестра необходимыми количественными характеристиками.

18.5.9. Теорема (Островский). *Пусть заданы матрицы* A, $S \in M_n$, *причем A эрмитова, а S невырожденна. Упорядочим собственые значения матриц A и SS* по возрастанию, как в* (18.2.1). *Тогда для каждого номера k*=1, 2, ..., *n существует положительное число* θ_k, *такое, что* $\lambda_1(SS^*) \leqslant \theta_k \leqslant \lambda_n(SS^*)$, *при котором*

$$\lambda_k(SAS^*) = \theta_k \lambda_k(A). \tag{18.5.10}$$

Доказательство. Сначала заметим, что условия $SS^*x = \lambda x$ и $x \neq 0$ влекут за собой соотношения

$$\lambda = x^*SS^*x/x^*x = (S^*x)^*(S^*x)/x^*x > 0.$$

Следовательно, все собственные значения матрицы SS^* положительны. Пусть k — заданное натуральное число и $1 \leqslant k \leqslant n$. Рассмотрим эрмитову матрицу $A - \lambda_k(A)I$ с k-м собственным значением, равным нулю. По теореме Сильвестра 18.5.8 k-е собственное значение матрицы $S(A - \lambda_k(A)I)S^* = SAS^* - \lambda_k(A)SS^*$ также равно нулю. В силу неравенств Вейля (18.3.2) это собственное значение допускает следующую двустороннюю оценку:

$$\lambda_k(SAS^*) + \lambda_1(-\lambda_k(A)SS^*) \leqslant \lambda_k(SAS^* - \lambda_k(A)SS^*) = 0 \leqslant$$
$$\leqslant \lambda_k(SAS^*) + \lambda_n(-\lambda_k(A)SS^*).$$

Отсюда выводим соотношения

$$\lambda_k(SAS^*) \leqslant -\lambda_1(-\lambda_k(A)SS^*) = \lambda_n(\lambda_k(A)SS^*) =$$
$$= \begin{cases} \lambda_k(A)\lambda_n(SS^*), & \text{если } \lambda_k(A) \geqslant 0, \\ \lambda_k(A)\lambda_1(SS^*), & \text{если } \lambda_k(A) \leqslant 0, \end{cases}$$
$$\lambda_k(SAS^*) \geqslant -\lambda_n(-\lambda_k(A)SS^*) = \lambda_1(\lambda_k(A)SS^*) =$$
$$= \begin{cases} \lambda_k(A)\lambda_1(SS^*), & \text{если } \lambda_k(A) \geqslant 0, \\ \lambda_k(A)\lambda_n(SS^*), & \text{если } \lambda_k(A) \leqslant 0. \end{cases}$$

Независимо от знака собственного значения $(\lambda_k(A) \geqslant 0$ или $\lambda_k(A) \leqslant 0)$ эти соотношения влекут за собой равенство $\lambda_k(SAS^*) = \theta_k \lambda_k(A)$ при некотором значении θ_k, таком, что $\lambda_1(SS^*) \leqslant \theta_k \leqslant \lambda_n(SS^*)$.

Если положить $A = I \in M_n$ в теореме Островского, то все $\lambda_k(A) = 1$ и $\theta_k = \lambda_k(SS^*)$. Если матрица $S \in M_n$ унитарна, то $\lambda_1(SS^*) = \lambda_n(SS^*) = 1$ и все $\theta_k = 1$ — здесь равенство (18.5.10) выражает инвариантность собственных значений относительно унитарного подобия. Таким образом, оценки для θ_k в теореме 18.5.9 точны как на классе всевозможных эрмитовых матриц *A,* так и на классе всевозможных невырожденных матриц *S*.

Простые рассуждения типа продолжения по непрерывности позволяют обобщить теорему Островского на случай вырожденной матрицы *S*. Для этого выберем ε>0 и применим теорему 18.5.9, заменяя матрицу *S* на невырожденную матрицу $S + \varepsilon I$. Получим $\lambda_k((S + \varepsilon I) A (S + \varepsilon I)^*) = \theta_k \lambda_k(A)$, гда $\lambda_1((S + \varepsilon I)(S + \varepsilon I)^*) \leqslant \theta_k \leqslant \lambda_n((S + \varepsilon I)(S + \varepsilon I)^*)$. При $\varepsilon \to 0$ последние неравенства переходят в неравенства $0 \leqslant \theta_k \leqslant \lambda_n(SS^*)$. Этот результат можно трактовать как расширение области применимости закона инерции Сильвестра на эрмитову конгруэнтность, осуществляемую матрицей, которая может быть вырожденной.

18.5.11. Следствие. *Пусть* A, $S \in M_n$ *и матрица A эрмитова. Расположим собственные значения матриц A и SS* по возрастанию, как* в (18.2.1). *Тогда для каждого номера* $k = 1, 2, \ldots, n$ *найдется неотрицательное число* θ_k, *такое, что* $\lambda_1(SS^*) \leqslant \theta_k \leqslant \lambda_n(SS^*)$, *при котором* $\lambda_k(SAS^*) = \theta_k \lambda_k(A)$. *В частности, количество положительных (отрицательных) собственных значений не возрастает при переходе от матрицы A к матрице SAS*.*

Задача описания канонических представителей классов эквивалентности комплексных симметричных матриц по отношению конгруэнтности решается еще проще: достаточно вычислить ранг.

18.5.12. Теорема. *Пусть заданы (вещественные или комплексные) симметричные матрицы* A, $B \in M_n$. *Необходимым и достаточным условием существования невырожденной матрицы* $S \in M_n$, *при которой* $A = SBS^T$, *является совпадение рангов матриц A и B.*

Доказательство. Если $A = SBS^T$ и *S* невырожденна, то ранги матриц *A* и *B* совпадают в силу 14.4.6. В обратную сторону, из следствия 18.4.4 имеем разложение

$$A = U_1 \Sigma_1 U_1^T = U_1 I(\Sigma_1) D_1^2 U_1^T - (U_1 D_1) I(\Sigma_1)(U_1 D_1)^T,$$

в котором $I(\Sigma_1)$ — матрица инерции типа (18.5.7) для матрицы Σ_1, определяемая единственным образом по величине ранга матрицы A, матрица U_1 унитарна, $\Sigma_1 = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, причем все $\sigma_i \geqslant 0$, $D_1 = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, где

$$d_i = \begin{cases} \sqrt{\sigma_i}, & \text{если } \sigma_i > 0, \\ 1, & \text{если } \sigma_i = 0. \end{cases}$$

Отметим невырожденность матрицы D_1. Проводя подобные рассуждения, можно также записать разложение $B = (U_2D_2)I(\Sigma_2)(U_2D_2)^T$ с аналогичными определениями сомножителей.

Пусть $\mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}\, B$, тогда $I(\Sigma_1) = I(\Sigma_2)$ и

$$I(\Sigma_1) = (U_1D_1)^{-1} A[(U_1D_1)^T]^{-1} = I(\Sigma_2) = (U_2D_2)^{-1} B[(U_2D_2)^T]^{-1}.$$

Следовательно,

$$A = (U_1D_1)(U_2D_2)^{-1} B[(U_1D_1)(U_2D_2)^{-1}]^T.$$

Приходим к заключению о конгруэнтности матриц A и B. D

Упражнение. Сколько различных классов эквивалентности по отношению конгруэнтности имеется на множестве комплексных симметричных $n \times n$-матриц? На множестве вещественных симметричных $n \times n$-матриц?

Упражнение. Пусть матрица $A \in M_n$ симметрична. Доказать, что необходимым и достаточным условием существования невырожденной матрицы $S \in M_n$, для которой

$$A = SS^T,$$

является невырожденность матрицы A.

Упражнение. Пусть матрицы A, $B \in M_n$ симметричны. Показать, что две невырожденные матрицы X, $Y \in M_n$, такие, что $A=XBY$ (это означает эквивалентность матриц A и B), существуют в том и только в том случае, когда существует невырожденная матрица $S \in M_n$, такая, что $A = SBS^T$ (это означает конгруэнтность матриц A и B). *Указание.* Установить связь между рангами матриц A и B, когда $A = XBY$.

Предыдущий результат аналогичен теореме Сильвестра об инерции 18.5.8. В следующем результате на случай конгруэнтности симметричных матриц переносятся также теорема Островского 18.5.9 и следствие 18.5.11.

18.5.13. Теорема. *Пусть* A, $S \in M_n$ *и* $A = A^T$. *Введем разложение Такаги (см. следствие* 18.4.4) $A = U\Sigma U^T$ *и* $SAS^T = VMV^T$ *матриц* A *и* SAS^T *с унитарными сомножителями* U, V *и диагональными сомножителями* $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, $M = \mathrm{diag}(\mu_1,$

$\mu_2, \ldots, \mu_n)$, *все* $\sigma_i, \mu_i \geqslant 0$. *Обозначим через* $\lambda_i(SS^*)$ *собственные значения матрицы SS*. Пусть числа* σ_i, μ_i *и* $\lambda_i(SS^*)$ *упорядочены по возрастанию, как в* (18.2.1). *Тогда для каждого номера* k=1,2, ... , *n существует неотрицательное* θ_k, *такое, что* $\lambda_1(SS^*) \leqslant \theta_k \leqslant \lambda_n(SS^*)$, *при котором* $\mu_k = \theta_k \sigma_k$. *Если дополнительно S невырожденна, то все* $\theta_k > 0$.

Доказательство. Величины μ_i^2 являются собственными значениями матрицы BB^*, где $B = SAS^T$. Следовательно,

$$\mu_k^2 = \lambda_k(BB^*) = \lambda_k(SAS^T\bar{S}\bar{A}S^*) = \lambda_k(S[AS^T\bar{S}\bar{A}]S^*) = \hat{\theta}_k\lambda_k(AS^T\bar{S}\bar{A})$$

для некоторого $\hat{\theta}_k$, такого, что $\lambda_1(SS^*) \leqslant \hat{\theta}_k \leqslant \lambda_n(SS^*)$. Последнее равенство здесь получено на основе следствия 18.5.11. Поскольку собственные значения произведения не зависят от порядка сомножителей в силу теоремы 15.3.20, имеем также равенства

$$\mu_k^2 = \hat{\theta}_k\lambda_k(AS^T\bar{S}\bar{A}) = \hat{\theta}_k\lambda_k(\bar{S}\bar{A}AS^T) = \hat{\theta}_k\lambda_k(SA\bar{A}S^*),$$

учитывая вещественность собственных значений λ_k. Применяя еще раз следствие 18.5.11, приходим к равенствам

$$\mu_k^2 = \hat{\theta}_k\tilde{\theta}_k\lambda_k(A\bar{A}) = \hat{\theta}_k\tilde{\theta}_k\sigma_k^2$$

с некоторым $\tilde{\theta}_k$, удовлетворяющим условию $\lambda_1(SS^*) \leqslant \bar{\theta}_k \leqslant \lambda_n(SS^*)$. Таким образом, $\mu_k = \sqrt{\hat{\theta}_k\bar{\theta}_k}\,\sigma_k = \theta_k\sigma_k$, и величины $\theta_k \equiv \sqrt{\hat{\theta}_k\bar{\theta}_k}$ удовлетворяют требуемым в формулировке теоремы оценкам.

Из теоремы 15.3.19 известно, что две диагонализуемые матрицы можно привести к диагональному виду одним преобразованием подобия в том и только в том случае, когда они коммутируют. Имеется ли аналогичный результат для одновременной диагонализации преобразованием конгруэнтности?

По-видимому, первые постановки задач об одновременном приведении к диагональному виду посредством преобразования конгруэнтности связаны с изучением «малых колебаний» около точки равновесия в механике. Если состояние динамической системы описывается в обобщенных (лагранжевых) координатах $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и начало координат есть точка равновесия, то в малой окрестности нуля потенциальная энергия V аппроксимируется вещественной квадратичной формой

$$V = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}q_iq_j$$

в обобщенных координатах q_i. Кинетическая энергия T аппроксимируется вещественной квадратичной формой

$$T = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

в обобщенных скоростях $\dot{q}_i$. Поведение системы определяется уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0.$$

Это система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Вещественные матрицы коэффициентов $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ этих квадратичных форм можно считать симметричными. Если они не являются диагональными, то уравнения системы *взаимосвязаны* (и, следовательно, решить их не так просто).

Пусть найдена вещественная невырожденная матрица $S = [s_{ij}] \in M_n$, приводящая матрицы A и B к диагональному виду SAS^T и SBS^T. Используя эту матрицу для введения новых обобщенных координат (и аналогично, новых обобщенных скоростей) p_i в соответствии с равенствами

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij}p_j, \tag{18.5.14}$$

заключаем, что в новых координатах квадратичные формы кинетической и потенциальной энергии T и V принимают диагональный вид. В такой ситуации система уравнений Лагранжа распадается на n отдельных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Легко найти явные выражения решений каждого из этих уравнений через экспоненты и тригонометрические функции (а также их произведения на многочлены) и затем определить при помощи (18.5.14) решение исходной системы.

Таким образом, ряд важных задач механики допускает существенные упрощения, если уметь одновременно приводить две вещественные симметричные матрицы к диагональному виду преобразованием конгруэнтности. По физическому смыслу кинетической энергии соответствующая ей квадратичная форма положительно определена и это оказывается достаточным (но не необходимым) условием одновременной диагонализации посредством преобразования конгруэнтности.

Можно рассматривать несколько различных типов одновременной диагонализации; например, взять две эрмитовы матрицы A и B и искать такую унитарную матрицу *U*, чтобы *UAU** и *UBU** имели диагональный вид, либо, ослабляя условия, искать невырожденную матрицу *S*, для которой матрицы *SAS** и *SBS** имеют диагональный вид. Аналогично для симметричных матриц *A* и *B* мы могли бы интересоваться диагональностью матриц вида UAU^T и UBU^T либо SAS^T и SBS^T. Можно поставить даже задачи смешанного типа — искать для эрмитовой матрицы *A* и симметричной матрицы *B* матрицы *UAU** и UBU^T, либо *SAS** и SBS^T диагонального вида. В каждом случае естественно рассматривать тот тип конгруэнтности, при котором сохраняется специальное алгебраическое свойство соответствующей матрицы. Все перечисленные ситуации встречаются в приложениях. К счастью, имеется единая методика их исследования. Простейшая для изучения возможность — когда одна из двух данных матриц невырожденна. В таблице 18.5.15Т приводится перечень эквивалентных необходимых и достаточных условий для каждого случая. Эти условия расположены и занумерованы так, чтобы подчеркнуть существующую между ними аналогию.

18.5.15. Теорема. *Пусть заданы матрицы* $A, B \in M_n$. *Обозначим через U некоторую унитарную матрицу и через S некоторую невырожденную матрицу,* $U, S \in M_n$. *Тогда справедливы результаты, указанные в табл.* 18.5.15Т.

Доказательство. В каждой из шести групп условия в своем большинстве эквивалентны по определению. Эквивалентность условий (3) и (4) в группе I(a) объясняется тем, что произведение *AB* эрмитовых матриц *A* и *B* эрмитово тогда и только тогда, когда *A* и *B* коммутируют, и что матрица *A* эрмитова в том и только в том случае, когда эрмитова ее обратная A^{-1}. Эквивалентность условий (3) и (4) в III(a) обосновывается аналогично, поскольку матрица *B* симметрична тогда и только тогда, когда симметрична ее обратная B^{-1} и для эрмитовой матрицы *A* справедливо равенство $A^T = \bar{A}$.

Необходимость условия (1) в каждой из шести групп вытекает непосредственно из предположения, что соответствующие преобразования конгруэнтности приводят к диагональной форме. Например, в варианте II(b), если матрицы $SAS^T = \Lambda$ и $SBS^T = M$ обе диагональные, то

$$A^{-1}B = (S^T\Lambda^{-1}S)\left[S^{-1}M(S^T)^{-1}\right] = S^T(\Lambda^{-1}M)(S^T)^{-1},$$

следовательно, матрица $R = S^T$ будет осуществлять диагонализацию матрицы $C = A^{-1}B$. Подобным же образом в случаях I(b) и III(b) следует положить $R = S^*$. Если *S* унитарна, соответствующая матрица *R* в каждом из этих случаев также будет унитарна.

Таблица 18.5.15Т

Предположения относительно A и B	Матрицы, которые должны быть диагональными	Эквивалентные необходимые и достаточные условия одновременной диагонализации
I. $A = A^*$, $B = B^*$, A невырожденна, $C = A^{-1}B$.	(a) UAU^* и UBU^*	(1) Существует унитарная матрица $V \in M_n$, при которой матрица V^*CV вещественная диагональная. (2) Матрица C унитарно диагонализуема и все ее собственные значения вещественны. (3) Матрица C эрмитова. (4) Матрицы A и B коммутируют, т. е. $AB = BA$.
	(b) SAS^* и SBS^*	(1) Существует невырожденная матрица R, при которой матрица $R^{-1}CR$ вещественная диагональная. (2) Матрица C диагонализуема и все ее собственные значения вещественны.
II. $A = A^T$, $B = B^T$, A невырожденна, $C = A^{-1}B$.	(a) UAU^T и UBU^T	(1) Существует унитарная матрица $V \in M_n$, при которой матрица V^*CV диагональна. (2) Матрица C унитарно диагонализуема. (3) Матрица C нормальна.
	(b) SAS^T и SBS^T	(1) Существует невырожденная матрица $R \in M_n$, при которой матрица $R^{-1}CR$ диагональна. (2) Матрица C диагонализуема.
III. $A = A^*$, $B = B^T$, если A невырожденна, то $C = A^{-1}B$, если B невырожденна, то $C = B^{-1}A$.	(a) UAU^* и UBU^T	(1) Существует унитарная матрица $W \in M_n$, при которой матрица $W^{-1}CW$ диагональна. (3) Матрица C симметрична. (4) Справедливо равенство $AB = BA$.
	(b) SAS^* и SBS^T	(1) Существует невырожденная матрица $R \in M_n$, при которой матрица $R^{-1}CR$ диагональна. (5) Существует невырожденная матрица $R \in M_n$, при которой матрица $R^{-1}CR$ симметрична.

Рассмотрим вариант I, в котором матрицы A и B эрмитовы и A невырожденна. Предположим выполненным условие (1) в I(b), т. е. существуют невырожденная матрица

$$R = [r_1 r_2 \dots r_n] \in M_n$$

с вектор-столбцами $r_i \in \mathbf{C}^n$ и диагональная матрица

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

с вещественными элементами λ_i, такие, что $R^{-1}A^{-1}BR = \Lambda$. Следовательно, $BR = AR\Lambda$ и $R^*BR = R^*AR\Lambda$. Не теряя общности, можно считать, что одинаковые значения λ_i объединены в группы, т. е. что матрица Λ записывается в блочном виде

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & & & 0 \\ & \Lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Lambda_k \end{bmatrix}, \qquad (18.5.16)$$

$$\Lambda_i \in M_{n_i}, \quad 1 \leqslant n_i \leqslant n; \quad \Lambda_i = \mu_i I. \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

где все числа μ_i вещественны и $\mu_i \neq \mu_j$, $i \neq j$. Пусть не все числа λ_i совпадают; тогда выберем индексы i, j так, чтобы $1 \leqslant i, j \leqslant n$ и $\lambda_i \neq \lambda_j$, и рассмотрим элемент в позиции (i, j) в обеих частях матричного равенства $R^*BR = R^*AR\Lambda$. Приходим к соотношениям

$$r_i^*Ar_j\lambda_j = r_i^*Br_j = \overline{r_j^*Br_i} = \overline{r_j^*Ar_i\lambda_i} = r_i^*Ar_j\lambda_i,$$

в которых используются эрмитовость матриц A и B (в равенствах типа $x^*Ay = \overline{y^*Ax}$ для всех $x,\ y \in \mathbf{C}^n$) и вещественность чисел λ_i и λ_j. Поскольку $\lambda_i \neq \lambda_j$, заключаем, что $r_i^*Ar_j = 0$ и, следовательно, $r_j^*Ar_i = r_i^*Br_j = r_j^*Br_i = 0$. Это означает, что обе матрицы R^*BR и R^*AR блочно-диагональны и их блочная структура согласована со структурой (18.5.16), т. е.

$$R^*BR = \begin{bmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_k \end{bmatrix} = R^*AR\Lambda =$$

$$= \begin{bmatrix} \mu_1 A_1 & & & 0 \\ & \mu_2 A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mu_k A_k \end{bmatrix},$$

где $B_i, A_i \in M_{n_i}$ при $i = 1, 2, \ldots, k$. Такое частичное приведение к диагональной форме является полным при $k = n$, т. е. когда все λ_i различны. При $k < n$ имеется блок размера $n_i > 1$. В равенстве $B_i = \mu_i A_i$ матрицы B_i и A_i эрмитовы и по спектральной теореме 18.1.5 имеет место разложение $A_i = U_i D_i U_i^*$, в котором $U_i, D_i \in M_{n_i}$, матрица U_i унитарная, а D_i вещественная диагональная. Тогда аналогичное разложение для B_i записывается в виде $B_i = \mu_i A_i = U_i(\mu_i D_i)U_i^*$. Положим

$$U = \begin{bmatrix} U_1 & & & 0 \\ & U_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & U_k \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_1 & & & 0 \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & D_k \end{bmatrix},$$

где $U_i = [1]$ при $n_i = 1$. Матрица U унитарная, а D вещественная диагональная, и справедливы равенства

$$R^*BR = U(D\Lambda)U^*, \quad R^*AR = UDU^*.$$

Наконец, отсюда получаем требуемые представления

$$A = [(R^{-1})^*U]D[(R^{-1})^*U]^*, \quad B = [(R^{-1})^*U](D\Lambda)[(R^{-1})^*U]^*.$$

Отметим, что в случае предположения (1) в I(а) рассуждения аналогичны, но дополнительно известно, что матрица R унитарна. Тогда матрица $(R^{-1})^*U = RU$ также унитарна и достаточность условия (1) в I(а) тем самым доказана. Идеи приведенного доказательства используются и в остальных четырех случаях. При соответствующих предположениях выписываются блочно-диагональные конгруэнтные матрицы и затем окончательное приведение к диагональному виду осуществляется при помощи спектральной теоремы для эрмитовых матриц или следствия 18.4.4 о разложении Такаги для симметричных матриц. Приведем необходимые подробности.

В случае II матрицы A и B симметричны и невырожденны. Примем условие (1) в II(b), что существуют невырожденная матрица

$$R = [r_1 r_2 \ldots r_n] \in M_n,$$

такая, что каждый вектор-столбец r_i лежит в $\mathbf{C}^n$, и диагональная матрица

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

(не обязательно вещественная), при которых верно равенство $R^{-1}A^{-1}BR = \Lambda$. Получаем $BR = AR\Lambda$ и $R^TBR = R^TAR\Lambda$. Предположим, как и ранее, что совпадающие числа λ_i сгруппированы так, что матрица Λ имеет вид (18.5.16) и все μ_i различны. Пусть не все числа λ_i равны между собой; выберем индексы i, j, такие, что $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$ и^$\lambda_i \neq \lambda_j$, и рассмотрим (i, j)-элемент матричного равенства $R^T BR = R^T AR\Lambda$. Получаем соотношения

$$r_i^T Ar_j\lambda_j = r_i^T Br_j = r_j^T Br_i = r_j^T Ar_i\lambda_i = r_i^T Ar_j\lambda_i,$$

в которых используется симметричность матриц A и B (т. е. равенства вида $x^T Ay = y^T Ax$ _для произвольных векторов $x,\ y \in \mathbf{C}^n$). Поскольку $\lambda_i \neq \lambda_j$, приходим к заключению, что $r_i^T Ar_j = 0$ и, следовательно, $r_j^T Ar_i = r_i^T Br_j = r_j^T Br_i = 0$. Это означает, что матрицы $R^T BR$ и $R^T AR$ имеют блочную структуру, согласованную со структурой в (18.5.16), т. е.

$$R^T BR = \begin{bmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_k \end{bmatrix} = R^T AR\Lambda =$$

$$= \begin{bmatrix} \mu_1 A_1 & & & 0 \\ & \mu_2 A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mu_k A_k \end{bmatrix},$$

где $B_i,\ A_i \in M_{n_i}$. При $k = n$ получаем тем самым требуемое приведение. При $k<n$ имеется блок размера $n_i>1$. В равенстве $B_i = \mu_i A_i$ матрицы B_i и A_i симметричны. Привлекая следствие 18.4.4, запишем разложение Такаги $A_i = \bar{U}_i \Sigma_i U_i^T$, где U_i, $\Sigma_i \in M_{n_i}$, U_i — унитарная матрица, Σ_i — диагональная матрица с неотрицательными элементами. Тогда разложение Такаги для B_i есть $B_i = \mu_i A_i = U_i (\mu_i \Sigma_i) U_i^T$. Положим

$$U = \begin{bmatrix} U_1 & & & 0 \\ & U_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & U_k \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & & & 0 \\ & \Sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Sigma_k \end{bmatrix},$$

где $U_i = [1]$ при $n_i = 1$.Матрица U унитарна, матрица Σ диатональна (с неотрицательными элементами) и справедливы разложения

$$R^T BR = U(\Sigma\Lambda)U^T, \quad R^T AR = U\Sigma U^T.$$

Отсюда выводим требуемые представления

$$A=\left[\left(R^{-1}\right)^{T}U\right]\Sigma\left[\left(R^{-1}\right)^{T}U\right]^{T},\quad B=\left[\left(R^{-1}\right)^{T}U\right]\Sigma\Lambda\left[\left(R^{-1}\right)^{T}U\right]^{T}.$$

При условии (1) в II(a) дополнительно известно, что матрица R унитарна. Следовательно, матрица $(R^{-1})^{T}U=\bar{R}U$ также унитарна, поэтому достаточность условия (1) в II(a) доказана. В случае III рассуждения несколько меняются. Пусть $A, B\in M_n$, эрмитова матрица A невырожденна и B симметрична. Предположим выполненным условие (1) в III(b), т. е. существуют невырожденная матрица

$$R=[r_1r_2\ \dots\ r_n]\in M_n$$

и диагональная матрица

$$\Lambda=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_n),$$

при которых $R^{-1}A^{-1}BR=\Lambda$. Тогда $B\bar{R}=AR\Lambda$ и $R^{*}B\bar{R}=\bar{R}^{T}B\bar{R}=$ $=R^{*}AR\Lambda$. Теперь сгруппируем числа λ_i, *равные по модулю,* так, что матрица Λ принимает вид

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\Lambda_1 & & & & 0\\ & \Lambda_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & \Lambda_k\end{bmatrix},$$

где

$$\Lambda_i=\begin{bmatrix}\mu_i^{(1)} & & & & 0\\ & \mu_i^{(2)} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & \mu_i^{(n_i)}\end{bmatrix}$$

для $i=1,\ \dots,\ k$, причем внутри каждого блока $|\mu_i^{(j)}|=|\mu_i^{(k)}|$, $j,\ k=1,\ 2,\ \dots,\ n_i$, и $|\mu_i^{(p)}|\neq|\mu_j^{(q)}|$ при $i\neq j$. Если модули $|\lambda_i|$ не все совпадают между собой, выберем индексы *i, j* так, чтобы $1\leqslant i,\ j\leqslant n,\ |\lambda_i|\neq|\lambda_j|$. Рассмотрим в матричном равенстве $\bar{R}^{T}B\bar{R}=R^{*}AR\Lambda$ $(i,\ j)$-элемент. Это

$$r_j^{*}Ar_j\lambda_j=\bar{r}_i^{T}B\bar{r}_j=\bar{r}_j^{T}B\bar{r}_i=r_j^{*}Ar_i\lambda_i=\overline{r_i^{*}Ar_j}\lambda_i.$$

(Здесь используются эрмитовость матрицы *A* и симметричность матрицы *B.)* Приходим к соотношению

$$|r_i^{*}Ar_j||\lambda_j|=|r_i^{*}Ar_j||\lambda_i|.$$

В силу $|\lambda_i| \neq |\lambda_j|$ имеем $r_i^* A r_j = 0$ и, следовательно, $r_j^* A r_i = = \bar{r}_i^T B \bar{r}_j = \bar{r}_j^T B \bar{r}_i = 0$. Таким образом, матрицы $\bar{R}^T B \bar{R}$ и $R^* A R$ являются блочно-диагональными вместе с Λ, т. е.

$$\bar{R}^T B \bar{R} = \begin{bmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_k \end{bmatrix} = R^* A R \Lambda =$$

$$= \begin{bmatrix} A_1\Lambda_1 & & & 0 \\ & A_2\Lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k\Lambda_k \end{bmatrix},$$

где все $B_i,\ A_i,\ \Lambda_i \in M_{n_i},\ \Lambda_i = \sigma_i D_i^2$ с $\sigma_i \geqslant 0$ и

$$D_j = \operatorname{diag}\left(e^{i\theta_{1j}},\ e^{i\theta_{2j}},\ \ldots,\ e^{i\theta_{n_j j}}\right),$$

$\theta_{ij} \in \mathbf{R}$. При $k = n$ это требуемое приведение к диагональной форме. При $k < n$ найдется некоторый блок размера $n_i > 1$.

Для него $B_i = A_i\Lambda_i = \sigma_i A_i D_i^2$, матрица D_i одновременно диагональна и унитарна $(D_i^* = \bar{D}_i = \bar{D}_i^T = D_i^{-1})$ и, следовательно,

$$\bar{D}_i^T B_i \bar{D}_i = \sigma_i D_i^* A_i D_i. \tag{18.5.17}$$

В левой части последнего равенства стоит симметричная матрица $\bar{D}_i^T B_i \bar{D}_i$, а в правой части эрмитова матрица $\sigma_i D_i^* A_i D_i$ (величина σ_i вещественна). Если $\sigma_i \neq 0$, то заключаем, что матрица $D_i^* A_i D_i$ одновременно симметрична и эрмитова. Эти два свойства сочетаются только для вещественных матриц, следовательно, матрица $D_i^* A_i D_i$ вещественная симметричная (при $\sigma_i \neq 0$). Если $\sigma_i = 0$ (что может произойти в каком-либо одном блоке), то матрица $D_i^* A_i D_i$ эрмитова, но не обязательно вещественна. По спектральной теореме для каждого номера $i = 1, \ldots, k$ существует унитарная матрица $U_i \in M_{n_i}$ и вещественная диагональная матрица $M_i \in M_{n_i}$, при которых $D_i^* A_i D_i = U_i M_i U_i^*$. Если $\sigma_i \neq 0$, то матрицу U_i можно выбрать вещественной ортогональной и тогда $U_i^T = U_i^*$ и

$$\bar{D}_i^T B_i \bar{D}_i = \sigma_i D_i^* A_i D_i = U_i (\sigma_i M_i) U_i^T.$$

Если $\sigma_i = 0$, то утверждение $U_i^* = U_i^T$ может быть неверно; тем не менее приведенные выше равенства остаются в силе, поскольку все их части обращаются в нуль. Таким образом, для всех $i = 1, 2, \ldots, k$

$$A_i = (D_iU_i)\, M_i\, (D_iU_i)^* \text{ и } B_i = (D_iU_i)(\sigma_iM_i)(D_iU_i)^T.$$

Полагая

$$U = \begin{bmatrix} D_1U_1 & & & & 0 \\ & D_2U_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & \cdot & D_kU_k \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & & & & 0 \\ & M_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & \cdot & M_k \end{bmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1I & & & & 0 \\ & \sigma_2I & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & \cdot & \sigma_kI \end{bmatrix},$$

получаем искомые представления

$$A = [(R^{-1})^*U]\, M\, [U^*R], \qquad B = [(\bar{R}^{-1})^T U]\, \Sigma M\, [U^T\bar{R}^{-1}].$$

При условии (1) в III(a) матрица R здесь унитарна, и тогда $(R^{-1})^*U = RU$ и матрица $(\bar{R}^{-1})^T U = \bar{R}U$ также унитарна. Тем самым доказана достаточность условия (1) в III(a).

Мы доказали утверждения случая III в предположении невырожденности матрицы A. Пусть теперь невырожденна матрица B. Условие (1) в III (b) гласит, что существует невырожденная матрица $R \in M_n$, такая, что матрица $R^{-1}B^{-1}A\bar{R} = \Lambda$ диагональна. Тогда $A\bar{R} = BR\Lambda$ и $\bar{R}^*A\bar{R} = R^TBR\Lambda$. Далее рассуждения аналогичны приведенным выше для случая невырожденной матрицы A. Матрицы A и B просто меняются ролями и для приведения матрицы $D_i^TB_iD_i$ к диагональному виду используется следствие 18.4.4 о разложении Такаги вместо спектральной теоремы.

Теорема 18.5.15 об одновременной диагонализации в случаях I и II (табл. 18.5.15Т) содержит традиционное условие на матрицу $A^{-1}B$, а именно что $A^{-1}B$ — диагонализуемая матрица (возможно, с вещественными собственными значениями), т. е. что она представима в виде $R\Lambda R^{-1}$ с диагональной (возможно, вещественной) матрицей Λ. Это условие поддается в принципе проверке. Достаточно выяснить, распадается ли минимальный многочлен матрицы A^{-1} B на различные линейные (возможно, вещественные) множители.

В случае III, однако, возникает не совсем обычное условие — требуется представимость матрицы $A^{-1}B$ в виде произведения $R\Lambda\bar{R}^{-1}$ с диагональной матрицей Λ. Можно сказать, что это условие диагонализуемости матрицы $A^{-1}B$ преобразованием *псевдоподобия* вместо обычного подобия. Псевдоподобие обсуждается в 18.6, и в теореме 18.6.11 доказана эквивалентность условия (1) случая III(b) теоремы 18.5.15 тому, что матрица $C\bar{C}$ диагонализуема, все ее собственные значения вещественны и неотрицательны и $\operatorname{rank} C = \operatorname{rank} C\bar{C}$.

Предположение о невырожденности удобно в теореме 18.5.15, но в случаях унитарной конгруэнтности I(a), II(a) и III(a) оно может быть исключено. Для I(a) такое исключение приводит к новому доказательству классического результата теоремы 18.1.6 об одновременной унитарной диагонализации коммутирующих эрмитовых матриц.

18.5.18. Следствие. *Пусть заданы матрицы* $A, B \in M_n$.

(a) *Если обе матрицы A и B эрмитовы, то необходимым и достаточным условием существования унитарной матрицы* $U \in M_n$, *такой, что обе матрицы* UAU^* *и* UBU^* *диагональны, является эрмитовость матрицы AB (что эквивалентно равенству AB= BA).*

(b) *Если обе матрицы A и B симметричны, то необходимым и достаточным условием существования унитарной матрицы* $U \in M_n$, *такой, что обе матрицы* UAU^T *и* UBU^T *диагональны, является нормальность матрицы* $A\bar{B}$ *(т. е. равенство* $A\bar{B}B\bar{A} = B\bar{A}A\bar{B}$).

(c) *Если A эрмитова и B симметрична, то необходимым и достаточным условием существования унитарной матрицы* $U \in M_n$, *такой, что обе матрицы* UAU^* *и* UBU^T *диагональны, является симметричность матрицы AB (т. е. равенство* $AB = B\bar{A}$).

Доказательство, (а) Если обе матрицы $UAU^* = \Lambda$ и $UBU^* = M$ диагональны, то $A = U^*\Lambda U$, $B = U^*MU$ и

$$AB = U^*\Lambda UU^*MU = U^*\Lambda MU = U^*M\Lambda U = U^*MUU^*\Lambda U = BA.$$

В обратную сторону, если $AB=BA$, то матрица $A_\varepsilon = A + \varepsilon I$ невырожденна при некотором $\varepsilon > 0$ и эрмитова; тогда $A_\varepsilon B = (A + \varepsilon I)B = AB + \varepsilon B = BA + \varepsilon B = B(A + \varepsilon I) = BA_\varepsilon$. Таким образом, матрица B коммутирует с A_ε и A_ε^{-1}; следовательно, матрица $A_\varepsilon^{-1}B$ эрмитова. По условию (3) случая I(a) теоремы 18.5.15 (см. табл. 18.5.15T) существует унитарная матрица U_ε, при которой обе матрицы $U_\varepsilon A_\varepsilon U_\varepsilon^* = U_\varepsilon A U_\varepsilon^* + \varepsilon I = \Lambda_\varepsilon$ и $U_\varepsilon B U_\varepsilon^* = M_\varepsilon$ диагональны. Тогда диагональны и обе матрицы

$$U_\varepsilon A U_\varepsilon^* = \Lambda_\varepsilon - \varepsilon I \text{ и } U_\varepsilon B U_\varepsilon^* = M_\varepsilon.$$

(b) Если диагональны обе матрицы $UAU^T = \Lambda$ и $UBU^T = M$, то справедливы равенства $A = U^* \Lambda \bar{U}$, $B = U^* M \bar{U}$. Таким образом матрица

$$A\bar{B} = U^* \Lambda \bar{U} U^T \bar{M} U = U^* (\Lambda \bar{M}) U$$

унитарно диагонализуема и, следовательно, нормальна. В обратную сторону, пусть $A\bar{B}$ нормальна. Предположим, что матрица A невырожденна. Тогда матрица $A\bar{B} = (A^{-1})^{-1}\bar{B}$ нормальна и из условия (3) случая II (a) теоремы 18.5.15 вытекает, что две симметричные матрицы A^{-1} и $\bar{B}$ одновременно унитарно диагонализуемы. Это означает существование унитарной матрицы $U \in M_n$ и диагональных Λ, $M \in M_n$, таких, что $A^{-1} = U \Lambda U^T$ и $\bar{B} = U M U^T$. Тогда приходим к равенствам $A = \bar{U} \Lambda^{-1} \bar{U}^T$ и $B = \bar{U} \bar{M} \bar{U}^T$, т. е. матрицы A и B одновременно приводятся к диагональному виду преобразованием требуемого типа. В случае вырожденности матрицы A требуются дополнительные аргументы. В силу следствия 18.4.4 найдется унитарная матрица $U \in M_n$, при которой матрица UAU^T диагональна. Переставляя при необходимости столбцы матрицы U, приходимк представлению

$$UAU^T = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma \in M_k, \quad 1 \leqslant k < n,$$

в котором матрица Σ диагональна и невырожденна. Матрицу UBU^T разобьем на блоки того же размера:

$$UBU^T = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^T & B_{22} \end{bmatrix}, \quad B_{11} \in M_k, \quad B_{22} \in M_{n-k}.$$

Подматрицы B_{11} и B_{22} симметричны, и справедливы равенства

$$(UAU^T)(\overline{UBU^T}) = UA\bar{B}U^* = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} \\ B_{12}^* & \bar{B}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma\bar{B}_{11} & \Sigma\bar{B}_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Однако матрица $UA\bar{B}U^*$ нормальна, поэтому $\Sigma\bar{B}_{12} = 0$ (см. задачу 20 в конце данного параграфа), тогда $B_{12} = 0$, ведь матрица Σ невырожденна. Следовательно,

$$UAU^T=\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad UBU^T=\begin{bmatrix}B_{11} & 0\\ 0 & B_{22}\end{bmatrix}$$

и

$$(UAU^T)(\overline{UBU^T})=\begin{bmatrix}\Sigma\bar{B}_{11} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Вспоминая предыдущие рассуждения для невырожденного случая, заключаем, что существуют унитарная матрица $V_1 \in M_k$ и диагональные матрицы $\Lambda_1,\ \Lambda_2 \in M_n$, такие, что

$$\Sigma = V_1\Lambda_1V_1^T \text{ и } B_{11}=V_1\Lambda_2V_1^T.$$

Для симметричной матрицы B_{22} также существуют, как известно, унитарная матрица $V_2 \in M_{n-k}$ и диагональная матрица $\Lambda_3 \in M_{n-k}$, такие, что $B_{22}=V_2\Lambda_3V_2^T$. Положим $\Lambda=\Lambda_1\oplus 0\in M_n$, $M=$ $=\Lambda_2\oplus\Lambda_3$ и $V=V_1\oplus V_2$; тогда $UAU^T=V\Lambda V^T$, $UBU^T=VMV^T$. Таким образом, матрицы

$$A=(U^*V)\,\Lambda\,(U^*V)^T \text{ и } B=(U^*V)\,M\,(U^*V)^T$$

одновременно диагонализуются одним преобразованием требуемого типа.

(с) Пусть диагональны обе матрицы $UAU^*=\Lambda$ и $UBU^T=M$, причем матрица Λ обязательно вещественна. Имеем

$$A=U^*\Lambda U,\quad B=U^*M\bar{U};$$

тогда

$$AB=U^*\Lambda UU^*M\bar{U}=U^*\Lambda MU=U^*M\Lambda\bar{U}=$$
$$=U^*M\bar{U}U^T\Lambda\bar{U}=(U^*M\bar{U})(\overline{U^*\Lambda U})=B\bar{A}.$$

Обратно, пусть $AB=B\bar{A}$. Матрица $A_\varepsilon\equiv A+\varepsilon I$ невырожденна при некотором $\varepsilon>0$ и эрмитова. Справедливы соотношения $A_\varepsilon B=AB+\varepsilon B=B\bar{A}+\varepsilon B=BA_\varepsilon$. Таким образом, условие (4) случая III (а) теоремы 18.5.15 выполнено и существует унитарная матрица $U_\varepsilon\in M_n$, такая, что обе матрицы $U_\varepsilon A_\varepsilon U_\varepsilon^*=U_\varepsilon AU_\varepsilon^*+$ $+\varepsilon I=\Lambda_\varepsilon$ и $U_\varepsilon BU_\varepsilon^T=M_\varepsilon$ диагональны. Следовательно, диагональны также обе матрицы $U_\varepsilon AU_\varepsilon^*=\Lambda_\varepsilon-\varepsilon I$ и $U_\varepsilon BU_\varepsilon^T=M_\varepsilon$.

Проблема одновременной диагонализации двух вырожденных эрмитовых матриц преобразованием эрмитовой (не обязательно унитарной) конгруэнтности рассматривается в задаче 8.

Как мы уже убедились, преобразованием эрмитовой конгруэнтности эрмитова матрица может быть приведена к простой форме (диагональной с числами ±1 или 0 на диагонали). Пару эрмитовых матриц можно при некоторых условиях одновременно привести к диагональному виду преобразованием эрмитовой конгруэнтности. Возникает естественный вопрос: к какой канонической форме можно одновременно привести пару произвольных эрмитовых матриц преобразованием эрмитовой конгруэнтности? Иначе говоря, какую каноническую форму может иметь пара матриц C^*AC и C^*BC с одной осуществляющей конгруэнтность матрицей *C*? Хотя ответ на этот вопрос известен для произвольных эрмитовых пар (обе матрицы могут быть вырожденными), его общая формулировка слишком сложна, не говоря уже о доказательстве. Поэтому здесь мы приведем без доказательства ослабленный вариант теоремы о канонической форме пары эрмитовых матриц в предположении невырожденности хотя бы одной из этих матриц. Частный случай, когда возможна одновременная диагонализация преобразованием эрмитовой конгруэнтности, уже рассматривался ранее.

18.5.19. Теорема. *Пусть матрицы $A, B \in M_n$ эрмитовы и A невырожденна. Тогда существуют число $k \leqslant n$ и невырожденная матрица $C \in M_n$, при которых справедливы представления*

$$C^*AC = \begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{bmatrix}, \quad C^*BC = \begin{bmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_k \end{bmatrix},$$

где каждая пара блоков

$$A_i,\ B_i \in M_{n_i},\quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k,$$

имеет вид

$$B_i = \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & & & \alpha \\ & & \cdot & 1 \\ & \cdot & \cdot & \\ \alpha & 1 & & 0 \end{bmatrix}, \quad A_i = \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix}$$

с вещественным числом α *и* $\varepsilon = \pm 1$, *либо вид*

$$B_i = \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & & \alpha \\ & 0 & & & \cdot\,\cdot & 1 \\ & & & \cdot\,\cdot & & \\ & & & \alpha & 1 & 0 \\ \hline 0 & & \bar{\alpha} & & & \\ & \cdot\,\cdot & 1 & & 0 & \\ \cdot\,\cdot & & & & & \\ \bar{\alpha} & 1 & 0 & & & \end{array}\right], \quad A_i = \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix}$$

с комплексным числом α *и четным числом* n_i *(изображенные подматрицы блока* B_i *одного размера* $n_i/2$*).*

Замечания

1. Если α вещественно, то допускается значение $n_i = 1$; тогда указанные два блока — это $\pm\alpha$, ± 1. Несколько (1×1)-блоков, отвечающих одному значению α (и одному значению ε=1, например), объединяются в блок вида αI в *C*BC* и вида *I* в *C*AC*.
2. При комплексном α в случае $n_i = 2$ блоки принимают вид

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \bar{\alpha} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. В условиях последней теоремы блочная структура пары матриц точно соответствует канонической жордановой форме матрицы $A^{-1}B$. Жордановы блоки матрицы $A^{-1}B$ в точности совпадают с $A_i^{-1}B_i$. Отметим, что

$$(C^*AC)^{-1}(C^*BC) = C^{-1}(A^{-1}B)C,$$

а это означает, что матрица *C* осуществляет также преобразование подобия, приводящее матрицу $A^{-1}B$ к жордановой канонической форме. Таким образом, канонический вид пары матриц из предыдущей теоремы можно найти с помощью жордановой канонической формы матрицы $A^{-1}B$ (множители инерции — величины ε — определяются дополнительно).

18.5.22. Замечание. Точно так же как каноническое представление из теоремы 18.5.19 для пары эрмитовых матриц *A* и *B* по отношению к эрмитовой конгруэнтности аналогично канонической жордановой форме матрицы $A^{-1}B$, имеется каноническое представление для пары *вещественных* симметричных матриц *A* и *B* по отношению к *вещественной* конгруэнтности, аналогичное *вещественной* канонической жордановой форме матрицы $A^{-1}B$. В последнем представлении блоки B_i вида (18.5.21) заменяются на естественные аналоги блоков вида (17.4.4) жордановой формы, а вид остальных блоков остается прежним.

18.6. Псевдоподобие и псевдодиагонализация

Основанием для материала данного раздела служат три результата из двух предыдущих параграфов. В теореме 18.4.3 охарактеризованы все матрицы вида $U\Delta\bar{U}^T$, где Δ — верхняя треугольная, а U — унитарная матрицы. Теперь нам будет удобней иная запись этого разложения: $U\Delta U^T = U\Delta\bar{U}^{-1}$. В следствии 18.4.4 охарактеризованы все матрицы вида $U\Sigma U^T = U\Sigma\bar{U}^{-1}$, где Σ—диагональная матрица. Наконец, в случае III теоремы 18.5.15 требуется информация о том, когда заданную квадратную комплексную матрицу A можно привести к диагональной форме преобразованием $A \to SA\bar{S}^{-1}$ для некоторой невырожденной матрицы S. (Здесь используются новые обозначения A и S для матриц C и R^{-1} соответственно из условия (1) случая III теоремы 18.5.15 (см. табл. 18.5.15Т)).

18.6.1. Определение. Две матрицы A и B называют *псевдоподобными,* если существует невырожденная матрица $S \in M_n$, связывающая их равенством $A = SB\bar{S}^{-1}$. Если матрицу S здесь можно выбрать унитарной, то говорят об *унитарном псевдоподобии* матриц A и B.

Если $A = SB\bar{S}^{-1}$ и матрица $S = U$ унитарна, то $A = SB\bar{S}^{-1} = UBU^T$; если матрица $S=Q$ комплексная ортогональная, то $A = SB\bar{S}^{-1} = QBQ^*$; если матрица $S=R$ вещественная невырожденная, то $A = SB\bar{S}^{-1} = RBR^{-1}$. Таким образом, конгруэнтность, эрмитова конгруэнтность и обычное подобие являются частными случаями псевдоподобия.

Как и обычное подобие, псевдоподобие задает отношение эквивалентности на M_n, и можно задаться вопросом о выделении классов эквивалентности, содержащих треугольные или диагональные представители.

18.6.2. Определение. Говорят, что матрица $A \in M_n$ *приводится к треугольному виду преобразованием псевдоподобия* или просто *псевдоподобием* (является *псевдотриангуляризуемой)*, если существует невырожденная матрица $S \in M_n$, такая, что матрица $S^{-1}A\bar{S}$ верхняя треугольная, и что она *приводится к диагональному виду псевдоподобием* (является *псевдодиагонализуемой),* если матрицу S можно выбрать так, чтобы матрица

$S^{-1}A\bar{S}$ была диагональной. Если матрицу S здесь можно выбрать унитарной, то A называют *унитарно псевдотриангуляризуемой* или *унитарно псевдодиагонализуемой.*

Если матрица $A \in M_n$ приводится псевдоподобием к верхней треугольной матрице $S^{-1}A\bar{S} = \Delta$, то элементы главной диагонали произведения $\Delta\bar{\Delta} = S^{-1}(A\bar{A})S$ неотрицательны, как показывают явные вычисления. Следовательно, неотрицательны все собственные значения матрицы $A\bar{A}$. Но тогда в силу теоремы 18.4.3 существует унитарная матрица U, такая, что $U\bar{A}U^T = UAU^{-1}$ — верхняя треугольная матрица. Таким образом, мы научились определять, приводится ли заданная матрица к треугольному виду псевдоподобием.

18.6.3. Теорема. *Пусть задана матрица* $A \in M_n$. *Следующие утверждения являются эквивалентными:*

(a) *матрица A приводится к треугольному виду псевдоподобием;*

(b) *матрица A приводится к треугольному виду унитарным псевдоподобием;*

(c) *все собственные значения произведения* $A\bar{A}$ *вещественны и неотрицательны.*

Если матрица $A \in M_n$ унитарно псевдодиагонализуема, то $A = U\Lambda\bar{U}^{-1} = U\Lambda U^T$ с некоторой унитарной матрицей $U \in M_n$ и диагональной матрицей $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Таким образом, $A^T = (U\Lambda U^T)^T = U\Lambda^T U^T = \bar{U}\Lambda U^T = \bar{A}$ и, следовательно, матрица A симметрична. В силу следствия 18.4.4 верно и обратное, причем диагональную матрицу здесь всегда можно выбрать неотрицательной. Тем самым мы также решили проблему унитарной псевдодиагонализации.

18.6.4. Теорема. *Матрица* $A \in M_n$ *унитарно псевдодиагонализуема тогда и только тогда, когда она симметрична.*

Среди вопросов, связанных с приведением к треугольному и диагональному виду псевдоподобием, без ответа остался только вопрос практичной характеризации псевдодиагонализуемых матриц, когда унитарность псевдоподобия не предполагается.

Пусть матрица $A \in M_n$ приводится к диагональному виду $S^{-1}A\bar{S} = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$; тогда $A\bar{S} = S\Lambda$. Вводя обозначения $S = [s_1 \ \ldots \ s_n]$, где $s_i \in \mathbf{C}^n$, запишем это равенство для каждого столбца: $A\bar{s}_i = \lambda_i s_i$, $i = 1, \ldots, n$. Собственные значения и векторы связаны похожим образом, однако имеющееся отличие оказывается существенным.

18.6.5. Определение. Пусть задана матрица $A \in M_n$. Ненулевой вектор $x \in \mathbf{C}^n$, подчиненный условию $A\bar{x} = \lambda x$ с некоторым $\lambda \in \mathbf{C}$, называют *псевдособственным вектором* матрицы *A,* а соответствующее число λ — *псевдособственным значением* матрицы *A*.

Равенство $A\bar{S} = S\Lambda$ означает, что каждый ненулевой столбец из *S* есть псевдособственный вектор матрицы *A*. Столбцы матрицы *S* линейно независимы в том и только в том случае, когда *S* невырожденна. Поэтому матрица $A \in M_n$ псевдодиагонализуема тогда и только тогда, когда у нее имеется *n* линейно независимых псевдособственных векторов. В этом отношении теория псевдодиагоиализации полностью параллельна теории обычной диагонализации.

Но каждой матрице соответствует по меньшей мере одно собственное значение и общее число ее различных собственных значений конечно. При переходе к псевдособственным значениям эти утверждения теряют силу. В самом деле, если $A\bar{x} = \lambda x$, то

$$e^{-i\theta}A\bar{x} = A\left(\overline{e^{i\theta}x}\right) = e^{-i\theta}\lambda x = \left(e^{-2i\theta}\lambda\right)\left(e^{i\theta}x\right)$$

для всех $\theta \in \mathbf{R}$. Таким образом, одновременно с псевдособственным значением λ у матрицы *A* имеются псевдособственные значения $e^{i\theta}\lambda$ для всех $\theta \in \mathbf{R}$. С другой стороны, равенство $A\bar{x} = \lambda x$ влечет за собой $A\bar{A}x = A(\overline{A\bar{x}}) = A(\overline{\lambda x}) = \bar{\lambda}A\bar{x} = \bar{\lambda}\lambda x = |\lambda|^2 x$. Следовательно, число λ есть псевдособственное значение матрицы *A,* только когда $|\lambda|^2$ есть собственное значение произведения $A\bar{A}$. Пример

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

когда произведение $A\bar{A} = -2I$ не имеет неотрицательных собственных значений, убеждает в том, что существуют матрицы, у которых вообще нет псевдособственных значений. Известно, однако, что если $A \in M_n$ и *n* нечетно, то у матрицы *A* имеется по крайней мере одно псевдособственное значение — результат, аналогичный тому факту, что произвольная вещественная матрица нечетного порядка имеет хотя бы одно вещественное собственное значение.

Итак, в отличие от положения с обычными собственными значениями матрица может иметь бесконечно много различных псевдособственных значений или не иметь их вовсе. Если известно псевдособственное значение матрицы и тем самым определен бесконечный набор псевдособственных значений с одним модулем, то в этом наборе в качестве представителя иногда удобно взять единственное неотрицательное псевдособственное значение.

Указанное выше необходимое условие существования псевдособственного значения оказывается также достаточным.

18.6.6. Предложение. *Пусть заданы матраца* $A \in M_n$ *и число* $\lambda \geqslant 0$. *Тогда* λ *есть собственное значение произведения* $A\bar{A}$ *в том и только в том случае, когда число* $+\sqrt{\lambda}$ *есть псевдособственное значение матрицы A.*

Доказательство. Если $\lambda \geqslant 0$, $\sqrt{\lambda} \geqslant 0$ и $A\bar{x} = \sqrt{\lambda}\, x$ при некотором векторе $x \neq 0$, то

$$A\bar{A}x = A(\overline{A\bar{x}}) = A\left(\overline{\sqrt{\lambda}\, x}\right) = \sqrt{\lambda} A\bar{x} = \lambda x.$$

В обратную сторону, пусть $A\bar{A}x = \lambda x$ для некоторого $x \neq 0$.

Имеются две возможности:

(a) векторы $A\bar{x}$ и x линейно зависимы, либо

(b) векторы $A\bar{x}$ и x линейно независимы.

В первом случае имеем равенство $A\bar{x} = \mu x$ для некоторого $\mu \in \mathbf{C}$, которое означает, что μ— псевдособственное значение матрицы *A*. Но тогда

$$\lambda x = A\bar{A}x = A(\overline{A\bar{x}}) = A(\overline{\mu x}) = \bar{\mu} A\bar{x} = \bar{\mu}\mu x = |\mu|^2 x,$$

т. е. $|\mu| = +\sqrt{\lambda}$. Поскольку псевдособственному значению $e^{-2i\theta}\mu$ отвечает псевдособственный вектор $e^{i\theta}x$ для любого $\theta \in \mathbf{R}$, приходим к заключению, что число $+\sqrt{\lambda}$ является псевдособственным значением матрицы *A*. Отметим, что

$A\bar{A}(A\bar{x}) = A(\overline{A\bar{A}x}) = A(\overline{\lambda x}) = \lambda(A\bar{x})$ и $A\bar{A}x = \lambda x$, а это означает, что в случае простого собственного значения λ матрицы $A\bar{A}$ всегда реализуется случай (a).

В другом случае (b) (который может осуществиться, если λ — кратное собственное значение матрицы $A\bar{A}$) линейная комбинация $y = A\bar{x} + \sqrt{\lambda}\, x$ является ненулевой и оказывается псевдособственным вектором, отвечающим псевдособственному значению $+\sqrt{\lambda}$, поскольку

$$A\bar{y} = A\bar{A}x + \sqrt{\lambda}\, A\bar{x} = \lambda x + \sqrt{\lambda}\, A\bar{x} = \sqrt{\lambda}\left(A\bar{x} + \sqrt{\lambda}\, x\right) = \sqrt{\lambda}\, y.$$

Мы убедились, что каждому неотрицательному собственному значению произведения $A\bar{A}$ соответствует псевдособственный вектор матрицы *A*. В этом факте вновь проявляется аналогия с обычной спектральной теорией. Такая аналогия до некоторой степени развивается следующим результатом.

18.6.7. Предложение. *Пусть задана матрица* $A \in M_n$ *со своими псевдособственными векторами* $x_1, x_2, \ldots, x_k$, *отвечающими псевдособственным значениям* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. *Если* $|\lambda_i| \neq |\lambda_j|$ *при* $1 \leqslant i, j \leqslant k$ *и* $i \neq j$, *то множество* $\{x_1, \ldots, x_k\}$ *линейно независимо.*

Доказательство. Каждый вектор x_i является собственным для $A\bar{A}$ и ему соответствует собственное значение $|\lambda_i|^2$. Векторы $x_1, \ldots, x_k$ линейно независимы в силу теоремы 15.3.8 как собственные векторы матрицы $A\bar{A}$ *А,* соответствующие различным (по предположению) собственным значениям $|\lambda_1|^2, \ldots, |\lambda_k|^2$.

Это предложение вместе с предыдущим позволяет оценить снизу число линейно независимых псевдособственных векторов заданной матрицы и приводит к достаточному условию псевдодиагонализации, аналогичному известному достаточному условию диагонализации. Более общее условие мы дадим в теореме 18.6.11.

18.6.8. Следствие. *Пусть задана матрица* $A \in M_n$. *Если существуют k различных неотрицательных собственных значений произведения* $A\bar{A}$, *то матрица А имеет по крайней мере k линейно независимых псевдособственных векторов. При k=n матрица А псевдодиагонализуема. При k = 0 матрица А вообще не имеет псевдособственных векторов.*

Эти границы числа линейно независимых векторов точны, Положим $A = J_n(1)$, где

$$J_n(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & 0 \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} \in M_n$$

— элементарный жорданов блок. Тогда произведение $A\bar{A} = J_n^2(1)$ имеет единственное неотрицательное собственное значение, равное единице. Легко видеть, что уравнение $A\bar{x} = x$ для псевдособственного вектора допускает только вещественные решения. Тогда каждый псевдособственный вектор является также собственным, а собственное подпространство будет одномерным. Образуя прямую сумму элементарных жордановых блоков, можно, таким образом, получать примеры матриц $A \in M_n$ с любым заданным числом k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ линейно независимых псевдособственных векторов, причем произведение $A\bar{A}$ будет иметь точно k различных неотрицательных собственных значений.

Наша цель — найти простое условие псевдодийгонализуемости произвольной заданной матрицы. В качестве первого шага докажем лемму, мотивированную следующим фактом. Если даннаяматрица $A \in M_n$ псевдоподобна скалярной матрице, то

$$A = S(\lambda I)\bar{S}^{-1} = \lambda S\bar{S}^{-1}, \quad A\bar{A} = \lambda S\bar{S}^{-1}\bar{\lambda}\bar{S}S^{-1} = |\lambda|^2 I.$$

Матрицы с таким свойством (что произведение $A\bar{A}$—скалярная матрица) будут теми кирпичиками, из которых мы построим псевдодиагонализуемые матрицы.

18.6.9. Лемма. *Матрица $A \in M_n$ удовлетворяет равенству $A\bar{A} = I$ тогда и только тогда, когда существует невырожденная матрица $S \in M_n$, такая, что $A = S\bar{S}^{-1}$.*

Доказательство. Необходимость данного условия уже была установлена ранее. Чтобы доказать достаточность, положим $S_\theta \equiv e^{i\theta}A + e^{-i\theta}I$, где $\theta \in \mathbf{R}$ произвольно, и заметим, что

$$A\bar{S}_\theta = A(e^{-i\theta}\bar{A} + e^{i\theta}I) = e^{-i\theta}A\bar{A} + e^{i\theta}A = e^{i\theta}A + e^{-i\theta}I = S_\theta. \quad (18.6.10)$$

Число собственных значений матрицы A конечно, поэтому существует $\theta_0 \in \mathbf{R}$, при котором величина $-e^{2i\theta_0}$ не является собственным значением матрицы A. Выбирая $\theta = \theta_0$, заключаем, что матрица

$$S_{\theta_0} = e^{i\theta_0}(A + e^{-2i\theta_0}I)$$

невырожденна и $A = S_{\theta_0}\bar{S}_{\theta_0}^{-1}$ в силу (18.6.10).

Теперь мы готовы установить необходимое и достаточное условие псевдодиагонализуемости.

18.6.11. Теорема. *Пусть $A \in M_n$. Тогда невырожденная матрица $S \in M_n$ и диагональная матрица $\Lambda \in M_n$, такие, что $A = S\Lambda\bar{S}^{-1}$, существуют в том и только в том случае, когда матрица $A\bar{A}$ диагонализуема, все ее собственные значения неотрицательны и* $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A\bar{A}$.

Доказательство. Необходимость указанных условий не вызывает сомнений, поскольку

$$A\bar{A} = S\Lambda\bar{S}^{-1}\overline{S\Lambda}S^{-1} = S|\Lambda|^2 S^{-1}$$

и ранг каждой из матриц $A\bar{A}$ и A совпадает с числом ненулевых диагональных элементов в Λ. Обратно, если матрица $A\bar{A}$ диагонализуема и ее собственные значения неотрицательны, то найдутся невырожденная матрица $S \in M_n$ и неотрицательная диагональная матрица $\Lambda \in M_n$, такие, что $A\bar{A} = S\Lambda S^{-1}$. Не теряя общности, предположим, что равные между собой диагональные элементы в Λ сгруппированы вместе, т. е.

$$\Lambda = \lambda_1 I_{n_1} \oplus \lambda_2 I_{n_2} \oplus \ldots \oplus \lambda_k I_{n_k},$$

где $I_{n_i} \in M_{n_i}$ и $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \ldots > \lambda_k \geqslant 0$. Тогда

$$S^{-1}A\bar{A}S = S^{-1}A\bar{S}\bar{S}^{-1}\bar{A}S = (S^{-1}A\bar{S})\,\overline{(S^{-1}A\bar{S})} = \Lambda.$$

Если положить $B = S^{-1}A\bar{S}$, то достаточно будет показать (поскольку псевдоподобие есть отношение эквивалентности), что матрица B псевдодиагонализуема при $B\bar{B} = \Lambda$. В силу вещественности Λ имеем $\Lambda = \bar{\Lambda} = \overline{(B\bar{B})} = \bar{B}B = B\bar{B}$, т. е. матрицы B и $\bar{B}$ коммутируют. Тогда $B\Lambda = B(B\bar{B}) = BB\bar{B} = (B\bar{B})B = \Lambda B$, т. е. матрицы B и Λ также коммутируют. Запишем матрицу B в блочном виде:

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1k} \\ \vdots & B_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ B_{k1} & \ldots & & B_{kk} \end{bmatrix}.$$

Размеры блоков здесь согласованы с размерами блоков в матрице

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k I_{n_k} \end{bmatrix}, \quad I_{n_i} \in M_{n_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Равенство $B\Lambda = \Lambda B$ на языке блоков означает, что $\lambda_i B_{ij} = \lambda_j B_{ij}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$. Поскольку $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, приходим к заключению, что $B_{ij} = 0$ при $i \neq j$, т. е. матрица B блочно-диагональная:

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_{kk} \end{bmatrix},$$

и размеры диагональных блоков совпадают с размерами соответствующих блоков в Λ. Равенство $B\bar{B} = \Lambda$ означает, что $B_{ii}\bar{B}_{ii} = \lambda_i I$ для $i = 1, 2, \ldots, k$. Отметим невырожденность блока

B_{ll} при $\lambda_l > 0$. Если $\lambda_l > 0$, то последнее равенство записывается в виде

$$\left[\frac{1}{\sqrt{\lambda_l}} B_{ll}\right]\left[\overline{\frac{1}{\sqrt{\lambda_l}} B_{ll}}\right] = I_{n_l}.$$

Применяя лемму 18.6.9, убеждаемся в существовании невырожденной матрицы

$$S_l \in M_{n_l},$$

такой, что $B_{ll} = S_l\left(\sqrt{\lambda_l}\, I_{n_l}\right)\bar{S}_l^{-1}$. Если $\lambda_k = 0$, то

$\operatorname{rank} B_{11} + \operatorname{rank} B_{22} + \ \ldots\ + \operatorname{rank} B_{kk} =$

$$= \operatorname{rank} B = \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A\bar{A} = \operatorname{rank} \Lambda = n_1 + n_2 + \ \ldots\ + n_{k-1}.$$

Отсюда видно, что $\operatorname{rank} B_{kk} = 0$, т. е. при $\lambda_k = 0$ блок B_{kk} нулевой. В этом случае можно записать $0 = B_{kk} = S_k\left(\sqrt{\lambda_k}\, I\right)\bar{S}_k^{-1}$, где $S_k \in M_{n_k}$— произвольная невырожденная матрица. Положим $S = S_1 \oplus \ldots \oplus S_k$. Поскольку мы уже рассмотрели всевозможные случаи, приходим к искомому разложению

$$B = S\left(\sqrt{\lambda_1}\, I_{n_1} \oplus \ldots \oplus \sqrt{\lambda_k}\, I_{n_k}\right)\bar{S}^{-1}.$$

Необходимые и достаточные условия псевдодиагонализуемости можно применить в случае III(b) теоремы 18.5.15, что приводит к следующему утверждению. Пусть заданы матрицы $A, B \in M_n$, причем *A* эрмитова, *B* симметрична и одна из этих матриц невырожденна. Положим $C = A^{-1}B$ либо $C = B^{-1}A$ в зависимости от того, какая из матриц вырожденная. Тогда невырожденная матрица $S \in M_n$, такая, что матрицы SAS^* и SBS^T диагональны, существует в том и только в том случае, когда матрица $C\bar{C}$ диагонализуема, все ее собственные значения неотрицательны и $\operatorname{rank} C = \operatorname{rank} C\bar{C}$.

Частный случай комплексной симметричной матрицы *A* легко укладывается в рамки теоремы о псевдодиагонализации. В самом деле, произведение $A\bar{A} = AA^*$ в этом случае эрмитово и, следовательно, диагонализуемо. Далее $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} AA^*$ для любой матрицы $A \in M_n$, т. е. для комплексной симметричной матрицы *A* все условия теоремы 18.6.11 выполнены. Тогда из этой теоремы следует, что каждая комплексная симметричная матрица псевдодиагонализуема. Однако здесь не отражается непосредственно тот факт, что псевдодиагонализация такой матрицы может осуществляться унитарным преобразованием. См. задачу 22 в конце настоящего параграфа.

Эти замечания помогают с другой точки зрения рассмотреть разложение Такаги (следствие 18.4.4) комплексной симметричной матрицы и приведение к треугольному виду посредством преобразования унитарной конгруэнтности в теореме 18.4.3. Теорема 18.4.3 гласит, что каждая матрица $A \in M_n$, такая, что все собственные значения произведения $A\bar{A}$ неотрицательны, допускает приведение к треугольному виду унитарным псевдоподобием. Результат Такаги состоит в том, что каждая комплексная симметричная матрица унитарно псевдодиагонализуема.

Среди псевдособственных значений бессмысленно выделять «вещественные» и «невещественные» (поскольку вместе с псевдособственным значением λ псевдособственнымн значениями являются все комплексные чилса того же модуля $|\lambda|$.), поэтому не различаются понятия «унитарная псевдодиагонализуемость с вещественными (или положительными) псевдособственными значениями» и «унитарная псевдодиагонализуемость с комплексными псевдособственными значениями», которые могли бы быть аналогами соответственно понятий эрмитовости (или положительной определенности) и нормальности. Таким образом, комплексные симметричные матрицы можно считать аналогом (для псевдоподобия) всего класса нормальных матриц (для обычного подобия), и разложение Такаги можно рассматривать как аналог спектрального разложения нормальных матриц в теореме 2.5.4(a,b).

Теория обычного подобия возникла в результате исследования линейных преобразований в различных базисах. Понятие псевдоподобия аналогичным образом связано с полулинейными преобразованиями. Полулинейное преобразование *T* есть отображение $T\colon V \to W$ одного комплексного векторного пространства в другое, которое является аддитивным (т. е. $T(x+y) = Tx + Ty$ для всех векторов $x, y \in V$) и сопряженно-однородным (т. е. $T(ax) = \bar{a}T(x)$ для всех $a \in \mathbf{C}$ и всех $x \in V$; это свойство иногда называют антиоднородностью). Такие преобразования возникают в квантовой механике при изучении эффектов обращения времени.

Класс псевдодиагонализуемых матриц достаточно обширен. В него входят все вещественные диагонализуемые матрицы с вещественными собственными значениями, все (вещественные и комплексные) симметричные матрицы и все матрицы вида H^2S, где H эрмитова, а S симметрична (см. задачи 10 и 11 в конце параграфа). Последнее наблюдение лежит в основе доказательства второго утверждения в следствии 18.6.12. *Положительно определенная матрица* $A \in M_n$ есть невырожденная эрмитова матрица, подчиненная условию (из этого условия на самом деле вытекает эрмитовость матрицы) $x^*Ax > 0$ для всех ненулевых векторов $x \in \mathbf{C}^n$. Это эквивалентно условию, что эрмитова матрица A обладает положительным спектром, либо что $A = H^2$ с некоторой невырожденной эрмитовой матрицей H (см. модуль 21).

18.6.12. Следствие. *Пусть $A, B \in M_n$, причем матрица A эрмитова и положительно определена.*

(a) *Если B эрмитова, то существует невырожденная матрица $S \in M_n$, при которой $SAS^* = I$ и SBS^* — вещественная диагональная матрица.*

(b) *Если B симметрична, то существует невырожденная матрица $S \in M_n$, при которой $SAS^* = I$ и SBS^T — вещественная диагональная с неотрицательными элементами.*

Доказательство. Пусть $A = H^2$, где $H \in M_n$ — невырожденная эрмитова матрица.

(a) Положим $C \equiv A^{-1}B = H^{-2}B$; тогда C подобна матрице $HCH^{-1} = H(H^{-2}B)H^{-1} = H^{-1}BH^{-1}$, которая является эрмитовой и, следовательно, диагонализуемой с вещественным спектром. Это означает, что матрица C обязана быть также диагонализуемой и обладать вещественным спектром. Тогда матрицы A и B одновременно диагонализуемы посредством преобразования эрмитовой конгруэнтности по теореме 18.6.15, случай I(b) (2). Если $H^{-1}BH^{-1} = U\Lambda U^*$ с унитарной матрицей U и диагональной матрицей Λ, то невырожденная матрица $S = U^*H^{-1}$ обеспечит справедливость равенств $SAS^* = I$, $SBS^* = \Lambda$.

(b) Положим $C \equiv A^{-1}B = H^{-2}B$; тогда матрица $C\bar{C} = H^{-2}B\bar{H}^{-2}\bar{B}$ подобна матрице

$$H(C\bar{C})H^{-1} = H^{-1}B\bar{H}^{-2}\bar{B}H^{-1} = (H^{-1}B\bar{H}^{-1})(H^{-1}B\bar{H}^{-1})^*,$$

которая является эрмитовой и положительно полуопределенной (положительная полуопределенность матрицы $A \in M_n$ определяется условием $x^*Ax \geqslant 0$ для всех векторов $x \in \mathbf{C}^n$) и, следовательно, диагонализуемой с неотрицательным спектром. Однако

$$\operatorname{rank}(C\bar{C}) = \operatorname{rank}(H^{-1}B\bar{H}^{-1})(H^{-1}B\bar{H}^{-1})^* = \operatorname{rank}(H^{-1}B\bar{H}^{-1})$$

в силу 14.4.6 (d) и

$$\operatorname{rank}(H^{-1}B\bar{H}^{-1}) = \operatorname{rank}(H^{-2}B) = \operatorname{rank} C$$

в силу 14.4.6(b). Поэтому из теоремы 18.6.11 вытекает выполнение условия случая III(b)(1) теоремы 18.5.15. Таким образом, существует невырожденная матрица $S \in M_n$, такая, что матрицы SAS^* и SBS^T диагональны. Отметим симметричность матрицы

$HC\,(H^{-1})^T = H\,(H^{-2}B)\,(H^{-1})^T = H^{-1}B\,(H^{-1})^T$; тогда по следствию 18.4.4 существуют унитарная матрица U и неотрицательная диагональная матрица Σ, такие, что $H^{-1}B\,(H^{-1})^T = U\Sigma U^T$, откуда

$$(U^*H^{-1})\,B\,(U^*H^{-1})^T = \Sigma.$$

Полагая $S = U^*H^{-1}$, приходим также к равенству $SAS^* = I$.

Мы рассмотрели приведение псевдоподобием к диагональному виду, однако не каждая матрица псевдодиагонализуема и естественно задаться вопросом о некоторой простой форме, к которой можно было бы свести псевдоподобием произвольную матрицу. Такая нормальная форма по отношению к псевдоподобию существует, и ее роль аналогична той, которую играет жорданова форма по отношению к обычному подобию. Привлекая эту форму, можно для каждой матрицы $A \in M_n$ доказать такие утверждения: матрицы A, $\bar{A}$, A^* и A^T псевдоподобны (ср. с утверждением разд. 17.2.3); матрица A псевдоподобна некоторой эрмитовой матрице (ср. с теоремой 18.4.9) и некоторой вещественной матрице; существуют невырожденные симметричные матрицы $S_1, S_2 \in M_n$ и эрмитовы матрицы $H_1, H_2 \in M_n$, такие, что $A = S_1H_1 = H_2S_2$ (ср. со следствием 18.4.11). На самом деле вопрос установления псевдоподобия допускает решение в более привычных понятиях: две матрицы $A, B \in M_n$ псевдоподобны тогда и только тогда, когда (a) матрицы $A\bar{A}$ и $B\bar{B}$ подобны и (b)

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B,\ \operatorname{rank} A\bar{A} = \operatorname{rank} B\bar{B},\ \operatorname{rank} A\bar{A}A = \operatorname{rank} B\bar{B}B, \ldots$$

и так далее для всех n таких произведений с не более чем n чередующимися сомножителями.

<u>Микромодуль 53</u>
Индивидуальные тестовые задания

Задачи к п. 18.4

1. Пусть матрица $A \in M_n$ симметрична и $A = B + iC$, где обе матрицы $B, C \in M_n$ вещественны. Показать, что матрица A нормальна тогда и только тогда, когда матрицы B и C коммутируют, а также тогда и только тогда, когда матрица $A\bar{A}$ вещественна, и тогда и только тогда, когда матрицы A и $\bar{A}$ коммутируют. Привести пример симметричной матрицы, не являющейся нормальной.

2. Восполнить детали в следующем наброске другого доказательства следствия 18.4.4. Используются обозначения и предположения этого следствия. Если матрица A вырожденна, обозначим через $\{u_1, \ldots, u_k\}$ ортонормированный базис ее нуль-пространства и выберем унитарную матрицу

$$U = [u_1 \ \ldots \ u_k u_{k+1} \ \ldots \ u_n] \in M_n.$$

Тогда

$$U^T A U = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A' \end{bmatrix}, \qquad A' \in M_{n-k},$$

где A' — невырожденная и симметричная матрица. Таким образом, без потери общности можно предположить невырожденность матрицы A. Пусть в разложении $A = B + iC$ матрицы B и C вещественны, и пусть задан вектор $z = x + iy \in \mathbf{C}^n$, где $x, y \in \mathbf{R}^n$. Положим $F = \begin{bmatrix} B & C \\ C & -B \end{bmatrix}$, $\tilde{z} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} \in R^{2n}$.

(a) B, C и F — вещественные симметричные матрицы. Установить связь между векторами $Az = (B + iC)(x + iy)$ и $F\tilde{z}$.

(b) Матрица F невырожденна. *Указание.* Если $F\tilde{z} = 0$, то чему равен вектор Az?

(c) Если $F\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$, то $F\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = -\lambda \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$. Тем самым ненулевые собственные значения матрицы F можно объединить в пары: в каждой паре будут числа, равные по абсолютной величине, но с противоположными знаками.

(d) Ортонормированные собственные векторы матрицы F, отвечающие положительным собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, обозначим через $\tilde{z}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ -y_i \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и введем в рассмотрение матрицы $X = [x_1 \ \ldots \ x_n]$, $Y = [y_1 \ \ldots \ y_n]$, $\Sigma = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in M_n$. По спектральной теореме для вещественных симметричных матриц $F = V \Lambda V^T$, где $V = \begin{bmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{bmatrix}$, $\Lambda = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & -\Sigma \end{bmatrix}$, причем V — вещественная ортогональная матрица (почему?). Положим $U = X - iY$. Убедиться, что матрица U унитарна и что $U \Sigma U^T = A$.

3. Что утверждается в следствии 18.4.4 для вещественной симметричной матрицы A? Как это утверждение соотносится с обычной спектральной теоремой для вещественной симметричной матрицы? *Указание.* Пусть $A = Q \Lambda Q^T$, где Λ — вещественная диагональная матрица и Q — вещественная ортогональная матрица.

Запишем $\Lambda = \Sigma D^2$, и пусть $U = QD$. В каком случае все сомножители в разложении Такаги $A = U\Sigma U^T$ можно считать вещественными?

4. Пусть $A = U\Sigma U^T \in M_n$, где матрицы U и Σ подчинены требованиям следствия 18.4.4. Проверить прямыми вычислениями, что числа σ_i^2 (квадраты диагональных элементов матрицы Σ) являются собственными значениями матриц $A\bar{A}$ и $\bar{A}A$ и что эти матрицы эрмитовы. Показать, что столбцы u_i матрицы U и числа σ_i удовлетворяют условиям $A\bar{u}_i = \sigma_i u_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Вероятно, в связи с последним фактом величины σ_i иногда называют *обобщенными собственными значениями,* однако термин *сингулярные числа,* по-видимому, употребляется чаще.

5. Пусть матрица $A \in M_n$ симметрична, задано разложение с матрицами Σ и U, как в следствии 18.4.4, и сингулярные числа σ_i упорядочены по возрастанию: $0 \leqslant \sigma_1 \leqslant \sigma_2 \leqslant \ldots \leqslant \sigma_n$.

(a) Модифицируя доказательство теоремы Рэлея—Ритца 18.2.2, установить справедливость равенства

$$\sigma_{\max} = \sigma_n = \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \in \mathbb{C}^n}} \frac{|x^T A x|}{x^* x},$$

которое является комплексным симметричным аналогом оценки сверху в теореме 18.2.2. Привлекая к рассмотрению первый столбец матрицы U, убедиться в том, что максимум здесь достигается на некотором ненулевом векторе x, удовлетворяющем условию $A\bar{x} = \sigma_n x$.

(b) Взяв матрицу

$$A = I \in M_2$$

и вектор $x = [1 \quad i]^T$, проверить, что в общем случае

$$\sigma_{\min} = \sigma_1 \neq \min_{x \neq 0,\, x \in \mathbb{C}^n} \frac{|x^T A x|}{x^* x},$$

т. е. нижняя граница в теореме 18.2.2 не имеет комплексного симметричного аналога.

(c) Показать, что при $A = I \in M_2$ и $w = [1\ i]^T$ верно равенство

$$\max_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp w \\ x \in \mathbb{C}^n}} \frac{|x^T A x|}{x^* x} = 0.$$

Вывести отсюда заключение, что для сингулярных чисел комплексных симметричных матриц при $k>1$ отсутствует аналог принципа минимакса Куранта — Фишера (18.2.12).

(d) Что можно сказать о симметричном аналоге формулы (18.2.13) для максимина?

(e) Пусть из матрицы $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$ с сингулярными числами $\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_2 = \sqrt{2}$ образована путем вычеркивания последних строки и столбца матрица A=[1] с сингулярным числом σ_1 = 1. По аналогии с (18.3.9) можно выписать неравенства разделения $\tilde{\sigma}_1 \leqslant \sigma_1 \leqslant \tilde{\sigma}_2$, однако здесь они теряют силу. Таким образом, теорема 18.4.8 не переносится на сингулярные числа комплексных симметричных матриц.

(f) Сингулярные числа окаймленной симметричной матрицы все же можно оценить. Пусть из матрицы $\tilde{A} \in M_{n+1}$ с сингулярными числами $\tilde{\sigma}_1 \leqslant \ldots \leqslant \tilde{\sigma}_{n+1}$ матрица $A \in M_n$ с сингулярными числами $\sigma_1 \leqslant \ldots \leqslant \sigma_n$ получена исключением строки и соответствующего столбца. Используя теорему 21.3.9, доказать, что

$\tilde{\sigma}_{n+1} \geqslant \sigma_n \geqslant \tilde{\sigma}_{n-1}, \tilde{\sigma}_n \geqslant \sigma_{n-1} \geqslant \tilde{\sigma}_{n-2}, \ldots, \tilde{\sigma}_3 \geqslant \sigma_2 \geqslant \tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2 \geqslant \sigma_1 \geqslant$ $\geqslant 0$. Проверить последнее из этих неравенств для примера из (e). Сопоставить эти соотношения с неравенствами разделения (18.3.9) для собственных значений окаймленной эрмитовой матрицы.

6. Пусть матрица $A \in M_n$ симметрична и задано разложение $A = U\Sigma U^T$ с унитарной матрицей U и диагональной матрицей $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, где все числа σ_i больше или равны 0. Показать, что rank A равен числу ненулевых значений σ_i. *Указание.* Если матрицы B, $C \in M_n$ невырожденны, то rank A= rank BAC.

7. Пусть $A = B + iC \in M_n$, где матрицы B, C вещественны, и $F = \begin{bmatrix} B & C \\ C & -B \end{bmatrix} \in M_{2n}$.

(a) Показать, что $\bar{A}A = B^2 + C^2 + i(BC - CB)$ и

$$F^2 = \begin{bmatrix} B^2 + C^2 & BC - CB \\ -(BC - CB) & B^2 + C^2 \end{bmatrix}.$$

(b) Показать, что матрица $S = (1/\sqrt{2})\begin{bmatrix} I & -iI \\ -iI & I \end{bmatrix}$ унитарна.

(c) Установить равенство

$SF^2S^* = \begin{bmatrix} A\bar{A} & 0 \\ 0 & \bar{A}A \end{bmatrix}$.

(d) Вывести заключение, что множество квадратов собственных значений матрицы F составлено из собственных значений матрицы $\bar{A}A$, повторенных дважды.

(e) Доказать для случая комплексной симметричной матрицы *A*, что матрица *F* вещественная симметричная с вещественными собственными значениями, что все собственные значения матрицы F^2 неотрицательны и что множество квадратов собственных значений матрицы *F* совпадает с множеством собственных значений эрмитовой матрицы $\bar{A}A$.

8. Пусть задана комплексная симметричная матрица $A \in M_n$ и рассматриваются связанные с ней квадратичная форма $q_A(x, x) = x^T A x$ и билинейная форма $b_A(x, y) = x^T A y$. Привлекая следствие 18.4.4, установить равенства

$$\sup_{x^*x=1} |q_A(x, x)| = \sup_{\substack{x^*x=1 \\ y^*y=1}} |b_A(x, y)| = \sigma_{\max}(A),$$

где $\sigma_{\max}(A)$ — наибольшее сингулярное число матрицы *A* (равное арифметическому квадратному корню из наибольшего собственного числа матрицы $\bar{A}A$).

9. Доказать следующие два утверждения, сформулированные в обозначениях доказательства теоремы 18.4.3.

(i) В случае простого собственного значения λ матрицы $A\bar{A}$ всегда осуществляется вариант (а) доказательства теоремы 18.4.3. *Указание.* Пусть вектор $x \neq 0$ удовлетворяет условию $A\bar{A}x = \lambda x$, и пусть $\sigma = +\sqrt{\lambda}$ и $w = A\bar{x} - \sigma x$. Установить равенства $A\bar{w} = -\sigma w$, $A\bar{A}w = \lambda w$, означающие, что вектор *w* отличается от *x* лишь скалярным множителем.

(ii) Если $A = A^T$, то $\bar{V}_1^T A \bar{V}_1 = [\sigma] \oplus A_2$, т. е. вектор-строка *w* в варианте (а) доказательства теоремы 18.4.3 нулевая. Основываясь на этом факте, доказать, что матрица $\bar{V}_{n-1}^T \ldots \bar{V}_1^T A \bar{V}_1 \bar{V}_2 \ldots$
$\ldots \bar{V}_{n-1} = U^* A \bar{U} = \Delta$ автоматически оказывается диагональной.

10. Пусть для матрицы $A \in M_n$ существует такая невырожденная матрица $S \in M_n$, что $A = S\Lambda\bar{S}^{-1}$, где $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Убедиться, что матрица $A\bar{A}$ диагонализуема, все ее собственные значения неотрицательны и $\mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}\, A\bar{A}$. Какое отношение это имеет к следствию 18.4.4? Проверить, что ни одна из матриц $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ не может быть записана в указанной форме.

11. Пусть задана матрица $S \in M_n$. Установить справедливость неравенства $\mathrm{rank}\, S^T S \leqslant \mathrm{rank}\, S$ и удостовериться, что оно может быть строгим: $\mathrm{rank}\, S^T S < \mathrm{rank}\, S$. Что будет в случае вещественной матрицы *S*? *Указание.* Для примера взять матрицу

$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 0 \end{bmatrix}$.

12. Показать, что собственные векторы $x,\ y \in \mathbf{C}^n$ комплексной симметричной матрицы $A \in M_n$, отвечающие различным собственным значениям, удовлетворяют соотношению $x^T y = 0$. Означает ли это ортогональность векторов *x* и *y*? *Указание.* Привлечь равенство $x^T(Ay) = (Ax)^T y$.

13. Дать прямое доказательство того, что симметричная матрица $A \in M_n$ с *n* различными собственными значениями допускает разложение вида $A = SDS^T$ с невырожденной матрицей $S \in M_n$ и диагональной матрицей *D*. *Указание.* Матрица *A* приводится к диагональной $\Lambda = SAS^{-1}$. В силу утверждения задачи 12 матрица $(S^{-1})^T S^{-1}$ также диагональна, а тогда и произведение $(S^{-1})^T AS^{-1} = (S^{-1})^T S^{-1}\Lambda = D$ — диагональная матрица н $A = SDS^T$. Провести дополнительные рассуждения, показывающие, что имеет место разложение типа $A = Q\Lambda Q^T$ с комплексной ортогональной матрицей *Q*.

14. Убедиться, что для симметричной невырожденной матрицы $A \in M_n$ обратная к ней A^{-1} также симметрична.

15. Вещественная симметричная матрица эрмитова и, следовательно, диагонализуема. Показать, что комплексная симметричная матрица может не быть диагонализуемой. *Указание.* Рассмотреть матрицу $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}$ и вычислить A^2.

16. Пусть $A \in M_n$. Доказать, что матрица *A* одновременно симметрична и унитарна тогда и только тогда, когда она допускает разложение вида $A = Q\Lambda Q^T$, в котором $Q \in M_n(\mathbf{R})$— вещественная ортогональная матрица и

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \operatorname{diag}\left(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}\right),$$

где $|\lambda_k| = 1$ и $\theta_k \in \mathbf{R}$ при $k = 1, 2, \ldots, n$.

17. Применяя результат задачи 16, доказать, что матрица $U \in M_n$ одновременно унитарна и симметрична тогда и только тогда, когда $U = VV^T$ с некоторой унитарной матрицей $V \in M_n$.

18. Мы доказали ранее, что каждая матрица $A \in M_n$ подобна некоторой симметричной. Подобна ли каждая матрица некоторой эрмитовой? Нормальной?

19. Опираясь на теорему 18.4.9, установить, что каждая матрица подобна своей транспонированной.

20. Убедиться, что теорема 18.4.9 неверна в случае поля вещественных чисел, т. е. не каждая вещественная матрица $A \in M_n(\mathbf{R})$ подобна некоторой вещественной симметричной матрице.
21. Собственный вектор *v* комплексной симметричной матрицы *A* может быть изотропным, т. е. подчиняться условию $v^T v = 0.$ Пусть $Av = \lambda v,\ v \neq 0,\ v^T v = 0$ и матрица *A* диагонализуема. Показать, что собственное значение λ не может быть простым. *Указание.* Записать разложение $A = S\Lambda S^{-1}$, где первый столбец матрицы *S* есть вектор *v*. Заключить, что матрица $S^T S$ вырожденна, поскольку ее первая строка содержит только нули. В частности, если $v \in \mathbf{C}^n$ — произвольный ненулевой вектор, подчиненный условию $v^T v = 0$, то симметричная матрица (ранга 1) $A = vv^T$ не приводима к диагональному виду. См. задачу 15.
22. Заново доказать следствие 18.4.4, развивая следующие идеи (по существу это набросок доказательства Зигеля (1943 г.)). Здесь сохранены обозначения и предположения следствия 18.4.4.

(a) Матрица $A\bar{A}$ эрмитова, поэтому существуют унитарная матрица $V \in M_n$ и вещественная диагональная матрица $\Lambda \in M_n$, при которых $A\bar{A} = V\Lambda V^*$.

(b) Матрица $V^* A \bar{V} \equiv B$ одновременно симметрична и нормальна; тогда в силу теоремы 18.4.7 найдутся вещественная ортогональная матрица $Q \in M_n(\mathbf{R})$ и диагональная матрица $\Lambda \in M_n$, такие, что $B = Q\Lambda Q^T$.

(c) $A = (VQ)\,\Lambda\,(VQ)^T$.

Теперь представление $\Lambda = E\Sigma E^T$, где матрицы *E*, Σ диагональны и Σ неотрицательна, приводит к равенству $A = U\Sigma U^T$, в котором матрица $U = VQE$ унитарна.
23. Пусть $z = [z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n]^T$ — вектор с *n* комплексными компонентами и *f*(*z*) — комплекснозначная аналитическая функция, заданная в некоторой области $D \subset \mathbf{C}^n$. Вследствие равенства смешанных частных производных матрица $H = [\partial^2 f/\partial z_i \partial z_j]$ симметрична в каждой точке $z \in D$. В обсуждении примера 18.0.3 показано, что матрицу $A = [a_{ij}]$ коэффициентов в линейном дифференциальном операторе с частными производными общего вида

$$Lf = \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(z)\,\frac{\partial^2 f}{\partial z_i\,\partial z_j}$$

можно считать симметричной. Убедиться, что для каждой точки $z_0 \in D$ существует унитарная замена переменных $z \to U\zeta$, после которой оператор Lf записывается в точке z_0 в диагональной форме, т. е.

$$Lf = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta_i^2}, \qquad \sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_n \geqslant 0 \quad \text{при} \quad z = z_0.$$

24. Применяя теорему 18.4.13 и используя индукцию по образцу доказательства теоремы 15.3.19, установить справедливость следующего аналога теоремы 18.1.6 об одновременной унитарной диагонализации семейства эрмитовых матриц. Пусть задано семейство $\mathcal{F} \subset M_n$ диагонализуемых симметричных матриц. Необходимым и достаточным условием существования комплексной ортогональной матрицы Q, такой, что QAQ^T диагональна для каждой матрицы $A \in \mathcal{F}$, является коммутативность семейства матриц $\mathcal{F}$.

25. Привлекая рассуждения доказательства теоремы 18.4.7, убедиться, что матрица $A \in M_n$ одновременно кососимметрична (A=-A^T) и нормальна тогда и только тогда, когда существует вещественная ортогональная матрица $Q \in M_n(\mathbf{R})$, для которой

$$Q^TAQ = 0 \oplus 0 \oplus \ldots \oplus 0 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_k,$$

где каждая матрица $A_j \in M_2$ имеет вид

$$A_j = \begin{bmatrix} 0 & z_j \\ -z_j & 0 \end{bmatrix}, \qquad z_j \in \mathbf{C}, \; j = 1, 2, \ldots, k. \quad (18.4.14).$$

Указание. Рассмотреть вещественную и мнимую части матрицы A и применить теорему 16.5.15. Когда в указанной прямой сумме отсутствуют нулевые 1×1-слагаемые?

26. При помощи рассуждений из задач 22 и 25 обосновать кососимметричный аналог разложения Такаги комплексной симметричной матрицы из следствия 18.4.4: матрица $A \in M_n$ кососимметрична $(A = -A^T)$ в том и только в том случае, когда существует унитарная матрица $U \in M_n$, такая, что

$$A = U(0 \oplus \ldots \oplus 0 \oplus A_1 \oplus \ldots \oplus A_k)U^T,$$

где каждая матрица $A_j \in M_2$ имеет вид (18.4.14). Вывести, в частности, заключение о четности ранга произвольной кососимметрйчной матрицы.

27. Пусть задана унитарная матрица $W \in M_n$. Доказать существование такой унитарной матрицы $V \in M_n$, что $V^2 = W$ и $V^TA = AV$, какова бы ни была матрица $A \in M_n$, подчиненная условию $W^TA = AW$. *Указание.* Пусть $W = U\Lambda U^*$, где

U — унитарная матрица, и $\Lambda = \operatorname{diag}(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n})$, $0 \leqslant \theta_i < 2\pi$. Рассмотреть квадратный корень

$$\Lambda^{1/2} = \operatorname{diag}(e^{i\theta_1/2}, \ldots, e^{i\theta_n/2})$$

и положить $V \equiv U\Lambda^{1/2}U^*$. Убедиться, что равенство $W^TA = AW$ имеет место в том и только в том случае, когда матрицы Λ и U^TAU коммутируют. Далее использовать аргументы из доказательства теоремы 15.3.12 или показать, что матрица V является многочленом от W. Вывести отсюда, что матрицы $\Lambda^{1/2}$ и U^TAU коммутируют и, следовательно, $V^TA = AV$.

28. Дать еще одно подробное доказательство следствия 18.4.4, руководствуясь приведенным ниже наброском доказательства Хуа (1944 г.). Обозначения и предположения следствия 18.4.4 сохраняются. Пусть матрица A невырожденна.

(a) Матрица $A\bar{A}$ эрмитова и положительно определена $(x^*A\bar{A}x = (\bar{A}x)^*(\bar{A}x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathbf{C}^n)$, следовательно, найдутся унитарная матрица $Z \in M_n$ и положительная диагональная матрица $\Sigma \in M_n$ для которых $A\bar{A} = Z\Sigma^2Z^*$.

(b) Матрица $W \equiv \Sigma^{-1}Z^*A\bar{Z}$ унитарна, а ΣW симметрична, поэтому $\Sigma W = W^T\Sigma$.

(c) Используя результат задачи 27, доказать существование унитарной матрицы $V \in M_n$, подчиненной соотношениям $V^2 = W$ и $\Sigma V = V^T\Sigma$.

(d) В силу равенств $Z^*A\bar{Z} = \Sigma W = \Sigma V^2 = (\Sigma V)V = V^T\Sigma V$ справедливо представление $A = (ZV^T)\Sigma(ZV^T)^T$. Положить $U = Z\bar{V}^T$.

(e) В случае вырожденной матрицы A перейти к невырожденной, привлекая рассуждения из задачи 2

Задачи к п. 18.5

1. Пусть $A, B \in M_n$ и матрица B невырожденна. Доказать существование такой матрицы $C \in M_n$, что $A = BC$. Кроме того, для каждой невырожденной матрицы $S \in M_n$ справедливо равенство $SAS^* = (SBS^*)C'$, в котором матрица C' подобна C.

Единственная нетривиальная часть доказательства закона инерции Сильвестра (теорема 18.5.8) — проверка того, что конгруэнтность $n \times n$-матриц инерции D_1, D_2 (см. (18.5.7)) влечет за собой совпадение количества положительных диагональных элементов. Приведенные выше в тексте рассуждения основаны на следствии теоремы Куранта — Фишера. Провести подробное доказательство, руководствуясь следующими соображениями. Пусть $D_2 = S^*D_1S$ и матрица D_1

содержит ровно *s* положительных диагональных элементов и по крайней мере один отрицательный. Предположим, что положительны первые *s* диагональных элементов матрицы D_1 и первые *t* диагональных элементов матрицы D_2 и $1 \leqslant s,\ t < n$. Показать, что если $s<t$, то найдется ненулевой вектор $x = [x_i] \in \mathbf{C}^n$, подчиненный условиям

$$x_{t+1} = x_{t+2} = \ldots = x_n = 0, \quad (Sx)_1 = (Sx)_2 = \ldots = (Sx)_s = 0.$$

Затем установить неравенства

$$x^* D_2 x > 0 \text{ и } (Sx)^* D_1 (Sx) < 0,$$

противоречащие друг другу.

3. Пусть матрицы *A* и *B* эрмитовы. Доказать эквивалентность следующих четырех условий:

(a) Матрицы *A* и *B* одновременно диагонализуемы посредством преобразования эрмитовой конгруэнтности.

(b) Для некоторых отличных от нуля вещественных чисел *a* и *b* матрицы $aA+bB$ и *B* одновременно диагонализуемы посредством преобразования эрмитовой конгруэнтности.

(c) Обе матрицы *A* и *B* одновременно эрмитово конгруэнтны некоторой паре коммутирующих матриц.

(d) Матрица $A + iB$ эрмитово конгруэнтна нормальной матрице.

4. Привлекая доводы из доказательств теоремы 18.5.15 и теорем 15.3.19 и 18.1.6 о коммутативном семействе, доказать следующее обобщение случая I(b) теоремы 18.5.15. Пусть заданы эрмитовы матрицы $A_1, A_2, \ldots, A_k \in M_n$ и A_1 невырожденна. Тогда необходимыми и достаточными условиями существования такой невырожденной матрицы $T \in M_n$, что матрицы $T^* A_i T$ диагональны сразу для всех $i = 1, 2, \ldots, k$, являются (a) подобие матрицы $A_1^{-1} A_i$ некоторой вещественной диагональной матрице для каждого $i = 2, \ldots, k$ и (b) коммутативность семейства матриц $\{A_1^{-1} A_i\colon i = 2, \ldots, k\}$. *Указание.* Пусть $C_i = A_1^{-1} A_i$ и $SC_i S^{-1}$ — вещественная диагональная матрица для каждого $i = 2, \ldots, k$. Положить $B_i = (S^*)^{-1} A_i S^{-1}$ и показать, что множество $\{B_i\}$ есть коммутативное семейство эрмитовых матриц. Тогда найдется унитарная матрица *U*, такая, что матрица UB_iU^* диагональна для каждого $i = 2, \ldots, k$, и произведение $T = S^{-1}U$ будет осуществлять требуемую конгруэнтность.

Что представляет собой соответствующее обобщение случая II(b) теоремы 18.5.15?

5. Дифференциальный оператор *L*, заданный формулой (18.0.4) с вещественной симметричной матрицей коэффициентов

$$A(x) = [a_{ij}(x)],$$

называют *эллиптическим* в точке $x \in D \subset \mathbf{R}^n$, если матрица коэффициентов невырожденна и все ее собственные значения одного знака. Оператор L называют *гиперболическим* в точке x, если матрица $A(x)$ невырожденна и знак одного из ее собственных значений противоположен знаку всех остальных. Объяснить, почему эллиптический (гиперболический) в некоторой точке оператор сохраняет свой тип при замене координат. Примером эллиптического оператора служит оператор Лапласа

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

а гиперболического — волновой оператор

$$\Box^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Оба записаны здесь в декартовых координатах и выглядят совершенно иначе в сферических, цилиндрических и др. координатах.

6. Пусть $X = [X_1, \ldots, X_n]^T$ и $Y = [Y_1, \ldots, Y_n]^T$ — два вектора с вещественными случайными компонентами, у которых конечны моменты второго порядка. Известно (см. модуль 21), что собственные значения матриц ковариации каждого из векторов X и Y неотрицательны. Пусть хотя бы одна из матриц ковариации невырожденна. Доказать существование такой вещественной невырожденной матрицы $S \in M_n$, что обе матрицы ковариации векторов SX и SY диагональны. На языке статистики это означает существование единственного такого линейного невырожденного преобразования S, что компоненты каждого из векторов SX и SY не коррелируют.

7. Используя результат задачи 4, сформулировать условия для трех или большего числа случайных векторов, при которых существует единственное невырожденное линейное преобразование, переводящие все эти векторы в векторы с некоррелирующими компонентами.

8. В случае I(b) теоремы 18.5.15 рассматривается задача одновременной диагонализации двух эрмитовых матриц, хотя бы одна из которых невырожденна, преобразованием эрмитовой конгруэнтности. В следствии 18.5.18 (а) об одновременной диагонализации преобразованием унитарной эрмитовой конгруэнтности допускается вырожденность обеих матриц. Если обе матрицы вырожденны, то решение задачи об одновременном приведении их к диагональному виду преобразованием (не обязательно унитарной)

эрмитовой конгруэнтности сводится в конечном счете к теореме 18.5.15, но необходимо изучить поведение данных матриц на ортогональном дополнении к пересечению их ядер. Обозначим две вырожденные эрмитовы матрицы через $A, B \in M_n$, а их ядра через $N(A)$ и $N(B)$ соответственно.

(a) Рассмотреть матрицы $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ как пример двух вырожденных эрмитовых матриц, поддающихся одновременной диагонализации преобразованием эрмитовой конгруэнтности.

(b) Пусть $N(A) \cap N(B) = \{0\}$ и матрицы A и B можно одновременно диагонализовать преобразованием эрмитовой конгруэнтности. Доказать существование вещественного числа a, при котором матрица $aA+B$ невырожденна. *Указание.* Пусть матрица $C \in M_n$ невырожденна и $C^*AC = \Lambda_1$, $C^*BC = \Lambda_2$, где Λ_1 и Λ_2 — диагональные матрицы. Показать, что в Λ_1 и Λ_2 нулевые элементы на главной диагонали расположены в разных позициях. Можно ли выбрать число a так, чтобы все элементы главной диагонали матрицы $a\Lambda_1 + \Lambda_2$ оказались ненулевыми?

(c) Привлекая результат п. (b), убедиться, что матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

нельзя одновременно диагонализовать преобразованием эрмитовой конгруэнтности.

(d) Предполагая, что $N(A) \cap N(B) = \{0\}$ и что матрица $aA + B$ невырожденна при некотором ненулевом $a \in \mathbf{R}$, доказать на основе результата п. (b) задачи 3, что матрицы A и B одновременно диагонализуемы преобразованием эрмитовой конгруэнтности тогда и только тогда, когда матрица $(aA + B)^{-1}B$ диагонализуема и все ее собственные значения вещественны.

(e) Пусть $\dim N(A) \cap N(B) = k \geqslant 1$ и $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ — ортонормированный базис в $\mathbf{R}^n$, первые векторы $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ которого образуют базис пересечения $N(A) \cap N(B)$. Пусть $U = [u_1 u_2 \ldots u_n] \in M_n$. Показать, что

$$U^*AU = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array}\right], \quad U^*BU = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & B' \end{array}\right],$$

где $A', B' \in M_{n-k}$, $N(A') \cap N(B') = \{0\}$ и нулевые блоки в верхнем левом углу имеют размер $k \times k$. Показать, что пара матриц A и B одновременно диагонализуема преобразованием эрмитовой конгруэнтности тогда и только тогда, когда одновременно диагонализуемы подматрицы A' и B'. Хотя обе матрицы A' и B' могут быть вырожденными, их ядра имеют нулевое пересечение.

(f) Суммируя результаты пп. (a) — (e), сформулировать и доказать общую теорему об одновременной диагонализации двух эрмитовых матриц посредством преобразования эрмитовой конгруэнтности.

9. Пусть $A, B \in M_n$ и матрица B невырожденна. Установить, что матрица A коммутирует с B в том и только в том случае, когда A коммутирует с B^{-1}.

10. Проверить, что матрицы $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ можно одновременно привести к диагональной форме посредством преобразования унитарной конгруэнтности, но нельзя одновременно диагонализовать преобразованием эрмитовой конгруэнтности. Использовать рассуждения из доказательства случая II (b) теоремы 18.5.15 для явного приведения и указать подходящую унитарную матрицу, осуществляющую конгруэнтность.

11. Удостовериться, что матрицы $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ невозможно одновременно диагонализовать преобразованием (эрмитовой)] конгруэнтности.

12. Пусть $A, B \in M_n$ и матрица A невырожденна. Показать, что каждое из условий, приведенных в следующей таблице, является необходимым и достаточным для того, чтобы матрицы A и B одновременно приводились к диагональному виду посредством преобразования конгруэнтности, причем в каждом случае имеется в виду такой же тип приведения и условия, как в одноименном случае теоремы 18.5.15 (см. табл. 18.5.15T).

Случай	Необходимое и достаточное условие
I (a)	Существует эрмитова матрица $F \in M_n$, при которой $B = AF$.
I (b)	Существует диагонализуемая матрица $F \in M_n$ с вещественными собственными значениями, при которой $B = AF$.
II (a)	Существует нормальная матрица $F \in M_n$, при которой $B = AF$.
II (b)	Существует диагонализуемая матрица $F \in M_n$, при которой $B = AF$.
III (a)	Существует симметричная матрица $F \in M_n$, при которой $B = AF$
III (b)	Существует псевдодиагонализуемая (см. определение 4.6.2) матрица $F \in M_n$, при которой $B = AF$.

13. Пусть матрицы $A, B \in M_n$ симметричны (и обе могут быть вырожденными) и существует такая унитарная матрица

$U \in M_n$, что $UAU^T = \Lambda$, $UBU^T = M$ — диагональные матрицы. Установить существование такой унитарной матрицы $V \in M_n$, что $B\bar{A} = AV\bar{B}$. *Указание.* Пусть $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Доказать существование унитарной диагональной матрицы *D*, для которой $\bar{\Lambda} = D\Lambda = \Lambda\bar{D}$. Затем обосновать равенства

$$B\bar{A} = U^* M\bar{\Lambda}U = U^*\Lambda D_1 D_2 \bar{M}U = A(U^T D_1 D_2 \bar{U})\bar{B},$$

где D_1 и D_2 — унитарные диагональные матрицы.

14. Используя необходимое условие из задачи 13, показать, что две симметричные матрицы в задаче 8(с) не приводятся одновременно к диагональному виду преобразованием унитарной конгруэнтности. *Указание.* Вычислить первый столбец матрицы $B\bar{A}$ и матрицы $AU\bar{B}$. Используя следствие 18.5.18 (b), вывести это же утверждение более простым способом.

15. Пусть матрицы A, $B \in M_n$ симметричны. Доказать, что в задаче 13 необходимое условие одновременной диагонализации этих матриц будет также и достаточным, если только обе матрицы *А* и *В* невырожденны. *Указание.* Если $B\bar{A} = AU\bar{B}$ с невырожденными матрицами *А* и *В,* то $A^{-1}B\bar{A}\bar{B}^{-1} = U$ и *I* $=UU^*$. Тогда $\bar{A}\bar{B}^{-1}B^{-1}A = B^{-1}A\bar{A}\bar{B}^{-1}$. Сравнение обратных к матрицам в левой и правой частях этого равенства убеждает нас, что матрица $A^{-1}B$ нормальна.

16. Пусть матрицы $A, B \in M_n$ симметричны (быть может, обе они вырожденны) и существует унитарная матрица $U = M_n$, приводящая их к диагональному виду. Показать, что матрицы $A\bar{A}$ и $B\bar{B}$ коммутируют. Удостовериться, что это необходимое условие одновременной диагонализации преобразованием унитарной конгруэнтности не является достаточным, рассматривая две матрицы из задачи 8(с). Проверить, что это необходимое условие будет достаточным, если каждая из матриц $A\bar{A}$ и $B\bar{B}$ имеет простой спектр.

17. Пусть $A, B \in M_n$, матрица *А* эрмитова и *В* симметрична и существует такая унитарная матрица $U \in M_n$, что $UAU^* = \Lambda$, $UBU^T = M$ — диагональные матрицы. Показать, что *А* коммутирует с $B\bar{B}$. Убедиться, что это необходимое условие одновременной диагонализации (посредством такого преобразования смешанного типа) не является достаточным, рассматривая две матрицы из задачи 11. При помощи следствия 184.4.5 проверить, что это необходимое условие оказывается достаточным, если все собственные значения матрицы $B\bar{B}$ различны.

18. Пусть $A, B \in M_n$, матрицы A и B симметричны и A невырожденна. Доказать, что матрицы A и B одновременно приводимы к диагональному виду преобразованием конгруэнтности, когда все n корней обобщенного характеристического многочлена $p_{A,B}(t) \equiv \det(tA - B)$ различны. *Указание.* Чему равны собственные значения матрицы $A^{-1}B$?
19. Дать новое подробное доказательство закона инерции Сильвестра (теорема 18.5.8) по следующей схеме. Пусть матрица $A \in M_n$ эрмитова и невырожденна и матрица $S \in M_n$ невырожденна. Пусть имеется разложение $S = QR$ с унитарной матрицей $Q \in M_n$ и верхней, треугольной матрицей $R \in M_n$ с положительными элементами на главной диагонали. Показать, что матрица $S(t) = tQ + (1-t)QR$ невырожденна при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Положить $A(t) \equiv S(t)AS(t)^*$. Что представляет собой матрица $A(0)$? Матрица $A(1)$? Учитывая невырожденность матрицы $A(t)$ и непрерывную зависимость от параметра t на отрезке от нуля до единицы, привести доводы в пользу совпадения числа положительных (отрицательных) собственных значений у матриц $A(0)$ и $A(1)$. Включить сюда и общий случай (когда матрица A вырожденна), рассматривая матрицу $A + \varepsilon I$ при $\varepsilon \to 0$.
20. Пусть задана матрица вида $A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_n$, $B \in M_k$, где $1 \leqslant k < n$. Показать, что матрица A нормальна в том и только в том случае, когда нормальна матрица B и $C = 0$. *Указание.* Вычислить произведения AA^* и A^*A. Если $C^*C = 0$, то имеем $(Cx)^*(Cx) = 0$ для всех векторов $x \in \mathbf{C}^{n-k}$ и, следовательно, $Cx=0$ для всех $x \in \mathbf{C}^{n-k}$.
21. Убедиться, что способ доказательства утверждения (b) следствия 18.5.18 также подходит для доказательства утверждений (а) и (с) этого следствия.
22. Пусть задано семейство комплексных симметричных матриц $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_k\} \subset M_n$, и пусть $\mathcal{G} = \{A_i \bar{A}_j: i, j = 1, \ldots, k\}$. Показать, что если существует унитарная матрица $U \in M_n$, такая, что матрицы UA_iU^T диагональны для всех $i = 1, \ldots, k$, то семейство матриц $\mathcal{G}$ коммутативно. Рассмотреть частный случай $k = 2$ и установить связь с утверждением (b) следствия 18.5.18. На самом деле верно и обратное: коммутативность семейства $\mathcal{G}$ обеспечивает возможность одновременной диагонализации матриц из множества $\mathcal{F}$ посредством преобразования унитарной конгруэнтности.

23. Пусть задано семейство $\mathcal{F}=\{A_1, \ldots, A_k\} \subset M_n$ комплексных симметричных матриц и семейство $\mathcal{H}=\{B_1, \ldots, B_m\} \subset M_n$ эрмитовых матриц, и пусть $\mathcal{G}=\{A_i\bar{A}_j\colon i, j=1, \ldots, k\}$.

Показать, что если существует такая унитарная матрица $U \in M_n$, что каждая из матриц UA_iU^T и UB_iU^* диагональна, то оба семейства $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ коммутативны и каждая матрица B_jA_i симметрична для всех $i=1, \ldots, k$ и $j=1, \ldots, m$. К чему сводится это утверждение при k = m= 1 и как оно согласуется с утверждением (с) следствия 18.5.18? Хонг и Хорн доказали справедливость обратного утверждения.

Задачи к п. 18.6

1. Показать, что псевдоподобие задает отношение эквивалентности на M_n.
2. Провести подробно доказательство теоремы 18.6.3.
3. Пусть заданы матрица $A \in M_n$ и ее псевдособственное значение λ. Проверить, что множество отвечающих λ псевдособственных векторов матрицы A не обязано быть подпространством в $\mathbf{C}^n$ над полем **C**, но всегда будет подпространством над полем **R**. Сравнить с ситуацией для обычных собственных векторов.
4. В теореме 18.6.11 приводятся необходимые и достаточные условия псевдодиагонализуемости одной заданной матрицы. Что изменится, если необходимо привести к диагональному виду посредством псевдоподобия одновременно несколько матриц? Пусть задан набор матриц $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \subset M_n$. Предположим, что невырожденная матрица $S \in M_n$ удовлетворяет равенствам $A_i = S\Lambda_i\bar{S}^{-1}$ для $i=1, \ldots, k$, где каждая матрица Λ_i диагональна. Доказать, что

(a) каждая матрица A_i псевдодиагонализуема;

(b) каждое произведение $A_i\bar{A}_j$ диагонализуемо;

(c) семейство произведений $\{A_i\bar{A}_j\colon i, j=1, \ldots, k\}$ коммутативно;

(d) сумма $A_i\bar{A}_j + A_j\bar{A}_i$ обладает вещественным спектром, а разность $A_i\bar{A}_j - A_j\bar{A}_i$ — чисто мнимым спектром для всех $i, j=1, \ldots, k$.

Рассмотреть частный случай k=1. Приведенные необходимые условия на самом деле являются также достаточными, что доказано Хонгом и Хорном.

5. Произведение $A\bar{A}$ играет важную роль в теории псевдоподобия. Показать, что для произвольной матрицы $A \in M_n$ характеристический многочлен матрицы $A\bar{A}$ имеет вещественные коэффициенты. Вывести отсюда, что комплексные собственные значения матрицы $A\bar{A}$ образуют сопряженные пары. *Указание,*

$$\det(tA - A\bar{A}A) = \det A \det(tI - \bar{A}A) = \det(tI - A\bar{A}) \det A.$$

Таким образом, если A невырожденна, то характеристические многочлены произведений $\bar{A}A$ и $A\bar{A} = (\overline{\bar{A}A})$ совпадают. В общем случае ввести в рассмотрение матрицу $A_\varepsilon = A + \varepsilon I$. Более точный результат для произведения $A\bar{A}$ см. в задаче 8.

6. При наличии у произведения $A\bar{A}$ неотрицательных собственных значений у матрицы A существуют псевдособственные векторы, однако важны и остальные собственные значения этого произведения. Пусть $A \in M_n$ и $\bar{A}Ax = \lambda x$, где $x \neq 0$ и $\lambda \in \mathbf{C}$ подчинено условию $\lambda \notin [0, \infty)$. Обозначим через $\alpha \in \mathbf{C}$ любой квадратный корень из λ и определим вектор y равенством $A\bar{x} = \bar{\alpha}y$. Убедиться, что $A\bar{y} = \alpha x$, $A\bar{A}y = \bar{\lambda}y$ и векторы x, y линейно независимы. *Указание.* В случае их линейной зависимости вектор x должен быть псевдособственным и $\lambda \geqslant 0$. Показать, что все комплексные собственные значения произведения $A\bar{A}$ встречаются сопряженными парами и любое отрицательное собственное значение этого произведения имеет геометрическую кратность не меньше двух. Ср. с задачей 5.

7. Пусть $A \in M_n$, λ— отрицательное собственное значение матрицы $A\bar{A}$ и $A\bar{A}x = \lambda x$, $x \neq 0$, $\alpha^2 = \lambda$, $A\bar{x} = \bar{\alpha}y$, $A\bar{y} = \alpha x$.

Согласно задаче 6, векторы x и y линейно независимы.

(a) Пусть $x' = x + \beta y$, $y' = y - \bar{\beta}x$. Показать, что $A\bar{x}' = \bar{\alpha}y'$, $A\bar{y}' = \alpha x$ при любом выборе $\beta \in \mathbf{C}$.

(b) Показать, что параметр β можно выбрать так, чтобы векторы x' и y' стали ортогональными.

(c) Пусть нормирующий множитель $s > 0$ выбран так, чтобы вектор $\xi = sx'$ был единичным, и пусть $\eta = sy'$. Установить равенства

$A\bar{\xi} = \bar{\alpha}\eta$, $A\bar{\eta} = \alpha\xi$, $\xi^*\eta = 0$.

(d) Пусть нормирующий множитель r>0 выбран так, чтобы вектор $r\eta$ был единичным, и пусть $U = [\xi \; r\eta \; u_3 \; \ldots \; u_n] \in M_n$— унитарная матрица. Доказать, что

$$U^*AU=\left[\begin{array}{cc|c} 0 & r\alpha & \\ \bar{\alpha}/r & 0 & * \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & A' \end{array}\right], \text{ где } \quad A'\in M_{n-2},$$

и, следовательно,

$$U^*(A\bar{A})U=\left[\begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & \\ 0 & \lambda & * \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & A'\bar{A}' \end{array}\right].$$

(e) Показать, что каждое отрицательное собственное значение матрицы $A\bar{A}$ имеет четную алгебраическую кратность. Ср. с задачей 6. 8. Для произвольной матрицы $A\in M_n$ установить следующую явную формулу подобия:

$$\begin{bmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A\bar{A} & 0 \\ \bar{A} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \bar{A} & \bar{A}A \end{bmatrix}.$$

Вывести отсюда, что имеется взаимно однозначное соответствие между жордановыми блоками матриц $A\bar{A}$ и $\bar{A}A$, отвечающими ненулевым собственным значениям. Учитывая равенство $\bar{A}A=\overline{A\bar{A}}$, показать, что жордановы блоки матрицы $A\bar{A}$, отвечающие комплексным собственным значениям, встречаются сопряженными парами. Вывести отсюда, что матрица $A\bar{A}$ подобна некоторой вещественной матрице. *Указание.* См. обсуждение вещественной жордановой формы в 17.4. Фактически можно утверждать нечто большее, а именно что матрица $A\bar{A}$ всегда подобна квадрату некоторой вещественной матрицы. Что можно сказать тогда о собственных значениях матрицы $A\bar{A}$?

9. Доказать следующее утверждение (и обратное к нему). Если матрица $A\in M_n$ подобна какой-нибудь вещественной матрице, то матрица A подобна $\bar{A}$. Используя этот факт и результат задачи 8, показать, что матрицы $A\bar{A}$ и $\bar{A}A$ подобны для любой $A\in M_n$. Проверить, что произведения AB и BA в общем случае не обязаны быть подобными.

10. Убедиться, что множество псевдодиагонализуемых матриц в M_n включает в себя следующие подмножества:

(a) Все вещественные диагонализуемые матрицы с вещественным спектром.

(b) Все диагонализуемые матрицы с набором из n линейно независимых вещественных собственных векторов.

(c) Все симметричные матрицы.
(d) Все положительно определенные эрмитовы матрицы. *Указание.* Если матрица A положительно определена, то справедливо представление $A = HH = H(HH^T)\bar{H}^{-1}$, где матрица H эрмитова и невырожденна.
(e) Все произведения AB, в которых A — положительно определенная эрмитова матрица, а B — симметричная, или, что то же самое, всевозможные произведения H^2B, в которых H — эрмитова невырожденная матрица, а B — симметричная. *Указание.* $H^2B = H(\bar{H}BH)^T\bar{H}^{-1}$.
11. Проверить, что множество CD_n псевдодиагонализуемых матриц в M_n обладает следующими свойствами (обозначение CD образовано из букв термина «condiagonalization», который переведен как «псевдодиагонализация»):
(a) Если и $A \in CD_n$ матрица $S \in M_n$ невырожденна, то $SA\bar{S}^{-1} \in SD_n$.
(b) Нулевая матрица входит в CD_n.
(c) Если $A \in CD_n$ и $a \in \mathbf{C}$, то $aA \in CD_n$.
(d) Если матрица $A \in CD_n$ обратима, то $A^{-1} \in CD_n$.
12. Проверить, что
(a) матрицу $\begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ нельзя привести к диагональному виду обычным подобием, но она псевдодиагонализуема;
(b) матрица $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ диагонализуема в обычном смысле, но не является псевдодиагонализуемой;
(c) матрица $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ не приводится к диагональному виду ни подобием, ни псевдоподобием.
13. Пусть задана такая матрица что $A \in M_n, A\bar{A} = \Lambda = \lambda_1 I_{n_1} \oplus \ldots \oplus \lambda_k I_{n_k}$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ и все $\lambda_i \geqslant 0$. Доказать существование такой унитарной матрицы $U \in M_n$, что $A = U\Delta U^T$, где $\Delta = \Delta_1 \oplus \ldots \oplus \Delta_k$ и каждая матрица $\Delta_k \in M_{n_k}$ является верхней треугольной.
14. Лемма 18.6.9 гласит, что матрица $A \in M_n$ допускает разложение $A = S\bar{S}^{-1}$ с некоторой невырожденной матрицей $S \in M_n$ тогда и только тогда, когда $A\bar{A} = I$. Привлекая следствие 18.4.4, показать, что $A = U\bar{U}^{-1} = UU^T$, где матрица $U \in M_n$ унитарна,

в том и только в том случае, когда $A^{-1}=\bar{A}$ и матрица A симметрична. Как это согласуется с теоремой 18.4.7?

15. Пусть $A \in M_n$ и $A = B + iC$, где $B, C \in M_n(\mathbf{R})$. Убедиться, что число $\lambda \in \mathbf{C}$ будет псевдособственным значением матрицы A тогда и только тогда, когда $\pm|\lambda|$ суть (вещественные) собственные значения блочной матрицы

$$F=\begin{bmatrix} B & C \\ C & -B \end{bmatrix} \in M_{2n}(\mathbf{R}).$$

Указание. Переписать равенство $A\bar{x} = rx$, где $r = |\lambda|$, используя разложение $x = u + iv$, $u, v \in \mathbf{R}^n$. Таким образом, если у матрицы F нет вещественных собственных значений, то у матрицы A не существует псевдособственных значений.

16. Установить, что собственные и псевдособственные значения диагональной или верхней треугольной матрицы $A \in M_n$ обладают следующим свойством. Если λ — собственное значение матрицы A, то $e^{i\theta}\lambda$ — ее псевдособственное значение при *любом* $\theta \in \mathbf{R}$; если μ — псевдособственное значение матрицы A, то $e^{i\theta}\mu$ — ее собственное значение при некотором $\theta \in \mathbf{R}$.

17. Пусть $A \in M_n(\mathbf{R})$. Доказать, что каждое вещественное собственное значение матрицы A будет также ее псевдособственным значением и что псевдособственное значение $\mu \geqslant 0$ матрицы A либо само будет собственным значением, либо собственным значением будет противоположное к нему $-\mu$. *Указание.* Выделить в равенстве $A\bar{x} = \mu x$ вещественную и мнимую части, привлекая разложение $x = u + iv$, $u, v \in \mathbf{R}^n$.

Рассмотреть матрицу $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ как пример вещественной матрицы с невещественными собственными значениями, которые не связаны ни с какими псевдособственными значениями.

18. Во что переходит утверждение леммы 18.6.9 при n = 1? Комплексное число z лежит на единичной окружности комплексной плоскости, если $z\bar{z} = 1$. В применении к матрицам обычное обобщение этого условия записывается в виде $AA^* = I$. Подчиненные ему матрицы суть унитарные матрицы, имеющие фундаментальное значение в матричной теории. Другое обобщение (при n = 1 совпадающее с предыдущим) — это условие $A\bar{A} = I$, которому подчинены матрицы, характеризуемые в лемме 18.6.9 как псевдоподобные единичной. Предполагая, что для матрицы $A \in M_n$ выполняется условие $A\bar{A} = I$, доказать, что

(a) матрица A невырожденна;

(b) $A^{-1} = \bar{A}$;
(c) $|\det A| = |\lambda_1 \ldots \lambda_n| = 1$;
(d) если $Ax = \lambda x, \quad x \neq 0$, то $A\bar{x} = (1/\bar{\lambda})\,\bar{x}$, т. е. число $1/\bar{\lambda}$ является собственным значением матрицы *A* вместе с числом λ.
Проверить, что произведение $A = B\bar{B}^{-1}$, где $B = \begin{bmatrix} z & i \\ -i & z \end{bmatrix}$, $z \in \mathbf{R}$, $z \neq \pm 1$, имеет спектр

$$\left\{ \frac{z-1}{z+1}, \ \frac{z+1}{z-1} \right\}.$$

Матрица *A* является примером того, что не у всех матриц интересующего нас типа спектр принадлежит единичной окружности.

19. Известно, что каждая комплексная матрица $A \in M_n$ допускает разложение вида $A = RE$, в котором $R, E \in M_n$, матрица *R* подобна некоторой вещественной матрице и $E\bar{E} = I$. Доказать это, опираясь на тот факт, что произвольная матрица $A \in M_n$ псевдоподобна некоторой вещественной матрице. Объяснить, каким образом здесь обобщается представление комплексного числа *z* в форме $z = re^{i\theta}$, где *r* и θ — вещественные числа.

20. Убедиться, что теорему 18.6.11 можно доказать на основе общих необходимых и достаточных условий псевдоподобия двух матриц, приведенных в последнем абзаце данного параграфа. *Указание.* Проверить эти условия для матрицы *A* и диагональной матрицы Λ.

21. Привлекая тот факт, что произвольная матрица $A \in M_n$ псевдоподобна некоторой вещественной, доказать существование по меньшей мере одного псевдособственного значения матрицы *A*, если порядок *n* нечетен. *Указание.* Вещественная матрица *R* нечетного порядка имеет хотя бы одно вещественное собственное значение. Что при этом можно сказать о спектре ее квадрата R^2? Если матрица *A* псевдоподобна *R*, то как произведение $A\bar{A}$ связано с R^2?

22. Пусть матрица $A \in M_n$ симметрична. В рассуждениях, следующих за теоремой 18.6.11, было показано, что матрица *A* псевдодиагоиализуема, т. е. существуют невырожденная матрица $S \in M_n$ и диагональная матрица $\Lambda \in M_n$, такие, что $A = S\Lambda\bar{S}^{-1}$. Проверить, что матрицу *S* здесь можно выбрать унитарной (и тем самым вывести из теоремы 18.6.11 следствие 18.4.4). *Указание.* Симметричность матрицы *A* гарантирует справедливость равенств $(S^*S)\Lambda = \Lambda(\overline{S^*S}) = \Lambda(S^*S)^T$. Используя полярное разложение из теоремы 21.3.3, записать *S* = *UP*, где матрица $U \in M_n$ унитарна, $P \in M_n$ эрмитова и $P = p(S^*S)$ для некоторого многочлена *p(t)* (см. доказательство теоремы 21.2.6). Вывести отсюда равенства $P\Lambda = \Lambda\bar{P} = \Lambda P^T$ и, следовательно,

$S\Lambda\bar{S}^{-1} = U\Lambda U^T.$

Понятие псевдоподобия можно обобщить, заменив поле комплексных чисел на произвольное поле; при этом роль комплексного сопряжения играет какой-либо автоморфизм данного поля.

Модуль 19
Нормы векторов и матриц

Микромодуль 54
Нормы векторов

19.0. Введение

Что могут означать слова «малый» или «большой», когда речь идет об отдельных векторах в $\mathbf{C}^n$ или матрицах в M_n? При каких обстоятельствах можно говорить о том, что два вектора расположены «по соседству» или «на значительном расстоянии» друг от друга?

Чтобы установить «величину» и «близость» вещественных векторов в двух- или трехмерном пространстве, обычно обращаются к евклидову расстоянию. Вектор $z \in \mathbf{R}^n$ имеет евклидову длину $(z^T z)^{1/2} = \left(\sum z_i^2\right)^{1/2}$. Если это неотрицательное число мало, то вектор z называют «малым» (по отношению к данной мере длины). Кроме того, заданные векторы x и y считают «близкими», если мала евклидова длина их разности $z = x — y$.

Что можно сказать о «величине» матриц, которые можно рассматривать как векторы в пространстве большей размерности? О «длине» векторов в бесконечномерных пространствах или векторов, имеющих комплексные компоненты? Имеются ли полезные способы измерения «величины» вещественных векторов, помимо их евклидовой длины?

Один из подходов к ответу на эти вопросы основан на изучении норм, или мер величин, матриц и векторов. Нормы можно рассматривать как обобщения евклидовой длины, однако их исследование не сводится просто к упражнению в математическом обобщении. Изучение норм необходимо для правильной формулировки таких понятий, как степенные ряды матриц. Нормы играют большую роль при анализе и оценивании качества численных методов.

Кроме того, в разных случаях могут больше подходить различные допустимые нормы. Таким образом, уместно исследовать общие для всех норм свойства, прежде чем сосредоточить внимание на какой-либо конкретной норме.

В следующих примерах обрисовано несколько ситуаций, в которых требуется понятие нормы.

19.0.1. Пример (сходимость). Если комплексное число x по модулю меньше единицы, $|x| < 1$, то имеет место известное разложение

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots.$$

Это подсказывает формулу

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \ldots$$

для вычисления обратной матрицы к квадратной матрице $I - A$, но когда эта формула верна? Оказывается, достаточно потребовать, чтобы норма матрицы A была меньше единицы, и любая такая матричная норма будет здесь подходящей! Подобным же образом при помощи норм можно доказать сходимость и многих других степенных рядов, а также то, что они корректно определяют матричнозначные функции от матрицы, такие, как

$$e^A \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Нормы можно также применять для определения числа членов степенного ряда, необходимых для вычисления конкретного значения функции с заданной точностью. Подобные замечания можно сделать об анализе сходимости итерационных схем решения систем уравнений.

19.0.2. Пример (точность). Если в точке $x = x_0$ известно значение вещественной дифференцируемой функции f вещественной переменной x, то ее значение в близлежащей точке $x = x_0 + h$ можно оценить при помощи первой производной

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \cong f'(x_0).$$

Следовательно, можно оценить относительную ошибку при вычислении значения функции f в точке x_0, если фактически находится значение f в близлежащей точке $x_0 + h$.

Та же самая ситуация возникает в матричных расчетах. Пусть требуется вычислить A^{-1} (или некоторую другую функцию от A), но элементы матрицы A получены из эксперимента, путем анализа других данных или как результаты предварительных вычислений, и точные значения их неизвестны. Матрицу A можно представить в виде суммы «истинной» матрицы A_0 и матрицы ошибок E. Хотелось бы определить возможную «относительную ошибку» (через «величину» матрицы E), возникающую при замене точного значения A_0^{-1} на вычисленное значение $A^{-1}=(A_0+E)^{-1}$. Границы различия между A^{-1} и A_0^{-1} бывает так же важно знать, как саму матрицу A^{-1}. Систематический подход к изучению подобных ситуаций дает теория норм.

19.0.3. Пример (границы). Нормы часто привлекаются при выводе оценок для важных величин, связанных с матрицей, например собственных значений. Если матрицы подвергаются возмущению, то границы возможных изменений этих величин также можно выразить посредством норм.

19.1. Определяющие свойства векторных норм и скалярных произведений

Рассмотрим сначала нормы на векторном пространстве. Поскольку множество M_n является векторным пространством, все рассуждения будут также применимы к нормам матриц.

Отталкиваясь от знакомого понятия абсолютного значения (вещественного или комплексного) числа, можно определить свойства, присущие функции, рассматриваемой в качестве нормы. Конечно, важное отличие заключается в том, что абсолютное значение является вещественнозначной функцией от одной переменной (вещественной или комплексной), тогда как норму требуется определить как вещественнозначную функцию от нескольких переменных, описывающих вектор. Евклидова длина $(z^*z)^{1/2}$ оказывается одной из таких функций на $\mathbf{C}^n$, но есть и другие, сохраняющие некоторые основные свойства евклидовой длины. В ряде случаев они могут быть более уместны, информативны или более удобны в каком-то отношении.

В данной модуле будут рассматриваться только вещественные или комплексные векторные пространства (векторное пространство называется вещественным (комплексным), если оно определено иад полем **R** вещественных чисел (полем **C** комплексных чисел).). Все основные результаты верны для обоих типов пространств, однако внутри каждого утверждения необходима согласованность с используемым полем. Таким образом, результаты часто будут формулироваться в терминах поля **F** (подразумевается, что $\mathbf{F}=\mathbf{R}$ или $\mathbf{F}=\mathbf{C}$), и по ходу рассуждений мы будем оперировать именно с этим полем **F**.

19.1.1. Определение. Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbf{F}$ ($\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$). Функция $\|\cdot\|\colon V\to\mathbf{R}$ является *векторной нормой,* если для всех $x, y \in V$ выполняются следующие условия (отметим, что неотрицательность следует из неравенства треугольника и абсолютной однородности):

(1) $\|x\| \geqslant 0$ (неотрицательность);

(1а) $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x=0$ (положительность; точнее, невырожденность);

(2) $\|cx\| = |c|\|x\|$ для всех чисел $c \in \mathbf{F}$ (абсолютная однородность);

(3) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (неравенство тре угольника).

Это привычные свойства евклидовой длины на плоскости. Евклидова длина обладает и другими свойствами, независимыми от приведенных аксиом (например, выполнено тождество параллелограмма (19.1.8)). Подобные дополнительные свойства оказываются несущественными для общей теории норм и поэтому не причисляются к аксиомам.

Функцию, для которой выполнены аксиомы (1), (2) и (3), но не обязательно (1а), называют *векторной полунормой.* Это более общее понятие, чем норма. Некоторые векторы, отличные от нулевого, могут иметь нулевую длину в смысле полунормы.

19.1.2. Лемма. *Если* $\|\cdot\|$ *является векторной полунормой на V, то*

$$|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x-y\|$$

для всех $x,\ y \in V$.

Доказательство. Поскольку $y = x + (y-x)$, то из неравенства треугольника (3) и аксиомы абсолютной однородности (2) выводим

$$\|y\| \leqslant \|x\| + \|y-x\| = \|x\| + \|x-y\|.$$

Отсюда следует неравенство

$$\|y\| - \|x\| \leqslant \|x-y\|.$$

Однако с таким же успехом $x = y + (x-y)$, откуда получаем

$$\|x\| \leqslant \|y\| + \|x-y\|,$$

используя опять неравенство треугольника (3). Тогда

$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x-y\|.$$

Следовательно,

$$\pm(\|x\| - \|y\|) \leqslant \|x-y\|,$$

что эквивалентно утверждению леммы.

В комплексном пространстве $\mathbf{C}^n$ евклидовой длине, определяемой на векторе $z \in \mathbf{C}^n$ формулой $(z^*z)^{1/2} = (\Sigma|z_i|^2)^{1/2}$, (см. далее пример 19.2.1), соответствует обычное евклидово скалярное произведение y^*x (иногда называемое естественным скалярным произведением). Скалярное произведение связано с «углом» между векторами: x и y ортогональны, если $y^*x=0$. Точно так же как в случае векторной нормы, можно выделить несколько существенных свойств евклидова скалярного произведения и принять их за аксиомы в общей теории скалярных произведений.

19.1.3. Определение. Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbf{F}$ ($\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$). Функция $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$: $V\times V\to\mathbf{F}$ является *скалярным произведением,* если для всех $x, y, z\in V$ выполняются следующие условия:

(1) $\langle x,\ x\rangle\geqslant 0$ (неотрицательность);

(1a) $\langle x,\ x\rangle=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$ (положительность);

(2) $\langle x+y,\ z\rangle=\langle x,\ z\rangle+\langle y,\ z\rangle$ (аддитивность);

(3) $\langle cx,\ y\rangle=c\langle x,\ y\rangle$ для всех чисел $c\in\mathbf{F}$ (однородность);

(4) $(x,\ y)=\overline{\langle y,\ x\rangle}$ (эрмитовость)

Упражнение. Показать, что для евклидова скалярного произведения $\langle x, y\rangle=y^*x$ справедливы все указанные выше аксиомы скалярного произведения.

Упражнение. Пусть $D=\mathrm{diag}\,(d_1, d_2,\ \ldots,\ d_n)$. Рассмотрим функцию $(x, y)\equiv y^*Dx.$ Какие из аксиом скалярного произведения справедливы дляэтой функции? При каких условиях на матрицу D функция $(\cdot,\ \cdot)$ задает скалярное произведение?

Упражнение. Вывести следующие свойства скалярного произведения из аксиом определения 19.1.3:

(a) $\langle x,\ cy\rangle=\bar{c}\langle x,\ y\rangle$;

(b) $\langle x,\ y+z\rangle=\langle x,\ y\rangle+\langle x,\ z\rangle$;

(c) $\langle ax+by, cw+dz\rangle=a\bar{c}\langle x, w\rangle+b\bar{c}\langle y, w\rangle+a\bar{d}\langle x, z\rangle+b\bar{d}\langle y, z\rangle$;

(d) $\langle x,\ y\rangle=0$ для всех $y\in V$ тогда и только тогда, когда $x=0$;

(e) $\langle x,\ \langle x,\ y\rangle y\rangle=|\langle x,\ y\rangle|^2$.

Важное свойство, общее для всех скалярных произведений, выражается неравенством Коши — Шварца.

19.1.4. Теорема (неравенство Коши — Шварца). *Если функция* $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ *является скалярным произведением на векторном пространстве V над полем* **F** (**R** *или* **C**), то *справедливо неравенство*

$$|\langle x,\ y\rangle|^2\leqslant\langle x,\ x\rangle\langle y,\ y\rangle\quad \textit{для всех}\quad x,\ y\in V.$$

Равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда векторы x и y линейно зависимы, т. е. $x=\alpha y$ *или* $y=\alpha x$ *для некоторого числа* $\alpha\in\mathbf{F}$.

Доказательство. Пусть заданы векторы $x, y \in V$. Если $y = 0$, то утверждение теоремы тривиально, поэтому далее считаем, что $y \neq 0$. Рассмотрим функцию

$$p(t) \equiv \langle x + ty, x + ty \rangle = \langle x, x \rangle + t \langle y, x \rangle + t \langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle =$$
$$= \langle x, x \rangle + 2t \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle$$

вещественной переменной $t \in \mathbf{R}$, которая является вещественным квадратным многочленом с вещественными коэффициентами. В силу аксиомы (1) из определения 19.1.3 имеем $p(t) \geqslant 0$ для всех вещественных *t*, поэтому многочлен *p(t)* не может иметь простых вещественных корней. Следовательно, дискриминант соответствующего квадратного уравнения $p(t) = 0$ должен быть неположительным:

$$(2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle)^2 - 4 \langle y, y \rangle \langle x, x \rangle \leqslant 0;$$

тогда

$$(\operatorname{Re} \langle x, y \rangle)^2 \leqslant \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle. \qquad (19.1.5)$$

Поскольку это неравенство должно выполняться для любой пары векторов, оно будет верно, если заменить вектор y на вектор $\langle x, y \rangle y$. При такой замене неравенство (19.1.5) переходит в неравенство

$$(\operatorname{Re} \langle x, \langle x, y \rangle y \rangle)^2 \leqslant \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle | \langle x, y \rangle |^2.$$

Но $\operatorname{Re} \langle x, \langle x, y \rangle y \rangle = \operatorname{Re} \overline{\langle x, y \rangle} \langle x, y \rangle = \operatorname{Re} | \langle x, y \rangle |^2 = | \langle x, y \rangle |^2;$
поэтому

$$| \langle x, y \rangle |^4 \leqslant \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle | \langle x, y \rangle |^2. \qquad (19.1.6)$$

В случае когда $\langle x, y \rangle = 0$, утверждение теоремы тривиально, в противном случае можно разделить обе части неравенства (19.1.6) на число $| \langle x, y \rangle |^2$, что приводит к желаемому результату. Вследствие аксиомы (1а) многочлен *p(t)* может иметь вещественный (двукратный) корень только при $x + ty = 0$ для некоторого $t \in \mathbf{F}$. Это означает, что равенство в (19.1.5) (и, следовательно, в утверждении теоремы) выполняется тогда и только тогда, когда векторы x и y линейно зависимы.

19.1.7. Следствие. *Если функция* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *является скалярным произведением на V, то функция* $\|x\| \equiv (\langle x, x \rangle)^{1/2}$ *задает векторную норму на V.*

Упражнение. Доказать следствие 19.1.7. *Указание.* Проверка не совсем тривиальна только для неравенства треугольника. Преобразовать выражение $\|x + y\|^2$ и использовать неравенство Коши — Шварца. Если векторная норма $\|\cdot\|$ связана равенством $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ с некоторым скалярным произведением, то говорят, что норма $\|\cdot\|$ *порождена скалярным произведением* (а именно, произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$).

19.2. Примеры векторных норм

Приведем несколько примеров часто встречающихся векторных норм.

19.2.1. *Евклидова норма* (или l_2-норма) на $\mathbf{C}^n$

$$\|x\|_2=(|x_1|^2+\ \dots\ +|x_n|^2)^{1/2}$$

- возможно, наиболее известная векторная норма, поскольку величина $\|x-y\|_2$ определяет стандартное евклидово расстояние между двумя точками $x,\ y\in\mathbf{C}^n$. Эта норма также порождается обычным евклидовым скалярным произведением, т. е.

$$\|x\|_2^2=\langle x,\ x\rangle=x^*x.$$

Упражнение. Проверить, что функция $\|\cdot\|_2$ является векторной нормой на пространстве $\mathbf{C}^n$.

Упражнение. Норму $\|\cdot\|$ называют *унитарно инвариантной* если равенство $\|Ux\|=\|x\|$ верно для всех векторов $x\in\mathbf{C}^n$ и всех унитарных матриц $U\in M_n$. Показать, что евклидова норма $\|\cdot\|_2$ унитарно инвариантна.

19.2.2. *l_1-норма* на $\mathbf{C}^n$

$$\|x\|_1=|x_1|+\ \dots\ +|x_n|$$

называется также первой нормой. Образно можно сказать, что это *манхеттен-норма,* поскольку измерения длины производятся только по прямым вдоль координатных осей.

Упражнение. Проверить, что l_1-норма $\|\cdot\|_1$ действительно является векторной нормой на $\mathbf{C}^n$, но не порождается скалярным произведением. *Указание.* Использовать тождество (19.1.8).

19.2.3. *l_∞-норма* на $\mathbf{C}^n$ —это

$$\|x\|_\infty=\max\{|x_1|,\ \dots,\ |x_n|\}.$$

Упражнение. Проверить, что l_∞-норма $\|\cdot\|_\infty$ действительно является векторной нормой на $\mathbf{C}^n$.

Упражнение. Порождается ли l_∞-норма $\|\cdot\|_\infty$ каким-либо скалярным произведением?

19.2.4. *l_p-норма,* или *норма Гёльдера с показателем p,* на $\mathbf{C}^n$ — это

$$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p},$$

где $p\geqslant 1$.

Упражнение. Проверить, что l_p-норма действительно является векторной нормой на $\mathbf{C}^n$ при любом показателе $p \geqslant 1$ и что $\|x\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|x\|_p$ для каждого вектора $x \in \mathbf{C}^n$. *Указание.* Проверка нетривиальна только для неравенства треугольника, которое в случае l_p-нормы совпадает с классическим *неравенством Минковского*. Оно доказывается в приложении В

Упражнение. Привести пример векторной нормы, которая не является гёльдеровой.

В приведенных выше примерах все векторные нормы заданы на конкретном пространстве $\mathbf{C}^n$, однако при помощи этих норм можно определить нормы на произвольном конечномерном вещественном или комплексном векторном пространстве *V*. Если имеется базис $\mathscr{B} = \{b^{(1)}, \ldots, b^{(n)}\}$ пространства *V*, то, как известно, отображение

$$x \to [x]_{\mathscr{B}} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \vdots \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^n, \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i b^{(i)}$$

осуществляет изоморфизм *V* на $\mathbf{C}^n$. Легко показать, что для любой векторной нормы $\|\cdot\|$ на $\mathbf{C}^n$ функция

$$\|x\|_{\mathscr{B}} \equiv \|[x]_{\mathscr{B}}\| = \|[x_1, \ldots, x_n]^T\|, \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i b^{(i)}$$

будет векторной нормой на *V*.

Упражнение. Проверить последнее утверждение.

Матрицу $B \in M_n$ называют *изометрией для векторной нормы* $\|\cdot\|$ на $\mathbf{C}^n$, если

$$\|Bx\| = \|x\| \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbf{C}^n.$$

Упражнение. Показать, что изометрия для любой векторной нормы должна быть невырожденной матрицей.

Упражнение. Показать, что множество изометрий для данной нормы образует группу (которую называют *группой изометрий* этой нормы). Имеются ли для нормы $\|\cdot\|_2$ другие изометрий, кроме унитарных матриц?

Упражнение. Показать, что группа изометрий l_1-нормы есть множество (группа) всех матриц, похожих на матрицы перестановок с тем только отличием, что элементы «+1» заменяются на произвольные комплексные числа единичного модуля.

Упражнение. Что представляет собой группа изометрий l_∞-нормы?

В определении векторной нормы на пространстве V не требуется конечномерности этого пространства. Пространство V может быть, например, линейным пространством $C[a, b]$ всех непрерывных вещественных или комплексных функций, заданных на вещественном отрезке $[a, b]$.

19.2.5. Пример. Некоторые нормы на пространстве $C[a, b]$ аналогичны уже введенным векторным нормам на $\mathbf{C}^n$. Например, нормами на $C[a, b]$ являются все следующие функцоналы

$$\|f\|_2 = \left[\int_a^b |f(t)|^2\, dt\right]^{1/2} \qquad (L_2\text{-норма}),$$

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\, dt \qquad (L_1\text{-норма}),$$

$$\|f\|_p = \left[\int_a^b |f(t)|^p\, dt\right]^{1/p}, \quad p \geqslant 1 \qquad (L_p\text{-норма}),$$

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(x)|: x \in [a, b]\} \qquad (L_\infty\text{-норма})$$

l_∞-норму норму иногда называют *нормой равномерной сходимости.* Именно ей наделяют, как правило, множество $C[a, b]$, поскольку полученное таким образом нормированное пространство оказывается *полным* (см. 19.4).

19.3. Алгебраические свойства векторных норм

Исходя из заданной нормы или нескольких норм, новые нормы можно определить различными способами. Например, легко видеть, что сумма векторных (полу)норм является векторной (полу)нормой, так же как и произведение векторной полу(нормы) на положительное число. Другого рода пример: легко также видеть, что для векторных норм $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ функция $\|\cdot\|$, определенная равенством

$$\|x\| = \max\{\|x\|_\alpha, \|x\|_\beta\},$$

опять будет нормой.

Упражнение. Показать, что при замене «max» на «min» в последнем определении результирующая функция не обязана быть нормой.

Следующее утверждение охватывает как частные случаи все предыдущие.

19.3.1. Теорема. *Если* $\|\cdot\|_{\alpha_1}, \ldots, \|\cdot\|_{\alpha_m}$ *— нормы на векторном* *пространстве V над полем* **F** (**R** *или* **C**) *и* $\|\cdot\|_\beta$ — *векторная норма на* $\mathbf{R}^m$, *то функция* $\|\cdot\|: V \to \mathbf{R}$, *определенная как суперпозиция*

$$\|x\| = \left\| \left[\|x\|_{\alpha_1}, \ldots, \|x\|_{\alpha_m} \right]^T \right\|_\beta,$$

является векторной нормой на V.

Упражнение. Доказать теорему 19.3.1.

Упражнение. Показать, что утверждение теоремы 19.3.1 остается в силе, если термин «векторная норма» заменить на «векторная полунорма».

Упражнение. Убедиться, что утверждения о возможности построения норм при помощи операций суммирования или взятия максимума двух векторных норм есть частные случаи теоремы 19.3.1.

Другая возможность образовывать новые нормы связана со следующим результатом.

19.3.2. Теорема. *Если* $\|\cdot\|$ — *векторная норма на* $\mathbf{C}^n$ *и матрица* $T \in M_n$ *невырожденна, то функция* $\|\cdot\|_T$, *определенная соотношением*

$$\|x\|_T \equiv \|Tx\|, \quad x \in \mathbf{C}^n,$$

также будет векторной нормой на $\mathbf{C}^n$.

Упражнение. Доказать теорему 19.3.2.

Упражнение. Что произойдет с утверждением теоремы 19.3.2 в случае вырожденной матрицы *T*?

Упражнение. Почему функция $\|x\| = (|2x_1 - 3x_2|^2 + |x_2|^2)^{1/2}$ должна быть нормой на $\mathbf{C}^2$ (пожалуйста, без вычислений!)?

Новые нормы можно конструировать из старых при помощи понятия двойственности. Этот метод обсуждается в конце следующего параграфа.

19.4. Аналитические свойства векторных норм

Из примеров двух предшествующих параграфов становится ясно, что существует большое разнообразие функций $\|\cdot\|: V \to \mathbf{R}$, которые удовлетворяют аксиомам нормы. Полезно иметь широкий выбор функций, пригодных в качестве норм, поскольку в приложениях одна норма может быть более уместна или удобна, чем другая. Например, l_2-норму часто бывает удобно применять в задачах оптимизации из-за того, что она непрерывно дифференцируема (всюду, кроме нуля). Другой пример — это l_1-норма, которая популярна в статистике, хотя она дифференцируема на более узком множестве. Популярность l_1-нормы вызвана тем обстоятельством, что она приводит к более робастным оценкам по сравнению с классическими, основанными на регрессии. Часто наиболее естественно употреблять l_∞-норму, с помощью которой можно непосредственно контролировать покоординатную сходимость, однако ее аналитические и алгебраические свойства могут вызвать затруднения. На практике норма, наиболее естественная с теоретической точки зрения, может не совпадать с нормой, которую проще всего вычислить в данной ситуации. Следовательно, важно знать, какие связи можно установить между двумя различными нормами. В конечномерном случае все нормы «эквивалентны» в некотором точном смысле.

Основное понятие в анализе — *сходимость последовательности,* и векторные нормы можно использовать для установления факта сходимости последовательности векторов.

19.4.1. Определение. Пусть V — векторное пространство над полем **R** или **C** с нормой $\|\cdot\|$. Последовательность $\{x^{(k)}\}$ векторов в V называют *сходящейся к вектору* $x \in V''$ по норме $\|\cdot\|$ тогда и только тогда, когда $\|x^{(k)} - x\| \to 0$ при $k \to \infty$.

Факт сходимости последовательности $\{x^{(k)}\}$ к вектору x по норме $\|\cdot\|$ записывают в следующем виде:

$$x^{(k)} \underset{\|\cdot\|}{\to} x \quad \text{или} \quad \lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x \quad \text{по норме} \quad \|\cdot\|.$$

Необходимо явно указывать, в смысле какой нормы понимается сходимость рассматриваемой последовательности. Дело в том, что заданная последовательность векторов может сходиться по одной норме и расходиться по другой. Такая двусмысленная ситуация возникает в бесконечномерных линейных пространствах.

19.4.2.Пример. Рассмотрим последовательность функций $\{f_k\}$ в $C[0, 1]$ (линейном пространстве всех вещественнозначных или комплекснозначных непрерывных функций на $[0, 1]$), заданных равенствами

$$\begin{aligned}
&f_k(x) = 0, && 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{k},\\
&f_k(x) = 2\left(k^{3/2}x - k^{1/2}\right), && \frac{1}{k} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2k},\\
&f_k(x) = 2\left(-k^{3/2}x + 2k^{1/2}\right), && \frac{3}{2k} \leqslant x \leqslant \frac{2}{k},\\
&f_k(x) = 0, && \frac{2}{k} \leqslant x \leqslant 1
\end{aligned}$$

При $k = 2, 3, 4, \ldots$. Можно убедиться, что

$$\|f_k\|_1 = \frac{1}{2}k^{-1/2} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty;$$

$$\|f_k\|_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{для всех} \quad k,$$

$$\|f_k\|_\infty = k^{1/2} \to \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Таким образом, $\lim\limits_{k\to\infty} f_k = 0$ только по L_1-норме среди трех выбранных.

Упражнение. Изобразить схематически графики функций из предыдущего примера и проверить приведенные утверждения о величине L_1-, L_2- и L_∞-норм этих функций.

Упражнение. Пусть $x^{(k)} \xrightarrow[\|\cdot\|]{} x$ и $x^{(k)} \xrightarrow[\|\cdot\|]{} y$, где векторная норма $\|\cdot\|$ задана. При помощи неравенства треугольника показать, что $x = y$. Таким образом, если существует предел последовательности, то он единственный, т. е. можно говорить об определенном пределе последовательности по заданной норме.

Явление, отмеченное в примере 19.4.2, невозможно в случае векторного пространства конечной размерности. Чтобы убедиться в этом, нам потребуется общая лемма о свойствах непрерывности норм.

19.4.3. Лемма. *Пусть* $\|\cdot\|$ *— норма на векторном пространстве* V *над полем* $\mathbf{F}$ ($\mathbf{R}$ *или* $\mathbf{C}$), *и пусть заданы векторы* $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)} \in V$. *Тогда функция* $g\colon \mathbf{F}^m \to \mathbf{R}$, *определенная формулой*

$$g(z_1, z_2, \ldots, z_m) \equiv \|z_1x^{(1)} + z_2x^{(2)} + \ldots + z_mx^{(m)}\|,$$

является равномерно непрерывной.

Доказательство. Пусть

$$u = \sum_{i=1}^{m} u_ix^{(i)} \quad \text{и} \quad v = \sum_{i=1}^{m} v_ix^{(i)}.$$

Проведем следующие выкладки:

$$|g(u_1, \ldots, u_m) - g(v_1, \ldots, v_m)| = |\|u\| - \|v\|| \leqslant \|u - v\| =$$
$$= \left\|\sum_{i=1}^{m}(u_i - v_i)x^{(i)}\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{m}|u_i - v_i|\|x^{(i)}\| \leqslant C \max_{1\leqslant i\leqslant m}|u_i - v_i|,$$

где

$$C \equiv m \max_{1\leqslant i\leqslant m}\|x^{(i)}\|.$$

Первое неравенство вытекает из леммы 19.1.2. Отметим, что конечная константа C зависит только от выбора нормы $\|\cdot\|$ и m векторов $x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}$. Если исключить тривиальный случай, когда все векторы $x^{(i)}$ нулевые, то $C > 0$. Чтобы имело место неравенство $|g(u_1, \ldots, u_m) - g(v_1, \ldots, v_m)| < \varepsilon$, достаточно обеспечить условие $|u_i - v_i| < \ < \varepsilon/C$.

В этой лемме пространство V не обязано быть конечномерным, но важно, чтобы конечным было число векторов $x^{(i)}$.

Упражнение. Вывести из леммы 19.4.3 заключение, что каждая векторная норма на пространстве $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{C}^n$ является равномерно непрерывной функцией.

Конечномерность пространства V, однако, существенна в следующем фундаментальном факте.

19.4.4. Теорема. *Пусть f_1 и f_2 — две вещественнозначные функции на конечномерном векторном пространстве V над полем* **F** (**R** *или* **C**) *и система $\mathscr{B} = \{x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}\}$ образует базис пространства V. Предположим, что функции f_i, $i = 1, 2$, удовлетворяют следующим условиям:*

(a) *положительность: $f_i(x) \geqslant 0$ для всех $x \in V$; $f_i(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;*

(b) *абсолютная однородность: $f_i(\alpha x) = |\alpha| f_i(x)$ для всех $\alpha \in \mathbf{F}$ и всех $x \in V$;*

(c) *непрерывность: $f_i(x(z))$ непрерывна на где $\mathbf{F}^n$,*

$z = [z_1, \ldots, z_n]^T \in \mathbf{F}^n$ и $x(z) = z_1 x^{(1)} + \ldots + z_n x^{(n)}$.

Тогда существуют конечные положительные константы C_m и C_M, такие, что

$$C_m f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant C_M f_1(x)$$

для всех $x \in V$.

Доказательство. Определим отношение $h(z) = f_2(x(z))/f_1(x(z))$ на евклидовой единичной сфере $S = \{z \in \mathbf{F}^n: \|z\|_2 = 1\}$, которая является компактным множеством в $\mathbf{F}^n$. Заметим, что знаменатель в $h(z)$ не обращается в нуль на S по условию (a), следовательно, функция $h(z)$ непрерывна на S в силу условия (c). По теореме Вейерштрасса (см. приложение E) у непрерывной функции h на компактном множестве S существуют конечное положительное максимальное значение C_M и положительное минимальное значение C_m; (напомним, что $h(z) > 0$ при $z \in S$. Именно по этой причине константы C_M и C_m положительны) следовательно,

$$C_m f_1(x(z)) \leqslant f_2(x(z)) \leqslant C_M f_1(x(z))$$

- для всех $z \in S$.Поскольку для любого $z \in 5$ имеем $z/\|z\|_2 \in S$, то условие (b) гарантирует, что эти неравенства выполнены для всех ненулевых $z \in \mathbf{F}^n$ (случай $z = 0$ тривиален, так как $f_i(0) = 0$). Но любой вектор $x \in V$ можно представить в виде $x=x(z)$ для некоторого $z \in \mathbf{F}^n$, потому что система $\mathscr{B}$ образует базис; таким образом, требуемые неравенства верны для всех векторов $x \in V$.

Определение. Пусть V — вещественное или комплексное векторное пространство. Функцию $f\colon V \to \mathbf{R}$, которая удовлетворяет трем условиям теоремы 19.4.4: положительности, абсолютной однородности и непрерывности, называют *квазинормой.*

Конечно, векторные нормы представляют собой наиболее важный пример класса квазинорм. Условие (с) теоремы 19.4.4 (непрерывность) для векторных норм выполнено в силу леммы 19.4.3. Если для квазинормы верно неравенство треугольника, то она является векторной нормой.

Учитывая важность этого класса, сформулируем утверждение теоремы 19.4.4 для случая векторных норм в виде следствия.

19.4.5. Следствие. *Пусть* $\|\cdot\|_\alpha$ *и* $\|\cdot\|_\beta$ *— две произвольные нормы в конечномерном вещественном или комплексном векторном пространстве V. Тогда существуют конечные положительные константы* C_m *и* C_M, *такие, что* $C_m\|x\|_\alpha \leqslant \|x\|_\beta \leqslant C_M\|x\|_\alpha$ *для всех векторов* $x \in V$.

*Упражнение***.** Как нарушается следствие 19.4.5 в случае векторных полунорм?

Упражнение. Пусть $x = [x_1, \ x_2]^T \in \mathbf{R}^2$, и рассматриваются следующие нормы на $\mathbf{R}^2$:

$$\|x\|_\alpha = \|[10x_1, \ x_2]^T\|_\infty \quad \text{и} \quad \|x\|_\beta = \|[x_1, \ 10x_2]^T\|_\infty.$$

Показать, что функция $f(x) = (\|x\|_\alpha \|x\|_\beta)^{1/2}$ является квазинормой, но не нормой на $\mathbf{R}^2$. См. задачу 15 в конце данного параграфа. *Указание.* Рассмотреть значения $f([1, \ 1]^T)$, $f([0, \ 1]^T)$ и $f([1, \ 0]^T)$.

Упражнение. Пусть $\|\cdot\|_{\alpha_1}, \ \ldots, \ \|\cdot\|_{\alpha_k}$ — векторные нормы на пространстве V. Показать, что функции

$$(\|x\|_{\alpha_1} \ldots \|x\|_{\alpha_k})^{1/k} \quad \text{и} \quad h(x) = \min\{\|x\|_{\alpha_1}, \ \ldots, \ \|x\|_{\alpha_k}\}$$

являются квазинормами на V, но не обязательно нормами.

Из следствия 19.4.5 вытекает, в частности, тот вывод, что факт сходимости (по норме) последовательности векторов в конечномерном векторном пространстве не зависит от того, какая норма используется.

19.4.6. Следствие. *Если* $\|\cdot\|_\alpha$ *и* $\|\cdot\|_\beta$ *— векторные нормы в конечномерном вещественном или комплексном векторном пространстве и* $\{x^{(k)}\}$ *— заданная последовательность векторов, то* $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x$ *по норме* $\|\cdot\|_\alpha$ *тогда и только тогда, когда*

$\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x$ *по норме* $\|\cdot\|_\beta$.

Доказательство. Поскольку для всех k верны неравенства

$$C_m \| x^{(k)} - x \|_\alpha \leqslant \| x^{(k)} - x \|_\beta \leqslant C_M \| x^{(k)} - x \|_\alpha$$

то $\| x^{(k)} - x \|_\alpha \to 0$ тогда и только тогда, когда $\| x^{(k)} - x \|_\beta \to 0$ при $k \to \infty$.

19.4.7. Определение. Две нормы называют *эквивалентными,* если любая сходящаяся по одной из этих норм последовательность сходится к тому же пределу по другой из этих норм. Таким образом, в следствии 19.4.6 утверждается, что *в конечномерных вещественных или комплексных векторных пространствах все нормы эквивалентны.* В бесконечномерном пространстве различные нормы могут не быть эквивалентными, как уже было показано в примере 19.4.2.

Поскольку в пространстве $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{C}^n$ все векторные нормы эквивалентны норме $\|\cdot\|_\infty$, сходимость $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x$ по произвольной векторной норме имеет место тогда и только тогда, когда

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i \quad \text{для всех} \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $x^{(k)} = [x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}]^T$ и $x = [x_1, \ldots, x_n]^T$.

Покомпонентная сходимость (в любом базисе) эквивалентна сходимости по любой норме.

Другое важное следствие эквивалентности всех векторных норм в конечномерном случае — компактность единичного шара и единичной сферы для каждой векторной нормы. Отсюда можно заключить, что непрерывная комплекснозначная функция ограничена на единичном шаре любой векторной нормы и что непрерывная вещественнозначная функция на единичном шаре достигает своих наибольшего и наименьшего значений.

19.4.8.Следствие. *Обозначим через V пространство* $\mathbf{R}^n$ *или* $\mathbf{C}^n$. *Пусть* $f(\cdot)$ — *квазинорма на V. Множества*

$$\{x\colon f(x) \leqslant 1\} \quad \text{и} \quad \{x\colon f(x) = 1\}$$

являются компактными. В частности, в случае векторной нормы $\|\cdot\|$ *замкнутый единичный шар* $\{x\colon \|x\| \leqslant 1\}$ *и единичная сфера* $\{x\colon \|x\| = 1\}$ *являются компактными множествами* (в пространстве $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{C}^n$ компактными являются замкнутые ограниченные множества. Точные определения этих понятий приводятся в следующем параграфе).

Доказательство. По теореме 19.4.4 существует некоторая константа $C > 0$, при которой $\|x\|_2 \leqslant Cf(x)$ для всех $x \in V$. Таким образом, множество $\{x\colon f(x) \leqslant 1\}$ ограничено и содержится в обычном евклидовом шаре радиуса *С* с центром в начале координат. Каждое из множеств

$$\{x\colon f(x) = 1\} \quad \text{и} \quad \{x\colon f(x) \leqslant 1\}$$

замкнуто вследствие непрерывности функции $f(\cdot)$. Поскольку в пространстве $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{C}^n$ замкнутое ограниченное множество компактно, получаем требуемое утверждение.

Ситуация, когда требуется выяснить сходимость заданной последовательности $\{x^{(k)}\}$ к заданному вектору *х,* возникает редко. Чаще нужно определить, сходится ли вообще данная последовательность $\{x^{(k)}\}$ хоть к какому-нибудь вектору. В связи с этим возникает необходимость иметь такой критерий сходимости последовательностей, в котором предельный вектор *х* явно не принимает участие. Если предел *х* существует, то имеют место соотношения

$$\| x^{(k)} - x^{(j)} \| = \| x^{(k)} - x + x - x^{(j)} \| \leqslant \| x^{(k)} - x \| + \| x - x^{(j)} \| \to 0$$

при $k,\ j \to \infty$. Этот факт побуждает ввести следующее определение.

19.4.9. Определение. Последовательность $\{x^{(k)}\}$ в векторном пространстве *V* с нормой $\|\cdot\|$ называют *последовательностью Коши,* если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $N(\varepsilon)$, что

$$\| x^{(k_1)} - x^{(k_2)} \| \leqslant \varepsilon$$

при всех $k_1,\ k_2 \geqslant N(\varepsilon)$.

19.4.10. Теорема. *Последовательность* $\{x^{(k)}\}$ *векторов в конечномерном вещественном или комплексном пространстве V с нормой* $\|\cdot\|$ *сходится к некоторому вектору в V тогда и только тогда, когда она является последовательностью Коши.*

Доказательство. В пространстве *V* можно выбрать базис $\mathscr{B}$ и рассмотреть эквивалентную норму $\| [x]_{\mathscr{B}} \|_\infty$. Таким образом без потери общности можно считать, что $V = \mathbf{R}^n$ или $\mathbf{C}^n$ для некоторого натурального *n* и что норма есть $\|\cdot\|_\infty$. С одной стороны, если $\{x^{(k)}\}$ — последовательность Коши, то каждая последовательность компонент $\{x_i^{(k)}\},\ i = 1,\ \dots,\ n,$ является последовательностью Коши вещественных или комплексных чисел. Однако числовая последовательность Коши обязана иметь предел. Это означает, что для каждого *i*=1, ..., *n* существует число $x_i = \lim\limits_{k \to \infty} x_i^{(k)}$. Легко проверить, что

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x, \quad \text{где} \quad x = [x_1,\ \dots,\ x_n]^T.$$

С другой стороны, если последовательность векторов имеет предел $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x$, то справедливо неравенство

$$\| x^{(k_1)} - x^{(k_2)} \| \leqslant \| x^{(k_1)} - x \| + \| x - x^{(k_2)} \|,$$

которое показывает, что мы имеем дело с последовательностью Коши.

Фундаментальное свойство поля вещественных или комплексных чисел (оно использовалось при доказательстве предыдущей теоремы) состоит в том, что числовая последовательность является последовательностью Коши в том и только в том случае, когда она сходится к некоторому (вещественному или комплексному соответственно) числу. Его называют *свойством полноты* поля вещественных или комплексных чисел, и мы только что показали, что свойство полноты распространяется на конечномерные вещественные или комплексные векторные пространства с любыми нормами. К несчастью, бесконечномерные векторные пространства могут быть и неполными.

19.4.11. Определение. Векторное пространство V с нормой $\| \cdot \|$ называют *полным,* если каждая последовательность Коши имеет в пространстве V предел.

Упражнение. В линейном пространстве $C[0, 1]$ с L_1-нормой $\| f \|_1 = \int\limits_0^1 | f(t) | dt$ рассмотреть последовательность функций $\{f_k\}$, определенных равенствами

$$f_k(t) = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{k},$$

$$f_k(t) = \frac{k}{2}\left(t - \frac{1}{2} + \frac{1}{k}\right), \qquad \frac{1}{2} - \frac{1}{k} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{k},$$

$$f_k(t) = 1, \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{k} \leqslant t \leqslant 1.$$

Изобразить графики функций f_k. Показать, что $\{f_k\}$ есть последовательность Коши, однако не существует функции $f \in C[0, 1]$, являющейся пределом этой последовательности, т. е. такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$ по норме $\| \cdot \|_1$.

Основываясь на факте компактности единичного шара любой векторной нормы или квазинормы в $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{C}^n$, можно ввести другой полезный метод построения новых норм из старых.

19.4.12. Определение. Пусть $f(\cdot)$ — квазинорма на пространстве $V = \mathbf{R}^n$ или $\mathbf{C}^n$. Функцию

$$f^D(y) \equiv \max_{f(x)=1} \operatorname{Re} y^* x$$

называют *двойственной нормой* к *f*.

Прежде всего отметим корректность определения двойственной нормы как функции на *V*. Функция $\operatorname{Re} y^* x$ при каждом фиксированном векторе $y \in V$ непрерывна по *x* и множество {*x: f(x)*=1} компактно в *V* в силу следствия 19.4.8. Тогда потеореме Вейерштрасса максимальное значение функции $\operatorname{Re} y^* x$ достигается в некоторой точке $x_0 \in \{x: f(x) = 1\}$.

Если числовой параметр *c* удовлетворяет условию $|c| = 1$, то из свойства абсолютной однородности функции *f* выводим, что

$$\max_{f(x)=1} |y^* x| = \max_{f(x)=1} \max_{|c|=1} \operatorname{Re} c y^* x = \max_{f(x)=1} \max_{|c|=1} \operatorname{Re} y^* (cx) =$$
$$= \max_{|c|=1} \max_{f(x/c)=1} \operatorname{Re} y^* x = \max_{f(x)=1} \operatorname{Re} y^* x.$$

Следовательно, можно дать эквивалентное и более удобное в некоторых случаях определение двойственной нормы:

$$f^D(y) = \max_{f(x)=1} |y^* x|. \qquad (19.4.12а)$$

Наконец, необходимо отметить, что функция f^D действительно заслуживает название *двойственной нормы.* Функция $f^D(\cdot)$, очевидно, абсолютно однородна; она положительна, ибо при $y \neq 0$, используя абсолютную однородность функции $f(\cdot)$, получаем

$$f^D(y) = \max_{f(x)=1} |y^* x| \geqslant \left| y^* \frac{y}{f(y)} \right| = \frac{\|y\|_2^2}{f(y)} > 0.$$

Замечательная особенность двойственной нормы $f^D(\cdot)$ состоит в том, что она всегда подчиняется неравенству треугольника, даже когда для исходной функции $f(\cdot)$ неравенство треугольника не имеет места:

$$f^D(y+z) = \max_{f(x)=1} |(y+z)^* x| \leqslant \max_{f(x)=1} [|y^* x| + |z^* x|] \leqslant$$
$$\leqslant \max_{f(x)=1} |y^* x| + \max_{f(x)=1} |z^* x| = f^D(y) + f^D(z).$$

Поэтому двойственная норма к квазинорме является на самом деле нормой.

Таким образом, построение двойственной нормы к любой квазинорме приводит уже к норме. Чаще всего описанная конструкция применяется в ситуации, когда квазинорма фактически есть норма.

Простые неравенства с двойственной нормой даны в следующей лемме. Мы увидим, что это естественные обобщения неравенства Коши — Шварца.

19.4.13. Лемма. *Пусть* $f(\cdot)$ *— квазинорма на* $V = \mathbf{C}^n$ *или* $\mathbf{R}^n$. *Тогда*

$$|y^*x| \leqslant f(x) f^D(y), \qquad |y^*x| \leqslant f^D(x) f(y)$$

для всех векторов $x,\ y \in V$.

Доказательство. При $x \neq 0$ имеют место соотношения

$$\left| y^* \frac{x}{f(x)} \right| \leqslant \max_{f(z)=1} |y^*z| = f^D(y);$$

следовательно, $|y^*x| \leqslant f(x) f^D(y)$. Последнее неравенство также справедливо при $x = 0$, что доказывает первое утверждение леммы. Второе утверждение вытекает из первого, поскольку $|y^*x| = |x^*y|$.

Легко найти двойственные к некоторым простейшим векторным нормам. При $x,\ y \in \mathbf{C}^n$ можно выписать следующий частный случай неравенства Гёльдера:

$$|y^*x| = \left| \sum_{i=1}^n \bar{y}_i x_i \right| \leqslant \sum_{i=1}^n |\bar{y}_i x_i| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |y_i| \sum_{j=1}^n |x_j| = \|y\|_\infty \|x\|_1. \tag{19.4.14}$$

Для любого фиксированного вектора y равенство в (19.4.14) наступает, когда x является единичным (по норме $\|\cdot\|_1$) вектором, у которого все компоненты нулевые, кроме одной компоненты $x_i = 1$, где номер i определяется условием $|y_i| = \|y\|_\infty$. Аналогично, для любого фиксированного вектора x в соотношении (19.4.14) имеет место равенство, когда y выбирается единичным(по норме $\|\cdot\|_\infty$) вектором с компонентами $y_i = x_i/|x_i|$ для всех номеров i, таких, что $x_i \neq 0$, и $y_i = 0$ для остальных номеров.

Таким образом,

$$(\|y\|_1)^D = \max_{\|x\|_1=1} |y^*x| = \max_{\|x\|_1=1} \|y\|_\infty \|x\|_1 = \|y\|_\infty,$$

$$(\|y\|_\infty)^D = \max_{\|x\|_\infty=1} |y^*x| = \max_{\|x\|_\infty=1} \|y\|_1 \|x\|_\infty = \|y\|_1.$$

Значит, $(\|\cdot\|_1)^D = \|\cdot\|_\infty$ и $(\|\cdot\|_\infty)^D = \|\cdot\|_1$.

Для евклидовой нормы $\|\cdot\|_2$, при заданном ненулевом векторе y и произвольном векторе x в силу неравенства Коши— Шварца

$$|y^*x| = \left| \sum_{i=1}^n \bar{y}_i x_i \right| \leqslant \|y\|_2 \|x\|_2. \tag{19.4.15}$$

Равенство достигается, когда $x = y/\|y\|_2$. Проводя рассуждения, подобные использованным выше для l_1- и l_∞-норм, находим, что $(\|y\|_2)^D = \|y\|_2$, т. е. евклидова норма двойственна к себе самой.

Упражнение. Объяснить, почему неравенства из леммы 19.4.13 можно считать обобщениями неравенства Коши — Шварца (19.1.4).

Отметим, что в каждом из трех рассмотренных случаев (l_1-, l_2- и l_∞-норм) двойственная к двойственной норме совпадает с исходной нормой. Это не случайность — в теореме двойственности 19.5.14 из следующего параграфа утверждается, что такое совпадение имеет место во всех случаях.

Среди данных трех норм своей двойственной равна лишь евклидова норма. Нетрудно показать, что это также не случайно и вызвано тем, что в определении (19.4.12а) двойственной нормы под знаком модуля стоит выражение y^*x — евклидово скалярное произведение векторов x и y. Таким образом, это определение двойственности относительно евклидова скалярного произведения. В более общем определении двойственности под знаком модуля можно поставить скалярное произведение $\langle x, y\rangle = y^*Kx$, где $K = K^* > 0$, $K \in M_n$. Тогда двойственной к себе окажется норма $\|\cdot\| = \langle\cdot,\cdot\rangle^{1/2}$, порожденная этим скалярным произведением.

19.4.16. Теорема. *Пусть* $\|\cdot\|$ *— векторная норма на пространстве* $V = \mathbf{R}^n$ *или* $\mathbf{C}^n$, *а* $\|\cdot\|^D$ *— двойственная к ней, и пусть задано число* $c > 0$. *Тогда равенство* $\|x\| = c\|x\|^D$ *для всех* $x \in V$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $\|\cdot\| = \sqrt{c}\,\|\cdot\|_2$. *В частности, равенство* $\|\cdot\| = \|\cdot\|^D$ *верно тогда и только тогда, когда норма* $\|\cdot\|$ *совпадает с евклидовой нормой* $\|\cdot\|_2$.

Доказательство. Если

$$\|\cdot\| = \sqrt{c}\,\|\cdot\|_2,$$

то справедливы неравенства

$$\|x\|^D = \max_{\|y\|=1}|x^*y| = \max_{\|y\|_2=1/\sqrt{c}}|x^*y| = \max_{\|y\|_2=1}\left|x^*\frac{y}{\sqrt{c}}\right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}}\max_{\|y\|_2=1}|x^*y| = \frac{1}{\sqrt{c}}\|x\|_2^D = \frac{1}{\sqrt{c}}\|x\|_2 = \frac{1}{c}\|x\|$$

при любом векторе $x \in V$. В обратную сторону, если $\|\cdot\| = c\|\cdot\|^D$ при некотором $c > 0$ и $x \in V$, то из леммы 19.4.13 видим, что

$$\|x\|_2^2 = |x^*x| \leqslant \|x\|\|x\|^D = \frac{1}{c}\|x\|^2.$$

Таким образом, $\|x\| \geqslant \sqrt{c}\,\|x\|_2$. Чтобы получить оценку с другой стороны, можно использовать это неравенство, рассматривая при $x \neq 0$ цепочку соотношений

$$\frac{1}{c}\|x\| = \|x\|^D = \max_{\|y\|=1} |x^*y| = \max_{y\neq 0}\left|x^*\frac{y}{\|y\|}\right| =$$

$$= \max_{y\neq 0}\left|x^*\frac{y}{\|y\|_2}\right|\frac{\|y\|_2}{\|y\|} \leqslant \max_{y\neq 0}\left|x^*\frac{y}{\|y\|_2}\right|\frac{1}{\sqrt{c}} =$$

$$= x^*\frac{x}{\|x\|_2}\frac{1}{\sqrt{c}} = \|x\|_2\frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Здесь применено неравенство $\|y\|_2/\|y\| \leqslant 1/\sqrt{c}$, верное для любого вектора $y \neq 0$, и учтено то обстоятельство, что максимум модуля евклидова скалярного произведения заданного ненулевого вектора и вектора единичной евклидовой длины достигается, когда единичный вектор параллелен данному (это гарантируется неравенством Коши — Шварца). Следовательно, $\|x\| \leqslant \sqrt{c}\,\|x\|_2$ для всех $x \in V$. Принимая во внимание ранее доказанное неравенство $\|x\| \geqslant \sqrt{c}\,\|x\|_2$, заключаем, что фактически $\|x\| = \sqrt{c}\,\|x\|_2$ для любого вектора $x \in V$. Выбирая c = 1, получаем последнее утверждение теоремы: только евклидова норма совпадает со своей двойственной.

В заключение укажем, что можно придать разумный смысл понятию двойственного к вектору (так же, как и к векторной норме).

19.4.17. Определение. Пусть заданы вектор $x \in \mathbf{C}^n$ и норма $\|\cdot\|$ на $\mathbf{C}^n$. Множество

$$\{y \in \mathbf{C}^n\colon \|y\|^D\|x\| = y^*x = 1\}$$

называют *двойственным к вектору x по отношению к норме* $\|\cdot\|$. Упорядоченную пару векторов $(x, y) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$ называют *двойственной парой по отношению к норме* $\|\cdot\|$, если вектор y принадлежит множеству, двойственному к x по отношению к $\|\cdot\|$

В следствии 10.5.15 устанавливается, что множество, двойственное к произвольному вектору (не равному нулю) $x \in \mathbf{C}^n$ по отношению к векторной норме $|\cdot|$, всегда непусто. Оно может содержать один элемент или более.

Например, в случае евклидовой нормы $|\cdot| = |\cdot|_2$ двойственным к каждому вектору $x \in \mathbf{C}^n$ будет только один вектор — сам вектор x. В случае нормы $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$, однако, лишь один вектор является двойственным к $x = [0, 1]^T$, но бесконечно много векторов двойственно к $x = [1, 1]^T$. См. задачу 13 далее.

19.5. Геометрические свойства векторных норм

Основной геометрической характеристикой векторной нормы является единичный шар, рассматривая который можно лучше понять, что представляет собой данная норма.

9.5.1. Определение. Пусть $\|\cdot\|$— векторная норма на вещественном или комплексном векторном пространстве *V*, и пусть заданы точка *x* из *V* и число *r* > 0. *Шаром радиуса r с центром в точке x* называют множество

$$B_{\|\cdot\|}(r;\ x) \equiv \{y \in V:\ \|y - x\| \leqslant r\}.$$

Единичным шаром для нормы $\|\cdot\|$ называют множество

$$B_{\|\cdot\|} \equiv B_{\|\cdot\|}(1;\ 0) = \{y \in V:\ \|y\| \leqslant 1\}.$$

Упражнение. Показать, что для любых *r* > 0 и $x \in V$ справедливы представления

$$B(r;\ x) = \{y + x:\ y \in B(r;\ 0)\} = x + B(r;\ 0).$$

Шар данного радиуса с центром в точке *x* имеет тот же вид, что и шар такого радиуса с центром в нуле, и может быть получен параллельным переносом последнего в точку *x*. Например, продолжая предыдущее упражнение, можно записать также представление $B(r;\ x) = x + r \cdot B_{\|\cdot\|}$. Единичный шар является геометрическим досье нормы и полностью характеризует эту норму в силу свойства абсолютной однородности (фактически можно обойтись только границей шара $B_{\|\cdot\|}$). Две нормы совпадают тогда и только тогда, когда совпадают их единичные шары. В настоящем параграфе мы точно установим, какие подмножества из $\mathbf{C}^n$ могут играть роль единичного шара какой-либо векторной нормы.

Упражнение. Изобразить единичные шары для l_1-, l_2- и l_∞-норм на $\mathbf{R}^2$. Можно ли установить какие-нибудь включения?

Какие точки принадлежат одновременно границам единичных шаров всех l_p-норм на $\mathbf{R}^2$? Изобразить несколько единичных шаров для других l_p -норм.

Упражнение. Пусть $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ — две нормы на векторном пространстве *V*. Показать, что неравенство $\|x\|_\alpha \leqslant \|x\|_\beta$ имеет место для всех $x \in V$ в том и только в том случае, когда $B_{\|\cdot\|_\beta} \subset B_{\|\cdot\|_\alpha}$.

Таким образом, естественное отношение частичного порядка на векторных нормах можно выразить в терминах геометрических включений. Что происходит с единичным шаром, когда норма умножается на положительную константу?

Упражнение, Пусть $\|\cdot\|$ — векторная норма на V, α — некоторое число и $x \in V$. Показать, что условие $\|\alpha x\| = \|x\|$ влечет за собой равенство $x = 0$ или $|\alpha| = 1$. Вывести отсюда заключение, что каждый «луч» $\{\alpha x: \alpha > 0\}$ пересекает границу единичного шара в точности один раз.

19.5.2. Определение. Векторную норму называют *полиэдральной,* если ее единичный шар является многогранником.

Здесь и далее рассматриваются лишь выпуклые многогранники. Выпуклым многогранником называется выпуклая оболочка конечного множества точек (или, эквивалентно, ограниченное пересечение конечного числа замкнутых полупространств), см. приложение В.

Упражнение. Какие из l_p-норм полиэдральны?

Упражнение. Если норма $\|\cdot\|$ полиэдральна и матрица $S \in M_n$ невырождеина, будет ли норма $\|\cdot\|_S$ полиэдральной?

В векторном пространстве с нормой очень легко определить основные топологические понятия открытого и замкнутого множеств.

19.5.3. Определение. Пусть $\|\cdot\|$ — норма в вещественном или комплексном векторном пространстве V и S — подмножество в V. Точку $x \in S$ называют *внутренней точкой* множества S, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что $B_{\|\cdot\|}(\varepsilon; x) \subset S$. Множество S называют *открытым,* если каждая точка из S является внутренней. Множество S называют *замкнутым,* если дополнение к нему — открытое множество. *Предельная точка* множества S есть такая точка $x \in V$, что $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(k)} = x$ (по норме $\|\cdot\|$) для некоторой последовательности $\{x^{(k)}\} \subset S$. *Замыканием множества S* называют объединение S с множеством всех его предельных точек. *Границу множества* S образует пересечение замыкания множества S с замыканием дополнения к S. Множество S *ограничено,* если существует число $M > 0$, при котором $S \subset B_{\|\cdot\|}(M; 0)$. Множество S *компактно,* если из любого его покрытия $\bigcup\limits_{\alpha} S_\alpha \supset S$ открытыми множествами S_α можно выбрать конечный набор множеств $S_{\alpha_1}, \ldots, S_{\alpha_N}$, образующий подпокрытие $\bigcup\limits_{i=1}^{N} S_{\alpha_i} \supset S$.) Можно показать, что компактное (по этому определению) множество в нормированном пространстве обязательно замкнуто. Такие множества иногда называют *бикомпактными* или *компактами,* а компактными множествами называют в этом случае множества с бикомпактным замыканием

Упражнение. Показать, что единичный шар $B_{\|\cdot\|}$ является замкнутым ограниченным множеством для любой векторной нормы $\|\cdot\|$ на произвольном векторном пространстве *V*.

Упражнение. Пусть *V* — конечномерное вещественное или комплексное векторное пространство и $S \subset V$ — ограниченное замкнутое множество. Используя тот факт, что пространство *V* изоморфно $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{C}^n$ при некотором *n*, показать, что *S* компактно (см. приложение Е). В произвольном конечномерном векторном пространстве *V* (в частности, в $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{C}^n$) две различные нормы в силу их эквивалентности задают одну топологию, а именно ту единственную топологию на *V*, в которой непрерывны определенные в *V* операции сложения и умножения на скаляр. Таким образом, топологические понятия в *V* по существу не связаны с нормами. Например, замкнутое (в смысле определения 19.5.3) в некоторой норме множество из *V* неизбежно замкнуто в любой другой норме на *V*. Это позволяет употреблять топологические понятия в *V* без указания какой-либо конкретной нормы.

19.5.4. Утверждение. *Если векторная норма* $\|\cdot\|$ *задана на нетривиальном (т. е. ненулевой размерности) вещественном или комплексном векторном пространстве V, то точка* 0 *будет внутренней для единичного шара* $B_{\|\cdot\|}$.

Этот факт обусловлен свойствами абсолютной однородности и положительности нормы $\|\cdot\|$, которые влекут за собой включение $B_{\|\cdot\|}(1/2;\ 0) \subset B_{\|\cdot\|}(1,\ 0)$. Первый шар вместе со своей границей лежит внутри единичного.

19.5.5. Утверждение. *Единичный шар векторной нормы является уравновешенным множеством, т. е. любая точка x единичного шара лежит в нем вместе со всеми точками вида* αx, *где* $|\alpha| = 1$.

Это вытекает из свойства абсолютной однородности векторной нормы.

19.5.6. Утверждение. *Единичный шар векторной нормы в конечномерном векторном пространстве компактен.*

Он является ограниченным в силу абсолютной однородности векторной нормы и замкнутым, поскольку норма — всегда непрерывная функция. В конечномерном случае замкнутое ограниченное множество компактно, но это не всегда верно в бесконечномерных пространствах, более того, нормированное векторное пространство, в котором какой-либо шар компактен, обязательно конечномерно. Из свойств компактных множеств мы чаще всего будем использовать теорему Вейерштрасса (см. приложение Е), гласящую, что непрерывная вещественнозначная функция на компактном множестве ограничена и достигает своих точной верхней и точной нижней граней на этом множестве. Учитывая последний факт, точные грани такой функции мы обычно называем ее «максимумом» (max) и «минимумом» (min) соответственно.

Упражнение. Определим комплексное векторное пространство l_2 векторов $x=(x_i)$ со счетным набором компонент, обобщая на этот случай понятие l_2-нормы в конечномерном пространстве:

$$\|x\|_2=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2\right)^{1/2}.$$

Показать, что $\|e_k-e_j\|_2=\sqrt{2}$ для любой пары единичных базисных векторов e_k и e_j при $k\neq j$ и $k,\ j=1,\ 2,\ \ldots.$

Подразумевается, что все указанные векторы — просто координатные:

$$e_i=(\underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{i-1},\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots),\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,$$

Таким образом, никакая подпоследовательность из $\{e_k\}$ не может быть последовательностью Коши; значит, последовательность $\{e_k\}$ не содержит сходящихся подпоследовательностей. Вывести отсюда, что единичный шар в l_2 не может быть компактным.

19.5.7. Утверждение. *Единичный шар векторной нормы является выпуклым множеством.*

Доказательство. При $\|x\|\leqslant 1,\ \|y\|\leqslant 1$ и $\alpha\in[0,\ 1]$ выполнены соотношения

$$\|\alpha x+(1-\alpha)y\|\leqslant\|\alpha x\|+\|(1-\alpha)y\|=\alpha\|x\|+(1-\alpha)\|y\|\leqslant$$
$$\leqslant\alpha+(1-\alpha)=1.$$

Значит, точка $\alpha x+(1-\alpha)y$ лежит в единичном шаре вместе с x и y.

Наличие приведенных выше свойств единичного шара оказывается не только необходимым, но и достаточным условием характеризации нормы.

19.5.8. Теорема. *Множество B в конечномерном вещественном или комплексном пространстве тогда и только тогда есть единичный шар некоторой векторной нормы на V, когда это множество* (I) *компактно,* (II) *выпукло,* (III) *уравновешено,* (IV) *содержит* 0 *в качестве внутренней точки.*

Доказательство. Необходимость условий (I) — (IV) уже была отмечена. Убедимся, что выполнения этих условий достаточно, чтобы определить норму. Рассмотрим произвольную ненулевую точку (вектор) $x\in V$ и построим отрезок $\{\alpha x\colon 0\leqslant\alpha\leqslant 1\}$ луча от начала координат через точку x. Этот луч пересекает границу единичного шара в единственной точке. Длина отрезка луча от начала координат до этой точки служит единицей при измерении расстояний вдоль луча. «Длина» вектора x определяется как длина отрезка луча от начала координат до x, выраженная с помощью такой единицы. Более формально, определим величину $\|x\|$ равенствами

$$\|x\| = 0, \quad \text{если} \quad x = 0,$$

$$\|x\| = \min\left\{\frac{1}{t}\colon t > 0 \text{ и } tx \in B\right\}, \quad \text{если} \quad x \neq 0.$$

Эта функция от x корректно определена, конечна и положительна для каждого ненулевого вектора x, поскольку множество B компактно и включает в себя 0 как внутреннюю точку. Используя предположение об уравновешенности, легко увидеть, что функция $\|\cdot\|$ абсолютно однородна. Остается проверить только неравенство треугольника.

Если x и y — заданные ненулевые векторы, то векторы $x/\|x\|$ и $y/\|y\|$ будут единичными и попадут на границу множества B.
В силу выпуклости множества B вектор

$$z = \frac{\|x\|}{\|x\| + \|y\|}\frac{x}{\|x\|} + \frac{\|y\|}{\|x\| + \|y\|}\frac{y}{\|y\|}$$

также должен лежать в B. Следовательно, выполнено неравенство $\|z\| \leqslant 1$, которое, как легко проверить, эквивалентно неравенству $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. D

Упражнение. Провести детальное доказательство теоремы 19.5.8, тщательно указывая, в каких рассуждениях используется каждое из четырех предположений.

Все уже знакомые нам l_p-нормы обладают следующим свойством: норма $\|x\|$ зависит только от *абсолютных значений* компонент вектора x. Кроме того, каждая l_p-норма является *возрастающей функцией* абсолютных значений компонент данного вектора. Эти два свойства связаны между собой.

19.5.9.Определение. Если $x = [x_i]^T \in \mathbf{F}^n$ $(\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{C}^n)$, то полагаем $|x| \equiv [|x_i|]^T$. Говорят, что $|x| \leqslant |y|$, если $|x_i| \leqslant |y_i|$ для каждого $i = 1, ..., n$. Векторную норму $\|\cdot\|$ на $\mathbf{F}^n$ называют

(a) *монотонной,* если неравенство $|x| \leqslant |y|$ влечет за собой неравенство норм $\|x\| \leqslant \|y\|$ для всевозможных векторов $x, y \in \mathbf{F}^n$;

(b) *абсолютной,* если равенство $\|x\| = \||x|\|$ верно для всех векторов $x \in \mathbf{F}^n$.

19.5.10. Теорема. *Векторная норма* $\|\cdot\|$ *на* $\mathbf{F}^n$ $(\mathbf{R}^n$ *или* $\mathbf{C}^n)$ *монотонна тогда и только тогда, когда она абсолютна.*

Доказательство. Пусть норма $\|\cdot\|$ монотонна, $x \in \mathbf{F}^n$ и $y \equiv |x|$. Тогда одновременно $|y| \leqslant |x|$ и $|x| \leqslant |y|$, поэтому

$\|y\| \leqslant \|x\|$ и $\|x\| \leqslant \|y\|$, следовательно, норма $\|\cdot\|$ абсолютна.
Пусть теперь норма $\|\cdot\|$ абсолютна. Зададим некоторый вектор $x = [x_i]^T \in \mathbf{F}^n$, натуральное k в пределах $1 \leqslant k \leqslant n$ и число $\alpha \in [0, 1]$. Тогда

$$\|[x_1, \ldots, x_{k-1}, \alpha x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n]^T\| =$$
$$= \left\| \frac{1}{2}(1-\alpha)[x_1, \ldots, x_{k-1}, -x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n]^T + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}(1-\alpha)x + \alpha x \right\| \leqslant \frac{1}{2}(1-\alpha)\|[x_1, \ldots, x_{k-1}, -x_k,$$
$$x_{k+1}, \ldots, x_n]^T\| + \frac{1}{2}(1-\alpha)\|x\| + \alpha\|x\| =$$
$$= \frac{1}{2}(1-\alpha)\|x\| + \frac{1}{2}(1-\alpha)\|x\| + \alpha\|x\| = \|x\|. \tag{19.5.11}$$

Предположение о том, что норма абсолютна, используется только в предпоследнем равенстве. Повторяя выкладки (19.5.11) для различных компонент, можно показать, что абсолютная норма удовлетворяет неравенству

$$\|[\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_n x_n]^T\| \leqslant \|[x_1, \ldots, x_n]^T\| \tag{19.5.12}$$

при каждом $x \in \mathbf{F}^n$ и всевозможных $\alpha_k \in [0, 1]$, $k = 1, \ldots, n$.
Наконец, если $|x| \leqslant |y|$, то для каждого номера $k = 1, \ldots, n$ найдутся такие вещественные α_k, $\alpha_k \in [0, 1]$, и θ_k, что $x_k = \alpha_k e^{i\theta_k} y_k$. Используя определяющее свойство абсолютной нормы, приходим к соотношениям

$$\|x\| = \|[\alpha_1 e^{i\theta_1} y_1, \ldots, \alpha_n e^{i\theta_n} y_n]^T\| = \|[\alpha_1 |y_1|, \ldots, \alpha_n |y_n|]^T\| \leqslant$$
$$\leqslant \|[|y_1|, \ldots, |y_n|]^T\| = \|y\|,$$

которые показывают, что норма должна быть монотонной. Неравенство в (19.5.11) наводит на мысль о возможности введения несколько более слабого понятия монотонности.

19.5.13. Определение. Векторную норму $\|\cdot\|$ на $\mathbf{F}^n$ ($\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{C}^n$) называют *слабо монотонной,* если неравенство

$$\|[x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n]^T\| \leqslant$$
$$\leqslant \|[x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n]^T\|$$

верно для всех векторов $x = [x_i]^T \in \mathbf{F}^n$ и чисел $k = 1, \ldots, n$.
Если векторная норма $\|\cdot\|$ слабо монотонна и $\alpha \in [0, 1]$, то

$$\|[x_1, \ldots, x_{k-1}, \alpha x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n]^T\| =$$
$$= \|(1-\alpha)[x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n]^T + \alpha x\| \leqslant$$
$$\leqslant (1-\alpha)\|[x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n]^T\| + \alpha\|x\| \leqslant$$
$$\leqslant (1-\alpha)\|x\| + \alpha\|x\| = \|x\|.$$

Таким образом, слабо монотонная норма удовлетворяет также на вид более сильному неравенству (19.5.12).

Следовательно, если у заданной точки на единичной сфере слабо монотонной нормы абсолютное значение одной из координат уменьшать до нуля, то построенный таким способом прямолинейный отрезок должен лежать в единичном шаре. Монотонная норма, очевидно, является слабо монотонной, но обратное неверно, как станет понятно из следующих упражнений.

Упражнение. Доказать, что параллелограмм с вершинами в точках $\pm[2, 2]^T$ и $\pm[1, -1]^T$ является единичным шаром некоторой векторной нормы на $\mathbf{R}^2$, не обладающей свойством слабой монотонности.

Упражнение. Можно ли считать функцию $f(x) = |x_1 - x_2| + |x_2|$ векторной нормой на $\mathbf{R}^2$? Является ли она монотонной? Слабо монотонной? Изобразить единичный шар этой нормы.

Упражнение. Пусть $\|\cdot\|$ — абсолютная норма на $\mathbf{R}^2$. Показать, что вместе с точкой $x = [x_1, x_2]^T$ границы единичного шара на этой границе лежат также точки $[\pm x_1, \pm x_2]^T$ (для всех четырех возможных способов выбора знаков). Проиллюстрировать это геометрическое свойство рисунком. Изобразить единичный шар какой-либо нормы на $\mathbf{R}^2$, обладающей свойством абсолютности. Что происходит в $\mathbf{R}^n$?

Упражнение. Изобразить многоугольник на $\mathbf{R}^2$ с вершинами в точках

$$\pm[0, 1]^T, \ \pm[1, 0]^T \text{ и } \pm[1, 1]^T.$$

Объяснить, почему этот многоугольник можно трактовать как единичный шар некоторой слабо монотонной векторной нормы на $\mathbf{R}^2$, но не монотонной или абсолютной векторной нормы;

Выпуклость единичного шара векторной нормы — это факт, имеющий многочисленные глубокие, а в некоторых случаях поразительные следствия. Одно из них приводится ниже в виде теоремы двойственности, которая формулируется в общем виде в терминах квазинорм. Ключевые идеи доказательства имеют очень естественный геометрический смысл. А именно, наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее заданное множество S (замкнутая выпуклая оболочка CoS, см. приложение В), рассматривается как пересечение всех замкнутых полупространств (полупространство — все то, что лежит по одну сторону гиперплоскости), содержащих *S*. Кроме того, если имеется точка *x,* лежащая в любом полупространстве, в котором лежит *S,* то точка *x* должна принадлежать замкнутой выпуклой оболочке множества *S*. Эти простые представления непосредственно приводят к важному факту, что двойственная к двойственной векторной норме совпадает с изначальной нормой.

19.5.14. Теорема (двойственности). *Пусть* $f(\cdot)$ *— квазинорма на* $V = \mathbf{R}^n$ *или* $\mathbf{C}^n$, f^D*— двойственная к ней корма и* f^{DD}*— норма, двойственная к* f^D. *Через*

$$B \equiv \{x \in V\colon f(x) \leqslant 1\}, \quad B'' \equiv \{x \in V\colon f^{DD}(x) \leqslant 1\}$$

обозначим «единичный шар» квазинормы f и единичный шар нормы f^{DD} *соответственно. Тогда*

$$B \subset B'' = \mathrm{Co}B$$

и, следовательно, $f^{DD}(x) \leqslant f(x)$ *для всех* $x \in V$. *Если f — векторная* $x \in V$. *норма на V, то* $B = B''$ *и* $f^{DD} = f$.

Доказательство. При заданном векторе $x \in V$ в лемме 19.4.13 утверждается, что

$$|y^*x| \leqslant f(x) f^D(y)$$

для любого $y \in V$. Следовательно,

$$f^{DD}(x) = \max_{f^D(y)=1} |y^*x| \leqslant \max_{f^D(y)=1} f(x) f^D(y) = f(x).$$

Таким образом, $f^{DD}(x) \leqslant f(x)$ для всех векторов $x \in V$, что эквивалентно геометрическому утверждению о включении $B \subset B''$.

Для доказательства равенства $B'' = \mathrm{Co}B$ удобно использовать характеризацию (19.4.18) двойственной нормы и то обстоятельство, что множество $\{t \in V\colon \mathrm{Re}\, t^*v \leqslant 1\}$ является замкнутым полупространством общего вида, содержащим начало координат. Привлекая определение двойственной нормы, заметим, что для заданной точки $u \in B''$

$$\begin{aligned} u \in \{t\colon \mathrm{Re}\, t^*v \leqslant 1 \ &\text{для каждого } v, \text{ такого, что } f^D(v) \leqslant 1\} = \\ = \{t\colon \mathrm{Re}\, t^*v \leqslant 1 \ &\text{для каждого } v, \text{ такого, что } \mathrm{Re}\, v^*w \leqslant 1 \\ &\text{для каждого } w, \text{ такого, что } f(w) \leqslant 1\} = \\ = \{t\colon \mathrm{Re}\, t^*v \leqslant 1 \ &\text{для каждого } v, \text{ такого, что } \mathrm{Re}\, w^*v \leqslant 1 \\ &\text{для всех } w \in B\}. \end{aligned}$$

Это означает, что точка *u* лежит в каждом замкнутом полупространстве, содержащем любую точку из *B,* т. е. содержащем множество *B*. Поскольку пересечение всех таких замкнутых полупространств образует Co *B* — замкнутую выпуклую оболочку множества *B,* заключаем, что $u \in \mathrm{Co}\, B$. Но точка $u \in B''$ была выбрана произвольно, поэтому $B'' \subset \mathrm{Co}\, B$. С другой стороны, выпуклая оболочка Co *B* есть пересечение всевозможных выпуклых множеств, содержащих *B;* тогда $\mathrm{Co}\, B \subset B''$. Следовательно, верно равенство $B'' = \mathrm{Co}\, B$.

Если квазинорма *f* фактически является нормой, то ее замкнутый единичный шар *B* есть выпуклое множество, поэтому $B = \mathrm{Co}\, B$, и тогда мы получаем $B \subset B'' \subset B$ и $B = B''$. Поскольку единичные шары норм *f* и f^{DD} совпадают, то совпадают и сами эти нормы.

В качестве одного из приложений теоремы двойственности приведем следующий полезный результат. Это частный случай конечномерного варианта важного и весьма общего результата из функционального анализа, известного как теорема Хана—Банаха.

19.5.15. Следствие. *Пусть заданы вектор* $y \in \mathbf{C}^n$ *и векторная норма* $\|\cdot\|$ *на* $\mathbf{C}^n$. *Тогда существует такой вектор* $y_0 \in \mathbf{C}^n$, *что*

(a) $|(y_0)^* x| \leqslant \|x\|$ *для всех* $x \in \mathbf{C}^n$,

(b) $(y_0)^* y = \|y\|$.

Вектор y_0 *удовлетворяет помимо п.* (bЬ) *равенству* $\|y_0\|^D = 1$, *но он не обязательно единствен.*

Доказательство. Как известно,

$$\|y\| = (\|y\|^D)^D = \max_{\|z\|^D = 1} |y^* z|$$

по теореме двойственности. В силу компактности единичной сферы векторной нормы $\|\cdot\|^D$ максимум здесь действительно достигается на некотором (не обязательно единственном) векторе $z = y_0$, для которого $\|y_0\|^D = 1$.. Следовательно, $\|y\| = |y^* y_0|$. За счет умножения вектора y_0 на подходящее число модуля 1 скалярное произведение $y^* y_0$ можно сделать положительным. Тем самым приходим к утверждению (b). Из леммы 19.4.13 известно, что

$$|(y_0)^* x| \leqslant \|y_0\|^D \|x\| = \|x\| \text{ для всех } x \in \mathbf{C}^n.$$

Поэтому для вектора y_0 утверждение (а) также верно. Заметим, что свойство (а) обеспечивает справедливость неравенства $\|y_0\|^D \leqslant 1$, а свойство (b) приводит к равенству $\|y_0\|^D = 1$.

Микромодуль 54
Индивидуальные тестовые задания

Задачи к п. 19.1

1. Обозначим через e_i единичный i-й координатный вектор в $\mathbf{C}^n$ и предположим, что на $\mathbf{C}^n$ задана полунорма $\|\cdot\|$. Показать, что справедливо неравенство

$$\|x\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|e_i\|.$$

2. Показать, что если $\|\cdot\|$ — векторная полунорма на V, то множество $V_0 = \{v \in V\colon \ \|v\| = 0\}$ является подпространством пространства V. Его называют *нуль-подпространством* или *ядром* полунормы $\|\cdot\|$.

(a) Показать, что полунорма $\|\bullet\|$ становится нормой на любом подпространстве V_1 в V, удовлетворяющем условию $V_0 \cap V_1 = \{0\}$.

(b) Рассмотреть отношение $x \sim y$, определенное следующим образом:

$x \sim y$ тогда и только тогда, когда $\|x - y\| = 0$.

Показать, что оно будет отношением эквивалентности на V, что классы эквивалентности в данном случае задаются равенствами

$\hat{x} = \{x + y \in V\colon \ y \in V_0\}$ и что множество этих классов эквивалентности образует естественным образом векторное пространство (называемое факторпространством). Проверить корректность определения функции $\|\hat{x}\| = \{\|x\|\colon \ x \in \hat{x}\}$ и показать, что она является векторной нормой на факторпространстве.

(c) Объяснить, почему каждая векторная полунорма естественным образом индуцирует норму.

(d) Задает ли определение $\|x\| \equiv 0$ полунорму?

(e) Привести пример нетривиальной (отличной от тождественного нуля) полунормы, которая не является нормой.

3. Определим «угол» между ненулевыми векторами x и y как величину

$$\arccos\left(\frac{|\langle x, y\rangle|}{(\langle x, x\rangle \langle y, y\rangle)^{1/2}}\right),$$

(точнее сказать, что эта величина характеризует угол между одномерными подпространствами, порожденными этими векторами x и y) изменяющуюся в пределах от 0 до $\pi/2$. Показать корректность этого определения для произвольного скалярного произведения

$\langle\cdot, \cdot\rangle$.

4. Проверить, что для любой нормы, порожденной скалярным произведением (как в следствии 19.1.7), имеет место *тождество параллелограмма*

$$\frac{1}{2}(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2)=\|x\|^2+\|y\|^2. \qquad (19.1.8)$$

Чем вызвано такое название соотношения (19.1.8)? Наличие тождества параллелограмма (19.1.8) фактически оказывается необходимым и достаточным условием того, что данная норма порождается некоторым скалярным произведением. См. задачу 10.

5. Показать, что функция

$$\|x\|_\infty \equiv \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$$

на $\mathbf{C}^n$ является векторной нормой, которая непорождается скалярным произведением.

6. Пусть норма $\|\cdot\|$ порождена скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Показать, что

$$\operatorname{Re}\langle x, y\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2). \qquad (19.1.9)$$

Это соотношение известно как *тождество поляризации.* Показать также справедливость равенства

$$\operatorname{Re}\langle x, y\rangle=\frac{1}{2}(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2).$$

7. Показать, что для l_1-нормы $\|x\|_1\equiv|x_1|+\ldots+|x_n|$ на пространстве $\mathbf{C}^n$ справедливы аксиомы нормы из определения 19.1.1, но тождество поляризации (19.1.9) не имеет места. Следовательно, l_1-норма не порождается скалярным произведением.

8. Если векторная норма $\|\cdot\|$ на V порождена скалярным произведением, то верно неравенство

$$\|x+y\|\|x-y\|\leqslant\|x\|^2+\|y\|^2$$

для всех векторов $x, y\in V$. В каких случаях оно превращается в равенство? Верно ли это неравенство для всех векторных норм? Дать ему геометрическую интерпретацию.

9. Пусть заданы векторы x и y в пространстве V с нормой $\|\cdot\|$, порожденной скалярным произведением, и пусть вектор y ненулевой. Показать, что величина $\|x-\alpha y\|$ принимает минимальное по α значение при $\alpha_0=\langle x, y\rangle/\|y\|^2$ и что векторы $x-\alpha_0 y$ и y ортогональны.

10. Наличие тождества параллелограмма является достаточным условием того, что заданная норма порождается некоторым скалярным произведением. Проверить это утверждение несложно, но требуется некоторая изобретательность. Начнем со случая векторного

пространства V над полем вещественных чисел **R**. Норму на V обозначим через $\|\cdot\|$.

(a) Пусть

$$\langle x,\ y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}. \qquad (19.1.10)$$

Показать, что для этой функции $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ справедливы аксиомы (1), (1a) и (4) из определения 19.1.3 и что верно равенство $\langle x,\ x\rangle = \|x\|^2$.

(b) При помощи соотношения (19.1.8) проверить равенства

$$4\langle x,\ y\rangle + 4\langle z,\ y\rangle = 2\|x+y\|^2 + 2\|z+y\|^2 - 2\|x\|^2 - 2\|z\|^2 - 4\|y\|^2 = \\ = \|x+2y+z\|^2 - \|x+z\|^2 - 4\|y\|^2 = 4\langle x+z,\ y\rangle$$

и вывести заключение о справедливости аксиомы (2) в определении 19.1.3.

(c) Используя аксиому аддитивности, показать, что

$$m\langle m^{-1}nx,\ y\rangle = \langle nx,\ y\rangle = n\langle x,\ y\rangle,$$

каковы бы ни были натуральные *m* и *n*. Опираясь на соотношения (19.1.8) и (19.1.10), обосновать равенство $\langle -x, y\rangle = -\langle x, y\rangle$ и сделать вывод, что для любого рационального *a* верна аксиома однородности $\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle$.

(В силу непрерывности по $t \in \mathbf{R}$ функций $\|tx+y\|$ и $\|tx-y\|$ из определения (19.1.10) и тождества (19.1.8) убеждаемся в непрерывности функции $\langle tx,\ y\rangle$. Следовательно, аксиома однородности верна не только для рациональиых *t=a,* но и для всех $t \in \mathbf{R}$.)

(d) Пусть $p(t) = t^2\|x\|^2 + 2t\langle x,\ y\rangle + \|y\|^2,\quad t \in \mathbf{R}$. Показать, что $p(t) = \|tx+y\|^2$ для всех рациональных *t*. Учитывая непрерывность функции *p(t),* доказать неравенство $p(t) \geqslant 0$ для всех $t \in \mathbf{R}$. Вывести неравенство Коши — Шварца $|\langle x,\ y\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2$ из факта неположительности дискриминанта квадратного уравнения $p(t) = 0$.

(e) Пусть теперь задано число $a \in \mathbf{R}$. Показать, что

$$|\langle ax,\ y\rangle - a\langle x,\ y\rangle| = |\langle (a-b)x,\ y\rangle + (b-a)\langle x,\ y\rangle| \leqslant \\ \leqslant |\langle (a-b)x,\ y\rangle| + |(b-a)\langle x,\ y\rangle| \leqslant 2|a-b|\|x\|\|y\|$$

при любом рациональном *b*. Последнее выражение можно сделать сколь угодно близким к нулю, следовательно, аксиома однородности (3) в определении 19.1.3 справедлива. Таким образом, функция $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ является скалярным произведением на *V,*

Внимательный читатель заметит, что неравенство треугольника для нормы $\|\cdot\|$ (аксиома (3) в определении 19.1.3) не использовалось в этих рассуждениях. Таким образом, справедливость аксиом (1), (1a) и

(2) из определения 19.1.1 при наличии тождества параллелограмма (19.1.8) позволяет заключить, что функция $\|\cdot\|$ является нормой, порожденной скалярным произведением. Неравенство треугольника возникает уже как следствие.

(f) В случае комплексного векторного пространства *V* положим

$$\langle x, y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2} + \frac{i(\|x+iy\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)}{2}.$$

Вещественная часть функции $\langle x, y\rangle$ определяет скалярное произведение на множестве *V*, если его рассматривать как вещественное (над полем **R**) векторное пространство (например, поле комплексных чисел **C** является двумерным вещественным векторным пространством). Используя этот факт и тождество (19.1.8), показать, что функция $\langle\cdot,\cdot\rangle$ есть скалярное произведение на векторном пространстве *V* над полем **C**.

П. Жордан и Дж. фон Нейман, по-видимому, первые доказали, что наличие тождества параллелограмма необходимо и достаточно, чтобы заданная векторная норма порождалась скалярным произведением.

Задачи к п. 19.2

1. Показать, что при $0 < p < 1$ для функции $\|\cdot\|_p$ на пространстве $\mathbf{C}^n$ (см. пример 19.2.4) справедливы все аксиомы векторной нормы, кроме одной (здесь следует исключить тривиальную возможность $n = 1$). Какая аксиома нарушена? Привести соответствующий пример.
2. Показать, что $\|f\|_\infty = \lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_p$ для произвольной функции $f \in C[0, 1]$.
3. Как выглядит неравенство треугольника для нормы $\|\cdot\|_p$ на $C[0, 1]$? Предложить способ его доказательства, основанный на неравенстве Минковского (приложение В) для нормы $\|\cdot\|_p$ на $\mathbf{C}^n$.
4. Пусть имеются положительные числа $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Какие из следующих выражений задают векторную норму на $\mathbf{C}^n$?

(a) $\|x\| = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i |x_i|$.

(b) $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} p_i |x_i|^2\right)^{1/2}$.

(c) $\|x\| = \max\{p_1|x_1|, \ldots, p_n|x_n|\}$.

5. Пусть задана точка $x_0 \in [a, b]$. Показать, что функционал $\|f\|_{x_0} \equiv |f(x_0)|$ на $C[a, b]$ является полунормой, но не нормой.

6. Показать, что любая унитарно инвариантная векторная норма $\|\cdot\|$ на $\mathbf{C}^n$ задается формулой $\|\cdot\| = \alpha \|\cdot\|_2$ при некотором $\alpha > 0$ и что норма $\|\cdot\|_2$ — единственная унитарно инвариантная норма на $\mathbf{C}^n$, для которой $\|e_1\| = 1$.
7. Показать справедливость соотношений

$$\|y\|_\infty = \max_{\|x\|_1 = 1} |y^* x| \quad \text{и} \quad \|x\|_1 = \max_{\|y\|_\infty = 1} |x^* y|.$$

8. Используя результат предыдущей задачи, показать, что матрица A является изометрией для l_∞-нормы, если матрица A^* является изометрией для l_1-нормы, и наоборот.
9. Что представляет собой пересечение групп изометрий всех l_p-норм?

Задачи к. п.19.3

1. Показать, что для векторной полунормы $\|\cdot\|$ на $\mathbf{C}^n$функция $\|x\|_T \equiv \|Tx\|$ также является векторной полунормой при любом выборе матрицы $T \in M_n$. Если $\|\cdot\|$— в действительности векторная норма, то ядро полунормы $\|\cdot\|_T$ совпадает с ядром матрицы T.
2. Показать, что произвольную векторную полунорму можно представить в виде $\|\cdot\|_T$ для некоторой векторной нормы $\|\cdot\|$ и некоторой матрицы $T \in M_n$.

Задачи к п. 19.4

1. Неравенство из следствия 19.4.5 можно записать в следующем эквивалентном виде:

$$C_m(\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta) \leqslant \frac{\|x\|_\beta}{\|x\|_\alpha} \leqslant C_M(\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta),$$

где $C_m(\cdot, \cdot)$ и $C_M(\cdot, \cdot)$ — наилучшие возможные значения констант в неравенстве из 19.4.5, связывающем соответствующие нормы. Показать, что $C_m(\|\cdot\|_\beta, \|\cdot\|_\alpha) = (C_M(\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta))^{-1}$.
2. Оценить величину через $C_m(\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\gamma)$ и $C_m(\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta)$

$C_m(\|\cdot\|_\beta, \|\cdot\|_\gamma)$, где константы не обязательно наилучшие. Привести аналогичную оценку для C_M.
3. В таблице, приведенной ниже, приводятся значения наилучших констант $C_M(\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta)$ для l_1- l_2- и l_∞-норм, т. е. констант из неравенств $\|x\|_\alpha \leqslant C_M \|x\|_\beta$ для всех векторов $x \in \mathbf{C}^n$, где $\alpha, \beta = 1, 2, \infty$. Проверить правильность этих значений. Показать их неулучшаемость, подбирая такой ненулевой вектор x, при котором верно равенство $\|x\|_\alpha = C_M \|x\|_\beta$.

α \ β	1	2	∞
1	1	$\sqrt{n}$	n
2	1	1	$\sqrt{n}$
∞	1	1	1

Как выглядит таблица значений наилучших констант из неравенств $\|x\|_\alpha \geqslant C_m\|x\|_\beta$? *Указание.* См. задачу 1.

4. Показать, что эквивалентность двух норм на вещественном или комплексном векторном пространстве означает, что имеют место неравенства, связывающие эти две нормы при помощи двух констант, как в следствии 19.4.5. *Указание.* Рассмотреть функцию $f(x) = 1/\|x\|_\alpha$ на единичной сфере *S* нормы $\|\cdot\|_\beta$. Если функция *f* неограниченна на *S*, то существует такая последовательность $\{x_N\} \subset S$, что $\|x_N\|_\alpha < 1/N$ и $\|x_N\|_\beta = 1$. Это противоречит эквивалентности норм $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$. Отметим, что понятия конечномерности или компактности не привлекаются.

5. Показать, что функции f_k из примера 19.4.2 имеют следующие свойства: $f_k(x) \to 0$ при $k \to \infty$ для каждого значения аргумента *x*, $\|f_k - f_j\|_1 \to 0$ при $k,\ j \to \infty$ и $\|f_k - f_j\|_\infty = 1$ для всех $k \neq j$. Таким образом, последовательность функций может одновременно сходиться в некотором смысле (например, поточечно), являться последовательностью Коши относительно одной нормы и не являться последовательностью Коши относительно другой нормы.

6. Пусть *V* — полное вещественное или комплексное векторное пространство с нормой $\|\cdot\|$, и пусть задана последовательность $\{x^{(k)}\}$ элементов из *V*. Показать, что последовательность $\{y^{(n)}\}$ частичных сумм $y^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} x^{(k)}$ сходится в *V*, если существует такое $M \geqslant 0$, что

$$\sum_{k=1}^{n} \|x^{(k)}\| \leqslant M$$

для всех *n*=1, 2, ...

Какую теорему о сходимостирядов с вещественными членами обобщает это утверждение?

7. Показать, что для $\|x\|_\infty = \lim\limits_{p\to\infty} \|x\|_p$ каждого вектора $x \in \mathbf{C}^n$.

8. Полагая показать, $\|\cdot\|_\alpha = \alpha\|\cdot\|$, $\alpha > 0$, что $(\|\cdot\|_\alpha)^D = (1/\alpha)\|\cdot\|^D$.

9. Показать, что l_q-норма является двойственной к l_p-норме при любом $p \geqslant 1$, где величина q определяется из равенства $1/p + 1/q = 1$. *Указание.* Заменить неравенство (19.4.14) на более общее неравенство Гёльдера.

10. Пусть на $\mathbf{C}^n$ заданы две векторные нормы $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$. Предположим, что существует такая константа $C > 0$, что $\|x\|_\alpha \leqslant C\|x\|_\beta$ для каждого вектора $x \in \mathbf{C}^n$. Показать, что для всех $x \in \mathbf{C}^n$ верно неравенство $\|x\|_\beta^D \leqslant C\|x\|_\alpha^D$. *Указание,* Использовать соотношения

$$\|x\|_\alpha^D = \max_{\|y\|_\alpha = 1} |y^*x| = \max_{y \neq 0}\left|\frac{y^*x}{\|y\|_\alpha}\right| =$$

$$= \max_{y \neq 0}\frac{|y^*x|}{\|y\|_\alpha} \geqslant \max_{y \neq 0}\frac{|y^*x|}{C\|y\|_\beta} = \frac{1}{C}\max_{\|y\|_\beta = 1}|y^*x|.$$

11. Показать, что группа изометрий нормы $\|\cdot\|^D$ всегда включает в себя множество матриц, каждая из которых сопряжена к некоторой изометрий исходной нормы $\|\cdot\|$. Вывести отсюда заключение, что группа изометрий нормы $\|\cdot\|^D$ в точности является множеством всевозможных матриц, каждая из которых сопряжена к некоторой изометрий нормы $\|\cdot\|$. Когда изометрии норм $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|^D$ совпадают?

12. Пусть $\|\cdot\|$ —векторная норма на $\mathbf{C}^n$ и $T \in M_n$. Показать, что $\|\cdot\|_T^D = \|\cdot\|^D$, если T — изометрия исходной нормы.

13. Пусть на $\mathbf{C}^n$ задана некоторая норма $\|\cdot\|$.

(a) Показать, что множество, двойственное к нулевому вектору по отношению к норме $\|\cdot\|$, не определено.

(b) Пусть норма $\|\cdot\|$ совпадает с евклидовой нормой $\|\cdot\|_2$. Показать, что множество, двойственное к ненулевому вектору $x \in \mathbf{C}^n$ по отношению к норме $\|\cdot\|_2$, есть в точности множество $\{x\}$, состоящее только из самого вектора x. *Указание.* Использовать тот факт, что неравенство Коши— Шварца обращается в равенство тогда и только тогда, когда соответствующие два вектора линейно зависимы.

(c) Пусть норма $\|\cdot\|$ совпадает с $\|\cdot\|_\infty$. Показать, что по отношению к норме $\|\cdot\|_\infty$ двойственным к вектору $x = [0, 1]^T$ является множество $\{x\}$, но двойственным к вектору $x = [1, 1]^T$ будет множество

$$\{[\alpha,\ 1-\alpha]^T\colon\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}.$$

(d) Пусть норма $\|\cdot\|$ совпадает с $\|\cdot\|_1$. Что представляет собой множество, двойственное к вектору $x=[0,\ 1]^T$ по отношению к норме $\|\cdot\|_1$?

(e) Пусть x — заданный ненулевой вектор и вектор y является двойственным к нему по отношению к норме $\|\cdot\|$. Показать, что вектор x будет двойственным к вектору y по отношению к норме $\|\cdot\|^D$.

(f) Показать, что множество, двойственное к произвольному ненулевому вектору x по отношению к норме $\|\cdot\|$, состоит из самого вектора x, если $\|\cdot\|=\|\cdot\|_2$, и только в этом случае.

14. Пусть функция определена $f\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ равенством $f(x)=|x_1x_2|^{1/2}$. Показать, что множество $\{x\colon f(x)=1\}$ не является компактным. Вступает ли это в противоречие со следствием 19.4.8?

15. Пусть

$$\|x\|_\alpha=\|[10x_1,\ x_2]^T\|_\infty,\ \|x\|_\beta=\|[x_1,\ 10x_2]^T\|_\infty.$$

Рассмотрим пример квазинормы $f(x)=(\|x\|_\alpha\|x\|_\beta)^{1/2}$, приведенный ранее в упражнении. Показать, что та часть «единичного шара» $\{x\in\mathbf{R}^2\colon f(x)\leqslant 1\}$, которая находится в первом квадранте, ограничена отрезками прямых $x_2=1/\sqrt{10}$ и $x_1=1/\sqrt{10}$ и дугой гиперболы $x_1x_2=1/\sqrt{10}$. Изобразить это множество и показать, что оно не является выпуклым. Почему при последовательном отражении этого множества относительно координатных осей получаются недостающие куски «единичного шара» в трех остальных квадрантах? Показать, что пересечение единичного шара двойственной нормы $\{x\in\mathbf{R}^2\colon f^D(x)\leqslant 1\}$ с первым квадрантом ограничено отрезками прямых $x_1/10+x_2=\sqrt{10}$ и $x_1+x_2/10=\sqrt{10}$ и что весь единичный шар нормы f^D можно построить, последовательно отражая эту часть относительно осей. Убедиться, что единичный шар нормы f^D является выпуклым. Показать, что часть единичного шара нормы f^{DD}, лежащая в первом квадранте, ограничена отрезками прямых $x_2=1/\sqrt{10}$, $x_1=1/\sqrt{10}$ и $x_1+x_2=11/(10\sqrt{10})$ и что оставшиеся четверти получаются последовательным отражением этой части относительно осей. Наконец, сравнить единичные шары нормы f^{DD} и квазипормы f и проверить, что первый является замкнутой выпуклой оболочкой последнего.

16. Пусть $\|\cdot\|$— векторная норма на $V=\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{C}^n$. Показать, что

$$\max_{\|x\|\neq 0}\frac{\|x\|^D}{\|x\|}=\max_{\|x\|=1}\max_{\|y\|=1}\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right)^*\left(\frac{y}{\|y\|_2}\right)\|x\|_2\|y\|_2\leqslant$$
$$\leqslant[\max_{\|x\|=1}\|x\|_2]^2\equiv C_M$$

и что

$$\min_{x\neq 0}\frac{\|x\|^D}{\|x\|}\geqslant[\min_{\|x\|=1}\|x\|_2]^2\equiv C_m.$$

Вывести отсюда, что для любого вектора $x\in V$ справедливы неравенства $C_m\|x\|\leqslant\|x\|^D\leqslant C_M\|x\|$. Таким образом, каждая норма эквивалентна своей двойственной и константы в соответствующих неравенствах эквивалентности имеют геометрический смысл. Они равны квадратам радиусов минимального кольца (в евклидовой норме), содержащего единичную сферу нормы $\|\cdot\|$ (см. 19.5),

17. Пусть $f(\cdot)$ — квазинорма на $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{C}^n$. Показать, что

$$f^D(y)=\max_{f(x)\leqslant 1}\operatorname{Re}y^*x=\max_{f(x)\leqslant 1}|y^*x|=\max_{x\neq 0}\frac{\operatorname{Re}y^*x}{f(x)}=\max_{x\neq 0}\frac{|y^*x|}{f(x)}. \tag{19.4.18}$$

Другой пример использования подобных равенств приводится в упражнении, которое следует за определением 19.6.1.

Идею, что по нятие двойственности в применении к квазинорме приводит к норме, впервые высказал, по-видимому, Дж. фон Нейман. Он изучал «калибровочные функции» (то, что мы называем векторными нормами).

Задачи к п. 19.5

1. Показать, что множество S замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

2. Показать, что каждую точку из S можно считать предельной точкой этого множества, поэтому замыкание множества просто совпадает с множеством всех его предельных точек.

3. Привести пример множества, которое открыто и замкнуто одновременно. Привести пример множества, не являющегося ни открытым, ни замкнутым.

4. Пусть S — компактное множество в вещественном или комплексном векторном пространстве V с нормой $\|\cdot\|$. Показать, что S замкнуто и ограничено. Доказать, что из любой заданной бесконечной последовательности $\{x_\alpha\}\subset S$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{\alpha_i}\}\subset\{x_\alpha\}$, сходящуюся к некоторой точке $x\in S$. Показать, что любое замкнутое подмножество компактного множества также компактно.

5. Что происходит с утверждением 19.5.4 в случае пространства V нулевой размерности?
6. Как можно было бы определить единичный шар векторной полунормы? Как по виду отличить его от единичного шара нормы? Привести какой-нибудь пример и пояснить его рисунком.
7. Пусть $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ — нормы на векторном пространстве и векторная норма $\|\cdot\|$ определена равенством

$$\|x\| = \max\{\|x\|_\alpha, \|x\|_\beta\}.$$

Показать, что $B_{\|\cdot\|} = B_{\|\cdot\|_\alpha} \cap B_{\|\cdot\|_\beta}$.

8. Доказать, что векторная норма $\|\cdot\|$ на $\mathbf{F}^n$ ($\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{C}^n$) абсолютна тогда и только тогда, когда равенство

$$\|[\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n]^T\| = \|[x_1, x_2, \ldots, x_n]^T\|$$

верно для всех векторов $[x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \in \mathbf{F}^n$ и всех чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{F}^n$, подчиненных условиям $|\alpha_1| = \ldots = |\alpha_n| = 1$.

В шести оставшихся задачах используются следующие обозначения. Пусть $\|\cdot\|$ — векторная норма на вещественном или комплексном векторном пространстве V и $x, y \in V$. Через

$$L(x, y) \equiv \{z(t) = x + t(y - x):\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

обозначается обычный (по отношению к линейным алгебраическим операциям) *прямолинейный отрезок* между точками x и y, а через

$$C(x, y; \|\cdot\|) \equiv \{z \in V:\ \|x - z\| + \|z - y\| = \|x - y\|\}$$

обозначается *выпуклая (метрическая) оболочка* точек x и y относительно нормы $\|\cdot\|$.

9. Показать, что $L(x, y) \subset C(x, y; \|\cdot\|)$ для всех $x, y \in V$ при любой векторной норме $\|\cdot\|$.
10. Показать, что дляс $V = \mathbf{C}^n$ l_2-нормой $C(x, y; \|\cdot\|_2) = L(x, y)$ для всех $x, y \in \mathbf{C}^n$, т. е. что

$$\|x + y\|_2 = \|x - z\|_2 + \|z - y\|_2$$

тогда и только тогда, когда $z = x + t(y - x)$ при некотором $t \in [0, 1]$.

11. Показать, что множество $C(x, y; \|\cdot\|)$ всегда выпукло (в обычном смысле), т. е. что

$$tz_1 + (1 - t)z_2 \in C(x, y; \|\cdot\|)$$

для всех $t \in [0, 1]$, если $z_1, z_2 \in C(x, y; \|\cdot\|)$.

12. Показать. Что множество $C((1,\ 0),\ (0,\ 1);\ \|\cdot\|_1)$ в пространстве $V = \mathbf{R}^2$ над полем **R** заполняет квадрат с вершинами в точках $(0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (1,\ 1)$ и $(1,\ 0)$. *Указание.* Проверить, что точки (0,0) и (1,1) лежат в этом множестве, и использовать задачу 11. Показать, что, однако, множество *C*((1,0), $(0,1);\ \|\cdot\|_\infty)$ совпадает с прямолинейным отрезком $L((1,0),$ (0, 1)).

13. Рассматривая вновь пространствонад $V = \mathbf{R}^2$ полем **R**, показать, что множество $C((1,1),\ (1,-1);\ \|\cdot\|_\infty)$ заполняет на плоскости квадрат с вершинами в точках (0,0), (1, 1), (2, 0) и (1, —1). *Указание.* Проверить, что точки (0,0) и (2,0) лежат в этом множестве. Показать, что, однако, множество $C((1,1),\ (1,-1);\ \|\cdot\|_1)$ совпадает просто с прямолинейным отрезком $L((1,1),\ (1,-1))$.

14. Выпуклую метрическую оболочку множества $S \subset V$ из *k* точек, $k \geqslant 2$, можно определить как множество всех таких $z \in V$, что каждая точка *z* принадлежит выпуклой метрической оболочке двух точек, каждая из которых в свою очередь принадлежит выпуклой метрической оболочке некоторой пары точек из *S*. Показать, что при $k = 2$ это определение согласуется с приведенным выше. Описать выпуклую l_1-оболочку множества единичных ортонормированных базисных векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ в $\mathbf{R}^n$. Что представляет собой выпуклая l_2-оболочка этого множества? Как выглядит выпуклая в обычном смысле (по отношению к линейным алгебраическим операциям) оболочка этого множества?

Основная идея доказательства теоремы двойственности (отождествление единичного шара нормы, двойственной к двойственной норме, с пересечением всех полупространств, содержащих единичный шар исходной нормы) использовалась фон Нейманом в работе, на которую мы ссылались в конце 19.4.

Микромодуль 55
Нормы матриц

19.6. Матричные нормы

Поскольку множество M_n само является векторным пространством размерности n^2, «величину» матрицы можно измерять при помощи любой векторной нормы на $\mathbf{C}^{n^2}$. Однако M_n — не просто векторное пространство большей размерности; на нем имеется естественная операция умножения, и при выводе оценок часто бывает полезным связать «величину» произведения AB с «величинами» сомножителей A и B.

Функцию $\|\cdot\|$: $M_n \to R$ называют *матричной нормой,* если для всех матриц A, $B \in M_n$ она удовлетворяет следующим пяти аксиомам:

(1)	$\|A\| \geqslant 0$	(неотрицательность);
(1а)	$\|A\| = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$	(положительность);
(2)	$\|cA\| = \|c\|\|A\|$ для всех комплексных чисел c	(абсолютная однородность);
(3)	$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$	(неравенство треугольника);
4)	$\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$	(кольцевое свойство).

Заметим, что свойства (1) — (3) идентичны аксиомам векторной нормы из определения 19.1.1. Векторную норму на множестве матриц, т. е. функцию, удовлетворяющую (1) —(3) и не обязательно (4), часто называют *обобщенной матричной нормой.* Отбрасывая аксиому (1а), можно также определить понятие матричной полунормы и обобщенной матричной полунормы.

Поскольку $\|A^2\| = \|AA\| \leqslant \|A\|\|A\| = \|A\|^2$ для любой матричной нормы, то неравенство $\|A\| \geqslant 1$ должно быть выполнено для любой ненулевой матрицы A, такой, что $A^2 = A$.

В частности, $\|I\| \geqslant 1$ для любой матричной нормы. Если матрица A обратима, то $I = AA^{-1}$, поэтому $\|I\| = \|AA^{-1}\| \leqslant \|A\|\|A^{-1}\|$. Приходим к нижней границе

$$\|A^{-1}\| \geqslant \frac{\|I\|}{\|A\|}$$

для любой матричной нормы $\|\cdot\|$.

Упражнение. Доказать справедливость неравенства $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k$ при любом $k = 1, 2, \ldots$ и произвольной матрице $A \in M_n$, где $\|\cdot\|$ — матричная норма. Показать на примере, что это, вообще говоря, неверно для векторных норм на множестве матриц.

Некоторые из векторных норм, введенные в 19.2, являются матричными нормами в применении к векторному пространству M_n, а некоторые — нет. Наиболее известны примеры l_p-норм при $p = 1, 2, \infty$. Мы уже знаем, что это векторные нормы, поэтому проверки требует только аксиома (4).

Пример. Для матрицы $A \in M_n$ l_1-*норму* определим равенством

$$\| A \|_{l_1} = \sum_{i,\,j=1}^{n} | a_{ij} |;$$

это матричная норма, поскольку

$$\| AB \|_{l_1} = \sum_{i,\,j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right| \leqslant \sum_{i,\,j,\,k=1}^{n} | a_{ik} b_{kj} | \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,\,j,\,k,\,m=1}^{n} | a_{ik} b_{mj} | = \left(\sum_{i,\,k=1}^{n} | a_{ik} | \right) \left(\sum_{j,\,m=1}^{n} | b_{mj} | \right) =$$

$$= \| A \|_{l_1} \| B \|_{l_1}.$$

Первое неравенство вытекает из неравенства треугольника. Второе неравенство объясняется тем, что к сумме добавляются новые неотрицательные слагаемые.

Пример. Для матрицы $A \in M_n$ *евклидову норму* или *l_2-норму* определим равенством

$$\| A \|_E = \left(\sum_{i,\,j=1}^{n} | a_{ij} |^2 \right)^{1/2}.$$

Это матричная норма, поскольку

$$\| AB \|_E^2 = \sum_{i,\,j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right|^2 \leqslant \sum_{i,\,j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} | a_{ik} |^2 \right) \left(\sum_{m=1}^{n} | b_{mj} |^2 \right) =$$

$$= \left(\sum_{i,\,k=1}^{n} | a_{ik} |^2 \right) \left(\sum_{m,\,j=1}^{n} | b_{mj} |^2 \right) = \| A \|_E^2 \| B \|_E^2.$$

Данное неравенство — просто неравенство Коши — Шварца. В применении к матрицам такую норму иногда называют *нормой Фробениуса, нормой Шура* или *нормой Гильберта — Шмидта.* Если записать матрицу

$$A = [a_1 a_2 \ \ldots \ a_n] \in M_n$$

через ее векторы-столбцы $a_i \in \mathbf{C}^n$, то

$$\| A \|_E^2 = \| a_1 \|_2^2 + \ldots + \| a_n \|_2^2.$$

Поскольку l_2-норма на $\mathbf{C}^n$ унитарно инвариантна, приходим к следующему важному утверждению:

$$\| UA \|_E^2 = \| Ua_1 \|_2^2 + \ldots + \| Ua_n \|_2^2 = \| a_1 \|_2^2 + \ldots + \| a_n \|_2^2 = \| A \|_E^2,$$

где $U \in M_n$ может быть произвольной унитарной матрицей.

В силу равенства $\| B^* \|_E = \| B \|_E$ для всех $B \in M_n$ это влечет за собой утверждение

$$\| UAV \|_E = \| AV \|_E = \| V^* A^* \|_E = \| A^* \|_E = \| A \|_E,$$

где матрицы $U,\ V \in M_n$ унитарны. Таким образом, l_2-норма на M_n будет унитарно инвариантной матричной нормой.

Пример. Для матрицы $A \in M_n$ определим *l_∞-норму* равенством

$$\| A \|_{l_\infty} \equiv \max_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} | a_{ij} |.$$

Это векторная норма на векторном пространстве M_n не является матричной нормой. Рассмотрим матрицу $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2$ и проведем следующие вычисления:

$$J^2 = 2J, \quad \| J \|_{l_\infty} = 1, \quad \| J^2 \|_{l_\infty} = \| 2J \|_{l_\infty} = 2 \| J \|_{l_\infty} = 2.$$

В этом случае неравенство $\| J^2 \|_{l_\infty} \leqslant \| J \|_{l_\infty}^2$ неверно и поэтому норма $\| \cdot \|_{l_\infty}$ не обладает кольцевым свойством. Однако если положить

$$\| A \| \equiv n \| A \|_{l_\infty}, \quad A \in M_n,$$

то получим

$$\| AB \| = n \max_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right| \leqslant n \max_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} \sum_{k=1}^{n} | a_{ik} b_{kj} | \leqslant$$

$$\leqslant n \max_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} \sum_{k=1}^{n} \| A \|_{l_\infty} \| B \|_{l_\infty} = n \| A \|_{l_\infty} n \| B \|_{l_\infty} =$$

$$= \| A \| \| B \|;$$

таким образом, требуется только незначительная модификация, чтобы превратить векторную норму $\| \cdot \|_{l_\infty}$ в матричную.

С каждой векторной нормой $\| \cdot \|$ на $\mathbf{C}^n$ связана естественная матричная норма $\| \cdot \|$, «индуцированная» нормой $\| \cdot \|$ на M_n. Матричная норма $\| \cdot \|$ строится на основе векторной $\| \cdot \|$; процесс такого построения дополняет перечень способов конструирования одной нормы из другой.

19.6.1. Определение. Пусть $\| \bullet \|$— векторная норма на $\mathbf{C}^n$. Определим матричную норму $\| \cdot \|$ на M_n формулой

$$\| A \| \equiv \max_{\| x \| = 1} \| Ax \|.$$

В данном определении оправдано употребление символа «max» (вместо «sup»), поскольку функция $\| Ax \|$ непрерывно зависит от x и единичный шар $B_{\| \cdot \|}$ является компактным множеством (см. приложение Е).

Упражнение. Показать, что матричную норму из определения 19.6.1 можно также вычислить при помощи следующих эквивалентных формул:

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|},$$

где $\|\cdot\|$ — любая векторная норма.

19.6.2. Теорема. *Функция* $\|\cdot\|$ *из определения* 19.6.1 *является матричной нормой на* M_n, $\|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\|$ *для всех матриц* $A \in M_n$ *и всех векторов* $x \in \mathbf{C}^n$ *и* $\|I\| = 1$.

Доказательство. Аксиома (1), приведенная в начале данного параграфа, вытекает из того, что величина $\|A\|$ определена как максимум функции с неотрицательными значениями. Аксиома (1а) следует из того, что равенство $Ax = 0$ верно для всех векторов *x* тогда и только тогда, когда $A = 0$. Аксиома (2) подтверждается следующими выкладками

$$\|cA\| = \max \|cAx\| = \max |c| \|Ax\| = |c| \max \|Ax\| = |c| \|A\|.$$

Здесь и далее в доказательстве максимум берется иа множестве $\{x \in \mathbf{C}^n : \|x\| = 1\}$.

Аналогично неравенство треугольника (3) унаследовано от векторной нормы, поскольку

$$\|A + B\| = \max \|(A + B)x\| = \max \|Ax + Bx\| \leqslant$$
$$\leqslant \max(\|Ax\| + \|Bx\|) \leqslant \max \|Ax\| + \max \|Bx\| = \|A\| + \|B\|.$$

Наличие кольцевого свойства (4) обусловлено тем фактом, что

$$\|AB\| = \max \frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \max \frac{\|ABx\|}{\|Bx\|} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \leqslant$$
$$\leqslant \max \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \max \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| \|B\|.$$

Здесь предполагается без потери общности, что максимум берется только по векторам *x,* не входящим в ядро матрицы *B*.

Переходя к обоснованию следующего утверждения теоремы, заметим, что при $x \neq 0$ имеет место неравенство $\|Ax/\|x\|\| \leqslant \|A\|$, поскольку данная норма определялась как максимум отношения из левой части. Привлекая свойство абсолютной однородности векторной нормы, получаем неравенство $\|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\|$, которое также верно при $x = 0$. Наконец,

$$\|I\| = \max_{\|x\|=1} \|Ix\| = \max_{\|x\|=1} \|x\| = 1.$$

19.6.3. Определение. Матричную норму $\|\cdot\|$ из определения 19.6.1 называют матричной нормой, *подчиненной* данной векторной норме $\|\cdot\|$. Иногда употребляют также название *операторная норма* или *индуцированная норма* по отношению к векторной норме $\|\cdot\|$.

Доказательство того, что операторная норма является матричной нормой, основано на общих свойствах всех векторных норм. Поэтому одна из возможностей убедиться, что некоторая функция на M_n задает матричную норму, заключается в проверке того, что данная функция индуцирована некоторой векторной нормой. Мы будем придерживаться такой стратегии при изучении одной важной матричной нормы, а именно так называемой *спектральной нормы*.

Неравенство из теоремы 19.6.2 означает, что подчиненная матричная норма $\|\cdot\|$ является *согласованной* с соответствующей векторной нормой $\|\cdot\|$. Из теоремы следует, что любой векторной норме на $\mathbf{C}^n$ соответствует согласованная матричная норма на M_n. Кроме того, в ней дается необходимое условие $\|I\| = 1$ того, чтобы матричная норма $\|\cdot\|$ могла быть подчинена некоторой векторной норме. К сожалению, это необходимое условие не является также достаточным.

Теперь приведем несколько важных примеров матричных норм, подчиненных известным l_p-нормам. Мы получим явные формулы для этих норм, позволяющие вычислить их непосредственно, не прибегая к определению 19.6.1. В каждом случае считаем, что задана матрица $A = [a_{ij}] \in M_n$.

19.6.4. Матричная норма $\|\cdot\|_1$, которую будем называть *максимальной столбцовой нормой,* определяется на M_n формулой

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Норма $\|\cdot\|_1$ подчинена векторной l_1 -норме и поэтому должна быть матричной нормой. Докажем это следующим образом. Запишем матрицу $A \in M_n$ через ее столбцы: $A = [a_1 \ \dots \ a_n]$.

Тогда $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \|a_i\|_1$. Для вектора $x = [x_i]^T$ получаем соотношения

$$\|Ax\|_1 = \|x_1 a_1 + \dots + x_n a_n\|_1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|x_i a_i\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|a_i\|_1$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| (\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \|a_k\|_1) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|A\|_1 =$$

$$= \|x\|_1 \|A\|_1.$$

Таким образом, $\max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \leqslant \|A\|_1$. Если теперь выбрать $x = e_k$ (k-й координатный вектор), то при любом $k = 1, 2, \dots, n$ имеем

$$\max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \geqslant \|1 a_k\|_1 = \|a_k\|_1$$

и, следовательно,

$$\max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \geqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n} \|a_k\|_1 = \|A\|_1.$$

Поскольку мы доказали, что матричная норма, подчиненная векторной l_1-норме, служит одновременно верхней и нижней границей для нормы $\|A\|_1$, приходим к требуемому утверждению.

Упражнение. Проверить непосредственно из определения, что функция $\|\cdot\|_1$ является матричной нормой.

19.6.5. Матричная норма $\|\cdot\|_\infty$, называемая в дальнейшем *максимальной строчной нормой,* определяется на M_n формулой

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Норма $\|\cdot\|_\infty$ подчинена векторной l_∞-норме и поэтому должна
быть матричной нормой. Доводы аналогичны приведенным выше в доказательстве для максимальной столбцовой нормы. Проведем выкладки

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}x_j| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\|x\|_\infty = \|A\|_\infty \|x\|_\infty.$$

Приходим к неравенству $\max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty \leqslant \|A\|_\infty$. Случай $A = 0$ тривиален, поэтому далее можно принять $A \neq 0$. Допустим, что k-я строка матрицы A ненулевая, и определим вектор $z = [z_i]^T \in \mathbf{C}^n$ равенствами

$$z_i = \frac{\bar{a}_{ki}}{|a_{ki}|}, \quad \text{если} \quad a_{ki} \neq 0,$$

$$z_i = 1, \qquad\quad \text{если} \quad a_{ki} = 0.$$

Тогда $\|z\|_\infty = 1$, $a_{kj}z_j = |a_{kj}|$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$ и

$$\max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty \geqslant \|Az\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_j\right| \geqslant$$

$$\geqslant \left|\sum_{j=1}^{n} a_{kj}z_j\right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|.$$

Таким образом,

$$\max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty \geqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| = \|A\|_\infty,$$

что и доказывает требуемое.

Упражнение. Проверить, исходя непосредственно из определения, что функция $\|\cdot\|_\infty$ действительно является матричной нормой на M_n.

19.6.6. *Спектральная норма* $\|\cdot\|_2$ определяется на M_n формулой

$$\| A \|_2 \equiv \max \{ \sqrt{\lambda}: \ \lambda \text{ — собственное значение матрицы } A^*A \}.$$

Отметим, что в случае, когда $A^*Ax = \lambda x$ и $x \neq 0$, справедливы равенства $x^*A^*Ax = \| Ax \|_2^2 = \lambda \| x \|_2^2$, из которых следуют неотрицательность чисел λ и тем самым существование неотрицательных квадратных корней $\sqrt{\lambda}$.

Упражнение. Для нормальной матрицы *B*, такой, что $B = U^*\Lambda U$, где *U* унитарна и $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, показать справедливость неравенства

$$| x^*Bx | \leqslant \max \{ | \lambda |: \ \lambda \text{ — собственное значение } B \} \ \| x \|_2^2.$$

Упражнение. Доказать равенство $\| Ax \|_2^2 = x^*A^*Ax$ для всех векторов $x \in \mathbf{C}^n$ и, используя предыдущее упражнение, показать, что функция $\|\cdot\|_2$ является матричной нормой, подчиненной евклидовой векторной норме $\|\cdot\|_2$. Вывести отсюда, что спектральная норма — действительно матричная норма.

Упражнение. Показать, что $\| UAV \|_2 = \| A \|_2$ для любой матрицы $A \in M_n$ и произвольных унитарных матриц $U, V \in M_n$. Таким образом, спектральная норма является унитарно инвариантной матричной нормой.

Теперь докажем, что при помощи фиксированного подобия одну матричную норму можно преобразовать в другую.

19.6.7.Теорема. *Если —* $\|\cdot\|$ *матричная норма на* M_n *и если матрица* $S \in M_n$ *невырожденна, то формула*

$$\| A \|_S \equiv \| SAS^{-1} \|, \quad A \in M_n,$$

задает матричную норму.

Доказательство. Аксиомы (1), (1а), (2) и (3) для нормы $\|\cdot\|_S$ проверяются непосредственно. Кольцевое свойство для нормы $\|\cdot\|_S$ следует из соотношений

$$\| AB \|_S = \| S^{-1}ABS \| = \| (S^{-1}AS)(S^{-1}BS) \| \leqslant \| S^{-1}AS \| \| S^{-1}BS \| =$$
$$= \| A \|_S \| B \|_S.$$

Теорема 19.6.7 может широко применяться для выбора матричной нормы в конкретной ситуации. Некоторые применения такого рода рассматриваются далее в этом и следующем параграфах.

Одна важная область использования матричных норм — определение границ спектра матрицы.

19.6.8. Определение. *Спектральным радиусом* $\rho(A)$ матрицы $A \in M_n$ называют число

$$\rho(A) \equiv \max\{|\lambda|:\ \lambda \text{ — собственное значение матрицы } A\}.$$

Заметим, что любое собственное значение λ матрицы *A* удовлетворяет неравенству $|\lambda| \leqslant \rho(A)$; кроме того, имеется по меньшей мере одно собственное значение λ, для которого

$$|\lambda| = \rho(A).$$

Пусть $Ax = \lambda x,\ x \neq 0$, и $|\lambda| = \rho(A)$. Рассмотрим матрицу $X \in M_n$, все столбцы которой равны собственному вектору *x;* тогда справедливо равенство $AX = \lambda X$. Если $\|\cdot\|$— произвольная матричная норма, то имеют место соотношения

$$|\lambda|\|X\| = \|\lambda X\| = \|AX\| \leqslant \|A\|\|X\|$$

и, следовательно, $|\lambda| = \rho(A) \leqslant \|A\|$. Это доказывает следующую теорему.

19.6.9. Теорема. *Для любой матричной нормы* $\|\cdot\|$ *и любой матрицы* $A \in M_n$ *выполнено неравенство* $\rho(A) \leqslant \|A\|$.

Упражнение. Привести пример векторной нормы $\|\cdot\|$ на множестве матриц и такой матрицы $A \in M_n$, чтобы выполнялось строгое неравенство $\|A\| < \rho(A)$.

Упражнение. Пусть $\|\cdot\|$ — матричная норма на M_n. Рассмотрим отображение F: $\mathbf{C}^n \to M_n$, определенное равенством $F(x) = [x\ x\ \ldots\ x]$, где $[x\ x\ \ldots\ x]$ — матрица, все столбцы которой просто совпадают с вектором *x*. Показать, что функция $\|\cdot\|$, заданная на $\mathbf{C}^n$ формулой $\|x\| = \|F(x)\|$, является нормой на $\mathbf{C}^n$ и что справедливо неравенство $\|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\|$ для всех векторов $x \in \mathbf{C}^n$ и всех матриц $A \in M_n$. Это неравенство означает, что матричная норма $\|\cdot\|$ согласована с векторной нормой $\|\cdot\|$. Данное упражнение показывает, что для любой матричной нормы на M_n можно найти согласованную с ней векторную норму на $\mathbf{C}^n$.

Спектральный радиус как функция от матрицы сам не может служить матричной или векторной нормой на *М,,* (см. *задачу* 19). Однако спектральный радиус каждой фиксиропапной матрицы $A \in M_n$ оказывается точной нижней гранью значений всех матричных норм этой матрицы.

19.6.10. Лемма. *Пусть* $A \in M_n$ *и задано число* $\varepsilon > 0$. *Существует по крайней мере одна матричная норма* $\|\cdot\|$, *для которой имеют место оценки* $\rho(A) \leqslant \|A\| \leqslant \rho(A) + \varepsilon$.

Доказательство. В силу теоремы Шура 16.3.1 об унитарной триангуляризации найдутся такая унитарная матрица U и верхняя треугольная матрица Δ, что $A = U\Delta U^*$. Положим $D_t \equiv \equiv \operatorname{diag}(t, t^2, t^3, \ldots, t^n)$ и вычислим

$$D_t \Delta D_t^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & t^{-1} d_{12} & t^{-2} d_{13} & \ldots & t^{-n+1} d_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & t^{-1} d_{23} & \ldots & t^{-n+2} d_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & t^{-n+3} d_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & t^{-1} d_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Таким образом, можно быть уверенным, что сумма модулей всех наддиагональных элементов матрицы $D_t \Delta D_t^{-1}$ при достаточно большом $t > 0$ не будет превосходить ε. В частности, при достаточно большом t, несомненно, выполнено неравенство $\|D_t \Delta D_t^{-1}\|_1 \leqslant \rho(A) + \varepsilon$. Определим матричную норму $\|\cdot\|$ при помощи формулы

$$\|B\| \equiv \|D_t U^* B U D_t^{-1}\|_1 = \left\|\left(U D_t^{-1}\right)^{-1} B \left(U D_t^{-1}\right)\right\|_1 \quad B \in M_n.$$

Таким образом, выбирая значение t достаточно большим, получаем матричную норму, для которой $\|A\| \leqslant \rho(A) + \varepsilon$. Поскольку неравенство $\|A\| \geqslant \rho(A)$ верно для любой матричной нормы, утверждение теоремы полностью доказано.

Упражнение. Объяснить, почему из предыдущей леммы следует, что $\rho(A) = \inf\{\|A\|: \|\cdot\|$ — матричная норма$\}$.

Интересно дать полное описание всех матриц A, для которых $A^k \to 0$ при $k \to \infty$. Чтобы атаковать эту проблему, осталось пополнить наш арсенал следующим результатом.

19.6.11. Лемма. *Пусть задана матрица* $A \in M_n$. *Если существует матричная норма* $\|\cdot\|$, *для которой* $\|A\| < 1$, *то* $\lim_{k \to \infty} A^k = 0$, *т. е. все элементы матрицы* A^k *стремятся к нулю при* $k \to \infty$.

Доказательство. Если $\|A\| < 1$, то $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k \to 0$ при $k \to \infty$. Это означает, что $A^k \to 0$ по норме $\|\cdot\|$. Однако в силу эквивалентности всех векторных норм на пространстве M_n размерности n^2 отсюда следует, что $A^k \to 0$ по векторной норме $\|\cdot\|_{l_\infty}$.

Упражнение. Подобрать матрицу A и две матричные нормы $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ так, чтобы одновременно выполнялись неравенства

$\| A \|_\alpha < 1$ и $\| A \|_\beta > 1$. Вывод?

Матрицы $A \in M_n$, для которых

$$\lim_{k \to \infty} A^k = 0,$$

называют *сходящимися.* Они играют большую роль во многих приложениях, например, при анализе итерационных процессов. По этой причине важно найти описание сходящихся матриц.

19.6.12. Теорема. *Пусть* $A \in M_n$. *Тогда*

$$\lim_{k \to \infty} A^k = 0$$

в том и только в том случае, когда $\rho(A) < 1$.

Доказательство. Пусть $A^k \to 0$. Рассмотрим собственный вектор $x \neq 0$, такой, чтотогда $Ax = \lambda x; A^k x = \lambda^k x \to 0$ только при $|\lambda| < 1$. Поскольку это неравенство должно выполняться для каждого собственного значения матрицы *A,* заключаем, что $\rho(A) < 1$. В обратную сторону, если $\rho(A) < 1$, то по лемме 19.6.10 существует некоторая матричная норма $\| \bullet \|$, такая, что $\| A \| < 1$. Тогда $A^k \to 0$ при $k \to \infty$ по лемме 19.6.11.

Упражнение. Для матрицы $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \in M_2$ явно вычислить A^k и $\rho(A^k)$ для $k = 2, 3, \dots$. Показать, что $\rho(A^k) = [\rho(A)]^k$. Что происходит при $k \to \infty$ с элементами матрицы A^k и величинами $\| A^k \|_1$, $\| A^k \|_\infty$, $\| A^k \|_2$?

Упражнение. Пусть $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ -1/8 & 1/2 \end{bmatrix}$ и последовательность векторов $\{x^{(k)}\} \in \mathbf{C}^2$ задана рекуррентным соотношением $x^{(k+1)} = Ax^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots$. Показать, что $x^{(k)} \to 0$ при $k \to \infty$ независимо от выбора начального приближения $x^{(0)}$.

Иногда требуется знать границы значений элементов матрицы A^k при $k \to \infty$. Одна полезная оценка является непосредственным следствием предыдущей теоремы.

19.6.13. Следствие. *Пусть зафиксирована матрица* $A \in M_n$ *и задано число* $\varepsilon > 0$. *Тогда существует такая константа* $C = C(A, \varepsilon)$, *что*

$$|(A^k)_{ij}| \leqslant C(\rho(A) + \varepsilon)^k$$

для всех $k = 1, 2, 3, \dots$ *и всех* $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$.

Доказательство. Поскольку спектральный радиус матрицы $\tilde{A} \equiv [\rho(A) + \varepsilon]^{-1}$ *A* строго меньше единицы, она является сходящейся; таким образом $\tilde{A}^k \to 0$ при $k \to \infty$. В частности, элементы последовательности $\{\tilde{A}^k\}$ ограничены, поэтому найдется такая конечная константа $C > 0$, что $|(\tilde{A}^k)_{ij}| \leqslant C$ для всех i = 1, 2, 3, ... и всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Последнее неравенство эквивалентно требуемому.

Упражнение. Пусть $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$. Вычислить A^k явно и показать, что в неравенстве из следствия 19.6.13 не всегда можно положить $\varepsilon = 0$. Утверждение, что геометрическая прогрессия $\rho(A)^k$ при $k \to \infty$ в точности определяет порядки величин конкретных элементов матрицы A^k, неверно, однако аналогичное утверждение об асимптотическом поведении последовательности $\{\|A^k\|\}$ справедливо для любой матричной нормы $\|\cdot\|$.

19.6.14. Следствие. *Пусть* $\|\cdot\|$ *— матричная норма на* M_n. *Тогда*

$$\rho(A) = \lim_{k \to \infty} \|A^k\|^{1/k}$$

для всех матриц $A \in M_n$.

Доказательство. Из соотношений $\rho(A)^k = \rho(A^k) \leqslant \|A^k\|$ вытекает неравенство $\rho(A) \leqslant \|A^k\|^{1/k}$ при всех $k = 1, 2, \ldots$. Если задано число $\varepsilon > 0$, то спектральный радиус $\tilde{A} \equiv [\rho(A) + \varepsilon]^{-1} A$ строго меньше 1; значит, эта матрица сходящаяся. Таким образом, $\|\tilde{A}^k\| \to 0$ при $k \to \infty$ и существует такой номер $N = N(\varepsilon, A)$, что неравенство $\|\tilde{A}^k\| < 1$ верно для всех степеней $k \geqslant N$. Это просто означает, что $\|A^k\| \leqslant [\rho(A) + \varepsilon]^k$ для всех $k \geqslant N$ или, эквивалентно, $\|A^k\|^{1/k} \leqslant \rho(A) + \varepsilon$ для всех $k \geqslant N$. Поскольку величина $\varepsilon > 0$ произвольна, вспоминая неравенство $\rho(A) \leqslant \|A^k\|^{1/k}$, приходим к заключению, что предел $\lim\limits_{k \to \infty} \|A^k\|^{1/k}$ существует и равен $\rho(A)$.

Вопросы сходимости последовательностей или рядов матриц можно изучать при помощи векторных норм по аналогии со случаем последовательностей или рядов векторов.

Упражнение. Пусть $\{A_k\} \subset M_n$ — заданная последовательность матриц. Показать, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|A_k\|$ сходится к некоторой матрице в пространстве M_n, если найдется такая векторная норма $\|\cdot\|$ на M_n, что числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|A_k\|$ сходится (достаточно предположить, что частичные суммы этого последнего ряда ограничены в совокупности). *Указание.* Установить, что частичные суммы матричного ряда образуют последовательность Коши.

Один частный случай для матриц, который не имеет аналогов в теории векторных рядов, — это случай степенных матричных рядов. Однако, привлекая кольцевое свойство матричных норм, легко дать простое достаточное условие сходимости таких матричных рядов.

19.6.15. Теорема. *Степенной ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k,$$

где $A \in M_n$, *сходится, если существует такая матричная норма* $\|\cdot\|$ *на* M_n, *что числовой ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \|A\|^k$$

сходится или хотя бы его частичные суммы образуют ограниченную последовательность.

Упражнение, Доказать теорему 19.6.15.

Упражнение. Показать на примере, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ может сходиться, в то время как ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \|A\|^k$$

расходится. В теории числовых рядов в такой ситуации говорят об условной сходимости (когда сходящийся ряд не является абсолютно сходящимся).

*Упражнение.*Пусть функция определена $f(z)$ степенным рядом $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ с радиусом сходимости $R > 0$, и пусть $\|\cdot\|$ — матричная норма на M_n. Показать, что матричная функция $f(A) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ корректно определена для всех матриц $A \in M_n$, таких, что $\|A\| < R$. В более общей формулировке показать, что функция $f(A)$ корректно определена для всех матриц $A \in M_n$, таких, что $\rho(A) < R$.

Упражнение. Если матрица *A* диагонализуема и $A = S^{-1}\Lambda S$, то иногда полагают $f(A) \equiv S^{-1} f(\Lambda) S$, где $f(\Lambda) \equiv \mathrm{diag}(f(\lambda_1),$

$f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n))$. Показать, что это определение функции $f(A)$ согласуется с определением на основе степенных рядов из предыдущего упражнения, если матрица A диагонализуема. Является ли одно из этих двух определений более общим по сравнению с другим?

Упражнение. Показать, что матричная экспонента, задаваемая степенным рядом

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k,$$

корректно определена для каждой матрицы $A \in M_n$.

Упражнение. Как можно было бы определить функцию $\cos(A)$? Для каких матриц A это возможно?

19.6.16. Следствие. *Матрица $A \in M_n$ обратима, если существует такая матричная норма $\|\cdot\|$, что $\|I - A\| < 1$. При этом условии*

$$A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - A)^k.$$

Доказательство. Если $\|I - A\| < 1$, то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (I - A)^k$$

сходится к некоторой матрице C, поскольку радиус сходимости числового ряда $\sum z^k$ равен 1. Учитывая соотношение

$$A \sum_{k=0}^{N} (I - A)^k = [I - (I - A)] \sum_{k=0}^{N} (I - A)^k = I - (I - A)^{N+1} \to I$$

при $N \to \infty$, выводим, что $C = A^{-1}$.

Упражнение. Показать, что предыдущий результат эквивалентен следующему утверждению. Если $\|\cdot\|$ — матричная норма и если $\|A\| < 1$, то матрица $I - A$ обратима и

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

Упражнение. Пусть $\|\cdot\|$ — матричная норма на M_n. Предположим, что заданная матрица $A \in M_n$ имеет «приближенно обратную» матрицу $B \in M_n$ с тем свойством, что $\|BA - I\| < 1$. Показать, что обе матрицы A и B обратимы.

Упражнение. Пусть матричная норма $\|\cdot\|$ обладает свойством $\|I\| = 1$ (которое обязательно бы имело место в случае операторной нормы). Для матрицы $A \in M_n$, такой, что $\|A\| < 1$, доказать справедливость неравенств

$$\frac{1}{1+\|A\|} \leqslant \|(I-A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\|A\|}.$$

Указание. Чтобы получить оценку сверху, использовать неравенство $\|(I-A)^{-1}\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k$. Для вывода оценки снизу привлечь неравенство типа $\|B^{-1}\| \geqslant 1/\|B\|$ и неравенство треугольника.

Упражнение. Для произвольной матричной нормы || • || имеет место лишь неравенство $\|I\| \geqslant 1$. Показать в этом случае, что

$$\frac{\|I\|}{\|I\|+\|A\|} \leqslant \|(I-A)^{-1}\| \leqslant \frac{\|I\|-(\|I\|-1)\|A\|}{1-\|A\|}$$

всякий раз, когда $\|A\| < 1$.

Упражнение. Пусть $A,\ B \in M_n$, матрица A обратима и матрица $A+B$ вырожденна. Показать, что справедливо неравенство $\|B\| \geqslant 1/\|A^{-1}\|$ с любой матричной нормой $\|\cdot\|$. Таким образом, имеется естественный предел возможности хорошей аппроксимации невырожденной матрицы вырожденной матрицей. *Указание.* Использовать соотношение $A+B=A(I+A^{-1}B)$. В случае $\|A^{-1}B\| < 1$ матрица $I+A^{-1}B$ была бы обратимой, следовательно, верно противоположное неравенство $\|A^{-1}B\| \geqslant 1$.

Основываясь на предыдущем следствии, нетрудно предложить один полезный и просто проверяемый критерий обратимости матрицы.

19.6.17. Следствие. *Пусть $A=[a_{ij}] \in M_n$, и предположим, что выполнены условия*

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

Тогда матрица A обратима.

Доказательство. По условию все элементы a_{ii} на главной диагонали ненулевые. Если положить $D=\mathrm{diag}(a_{11},\ \ldots,\ a_{nn})$, то диагональная матрица D будет обратимой и матрица $D^{-1}A$ на главной диагонали будет иметь только единицы. Тогда у матрицы $B=[b_{ij}]=I-D^{-1}A$ на главной диагонали стоят только нули и $b_{ij}=-a_{ij}/a_{ii}$ при $i \neq j$. Рассмотрим норму $\|B\|_\infty$ этой матрицы. Из условия на элементы матрицы A вытекает, что $\|B\|_\infty < 1$; следовательно, матрица $I-B=D^{-1}A$ обратима в силу следствия 19.6.16. Поэтому и матрица A обратима.

Матрица, удовлетворяющая условию из следствия 19.6.17, называется матрицей со *строгим диагональным преобладанием.* Приведенное достаточное условие обратимости известно как теорема

Леви — Деспланка и может быть несколько усовершенствовано (см. 20.1, 20.2, 20.4).

Теперь рассмотрим более детально подчиненные матричные нормы из определения 19.6.1. Это один из самых известных классов матричных норм с важным свойством минимальности. Чтобы установить, что данная матрица A является сходящейся, часто используется критерий $\|A\| < 1$, в котором естественно отдать предпочтение таким матричным нормам, которые равномерно принимают как можно меньшие значения. Как мы убедимся, каждая подчиненная матричная норма обладает этим желательным свойством, и это свойство характеризует весь класс подчиненных матричных норм.

Любые две нормы на конечномерном пространстве эквивалентны, следовательно, для каждых двух матричных норм $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ существует наименьшая конечная положительная константа $C_M(\alpha, \beta)$, такая, что неравенство $\|A\|_\alpha \leqslant C_M(\alpha, \beta)\|A\|_\beta$ справедливо для всех матриц $A \in M_n$. Эту константу можно определить равенством

$$C_M(\alpha, \beta) = \max_{A \neq 0} \frac{\|A\|_\alpha}{\|A\|_\beta}.$$

Если α и β поменять ролями, то получим аналогичное определение наименьшей конечной положительной константы $C_M(\beta, \alpha)$, такой, что неравенство $\|A\|_\beta \leqslant C_M(\beta, \alpha)\|A\|_\alpha$ имеет место для всех матрии $A \in M_n$. Связь между этими константами $C_M(\alpha, \beta)$ и $C_M(\beta, \alpha)$, вообще говоря, неочевидна. Однако, рассматривая таблицу задачи 23 в конце настоящего параграфа, можно убедиться, что ее верхний левый угол, отвечающий всевозможным парам из трех матричных норм $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$, симметричен, т. е. $C_M(\alpha, \beta) = C_M(\beta, \alpha)$ для каждой пары указанных норм. Все эти три матричные нормы являются подчиненными, и такая симметрия оказывается свойством всех подчиненных норм.

19.6.18. Теорема. *Пусть $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ — две заданные векторные нормы на пространстве $\mathbf{C}^n$. Эти же обозначения сохраним для соответствующих подчиненных матричных норм на M_n, т. е.*

$$\|A\|_\alpha = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\alpha}, \quad \|A\|_\beta = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\beta}{\|x\|_\beta}.$$

Определим константы

$$R_{\alpha\beta} \equiv \max_{x \neq 0} \frac{\|x\|_\alpha}{\|x\|_\beta}, \qquad R_{\beta\alpha} \equiv \max_{x \neq 0} \frac{\|x\|_\beta}{\|x\|_\alpha}. \tag{19.6.19}$$

Тогда

$$\max_{A \neq 0} \frac{\|A\|_\alpha}{\|A\|_\beta} = R_{\alpha\beta} R_{\beta\alpha}. \tag{19.6.20}$$

В частности,

$$\max_{A \neq 0} \frac{\|A\|_\alpha}{\|A\|_\beta} = \max_{A \neq 0} \frac{\|A\|_\beta}{\|A\|_\alpha} = R_{\alpha\beta} R_{\beta\alpha}. \tag{19.6.21}$$

Доказательство. Пусть $A \in M_n$ и $x \in \mathbf{C}^n$. Предположим, что $x \neq 0$ и $Ax \neq 0$. Тогда имеем

$$\frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\alpha} = \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|Ax\|_\beta} \frac{\|Ax\|_\beta}{\|x\|_\beta} \frac{\|x\|_\beta}{\|x\|_\alpha} \leqslant R_{\alpha\beta} \frac{\|Ax\|_\beta}{\|x\|_\beta} R_{\beta\alpha}.$$

Это неравенство верно и при $Ax = 0$. Таким образом,

$$\|A\|_\alpha \equiv \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\alpha} \leqslant R_{\alpha\beta} \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\beta}{\|x\|_\beta} R_{\beta\alpha} \equiv R_{\alpha\beta} R_{\beta\alpha} \|A\|_\beta.$$

Следовательно,

$$\frac{\|A\|_\alpha}{\|A\|_\beta} \leqslant R_{\alpha\beta} R_{\beta\alpha} \tag{19.6.22}$$

для всех ненулевых матриц $A \in M_n$.

Каждый из двух максимумов в соотношениях (19.6.19) достигается на некотором ненулевом векторе, т. е. найдутся такие векторы $y,\ z \in \mathbf{C}^n$, что $\|y\|_2 = \|z\|_2 = 1$, $\|y\|_\alpha = R_{\alpha\beta} \|y\|_\beta$, $\|z\|_\beta = R_{\beta\alpha} \|z\|_\alpha$. В силу следствия 19.5.15 существует вектор $z_0 \in \mathbf{C}^n$, такой, что

(a) $|z_0^* x| \leqslant \|x\|_\beta$ для всех $x \in \mathbf{C}^n$;

(b) $z_0^* z = \|z\|_\beta$.

Введем в рассмотрение матрицу $A_0 \equiv y z_0^*$. Используя свойство (b), получаем

$$\frac{\|A_0 z\|_\alpha}{\|z\|_\alpha} = \frac{\|y z_0^* z\|_\alpha}{\|z\|_\alpha} = \frac{\|y\|_\alpha |z_0^* z|}{\|z\|_\alpha} = \frac{\|y\|_\alpha \|z\|_\beta}{\|z\|_\alpha};$$

поэтому имеем оценку снизу

$$\|A_0\|_\alpha \geqslant \frac{\|y\|_\alpha \|z\|_\beta}{\|z\|_\alpha} = R_{\alpha\beta} R_{\beta\alpha} \|y\|_\beta.$$

С другой стороны, можно использовать свойство (а), чтобы получить, что

$$\frac{\| A_0 x \|_\beta}{\| x \|_\beta} = \frac{\| y z_0^* x \|_\beta}{\| x \|_\beta} = \frac{\| y \|_\beta \, | z_0^* x |}{\| x \|_\beta} \leqslant \frac{\| y \|_\beta \| x \|_\beta}{\| x \|_\beta} = \| y \|_\beta.$$

Таким образом, приходим к оценке сверху

$$\| A_0 \|_\beta \leqslant \| y \|_\beta.$$

Учитывая обе полученные оценки, получаем неравенство

$$\frac{\| A_0 \|_\alpha}{\| A_0 \|_\beta} \geqslant \frac{R_{\alpha\beta} R_{\beta\alpha} \| y \|_\beta}{\| y \|_\beta} = R_{\alpha\beta} R_{\beta\alpha},$$

которое показывает, что в соотношении (19.6.22) возможно равенство. Тем самым утверждение (19.6.20) доказано. Второе утверждение теоремы (19.6.21) вытекает из первого, поскольку α и β входят в правую часть равенства (19.6.20) симметрично.

Могут ли две различные векторные нормы на $\mathbf{C}^n$ индуцировать одинаковые матричные нормы на M_n? Согласно приведенному ниже следствию, это может произойти в том и только в том случае, когда одна из этих векторных норм получена из другой умножением на некоторый скаляр.

19.6.23. Следствие. *Пусть* $\| \cdot \|_\alpha$ *и* $\| \cdot \|_\beta$ *— векторные нормы на* $\mathbf{C}^n$. *Для соответствующих подчиненных матричных норм на* M_n *сохраним те же обозначения. Тогда равенство* $\| A \|_\alpha = \| A \|_\beta$ *для всех матриц* $A \in M_n$ *имеет место в том и только в том случае, когда имеется положительная константа с, связывающая нормы векторов равенством* $\| x \|_\alpha = c \| x \|_\beta$ *для всех векторов* $x \in \mathbf{C}^n$.

Доказательство. Заметим, что

$$R_{\beta\alpha} = \max_{x \neq 0} \frac{\| x \|_\beta}{\| x \|_\alpha} = \left[\min_{x \neq 0} \frac{\| x \|_\alpha}{\| x \|_\beta} \right]^{-1} \geqslant \left[\max_{x \neq 0} \frac{\| x \|_\alpha}{\| x \|_\beta} \right]^{-1} = \frac{1}{R_{\alpha\beta}}.$$

Таким образом,

$$R_{\alpha\beta} R_{\beta\alpha} \geqslant 1 \qquad (19.6.24)$$

Это неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда

$$\min_{x \neq 0} \frac{\| x \|_\alpha}{\| x \|_\beta} = \max_{x \neq 0} \frac{\| x \|_\alpha}{\| x \|_\beta}.$$

Последнее имеет место в том и только в том случае, когда функция $\| x \|_\alpha / \| x \|_\beta$ принимает постоянное значение для всех векторов $x \neq 0$. Следовательно, при $\| x \|_\alpha \equiv c \| x \|_\beta$, несомненно, выполнено равенство $R_{\alpha\beta} R_{\beta\alpha} = 1$, и тогда из (19.6.21) заключаем, что $\| A \|_\alpha \leqslant \| A \|_\beta$ и $\| A \|_\beta \leqslant \| A \|_\alpha$ для всех $A \in M_n$, т. е. $\| A \|_\alpha = | A \|_\beta$

для всех матриц $A \in M_n$. В обратную сторону, если две подчиненные матричные нормы совпадают, то $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha} = 1$ в силу (19.6.20). Значит, в соотношении (19.6.24) имеет место равенство. В этом случае отношение $\|x\|_\alpha/\|x\|_\beta$ постоянно, как уже отмечалось ранее.

19.6.25. Следствие. *Пусть* $\|\cdot\|_\alpha$ *и* $\|\cdot\|_\beta$ *— векторные нормы на* $\mathbf{C}^n$. *Эти же обозначения сохраним для соответствующих подчиненных матричных норм на* M_n. *Тогда* $\|A\|_\alpha \leqslant \|A\|_\beta$ *для всех* $A \in M_n$ *в том и только в том случае, когда* $\|A\|_\alpha = \|A\|_\beta$ *для всех матриц* $A \in M_n$.

Доказательство. Если $\|A\|_\alpha \leqslant \|A\|_\beta$ для всех матриц $A \in M_n$, то $R_{\alpha\beta}R_{\beta\alpha} \leqslant 1$. Вследствие (19.6.24) это влечет за собой равенство $R_{\alpha\beta}R_{\beta\alpha} = 1$. Следовательно, в силу (19.6.21) для всех матриц $A \in M_n$ справедливы неравенства

$$\|A\|_\alpha \leqslant \|A\|_\beta \text{ и } \|A\|_\beta \leqslant \|A\|_\alpha.$$

Последнее следствие показывает, что ни одна подчиненная матричная норма не может равномерно превосходить другую. Что произойдет, если допустить сравнение с не обязательно подчиненными матричными нормами?

19.6.26. Теорема. *Пусть на* M_n *заданы матричная норма* $\|\cdot\|$ *и подчиненная матричная норма* $\|\cdot\|_\alpha$. *Тогда*

(a) *существует подчиненная матричная норма* $N(\cdot)$ *на* M_n, *такая, что* $N(A) \leqslant \|A\|$ *для каждой матрицы* $A \in M_n$;

(b) *неравенство верно* $\|A\| \leqslant \|A\|_\alpha$ *для любой матрицы* $A \in M_n$ *тогда и только тогда, когда* $\|A\| = \|A\|_\alpha$ *для любой матрицы* $A \in M_n$.

Доказательство. Определим векторную норму $\|\cdot\|$ на $\mathbf{C}^n$ равенством

$$\|x\| \equiv \|X\|, \quad X \equiv [xx\ \dots\ x] \in M_n \tag{19.6.27}$$

и рассмотрим матричную норму $N(\cdot)$ на M_n, которая подчинена норме $\|\cdot\|$. Для любой матрицы $A \in M_n$

$$N(A) \equiv \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{x \neq 0} \frac{\|[Ax\,Ax\ \dots\ Ax]\|}{\|[x\ \dots\ x]\|} =$$

$$= \max_{x \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|} \leqslant \max_{x \neq 0} \frac{\|A\|\|X\|}{\|X\|} = \|A\| \tag{19.6.28}$$

(где неравенство справедливо потому, что $\|\cdot\|$ — матричная норма), что приводит к утверждению (a). Чтобы доказать (b), предположим, что $\|A\| \leqslant \|A\|_\alpha$ для всех $A \in M_n$. Тогда из (a) вытекают неравенства

$$N(A) \leqslant \|A\| \leqslant \|A\|_\alpha$$

для всех $A \in M_n$. Однако обе нормы $N(\cdot)$ и $\|\cdot\|_\alpha$ являются подчиненными, поэтому из следствия 19.6.25 заключаем, что $N(A) = \|A\|_\alpha$. Таким образом, $\|A\| = \|A\|_\alpha$ для всех матриц $A \in M_n$.

Предыдущий результат побуждает ввести следующее определение.

19.6.29. Определение. Матричную норму $\|\cdot\|$ на M_n называют *минимальной матричной нормой,* если единственная матричная норма $N(\cdot)$ на M_n, удовлетворяющая неравенству $N(A) \leqslant \|A\|$ для всех матриц $A \in M_n$, — это данная норма, т. е. $N(\cdot) = \|\cdot\|$.

Утверждение (b) теоремы 19.6.26 гласит, что каждая подчиненная норма на M_n минимальна. Из утверждения (a) непосредственно вытекает, что каждая минимальная норма является подчиненной. Таким образом, если хотят использовать матричную норму, которая не может быть улучшена (в смысле равномерного уменьшения значений на всех матрицах), то берут подчиненную норму, и любая норма с этим свойством оптимальности должна быть подчиненной нормой.

Векторная норма (19.6.27) представляет собой лишь одну из целого семейства векторных норм, которые можно построить, исходя из заданной матричной нормы. Пусть заданы матричная норма $\|\cdot\|$ на M_n и ненулевой вектор $y \in \mathbf{C}^n$. Положим

$$\|x\|_y = \|xy^*\|, \quad y \in \mathbf{C}^n, \quad y \neq 0. \tag{19.6.30}$$

Тогда функция $\|\cdot\|_y$ является векторной нормой на $\mathbf{C}^n$ и обладает следующим свойством:

$$\|Ax\|_y = \|A(xy^*)\| \leqslant \|A\|\|xy^*\| = \|A\|\|x\|_y$$

для всех матриц $A \in M_n$. Если выбрать $y = [1\,1\ \ldots\ 1]^T$, то формула (19.6.30) переходит в (19.6.27). Обозначим через $N_y(\cdot)$ матричную норму на M_n, подчиненную норме $\|\cdot\|_y$; тогда из последнего неравенства следует, что

$$N_y(A) = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_y}{\|x\|_y} \leqslant \max_{x \neq 0} \frac{\|A\|\|x\|_y}{\|x\|_y} = \|A\|, \quad A \in M_n. \tag{19.6.31}$$

Это утверждение, очевидно, обобщает утверждение (a) теоремы (19.6.26).

Если данная матричная норма $\|\cdot\|$ минимальна, то (19.6.31) влечет за собой равенство $\|A\| = N_y(A)$ для всех матриц $A \in M_n$.

Поскольку вектор y, используемый в этих рассуждениях, может быть произвольным ненулевым вектором, то должны выполняться равенства $N_y(\cdot) = \|\cdot\| = N_z(\cdot)$ для всех ненулевых векторов $y, z \in \mathbf{C}^n$.

19.6.32. Теорема. *Пусть* $\|\cdot\|$ — *матричная норма на* M_n, *и пусть* $N_y(\cdot)$ — *подчиненная матричная норма, определяемая соотношениями* (19.6.31) *и* (19.6.30). *Следующие условия эквивалентны:*

(a) $\|\cdot\|$ — *подчиненная матричная норма;*
(b) $\|\cdot\|$ — *минимальная матричная норма;*
(c) $\|\cdot\| = N_y(\cdot)$ *для всех ненулевых векторов* $y \in \mathbf{C}^n$.

Доказательство. Утверждение, что (а) влечет за собой (b), просто совпадает с частью (b) теоремы 19.6.26. Как уже было отмечено, если норма $\|\cdot\|$ минимальна, то $\|\cdot\| = N_y(\cdot)$; поэтому из (b) следует (с). В предположении (с) норма || • || будет подчиненной, потому что норма $N_y(\cdot)$ является подчиненной по определению.

Из этих утверждений можно почерпнуть нечто большее. В самом деле, если $N_y(\cdot) = \|\cdot\|$ для всех ненулевых $y \in \mathbf{C}^n$, то равенство $N_y(\cdot) = N_z(\cdot)$ верно для всех ненулевых y, $z \in \mathbf{C}^n$. Но в следствии 19.6.23 утверждается, что векторная норма, которой подчинена заданная матричная норма, является единственной с точностью до скалярного множителя; следовательно, имеет место равенство $\|\cdot\|_y = c_{yz}\|\cdot\|_z$ с некоторой положительной константой c_{yz}.

Упражнение. Пусть матричная норма $\|\cdot\|$ на M_n подчинена векторной норме $\|\cdot\|$ на $\mathbf{C}^n$. Показать справедливость равенств $\|yz^*\| = \|y\|\|z\|^D$, $\|\cdot\|_z = \|\cdot\|\|z\|^D$, $c_{yz} = \|y\|^D/\|z\|^D$ для всех векторов y, $z \in \mathbf{C}^n$. Векторная норма $\|\cdot\|^D$ является двойственной к векторной норме $\|\cdot\|$ в смысле определения 19.4.12.

19.8.33. Теорема. *Пусть на* M_n *задана матричная норма* $\|\cdot\|$, *и пусть векторная норма* $\|\cdot\|_y$ *на* $\mathbf{C}^n$ *определена формулой* (19.6.30). *Тогда следующие два утверждения эквивалентны:*

(a) *для каждой пары ненулевых векторов* y, $z \in \mathbf{C}^n$ *существует такая положительная константа* c_{yz}, *что*

$$\|x\|_y = c_{yz}\|x\|_z \text{ для всех векторов } x \in \mathbf{C}^n;$$

(b) *равенство* $\|xy^*\| = \dfrac{\|xz^*\|\|zy^*\|}{\|zz^*\|}$ *верно для всех векторов* x, y, $z \in \mathbf{C}^n$ *при* $z \neq 0$.

В случае подчиненной матричной нормы $\|\cdot\|$ *равенство* (b) *выполнено, и векторные нормы, построенные в соответствии с* (19.6.30), *обладают свойством* (a).

Доказательство. Если предположить, что (a) выполнено, то

$$\|xz^*\|\|zy^*\| = \|x\|_z\|z\|_y = (1/c_{yz})\|x\|_y c_{yz}\|z\|_z =$$
$$= \|x\|_y\|z\|_z = \|xy^*\|\|zz^*\|.$$

В обратную сторону, в предположении (b) утверждение (a) имеет место с константой $c_{yz} = \|zy^*\|/\|zz^*\|$. При $N_y(\cdot) = \|\cdot\|$ мы уже обосновали (a) (следовательно, и (b) также должно выполняться). По теореме 19.6.32 так будет в случае, когда $\|\cdot\|$ — подчиненная матричная норма.

Упражнение. Любая матричная норма, отличающаяся от подчиненной матричной нормы лишь постоянным положительным множителем, удовлетворяет (b) из теоремы 19.6.33. Показать, что каждая из матричных норм

$$\|\cdot\|_{l_1} \text{ и } \|\cdot\|_E$$

Удовлетворяет этому условию, хотя ни одна из них не входит в указанный класс матричных норм.

В теореме 19.6.2 для подчиненной матричной нормы $\|\cdot\|$ доказана справедливость равенства $\|I\| = 1.$ К сожалению, наличие этого равенства для некоторой матричной нормы еще не означает, что это подчиненная матричная норма. Легко видеть, что функция

$$\|A\| \equiv \max\{\|A\|_1, \|A\|_\infty\} \qquad (19.6.34)$$

определяет матричную норму на M_n, для которой выполнено равенство $\|I\| = 1.$ Но поскольку $\|A\|_1 \leqslant \|A\|$ для всех $A \in M_n$ и неравенство $\|A\|_1 < \|A\|$ при $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ строгое, норма $\|\cdot\|$ не является минимальной и, следовательно, не может быть подчиненной матричной нормой.

Упражнение. Проверить, что (19.6.34) определяет матричную норму. В более общей формулировке, показать, что для заданных матричных норм $\|\cdot\|_{(1)}, \ldots, \|\cdot\|_{(k)}$ на M_n формула

$$\|A\| \equiv \max\{\|A\|_{(1)}, \ldots, \|A\|_{(k)}\}$$

определяет матричную норму на M_n.

Подчиненные нормы являются минимальными среди всех матричных норм. Рассмотрим важный класс *унитарно инвариантных матричных норм,* т. е. матричных норм $\|\cdot\|$, удовлетворяющих равенству $\|A\| = \|UAV\|$ для всех матриц $A \in M_n$ и всех унитарных матриц $U, V \in M_n.$ В этом классе оказывается только одна минимальная матричная норма — спектральная норма.

19.6.35. Следствие. *Если $\|\cdot\|$ — унитарно инвариантная матричная норма, то для всех $A \in M_n$ справедливо неравенство $\|A\|_2 \leqslant \|A\|$. Спектральная норма $\|\cdot\|_2$ является единственной подчиненной унитарно инвариантной матричной нормой на M_n.*

Доказательство. Пусть задана унитарно инвариантная матричная норма $\|\cdot\|$. Из части (а) теоремы 19.6.26 известно, что $N(A) \leqslant \|A\|$ для всех матриц $A \in M_n$, где матричная норма $N(A)$ подчинена векторной норме $\|\cdot\|$, определенной формулой (19.6.27). В случае произвольной унитарной матрицы $U \in M_n$ имеем равенства $\|Ux\| = \|UX\| = \|X\| = \|x\|$; следовательно, векторная норма $\|\cdot\|$ оказывается унитарно инвариантной. Если задан ненулевой вектор $x \in \mathbf{C}^n$, то существует унитарная матрица U, для которой $Ux = \|x\|_2 e_1$. Таким образом, $\|x\| = \| \|x\|_2 U^* e_1 \| = = \|x\|_2 \|U^* e_1\| = \|x\|_2 \|e_1\|$ для всех векторов $x \in \mathbf{C}^n$. Это означает, что векторная норма $\|\cdot\|$ отличается от евклидовой нормы лишь скалярным множителем. Тогда следствие (19.6.23) показывает, что норма $N(\cdot)$ (матричная норма, подчиненная норме $\|\cdot\|$) совпадает со спектральной нормой $\|\cdot\|_2$ (матричной нормой, подчиненной норме $\|\cdot\|_2$). Итак, $\|\cdot\|_2 = N(A) \leqslant \|A\|$ для всех матриц $A \in M_n$. Если норма $\|\cdot\|$ предполагается подчиненной, то она будет минимальной, и тогда $\|A\|_2 = \|A\|$ для всех матриц $A \in M_n$.

Если $\|\cdot\|$ — матричная норма на M_n, то функция $\|\cdot\|^*$, определенная формулой

$$\|A\|^* = \|A^*\|,$$

также является матричной нормой на M_n. Прямые вычисления показывают, что

$$\|A\|^*_{l_2} = \|A^*\|_{l_2} = \|A\|_{l_2}, \quad \|A\|^*_{l_1} = \|A^*\|_{l_1} = \|A\|_{l_1}$$

для всех матриц $A \in M_n$. Однако не каждая матричная норма обладает подобным свойством, например $\|A\|_1^* = \|A\|_\infty \neq \|A\|_1$.

Матричную норму, такую, что $\|\cdot\|^* = \|\cdot\|$, называют *самосопряженной*. Евклидова матричная норма и матричная l_1-норма самосопряженные. В силу равенств

$$\|A^*\|_2^2 = \rho(AA^*) = \rho(A^*A) = \|A\|_2^2$$

спектральная норма также будет самосопряженной. На самом деле все унитарно инвариантные нормы на M_n оказываются самосопряженными.

Выясняется, что спектральная норма — единственная самосопряженная норма среди подчиненных матричных норм.

19.6.36. Теорема. *Пусть на M_n задана матричная норма $\|\cdot\|$. Тогда*
(a) *нормаявляется $\|\cdot\|^*$ подчиненной тогда и только тогда, когда $\|\cdot\|$ — подчиненная норма;*
(b) *если матричная норма $\|\cdot\|$ подчинена векторной норме $\|\cdot\|$, то норма $\|\cdot\|^*$ подчинена двойственной норме $\|\cdot\|^D$.*
(c) *спектральная норма $\|\cdot\|_2$ является единственной матричной нормой на M_n, одновременно подчиненной и самосопряженной.*

Доказательство. Если для некоторой матричной нормы $N(\cdot)$ справедливо неравенство $N(A) \leqslant \|A\|^* = \|A^*\|$ для всех матриц $A \in M_n$, то $N(A)^* = N(A^*) \leqslant \|A\|$ для всех $A \in M_n$. В случае минимальной матричной нормы $\|\cdot\|$ имеем равенство $N(\cdot)^* = \|\cdot\|$ и, следовательно, $N(\cdot) = \|\cdot\|^*$. Поэтому матричная норма $\|\cdot\|^*$ будет также минимальной. Утверждение (a) следует из теоремы 19.6.32. Теперь предположим, что матричная норма $\|\cdot\|$ подчинена векторной норме $\|\cdot\|$. Используя теорему двойственности 19.5.14, приходим к соотношениям

$$\begin{aligned}\|A\|^* = \|A^*\| &= \max_{\|x\|=1}\|A^*x\| = \max_{\|x\|=1}(\|A^*x\|^D)^D \\ &= \max_{\|x\|=1}\ \max_{\|z\|^D=1}|(A^*x)^*z| = \max_{\|z\|^D=1}\ \max_{\|x\|=1}|x^*Az| \\ &= \max_{\|z\|^D=1}\|Az\|^D,\end{aligned}$$

показывающим, что матричная норма $\|\cdot\|^*$подчинена векторной норме $\|\cdot\|^D$.

Для доказательства последнего утверждения отметим следующее обстоятельство. Если матричная норма $\|\cdot\|$ подчинена векторной норме $\|\cdot\|$ и имеет место равенство $\|\cdot\| = \|\cdot\|^*$, то норма $\|\cdot\|$ также подчинена векторной норме $\|\cdot\|^D$, как установлено в (b). Однако в следствии 19.6.23 утверждается, что векторная норма, которой подчинена заданная матричная норма, определяется единственным образом с точностью до положительного постоянного множителя. Следовательно, существует некоторое число c>0, при котором $\|\cdot\|^D = c\|\cdot\|$. Тогда по теореме 19.4.16 обязательно выполнено равенство $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2/\sqrt{c}$. Поскольку данная векторная норма пропорциональна евклидовой норме, соответствующие им подчиненные матричные нормы совпадают, т. е. $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$.

Упражнение. Показать, что норма $\|\cdot\|^*$ будет матричной, когда $\|\cdot\|$ — матричная норма.

Упражнение. Показать на примере, что самосопряженная матричная норма не обязана быть унитарно инвариантной.

Из векторных норм наиболее широко применяются абсолютные и монотонные векторные нормы, определенные в 19.5. Имеется простая и полезная характеризацпя матричных норм, подчиненных монотонным векторным нормам.

19.6.37. Теорема. *Пусть* $\|\cdot\|$ — *векторная норма на* $\mathbf{C}^n$, *которой подчинена матричная норма* $\|\cdot\|$ *на* M_n. *Следующие условия эквивалентны:*

(a) $\|\cdot\|$ — *абсолютная норма, т. е.* $\||x|\| = \|x\|$ *для всех векторов* $x \in \mathbf{C}^n$;

(b) *норма* $\|\cdot\|$ *монотонна, т. е.* $\|x\| \leqslant \|y\|$ *для всех* $|x| \leqslant |y|$;

(c) *для любой матрицы* $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n) \in M_n$ *спраедливо равенство*

$$\|D\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |d_i|.$$

Доказательство. Эквивалентность (a) и (b) составляет содержание теоремы 19.5.10. Пусть норма $\|\cdot\|$ монотонна. Положим

$$d \equiv \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |d_i|, \quad d = |d_k|.$$

Тогда $|Dx| \leqslant |dx|$ и, следовательно, $\|Dx\| \leqslant d\|x\|$, где равенство достигается при $x = e_k$. Таким образом,

$$\|D\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Dx\|}{\|x\|} = d,$$

т. е. условие (b) влечет за собой (c). Теперь предположим выполненным (c). Пусть заданы векторы $x,\ y \in \mathbf{C}^n$, удовлетворяющие неравенству $|x| \leqslant |y|$. Существуют такие комплексные числа d_k, что $|x_k| = d_k y_k$, $|d_k| \leqslant 1$, $k = 1, \ldots, n$. Таким образом, полагая $D \equiv \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, приходим к соотношениям $Dy = |x|$ и $\|D\| \leqslant 1$. Поскольку

$$\||x|\| = \|Dy\| \leqslant \|D\|\|y\| \leqslant \|y\|,$$

норма $\|\cdot\|$ должна быть монотонной.

19.7. Векторные нормы на матрицах

Все аксиомы векторной нормы необходимы для содержательного определения понятия «величины» матрицы. Однако в некоторых важных приложениях кольцевое свойство (4) матричной нормы не существенно. Например, в следствии 19.6.14 предельное соотношение фактически имеет место не только для матричных норм, но и для функций из класса даже более общего, чем векторные нормы. По этой причине в данном параграфе мы заострим внимание на векторных нормах матриц, т. е. на векторных нормах (которые могут не обладать кольцевым свойством) на линейном пространстве M_n. Такие нормы часто называют *обобщенными матричными нормами.* Кольцевое свойство нормы иногда называют мультипликативностью или субмультипликативностью и в связи с этим матричную норму называют мультипликативной, а обобщенную матричную норму —

аддитивной (подчеркивая наличие лишь неравенства треугольника). Векторную норму на M_n в общем случае будем обозначать символом $\|\cdot\|$ или $G(\cdot)$. Начнем с некоторых примеров векторных норм на M_n, которые могут быть или не быть матричными нормами.

Пример 1. *Если* $G(\cdot)$ — векторная норма на M_n и матрицы $T, S \in M_n$ невырожденны, то функция

$$G_{T,S}(A) \equiv G(TAS), \quad A \in M_n, \tag{19.7.1}$$

оказывается векторной нормой на M_n. Даже в случае матричной нормы $G(\cdot)$ кольцевое свойство для нормы $G_{T,S}(\cdot)$ не обязано сохраняться.

Упражнение. Показать, что функция $G_{T,S}(\cdot)$ в (19.7.1) — действительно векторная норма на M_n.

Упражнение. Пусть $S = T = I/2$, и пусть $G(\cdot) = \|\cdot\|_{l_\infty}$. Показать, что норма $G_{T,S}(\cdot)$ не является матричной.

Упражнение. Убедиться, что матричная норма $G(\cdot)$ при $T = S^{-1}$ порождает матричную норму $G_{T,S}(\cdot)$.

Пример 2. *Произведение Адамара* двух матриц $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ одинаковых размеров определяется просто как их поэлементное произведение $A \circ B \equiv [a_{ij}b_{ij}]$. Если задана матрица $H \in M_n$ с ненулевыми элементами и $G(\cdot)$ — произвольная векторная норма на M_n, то функция

$$G_H(A) \equiv G(H \circ A) \tag{19.7.2}$$

будет векторной нормой на M_n. Даже когда $G(\cdot)$ — матричная норма, норма $G_H(\cdot)$ может не обладать кольцевым свойством.

Упражнение. Показать, что функция $G_H(\cdot)$ в (19.7.2) — действительно векторная норма.

Упражнение. Удостовериться, что норма $G_H(\cdot)$ (см. (19.7.2)) может быть или не быть матричной в зависимости от выбора *H*. Рассмотреть матричную норму $G(\cdot) = \|\cdot\|_1$ и матрицы

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{19.7.3}$$

в качестве сомножителей в произведении Адамара. Нарушение кольцевого свойства можно проследить на примере матриц

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad AB. \tag{19.7.4}$$

Отметим неравенство $G_{H_1}(C) \leqslant G_{H_2}(C)$, справедливое для всех матриц $C \in M_2$.

Пример 3. Функция

$$G\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \equiv \frac{1}{2}[|a+d|+|a-d|+|b|+|c|] \quad (19.7.5)$$

является векторной нормой на M_2.

Упражнение. Показать, что функция $G(\cdot)$ в (19.7.5) является векторной нормой, но не матричной. Можно привлечь к расмотрению матрицы (19.7.4).

Пример 4. Для заданной матрицы $A \in M_n$ множество $F(A) \equiv \{x^*Ax\colon x \in \mathbf{C}^n,\ x^*x = 1\}$ называют *числовой областью* или *числовым образом* этой матрицы. Функцию

$$r(A) = \max_{x^*x \leqslant 1} |x^*Ax| = \max_{z \in F(A)} |z| \quad (19.7.6)$$

называют *числовым радиусом матрицы А.*

Упражнение. Показать, что числовой радиус *r(A)* задает векторную норму на M_n. *Указание.* Трудно проверяется лишь аксиома положительности (1a), см. 18.1, задача 6. Числовой радиус, однако, не определяет матричную норму, см. задачу 10 далее.

Пример 5. Векторная l_∞-норма на M_n определяется формулой

$$\|A\|_{l_\infty} \equiv \max_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} |a_{ij}|. \quad (19.7.7)$$

В 19.6 мы видели, что $\|\cdot\|_{l_\infty}$ — векторная норма, но не матричная норма на M_n, однако $n\|\cdot\|_{l_\infty}$ — уже матричная норма.

Предыдущие примеры убедительно показывают, что, действительно, существует много векторных норм на M_n, которые не являются матричными нормами. Для некоторых из этих норм, однако, справедлива часть утверждений, которая в случае матричных норм обусловлена наличием кольцевого свойства; для других векторных норм это не так. В то же время каждая векторная норма на M_n эквивалентна любой матричной норме (в том смысле, что понятия сходимости последовательности в этих нормах совпадают). Из теоремы 19.4.4 непосредственно следует фактически даже несколько более общий результат.

19.7.8. ***Теорема***. *Пусть f — квазинорма на M_n, т. е. вещественнозначная функция на M_n, которая является положительной, абсолютно однородной и непрерывной, и пусть задана матричная норма $\|\cdot\|$ на M_n. Тогда существуют такие конечные положительные константы C_m и C_M, что неравенство*

$$C_m\|A\| \leqslant f(A) \leqslant C_M\|A\|$$

справедливо для всех матриц $A \in M_n$. В частности, это утверждение верно для любой векторной нормы $f(\cdot)$ на M_n.

Наличие неравенств (19.7.9) часто бывает полезным для обобщения фактов о матричных нормах на случай векторных норм или, еще шире, векторных квазинорм на матрицах. К примеру, предельное соотношение из следствия 19.6.14 допускает обобщение в этом смысле.

19.7.10. Следствие. *Если f — квазинорма на M_n, то предел* $\lim\limits_{k\to\infty}[f(A^k)]^{1/k}$ *существует для всех матриц* $A\in M_n$ *и*

$$\lim_{k\to\infty}[f(A^k)]^{1/k}=\rho(A)$$

для всех $A\in M_n$. *В частности, это предельное соотношение имеет место для произвольной векторной нормы* $f(\cdot)$ *на* M_n.

Доказательство. Пусть $\|\cdot\|$— матричная норма на M_n. Неравенства

$$C_m\|A^k\|\leqslant f(A^k)\leqslant C_M\|A^k\|$$

влекут за собой

$$C_m^{1/k}\|A^k\|^{1/k}\leqslant[f(A^k)]^{1/k}\leqslant C_M^{1/k}\|A^k\|^{1/k}$$

для всех k = 1, 2, 3 ... . Однако в последних неравенствах $C_m^{1/k}\to 1$, $C_M^{1/k}\to 1$, $\|A^k\|^{1/k}\to\rho(A)$ при $k\to\infty$. Отсюда заключаем, что предел $\lim\limits_{k\to\infty}[f(A^k)]^{1/k}$ существует и принимает требуемое значение.

Можно говорить об эквивалентности векторных и матричных норм на M_n в несколько ином смысле, иллюстрируемом в примере 5 выше. Векторную норму $\|\cdot\|_{l_\infty}$ можно умножить на константу n и получить тем самым матричную норму. Это не случайность: каждая_ векторная норма допускает подобную модификацию.

5.7.11. *Теорема*. *Для каждой векторной нормы* $G(\cdot)$ *на* M_n *существует такая конечная положительная константа* $c(G)$, *что произведение* $c(G)\,G(\cdot)$ *является матричной нормой на* M_n. *Если* $\|\cdot\|$ *— матричная норма на* M_n *и выполнены неравенства*

$$C_m\|A\|\leqslant G(A)\leqslant C_M\|A\|,\quad A\in M_n, \tag{19.7.11a}$$

то справедлива оценка

$$c(G)\leqslant\frac{C_M}{C_m^2}.$$

Более того, существует матричная норма, для которой указанная верхняя граница для $c(G)$ *точна, поэтому*

$$c(G) = \min \left\{ \frac{C_M}{C_m^2} : \|\cdot\| \text{ — *матричная норма и выполнены*} \right.$$

$$\left. \text{*неравенства* (19.7.11a)} \right\}.$$

Доказательство. Для любого сомножителя $c>0$ функция $cG(\cdot)$ удовлетворяет всем аксиомам матричной нормы, быть может, за исключением кольцевого свойства. Однако непрерывность нормы $G(\cdot)$ и компактность единичного шара этой нормы позволяют легко убедиться в конечности и положительности величины

$$c(G) \equiv \max_{A \neq 0 \neq B} \frac{G(AB)}{G(A)\,G(B)} = \max_{G(A)=1=G(B)} G(AB).$$

Тогда

$$G(AB) \leqslant cG(A)\,G(B), \quad cG(AB) \leqslant cG(A)\,cG(B)$$

для всех матриц $A,\ B \in M_n$ (последнее неравенство означает наличие кольцевого свойства у произведения $cG(\cdot)$ в случае выбора $c = c(G)$. В соответствии с условиями теоремы пусть $\|\cdot\|$ — матричная норма на M_n и справедливы неравенства (19.7.31a) эквивалентности норм $G(\cdot)$ и $\|\cdot\|$. Тогда

$$G(AB) \leqslant C_M \| AB \| \leqslant C_M \| A \| \| B \| \leqslant \frac{C_M}{C_m^2} G(A)\,G(B),$$

и приходим к оценке

$$c(G) \leqslant \frac{C_M}{C_m^2}.$$

Осуществляя конкретный выбор матричной нормы $\|\cdot\| = c(G)\,G(\cdot)$, получаем равенства $C_M = c(G)$ и $C_m = 1/c(G)$; таким образом $C_M/C_m^2 = c(G)$.

Упражнение. Показать, что при $k \geqslant c(G)$ произведение $kG(\cdot)$ будет матричной нормой. В частности, норма $C_M G(\cdot)/C_m^2$ всегда будет матричной.

Упражнение. Вывести результат следствия 19.7.10 для векторных норм прямо из теоремы 19.7.11.

Одним из следствий кольцевого свойства матричной нормы является тот факт, что каждой матричной норме на M_n можно поставить в соответствие некоторую согласованную с ней векторную норму на $\mathbf{C}^n$. Именно поэтому для любой матричной нормы $\|\cdot\|$ справедливо неравенство $\|A\| \geqslant \rho(A)$. Векторную норму на M_n, удовлетворяющую этому неравенству для всех матриц $A \in M_n$, называют *спектрально преобладающей.* Интересно отметить следующее. Для одних векторных норм на M_n имеются согласованные с ними векторные нормы на $\mathbf{C}^n$, а для других — нет. Среди последних некоторые нормы являются спектрально преобладающими, а некоторые — нет. Наконец, векторная норма на $\mathbf{C}^n$ может быть согласована с векторной нормой на M_n, не являющейся матричной нормой.

19.7.12. Определение. Векторную норму $\|\cdot\|$ на $\mathbf{C}^n$ и векторную норму $G(\cdot)$ на M_n называют *согласованными,* если неравенство

$$\| Ax \| \leqslant G(A) \| x \|$$

выполнено для всех векторов $x \in \mathbf{C}^n$ и всех матриц $A \in M_n$. Это понятие уже затрагивалось в предыдущем параграфе (см., например, (19.6.27), (19.6.30)). Выделим утверждения, относящиеся к понятию согласованности.

19.7.13. Теорема. *Если* $\| \bullet \|$*—матричная норма на* M_n, *то существует некоторая согласованная с ней векторная норма на* $\mathbf{C}^n$.

Доказательство. Если положить $\| x \| \equiv \| [x\, 0\, 0\, \ldots\, 0] \|$, то будут выполнены соотношения $\| Ax \| = \| [Ax\, 0\, \ldots\, 0] \| = \| A [x\, 0\, \ldots\, 0] \| \leqslant \| A \| \| [x\, 0\, \ldots\, 0] \| = \| A \| \| x \|$.

Обратное утверждение нам уже известно. В теореме 19.6.2 утверждается, что любой заданной векторной норме $\|\cdot\|$ на $\mathbf{C}^n$ соответствует согласованная с ней матричная норма (подчиненная норма из определения 19.6.1).

Упражнение. Показать, что согласованная векторная норма на $\mathbf{C}^n$, наличие которой гарантируется теоремой 19.7.13, может быть не единственной. Действительно, подходят также и норма $\| x \| \equiv \| [x\, x\, \ldots\, x] \|$, и норма $\| x \| \equiv \| x^* y \|$ при любом ненулевом векторе $y \in \mathbf{C}^n$.

19.7.14. Теорема. *Пусть* $G(\cdot)$ *— векторная норма на* M_n, *для которой имеется согласованная векторная норма* $\|\cdot\|$ *на* $\mathbf{C}^n$. *Тогда* $G(A) \geqslant \rho(A)$ *для всех матриц* $A \in M_n$. *В более общей формулировке,*

$$G(A_1) G(A_2) \ldots G(A_k) \geqslant \rho(A_1 A_2 \ldots A_k) \qquad (19.7.15)$$

для всех матриц $A_1, A_2, \ldots, A_k \in M_n$ *и всевозможных* $k = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Положим $k = 2$ и возьмем такой ненулевой вектор $x \in \mathbf{C}^n$, что $A_1 A_2 x = \lambda x$, где $|\lambda| = \rho(A_1 A_2)$. Тогда имеют место соотношения

$$\rho(A_1 A_2) \| x \| = \| \lambda x \| = \| A_1 A_2 x \| = \| A_1 (A_2 x) \| \leqslant$$
$$\leqslant G(A_1) \| A_2 x \| \leqslant G(A_1) G(A_2) \| x \|.$$

Поскольку $\|x\| \neq 0$, выводим, что $\rho(A_1 A_2) \leqslant G(A_1) G(A_2)$. Общее утверждение проверяется аналогично при помощи индукции.

Когда для заданной векторной нормы на M_n найдется согласованная с ней векторная норма на $\mathbf{C}^n$? Условие (19.7.15) является необходимым; чтобы показать его достаточность, потребуется следующая вспомогательная лемма.

19.7.16. Лемма. *Пусть* $G(\cdot)$ *— векторная норма на* M_n, *удовлетворяющая неравенству* (19.7.15), *и через* $\|\cdot\|_2$ *обозначена спектральная норма на* M_n. *Тогда существует такая конечная положительная константа* $c = c(G)$, *что неравенства*

$$G(A_1)G(A_2)\ldots G(A_k) \geqslant c\|A_1A_2\ldots A_k\|_2$$

справедливыдля всех матриц $A_1, A_2, \ldots, A_k \in M_n$ *и всех* $k = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. В силу следствия 19.4.5 найдется такая конечная положительная константа $b = b(G)$, что $\|A\|_2 \geqslant bG(A)$ для всех $A \in M_n$. Пусть заданы натуральное число k и матрицы $A_1, A_2, \ldots, A_k \in M_n$. По теореме 21.3.5 о сингулярном разложении существуют унитарные матрицы V и W и диагональная матрица $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, где все $\sigma_i \geqslant 0$, такие, что

$$A_1A_2\ldots A_k = V\Sigma W^*,$$

$\rho(\Sigma) = \max\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\} = \|A_1A_2\ldots A_k\|_2$. Из неравенства (19.7.15) имеем

$$\begin{aligned} G(V^*)G(A_1)G(A_2)\ldots G(A_k)G(W) \geqslant \rho(V^*A_1A_2\ldots A_kW) = \rho(\Sigma) &= \\ = \|\Sigma\|_2 = \|V^*A_1A_2\ldots A_kW\|_2 &= \\ = \|A_1A_2\ldots A_k\|_2&. \end{aligned}$$

Последнее равенство объясняется унитарной инвариантностью спектральной нормы. Значит,

$$\begin{aligned} G(A_1)G(A_2)\ldots G(A_k) &\geqslant \frac{1}{G(V^*)G(W)}\|A_1A_2\ldots A_k\|_2 \geqslant \\ &\geqslant \frac{b^2}{\|V^*\|_2\|W\|_2}\|A_1A_2\ldots A_k\|_2 = \\ &= b^2\|A_1A_2\ldots A_k\|_2. \end{aligned}$$

Полагая $c = b^2$, приходим к утверждению леммы.

19.7.17. Теорема. *Пусть* $G(\cdot)$*—векторная норма на* M_n. *Векторная норма* $\|\cdot\|$ *на* $\mathbf{C}^n$, *удовлетворяющая неравенству* $\|Ax\| \leqslant G(A)\|x\|$ *для всех* $x \in \mathbf{C}^n$ *и всех* $A \in M_n$, *существует в том и только в том случае, когда для исходной нормы выполнено неравенство*

$$G(A_1)G(A_2)\ldots G(A_k) \geqslant \rho(A_1A_2\ldots A_k)$$

для всех $A_1, A_2, \ldots, A_k \in M_n$ *и всех* $k = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Необходимость уже была доказана в теореме 19.7.14. Чтобы проверить достаточность, убедимся в существовании матричной нормы $\|\cdot\|$ на M_n, удовлетворяющей неравенству $G(A)\geqslant\|A\|$ для всевозможных матриц $A\in M_n$. Пусть $\|\cdot\|$ — векторная норма на $\mathbf{C}^n$, согласованная с нормой $\|\cdot\|$ на M_n (наличие такой нормы обеспечивается теоремой 19.7.13), и пусть заданы вектор $x\in\mathbf{C}^n$ и матрица $A\in M_n$. Тогда $\|Ax\|\leqslant\|A\|\|x\|\leqslant G(A)\|x\|$; поэтому требуемое утверждение действительно будет доказано, если мы сможем построить матричную норму, не превосходящую нормы $G(\cdot)$.

Заданная матрица $A\in M_n$ мириадами способов может быть представлена как произведение матриц или как сумма произведений матриц. Определим функцию

$$\|A\|=\inf\left\{\sum_i G(A_{i1})\ \ldots\ G(A_{ik_i}):\ \sum_i A_{i1}\ldots A_{ik_i}=A,\ A_{ik_j}\in M_n\right\}.$$

Учитывая равенство $\sum A_{i1}\ \ldots\ A_{ik_i}=A$ и используя лемму 19.7.16 и неравенство треугольника для спектральной нормы, имеем

$$\sum_i G(A_{i1})\ \ldots\ G(A_{ik_i})\geqslant\sum_i c\|A_{i1}\ \ldots\ A_{ik_i}\|_2\geqslant$$
$$\geqslant c\left\|\sum_i A_{i1}\ \ldots\ A_{ik_i}\right\|_2=c\|A\|_2.$$

Это неравенство влечет за собой положительность функции $\|\cdot\|$, предлагаемой в качестве нормы. Свойство абсолютной однородности непосредственно вытекает из того же свойства для нормы $G(\cdot)$. Неравенство треугольника и кольцевое свойство для функции $\|\cdot\|$ следуют из ее определения как точной нижней грани суммы произведений.

Упражнение. Провести подробное обоснование того, что функция $\|\cdot\|$, построенная в доказательстве предыдущей теоремы, подчиняется неравенству треугольника и обладает кольцевым свойством. *Указание.* Если $C=A+B$ или $C=AB$, то каждое представление матриц A и B (независимо) в виде суммы произведений дает представление матрицы C в виде суммы произведений, однако подобным образом нельзя получить все такие представления матрицы C.

Упражнение. В предположении, что для векторной нормы (19.7.5) на M_n найдется согласованная с ней векторная норма $\|\cdot\|$ на $\mathbf{C}^2$, доказать соотношения

$$\left\|\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\|=\left\|\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\|\leqslant G\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\left\|\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\|,$$

$$\left\|\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\|=\left\|\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\|\leqslant G\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\left\|\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\|,$$

которые влекут за собой неравенство

$$\left\|\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\|\leqslant G\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}G\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\left\|\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\|$$

и, следовательно,

$$1\leqslant G\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}G\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}.$$

Показать, что последнее утверждение неверно, и вывести отсюда, что для рассматриваемой векторной нормы $G(\cdot)$ на M_2 нельзя найти согласованную с ней векторную норму на $\mathbf{C}^2$.

Упражнение (продолжение). Непосредственно убедиться, что векторная норма (19.7.5) на M_2 является спектрально преобладающей, хотя ей не соответствует ни одна согласованная с пей векторная норма на $\mathbf{C}^2$. Обсудить этот факт в свете теоремы 19.7.17.

Теперь нам известны полезные необходимые и достаточные условия существования для векторной нормы на M_n согласованной векторной нормы на $\mathbf{C}^n$. Мы также знаем, что какова бы ни была векторная норма на $\mathbf{C}^n$, подчиненная матричная норма из определения 19.6.1 согласована с ней и может рассматриваться как векторная норма на M_n, обладающая кольцевым свойством. Когда для векторной нормы на $\mathbf{C}^n$ существует согласованная векторная норма на M_n, не обладающая кольцевым свойством? Всегда.

19.7.18. Теорема. *Пусть задана векторная норма* $\|\cdot\|$ *на* $\mathbf{C}^n$. *Существует векторная норма* $G(\cdot)$ *на* M_n, *не являющаяся матричной нормой и удовлетворяющая неравенству*

$$\|Ax\|\leqslant G(A)\|x\|$$

для всех векторов $x\in\mathbf{C}^n$ *и всех матриц* $A\in M_n$.

Доказательство. Пусть $P\in M_n$ — произвольная матрица перестановки с нулевыми элементами на главной диагонали, например пусть $P=[p_{ij}]$, где $p_{ij}=1$ при $j=i+1$ или при $i=n$, $j=1$, и $p_{ij}=0$ в противном случае. Символом $\|\cdot\|$ также обозначим матричную норму на M_n, подчиненную (в смысле определения 19.6.1) векторной норме $\|\cdot\|$ на $\mathbf{C}^n$. Определим функцию $G(\cdot)$ на M_n формулой

$$G(A) \equiv \| A \| + \| P \| \| P^T \| \max_{1 \leqslant i \leqslant n} | a_{ii} |.$$

Ясно, что эта функция является векторной нормой на M_n, и справедливы неравенства $G(A) \geqslant \|A\|$ для всех $A \in M_n$ и

$$\| Ax \| \leqslant \| A \| \| x \| \leqslant G(A) \| x \|$$

для всех $A \in M_n$ и всех $x \in \mathbf{C}^n$. Однако

$$G(PP^T) = G(I) = \| I \| + \| P \| \| P^T \| = 1 + \| P \| \| P^T \|,$$

$$G(P) = \| P \|,$$

$$G(P^T) = \| P^T \|,$$

$$G(PP^T) > G(P)\, G(P^T).$$

Таким образом, норма $G(\cdot)$ на M_n согласована с данной векторной нормой $\| \cdot \|$ на $\mathbf{C}^n$, но не обладает кольцевым свойством.

Упражнение. Пусть $A = [a_{ij}] \in M_n$. Рассмотреть следующую модификацию матричной нормы $\| \cdot \|_\infty$:

$$\| A \| \equiv \| A + \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}) \|_\infty.$$

Показать, что эта функция допускает представление (19.7.2) в виде нормы, задаваемой произведением Адамара, и, следовательно, является векторной нормой на M_n. Доказать, что эта норма согласована с векторной нормой $\|\cdot\|_\infty$ на $\mathbf{C}^n$. Вычислить величины

$$\left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\|, \qquad \left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \right\|$$

и убедиться, что данная норма не обладает кольцевым свойством.

19.8. Ошибки в обратных матрицах и решениях линейных систем

В качестве приложения матричных и векторных норм рассмотрим задачу оценивания ошибок, возникающих при вычислении обратной матрицы и при решении систем линейных уравнений.

Пусть задана невырожденная матрица $A \in M_n$. Можно считать, что в принципе осуществимо точное нахождение обратной матрицы A^{-1}, однако, если вычисления проводятся на компьютере с конечным машинным словом, неизбежно возникают ошибки за счет округления и усечения. Более того, даже если все вычисления были бы выполнены с предельной точностью, элементы матрицы A могут являться результатами некоторых экспериментов или некоторых предварительных вычислений, вносящих ошибки; таким образом, погрешность имеется уже в исходной информации. Как влияют округления и неточности в начальных данных на фактически найденную обратную матрицу?

Оказывается, что во многих широко используемых алгоритмах эффект ошибок округлений при вычислениях можно смоделировать при помощи возмущений лишь начальных данных. А именно, пусть задана невырожденная матрица $A \in M_n$ и мы хотим вычислить обратную к ней A^{-1} однако в действительности вычисляем матрицу $(A+E)^{-1}$, где возмущение $E \in M_n$ достаточно «мало», так что матрица $A+E$ обратима. Тогда ошибка равна $A^{-1}-(A+E)^{-1}=A^{-1}-(I+A^{-1}E)^{-1}A^{-1}$. Если $\rho(A^{-1}E)<1$, то матрица $A+E$ будет обратимой и можно записать матрицу $(I+A^{-1}E)^{-1}$ в виде ряда по степеням матрицы $A^{-1}E$. Это дает

$$A^{-1}-(A+E)^{-1}=A^{-1}-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(A^{-1}E)^kA^{-1}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(A^{-1}E)^kA^{-1}.$$

Таким образом, имеем точную формулу для ошибки

$$A^{-1}-(A+E)^{-1}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(A^{-1}E)^kA^{-1}, \qquad (19.8.1)$$

Если $\rho(A^{-1}E)<1$.

Теперь пусть имеется матричная норма $\|\cdot\|$ и выполнено предположение $\|A^{-1}E\|<1$, так что, в частности, $\rho(A^{-1}E)<1$ и справедливо равенство (19.8.1). Тогда

$$\|A^{-1}-(A+E)^{-1}\|=\left\|\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(A^{-1}E)^kA^{-1}\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\|A^{-1}A\|^k\|A^{-1}\|=\frac{\|A^{-1}E\|}{1-\|A^{-1}E\|}\|A^{-1}\|,$$

и мы получаем верхнюю границу относительной ошибки, совершаемой при вычислении обратной матрицы:

$$\frac{\|A^{-1}-(A+E)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|}\leqslant\frac{\|A^{-1}E\|}{1-\|A^{-1}E\|}, \qquad (19.8.2)$$

если $\|A^{-1}E\|<1$.

Считая дополнительно матрицу E настолько «малой», что $\|E\|<1/\|A^{-1}\|$, приходим к неравенствам

$$\rho(A^{-1}E)\leqslant\|A^{-1}E\|\leqslant\|A^{-1}\|\|E\|<1$$

и получаем оценку

$$\frac{\|A^{-1}-(A+E)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leqslant \frac{\|A^{-1}\|\|E\|}{1-\|A^{-1}\|\|E\|} = \frac{\|A^{-1}\|\|A\|(\|E\|/\|A\|)}{1-\|A^{-1}\|\|A\|(\|E\|/\|A\|)}.$$

Величину

$$\varkappa(A) \equiv \begin{cases} \|A^{-1}\|\|A\|, & \text{если } A \text{ невырожденна,} \\ \infty, & \text{если } A \text{ вырожденна,} \end{cases} \tag{19.8.3}$$

называют *числом обусловленности* матрицы A по отношению к матричной норме $\|\cdot\|$. Заметим, что

$$\varkappa(A) = \|A^{-1}\|\|A\| \geqslant \|A^{-1}A\| = \|I\| = 1$$

для любой матричной нормы.

Используя это обозначение, можно переписать последнюю оценку в виде

$$\frac{\|A^{-1}-(A+E)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leqslant \frac{\varkappa(A)}{1-\varkappa(A)(\|E\|/\|A\|)} \cdot \frac{\|E\|}{\|A\|}, \tag{19.8.4}$$

если $\|E\|\|A^{-1}\| < 1$. В этом неравенстве относительная ошибка в обратной матрице оценивается через относительную ошибку в исходной матрице. При малых значениях нормы $\|E\|$ правая часть в (19.8.4) эквивалентна выражению $\varkappa(A)\|E\|/\|A\|$; таким образом, есть все основания считать, что относительная ошибка в обратной матрице имеет одинаковый порядок малости с относительиой ошибкой в начальных данных при условии, что величина $\varkappa(A)$ не слишком велика. Имея в виду задачу обращения, при больших значениях $\varkappa(A)$ говорят о *плохой обусловленности* матрицы A (по отношению к матричной норме $\|\cdot\|$). Когда величина $\varkappa(A)$ мала (близка к единице), говорят о *хорошей обусловленности* матрицы A (по отношению к матричной норме $\|\cdot\|$). Наконец, при $\varkappa(A) = 1$ матрицу A называют *идеально обусловленной* (по отношению к матричной норме $\|\cdot\|$).

В наиболее важном случае, когда используется спектральная матричная норма, имеется интересное геометрическое описание числа обусловленности. Пусть $\theta(A)$ обозначает наименьший угол между векторами Ax и Ay для всевозможных пар ортонормированных векторов x и y. Число обусловленности по отношению к спектральной норме равно $\varkappa(A) = \operatorname{ctg}[\theta(A)/2]$. Следовательно, для унитарной матрицы A имеем $\theta(A) = \pi/2$ и $\operatorname{ctg}(\pi/4) = 1 = k(A)$. Если матрица A «близка к вырожденной», то найдется некоторая пара ортонормированных векторов x, y, такая, что векторы Ax и Ay «почти параллельны». Тогда угол $\theta(A)$ будет мал и число обусловленности $\varkappa(A) = \operatorname{ctg}[\theta(A)/2]$ будет большим. Более подробно см. пример 21.4.26.

Упражнение. Показать, что для обратимой матрицы $A \in M_n$ справедливо равенство $\varkappa(A) = \varkappa(A^{-1})$.

Упражнение. Пусть заданы унитарные матрицы $U,\ V \in M_n$ и в определении числа обусловленности участвует спектральная норма (или любая другая унитарно инвариантная норма). Убедиться, что имеет место равенство

$$\varkappa(A) = \varkappa(UA) = \varkappa(AV) = \varkappa(UAU).$$

Таким образом, унитарное преобразование данной матрицы не ухудшает ее обусловленности. Это наблюдение лежит в основе многих устойчивых численных алгоритмов линейной алгебры.

Упражнение. Обосновать неравенства $\varkappa(AB) \leqslant \varkappa(A)\varkappa(B)$. Является ли функция $\varkappa(\cdot)$ матричной или векторной нормой на M_n?

Эти же соображения можно использовать для вывода априорных оценок точности решения системы линейных алгебраических уравнений. Пусть решению подлежит система уравнений

$$Ax = b, \quad A \in M_n, \quad b \in \mathbf{C}^n, \tag{19.8.5}$$

но вследствие ошибок в вычислениях или неопределенности в начальных данных фактически решается система

$$(A + E)\hat{x} = b, \quad A,\ E \in M_n, \quad b \in \mathbf{C}^n. \tag{19.8.6}$$

Что можно сказать о величине ошибки $x - \hat{x}$?

Если матрица E настолько «мала», что $\rho(A^{-1}E) < 1$, то в силу (19.8.1) имеем

$$x - \hat{x} = A^{-1}b - (A + E)^{-1}b = [A^{-1} - (A + E)^{-1}]\,b =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} (A^{-1}E)^k A^{-1}b = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} (A^{-1}E)^k x.$$

Пусть $\|\cdot\|$ — матричная норма, в которой имеет место неравенство $\|A^{-1}E\| < 1$. Обозначение $\|\cdot\|$ сохраним и для согласованной с ней векторной нормы на $\mathbf{C}^n$. Тогда норма ошибки допускает оценку сверху

$$\|x - \hat{x}\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|A^{-1}E\|^k \|x\| = \frac{\|A^{-1}E\|}{1 - \|A^{-1}E\|} \|x\|.$$

В терминах относительных ошибок это означает, что

$$\frac{\|x - \hat{x}\|}{\|x\|} \leqslant \frac{\|A^{-1}E\|}{1 - \|A^{-1}E\|}, \tag{19.8.7}$$

если $\|A^{-1}E\| < 1$ и если векторная норма $\|\cdot\|$ на $\mathbf{C}^n$ согласована с матричной нормой $\|\cdot\|$. Отметим аналогию с оценкой сверху (19.8.2) относительной ошибки в обратной матрице и тот факт, что правая часть b рассматриваемой системы линейных уравнений не входит в верхнюю границу относительной ошибки в (19.8.7). Привлекая рассуждения, подобные приведенным выше при выводе неравенства (19.8.4), приходим к оценке относительной ошибки в решении системы (19.8.5) с участием числа обусловленности $\varkappa(A)$ матрицы *A:*

$$\frac{\|x-\hat{x}\|}{\|x\|} \leqslant \frac{\varkappa(A)}{1-\varkappa(A)\left(\|E\|/\|A\|\right)} \frac{\|E\|}{\|A\|}, \qquad (19.8.8)$$

которая имеет место, когда $\|A^{-1}\|\|E\|<1$ и векторная норма $\|\cdot\|$ на $\mathbf{C}^n$ согласована с матричной нормой $\|\cdot\|$. Какой бы метод ни применялся для решения системы линейных уравнений (19.8.5), относительная ошибка в решении оценивается сверху той же величиной, что и относительная ошибка в матрице, обратной к матрице коэффициентов данной системы.

На практике возмущению могут подвергнуться не только элементы матрицы коэффициентов *A* идеальной системы линейных уравнений (19.8.5), но и элементы вектора *b*, правой части этой системы. Таким образом, оправдано желание заменить систему (19.8.6) на следующую:

$$(A+E)\hat{x}=b+e, \quad (19.8.9)$$

где матрицу $E \in M_n$ и вектор $e \in \mathbf{C}^n$ можно трактовать как «малые» ошибки в начальных данных.

Проводя аналогичные выкладки, получаем (при $b \neq 0$) оценку относительной ошибки в решении системы (19.8.9) по сравнению с решением системы (19.8.5):

$$\frac{\|x-\hat{x}\|}{\|x\|} \leqslant \frac{\varkappa(A)}{1-\varkappa(A)\left(\|E\|/\|A\|\right)} \frac{\|E\|}{\|A\|} + \frac{\varkappa(A)}{1-\varkappa(A)\left(\|E\|/\|A\|\right)} \frac{\|e\|}{\|b\|}; \quad (19.8.10)$$

она верна при тех же предположениях, что и (19.8.8). Таким образом, граница для относительной ошибки определяется двумя слагаемыми, одно связано с относительной ошибкой в коэффициентах *A,* а другое — с относительной ошибкой в правой части *b*. Число обусловленности $\varkappa(A)$ вновь играет решающую роль и определяет чувствительность оценки ошибки в решении к погрешностям в начальных данных. Все оценки ошибок, полученные нами до сих пор, были априорными: в выражения для границ ошибок не входят ни само вычисленное решение, ни какие-либо величины, связанные с этим решением. Предположим, однако, что было найдено некоторое приближенное «решение» $\hat{x}$ системы (19.8.5). Точное равенство $A\hat{x}=b$ в этом случае может быть нарушено. При помощи *вектора невязки* $r \equiv b - A\hat{x}$ можно оценить, насколько вектор $\hat{x}$ близок к истинному решению *x.* В силу равенств $A^{-1}r = A^{-1}[b-A\hat{x}] = A^{-1}b-\hat{x} = x-\hat{x}$ имеем простую оценку $\|x-\hat{x}\| \leqslant \|A^{-1}r\|$. Вводя матричную норму $\|\cdot\|$, согласованную с векторной нормой $\|\cdot\|$, приходим к соотношениям $\|b\| =$

$= \| Ax \| \leqslant \| A \| \| x \|$, или $1 \leqslant \| A \| \| x \| / \| b \|$ при $b \neq 0$. Следовательно,

$$\| x - \hat{x} \| \leqslant \| A^{-1} \| \| r \| \leqslant \frac{\| A \| \| x \|}{\| b \|} \| A^{-1} \| \| r \| = \| A \| \| A^{-1} \| \frac{\| r \|}{\| b \|} \| x \|.$$

Итак, при замене точного решения *x* (удовлетворяющего равенству *Ax=b)* на приближенное решение $\hat{x}$ (такое, что $A\hat{x} = b - r$) получаем при $b \neq 0$оценку

$$\frac{\| x - \hat{x} \|}{\| x \|} \leqslant \varkappa(A) \frac{\| r \|}{\| b \|}, \qquad (19.8.11)$$

в которой матричная норма, используемая в определении числа обусловленности $\varkappa(A)$, предполагается согласованной с нормой векторов $\| \cdot \|$. Относительная ошибка решения системы с хорошей обусловленностью сравнима с относительной величиной невязки. В случае плохо обусловленных систем приближенное решение даже с малой невязкой может очень существенно отличаться от истинного решения:

В качестве заключительного замечания о применении норм для оценивания ошибок обратим внимание на то, что оценки сверху, полученные в этом параграфе, — всего лишь оценки сверху. Верхняя граница может быть велика, а фактическая ошибка может, тем не менее, быть небольшой. Для всех таких оценок характерен консерватизм: они приводят к чрезмерно завышенным границам ошибки для многих задач. Однако если среднего размера матрица *A* с элементами умеренной величины плохо обусловлена, то в матрице A^{-1} обязательно будут присутствовать большие элементы. В этой ситуации следует соблюдать особенную осторожность по следующей причине.

Пусть $Ax = b$ и $C = [c_{ij}] = A^{-1}$. Дифференцируем равенство $x = Cb$ по элементам b_j, что приводит к соотношениям

$$\frac{\partial x_i}{\partial b_j} = c_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (19.8.12)$$

Кроме того, если рассмотреть матрицу $C=A^{-1}$ как функцию от матрицы *A,* то ее элементы являются просто рациональными функциями элементов матрицы *A* и, следовательно, их можно дифференцировать. Запишем равенство $CA = I$ поэлементно:

$$\sum_{p=1}^{n} c_{ip} a_{pq} = \delta_{iq}, \quad i, q = 1, \ldots, n,$$

и возьмем производную по переменной a_{jk}. Получаем

$$\sum_{p=1}^{n} \left[\frac{\partial c_{ip}}{\partial a_{jk}} a_{pq} + \delta_{pj} \delta_{qk} c_{ip} \right] = \left[\sum_{p=1}^{n} \frac{\partial c_{ip}}{\partial a_{jk}} a_{pq} \right] + \delta_{qk} c_{ij} = 0,$$

или, эквивалентно,

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{\partial c_{ip}}{\partial a_{jk}} a_{pq} = -\delta_{qk} c_{ij}, \quad i,\ j,\ k,\ q = 1,\ \ldots,\ n.$$

Дифференцируя теперь $x = Cb$ также по a_{jk}, приходим к равенству

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_{jk}} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial c_{ip}}{\partial a_{jk}} b_p = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial c_{ip}}{\partial a_{jk}} a_{pq} x_q =$$

$$= \sum_{q=1}^{n} \left[\sum_{p=1}^{n} \frac{\partial c_{ip}}{\partial a_{ik}} a_{pq} \right] x_q = \sum_{q=1}^{n} [-\delta_{qk} c_{ij}]\, x_q = -c_{ij} x_k,$$

что эквивалентно соотношению

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_{jk}} = -c_{ij} \sum_{p=1}^{n} c_{kp} b_p. \qquad (19.8.13)$$

Если в матрице $C = A^{-1}$ имеются относительно большие элементы, то в силу соотношений (19.8.12) и (19.8.13) некоторые компоненты решения x могут обладать неминуемо большой чувствительностью к возмущениям в некоторых компонентах правой части бив элементах матрицы коэффициентов A.

Микромодуль 55
Индивидуальные тестовые задания

Задачи к п.19.6

1. Привести пример обобщенной матричной нормы, для которой $\|I\| < 1$.

2. Матрицу A, совпадающую со своим квадратом $A^2 = A$, называют *идемпотентной.* Привести пример идемпотентной 2×2 -матрицы, отличной от I и 0. Показать, что только числа 0 и 1 могут выступать в качестве собственных значений идемпотентной матрицы. Показать, что идемпотентную матрицу A всегда можно привести к диагональному виду и что для нее справедливо неравенство $\|A\| \geqslant 1$ для любой матричной нормы $\|\cdot\|$, если только $A \neq 0$.

3. Пусть — $\|\cdot\|$ матричная норма на M_n. Показать, что функция $c\|\cdot\|$ является матричной нормой для всех значений $c \geqslant 1$, однако функции $c\|\cdot\|_1$ или $c\|\cdot\|_{l_1}$ не будут матричными нормами, каково бы ни было значение $c< 1$.

4. В определении 19.6.1 одна и та же векторная норма играет две разные роли. Можно дать более общее определение нормы $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$, а именно

$$\|A\|_{\alpha,\beta} = \max_{\|x\|_\alpha = 1} \|Ax\|_\beta,$$

где $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ — две (возможно различные) векторные нормы. Будет ли такая функция $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ матричной нормой? Какими интересными свойствами может обладать эта функция? Заметим, что это понятие нормы $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ может быть применено в случае $m \times n$ - матриц, поскольку норму $\|\cdot\|_\alpha$ можно выбрать как векторную норму на $\mathbf{C}^m$ и норму $\|\cdot\|_\beta$ можно выбрать как векторную норму на $\mathbf{C}^n$. Какие свойства в этой ситуации имеет функция $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$, рассматриваемая как аналог подчиненной матричной нормы?

5. Показать, что евклидова норма $\|\cdot\|_E$ и спектральная норма $\|\cdot\|_2$ — унитарно инвариантные нормы на M_n, т. е. нормы матриц A и UAV совпадают, каковы бы ни были унитарные матрицы U и V. Сравнить матричные нормы $\|\cdot\|_E$ и $\|\cdot\|_2$ по всемвозможным признакам. Проверить равенство $\|A\|_E = [\mathrm{tr}\, A^*A]^{1/2}$.

6. Убедиться, что наличие аксиом (1) — (3) для нормы $\|\cdot\|$ наследуется функцией $\|\cdot\|_S$ из теоремы 19.6.7. Таким образом, в условиях и заключении теоремы 19.6.7 можно заменить термин «матричная норма» на «обобщенная матричная норма».

7. Если $\|\cdot\|$ — подчиненная матричная норма на M_n и матрица $S \in M_n$ невырожденна, показать, что матричная норма $\|\cdot\|_S$ (определенная в теореме 19.6.7) будет также подчиненной матричной нормой. Если матричная норма $\|\cdot\|$ подчинена векторной норме $\|\cdot\|$, показать, что матричная норма $\|\cdot\|_S$ будет подчинена векторной корме $\|\cdot\|_S$ (определенной в теореме 19.3.2).

8. Доказать, что множество невырожденных матриц из M_n плотно в M_n, т. е. что каждая матрица в M_n является пределом некоторой последовательности невырожденных матриц. Будет ли также плотным в M_n множество вырожденных матриц?

9. Убедиться, что множество векторных норм на $\mathbf{C}^m$ выпукло для всех $m \geqslant 1$, но множество матричных норм на M_n не выпукло ни для какого $n \geqslant 2$. Показать, что матричные нормы $N_1(\cdot)$ и $N_2(\cdot)$ на M_n определяют при помощи формулы $N(\cdot) \equiv [N_1(\cdot) + N_2(\cdot)]/2$ матричную норму в том и только в том случае, когда

$$[N_1(A) - N_2(A)][N_1(B) - N_2(B)] \leqslant 2[N_1(A)N_1(B) - N_1(AB)] + \\ + 2[N_2(A)N_2(B) - N_2(AB)]$$

для всех матриц $A,\ B \in M_n$. *Указание.* Рассмотреть нормы $N_1(\cdot) = \|\cdot\|_{l_1},\ N_2(\cdot) = \|\cdot\|_E$ и матрицы $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = A^T$. В примере 21.4.54 указывается важное подмножество матричных норм, которое является выпуклым.

10. Проверить, что на пространстве M_n векторная l_1- норма $\|A\|_{l_1} \equiv \sum_{i,\ j=1}^{n} |a_{ij}|$ оказывается матричной нормой, но не подчинена никакой норме на $\mathbf{C}^n$.

11. Показать пригодность всех последующих выражений для вычисления спектральной нормы 19.6.6:

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \max_{\|x\|_2 \leqslant 1} \|Ax\|_2 = \\ = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \max_{\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1} |y^*Ax| = \\ = \max_{\substack{\|x\|_2 \leqslant 1 \\ \|y\|_2 \leqslant 1}} |y^*Ax|.$$

Используя эти соотношения, убедиться в справедливости равенства $\|A\|_2 = \|A^*\|_2$ для всех матриц $A \in M_n$. Затем доказать равенства $\|AA^*\|_2 = \|A^*A\|_2 = \|A\|_2^2$, основываясь на том, что $\|\cdot\|_2$ — матричная норма и матрица A^*A эрмитова.

12. Установить в случае $\rho(A) < 1,\ A \in M_n$ сходимость ряда $I + A + A^2 + \ \dots$ к матрице $(I - A)^{-1}$.

13. Доказать справедливость неравенства $\|I - A\| \geqslant 1$ для любой матричной нормы $\|\bullet\|$ в предположении, что матрица $A \in M_n$ вырожденна.

14. Пусть на M_n заданы матричные нормы $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$. Показать, что формула $\|A\| \equiv \max\{\|A\|_\alpha,\ \|A\|_\beta\}$ определяет матричную норму на M_n. Когда эта норма будет подчиненной?

15. Привести пример матрицы *A,* удовлетворяющей строгому неравенству $\rho(A) < \|A\|$ для каждой матричной нормы $\|\cdot\|$.

16. Пусть $A = [a_{ij}] \in M_n$. Проверить, что функция $\|\cdot\|$, определенная на M_n формулой

$$\|A\| \equiv n \max_{1 \leqslant i,\ j \leqslant n} |a_{ij}|,$$

является матричной нормой, но не подчинена при $n \geqslant 2$ никакой векторной норме.

17. Применить результат задачи 12 к вычислению обратной для матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Указание. Только три первых члена соответствующего ряда ненулевые.
18. Обобщить методику, примененную в задаче 17, на случай вычисления обратной к произвольной невырожденной верхней треугольной матрице $A \in M_n$. *Указание.* Выбрать диагональную матрицу *D* так, чтобы матрица *DA* на главной диагонали имела только единицы.
19. Показать, что спектральный радиус является непрерывной и абсолютно однородной функцией на M_n, но не будет ($n \geqslant 2$) ни матричной, ни обобщенной матричной нормой на M_n, поскольку
(a) для некоторых матриц $A \neq 0$ имеет место равенство $\rho(A) = 0$,
(b) может выполняться неравенство $\rho(A+B) > \rho(A) + \rho(B)$,
(c) неравенство $\rho(AB) > \rho(A)\rho(B)$ может быть справедливо даже при ненулевых значениях $\rho(A)$ и $\rho(B)$.
Указание. Рассмотреть матрицы $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
20. Показать, что $\| AB \|_E \leqslant \| A \|_2 \| B \|_E$, $\| AB \|_E \leqslant \| A \|_E \ \| B \|_2$ для всех матриц A, $B \in M_n$.
21. Доказать неравенство $\| A \|_2^2 \leqslant \| A \|_1 \| A \|_\infty$ для всех $A \in M_n$.
Как этот результат согласуется с оценкой, которую можно получить непосредственно из таблицы в задаче 23? Почему имеется различие? *Указание.* $\rho(A^*A) \leqslant \| A^*A \|_1$, $\| A^* \|_1 = \| A \|_\infty$.
22. Пусть на $\mathbf{C}^n$ задана векторная норма $\| \cdot \|_\alpha$ и определена двойственная к ней норма $\| \cdot \|_\beta \equiv (\| \cdot \|_\alpha)^D$. Эти же обозначения сохраним для соответствующих подчиненных матричных норм на M_n. При помощи теоремы 19.6.36 установить равенства $\| A^* \|_\beta = \| A \|_\alpha$ для всех $A \in M_n$. Вывести заключение о справедливости неравенства $\| A \|_2^2 \leqslant \| A \|_\alpha \| A \|_\beta$ для всех $A \in M_n$. Объяснить, почему этот результат обобщает соответствующий результат задачи 21. Как данное неравенство соотносится с утверждением леммы 19.4.13 при $x = y$?
23. Проверить, что элементы следующей таблицы представляют собой наилучшие значения констант C_M, удовлетворяющих неравенству $\| A \|_\alpha \leqslant C_M \| A \|_\beta$ для всех матриц $A \in M_n$. Все

указанные в таблице нормы являются матричными. Каждое указание, приведенное вслед за таблицей, пронумеровано индексами (i, j) и отвечает соответствующему неравенству с константой, расположенной в i-й строке и j-м столбце таблицы. Указание завершается ссылкой на одну из тех матриц, для которых неравенство $\|A\|_\alpha \leqslant C_M\|A\|_\beta$ обращается в равенство при данном значении константы C_M.

$\|\cdot\|_\alpha \diagdown \|\cdot\|_\beta$	$\|\cdot\|_1$	$\|\cdot\|_2$	$\|\cdot\|_\infty$	$\|\cdot\|_{l_1}$	$\|\cdot\|_E$	$n\|\cdot\|_{l_\infty}$
$\|\cdot\|_1$	1	$\sqrt{n}$	n	1	$\sqrt{n}$	1
$\|\cdot\|_2$	$\sqrt{n}$	1	$\sqrt{n}$	1	1	1
$\|\cdot\|_\infty$	n	$\sqrt{n}$	1	1	$\sqrt{n}$	1
$\|\cdot\|_{l_1}$	n	$n^{3/2}$	n	1	n	n
$\|\cdot\|_E$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	1	1	1
$n\|\cdot\|_{l_\infty}$	n	n	n	n	n	1

Используются следующие обозначения для матриц из множества M_n:
I — единичная матрица,
J — матрица, составленная только из единиц,
A_1 — матрица, у которой первый столбец образован только из единиц, а все остальные элементы нулевые,
A_2 — матрица, единственный ненулевой элемент которой расположен в верхнем левом углу и равен единице.

Указания

(1,2) вытекает из (2,1) в силу соотношений (19.6.21).

(1,3) $\|A\|_1 \leqslant \|A\|_{l_1} \leqslant n\|A\|_\infty$; A_1.

(1,4) A_1.

(1,5) $$\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left[\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right]^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right]^2 \leqslant \left[\sum_{j=1}^{n}1\right]\left[\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right]$$
(неравенство Коши — Шварца); A_1.

(1,6) $$\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| \leqslant n \max_{1\leqslant i,\, j\leqslant n}|a_{ij}|;\ J.$$

(2,1) следует из (2,5) и (5,1); A^*_1.
(2.3) следует из (2,5) и (5,3); A_1.
(2.4) следует из (2,5) и (5,4); A_2.

(2,5) $$\|A\|_2^2 = \rho(A^*A) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(A^*A) = \operatorname{tr} A^*A = \|A\|_E^2;\ A_1.$$

(2,6) следует из (2,5) и (5,6); J.
(3.1) следует из (1,3) в силу (5.6.21); A^*_1.

(3.2) следует из (2,3) в силу (5.6.21); A^*_1.
(3.4) A^*_1.
(3.5) аналогично (1,5); A^*_1.
(3.6) аналогично (1,6); J.

(4,1) $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| \leqslant n \max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$; I.

(4.2) вытекает из неравенств, соответствующих константам с индексами (4,5) и (5,2); каждое из этих двух неравенств обращается в равенство при следующем выборе матрицы: положим

$a \equiv e^{2\pi i/n}$ и заметим, что $(\bar{a})^k = a^{-k}$ и что сумма $\sum_{k=0}^{n-1} a^{kj}$ равна нулю при $j \neq 0$ и равна n при $j = 0$; тогда в качестве (k, j)-элемента матрицы A выступает число a^{kj} и справедливы равенства $A^*A = nI$, $\|A\|_2 = \sqrt{n}$, $\|A\|_{I_1} = n^2$, $\|A\|_E = n$.

(4.3) аналогично (4,1); J.

(4,5) $\left[\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|\right]^2 = \sum_{i,j,p,q=1}^{n}|a_{ij}||a_{pq}| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i,j,p,q=1}^{n}[|a_{ij}|^2 + |a_{pq}|^2]$ (неравенство между арифметическим и геометрическим средними); J.

(4,6) $\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}| \leqslant n^2 \max_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}|$; I.

(5,1) $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right]^2 \leqslant n\left[\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right]^2$; I.

(5,2) $\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2 = \operatorname{tr} A^*A = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(A^*A) \leqslant n\lambda_{\max}(A^*A)$; I.

(5,3) аналогично (5,1); I.

(5,4) $\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2 \leqslant \left[\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|\right]^2$; A_2.

(5,6) $\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2 \leqslant n^2 \max_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}|^2$; I.

(6,1) $\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}| \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$; I.

(6,2) $\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}|^2 \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2 = \max_{1\leqslant i\leqslant n}(A^*A)_{ii} \leqslant \rho(A^*A)$; I.

(6,3) аналогично (6,1); I.

(6,4) $\max\limits_{1\leqslant i,\,j\leqslant n} |a_{ij}| \leqslant \sum\limits_{i,\,j=1}^{n} |a_{ij}|;\ A_2.$

(6,5) $\max\limits_{1\leqslant i,\,j\leqslant n} |a_{ij}|^2 \leqslant \sum\limits_{i,\,j=1}^{n} |a_{ij}|^2;\ A_2.$

24. Показать, что оценку (5,2) в задаче 23 можно заменить на лучшую $\|A\|_E \leqslant [\operatorname{rank} A]^{1/2} \|A\|_2$. *Указание.* Величина rank *A* равна числу ненулевых собственных значений матрицы A^*A.

25. Пусть задана матрица $A \in M_n$. Как гласит лемма 19.6.10, для любого $\varepsilon > 0$ существует некоторая матричная норма $\|\cdot\|$, удовлетворяющая неравенствам $\rho(A) < \|A\| < \rho(A) + \varepsilon$. Показать, что существует невырожденная матрица $C = C(\varepsilon) \in M_n$, такая, что $\rho(A) < \|CAC^{-1}\|_2 < \rho(A) + \varepsilon$. *Указание.* Провести рассуждение по аналогии с доказательством леммы 19.6,10 и обосновать возможность представления $\|CAC^{-1}\|_2^2 = [\rho(A)]^2 + \quad + O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

26. Показать, что для всех справедливо $A \in M_n$ неравенство $\|A\|_E^2 \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$, в котором равенство имеет место тогда и только тогда, когда матрица *A* нормальна. В связи с этим фактом величину

$$\left[\|A\|_E^2 - \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2\right]^{1/2}$$

иногда называют *дефектом нормальности. Указание.* Использовать теорему Шура об унитарной триангуляризации и унитарную инвариантность евклидовой нормы.

27. Теорему 19.6.9 можно применять для определения границ корней многочленов с вещественными или комплексными коэффициентами, если привлечь понятие сопровождающей матрицы. Каждый многочлен $f(z)$ степени не меньше первой можно записать в виде $f(z) = Cz^k p(z)$, где *C* — ненулевая константа,

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_1 z + a_0 \quad (19.6.38)$$

и $a_0 \neq 0$. Решения уравнения $p(z) = 0$, совпадают с ненулевыми решениями уравнения $f(z) = 0$. Именно для этих чисел можно предложить различные оценки.

(a) Убедиться в точном совпадении многочлена $p(z)$ с характеристическим многочленом *сопровождающей* матрицы

$$C(p) = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (19.6.39)$$

Следовательно, решения уравнения $p(z) = 0$, равны собственным значениям матрицы $C(p)$. *Указание.* Вычислить $\det[zI - C(p)]$ при помощи разложения по первому столбцу и использовать соображения индукции.

(b) Применить теорему 19.6.9 для проверки неравенства $|\tilde{z}| \leqslant \|C(p)\|$, в котором $\tilde{z}$ — решение уравнения $p(z) = 0$ и $\|\cdot\|$ — произвольная матричная норма на M_n.

В последующих пунктах через $\tilde{z}$ обозначается любое решение уравнения $p(z) = 0$.

(c) Используя норму $\|\cdot\|_1$, показать, что

$$|\tilde{z}| \leqslant \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, \dots, 1 + |a_{n-1}|\} \leqslant$$
$$\leqslant 1 + \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n-1}|\}. \qquad (19.6.40)$$

Это неравенство для корней многочлена известно как *оценка Коши.*

(d) При помощи нормы $\|\cdot\|_\infty$ доказать *оценку Монтеля*

$$|\tilde{z}| \leqslant \max\{1, |a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}|\} \leqslant$$
$$\leqslant 1 + |a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}|. \qquad (19.6.41)$$

Показать, что этот результат слабее оценки Коищ.

(e) Привлекая норму $\|\cdot\|_{l_1}$, убедиться в справедливости неравенства

$$|\tilde{z}| \leqslant (n-1) + |a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}|,$$

которое обеспечивает худшую границу по сравнению с (19.6.41) для всех значений $n>2$.

(f) Употребляя норму $\|\cdot\|_E$, получить оценку

$$|\tilde{z}| \leqslant [n + |a_0|^2 + |a_1|^2 + \dots + |a_{n-1}|^2]^{1/2},$$

менее точную, чем оценка (19.6.42) Кармайкла и Мейсона.

(g) Применяя норму $n\|\cdot\|_{l_\infty}$, прийти к оценке

$$|\tilde{z}| \leqslant n \max\{1, |a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n-1}|\},$$

которая является более грубой, чем (19.6.41).

28. Результат п. (f) в задаче 27 можно улучшить в тех же самых терминах. Запишем сопровождающую матрицу в виде $C(p)=S+R$, где

$$S=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & & & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & & & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R=\begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Проверить равенства $S^*R=R^*S=0$, $\|S^*S\|_2=1$, $\|R^*R\|_2= =|a_0|^2+|a_1|^2+\dots+|a_{n-1}|^2$. Показать, что

$$\|C(p)\|_2^2=\|C(p)^*C(p)\|_2=\|(S+R)^*(S+R)\|_2$$
$$=\|S^*S+R^*R\|_2\leqslant\|S^*S\|_2+\|R^*R\|_2,$$

и вывести *оценку Кармайкла и Мейсона*

$$|\tilde{z}|\leqslant[1+|a_0|^2+|a_1|^2+\dots+|a_{n-1}|^2]^{1/2}. \qquad (19.6.42)$$

29. Применяя оценку (19.6.41) к многочлену

$$q(z)\equiv(z-1)\,p(z)=$$
$$=z^{n+1}+(a_{n-1}-1)z^n+(a_{n-2}-a_{n-1})z^{n-1}+\dots+(a_0-a_1)z-a_0,$$

получить неравенство

$$|\tilde{z}|\leqslant\max\{1,|a_0|+|a_0-a_1|+\dots+|a_{n-2}-a_{n-1}|+|a_{n-1}-1|\}.$$

Показать, что второе выражение под знаком максимума не меньше единицы, и вывести другую оценку Монтеля

$$|\tilde{z}|\leqslant|a_0|+|a_0-a_1|+\dots+|a_{n-2}-a_{n-1}|+|a_{n-1}-1|. \qquad (19.6.43)$$

30. При помощи оценки Монтеля (19.6.43) доказать теорему Какея: если задан многочлен $f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots$ $\dots+a_1z+a_0$ с неотрицательными коэффициентами a_i, удовлетворяющими неравенствам

$$a_n\geqslant a_{n-1}\geqslant\dots\geqslant a_1\geqslant a_0,$$

то все решения уравнения $f(z)=0$ лежат в единичном круге, т. е. $|\tilde{z}|\leqslant 1$.

31. Все четыре предыдущие задачи связаны с определением верхних границ абсолютных значений корней многочлена *p(z),* однако аналогично можно получить и нижние границы. Если многочлен *p(z)* задан формулой (19.6.38) с коэффициентом $a_0\neq 0$, то функция

$$q(z)\equiv\frac{1}{a_0}z^n p\left(\frac{1}{z}\right)=z^n+\frac{a_1}{a_0}z^{n-1}+\frac{a_2}{a_0}z^{n-2}+\ \ldots\ +\frac{a_{n-1}}{a_0}z+\frac{1}{a_0}$$

будет многочленом степени *n,* корни которого в точности обратны к решениям уравнения $p(z)=0$. Используя соответствующие оценки сверху для решений уравнения $q(z)=0$, получить следующие оценки снизу для решений $\tilde{z}$ уравнения $p(z)=0$: *Оценка Коши:*

$$|\tilde{z}|\geqslant\frac{|a_0|}{\max\{1,|a_0|+|a_{n-1}|,\ |a_0|+|a_{n-2}|,\ldots,|a_0|+|a_1|\}}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{|a_0|}{|a_0|+\max\{1,|a_{n-1}|,\ |a_{n-2}|,\ldots,|a_1|\}}.$$

Оценка Монтеля:

$$|\tilde{z}|\geqslant\frac{|a_0|}{\max\{|a_0|,\ 1+|a_1|+|a_2|+\ \ldots\ +|a_{n-1}|\}}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{|a_0|}{1+|a_0|+|a_1|+\ \ldots\ +|a_{n-1}|}.$$

Оценка Кармайкла и Мейсона:

$$|\tilde{z}|\geqslant\frac{|a_0|}{[1+|a_0|^2+|a_1|^2+\ \ldots\ +|a_{n-1}|^2]^{1/2}}.$$

32. Комбинируя нижние границы из задачи 31 с верхними границами из задач 27—30, можно локализовать корни многочлена $p(z)$ в кольце $\{z\colon r_1\leqslant|z|\leqslant r_2\}$. В качестве примера рассмотрим многочлен

$$f(z)=\frac{1}{n!}z^n+\frac{1}{(n-1)!}z^{n-1}+\ \ldots\ +\frac{1}{2}z^2+z+1$$

— *n*-ю частичную сумму степенного ряда для экспоненты e^z. Показать, что все решения $\tilde{z}$ уравнения $f(z)=0$ подчиняются неравенствам

$$\frac{1}{2}\leqslant|\tilde{z}|\leqslant 1+n!$$

Применяя теорему Какея к многочлену $z^n f(1/z)$, убедиться в том, что все решения фактически удовлетворяют даже неравенству $|\tilde{z}|\geqslant 1$.

33. Поскольку справедливо равенство $\rho(A)=\rho(D^{-1}AD)$ с любой невырожденной матрицей *D,* использованные в задаче 27 методы

можно применить к матрице $D^{-1}C(p)D$, чтобы получить другие границы корней многочлена $p(z)$ в (19.6.38). Для вычислений удобен выбор матрицы $D = \mathrm{diag}(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, где все величины $p_i > 0$. Обобщение оценки Коши (19.6.40) приводит к неравенству

$$|\tilde{z}| \leqslant \max\left\{|a_0|\frac{p_n}{p_1},\ |a_1|\frac{p_{n-1}}{p_1}+\frac{p_{n-1}}{p_n},\ |a_2|\frac{p_{n-2}}{p_1}+\frac{p_{n-2}}{p_{n-1}},\ \ldots \right.$$
$$\left.\ldots, |a_{n-2}|\frac{p_2}{p_1}+\frac{p_2}{p_3},\ |a_{n-1}|+\frac{p_1}{p_2}\right\}. \qquad (19.6.44)$$

Прозерить, что оно действительно имеет место для произвольных положительных параметров $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

34. Предполагая, что все коэффициенты a_k в (19.6.38) ненулевые, положить $p_k \equiv p_1/|a_{n-k+1}|$, $k = 2, 3, \ldots, n$, и вывести из неравенства (19.6.44) оценку Кодзима для корней $\tilde{z}$ многочлена $p(z)$:

$$|\tilde{z}| \leqslant \max\left\{|a_0|,\ 2\left|\frac{a_1}{a_2}\right|,\ 2\left|\frac{a_2}{a_3}\right|,\ \ldots,\ 2\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right\}. \qquad (19.6.45)$$

35. Теперь выбрать $p_k \equiv r^k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, с некоторым числом $r > 0$ и показать, что утверждение (19.6.44) влечет за собой оценку

$$|\tilde{z}| \leqslant \max\{|a_0|r^{n-1},\ |a_1|r^{n-2}+r^{-1},\ |a_2|r^{n-3}+r^{-1},\ \ldots$$
$$\ldots, |a_{n-2}|r+r^{-1},\ |a_{n-1}|+r^{-1}\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{r} + \max_{0\leqslant k\leqslant n-1}\{|a_k|r^{n-k-1}\}, \qquad (19.6.46)$$

где величина $r > 0$ может быть произвольной.

36. Заданной матрице $A \in M_n$ можно поставить в соответствие эрмитову матрицу

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{bmatrix} \in M_{2n}.$$

Показать, что у этих матриц спектральная норма $\|\cdot\|_2$ совпадает. *Указание.* Напомним общее определение спектральной нормы: $\|\hat{A}\|_2 = \rho(\hat{A}^*\hat{A})^{1/2}$.

37. Пусть $A, B \in M_n$, матрица A невырожденна, матрица B вырожденна, и пусть задана произвольная матричная норма $\|\cdot\|$. Установить справедливость неравенства $\|A - B\| \geqslant 1/\|A^{-1}\|$.

Указание. Матрица $B = A - (A - B) = A[I - A^{-1}(A - B)]$ вырожденна, поэтому $\|A^{-1}(A - B)\| \geqslant 1$. Какова геометрическая интерпретация этого факта в пространстве M_n? Насколько точно невырожденную матрицу можно аппроксимировать вырожденной? Дополнительные сведения по этому, вопросу см. в примере 21.4.1.

Задачи к п. 19.7

1. Пусть $G(\cdot)$ — векторная норма на M_n, и пусть задан ненулевой вектор $y \in \mathbf{C}^n$. Показать, что функция

$$\|x\| \equiv G(xy^*)$$

будет векторной нормой на $\mathbf{C}^n$. Что она собой представляет, когда

$$y = [1, 1, \ldots, 1]^T \quad \text{или} \quad y = [1, 0, 0, \ldots, 0]^T?$$

2. Пусть $\|\cdot\|$ — произвольная векторная норма на M_n, и пусть заданы матрица $A \in M_n$ и число $\varepsilon > 0$. Доказать, что существует такое число $K = K(\varepsilon, A) > 0$, что

$$[\rho(A) - \varepsilon]^k \leqslant \| A^k \| \leqslant [\rho(A) + \varepsilon]^k$$

для всех степеней $k > K$.

3. Пусть $\|\cdot\|$— любая векторная норма на M_n, и пусть задана матрица $A \in M_n$.

(a) Используя результат задачи 2, убедиться, что если $\rho(A) < 1$, то $\|A^k\| \to 0$, когда $k \to \infty$. С какой скоростью?

(b) Доказать обратное утверждение: если $\|A^k\| \to 0$ при $k \to \infty$, то $\rho(A) < 1$. *Указание,* Рассмотреть поведение величин $\|A^k [x \ \ldots \ x]\|$, если $Ax = \lambda x$ и $x \neq 0$.

(c) Что можно сказать о сходимости степенных матричных рядов в терминах векторных норм?

4. Пусть задана векторная норма $G(\cdot)$ на M_n. Определим функцию $G'\colon M_n \to \mathbf{R}$ формулой

$$G'(B) \equiv \max_{G(A)=1} G(BA).$$

Доказать, что функция $G'(\cdot)$ всегда будет матричной нормой на M_n, удовлетворяющей равенству $G'(I) = 1$, и что при $G(I) = 1$ неравенство $G'(B) \geqslant G(B)$ выполнено для всех матриц $B \in M_n$.

В следующих задачах развиваются результаты задачи 4.

5. Обосновать неравенство $G'(B) \leqslant G(B)$ для любой матрицы $B \in M_n$ в случае матричной нормы $G(\cdot)$ на M_n и равенство $G'(\cdot) = G(\cdot)$ при дополнительном условии $G(I) = 1$.

6. Показать, что всегда выполняется равенство $G''(\cdot) = G'(\cdot)$.

7. Предполагая, что векторная норма $G(\cdot)$ на M_n подчинена условию $G(I) = 1$, доказать, что эта норма будет матричной тогда и только тогда, когда $G'(B) \leqslant G(B)$ для всех $B \in M_n$.

8. Убедиться, что в определении нормы $G'(\cdot)$ из задачи 4 можно изменить порядок сомножителей A и B и получить тем самым другую

матричную норму. Показать на примере, что эта новая норма может не совпадать с $G'(\cdot)$.

9. Проверить, что множество всех векторных полунорм на $\mathbf{C}^n$, согласованных с заданной векторной нормой на M_n, выпукло — фактически это конус.

10. Удостовериться, что числовой радиус $r(\cdot)$ не задает матричную норму на M_n, привлекая матрицы (19.7.4) и сравнивая величину $r(AB)$ с произведением $r(A)r(B)$.

11. Неравенство $\|A\| \geqslant \rho(A)$ из теоремы 19.6.9 является следствием аксиомы (4) (т. е. кольцевого свойства) матричной нормы $\|\cdot\|$. Однако векторная норма на M_n может удовлетворять этому неравенству (т. е. быть спектрально преобладающей), не будучи матричной нормой. Обосновать неравенство $r(A) \geqslant \rho(A)$ для произвольной матрицы $A \in M_n$. Установить более общий факт:

$$\sigma(A) \subset \{x^*Ax:\ x^*x = 1\}.$$

12. Убедиться, что для векторной нормы $\|\cdot\|_{l_\infty}$ на M_n нельзя найти никакой согласованной с ней векторной нормы на $\mathbf{C}^n$. *Указание.* Рассмотреть величины $\|J_n\|_\infty$ и $\rho(J_n)$. Здесь J_n есть $n \times n$-матрица, все элементы которой равны 1. Показать, что функция $n\|\cdot\|_\infty$, однако, будет матричной нормой на M_n и поэтому имеется согласованная с ней векторная норма на $\mathbf{C}^n$.

13. Для матрицы $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}$ обозначим транспонированную i-ю строку через $r_i(A) = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}]^T$ и j-й столбец через $c_j(A) = [a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}]^T$. Пусть $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$— векторные нормы на пространствах $\mathbf{C}^n$ и $\mathbf{C}^m$ соответственно. Тогда определим функцию $G_{\beta,\alpha}\colon M_{m,n} \to \mathbf{R}$ формулой

$$G_{\beta,\alpha}(A) \equiv \|[\|r_1(A)\|_\alpha, \|r_2(A)\|_\alpha, \ldots, \|r_m(A)\|_\alpha]^T\|_\beta.$$

Аналогично, определим функцию $G^{\alpha,\beta}\colon M_{m,n} \to \mathbf{R}$:

$$G^{\alpha,\beta}(A) \equiv \|[\|c_1(A)\|_\beta, \|c_2(A)\|_\beta, \ldots, \|c_n(A)\|_\beta]^T\|_\alpha.$$

Доказать, что каждая из функций $G_{\beta,\alpha}(\cdot)$ и $G^{\alpha,\beta}(\cdot)$ является векторной нормой на $M_{m,n}$, однако эти нормы не обязаны совпадать. Таким образом, имеется возможность определять естественным образом векторные нормы на пространстве прямоугольных матриц.

14. Сопоставить норму $G_{\beta,\alpha}(\cdot)$ из задачи 13 с нормой $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$, определенной в задаче 4 п.19.6, и показать на примере, что даже при $m = n$ (и даже когда $\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_\beta$) норма $G_{\beta,\alpha}$ не обязана быть матричной нормой на M_n.

15. Что представляет собой наорма в $G_{\beta,\alpha}$ задаче 13, когда $\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_\beta$? А норма $G^{\alpha,\beta}(\cdot)$?

16. Что представляет собой норма в $G_{\beta,\alpha}(\cdot)$ задаче 13, когда $\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_\beta = \|\cdot\|_\infty$? Что можно сказать о функциях $G^{\beta,\alpha}(\cdot)$, $G_{\alpha,\beta}(\cdot)$, $G^{\alpha,\beta}(\cdot)$?

17. Если $G(\cdot)$ — векторная норма на M_n, *спектральная характеристика* нормы $G(\cdot)$ определяется формулой

$$m(G) \equiv \max_{G(A)\leqslant 1} \rho(A).$$

Убедиться, что норма $G(\cdot)$ является спектрально преобладающей тогда и только тогда, когда $m(G) \leqslant 1$. Показать, что произвольную векторную норму на M_n можно превратить в спектрально преобладающую норму посредством умножения на некоторую константу, причем минимальная величина константы равна $m(G)$. Норму $G(\cdot)$ на M_n называют *минимально спектрально преобладающей,* если выполнено равенство $m(G) = 1$.

18. Установить, что каждая подчиненная матричная норма является минимально спектрально преобладающей в соответствии с определением из задачи 17. Показать, что не все минимально спектрально преобладающие нормы подчиненные. Проверить, что числовой радиус $r(A)$ удовлетворяет условию минимального спектрального преобладания.

19. Доказать, что спектральная характеристика является выпуклой функцией на конусе векторных норм на M_n и, следовательно, множество всех спектрально преобладающих векторных норм на M_n выпукло.

20. Убедиться, что векторная норма $G(\cdot)$ на M_n является спектрально преобладающей тогда и только тогда, когда для каждой матрицы ,$A \in M_n$ найдется константа γ_A (зависящая только от нормы $G(\cdot)$ и матрицы *A),* такая, что для всех натуральных *k* справедливо неравенство

$$G(A^k) \leqslant \gamma_A G(A^k).$$

21. Доказать справедливость следующих утверждений: (а) Числовой радиус $r(\cdot)$ удовлетворяет равенствам$r(A) = \rho(A) = \|A\|_2$ для произвольной нормальной матрицы *A,* однако в общем случае справедливо лишь неравенство $r(A) \leqslant \|A\|_2$. Привести пример матрицы $A \in M_n$, удовлетворяющей строгому неравенству $r(A) < \|A\|_2$. *Указание.* Проверить равенство $r(U^*AU) = r(A)$, где $U \in M_n$ — любая унитарная матрица, и учесть возможность

приведения матрицы A к диагональному виду унитарным преобразованием. Для общего случая обосновать соотношения

$$r(A)=\max_{\|x\|_2=1}|x^*Ax|\leqslant\max_{\|x\|_2=1}\|Ax\|_2\|x\|_2=\|A\|_2.$$

(b) Для произвольной матрицы $A\in M_n$ справедливо равенство $r(A)=r(A^*)$.

(c) Неравенство верно $\|A\|_2\leqslant 2r(A)$ для всех матриц $A\in M_n$. *Указание.* Записать разложение

$$A=(A+A^*)/2+(A-A^*)/2=A_1+A_2$$

и заметить, что матрицы A_1 и A_2 нормальны. Теперь проверить соотношения

$\|A\|_2\leq\|A_1\|_2+\|A_2\|_2=r(A_1)+r(A_2)_2\leq r(A)+r(A^*)=2r(A)$.

(d) Оценки

$$\frac{1}{2}\|A\|_2\leqslant r(A)\leqslant\|A\|_2, \tag{i}$$

указанные в пунктах (a) и (c), точны. *Указание.* Построить подходящие $n\times n$-аналоги матриц $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$.

22. Используя неравенства п. (d) задачи 21 и оценки величины $c(r)$ из теоремы 19.7.11, доказать, что функция $4r(\cdot)$ будет матричной нормой на M_n. Продемонстрировать равенство $c(r)=4$, рассматривая матрицы $A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, A^*, AA^*.

23. При помощи неравенств (i) п. (d) задачи 21 и неравенств

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_E\leqslant\|A\|_2\leqslant\|A\|_E \tag{ii}$$

из задачи 23 п. 19.6 получить оценки

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}\|A\|_E\leqslant r(A)\leqslant\|A\|_E, \tag{iii}$$

справедливые для всех $A\in M_n$, и убедиться в неулучшаемости верхней границы. Проверить, что выбор $A=I$ и $A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ приводит к равенствам в левых неравенствах из (i) и (ii) соответственно и что в случае выбора $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ равенства достигаются в правых неравенствах из (i) и (ii). Объяснить, почему отсюда следует неулучшаемость верхней границы в (iii), но нельзя сделать никаких выводов о точности нижней границы в (iii). Почему существует конечная максимальная положительная константа c_n, при которой неравенство $r(A)\geqslant c_n\|A\|_E$ верно для всех матриц $A\in M_n$? Неравенства (iii) обеспечивают оценку снизу

$c_n \geqslant (2\sqrt{n})^{-1}$. Получить оценку сверху $c_n \leqslant (n-1)^{1/2}/n$, вычисляя величины $r(J_n)$ и $\|J_n\|_E$, где $J_n = [a_{ij}]$ суть жордановы $n \times n$-матрицы с элементами $a_{ij} = 0$, за исклюнением $a_{i, i+1} = 1$ для $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Из этих оценок следует, что $c_n = O(1/\sqrt{n})$ при $n \to \infty$; точное значение величины c_n, по-видимому, неизвестно.

24. Показать, что функция $[AB] = \operatorname{tr} AB^*$ определяет скалярное произведение на пространстве M_n и это скалярное произведение порождает l_2-норму на M_n, т. е. $\|A\|_E = [A, A]^{1/2}$ для всех $A \in M_n$. Проверить, что норма эрмитовой матрицы $X = xx^*$ ранга 1 равна $\|X\|_E = \|x\|_2^2$. Доказать, что числовая область заданной матрицы $A \in M_n$ просто является совокупностью проекций (в скалярном произведении $[\cdot, \cdot]$) этой матрицы на множество эрмитовых матриц единичной нормы ранга 1 и справедливо представление $r(A) = \max\{|[A, X]|: X$—эрмитова матрица ранга 1 и $\|X\|_E = 1\}$. Используя неравенство Коши — Шварца, получить оценку $r(A) \leqslant \|A\|_E$.

25. Понятие числового радиуса связано с одной естественной задачей аппроксимации. Пусть задана матрица $A \in M_n$, и мы хотим приблизить ее как можно точнее в смысле наименьших квадратов на классе матриц, отличающихся лишь скалярными множителями от эрмитовых матриц ранга 1. Каждая матрица из этого класса представима в виде $X = cxx^*$, $c \in \mathbf{C}$, $\|x\|_E = 1$.

Показать, что квадрат величины отклонения допускает оценку снизу

$$\|A - X\|_E^2 = \|A - cxx^*\|_E^2 \geqslant \|A\|_E^2 - 2|c[A, xx^*]| + |c|^2$$

и принимает минимальное значение, когда $c = [A, \tilde{x}\tilde{x}^*]$ и $\tilde{x}$ — единичный вектор, на котором достигается максимум в (19.7.6). Вывести отсюда, что необходимое условие минимума отклонения $\|A - cX\|_E$ по всем скалярам c и всевозможным эрмитовым матрицам $X = xx^*$ ранга 1 с $\|X\|_E = 1$ задается равенством $|c| = r(A)$.

26. Анализ двух предшествующих задач наводит на мысль о возможности естественного обобщения понятий числового радиуса и числового образа матрицы. Пусть $\Phi \subset M_n$ — непустое множество матриц, удовлетворяющее следующим условиям:

(a) если $X \in \Phi$, то $aX \in \Phi$ для всех $a \in \mathbf{C}$;

(b) последнее из равенств $[A, X] = \operatorname{tr} AX^* = 0$ справедливо для всех матриц $X \in \Phi$ тогда и только тогда, когда $A = 0$;

(c) множество $\mathbf{\Phi}$ замкнуто.

Для матрицы $A \in M_n$ определим величину

$$\phi(A) = \max_{\substack{X \in \Phi \\ \|X\|_E \leqslant 1}} |[A, X]| = \max_{\substack{X \in \Phi \\ \|X\|_E \leqslant 1}} |\operatorname{tr} AX^*|.$$

Показать что функция $\phi(\cdot)$ корректно определена, является векторной нормой на M_n и удовлетворяет неравенству $|\phi(A)| \leqslant \leqslant \|A\|_E$. Доказать, что для каждой матрицы $A \in M_n$ существует такая матрица $X_A \in \Phi$, что $\|X_A\|_E = 1$ и справедливо представление $\phi(A) = |[A, X_A]|$.

Задача наилучшего приближения заданной матрицы $A \in M_n$ матрицами из **Ф** состоит в определении матрицы $X \in \Phi$, для которой минимально отклонение $\|A - X\|_E$. Убедиться, что наилучшее приближение задается матрицей $\phi(A) X_A$, где $\phi(A) = |[A, X_A]|$, а для ошибки аппроксимации матрицы A произвольной матрицей $X \in \Phi$ справедлива точная оценка

$$\|A - X\|_E^2 \geqslant \|A\|_E^2 - |[A, X_A]|^2 \geqslant 0.$$

Если **Ф** — множество всех матриц, отличающихся лишь скалярными множителями от эрмитовых матриц ранга 1, то $\phi(A) = r(A)$. В примере 21.4.6 обсуждается использование в качестве **Ф** множества всех матриц, только скалярными множителями отличающихся от унитарных матриц; тогда величина $\phi(A)$ оказывается средним сингулярных чисел матрицы A. Другой случай выбора в роли **Ф** множества всех вырожденных матриц рассматривается в примере 21.4.1; тогда получается величина $\phi(A)$, совпадающая с наименьшим сингулярным числом матрицы A. Вызывают интерес как кандидаты на роль **Ф** также множества всевозможных матриц, кратных положительно определенным, эрмитовым или нормальным матрицам фиксированного ранга, либо кратных всевозможным матрицам, унитарно подобным данной матрице. В каждом из перечисленных случаев в качестве аналога числового образа матрицы выступает множество $\{[A, X]: X \in \Phi\}$.

27. Хотя числовой радиус $r(A)$ не задает матричную норму, он все же подчиняется неравенству для степеней $r(A^m) \leqslant [r(A)]^m$ для всевозможных значений $m = 1, 2, \ldots$ и всех матриц $A \in M_n$. Доказательство разбивается на следующие этапы:

(a) Показать, что исходное утверждение эквивалентно тому, что $r(A^m) \leqslant 1$ для всех $m = 1, 2, \ldots$, если $r(A) \leqslant 1$.

Пусть задано натуральное $m \geqslant 2$, фиксированное в последующих рассуждениях. Через $\{\omega_k\} = \{e^{2\pi i k/m}\}_{k=1}^{m}$ обозначим множество корней степени m из единицы. Отметим, что множество $\{\omega_k\}$ можно рассматривать как конечную мультипликативную группу и что $\{w_j w_k\}_{k=1}^{m} = \{w_k\}_{k=1}^{m}$ для каждого $j = 1, 2, \ldots, m$.

(b) При помощи разложения »

$$1 - z^m = \prod_{k=1}^{m} (1 - w_k z)$$

доказать тождество

$$p(z) \equiv \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} (1 - w_k z) \equiv 1 \quad \text{для всех} \quad z \in \mathbf{C}.$$

Указание. Убедиться, что $p(z)$ — многочлен степени не выше m—1 и допускает представление

$$p(z) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{1 - z^m}{1 - w_j z}.$$

Тогда $p(z) = p(w_1 z) = \ldots = p(w_m z)$ для всех $z \in \mathbf{C}$. Следовательно, $p(z) \equiv \text{const} = p(0) = 1$.

(c) Проверить равенства

$$I - A^m = \prod_{k=1}^{m} (I - w_k A), \qquad I = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} (I - w_k A).$$

(d) Пусть $x \in \mathbf{C}^n$ — произвольный единичный вектор, $\|x\|_2=1$ и пусть $A \in M_n$. Убедиться, что

$$1 - x^* A^m x = x^* (I - A^m) x = (Ix)^* (I - A^m) x =$$

$$= \left[\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} (I - w_k A) x \right]^* \left[\prod_{k=1}^{m} (I - w_k A) x \right] =$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} z_j^* [(I - w_j A) z_j] =$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{\substack{j=1 \\ z_j \neq 0}}^{m} \|z_j\|_2^2 \left[1 - \left(\frac{z_j}{\|z_j\|_2} \right)^* A \left(\frac{z_j}{\|z_j\|_2} \right) \right],$$

где $z_j \equiv \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} (I - w_k A) x$.

(e) Теперь заменить в соотношениях из п. (d) матрицу A на матрицу $e^{i\theta} A$ и получить тем самым равенство

$$1-e^{im\theta}x^*A^mx=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\|z_j\|_2^2\left[1-e^{i\theta}\left(\frac{z_j}{\|z_j\|_2}\right)^*A\left(\frac{z_j}{\|z_j\|_2}\right)\right],$$

которое верно для любого вещественного θ. В предположении $r(A)\leqslant 1$ показать неотрицательность вещественной части правого выражения в этом равенстве при любом $\theta\in\mathbf{R}$; следовательно, вещественная часть левого выражения также должна быть неотрицательной для всех $\theta\in\mathbf{R}$. Убедиться, что этот факт влечетза собой неравенство $|x^*A^mx|\leqslant 1$ и, следовательно,
$r(A^m)\leqslant 1.$

28. Числовой радиус подчиняется неравенству для степеней
$r(A^m)\leqslant r(A)^m,$ однако несколько более общее неравенство $r(A^{k+m})\leqslant r(A^k)r(A^m)$ уже не всегда верно. Проверить, что в качестве контрпримера можно рассмотреть матрицу $A=J_4(0)$ (жорданов 4×4-блок) и значения степеней *k* = 1 и *m* = 2. *Указание.* Используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, установить равенства $r(A^2)=r(A^3)=1/2.$ При помощи неравенства Коши — Шварца показать, что
$r(A)<1.$

29. Можно ли придать смысл понятию «минимальная векторная норма» на M_n, ориентируясь на определение 19.6.29 минимальной матричной нормы?

Задачи к п.19.8

1. Показать, что число обусловленности невырожденной нормальной матрицы по отношению к спектральной норме задается формулой

$$\varkappa(A)=\rho(A)\rho(A^{-1})=|\lambda_{\max}(A)/\lambda_{\min}(A)|.$$

(Здесь и далее под максимальными и минимальными собственными значениями понимаются максимальные и минимальные по абсолютной величине.

2. Вычислить собственные значения матрицы

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1+\varepsilon\end{bmatrix},\quad \varepsilon>0,$$

и обратную к ней. Убедиться, что при $\varepsilon\to 0$ отношение максимального собственного значения матрицы *A* к минимальному будет порядка ε^{-1}. Используя результат задачи 1, вывести отсюда, что число обусловленности по отношению к спектральной норме представимо в виде $\varkappa(A)=O(\varepsilon^{-1})$. Обосновать справедливость равенства

$\varkappa(A) = O(\varepsilon^{-1})$ по отношению к произвольной норме и тем самым убедиться в плохой обусловленности матрицы A при $\varepsilon \to \infty$. Привлечь явный вид матрицы A^{-1} чтобы проверить справедливость соотношения $\varkappa(A) = O(\varepsilon^{-1})$ для любой матричной нормы.

3. Найти собственные значения и обратную для матрицы

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1+\varepsilon \end{bmatrix}, \quad \varepsilon > 0.$$

Показать, что отношение максимального собственного значения матрицы B к минимальному при $\varepsilon \to 0$ будет порядка единицы.

Убедиться, однако, что $\varkappa(B) = O(\varepsilon^{-1})$ по отношению к произвольной матричной норме и, следовательно, матрица B плохо обусловлена при $\varepsilon \to 0$. Приходим к выводу, что отношение максимального собственного значения к минимальному не обязано совпадать с числом обусловленности, если матрица не является нормальной.

4. Величина числа обусловленности $\varkappa(A)$ зависит от матричной нормы, используемой в его определении. Показать, однако, что различные нормы приводят к эквивалентным определениям числа обусловленности в следующем смысле. Пусть

$$\varkappa_\alpha(A) \equiv \| A^{-1} \|_\alpha \| A \|_\alpha, \quad \varkappa_\beta \equiv \| A^{-1} \|_\beta \| A \|_\beta,$$

тогда существуют конечные положительные константы C_m и C_M, связывающие эти числа неравенствами

$$C_m \varkappa_\alpha(A) \leqslant \varkappa_\beta(A) \leqslant C_M \varkappa_\alpha(A) \text{ для всех матриц } A \in M_n.$$

5. Показать, что любая унитарная матрица U идеально обусловлена $(\varkappa(U) = 1)$ по отношению к спектральной норме. Однако в случае l_2-нормы число обусловленности $\varkappa(U)$ каждой унитарной матрицы $U \in M_n$ равно n.

6. Вывести неравенство $\varkappa(A) \geqslant |\lambda_{max}(A)/\lambda_{min}(A)|$ для произвольной невырожденной матрицы $A \in M_n$ и любой матричной нормы. Следовательно, если отношение соответствующих собственных значений велико, то матрица обязательно будет плохо обусловленной, является ли она нормальной или нет. Матрица, не являющаяся нормальной, может быть плохо обусловленной даже при небольшом разбросе собственных значений, как видно из примера в задаче 3.

7. Провести детальное доказательство оценки (19.8.10), которая обобщает оценку (19.8.8) и совпадает с ней при $e = 0$.

8. Пусть x — единичный вектор в пространстве и $\mathbf{C}^n$, пусть $\lambda > 0$. Показать, что матрица $A \equiv I + \lambda x x^*$ эрмитова, ее собственные значения равны единице (кратности n—I) и $1 + \lambda$ и число обусловленности (по отношению к спектральной норме) есть

$\varkappa(A) = 1 + \lambda$. Это позволяет просто строить примеры обратимых матриц с ограниченными элементами и сколь угодно большим числом обусловленности. Какик образом?

9. Пусть матрица *B* из задачи 3 играет роль матрицы коэффициентов системы линейных уравнений $Bx = [1, 1]^T$ с точным решением $x = [1, 0]^T$, и пусть задано приближенное решение $\hat{x} = [1 + \varepsilon^{-1/2}, \ \varepsilon^{-1/2}]^T$. Проверить, что для относительной величины невязки имеем выражение $\|r\|/\|b\| = O(\varepsilon^{1/2}) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, в то же время для относительной ошибки в решении $\|x - \hat{x}\|/\|x\| = O(\varepsilon^{-1/2}) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, малая невязка может соответствовать весьма грубому приближенному решению. Объяснить этот факт, опираясь на оценку (19.8.11).

10. Если величина определителя *A* мала (или велика), должно ли число обусловленности $\varkappa(A)$ быть большим? *Указание.* Рассмотреть матрицы вида $A = \lambda I \in M_n$.

11. Утверждение (19.8.4) слабее, чем (19.8.2), уже потому, что предположение $\|A^{-1}\|\|E\| < 1$ более ограничительно по сравнению с $\|A^{-1}E\| < 1$. Кроме того, даже в условиях более сильного предположения в (19.8.2) может получиться все же лучшая верхняя граница, чем в (19.8.4). Пояснить это на примере возмущения $E = \varepsilon A$, $0 < \varepsilon < 1$.

12. Получить аналоги оценок (19.8.7) и (19.8.8), когда уравнения (19.8.5) и (19.8.6) заменяются на матричные уравнения

$$AX = B, \quad (A + E)\hat{X} = B,$$

в которых $A, E \in M_n$, $X, B \in M_{n,k}$. Рассмотреть частный случай $k = n$ и $B = I$. Помогает ли это «объяснить», почему правые части в неравенствах (19.8.2) и (19.8.7) совпадают?

13. Все оценки ошибки в обратной матрице мы получали, исходя из разложения в (19.8.1), которое имеет место при условии $\rho(A^{-1}E) < 1$. Доказать, что в случае обратимых матриц *A* и *A* + *E* справедливо неравенство

$$\|A^{-1} - (A + E)^{-1}\| \leqslant \|A^{-1}\| \|(A + E)^{-1}\| \|E\|$$

для любой матричной нормы $\|\cdot\|$ независимо от величины спектрального радиуса матрицы $A^{-1}E$. *Указание.* Использовать представление $A^{-1} - (A + E)^{-1} = (A + E)^{-1} E A^{-1}$.

14. Возможно, одним из самых упоминаемых примеров плохо обусловленной матрицы является, матрица Гильберта $H_n = [h_{ij}] \in M_n$ с элементами $h_{ij} = 1/(i + j - 1)$. Проверить, что число обусловленности матрицы H_n по отношению к спектральной норме дается формулой $|\lambda_{max}/\lambda_{min}|$. Известно, что число

обусловленности матрицы Гильберта асимптотически совпадает с экспонентой e^{cn}, где константа c равна примерно 3.5, а для спектрального радиуса справедливо представление $\rho(H_n) = \pi + O[1/(\log n)]$ при $n \to \infty$. Например,

$$\varkappa(H_3) \sim 5 \cdot 10^2, \quad \varkappa(H_6) \sim 1.5 \cdot 10^7, \quad \varkappa(H_8)\, 1.5 \cdot 10^{10}.$$

Чем объяснить столь плохую обусловленность матрицы Гильберта H_n, ведь элементы матриц H_n все равномерно ограничены и спектральный радиус $\rho(H_n)$ не очень большой?

15. Обосновать равенства $\varkappa(A^*A) = \varkappa(AA^*) = [\varkappa(A)]^2$, в которых число обусловленности измеряется по отношению к спектральной норме. Объяснить, почему задача $A^*Ax = y$ в силу своих особенностей может оказаться более трудной для численного решения, чем задача $Ax = r$.

16. Пусть матрица $A \in M_n$ невырожденна. При помощи неравенства из задачи 37 п. 19.6 показать, что $\varkappa(A) \geqslant \|A\|/\|A - B\|$ для любой вырожденной матрицы $B \in M_n$, где $\|\cdot\|$ — произвольная матричная норма и $\varkappa(\cdot)$ — соответствующее ей число обусловленности. Эта оценка снизу может быть полезна, когда требуется установить плохую обусловленность данной матрицы A.

17. Пусть $A = [a_{ij}] \in M_n$ — верхняя треугольная матрица, у которой все диагональные элементы ненулевые: $a_{ii} \neq 0$. Используя результат задачи 16, убедиться, что для числа обусловленности по отношению к максимальной строчной норме справедлива оценка снизу

$$(A) \geqslant \frac{\|A\|_\infty}{\min_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_{ii}|}.$$

Модуль 20
Локализация и возмущения собственных значений

Собственные значения диагональной матрицы указать очень легко. Учитывая, что собственные значения непрерывно зависят от элементов матрицы, естественно задаться вопросом: можно ли сказать что-нибудь полезное о собственных значениях матрицы, внедиагональные элементы которой «малы» по сравнению с элементами главной диагонали. Матрицы этого рода встречаются в приложениях; такими могут быть матрицы больших систем линейных уравнений, к которым приводит численная дискретизация краевых задач для эллиптических уравнений с частными производными.

При изучении долгосрочной устойчивости колебательной системы, описываемой системой дифференциальных уравнений, нередко приходится доказывать, что все собственные значения λ_i соответствующей матрицы принадлежат левой полуплоскости, т. е. $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$. А в статистике или численном анализе часто требуется доказывать положительную определенность эрмитовых матриц, т. е. свойство $\lambda_i > 0$.

Иногда бывает желательно локализовать собственные значения матрицы в некотором *ограниченном* множестве, которое можно легко охарактеризовать. Мы знаем, что все собственные значения матрицы A расположены в круге комплексной плоскости с центром в нуле и радиусом $\|A\|$; матричная норма здесь произвольна. Нельзя ли усилить это утверждение путем более точного описания областей, содержащих все собственные значения или, наоборот, не содержащих ни одного собственного значения матрицы A? Мы увидим, что это возможно.

Наконец, предположим, что собственные значения матрицы A известны точно, но затем A подвергнута возмущению: $A \to A + E$. Как при этом изменятся собственные значения? Поскольку они непрерывно зависят от элементов матрицы, есть основания полагать, что при достаточно малой матрице возмущения E собственные значения не должны изменяться слишком сильно. Но нужны точные оценки, чтобы знать в каждом случае, насколько малы должны быть «малые» матрицы. Основной вопрос здесь тот же, что в 19.8, где обсуждалась чувствительность решения системы линейных уравнений к возмущениям входных данных.

Микромодуль 56
Локализаци собственных значений

20.1. Круги Гершгорина

Матрицу $A \in M_n$ всегда можно представить в виде $A = D + B$, где $D = \operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$— просто диагональная часть матрицы A, а у B главная диагональ нулевая. Если положить $A_\varepsilon = D + \varepsilon B$ для произвольного $\varepsilon \in \mathbf{C}$, то $A_0 = D$ и $A_1 = A$. Собственные значения матрицы $A_0 = D$ локализовать легко: это точки $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ на комплексной плоскости. Естественно предположить, что при достаточно малом ε собственные значения матрицы A_ε будут находиться в некоторых малых окрестностях точек $a_{11}, \ldots, a_{nn}$. Следующая теорема (часто называемая теоремой о кругах Гершгорина) придает этому предположению точную форму: действительно, существуют легко вычисляемые круги с центрами в точках a_{ii}, заведомо содержащие собственные значения.

20.1.1. Теорема (Гершгорин). *Пусть* $A = [a_{ij}] \in M_n$, *и пусть символы*

$$R_i'(A) \equiv \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

обозначают строчные почти-нормы *матрицы A. В таком случае все собственные значения матрицы A заключены в объединении n кругов*

$$\bigcup_{i=1}^{n} \{z \in \mathbf{C}: |z - a_{ii}| \leqslant R_i'(A)\} \equiv G(A). \qquad (20.1.2)$$

Кроме того, если объединение k из этих кругов есть связная область, не пересекающаяся с остальными n — k кругами, то в ней находится ровно k собственных значений матрицы A.

Доказательство. Пусть λ — собственное значение матрицы *A*, и пусть $Ax = \lambda x$, $x = [x_i] \neq 0$. Пусть x_p— компонента вектора *x* с наибольшей абсолютной величиной: $|x_p| \geqslant |x_i|$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $x_p \neq 0$. Равенство $Ax = \lambda x$ подразумевает, что

$$\lambda x_p = [\lambda x]_p = [Ax]_p = \sum_{j=1}^{n} a_{pj} x_j,$$

а это эквивалентно равенству

$$x_p(\lambda - a_{pp}) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} a_{pj} x_j.$$

Но тогда, пользуясь неравенством треугольника, заключаем, что

$$|x_p||\lambda - a_{pp}| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} a_{pj} x_j \right| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} |a_{pj} x_j| =$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} |a_{pj}||x_j| \leqslant |x_p| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} |a_{pj}| = |x_p| R_p'.$$

Итак, $|\lambda - a_{pp}| \leqslant R_p'$ для некоторого *p*, т. е. λ находится в замкнутом круге с центром a_{pp} и радиусом R_p'. Поскольку мы не знаем, *какое р* соответствует данному λ (разве что известен соответствующий собственный вектор, но в этом случае мы знали бы λ точно и не нуждались бы в его локализации), то можно лишь утверждать, что λ принадлежит объединению всех таких кругов, т. е. области (20.1.2).

Чтобы доказать второе утверждение теоремы, положим $A = D + B$, где $D = \operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ и $A_\varepsilon = D + \varepsilon B$. Отметим, что $R_i'(A_\varepsilon) = R_i'(\varepsilon B) = \varepsilon R_i'(A)$ (число ε сейчас считается неотрицательным). Удобно считать, что именно первые k кругов

$$\bigcup_{i=1}^{k} \{z \in \mathbf{C}: |z - a_{ii}| \leqslant R_i'\}$$

составляют связную область G_k, не пересекающуюся с дополнительной областью G_k^c, образованной прочими $n — k$ кругами, т. е. $G_k^c = G(A) \setminus G_k)$. Заметим, что объединение первых k кругов матрицы A_ε

$$G_k(\varepsilon) \equiv \bigcup_{1=i}^{k} \{z \in \mathbf{C}: |z - a_{ii}| \leqslant R_i'(A_\varepsilon) = \varepsilon R_i'(A)\}$$

при всех $\varepsilon \in [0, 1]$ содержится в связном множестве $G_k \equiv G_k(1)$, то само $G_k(\varepsilon)$ не обязано быть связным для всех ε. Кроме того, никакая из дополнительных областей $G_k^c(\varepsilon) \equiv G_n(\varepsilon) \setminus G_k(\varepsilon)$ не может пересекаться с G_k. Рассмотрим собственные значения $\lambda_i(A_0) = a_{ii}$ и $\lambda_i(A_\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, для $i = 1, \ldots, k$. Поскольку собственные значения непрерывно зависят от элементов матрицы A (см. приложение D) и для всех $\varepsilon \in [0, 1]$ справедливы включения $\lambda_i(A_\varepsilon) \in G_k(\varepsilon) \subset G_k$, то каждое $\lambda_i(A_0)$ соединено с некоторым $\lambda_i(A_1) = \lambda_i(A)$ непрерывной кривой, принадлежащей G_k и образованной точками $\{\lambda_i(A_\varepsilon): 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1\}$. Итак, при каждом $\varepsilon \in [0, 1]$ в $G_k(\varepsilon)$ содержится по крайнай мере k собственных значений матрицы A_ε. Но больше, чем k, и не может быть, так как остальные $n — k$ собственных значений матрицы A_ε выходят (при $\varepsilon = 0$) из точек, расположенных вне связного множества G_k, и описывают непрерывные кривые, которые должны оставаться в дополнительной области G_k^c. Вследствие соображений непрерывности и связности (конкретней, речь идет о свойстве непрерывных функций принимать промежуточные значения) они не могут преодолеть разрыв между G_k^c и G_k.

Область (термин „область" в данном модуле будем использовать как синоним термина „замкнутое множество") *G(A)* в определении (20.1.2) часто называют (строчной) *областью Гершгорина,* отдельные круги в *G(A)* — *кругами Гершгорина,* а их границы — *окружностями*

Гершгорина. Поскольку A и A^T имеют одни и те же собственные значения, то можно получить столбцовый вариант теоремы Гершгорина, применяя теорему 20.1.1 к матрице A^T. В результате получится область, содержащая собственные значения матрицы A и описываемая в терминах *столбцовых почти-норм*

$$C_j'(A) \equiv \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|.$$

20.1.3. Следствие. *Все собственные значения матрицы* $A = [a_{ij}] \in M_n$ *принадлежат объединению n кругов*

$$\bigcup_{j=1}^{n} \{z \in \mathbf{C}\colon |z - a_{jj}| \leqslant C_j'\} = G(A^T). \qquad (20.1.4)$$

Кроме того, если объединение k из этих кругов есть связная область, не пересекающаяся с остальными n — k кругами, то в ней находятся ровно k собственных значений матрицы A.

Упражнение. Показать, что все собственные значения матрицы A принадлежат пересечению областей (20.1.2) и (20.1.4), т.е. множеству $G(A) \cap G(A^T)$. Проиллюстрировать это на примере матрицы порядка 3 с элементами $a_{ij} = i/j$.

Поскольку все собственные значения матрицы A находятся в каждой из областей (20.1.2) и (20.1.4), там же находится и собственное значение с наибольшим модулем. Точка i-го круга области $G(A)$, наиболее удаленная от начала координат, имеет модуль

$$|a_{ii}| + R_i' = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Наибольшая из этих величин должна быть верхней оценкой для наибольшего модуля собственного значения матрицы A. Разумеется, такое же рассуждение можно провести для столбцовых норм.

20.1.5. Следствие. *Для матрицы* $A = [a_{ij}] \in M_n$ *справедливо неравенство*

$$\rho(A) \leqslant \min\left\{\max_i \sum_{j=1}^{n} |a_l|,\ \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right\}.$$

Этот результат неудивителен, ведь он говорит, что $\rho(A) \leqslant \|A\|_\infty$ и $\rho(A) \leqslant \|A^T\|_\infty$ (напомним, что эти символы обозначают матричные нормы, называемые соответственно максимальной строчной нормой и максимальной столбцовой нормой), а такое соотношение выполняется для любой матричной нормы. Но интересно, что этот факт можно получить по существу из чисто геометрических соображений.

Для любой обратимой матрицы S матрица $S^{-1}AS$ имеет те же собственные значения, что и A. Поэтому теорему Гершгорина можно применить к $S^{-1}AS$; возможно, что при подходящем выборе S удастся получить более точные оценки для собственных значений. Особенно удобен выбор $S = D = \operatorname{diag}(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, где все $p_i > 0$. Легко вычислить, что $D^{-1}AD = [p_j a_{ij}/p_i]$. Теорема Гершгорина, записанная для $D^{-1}AD$ и для транспонированной к ней матрицы, дает такой результат.

20. 1.6. Следствие. *Пусть* $A = [a_{ij}] \in M_n$, *и пусть* $p_1, p_2, ..., p_n$ *— положительные числа. В таком случае все собственные значения матрицы A принадлежат каждой из двух областей*

$$\bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbf{C}:\ |z - a_{ii}| \leqslant \frac{1}{p_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} p_j |a_{ij}| \right\} = G(D^{-1}AD),$$

$$\bigcup_{j=1}^{n} \left\{ z \in \mathbf{C}:\ |z - a_{jj}| \leqslant p_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{1}{p_i} |a_{ij}| \right\} = G[(D^{-1}AD)^T].$$

Матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ имеет собственные значения 1 и 2. Прямое применение теоремы Гершгорина дает грубые оценки собственных значений (см. рис. 20.1.7а).

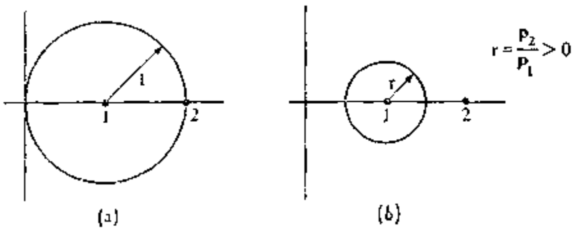


Рис. 20.1.7.

В то же время гибкость, обеспечиваемая дополнительными параметрами, введенными в следствии 20.1.6, позволяет получить сколь угодно точные оценки (рис. 20.1.7b).

Упражнение. Рассмотреть матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -16 & 8 \\ -16 & 7 & -8 \\ 8 & -8 & -5 \end{bmatrix}.$$

Извлечь из теоремы Гершгорина максимум информации о расположении собственных значений и величине спектрального радиуса этой матрицы. Затем рассмотреть матрицы вида $D^{-1}AD$, где $D = \operatorname{diag}(p_1, p_2, p_3)$, и выяснить, можно ли улучшить локализацию собственных значений. Наконец, вычислить собственные значения матрицы A и прокомментировать качество полученных оценок.

Упражнение. Показать, что каждое собственное значение матрицы A принадлежит множеству $\bigcap\limits_{D} G(D^{-1}AD)$, где пересечение берется по всем диагональным матрицам с положительными диагональными элементами.

Идею введения свободных параметров можно использовать и для того, чтобы получить более общую форму оценок (20.1.5) для спектрального радиуса.

20.1.8. Следствие. *Пусть* $A = [a_{ij}] \in M_n$. *Тогда*

$$\rho(A) \leqslant \min_{p_1, \ldots, p_n > 0} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{n} p_j |a_{ij}|,$$

$$\rho(A) \leqslant \min_{p_1, \ldots, p_n > 0} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} p_j \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} |a_{ij}|.$$

Упражнение. Доказать следствие 20.1.8.

Упражнение. Пусть a, b, c, d — положительные числа и $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

(a) Прямым вычислением найти диагональную матрицу $\tilde{D}$, такую, что $\| \tilde{D}^{-1} A \tilde{D} \|_\infty = \min\limits_{D} \| D^{-1} A D \|_\infty$. Минимум берется по всем диагональным матрицам D с положительными диагональными элементами.

(b) Вычислить $\| \tilde{D}^{-1} A \tilde{D} \|_\infty \equiv r$.

(c) Вычислить $\rho(A)$.

(d) Обратить внимание на то, что $r = \rho(A)$.

Позже мы покажем, что для любой положительной (или, более общо, неразложимой неотрицательной) $n \times n$-матрицы A минимум нормы $\|D^{-1}AD\|_\infty$ по всем диагональным матрицам D равен спектральному радиусу A. В случае матрицы общего вида такое утверждение неверно.

Упражнение. Рассмотреть матрицу $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1{,}5 & 2 \end{bmatrix}$. Показать, что $\rho(A) < \min \| D^{-1} A D \|_\infty$; минимум берется по всем $D = \mathrm{diag}(p_1, p_2)$ с положительными p_1, p_2.

Если относительно матрицы имеется некоторая дополнительная информация, в силу которой собственные значения принадлежат (или не принадлежат) каким-то конкретным множествам, то в сочетании с теоремой Гершгорина эта информация может привести к более точной локализации собственных значений. Например, собственные значения эрмитовой матрицы A вещественны, а потому должны принадлежать множеству $\mathbf{R} \cap G(A)$, представляющему собой конечное объединение замкнутых вещественных интервалов.

Упражнение. Что можно сказать о расположении собственных значений косоэрмитовой матрицы? Унитарной матрицы? Вещественной ортогональной матрицы?

Матрица обратима тогда и только тогда, когда 0 не является ее собственным значением. Поэтому интерес представляет вывод условий, которые бы исключали нуль из области, содержащей все собственные значения.

20.1.9. Определение. Пусть $A = [a_{ij}] \in M_n$. Говорят, что A — матрица *с диагональным преобладанием,* если

$$|a_{ii}| \geqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| = R_i', \quad i = 1, \ldots, n.$$

Говорят, что A — матрица *со строгим диагональным преобладанием,* если

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| = R_i', \quad i = 1, \ldots, n.$$

Геометрия ситуации ясно показывает, что для матрицы A со строгим диагональным преобладанием 0 не может принадлежать никакому гершгоринскому кругу. Если при этом все диагональные элементы a_{ii} вещественны и положительны, то каждый круг в действительности принадлежит открытой правой полуплоскости; если A вдобавок эрмитова, то все ее собственные значения должны быть положительными. Суммируем эти замечания в следующей теореме; ее часть (a) в качестве самостоятельного утверждения известна как теорема Леви — Десплаика (см. следствие 19.6.17).

20.1.10. Теорема. *Пусть* $A = [a_{ij}] \in M_n$ *— матрица со строгим диагональным преобладанием. Тогда*

(a) *A обратима;*

(b) *если диагональные элементы матрицы A положительны, то все ее собственные значения имеют положительную вещественную часть;*

(c) *если A эрмитова и все ее диагональные элементы положительны, то все ее собственные значения положительны.*

Упражнение. С помощью матриц $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-\varepsilon & 1 \end{bmatrix}$ показать, что простое диагональное преобладание не гарантирует обратимости, а строгое диагональное преобладание не является ее необходимым условием.

Используя дополнительные параметры следствия 20.1.6, можно несколько ослабить требование строгого диагонального преобладания как достаточное условие обратимости.

20.1.11. Теорема. *Пусть у матрицы* $A = [a_{ij}] \in M_n$ *все диагональные элементы ненулевые и она является матрицей с диагональным преобладанием, причем для всех, кроме одного, значений* i=1,2, ..., *n это свойство выполняется в сильной форме, т. е.* $|a_{ii}| > R_i'$. *В таком случае А обратима.*

Доказательство. Предположения теоремы означают, что $|a_{kk}| = R_k'$ для некоторого *k*, а для $i \neq k$ справедливо неравенство $|a_{ii}| > R_i'$. В следствии 20.1.6 положим $p_i = 1,\ i \neq k;\ p_k = 1 + \varepsilon,\ \varepsilon > 0$. Тогда

$$\frac{1}{p_k} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} p_j |a_{kj}| = \frac{1}{1+\varepsilon} R_k' < |a_{kk}|,$$

$$\frac{1}{p_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} p_j |a_{ij}| = R_i' + \varepsilon |a_{ik}|, \quad i \neq k,$$

для любого положительного ε. Так как $R_i' < |a_{ii}|$ для всех $i \neq k$, то можно выбрать настолько малое ε > 0, чтобы одновременно для всех $i \neq k$ было $R_i' + \varepsilon |a_{ik}| < |a_{ii}|$. Согласно следствию 20.1.6, точка *z* = 0 внешняя для соответствующей области $G(D^{-1}AD)$, поэтому *A* должна быть обратимой. Теорема Гершгорина и ее вариации дают области включения для собственных значений матрицы *A,* зависящие только от ее диагональных элементов и *абсолютных величин* внедиагональных элементов. Основываясь на совпадении собственных значений матриц $S^{-1}AS$ и *A,* мы пришли к следствию 20.1.6 и заключению о том, что замкнутое множество

$$\bigcap_D G(D^{-1}AD), \quad D = \operatorname{diag}(p_1, \ldots, p_n), \quad \forall p_i > 0, \qquad (20.1.12)$$

содержит все собственные значения для $A \in M_n$. Понятно, что мы могли бы получить еще меньшие области включения для собственных значений, если допустили бы более сложные преобразования подобия, чем диагональные. Однако если все же ограничиться только диагональными подобиями и использовать исключительно диагональные элементы и модули внедиагональных, то можно ли уменьшить области (20.1.12)?

Ответ оказывается отрицательным по следующей причине. Пусть *z* — произвольная точка границы множества (20.1.12). Согласно теореме, доказанной Р. Варгой, существует матрица $B=[b_{ij}]\in M_n$, такая, что $b_{ii}=a_{ii}$, $i=1, \ldots, n$, $|b_{ij}|=|a_{ij}|$ для $i, j=1, \ldots, n$ и z есть собственное значение матрицы B.

20.2. Круги Гершгорина — более строгое определение

Мы видели, что строгое диагональное преобладание достаточно для обратимости матрицы, но это не относится к простому диагональному преобладанию. Рассмотрение некоторых примеров 2-го порядка наводит на мысль, что диагональное преобладание плюс строгое неравенство

$$|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}| \qquad (20.2.1)$$

хотя бы для одного значения $i=1, \ldots, n$ могли бы уже обеспечивать обратимость. К сожалению, это не так, как показывает матрица

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}. \qquad (20.2.2)$$

Но что же тогда происходит на самом дгле?

Если A — матрица с диагональным преобладанием, то нуль не может быть внутренней точкой области $G(A)$, а лишь, в худшем случае, ее граничной точкой. Однако он может находиться на границе более чем одного круга Гершгорина. И если даже нуль лежит на границе области $G(A)$, он не обязан быть собственным значением матрицы A. Анализ доказательства теоремы 20.1.1 проясняет, что в действительности происходит с граничным собственным значением.

Упражнение. Показать, что если z не является внутренней точкой для $G(A)$, то

$$|z-a_{ii}|\geqslant R_i'=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|, \quad i=1, \ldots, n.$$

20.2.3. Лемма. *Пусть собственное значение Х матрицы* $A=[a_{ij}]\in M_n$ *находится на границе области G(A). Пусть* $Ax=\lambda x$, $x=[x_i]\neq 0$, *и пусть индекс р таков, что*

$$|x_p|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|=\|x\|_\infty\neq 0.$$

Тогда

(a) *если для индекса k справедливо равенство* $|x_k| = |x_p|$, *то* $|\lambda - a_{kk}| = R'_k$, *т. е. k-я окружность Гершгорина проходит через* λ*;*
(b) *если для некоторого* $k = 1, \ldots, n$ *выполняется* $|x_k| = |x_p|$ *иpри этом* $a_{kj} \neq 0$ *для какого-то* $j \neq k$, *то верно и равенство* $|x_j| = |x_p|$.

Доказательство. Так же как в доказательстве теоремы Гершгорина,

$$(\lambda - a_{ii}) x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, \ldots, n,$$

откуда

$$|\lambda - a_{ii}||x_i| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j \right| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij} x_j| =$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}||x_j| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}||x_p| = R'_i |x_p|. \quad (20.2.4)$$

Итак, если для индекса *k* выполняется $|x_k| = |x_p|$, то должно быть

$$|\lambda - a_{kk}| \leqslant R'_k.$$

С другой стороны, из предположения о том, что λ находится на границе области *G(A),* вытекают неравенства $|\lambda - a_{ii}| \geqslant R'_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Отсюда выводим, что при $i = k$ в обоих неравенствах (20.2.4) в действительности должно иметь место *равенство,* т. е.

$$|\lambda - a_{kk}||x_k| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}||x_j| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}||x_k| = R'_k |x_k|. \quad (*)$$

Поскольку $|x_k| = \|x\|_\infty > 0$, то утверждение (a) следует из равенства

$$|\lambda - a_{kk}||x_k| = R'_k |x_k|.$$

Утверждение (b) получаем из центрального равенства в (*):

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|(|x_k| - |x_j|) = 0,$$

учитывая, что каждый член этой суммы неотрицателен.

Эта лемма является чисто технической, но из нее вытекают теорема 20.2.5 и ее следствие.

20.2.5. Теорема. *Пусть собственное значение λ матрицы* $A \in M_n$ *является граничной точкой области G(A). Предположим, что все элементы матрицы A ненулевые. Тогда*

(a) *каждая окружность Гершгорина проходит через λ;*

(b) *если* $Ax = \lambda x$, $x = [x_i] \neq 0$, то $|x_i| = |x_j|$ *для всех* $i, j = 1, \ldots, n$.

Упражнение. Вывести теорему 20.2.5 из леммы 20.2.3.

20.2.6. Следствие. *Пусть* $A = [a_{ij}] \in M_n$, *причем все ее элементы ненулевые. Если A — матрица с диагональным преобладанием и хотя бы для одного значения* $i = 1, \ldots, n$ *выполняется неравенство* $|a_{ii}| > R_i'$, *то A обратима.*

Доказательство. Если бы *A* не была обратима, то она имела бы собственное значение 0. Вследствие диагонального преобладания нуль не может быть внутренней точкой области *G(A)* и, следовательно, должен быть ее граничной точкой. Согласно теореме 20.2.5, каждая окружность Гершгорина должна проходить через 0. Однако *i*-я окружность Гершгорина проходить через 0 не может, поскольку $|a_{ii}| > R_i'$.

Этот результат и полезен, и интересен; но мы можем значительно усилить его (в смысле отказа от требования, чтобы все элементы матрицы были ненулевыми), если более полно используем информацию, заключенную в лемме 20.2.3.

20.2.7. Определение. Говорят, что матрица $A = [a_{ij}] \in M_n$ обладает *свойством SC,* если для любой пары различных целых чисел p, q, $1 \leqslant p, q \leqslant n$, найдется последовательность различных целых чисел $k_1 = p, k_2, k_3, \ldots, k_{m-1}, k_m = q$, $1 \leqslant m \leqslant n$, таких, что все элементы последовательности $a_{k_1k_2}, a_{k_2k_3}, \ldots, a_{k_{m-1}k_m}$ не равны нулю. Например, матрица (20.2.2) свойством *SC* не обладает, потому что для пары (2, 1) нужной последовательности ненулевых матричных элементов нет. В то же время для пары (1, 2) такая последовательность имеется.

Используя введенное понятие и лемму 20.2.3, можем получить следующее усиление теоремы 20.2.5.

20.2.8. Теорема. *Пусть собственное значение λ матрицы* $A = [a_{ij}] \in M_n$ *является граничной точкой области G(A). Если A обладает свойством SC, то*

(a) *каждая окружность Гершгорина проходит через λ;*

(b) *если* $Ax = \lambda x$, $x = [x_i] \neq 0$, *то* $|x_i| = |x_j|$ *для всех* $i, j = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Пусть $Ax=\lambda x$ и $|x_i|\leqslant|x_p|=\|x\|_\infty>0$, $i=1, \ldots, n$. По лемме 20.2.3 $|\lambda-a_{pp}|=R'_p$. Пусть q — любой другой индекс, $1\leqslant q\leqslant n$, $q\neq p$. Поскольку *A* обладает свойством *SC,* существует последовательность различных индексов $k_1=p, k_2, k_3, \ldots, k_m=q$, которой соответствуют ненулевые элементы $a_{k_1k_2}, \ldots, a_{k_{m-1}k_m}$. Из условия $a_{k_1k_2}=a_{pk_2}\neq 0$, согласно утверждению (b) леммы 20.2.3, выводим, что $|x_p|=|x_{k_2}|$. Но тогда из $a_{k_2k_3}\neq 0$ следует $|x_{k_3}|=|x_{k_2}|=|x_p|$. Продолжая таким образом, заключаем, что $|x_{k_i}|=|x_p|$ для всех $i=1, \ldots, m$. Значит (см. 20.2.3 (a)), $|\lambda-a_{k_mk_m}|=|\lambda-a_{qq}|=R'_q$; таким образом, q-я окружность Гершгорина проходит через λ и $|x_q|=|x_p|$. Но индекс q взят произвольно, поэтому через λ проходит каждая окружность Гершгорина и для всех $i=1, \ldots, n$ справедливо $|x_i|=|x_p|$.

Из этой теоремы по аналогии со следствием 20.2.6 можно вывести достаточное условие обратимости.

20.2.9. Следствие. *Пусть матрица* $A=[a_{ij}]\in M_n$ *обладает свойством SC. Если A — к тому же матрица с диагональным преобладанием и хотя бы для одного значения* i = 1, ..., *n выполняется неравенство* $|a_{ii}|>R'_i$, *то A обратима.*

Упражнение. Вывести следствие 20.2.9 из теоремы 20.2.8.

Упражнение. Показать, что матрица (20.2.2) не обладает свойством *SC.* Откуда взялось это свойство *SC?* Заметим, что оно связано только с расположением ненулевых внедиагональных элементов матрицы *A* — диагональные элементы и точные значения внедиагональных несущественны. Опираясь на это наблюдение, определим для *A* две родственные матрицы.

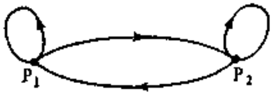
20.2.10. Определение. Пусть $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}$. Положим $|A|\equiv[|a_{ij}|]$, $M(A)\equiv[\mu_{ij}]$, где $\mu_{ij}=1$, если $a_{ij}\neq 0$, и $\mu_{ij}=0$ при $a_{ij}=0$. Матрица *M(A)* называется *индикаторной матрицей* для *A.*

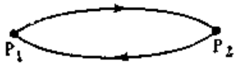
Упражнение. Показать, что если $A\subset M_n$, то свойством *SC* обладают или не обладают все три матрицы A, $|A|$ и $M(A)$ одновременно.

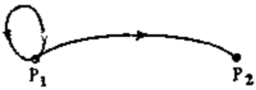
Последовательности ненулевых элементов матрицы *A,* участвующие в определении свойства *SC,* можно сделать наглядными, пользуясь путями в ассоциированном с *A* графе.

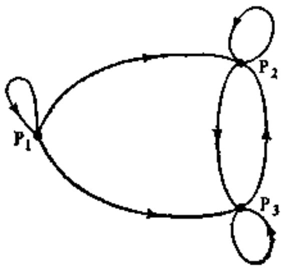
20.2.11. Определение. *Ориентированный граф* матрицы $A\in M_n$ обозначается через *Г (А)* и представляет собой ориентированный граф с n узлами $P_1, P_2, \ldots, P_n$, в котором дуга из P_i в P_j присутствует тогда и только тогда, когда $a_{ij} \neq 0$ (или $\mu_{ij} \neq 0$).

Примеры

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; $\Gamma(A) =$ 

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $\Gamma(A) =$ 

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\Gamma(A) =$ 

$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $\Gamma(A) =$ 

20.2.12. Определение. *Ориентированным путем γ* в графе Γ называется последовательность дуг $P_{i_1}P_{i_2}, P_{i_2}P_{i_3}, P_{i_3}P_{i_4}, \ldots$. Ориентированному пути γ соответствует *упорядоченный списоку злов* $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots$. *Длина* ориентированного пути — это число дуг з нем, если оно конечно; в противном случае говорят, что путь имеет бесконечную длину. *Циклом* называют ориентированный путь, начинающийся и кончающийся одним и тем же узлом; этот узел должен ровно два раза входить в упорядоченный список узлов пути; никакой другой узел не может встречаться в списке цикла более одного раза. Некоторые авторы используют для этого понятия термин *простой ориентированный цикл.* Цикл длины 1 называется *петлей* или *тривиальным циклом.*

20.2.13. Определение. Ориентированный граф Γ *сильно связен,* если в нем любые два различных узла P_i, P_j соединены ориентированным путем конечной длины, начинающимся в P_i и кончающимся в P_j.

20.2.14. Теорема. *Матрица* $A \in M_n$ *тогда и только тогда обладает свойством SC, когда ориентированный граф Г(А) сильно связен.*

Упражнение. Доказать теорему 20.2.14.

Упражнение. Показать, что граф Г сильно связен, если любые два его узла принадлежат хотя бы одному общему циклу, и что обратное утверждение неверно. *Указание.* Рассмотреть матрицу

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Два узла ориентированного графа могут быть соединены более чем одним путем. Однако два таких пути с различными длинами могут по существу не различаться; каждый может содержать повторения некоторых подпутей. Ясно, что если при следовании вдоль ориентированного пути какой-то узел встречается дважды, путь можно укоротить (с сохранением конечных точек), убирая дуги, пройденные между первым и вторым посещениями этого узла (они составляют или содержат цикл).

20.2.15. Утверждение. *Пусть* Г — *ориентированный граф с n узлами. Если между двумя узлами графа* Г *имеется ориентированный путь, то между ними имеется и ориентированный путь длины* $\leqslant n-1$.

Как проверить, обладает ли матрица *А* свойством *SC?* Это эквивалентно проверке графа Г*(А)* на сильную связность. Если *п* невелико или *М(А)* имеет специальную структуру, то можно проследить пути между всеми возможными парами узлов, изучая граф Г*(А)* визуально. Однако в общем случае этот способ непрактичен, и нам необходим четкий вычислительный алгоритм.

20.2.16. Теорема. *Пусть задана матрица* $A \in M_n$, *и пусть* P_i *и* P_j — *заданные узлы графа* Г *(А). Ориентированный путь длины* m *из* P_i *в* P_j *существует в* Г *(А) тогда и только тогда, когда* $[|A|^m]_{ij} \neq 0$ *или, что эквивалентно, когда* $[M(A)^m]_{ij} \neq 0$.

Доказательство проведем по индукции. При m = 1 утверждение тривиально. Для m = 2 вычисляем

$$[|A|^2]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [|A|]_{ik} [|A|]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}||a_{kj}|.$$

Поэтому соотношение $[|A^2|]_{ij} \neq 0$ равносильно тому, что хотя бы для одного значения k *оба* элемента a_{ik} и a_{kj} ненулевые. Но последнее имеет место тогда и только тогда, когда в Г*(А)* существует путь длины

2 из P_i в P_j. В общем случае предположим, что утверждение доказано для $m = q$. Тогда соотношения

$$[|A|^{q+1}]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [|A|^q]_{ik} [|A|]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} [|A|^q]_{ik} |a_{kj}| \neq 0$$

равносильны тому, что найдется хотя бы одно k, для которого и $[|A|^q]_{ik}$, и $|a_{kj}|$ ненулевые. Это, в свою очередь, равносильно тому, что имеется путь из P_l в P_k длины q и путь из P_k в P_j длины 1. Но для этого необходимо и достаточно, чтобы существовал путь из P_i в P_j длины $q+1$. То же рассуждение применимо к $M(A)$.

20.2.17.Определение. Для матрицы запись $A = [a_{ij}] \in M_n$ $A \geqslant 0$ $(A > 0)$ означает, что все элементы a_{ij} неотрицательны (положительны). Такая матрица A называется *неотрицательной (положительной).*

20.2.18. Следствие. *Для матрицы $A \in M_n$ условие $|A|^m > 0$ равносильно тому, что для каждой пары, узлов P_i, P_j графа $\Gamma(A)$ существует ориентированный путь из P_i в P_j длины ровно m. ЭТО же верно для матрицы $M(A)^m$.*

20.2.19. Следствие. *Матрица $A \in M_n$ тогда и только тогда обладает свойством SC, когда $(I + |A|)^{n-1} > 0$ или, что эквивалентно, когда $[I + M(A)]^{n-1} \geq \hat{0}$.*

Доказательство. Из тождества

$$(I + |A|)^{n-1} = I + (n-1)|A| + \binom{n-1}{2}|A|^2 + \dots$$
$$\dots + \binom{n-1}{n-1}|A|^{n-1}$$

вытекает, что условие $(I + |A|)^{n-1} > 0$ равносильно тому, что для каждой пары индексов (i, j), $i \neq j$, хотя бы в одной из матриц $|A|$, $|A|^2, \dots, |A|^{n-1}$ элемент (i, j) положителен. Но согласно теореме 20.2.16, это может иметь место тогда и только тогда, когда в Γ (A) существует ориентированный путь из P_i в P_j. Последнее означает сильную связность графа $\Gamma(A)$, т. е. A обладает свойством SC.

Упражнение. Доказать то утверждение в следствии 20.2.19, которое относится к матрице $M(A)$.

20.2.20. Следствие. *В графе* Γ (A) *тогда и только тогда имеется путь из P_i в P_j, $i \neq j$, когда $[(I + |A|)^{n-1}]_{ij} \neq 0$.*

Упражнение. Опираясь на следствие 20.2.19, сформулировать вычислительный алгоритм для проверки свойства *SC,* который требовал бы лишь примерно $\log_2(n-1)$ матричных умножений (а не

n — 2). *Указание.* Рассмотреть матрицу $(I+|A|)^2$, возвести ее в квадрат и т. д.

Прежде чем оставить эту тему, познакомимся с еще одной эквивалентной характеризацией свойства *SC*. Она основана на том, что сильная связность графа Г(A) есть чисто топологическое свойство, никоим образом не зависящее от способа, которым помечены его узлы. Если изменить нумерацию узлов, то граф останется, как был, сильно связным или несвязным. Заметим, что результатом перестановки в матрице A строк i и j и одноименных столбцов является обмен номерами между узлами P_i и P_j графа Г(A); верно и обратное.

Напомним, что *матрицей перестановки P* называется квадратная матрица, все элементы которой равны 0 либо 1; в каждой строке и каждом столбце матрицы P должна быть ровно одна единица. Ясно, что такая матрица должна быть унитарной, а следовательно, ортогональной, т. е. $P^T=P^{-1}$. В простейшей матрице перестановки $p_{ij}=p_{ji}=1$ для некоторой фиксированной пары индексов (i, j); все прочие внедиагональные элементы нулевые. Преобразование подобия, с простейшей матрицей перестановки P, P^TAP вызывает транспозицию i-го и j-го столбцов и i-й и j-й строк матрицы A.

Любую перестановку строк и столбцов матрицы A можно получить последовательностью таких транспозиций, и всякая матрица перестановки есть конечное произведение простейших матриц перестановок. Итак, если P — матрица перестановки, то P^TAP получается из A надлежащей перестановкой строк и столбцов. Важно знать, существуют ли перестановки строк и столбцов матрицы A, приводящие ее к специальной блочной форме.

20.2.21. Определение. Матрица $A\in M_n$ называется *разложимой,* если либо

(a) $n=1$ и $A=0$, либо

(b) $n\geqslant 2$ и существуют матрица перестановки $P\in M_n$ и некоторое целое число r, $1\leqslant r\leqslant n-1$, такие, что

$$P^TAP=\begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

Здесь $B\in M_r$, $D\in M_{n-r}$, $C\in M_{r,\,n-r}$ и

$$0\in M_{n-r,\,r}$$

— нулевая матрица.

Подчеркнем, что мы не требуем, чтобы блоки B, C и D имели ненулевые элементы. Нужно лишь, чтобы при помощи некоторой последовательности транспозиций строк и столбцов можно было получить нулевой блок размера $(n-r)\times r$. Если $|A|>0$, то понятно, что A не является разложимой; разложимая матрица должна иметь по крайней мере n—1 нулевых элементов.

Замечание. Предположим, что нужно решить систему линейных уравнений $Ax=y$, и пусть матрица A разложима. Если положить

$$\tilde{A} = P^T A P = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

то $Ax = P\tilde{A}P^T x = y$ или $\tilde{A}(P^T x) = P^T y$. Введем новый вектор неизвестных $P^T x = \tilde{x} = [z^T \,\vdots\, \zeta^T]^T$ и новый вектор правых частей $P^T y = \tilde{y} = [w^T \,\vdots\, \omega^T]^T$; здесь $z,\ w \in \mathbf{C}^r$; $\zeta,\ \omega \in \mathbf{C}^{n-r}$. Исходная система уравнений будет эквивалентна системе

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{y} = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ \omega \end{bmatrix},$$

т. е. системе

$$Bz + C\zeta = w, \quad D\zeta = \omega.$$

Если сначала разрешить уравнение $D\zeta = \omega$ относительно ζ, а затем подставить ζ в первое уравнение и решить систему $Bz = w - C\zeta$ относительно z, то тем самым исходная задача окажется *разложенной* на две задачи меньшего порядка, которые в принципе должны решаться проще. Именно это обстоятельство стоит за термином «разложимая».

20.2.22. Определение. *Неразложимой* называется матрица $A \in M_n$, не являющаяся разложимой.

20.2.23. Теорема. *Матрица* $A \in M_n$ *тогда и только тогда неразложима, когда* $(I + |A|)^{n-1} > 0$ *или, что эквивалентно, когда* $[I + M(A)]^{n-1} > 0$.

Доказательство. Мы будем доказывать в действительности, что для разложимости матрицы A необходимо и достаточно, чтобы $(I + |A|)^{n-1}$ имела хотя бы один нулевой элемент. Предположим вначале, что A разложима и для некоторой матрицы перестановки P

$$A = P \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix} P^T = P\tilde{A}P^T.$$

Здесь B, C, 0, D — те же матрицы-блоки, что в определении 20.2.21. Заметим, что $|A| = |P\tilde{A}P^T| = P|\tilde{A}|P^T$, так как единственным результатом действия P будут перестановки строк и столбцов. Заметим еще, что каждая из матриц $|\tilde{A}|^2$, $|\tilde{A}|^3$, ..., $|\tilde{A}|^{n-1}$ имеет такой же нулевой блок размера $(n-r)\times r$ в левом нижнем углу, как и матрица A. Итак,

$$(I+|A|)^{n-1}=(I+P|\tilde{A}|P^T)^{n-1}=(P[I+|\tilde{A}|]P^T)^{n-1}=$$
$$=P(I+|\tilde{A}|)^{n-1}P^T=P\left[I+(n-1)|\tilde{A}|+\right.$$
$$\left.+\binom{n-1}{2}|\tilde{A}|^2+\ldots+\binom{n-1}{n-1}|\tilde{A}|^{n-1}\right]P^T,$$

и все слагаемые внутри квадратных скобок имеют один и тот же нулевой блок в левом нижнем углу. Поэтому матрица $(I+|A|)^{n-1}$ разложима, и среди ее элементов должны быть нулевые.

Обратно, предположим, что для некоторой пары индексов *p, q,* где $p\neq q$, элемент матрицы $(I+|A|)^{n-1}$ в позиции (p, q) равен нулю. Тогда, как мы знаем, в графе Г (*A*) нет ориентированного пути из P_p в P_q. Определим множество узлов

$$S_1\equiv\{P_i\colon P_i=P_q \text{ или в } \Gamma(A) \text{ имеется путь из } P_i \text{ в } P_q\},$$

и пусть S_2 — множество всех остальных узлов графа Г (*A*). Заметим, что $S_1\cup S_2=\{P_1, \ldots, P_n\}$ и $P_q\in S_1\neq\varnothing$, так что $S_2\neq\{P_1, \ldots, P_n\}$. Если бы существовал путь из некоторого узла P_i множества S_2 в какой-то узел P_j множества S_1, то (см. определение множества *S*,) P_i и P_q были бы связаны путем, а тогда P_i должен был бы принадлежать S_1. Поэтому не может быть никаких путей, ведущих *из* узлов множества S_2 *в* узлы множества S_1. Перенумеруем теперь узлы таким образом, чтобы было $S_1=\{\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_r\}$, $S_2=\{\tilde{P}_{r+1}, \ldots, \tilde{P}_n\}$. Видим, что

$$\tilde{A}=P^TAP=\begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix},\quad B\in M_r,\quad 0\in M_{n-r,r},$$

т. е. *A* разложима. Для случая $[I+M(A)]^{n-1}>0$ рассуждения проводятся таким же образом.

Подведем итоги.

20.2.24. Теорема. *Для матрицы* $A\in M_n$ *следующие утверждения эквивалентны:*

(a) *A неразложима;*

(b) $(I+|A|)^{n-1}>0$;

(c) $[I+M(A)]^{n-1}>0$;

(d) *граф* Г *(A) сильно связен и*

(e) *A обладает свойством SC.*

20.2.25. Определение. Матрица $A\in M_n$ называется i. d. *d.-мат' рицей* (d оригинале irreducibly diagonally dominant matrix.), если

(a) *A* неразложима;

(b) A — матрица с диагональным преобладанием, т. е. $|a_{ii}| \geqslant \geqslant R_i'(A)$, $i = 1, \ldots, n$;

(c) хотя бы для одного значения i справедливо строгое неравенство $|a_{ii}| > R_i'(A)$.

Упражнение. Построить пример, показывающий, что матрица может быть неразложимой и с диагональным преобладанием, но не быть i. d. d.-матрицей.

На введенном нами языке теорему 20.2.8 и ее следствие можно переформулировать таким образом.

20.2.26. Теорема. *Пусть $A \in M_n$ —неразложимая матрица. Граничная точка λ области Гершгорина $G(A)$ может быть собственным значением матрицы A лишь в том случае, если каждая окружность Гершгорина проходит через λ.*

20.2.27. Следствие (Таусски). *Пусть $A = [a_{ij}] \in M_n$ есть* i.d.d.*-матрица. Тогда*

(a) *A обратима;*

(b) *если все $a_{ii} > 0$, то $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ для всех собственных значений λ_i матрицы A;*

(c) *если A эрмитова (или, более общо, если A имеет только вещественные собственные значения) и все диагональные элементы a_{ii} строго положительны, то все собственные значения матрицы A строго положительны.*

20.2.28. Следствие. *Пусть матрица $A \in M_n$ неразложима, и пусть хотя бы для одного значения i*

$$R_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < \|A\|_\infty,$$

т. е. не все строчные нормы равны максимальной. Тогда $\rho(A) < < \|A\|_\infty$. Более общо, если $p_1, \ldots, p_n > 0$,

$$D = \operatorname{diag}(p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

и $R_i(D^{-1}AD) < \|D^{-1}AD\|_\infty$ хотя бы для одного значения i, то $\rho(A) < \|D^{-1}AD\|_\infty$.

Доказательство. Всегда имеет место неравенство $\rho(A) \leqslant |A\|_\infty$; равенство достигается тогда и только тогда, когда $|\lambda| = \|A\|_\infty$ для некоторого собственного значения λ матрицы A. В последнем случае по теореме 20.2.26 каждая окружность Гершгориа должна проходить через λ. Однако этому препятствует предположение $R_i < \|A\|_\infty$. Применяя то же рассуждение к матрице $D^{-1}AD$, получим второе утверждение.

Микромодуль 56
Индивидуальные тестовые задания

Задачи к п. 20.1

1. Рассмотреть следующий итерационный алгоритм решения системы линейных уравнений $Ax = y$ порядка n с заданными A и y:

(1) положить $B \equiv I - A$ и переписать систему в виде $x = Bx + y$;

(2) выбрать произвольное начальное приближение $x^{(0)}$ к решению;

(3) для $m = 0, 1, 2, \ldots$ вычислить $x^{(m+1)} = Bx^{(m)} + y$;

(4) проверить, будет ли последовательность $x^{(m)}$ сходиться к решению x.

(a) Обозначить через $\varepsilon^{(m)} = x^{(m)} - x$ ошибку этого приближения к решению; показать, что $\varepsilon^{(m)} = B^m(x^{(0)} - x)$.

(b) Вывести отсюда, что если $\rho(I - A) < 1$, то этот алгоритм работает, т. е. $x^{(m)} \to x$ при $m \to \infty$ независимо от выбора начального приближения $x^{(0)}$.

(c) Используя теорему Гершгорина, получить простое достаточное условие для A, обеспечивающее, что алгоритм будет работать.

2. Показать, что

$$\bigcap_S G(S^{-1}AS) = \sigma(A),$$

где пересечение берется по всем невырожденным матрицам S.

3. Используя следствие 20.1.5, доказать для произвольной матрицы $A \in M_n$ неравенство

$$|\det A| \leqslant \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)$$

и аналогичное неравенство для столбцов. *Указание.* Если матрица A содержит нулевую строку, то доказывать нечего. Если все ее строки ненулевые, то обозначим через B матрицу, получаемую из A делением строк на соответствующие строчные кормы (суммы модулей элементов). Тогда, согласно 20.1.5, $\rho(B) \leqslant 1$, откуда $|\det B| \leqslant 1$. Это означает, что

$$|\det A| \leqslant \prod_{i=1}^{n}\|a_i\|_1,$$

где в качестве векторов a_i берутся строки (или столбцы) матрицы A. Справедливо ли аналогичное неравенство для других норм? *Указание.* См. следствие 21.8.2.

4. В основном тексте теорема 20.1.10(а), т. е. теорема Леви — Деспланка, была получена как следствие теоремы Гершгорина. Показать, что, наоборот, первую часть теоремы 20.1.1 (а именно, то, что область (20.1.2) заключает в себе все собственные значения матрицы *А)* можно вывести из теоремы 20.1.10(а). *Указание.* Применить теорему 20.1.10(а) к матрице $\lambda I - A$.

5. Пусть $A \in M_n$ — вещественная матрица, все круги Гершгорина которой попарно не пересекаются. Показать, что все ее собственные значения вещественны. Более общо, показать, что то же самое верно и по тем же причинам, для комплексной матрицы $A \in M_n$ с вещественными диагональными элементами и характеристическим многочленом, имеющим только вещественные коэффициенты.

6. Пусть для матрицы $A = [a_{ij}] \in M_n$ справедливо неравенство $|a_{ii}| > R_i'$ для *k* различных значений *i*. Показать, что $k \leqslant \operatorname{rank} A$.

7. Предположим, что матрица $A \in M_n$ идемпотентна (т. е. $A^2=A$), но $A \neq I$. Показать, что *А* не может быть матрицей со строгим диагональным преобладанием (или быть i. d. d.-матрицей; см. 20.2.25 и 20.2.27).

8. Предположим, что $A \in M_n$ — матрица со строгим диагональным преобладанием, т. е. $|a_{ii}| > R_i'$ для всех k=1.....n. Показать, что $|a_{kk}| > C_k'$ хотя бы для одного значения $k = 1, \ldots, n$.

9. Пусть матрица $A = [a_{ij}] \in M_n$ имеет строгое диагональное преобладание, и пусть $D = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$. Показать, что *D* обратима и $\rho(I - D^{-1}A) < 1$. *Указание.* Использовать следствие 20.1.5.

10. Пусть $A = [a_{ij}] \in M_n$, и пусть $R_i = R_i' + |a_{ii}|$ обозначает сумму модулей элементов *i*-й строки *А*. Показать, что

$$\operatorname{rank} A \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_{ii}|}{R_i},$$

если считать нулями слагаемые вида 0/0. *Указание.* Умножение всех элементов строки на одно и то же ненулевое число не меняет ранга. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда все a_{ii} неотрицательны, а R_i равны 0 либо 1. Все собственные значения такой матрицы *А* принадлежат единичному кругу, и нужно показать, что

$$\operatorname{rank} A \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Проверить, что $\sum a_{ii} = \operatorname{tr} A = \sum \lambda_i \leqslant \sum |\lambda_i| \leqslant$ (число ненулевых собственных значений *A)* $\leqslant \operatorname{rank} A$.

11. Пусть $A = [a_{ij}] = [a_1 a_2 \ \ldots \ a_n] \in M_n$. Доказать, что

$$\operatorname{rank} A \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_{ii}|^2}{\|a_i\|_2^2}.$$

Слагаемые вида 0/0 считаются нулями. *Указание.* Как и в задаче 10, достаточно ограничиться частным случаем, а именно когда все столбцы *A* имеют единичную евклидову длину, т. е. $\|a_i\|_2 = 1$ для всех *i* Тогда нужно проверить неравенство

$$\operatorname{rank} A \geqslant \sum_{i=1}^{n} |a_{ii}|^2 = \sum_{i=1}^{n} |e_i^* a_i|^2,$$

где $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — естественный ортонормированный базис пространства $\mathbf{C}^n$. Пусть $k = \operatorname{rank} A$. Показать, что существует ортонормироваиная система векторов $v_1, \ldots, v_k \in \mathbf{C}^n$, такая, что $\operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_k\} = \operatorname{Span}\{a_1, \ldots, a_n\}$. Отсюда

$$a_i = \sum_{j=1}^{k} (v_j^* a_i) v_j, \quad e_i^* a_i = \sum_{j=1}^{k} (v_j^* a_i)(e_i^* v_j)$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} |e_i^* a_i|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\sum_{j=1}^{k} |v_j^* a_i|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{k} |e_i^* v_j|^2\right)\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} |e_i^* v_j|^2 = \sum_{j=1}^{k} 1 = k = \operatorname{rank} A.$$

Существует обобщение теоремы Гершгорина, дающее области включения для спектра матричного пучка $Ax = \lambda Bx$, в том числе и для случая, когда матрица *B* вырожденна.

Задачи к. п.20.2

1. Показать, что неразложимая матрица не может иметь нулевых строк и столбцов.

2. Показать с помощью примера, что предположение о неразложимости в следствии 20.2.28 необходимо.

3. Предположим, что $A = [a_{ij}] \in M_n$, что λ — собственное значение матрицы $|A|$ и что существует вектор $x = [x_i] \in \mathbf{R}^n$ с положительными компонентами x_i, для которого $|A| x = \lambda x$.

Пусть $D = \operatorname{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Показать, что каждая окружность Гершгорина матрицы $D^{-1}|A|D$ проходит через λ. Нарисовать картинку. Что можно сказать о строчных нормах матрицы $D^{-1}\hat{A}D$?

4. В модуле 22 будет доказано, что квадратная матрица с положительными элементами всегда имеет положительное собственное значение и ему отвечает положительный собственный вектор. Из этого факта и предыдущей задачи вывести, что

$$\rho(A) \leqslant \rho(|A|),$$

если все элементы матрицы A ненулевые. Пользуясь соображениями непрерывности, показать, что последнее требование может быть опущено, т. е.

$$\rho(A) \leqslant \rho(|A|) \text{ для любой матрицы } A \in M_n.$$

5. Используя следствие 20.2.28, показать, что оценку Коши (19.6.40) для корней многочлена

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \quad a_0 \neq 0,$$

можно несколько улучшить, а именно

$$|\tilde{z}| < \max\{|a_0|, |a_1| + 1, |a_2| + 1, \ldots, |a_{n-1}| + 1\}.$$

Предполагается, что в цепи равенств

$$|a_0| = |a_1| + 1 = |a_2| + 1 = \ldots = |a_{n-1}| + 1$$

хотя бы одно нарушено. *Указание.* Показать, что при $a_0 \neq 0$ сопровождающая матрица *C(p)* в (19.6.39) неразложима. Какие улучшения можно внести в оценки (19.6.41) — (19.6.43) и (19.6.45)?

Микромодуль 57
Возмущение собственных значений

20.3. Теоремы о возмущениях

Пусть $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ и $E = [e_{ij}]$ — матрицы из M_n; рассмотрим возмущенную матрицу $D+E$. По теореме 20.1.1 собственные значения для $D + E$ заключены в кругах

$$\left\{z \in \mathbf{C}: |z - \lambda_i - e_{ii}| \leqslant R_i'(E) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |e_{ij}|\right\}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

которые содержатся в кругах

$$\left\{z \in \mathbf{C}: |z - \lambda_i| \leqslant R_i(E) = \sum_{j=1}^{n} |e_{ij}|\right\}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, если $\hat{\lambda}$ — собственное значение матрицы *D+ E,* то среди собственных значений λ_i матрицы *D* найдется такое, что $|\hat{\lambda} - \lambda_i| \leqslant \|E\|_\infty$. К сожалению, эта простая оценка нераспространяется на обший (недиагонализуемый) случай. Однако с ее помощью можно получить простую границу для произвольной диагонализуемой матрицы.

20.3.1.Утверждение. *Пусть —* $A \in M_n$ *диагонализуемая матрица:* $A = S\Lambda S^{-1}$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. *Пусть* $E \in M_n$. *Если* $\hat{\lambda}$*— собственное значение матрицы A+E, то найдется собственное значение* λ_i *матрицы A, для которого*

$$|\hat{\lambda} - \lambda_i| \leqslant \|S\|_\infty \|S^{-1}\|_\infty \|E\|_\infty = \varkappa_\infty(S)\|E\|_\infty.$$

Через $\varkappa_\infty(\cdot)$ *обозначено число обусловленности по отношению к матричной норме* $\|\cdot\|_\infty$.

Доказательство. Матрицы $A + E$ и $S^{-1}(A + E)S = \Lambda + S^{-1}ES$ имеют одинаковые собственные значения, причем Λ — диагональная матрица. Согласно сказанному выше, найдется λ_i, такое, что $|\hat{\lambda} - \lambda_i| \leqslant \|S^{-1}ES\|_\infty$. Отсюда и следует нужное неравенство, поскольку $\|\cdot\|_\infty$ — матричная норма.

Немного изменяя технику доказательства, можно обобщить этот результат на другие матричные нормы. Главное требование, которое будет предъявлено к матричной норме, удовлетворяется для всех подчиненных норм, индуцированных монотонными или абсолютными векторными нормами (см. 19.6.37).

20.3.2. Теорема. *Пусть —* $A \in M_n$ *диагонализуемая матрица:* $A = S\Lambda S^{-1}$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. *Пусть* $E \in M_n$, *и пусть матричная норма* $\|\cdot\|$ *такова, что* $\|D\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |d_i|$ *для всех диагональных матриц* $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n) \in M_n$. *Если* $\hat{\lambda}$ *— собственное значение матрицы A+E, то найдется собственное значение* λ_i *матрицы A, для которого*

$$|\hat{\lambda} - \lambda_i| \leqslant \|S\| \|S^{-1}\| \|E\| = \varkappa(S)\|E\|. \qquad (20.3.3)$$

Через $\varkappa(\cdot)$ *обозначено число обусловленности по отношению к матричной норме* $\|\cdot\|$.

Доказательство. Как и в предыдущем случае, достаточно рассмотреть собственные значения матрицы $S^{-1}(A + E)S = \Lambda + S^{-1}ES$. Если $\hat{\lambda}$— собственное значение матрицы $\Lambda + S^{-1}ES$, то матрица $\hat{\lambda}I - \Lambda - S^{-1}ES$ вырожденна. Если при этом вырожденна и $\hat{\lambda}I - \Lambda$, то $\hat{\lambda} = \lambda_i$ для некоторого *i*, и оценка

(20.3.3) выполняется тривиальным образом. Будем считать поэтому, что $\hat{\lambda}I - \Lambda$ невырожденна. Тогда вырожденна матрица

$$(\hat{\lambda}I - \Lambda)^{-1}(\hat{\lambda}I - \Lambda - S^{-1}ES) = I - (\hat{\lambda}I - \Lambda)^{-1} S^{-1}ES.$$

Отсюда следует (см. 19.6.16), что $\|(\hat{\lambda}I - \Lambda)^{-1} S^{-1}ES\| \geqslant 1$. Используя предположение о поведении матричной нормы $\|\cdot\|$ на диагональных матрицах, получаем

$$1 \leqslant \|(\hat{\lambda}I - \Lambda)^{-1} S^{-1}ES\| \leqslant \|S^{-1}ES\| \|(\hat{\lambda}I - \Lambda)^{-1}\| =$$
$$= \|S^{-1}ES\| \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\hat{\lambda} - \lambda_i|^{-1} = \frac{\|S^{-1}ES\|}{\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |\hat{\lambda} - \lambda_i|}.$$

Следовательно,

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n} |\hat{\lambda} - \lambda_i| \leqslant \|S^{-1}ES\| \leqslant \|S^{-1}\| \|E\| \|S\| = \varkappa(S) \|E\|. \ \square$$

Упражнение. Показать, что предположение теоремы 20.3.2 о поведении матричной нормы на диагональных матрицах выполнено для норм $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$. Привести пример хотя бы еще одной матричной нормы, удовлетворяющей этому предположению.

Упражнение. Привести пример матричной нормы, для которой предположение теоремы не выполнено.

Упражнение. Показать, что для всякой унитарной матрицы *U* справедливо равенство $\|U\|_2 = 1$.

Хотя число обусловленности $\varkappa(\cdot)$ впервые появилось в п. 19.8 в контексте оценивания ошибок при решении линейных уравнений, мы видим, что теперь оно участвует в (20.3.3) как верхняя граница для отношения ошибок

$$\frac{|\hat{\lambda} - \lambda_i|}{\|E\|} \leqslant \varkappa(S)$$

при вычислении собственных значений диагонализуемой матрицы. Если $\varkappa(S)$ мало (т. е. близко к 1), то малые возмущения коэффициентов могут изменить собственные значения, но эти изменения будут ограничены величиной того же порядка, что и изменения коэффициентов. Если же $\varkappa(S)$ очень велико, то малые возмущения коэффициентов, вообще говоря, приводят к сравнительно большим изменениям в собственных значениях.

В отличие от ситуации п.19.8, где рассматривалась задача решения линейных уравнений, теперь значение имеет не $\varkappa(A)$, а $\varkappa(S)$, где через *S* обозначена матрица, столбцами которой являются собственные векторы матрицы *A;* тогда $A = S\Lambda S^{-1}$. В примере

21.4.26 мы увидим, что число обусловленности по отношению к спектральной норме допускает следующую геометрическую интерпретацию: $\varkappa(S) = \operatorname{ctg}(\theta/2)$, где θ — наименьший угол между Sx и Sy, когда x и y пробегают всевозможные пары ортогональных ненулевых векторов (см. пример 21.4.26). Поэтому независимо от обусловленности матрицы A, если у нее имеется пара почти параллельных, хотя и линейно независимых собственных векторов, то два столбца S (скажем, p-й и q-й, $p \neq q$) могут быть почти параллельны, а потому угол между Se_p и Se_q будет мал, хотя единичные базисные векторы e_p и e_q ортогональны. В этом случае спектральное число обусловленности $\varkappa(S)$ будет велико, и задача вычисления собственных значений матрицы A может быть плохо обусловленной.

Если S — унитарная (или почти унитарная) матрица, то пары ортогональных векторов отображаются в ортогональные (или почти ортогональные) векторы и спектральное число обусловленности матрицы S будет мало (если S унитарна, то оно равно 1). В этом случае задача вычисления собственных значений матрицы A должна быть хорошо обусловлена. Напомним, что матрица (точно) диагонализуется унитарным преобразованием, если и только если она является нормальной. Поэтому теорема 20.3.2 дает для всего класса нормальных (и, в частности, эрмитовых или вещественных симметричных) матриц результат столь же простого вида, как наше исходное замечание о диагональных матрицах. Нормальные матрицы, таким образом, идеально обусловлены по отношению к вычислению собственных значений.

20.3.4. Следствие. *Пусть $A \in M_n$ — нормальная матрица с собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, и пусть $E \in M_n$. Если $\hat{\lambda}$ — собственное значение матрицы $A + E$, то найдется собственное значение λ_i матрицы A, для которого $|\hat{\lambda} - \lambda_i| \leqslant \|E\|_2$.*

Отметим, что ни матрица возмущения E, ни возмущенная матрица $A+E$ не обязаны быть нормальными. Чаще всего следствие 20.3.4 применяется в случае вещественной симметричной матрицы A.

Упражнение. Восполнить детали доказательства следствия 20.3.4.

Упражнение. Если известно, что обе матрицы A, E эрмитовы, то с помощью теоремы Вейля 18.3.1 можно получить более сильный результат, чем следствие 20.3.4. Пусть в этом случае $\lambda_1 \leqslant \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ — упорядоченные собственные значения матрицы A, $\hat{\lambda}_1 \leqslant \hat{\lambda}_2 \leqslant \ldots \leqslant \hat{\lambda}_n$ — упорядоченные собственные значения матрицы $A + E$ и $\lambda_1(E) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(E)$ — упорядоченные собственные значения матрицы E. Используя неравенства (18.3.2), показать, что для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ справедливы соотношения

$$\lambda_1(E) \leqslant \hat{\lambda}_k - \lambda_k \leqslant \lambda_n(E),$$

откуда

$$|\hat{\lambda}_k - \lambda_k| \leqslant \rho(E) = \|E\|_2.$$

Объяснить, почему верхние оценки лучше, чем в следствии 20.3.4. Какую информацию можно извлечь из оценок, если известно, что все собственные значения матрицы E неотрицательны?

В вычислительных приложениях исходная матрица A и матрица возмущения E нередко бывают вещественными и симметричными. В этом случае, а также в более общей ситуации, когда обе матрицы A и $A+E$ нормальные, имеется коллективная оценка возмущений собственных значений.

20.3.5. Теорема (Виландт — Хофман). *Пусть A, $E \in M_n$, причем обе матрицы A и $A+E$ нормальные. Пусть $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ — собственные значения матрицы A в произвольном заданном порядке, а $\{\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_n\}$ — собственные значения матрицы $A+E$, также произвольно упорядоченные. Тогда существует перестановка $\sigma(i)$ чисел $1, 2, \ldots, n$, такая, что*

$$\left[\sum_{i=1}^{n} |\hat{\lambda}_{\sigma(i)} - \lambda_i|^2\right]^{1/2} \leqslant \|E\|_E. \qquad (20.3.6)$$

Доказательство. Положим $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\hat{\Lambda} = \operatorname{diag}(\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_n)$, и пусть V, $W \in M_n$ — унитарные матрицы, для которых соответственно $A = V\Lambda V^*$ и $A + E = W\hat{\Lambda}W^*$. Поскольку евклидова норма унитарно инвариантна, то

$$\begin{aligned}
\|E\|_E^2 &= \|(A+E) - A\|_E^2 = \|W\hat{\Lambda}W^* - V\Lambda V^*\|_E^2 = \\
&= \|V^*W\hat{\Lambda}W^*V - \Lambda\|_E^2 = \|Z\hat{\Lambda}Z^* - \Lambda\|_E^2 = \\
&= \operatorname{tr}(Z\hat{\Lambda}Z^* - \Lambda)(Z\hat{\Lambda}Z^* - \Lambda)^* = \\
&= \operatorname{tr}(\hat{\Lambda}\hat{\Lambda}^* + \Lambda\Lambda^*) - \operatorname{tr}(Z\hat{\Lambda}Z^*\Lambda^* + \Lambda Z\hat{\Lambda}^*Z^*) = \\
&= \sum_{i=1}^{n}(|\hat{\lambda}_i|^2 + |\lambda_i|^2) - 2\operatorname{Re}\operatorname{tr}(Z\hat{\Lambda}Z^*\Lambda^*).
\end{aligned}$$

Здесь мы положили $Z \equiv V^*W$. Из этого представления следует, что

$$\|E\|_E^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n}(|\hat{\lambda}_i|^2 + |\lambda_i|^2) - 2\max\{\operatorname{Re}\operatorname{tr}(U\hat{\Lambda}U^*\Lambda^*):\ U \text{ унитарна}\}. \qquad (20.3.7)$$

Покажем, что если подставить в (20.3.7) точное значение максимума, то будет получена желаемая оценка (20.3.6). Для матрицы $U \equiv [u_{ij}] \in M_n$ легко проверить равенство

$$\operatorname{Re} \operatorname{tr} (U\hat{\Lambda}U^*\Lambda^*) = \sum_{i,\,j=1}^{n} |u_{ij}|^2 \operatorname{Re}(\bar{\lambda}_i\hat{\lambda}_j).$$

Нам нужен максимум этого выражения, когда U пробегает компактное множество унитарных матриц порядка n. Если положить $c_{ij} \equiv |u_{ij}|^2$ и $C \equiv [c_{ij}]$, то матрица $C \in M_n$ будет неотрицательной и суммы ее элементов как по строкам, так и по столбцам будут точно равны 1 (поскольку $UU^* = U^*U = I$). Таким образом, всякой унитарной матрице U отвечает двоякостохастическая матрица C. Если изменить нашу экстремальную задачу, допуская все двоякостохастические матрицы, выигрыш будет в том, что экстремум вычисляется на выпуклом компактном множестве, структура которого известна. Максимум над этой большей областью может возрасти:

$$\begin{aligned} &\max\{\operatorname{Re} \operatorname{tr} (U\hat{\Lambda}U^*\Lambda^*):\ U \text{ унитарна}\} = \\ &= \max\left\{\sum_{i,\,j=1}^{n} |u_{ij}|^2 \operatorname{Re}(\bar{\lambda}_i\hat{\lambda}_j):\ U \text{ унитарна}\right\} \leqslant \\ &\leqslant \max\left\{\sum_{i,\,j=1}^{n} c_{ij} \operatorname{Re}(\bar{\lambda}_i\hat{\lambda}_j):\ C \text{ двоякостохастическая}\right\}. \end{aligned}$$

Однако целевая функция у нас линейна, а множество выпуклое и компактное, поэтому максимум достигается в одной из крайних точек (см. приложение В; нужно учесть, что линейная функция выпукла). Согласно теореме Биркгофа 22.7.1, крайними точками множества двоякостохастических матриц являются матрицы перестановок. Следовательно, существует матрица перестановки $P \in M_n$, такая, что

$$\begin{aligned} &\max\left\{\sum_{i,\,j=1}^{n} c_{ij} \operatorname{Re}(\bar{\lambda}_i\hat{\lambda}_j):\ C \text{ двоякостохастическая}\right\} = \\ &= \operatorname{Re} \operatorname{tr} (P\hat{\Lambda}P^T\Lambda^*). \end{aligned}$$

Поскольку матрица перестановки унитарна, то верно также, что

$$\max\{\operatorname{Re} \operatorname{tr} (U\hat{\Lambda}U^*\Lambda^*):\ U \text{ унитарна}\} = \operatorname{Re} \operatorname{tr} (P\hat{\Lambda}P^T\Lambda^*).$$

Если $Pe_i = e_{\sigma(i)},\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$ то

$$\operatorname{Re} \operatorname{tr} (P\hat{\Lambda}P^T\Lambda^*) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Re}(\hat{\lambda}_{\sigma(i)}\bar{\lambda}_i).$$

Подставляя в (20.3.7), имеем

$$\|E\|_E^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} [|\hat{\lambda}_{\sigma(i)}|^2 + |\lambda_i|^2 - 2\operatorname{Re}(\hat{\lambda}_{\sigma(i)}\bar{\lambda}_i)] =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} |\hat{\lambda}_{\sigma(i)} - \lambda_i|^2.$$

Теорема 20.3.5 указывает, что множество собственных значений нормальной матрицы обладает сильной глобальной устойчивостью; однако она не говорит о том, при каком упорядочении собственных значений неравенство, содержащееся в ней, будет выполнено. Разумеется, годится не всякое упорядочение; действительно, существует по меньшей мере одно такое, что знак неравенства (20.3.6) заменяется на противоположный (см. задачу 7 в конце данного параграфа). Но в важном частном случае эрмитовых матриц можно взять естественное упорядочение собственных значений.

20.3.8. Следствие. *Пусть* A, $E \in M_n$, *причем* A *эрмитова, а* $A + E$ *— нормальная матрица. Пусть собственные значения матрицы* A *расположены по возрастанию:* $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$, *а собственные значения матрицы* $A + E$ *упорядочены так, что* $\operatorname{Re}\hat{\lambda}_1 \leqslant \operatorname{Re}\hat{\lambda}_2 \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re}\hat{\lambda}_n$. *Тогда*

$$\left[\sum_{i=1}^{n} |\hat{\lambda}_i - \lambda_i|^2\right]^{1/2} \leqslant \|E\|_E.$$

Доказательство. По теореме 20.3.5 существует некоторая перестановка σ исходного порядка (по возрастанию вещественных частей) собственных значений матрицы $A+E$, для которой

$$\left[\sum_{i=1}^{n} |\hat{\lambda}_{\sigma(i)} - \lambda_i|^2\right]^{1/2} \leqslant \|E\|_E. \quad (20.3.9)$$

Если в списке $\hat{\lambda}_{\sigma(1)}, \ldots, \hat{\lambda}_{\sigma(n)}$ собственные значения по-прежнему упорядочены по возрастанию вещественных частей, то доказывать нечего. В противном случае в списке найдется пара соседних собственных значений, для которой этот порядок нарушен, т. е. для некоторого k, $1 \leqslant k < n$,

$$\operatorname{Re}\hat{\lambda}_{\sigma(k)} > \operatorname{Re}\hat{\lambda}_{\sigma(k+1)}.$$

Так как, однако,

$$|\hat{\lambda}_{\sigma(k)} - \lambda_k|^2 + |\hat{\lambda}_{\sigma(k+1)} - \lambda_{k+1}|^2 = |\hat{\lambda}_{\sigma(k+1)} - \lambda_k|^2 +$$
$$+ |\hat{\lambda}_{\sigma(k)} - \lambda_{k+1}|^2 + 2(\lambda_k - \lambda_{k+1})(\operatorname{Re}\hat{\lambda}_{\sigma(k+1)} - \operatorname{Re}\hat{\lambda}_{\sigma(k)})$$

по предположению $\lambda_k - \lambda_{k+1} \leqslant 0$, то

$$|\hat{\lambda}_{\sigma(k)} - \lambda_k|^2 + |\hat{\lambda}_{\sigma(k+1)} - \lambda_{k+1}|^2 \geqslant |\hat{\lambda}_{\sigma(k+1)} - \lambda_k|^2 + |\hat{\lambda}_{\sigma(k)} - \lambda_{k+1}|^2.$$

Следовательно, собственные значения $\hat{\lambda}_{\sigma(k)}$ и $\hat{\lambda}_{\sigma(k+1)}$ можно переставить, не увеличивая сумму квадратов. Конечной последовательностью таких транспозиций список $\hat{\lambda}_{\sigma(1)}, \ldots, \hat{\lambda}_{\sigma(n)}$ преобразуется в список $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \ldots, \hat{\lambda}_n$, в котором вещественные части возрастают; для него имеет место указанная в формулировке оценка.

На практике это следствие чаще всего применяется в случае, когда обе матрицы *A и A + E* эрмитовы или вещественные и симметричные.

Упражнение. Пусть $A, B \in M_n$ — эрмитовы матрицы и собственные значения обеих упорядочены по возрастанию или убыванию. Доказать неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n}[\lambda_i(A)-\lambda_i(B)]^2\right)^{1/2} \leqslant \|A-B\|_E.$$

Упражнение. Показать, что утверждение теоремы 20.3.5 может потерять силу, если одна из матриц *A, B= A+E* не является нормальной. *Указание.* Рассмотреть матрицы $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ и показать, что при любом упорядочении собственных значений

$$\sum_{i=1}^{2}[\lambda_i(A)-\lambda_i(B)]^2 = 16.$$

Если *A* не диагонализуема, то не известно столь же простой оценки, как в теореме 20.3.2. Однако можно вывести явную формулу, показывающую, как меняются *алгебраически простые* собственные значения (т. е. собственные значения с алгебраической кратностью 1) при возмущении элементов матрицы. Прежде всего нам потребуется лемма о неортогональности левого и правого собственных векторов, отвечающих простому собственному значению.

20.3.10. Лемма. *Если λ — алгебраически простое собственное значение матрицы* $A \in M_n$, *а x и y — соответствующие λ правый и левый собственные векторы, то* $y^*x \neq 0$.

Доказательство. Мы можем применить процедуру, использованную в доказательстве теоремы Шура 16.3.1. Построим унитарную матрицу *U* с первым столбцом $x/\|x\|_2$; для нее

$$U^*AU = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right], \qquad B \in M_{n-1}.$$

Поскольку λ — простое собственное значение матрицы *A,* оно не может быть собственным значением для *B*. Собственным вектором матрицы *U*AU,* соответствующим λ, будет единичный базисный вектор e_1. Рассмотрим матрицу

$$(U^*AU)^* = U^*A^*U = \left[\begin{array}{c|c} \bar{\lambda} & 0 \\ \hline * & B^* \end{array}\right].$$

Пусть $U^*A^*Uz = \bar{\lambda}z,\ z \neq 0.$ Если $z^* = [0 \mid \xi^*]$, то $\xi \neq 0$ и 1 — собственный вектор матрицы B^*, соответствующий собственному значению $\bar{\lambda}$. Но тогда λ — собственное значение матрицы B, что невозможно. Отсюда заключаем, что z не может иметь нулевую первую компоненту, т. е. $z^*e_1 \neq 0.$ Следовательно, $(Uz)^*(Ue_1) = z^*e_1 \neq 0.$ Векторы Uz и Ue_1 — это левый и правый собственные векторы матрицы A, соответствующие собственному значению λ. Так как для λ левое и правое собственные подпространства матрицы A по предположению одномерны, то $y = \alpha Uz$ для некоторого $\alpha \neq 0.$ Но $x = \|x\|_2 Ue_1$, поэтому должно быть $y^*x \neq 0.$

Упражнение. Показать на примере матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, что лемма неверна, если опустить предположение о простоте собственного значения.

Пусть λ — алгебраически простое собственное значение матрицы A. Тогда λ соответствуют однозначно (с точностью до скалярного множителя α, $|\alpha| = 1$) определенный нормированный (имеющий евклидову длину 1) правый собственный вектор x и однозначно определенный левый собственный вектор y, нормированный условием $y^*x = 1.$ Рассмотрим дифференцируемую параметризацию $A(t)$, такую, что $A(0) = A$ (например, $A(t) = A + tE$ при фиксированной матрице возмущения E). Тогда у матрицы $A(t)$ для всех достаточно малых t существует однозначно определенное простое собственное значение $\lambda(t)$, такое, что $\lambda(0) = \lambda.$ Имеются также соответствующие $\lambda(t)$ правый собственный вектор $x(t)$, однозначно (с точностью до множителя α, как и прежде) определяемый условием $x^*(t)x(t) \equiv 1$, и левый собственный вектор $y(t)$, однозначно определяемый условием $y^*(t)x(t) \equiv 1.$

Дифференцируя это последнее условие, получаем тождество

$$y'^*(t)\,x(t) + y^*(t)\,x'(t) = 0. \qquad (20.3.11)$$

Так как $A(t)\,x(t) = \lambda(t)\,x(t)$ для всех малых t, то верно и тождество $y^*(t)\,A(t)\,x(t) = \lambda(t)\,y^*(t)\,x(t) = \lambda(t).$ Дифференцирование его дает

$$\lambda'(t) = y'^*(t)\,A(t)\,x(t) + y^*(t)\,A'(t)\,x(t) + y^*(t)\,A(t)\,x'(t).$$

Используя равенства $A(t)\,x(t) = \lambda(t)\,x(t)$ и $y^*(t)\,A(t) = \lambda(t)\,y^*(t)$, приходим к соотношению

$$\lambda'(t) = \lambda(t)\,\{y'^*(t)\,x(t) + y^*(t)\,x'(t)\} + y^*(t)\,A'(t)\,x(t) = y^*(t)\,A'(t)\,x(t).$$

Здесь учтено тождество (20.3.11). При t=0 имеем формулу $\lambda'(0) = y^* A'(0) x$; подразумеваются условия нормировки x^*x =1 и y^*x=1. Если x и y — правый и левый собственные векторы, не обязательно нормированные указанным образом, то можно заменить x на $x/(x^*x)^{1/2}$, а y на $(x^*x)^{1/2} y/y^*x$; тогда получится более общая формула $\lambda'(0) y^* x = y^* A'(0) x$. Итак, для матрицы A, которая не обязана быть диагопализуемой, установлен следующий результат.

20.3.12. Теорема. *Пусть матрица A*(t) *дифференцируема в точке* t=0, *и пусть* λ *— алгебраически простое собственное значение матрицы* A(0), *а* x *и* y *— соответствующие* λ *правый и левый собственные векторы. Предположим, что* $\lambda(t)$ *— это то собственное значение матрицы A* (t), *для которого* $\lambda(0) = \lambda$. *Тогда*

$$\lambda'(0) = \frac{y^* A'(0) x}{y^* x}.$$

Упражнение. Положить $A(t) = A + tE$, где матрица возмущения E фиксирована, и показать (в условиях теоремы 20.3.12**)**, что в точке t= 0

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{y^* E x}{y^* x}.$$

Упражнение. В условиях теоремы показать, что для всех i, j

$$\frac{\partial \lambda}{\partial a_{ij}} = \frac{\bar{y}_i x_j}{y^* x}.$$

Эта формула устанавливает связь между изменением произвольного коэффициента матрицы A и соответствующим изменением собственного значения. *Указание.* Взять в качестве E матрицу E_{ij}, в которой единственный ненулевой элемент стоит в позиции (i, j) и равен 1.

Упражнение. Рассмотреть матрицу $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+\varepsilon \end{bmatrix}$ и собственное значение $\lambda = 1$, которое будет простым при $\varepsilon \neq 0$. Для всех пар i, j вычислить $\partial\lambda/\partial a_{ij}$. Как ведут себя эти производные при $\varepsilon \to 0$? Сделать вывод о том, что при почти ортогональных x и y собственное значение λ может быть очень чувствительным к некоторым возмущениям в A.

В отличие от собственных значений собственные векторы даже диагонализуемой матрицы могут претерпевать радикальные изменения при очень малых возмущениях элементов матрицы. Пусть, например,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \varepsilon & \delta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения матрицы A+E суть числа 1 и 1+ε; при $\varepsilon\delta \neq 0$ соответствующими нормированными собственными векторами будут

$$\frac{1}{(\varepsilon^2+\delta^2)^{1/2}}\begin{bmatrix} -\delta \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

При надлежащем выборе отношения ε/δ можно придать первому собственному вектору любое желаемое направление, как бы малы ни были ε и δ по отдельности.

Если положить $\varepsilon=0$, то у возмущенной матрицы $A+E$ при любом $\delta\neq 0$ будет только один, с точностью до скалярного множителя, собственный вектор; сама же A имеет два линейно независимых собственных вектора.

Все полученные до сих пор оценки были априорными границами для возмущений в собственных значениях; они не используют вычисленные приближения к собственным значениям, собственным векторам или каким-то другим связанным с ними величинам. Предположим теперь, что тем или иным способом найдены «приближенный собственный вектор» $\hat{x}\neq 0$ и «приближенное собственное значение» $\hat{\lambda}$. Маловероятно, что вектор $A\hat{x}$ будет в точности равен вектору $\hat{\lambda}\hat{x}$. Для оценки расстояния от $\hat{\lambda}$ до точного собственного значения в случае диагонализуемой матрицы A можно использовать *вектор невязки* $r=A\hat{x}-\hat{\lambda}\hat{x}$.

Положим $A=S\Lambda S^{-1}$, и пусть $\hat{\lambda}$ не совпадает ни с одним собственным значением матрицы A. Тогда

$$r=A\hat{x}-\hat{\lambda}\hat{x}=S(\Lambda-\hat{\lambda}I)S^{-1}\hat{x},$$

так что $\hat{x}=S(\Lambda-\hat{\lambda}I)^{-1}S^{-1}r$. Отсюда

$$\begin{aligned}\|\hat{x}\|&=\|S(\Lambda-\hat{\lambda}I)^{-1}S^{-1}r\|\leqslant\|S(\Lambda-\hat{\lambda}I)^{-1}S^{-1}\|\|r\|\leqslant\\&\leqslant\|S\|\|S^{-1}\|\|(\Lambda-\hat{\lambda}I)^{-1}\|\|r\|=\varkappa(S)\|(\Lambda-\hat{\lambda}I)^{-1}\|\|r\|=\\&=\varkappa(S)\left(\min_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda_i-\hat{\lambda}|\right)^{-1}\|r\|.\end{aligned}$$

Таким образом, *

$$\|\hat{x}\|\min_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda_i-\hat{\lambda}|\leqslant\varkappa(S)\|r\|.$$

Ясно, что это неравенство будет выполнено и в случае, когда $\hat{\lambda}=\lambda_i$ для некоторого i. В проведенном рассуждении мы предполагали, что

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(a)} & \|\cdot\| \text{ — векторная норма на } \mathbf{C}^n; \\ \text{(b)} & \text{матричная норма } \|\cdot\| \text{ на } M_n \text{ согласована} \\ & \text{с векторной нормой } \|\cdot\|; \\ \text{(c)} & \|D\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |d_i| \text{ для любой матрицы} \\ & D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n).\end{array}\right\} \qquad (20.3.13)$$

Число обусловленности $\varkappa(S)$ порождается матричной нормой $\|\cdot\|$. Если A — нормальная матрица, то можно выбрать унитарную матрицу S. Если взять евклидову векторную норму и спектральную матричную норму, то $\varkappa(S)=1$. Условие (с) эквивалентно требованию, чтобы матричная норма $\|\cdot\|$ была подчинена монотонной векторной норме (теорема 19.6.37). Итак, все условия (20.3.13) будут удовлетворены, если векторная норма $\|\cdot\|$ на $\mathbf{C}^n$ монотонна, а матричная норма $\|\cdot\|$ на M_n подчинена ей. Мы получили апостериорные оценки такого же внешнего вида, как в теореме 19.3.2 и следствии 19.3.4.

19.3.14. Теорема. *Пусть* $A \in M_n$ *— диагонализуемая матрица,* $A = S\Lambda S^{-1}$, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. *Пусть векторная норма* $\|\cdot\|$ *на* $\mathbf{C}^n$ *и матричная норма* $\|\cdot\|$ *на* M_n *удовлетворяют условиям* (20.3.13). *Пусть* $\hat{x} \in \mathbf{C}^n$*— заданный ненулевой вектор,* $\hat{\lambda}$ *— заданное комплексное число и* $r = A\hat{x} - \hat{\lambda}\hat{x}$. *Тогда найдется собственное значение* λ_i *матрицы A, для которого*

$$|\hat{\lambda} - \lambda_i| \leqslant \|S\|\|S^{-1}\|\frac{\|r\|}{\|\hat{x}\|} = \varkappa(S)\frac{\|r\|}{\|\hat{x}\|}. \qquad (20.3.15)$$

Если A — нормальная матрица, то для некоторого ее собственного значения λ_i

$$|\hat{\lambda} - \lambda_i| \leqslant \frac{\|r\|_2}{\|\hat{x}\|_2}. \qquad (20.3.16)$$

Этот последний результат нужно сопоставить с аналогичной апостериорной границей для относительной ошибки приближенного решения системы линейных уравнений. Если матрица коэффициентов системы плохо обусловлена, то смысл оценки (19.8.11) состоит в следующем: малая величина невязки не обязательно влечет за собой малую величину относительной ошибки приближения. В то же время для нормальной матрицы A (на практике A обычно бывает эрмитовой или вещественной симметричной) неравенство (20.3.16) означает, что если невязка, соответствующая приближениям к собственному значению и собственному вектору, мала, то абсолютная погрешность приближенного собственного значения гарантированно будет малой; в оценке нет никакого числа обусловленности.

Этот результат для собственных значений не сопровождается столь же приятным результатом для собственных векторов. Даже для вещественной симметричной матрицы малость невязки не гарантирует, что приближенный собственный вектор будет близок к точному. Рассмотрим, например, при $\varepsilon > 0$ матрицу $A = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix}$. Если взять $\hat{\lambda} = 1$, $\hat{x} = [1,\ 0]^T$, то невязка имеет вид $r = [0, \varepsilon]^T$. Собственными векторами матрицы *А* для любого $\varepsilon > 0$ будут $[1, 1]^T$ и $[1, -1]^T$. Вектор $\hat{x}$ не будет приблизительно параллелен ни одному из них, как бы мало ни было ε.

Упражнение. Показать, что собственные значения матрицы *А* в только что рассмотренном примере — это числа $1 + \varepsilon$ и $1 - \varepsilon$. Проверить для них оценку (20.3.16).

20.4. Другие области локализации

Мы довольно подробно обсудили круги Гершгорина. Они представляют собой конкретный класс легко вычисляемых областей комплексной плоскости, с гарантией содержащих в себе все собственные значения данной матрицы. Многие авторы, привлекаемые, по всей видимости, геометрической элегантностью теории Гершгорина, распространили ее идеи и методы на области локализации других типов. Мы приведем несколько результатов этого ряда, чтобы у читателя создалось некоторое впечатление о том, что было сделано.

Первый результат, принадлежащий Островскому, дает область локализации собственных значений в виде объединения кругов, как это было и в случае области Гершгорина. Однако радиусы кругов теперь зависят и от строчных, и от столбцовых почти-норм. Два варианта теоремы Гершгорина с раздельным использованием строчных и столбцовых сумм получаются как предельные случаи теоремы Островского; можно считать, что последняя указывает континуум областей локализации, интерполируя между (20.1.2) и (20.1.4).

20.4.1. Теорема (Островский). *Пусть* $A = [a_{ij}] \in M_n$, α— *заданное число из отрезка* $[0,\ 1]$, *а* R'_i *и* C'_i — *соответственно строчные и столбцовые почти-нормы матрицы А:*

$$R'_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad (20.4.2)$$

$$C'_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ji}|. \qquad (20.4.3)$$

Тогда все собственные значения матрицы A принадлежат объединению n кругов

$$\bigcup_{i=1}^{n}\{z\in\mathbf{C}:\ |z-a_{ii}|\leqslant R_i'^{\alpha}C_i'^{1-\alpha}\}. \qquad (20.4.4)$$

Доказательство. Будем считать, что $0<\alpha<1$, так как случаи $\alpha=0$ и $\alpha=1$ соответствуют теоремам Гершгорина для столбцовых и строчных сумм. Далее, можно считать, что $R_i'>0$ для любого *i.* В противном случае можно было бы возмутить *A* внесением малых ненулевых элементов в те строки, для которых $R_i'=0$. Для возмущенной матрицы область локализации (20.4.4) больше, чем область локализации для *A,* и нужный результат получится в пределе при возмущении, стремящемся к нулю.

Предположим теперь, что $Ax=\lambda x$ и $x=[x_i]\neq 0$. Тогда для каждого $i=1, 2, \ldots, n$ имеем

$$\begin{aligned}|\lambda-a_{ii}||x_i| &= \left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j\right|\leqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}||x_j|=\\ &=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|^{\alpha}\{|a_{ij}|^{1-\alpha}|x_j|\}\leqslant\\ &=\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\{|a_{ij}|^{\alpha}\}^{1/\alpha}\right]^{\alpha}\cdot\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\{|a_{ij}|^{1-\alpha}|x_j|\}^{1/(1-\alpha)}\right]^{1-\alpha}=\\ &=R_i^{\alpha}\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}||x_j|^{1/(1-\alpha)}\right]^{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Так как $R_i'>0$, то это эквивалентно неравенству

$$\frac{|\lambda-a_{ii}|}{R_i'^{\alpha}}|x_i|\leqslant\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}||x_j|^{1/(1-\alpha)}\right]^{1-\alpha}.$$

Следовательно,

$$\left[\frac{|\lambda-a_{ii}|}{R_i'^{\alpha}}\right]^{1/(1-\alpha)}|x_i|^{1/(1-\alpha)}\leqslant\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}||x_j|^{1/(1-\alpha)}. \qquad (20.4.5b)$$

В выкладках (20.4.5а) использовано неравенство Гёльдера (см, приложение В) для $p=1/\alpha$ и $q=p/(p-1)=1/(1-\alpha)$. Суммируя по *i* неравенства (20.4.5b), получим

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{|\lambda - a_{ii}|}{R_i'^{\alpha}}\right]^{1/(1-\alpha)}|x_i|^{1/(1-\alpha)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}||x_j|^{1/(1-\alpha)} = \sum_{j=1}^{n} C_j'|x_j|^{1/(1-\alpha)}. \tag{20.4.6}$$

Если для каждого i, такого, что $x_i \neq 0$, будет

$$\left[\frac{|\lambda - a_{ii}|}{R_i'^{\alpha}}\right]^{1/(1-\alpha)} > C_i',$$

то неравенство (20.4.6) не может выполняться. Поэтому хотя бы для одного из указанных значений i

$$\left[\frac{|\lambda - a_{ii}|}{R_i'^{\alpha}}\right]^{1/(1-\alpha)} \leqslant C_i',$$

откуда

$$|\lambda - a_{ii}| \leqslant R_i'^{\alpha} C_i'^{1-\alpha}. \ \square$$

Упражнение. Для матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ сравнить строчную и столбцовую области локализации Гершгорина с областью Островского для $\alpha = 1/2$. Какую оценку дает теорема Островского для спектрального радиуса матрицы A? Сравнить ее с оценками Гершгорина из следствия 20.1.5.

Упражнение. Что соответствует следствию 20.1.6 в теории Островского?

Следующий результат, полученный Брауэром, также является обобщением теоремы Гершгорина, но теперь одновременно берутся пары строк. Геометрически области локализации будут уже не кругами, а множествами, называемыми *овалами Кассини.* Доказательство параллельно доказательству теоремы Гершгорина в том отношении, что выбираются (правда, две, а не одна) наибольшие по модулю компоненты собственного вектора.

20.4.7. Теорема (Брауэр). *Пусть* $A = [a_{ij}] \in M_n$. *Все собственные значения матрицы A принадлежат объединению* $n(n-1)/2$ *овалов Кассини*

$$\bigcup_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\{z \in \mathbf{C}\colon |z - a_{ii}||z - a_{jj}| \leqslant R_i'R_j'\}. \tag{6.4.8}$$

Доказательство. Пусть λ — собственное значение матрицы $A,$ и пусть $Ax = \lambda x,$ где $x = [x_i] \neq 0.$ Пусть x_p— компонента с наибольшим модулем, так что $|x_p| \geqslant |x_i|$, $i = 1, \ldots, n$, и $x_p \neq 0$.

Если все остальные компоненты вектора x нулевые, то из условия $Ax = \lambda x$ вытекает $a_{pp} = \lambda$. Поскольку все диагональные элементы матрицы A включены в область (20.4.8), то всякое собственное значение, отвечающее собственному вектору с единственной ненулевой компонентой, попадает в эту область.

Предположим поэтому, что собственный вектор x имеет по крайней мере две ненулевые компоненты, и пусть x_q — компонента со вторым по величине значением модуля, т. е. $|x_p| \geqslant |x_q| \geqslant |x_i|$, $i = 1, \ldots, n$, $i \neq p$, и $x_p, x_q \neq 0$. Условие $Ax = \lambda x$ дает

$$x_p (\lambda - a_{pp}) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} a_{pj} x_j,$$

откуда

$$|x_p| |\lambda - a_{pp}| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} a_{pj} x_j \right| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} |a_{pj}| |x_j| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} |a_{pj}| |x_q| = R'_p |x_q|,$$

или

$$|\lambda - a_{pp}| \leqslant R'_p \frac{|x_q|}{|x_p|}. \qquad (20.4.9)$$

Аналогичным образом из равенства

$$x_q (\lambda - a_{qq}) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^{n} a_{qj} x_j$$

выводим

$$|x_q| |\lambda - a_{qq}| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^{n} a_{qj} x_j \right| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^{n} |a_{qj}| |x_j| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{qj}| |x_p| = R'_q |x_p|,$$

или

$$|\lambda - a_{qq}| \leqslant R'_q \frac{|x_p|}{|x_q|}. \qquad (20.4.10)$$

Перемножение неравенств (20.4.9) и (20.4.10) позволяет исключить неизвестные отношения компонент вектора *x;* в результате получим

$$|\lambda - a_{pp}||\lambda - a_{qq}| \leqslant R'_p \frac{|x_q|}{|x_p|} R'_q \frac{|x_p|}{|x_q|} = R'_p R'_q.$$

Таким образом, собственное значение λ принадлежит области (20.4.8).

Упражнение. Какова столбцовая версия теоремы Брауэра?

Из всякой теоремы об областях локализации собственных значений можно вывести связанную с ней теорему об обратимости (верно и обратное). Нужно всего лишь, опираясь на результат о локализации, сформулировать условия, которые исключали бы точку z=0 из соответствующей области.

20.4.11. Следствие. *Пусть* $A = [a_{ij}] \in M_n$. *Каждое из следующих условий достаточно для того, чтобы матрица А была обратима.*

(a) *при некотором* $\alpha \in [0, 1]$ *и всех* $i = 1, \ldots, n$ *справедливы неравенства* $|a_{ii}| > R_i'^{\alpha} C_i'^{1-\alpha}$ (Островский);

(b) *для всех* $i,\ j = 1, \ldots, n,\ i \neq j$, *выполняются неравенства* $a_{ii}||a_{jj}| > R'_i R'_j$ (Брауэр).

Упражнение. Вывести следствие 20.4.11 из теорем 20.4.1 и 20.4.7.

В теореме Брауэра участвуют попарные произведения строк. Привлекательная возможность дальнейших обобщений связана с идеей брать тройные и еще более длинные произведения и рассматривать при каждом $m = 1, \ldots, n$ объединения множеств вида

$$\left\{ z \in \mathbf{C}\colon \prod_{k=1}^{m} |z - a_{i_k i_k}| \leqslant \prod_{k=1}^{m} R'_{i_k} \right\}, \qquad A = [a_{ij}] \in M_n. \quad (20.4.12)$$

Для каждого *m* имеется $\binom{n}{m}$ таких множеств; случай *m* = 1 дает *n* кругов Гершгорина; при *m* = 2 получаем $n(n-1)/2$ овалов Кассини. К сожалению, при $m \geqslant 3$ множества (2.4.12) не обязаны быть областями локализации собственных значений, что показывает пример матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (20.4.13)$$

Все множества (20.4.12) для *m* = 3 и *m*=4 состоят из единственной точки z=l.

Упражнение. Показать, что собственными значениями матрицы (20.4.13) являются числа λ =0,1,1,2. Изобразить множества (20.4.12) для

$m = 1$, $m = 2$ и $m = 3{,}4$. Показать, что те же неприятности возможны при любом $m \geqslant 3$. Для этого рассмотреть матрицу

$$A = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \in M_{n+2}, \qquad (20.4.14)$$

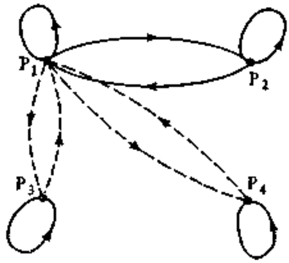
где $I_n \in M_n$ — единичная матрица, а $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2$.

Хотя этот пример опровергает наиболее очевидный способ обобщения теоремы Брауэра, он показывает заодно, что именно плохо и как поправить положение. Проблема с областью (20.4.12) состоит в том, что для нее требуется слишком много произведений, причем некоторые могут быть равны нулю из-за нулевых строчных почти-норм. Разумеется, это невозможно для неразложимой матрицы *A;* для нее все $R'_i > 0$.

Однако и при неразложимой матрице *A* область (20.4.12) может не быть областью локализации собственных значений; в ней может все еще участвовать слишком много произведений. Рассмотрим наряду с матрицей (20.4.13) возмущенную матрицу вида

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 1 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad 1 > \varepsilon \geqslant 0. \qquad (20.4.15)$$

Ориентированный граф $\Gamma(A_\varepsilon)$ матрицы A_ε выглядит так:



При $\varepsilon = 0$ пунктирные линии отсутствуют. Если $\varepsilon \neq 0$, граф $\Gamma(A_\varepsilon)$ сильно связен и матрица A_ε неразложима. При этом

$$R'_1 = 1 + 2\varepsilon, \quad R'_2 = 1, \quad R'_3 = \varepsilon, \quad R'_4 = \varepsilon,$$

а собственными значениями матрицы A_ε будут числа

$$\lambda_\varepsilon = 1,\ 1,\ 1 + (1 + 2\varepsilon^2)^{1/2},\ 1 - (1 + 2\varepsilon^2)^{1/2}.$$

Упражнение. Проверить выражения для строчных почти-норм и собственных значений матрицы A_ε.

Так как произведение любых трех (или всех четырех) величин R'_i содержит по меньшей мере один множитель ε (число ε считается малым и положительным), то множества (20.4.12) не могут быть областями локализации собственных значений ни при m = 3, ни при m = 4.

Упражнение. Рассматривая возмущения матрицы (20.4.14) того же типа, что в (20.4.15), показать, что аналогичный вывод справедлив для всех $m \geqslant 3$.

С каким же внутренним свойством матриц (20.4.13) и (20.4.15) связано то, что для них значения m = 1 и m=2 приемлемы в (20.4.12), а значения m = 3 или m = 4 — нет? Ричард Бруалди заметил, что ориентированные графы обеих матриц содержат циклы длины 1 и 2, но не содержат циклов длины 3 и 4. Это оказывается ключевым обстоятельством при формулировании правильного обобщения теоремы Брауэра.

Напомним, что *сильно связным* называется ориентированный граф Г, в котором из каждого узла идет ориентированный путь в *любой другой* узел (а из него в свою очередь в первый).

Назовем Г *слабо связным* графом, если из каждого его узла идет ориентированный путь в *некоторый другой* узел, а из того в свою очередь в первый. Это эквивалентно требованию, чтобы *каждый узел графа* Г *принадлежал некоторому нетривиальному циклу* (тривиальный цикл, или петля, — это ориентированный путь длины 1, начинающийся и кончающийся в своем единственном узле).

В матричных терминах, как мы знаем, сильная связность графа Г(A) равносильна неразложимости матрицы A. Будем говорить, что *A слабо неразложима,* если Г(A) слабо связен. Слабая неразложимость, по-видимому, не допускает такого наглядного описания, как обычная неразложимость (т. е. на языке перестановочных подобий; см. определение 20.2.21 (b)). Однако с точки зрения распределения в A нулевых и ненулевых элементов ясно, что слабая неразложимость матрицы A эквивалентна следующему свойству, для каждого $i = 1, ..., n$ в i-й строке матрицы A имеется хотя бы один ненулевой внедиагональный элемент a_{ij_i}, такой, что существует последовательность ненулевых элементов

$$a_{k_1k_2},\ a_{k_2k_3},\ \ldots,\ a_{k_{m-1}k_m},$$

в которой $k_1 = j_i$ и $k_m = i$. Это громоздкое условие составляет приблизительно половину требования 20.2.7, определяющего свойство SC. Для вычислительных целей, вероятно, более удобна его переформулировка, сходная по виду с теоремой 20.2.23.

20.4.16. Лемма. *Слабая неразложимость матрицы* $A \in M_n$ *равносильна тому, что любая из матриц*

(a) $B = [I + |A|]^{n-1}$ *или*

(b) $B = [I + M(A)]^{n-1}$

обладает следующим свойством: для каждого i = 1, ..., *n в* i*-й строке есть хотя бы один ненулевой внедиагональный элемент* b_{ij}, *такой, что элемент* b_{ji} *тоже не равен нулю.*

Упражнение. Доказать лемму 20.4.16. *Указание.* Использовать идеи доказательства следствия 20.2.19.

Упражнение. Пусть $A \in M_n$, и пусть матрица $B \in M_n$ определена формулой (a) или (b) леммы 20.4.16. Показать, что слабая неразложимость матрицы *A* равносильна тому, что каждый узел графа Г (*B*) принадлежит циклу длины 2. Каково соответствующее свойство для неразложимой матрицы? Какое из этих свойств слабее? Напомним, что по определению циклы являются *простыми;* только начальный узел (совпадающий с конечным) может повториться в списке узлов цикла.

Упражнение. Показать, что для слабо неразложимой матрицы $A \in M_n$ все $R_i' > 0$ и все $C_i' > 0$.

Предпорядком на множестве *S* называется отношение *R*, определенное для *всех* пар точек этого множества, причем для каждой пары элементов $s, t \in S$ верно либо *sRt*, либо *tRs*, либо и то и другое. Требуется также, чтобы предпорядок был рефлексивным (*sRs* для любого $s \in S$) и транзитивным (если *sRt* и *tRu*, то *sRu*). Предпорядок не обязан быть симметричным (*sRt* влечет за собой *tRs* и обратно); возможно к тому же, что *sRt* и *tRs*, хотя $s \neq t$. Точка *z* подмножества $S_0 \subset S$ называется *максимальным элементом* подмножества, если *sRz* для всех $s \in S_0$.

Упражнение. Пусть *S* — произвольное непустое множество комплексных чисел. Показать, что отношение между комплексными числами $z, w \in S$, определяемое правилом

$$zRw, \quad \text{если} \quad |z| \leqslant |w|,$$

есть предпорядок на **C**.

20.4.17. Лемма. *Пусть S — непустое конечное множество, на котором определен предпорядок. Тогда оно содержит хотя бы один максимальный элемент.*

Доказательство. Расположим элементы в произвольном порядке $s_1, \dots, s_k$. Положим $s \equiv s_1$. Если $s_2 R s$, то *s* не изменяется; в противном случае полагаем $s \equiv s_2$. Повторяем этот процесс с прочими элементами. Окончательное значение *s* дает максимальный элемент.

Пусть Г — ориентированный граф н P_i — узел графа Г. Обозначим через $\Gamma_{\text{out}}(P_i)$ множество узлов, отличающихся от P_i и таких, что их можно достичь из P_i по ориентированным путям длины 1. Заметим, что если граф Г слабо связен, то множество $\Gamma_{\text{out}}(P_i)$ непусто для любого узла $P_i \in \Gamma$.

Обозначим через *C(A)* множество нетривиальных циклов γ ориентированного графа Г*(A)*. Напомним, что нетривиальным называется цикл, содержащий по меньшей мере два различных узла, т. е. (простой ориентированный) цикл, не являющийся петлей. Для матрицы (20.4.13) множество *C(A)* состоит из единственного цикла $\gamma = P_1P_2,\ P_2P_1$, в то время как матрица (20.4.15) имеет три разных нетривиальных цикла, каждый длины 2.

20.4.18. Теорема (Бруалди). *Если матрица* $A = [a_{ij}] \in M_n$ *слабо неразложима, то каждое ее собственное значение заключено в области*

$$\bigcup_{\gamma \in C(A)} \left\{ z \in \mathbf{C}: \prod_{P_i \in \gamma} |z - a_{ii}| \leqslant \prod_{P_i \in \gamma} R'_i \right\}. \qquad (20.4.19)$$

Эта запись означает, что если $\gamma = P_{i_1}P_{i_2}, \ldots, P_{i_k}P_{i_{k+1}}$ *— нетривиальный цикл, в котором* $P_{i_{k+1}} = P_{i_1}$, *то соответствующее произведение в* (20.4.19) *содержит ровно k сомножителей и индекс i принимает k значений* $i_1, i_2, \ldots, i_k$.

Доказательство. Предположим, что λ — собственное значение матрицы *A,* причем λ равно некоторому диагональному элементу a_{ii}. Ясно, что такое λ принадлежит области (20.4.19). Так как все $R'_i > 0$ в силу слабой неразложимости матрицы *A,* то в действительности λ в этом случае является внутренней точкой области. Если каждое собственное значение матрицы равно некоторому диагональному элементу, то все собственные значения находятся внутри области (20.4.19), и доказательство закончено.

В оставшейся части доказательства будем считать, что собственное значение λ не равно никакому $a_{ii},\ i = 1, \ldots, n$. Пусть $Ax = \lambda x$, где $x = [x_i] \in \mathbf{C}^n$ и $x \neq 0$. Определим следующий предпорядок на множестве узлов графа $\Gamma(A)$:

$$P_iRP_j \Leftrightarrow |x_i| \leqslant |x_j|. \qquad (20.4.20)$$

Покажем, что в $\Gamma(A)$ существует цикл γ' с такими тремя свойствами:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(a)} & \gamma' = P_{i_1}P_{i_2},\ P_{i_2}P_{i_3},\ \ldots,\ P_{i_k}P_{i_{k+1}} \text{ — нетривиальный (простой ориентированный) цикл длины } k \geqslant 2\ (P_{i_{k+1}} = P_{i_1});\\ \text{(b)} & \text{для каждого } j = 1, \ldots, k \text{ узел } P_{i_{j+1}} \text{ максимален в множестве } \Gamma_{\text{out}}(P_{i_j}), \text{ т. е. } |x_{i_{j+1}}| \geqslant |x_m| \text{ для всех } m, \text{ таких, что } P_m \in \Gamma_{\text{out}}(P_{i_j});\\ \text{(c)} & \text{все } x_{i_j} \neq 0,\ j = 1, \ldots, k.\end{array}\right\} \quad (20.4.21)$$

Пусть γ'— цикл, удовлетворяющий условиям (20.4.21). Для каждого $j = 1, \ldots, k$ равенство $Ax = \lambda x$ дает

$$(\lambda - a_{i_j i_j}) x_{i_j} = \sum_{\substack{m=1\\ m \neq i_j}}^{n} a_{i_j m} x_m = \sum_{P_m \in \Gamma_{\text{out}}(P_{i_j})} a_{i_j m} x_m,$$

откуда

$$|\lambda - a_{i_j i_j}|\,|x_{i_j}| = \left|\sum_{P_m \in \Gamma_{\text{out}}(P_{i_j})} a_{i_j m} x_m\right| \leqslant \sum_{P_m \in \Gamma_{\text{out}}(P_{i_j})} |a_{i_j m}|\,|x_m| \quad (20.4.22)$$

$$\leqslant \sum_{P_m \in \Gamma_{\text{out}}(P_{i_j})} |a_{i_j m}|\,|x_{i_{j+1}}| \quad (20.4.22a)$$

$$= R'_{i_j}|x_{i_{j+1}}|.$$

Беря произведение неравенств (20.4.22) по всем узлам из γ', получим

$$\prod_{j=1}^{k} |\lambda - a_{i_j i_j}|\,|x_{i_j}| \leqslant \prod_{j=1}^{k} R'_{i_j}|x_{i_{j+1}}|. \quad (20.4.23)$$

Но

$$\prod_{j=1}^{k} |\lambda - a_{i_j i_j}| = \prod_{P_i \in \gamma'} |\lambda - a_{ii}|, \qquad \prod_{j=1}^{k} R'_{i_j} = \prod_{P_i \in \gamma'} R'_i,$$

и так как $P_{i_{k+1}} = P_{i_1}$, то $x_{i_{k+1}} = x_{i_1}$. Следовательно,

$$\prod_{j=1}^{k} |x_{i_j}| = \prod_{j=1}^{k} |x_{i_{j+1}}| \neq 0. \quad (20.4.24)$$

Деля (20.4.23) на (20.4.24), приходим к неравенству

$$\prod_{P_i \in \gamma'} |\lambda - a_{ii}| \leqslant \prod_{P_i \in \gamma'} R'_i. \quad (20.4.25)$$

Поскольку γ'— нетривиальный цикл графа $\Gamma(A)$, то собственное значение λ должно принадлежать области (20.4.19).

Теперь нужно показать, что цикл γ', удовлетворяющий условиям (20.4.21), действительно существует. Пусть i — произвольный индекс, для которого $x_i \neq 0$. Левая часть равенства

$$(\lambda - a_{ii})\, x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{P_j \in \Gamma_{\text{out}}(P_i)} a_{ij} x_j$$

не равна нулю, так как $x_i \neq 0$ и $\lambda - a_{ii} \neq 0$. Поэтому среди узлов множества $\Gamma_{\text{out}}(P_i)$ [т. е. узлов P_j, таких, что $j \neq i$ и $a_{ij} \neq 0$; множество $\Gamma_{\text{out}}(P_i)$ непусто, так как граф $\Gamma(A)$ слабо связен] должен быть хотя бы один, для которого соответствующая компонента x_j собственного вектора не равна нулю. Положим $P_{i_1} \equiv P_i$, а в качестве P_{i_2} возьмем максимальный среди узлов множества $\Gamma_{\text{out}}(P_{i_1})$, т. е. $|x_{i_2}| \geqslant |x_m|$ для всех m, таких, что $P_m \in \Gamma_{\text{out}}(P_{i_1})$. Заметим, что неравенство $x_{i_2} \neq 0$ обеспечено.

Предположим, что, продолжая указанное построение, мы получили ориентированный путь $P_{i_1}P_{i_2}$, $P_{i_2}P_{i_3}$, $\ldots$, $P_{i_{j-1}}P_{i_j}$ длины j—1, который удовлетворяет условиям (b) и (c) в (20.4.21); для j = 2 рассуждения были описаны только что. Левая часть соотношения

$$(\lambda - a_{i_j i_j})\, x_{i_j} = \sum_{P_m \in \Gamma_{\text{out}}(P_{i_j})} a_{i_j m} x_m$$

не равна нулю, поэтому в множестве $\Gamma_{\text{out}}(P_{i_j})$ [непустом, поскольку граф Г(A) слабо связен] имеется хотя бы один узел, которому соответствует ненулевая компонента собственного вектора. Выбор в качестве $P_{i_{j+1}}$ максимального узла в $\Gamma_{\text{out}}(P_i)$ гарантирует, что $x_{i_{j+1}} \neq 0$.

В графе Г(A) лишь конечное число узлов, а потому наше построение рано или поздно натолкнется в первый раз на максимальный узел $P_{i_q} \in \Gamma_{\text{out}}(P_{i_{q-1}})$, уже встречавшийся в качестве узла P_{i_p} на одном из предыдущих шагов $(1 \leqslant p < q - 1)$. Тогда

$$\gamma' = P_{i_p}P_{i_{p+1}},\ P_{i_{p+1}}P_{i_{p+2}},\ \ldots,\ P_{i_{q-1}}P_{i_q}$$

и будет искомым циклом из Г(A), удовлетворяющим всем трем условиям (20.4.21).

Теорема Бруалди имеет более сильную форму, если A неразложима в обычном смысле. В этом случае она дает обобщение брауэровского варианта 20.4.7 теоремы 20.2.26.

20.4.26. Теорема (Бруалди). *Пусть* $A=[a_{ij}]\in M_n$ — *неразложимая матрица. Граничная точка* λ *области* (20.4.19) *тогда и только тогда является собственным значением матрицы А, когда через* λ *проходит граница каждого множества*

$$\left\{z\in\mathbf{C}:\ \prod_{P_i\in\gamma}|z-a_{ii}|\leqslant\prod_{P_i\in\gamma}R_i'\right\},\qquad(20.4.27)$$

каков бы ни был нетривиальный цикл $\gamma\in C(A)$.

Доказательство. Если $\lambda=a_{ii}$ для некоторого *i*, то λ не может находиться на границе области (20.4.27), так как все $R_i'>0$. Поэтому можно считать, что $\lambda\neq a_{ii},\ i=1,\ \ldots,\ n$, и повторить рассуждения предыдущей теоремы 20.4.18, пользуясь теми же обозначениями. Нужно лишь помнить, что собственное значение λ теперь принадлежит границе области (20.4.19). Как и в доказательстве леммы 20.2.3, λ должно удовлетворять неравенству

$$\prod_{P_i\in\gamma}|\lambda-a_{ii}|\geqslant\prod_{P_i\in\gamma}R_i'$$

для всех нетривиальных циклов $\gamma\in C(A)$, причем хотя бы для дного γ в действительности достигается равенство. Сравнивая данное неравенство с (20.4.25), видим, что равенство

$$\prod_{P_i\in\gamma'}|\lambda-a_{ii}|=\prod_{P_i\in\gamma'}R_i'\qquad(20.4.28)$$

выполняется для специального цикла γ', построенного в доказательстве теоремы 20.4.18. Поэтому соотношение (20.4.23) должно быть равенством, и это же верно для обоих неравенств (20.4.22) при всех $j=1,2,\ \ldots,\ k$. В частности, равенство достигаетсяв (20.4.22а), а потому $|x_m|=|x_{i_{j+1}}|=c_{i_{j+1}}=\text{const}$ для каждого $P_{i_j}\in\gamma'$ и для всех *m,* таких, что $P_m\in\Gamma_{\text{out}}(P_{i_j})$. Этот вывод справедлив для любого цикла, удовлетворяющего условиям (20.4.21).

Определим теперь множество

$$K=\{P_i\in\Gamma(A):\ |x_m|=c_i=\text{const}\ \text{ для всех } m, \text{ таких, что } P_m\in\Gamma_{\text{out}}(P_i)\}.$$

Множество *К* непусто, так как содержит все узлы цикла γ'. Покажем, что в действительности все узлы графа Г (*А*) принадлежат *К.*

Предположим, что имеется не принадлежащий *К* узел P_q. Поскольку Г(*А*) сильно связен, то для каждого узла из *К* найдется хотя бы один ориентированный путь в этот внешний узел P_q. Если из такого рода путей выбрать путь наименьшей длины, то его первая дуга обязательно идет из некоторого узла, принадлежащего *К,* в некоторый узел P_f, не принадлежащий *К*. Используя тот же предпорядок на узлах графа Г *(А),* что и в доказательстве теоремы 20.4.18, мы можем провести такое же, как там, построение: начать с узла $P_f \equiv P_{l_1}$, выбрать максимальный узел

$$P_{l_2} \in \Gamma_{out}(P_{l_1}),$$

выбрать максимальный узел $P_{l_3} \in \Gamma_{out}(P_{l_2})$, итак далее. На каждом шаге множество $\Gamma_{out}(P_{l_i})$ непусто вследствие слабой (и даже сильной) связности Г(*А*), и максимальный узел удовлетворяет условию (с) в (20.4.21) по тем же, что и прежде, причинам.

Если на некотором шаге построения возникнет выбор между максимальными узлами, один из которых принадлежит множеству *К,* а другой — нет, мы всегда разрешаем его в пользу узла, который *не* входит в *К.* Если же все максимальные узлы данного шага принадлежат *К,* мы выбираем произвольный из них и проводим из него кратчайший ориентированный путь к какому-либо узлу не из *К*; после этого выбор максимальных узлов идет прежним образом. *Любой* ориентированный путь, проходящий в *К,* обладает следующим свойством (вытекающим из определения множества *К):* каждый его узел является максимальным в множестве Γ_{out} предыдущего узла (условие (b) в (20.4.21)). Поскольку дополнение к *К* содержит конечное число узлов, то наше построение рано или поздно натолкнется в первый раз на максимальный узел из дополнения, который уже встречался на одном из предыдущих шагов. Ориентированный путь, связывающий первое и второе появления этого узла, может не быть простым циклом вследствие способа, которым мы вынуждали путь покидать множество *К* в тех случаях, когда построение приводило к его узлам. Часть пути, попадающая в *К,* содержит лишь конечное число циклов; отбрасывая их, получим простой ориентированный цикл γ'', удовлетворяющий условиям (20.4.21) и содержащий по крайней мере один узел не из *К.*

Так как для цикла γ'' условия (20.4.21) выполнены, то в доказательстве теоремы 20.4.18 можно взять γ'' вместо γ'. Рассуждения, изложенные в первой части доказательства, позволяют установить, что $|x_m| = c_{l_r} = \text{const}$ для всех $P_m \in \Gamma_{out}(P_{l_r})$ и всех $P_{l_r} \in \gamma''$. Но тогда каждый узел в γ'' принадлежит *К,* а это противоречит более раннему утверждению о том, что γ'' содержит хотя бы один узел не из *К*. Противоречие показывает, что в Г (*А*) не может быть узлов, не входящих в *К*.

Если γ — *произвольный* нетривиальный (простой ориентированный) цикл в Г (*А*), то он автоматически (поскольку все узлы принадлежат *К)* удовлетворяет условиям (20.4.21). Мы можем подставить его вместо γ' в доказательство теоремы 20.4.18, а затем в вывод равенства (20.4.28). Это и дает желаемый результат: граница каждого множества (20.4.27) проходит через *К*.

20.4.29. Следствие. *Пусть* $A \in M_n$. *Каждое из следующих условий достаточно для того, чтобы матрица А была обратима:*

(a) *А слабо неразложима и*

$$\prod_{P_i \in \gamma} |a_{ii}| > \prod_{P_i \in \gamma} R_i'$$

для любого нетривиального цикла

$$\gamma \in C(A);$$

(b) *А неразложима и*

$$\prod_{P_i \in \gamma} |a_{ii}| \geqslant \prod_{P_i \in \gamma} R_i'$$

для любого нетривиального цикла $\gamma \in C(A)$, *причем хотя бы для одного цикла неравенство должно быть строгим.*

Микромодуль 57
Индивидуальные тестовые задания

Задачи к п. 20.3

1. Пусть λ, μ — собственные значения матрицы *А* и $\lambda \neq \mu$. Показать, что всякий левый собственный вектор матрицы *А,* соответствующий μ, ортогонален всякому ее правому собственному вектору, соответствующему λ.

2. Используя предыдущую задачу, дать другое доказательство леммы 20.3.10 для случая, когда все собственные значения матрицы *А* различны.

3. Проверить утверждение, сделанное в конце первого абзаца данного параграфа (Ьмеется в виду фраза «К сожалению, эта простая оценка не распространяется на общий (недиагонализуемый) случай».), рассматривая матрицы $A_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \in M_2$, $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и считая ε малым положительным числом. Показать, что матрица A_ε диагоиализуема при $\varepsilon > 0$ и минимальное расстояние между собственными значениями матриц A_ε и A_0 равно $\sqrt{\varepsilon}$. Представляя A_ε

в виде $A_\varepsilon = A_0 + E$, показать, что при $\varepsilon \to 0$ справедливы соотношения

$$\frac{|\hat{\lambda} - \lambda_i|}{\|E\|} \geqslant O(\varepsilon^{-1/2}) \to \infty.$$

Таким образом, оценка типа $|\hat{\lambda} - \lambda_i| \leqslant \|E\|$ для матриц общего вида не может быть верной. Вычислить для этого же случая оценки теоремы 20.3.2 и объяснить полученный результат.

4. Пусть *p(x)* — многочлен степени *n*>2 с двойным корнем в точке x_0, т. е. $p(x_0) = p'(x_0) = 0$, но $p''(x_0) \neq 0$. Показать, что многочлен $p(x) - \varepsilon$ имеет вблизи x_0 два корня вида $x_0 \pm c\sqrt{\varepsilon} +$(члены более высокого порядка). *Указание.* Разложить *p(x)* в ряд Тейлора относительно точки x_0. Смысл задачи состоит в том, что изменения порядка ε в коэффициентах многочлена могут повлечь возмущения в его корнях порядка $\sqrt{\varepsilon}$. Для многочлена отношения возмущений корней к возмущениям коэффициентов могут быть неограниченными.

5. Согласно следствию 20.3.4, для эрмитовой (а более общо, для любой нормальной) матрицы отношения возмущений собственных значений к возмущениям матричных элементов ограничены. Поскольку собственные значения матрицы суть корни ее характеристического уравнения, объяснить, как эта благоприятная ситуация может сочетаться с выводами задачи 4. Мораль настоящего задания состоит в том, что с практической точки зрения очень неразумно вычислять собственные значения эрмитовой (так же как и любой другой) матрицы путем построения ее характеристического многочлена и вычисления его корней. Этот способ потенциально чреват опасностью превратить хорошо обусловленную задачу в плохо обусловленную!

6. Гивенсу принадлежит пример вещественной симметричной 2×2-матрицы *A* = *I* и ее вещественного симметричного возмущения

$$E(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \varepsilon\cos(2/\varepsilon) & \varepsilon\sin(2/\varepsilon) \\ \varepsilon\sin(2/\varepsilon) & -\varepsilon\cos(2/\varepsilon) \end{bmatrix}, \qquad \varepsilon > 0.$$

По определению $E(0) \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} E(\varepsilon) = 0$. Показать, что собственные значения матрицы $A + E(\varepsilon)$ равны $1 + \varepsilon$ и $1 - \varepsilon$, а соответствующими (определенными с точностью до знака) нормироанными собственными векторами будут $[\cos(1/\varepsilon),\ \sin(1/\varepsilon)]^T$ и $[\sin(1/\varepsilon), -\cos(1/\varepsilon)]^T$, $\varepsilon > 0$. Показать, что при $\varepsilon \to 0$ каждый собственный вектор будет бесконечное число раз принимать произвольно заданное направление. Таким образом, даже если ограничиться вещественными симметричными матрицами, отдельный собственный вектор может изменяться очень быстро, если соответствующее ему собственное значение плохо отделено от остальных.

7. Используя такой же метод рассуждения, как в теореме 20.3.5, показать, что в условиях этой теоремы существует перестановка τ чисел 1,2, ..., *n,* такая, что

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\hat{\lambda}_{\tau(i)} - \lambda_i|^2\right)^{1/2} \geqslant \|E\|_E.$$

Указание. Рассмотреть величину

$$\min\left\{\sum_{i,\,j=1}^{n} c_{ij}\operatorname{Re}(\bar{\lambda}_i\hat{\lambda}_j):\ C=[c_{ij}]\ \text{двоякостохастическая}\right\}.$$

8. Пусть $A \in M_n$ —заданная нормальная матрица с собственными значениями $\{\lambda_i(A)\}$, $r > 0$ —заданное число. Определим множество

$$S(A,\, r) \equiv \{B \in M_n:\ B\ \text{нормальна и}\ \|B-A\|_2 \leqslant r\}.$$

Показать, что числа $\{\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_n\}$ тогда и только тогда составляют множество собственных значений матрицы $B \in S(A, r)$, когда

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(A) - \hat{\lambda}_{\sigma(i)}|^2:\ \sigma - \text{перестановка чисел } 1, 2, \ldots, n\right\} \leqslant r^2.$$

Этот результат дает, полное описание возможных спектров нормальных матриц, находящихся в окрестности фиксированной нормальной матрицы. *Указание.* Для доказательства необходимости использовать теорему 20.3.5. В части достаточности представить матрицу *A* в виде $A = U\Lambda U^*$, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A))$, и положить $B \equiv U\hat{\Lambda}U^*$, где $\hat{\Lambda} = \operatorname{diag}(\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_n)$.

9. В доказательстве теоремы 20.3.5 использовано то обстоятельство, что для унитарной матрицы $U = [u_{ij}] \in M_n$ матрица $A \equiv [|u_{ij}|^2]$ двоякостохастическая. Показать, что не всякая двоякостохастическая матрица может быть получена этим путем из некоторой унитарной матрицы. *Указание.* Рассмотреть пример

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. Пусть $A \in M_3$ — заданная эрмитова матрица, и пусть каким-то способом найдена унитарная матрица *U,* такая, что

$$UAU^* = \begin{bmatrix} 3.05 & -0.06 & 0.02 \\ -0.06 & -6.91 & 0.07 \\ 0.02 & 0.07 & 8.44 \end{bmatrix}.$$

Получить возможно более точные оценки для собственных значений матрицы A.

11. Для матриц, не являющихся нормальными, нет надежды получить оценку типа указанной в следствии 20.3.4. Рассмотреть в этой связи матрицы $A,\ E \in M_n$, где

$$A=\begin{bmatrix} 0 & a & & & 0\\ & \ddots & \ddots & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 0\\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix} 0 & 0 & & & 0\\ & \ddots & \ddots & \varepsilon & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & & \ddots & \varepsilon\\ \varepsilon & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

$$a,\ \varepsilon \geqslant 0.$$

Показать, что все собственные значения матрицы A равны нулю, а собственными значениями матрицы $A + E$ будут n различных значений $\sqrt[n]{a\varepsilon^{n-1}}$. Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, все собственные значения матрицы $A+E$ можно сделать сколь угодно большими, подбирая соответствующее a. Как обстояло бы дело в случае нормальной матрицы A?

Задачи к п.20.4

1. Пусть матрица $A=[a_{ij}]$ удовлетворяет условиям Брауэра следствия 20.4.11 (b) для обратимости. Показать, что $|a_{ii}| > R_i'$ для всех i = 1, ..., n, кроме, быть может, одного значения. Таким образом, условия Брауэра лишь немногим слабее условия (а) теоремы Леви — Деспланка 20.1.10, требующего строгого диагонального преобладания. В какой связи это находится с теоремой 20.1.11?

2. Показать, что обратимость матрицы $A=\begin{bmatrix} 2 & 3\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ можно установить с помощью любого из условий (20.4.11), но ни условие (а) теоремы Леви — Деспланка 20.1.10, ни теорема 20.1.11 для этой цели неприменимы. Что можно сказать о столбцовом варианте последней теоремы?

3. Показать, что всякая неразложимая матрица $A \in M_n$ $(n \geqslant 2)$ слабо неразложима. Привести пример слабо неразложимой матрицы, не являющейся неразложимой.

4. Доказать следствие 20.4.29. *Указание.* Использовать те же рассуждения, что обосновывают теоремы 20.1.10 и 20.2.6.

5. Показать, что матрица $A \in M_n$ тогда и только тогда слабо неразложима, когда ее *нельзя* привести к блочно-треугольной матрице, среди диагональных блоков которой есть блок порядка 1, посредством одновременной перестановки строк и столбцов.

Микромодуль 58
Неравенства для собственных и сингулярных чисел

Материал данного микромодуля базируется на одноименной работе В. Б. Лидского

Ниже рассматриваются неравенства, которым удовлетворяют собственные и сингулярные числа линейных операторов в *n*-мерном унитарном пространстве.

Основное внимание уделяется неравенствам Неймана—Хорна и Вейля (пп. 2 и 3), которые позволяют оценивать собственные числа оператора посредством его сингулярных чисел.

В п. 4 устанавливается максимально-минимальное свойство сумм и произведений собственных чисел эрмитовых операторов, обнаруженное Виландтом и Амир-Моэзом.

Результаты п. 4 используются далее в п. 5 для доказательства неравенств, содержащих оценку собственных и сингулярных чисел операторов $A + B$ и AB.

В п. 6 рассматривается задача о собственных числах суммы и произведения эрмитовых операторов в постановке И. М. Гельфанда.

1. Мажорирующие последовательности

В этом пункте мы остановимся на ряде вспомогательных вопросов, связанных с конечными числовыми последовательностями. Рассмотрим две убывающие последовательности чисел, по *n* элементов в каждой:

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n, \tag{1}$$

$$\alpha'_1 \geqslant \alpha'_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha'_n. \tag{2}$$

Принято говорить, что последовательность (2) мажорируется последовательностью (1), если

$$\alpha_1' + \alpha_2' + \ldots + \alpha_m' \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m \quad (1 \leqslant m \leqslant n-1) \qquad (3)$$

и

$$\alpha_1' + \alpha_2' + \ldots + \alpha_n' = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n. \qquad (3')$$

При выполнении условий (3) и (3') пишут

$$\alpha' < \alpha. \qquad (4)$$

Квадратную матрицу $T = \| t_{ij} \|_1^n$ мы будем в дальнейшем называть двояко стохастической, если матрицы T и T' являются стохастическими, другими словами, если $t_{ij} \geqslant 0$,

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij} = 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad (5)$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} t_{ij} = 1, \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \qquad (5')$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Последовательность* α' *мажорируется последовательностью* α *тогда и только тогда, когда существует двояко стохастическая матрица T такая, что*

$$\alpha' = T\alpha. \qquad (6)$$

Достаточность условия (6) доказывается легко (в формуле (6) под α и α' следует понимать столбцевые матрицы с элементами (1) и (2).) В самом деле,

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k' = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} t_{kj}\alpha_j = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{m} t_{kj} \Big) \alpha_j = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \alpha_j. \qquad (7)$$

Мы положили

$$\omega_j = \sum_{k=1}^{m} t_{kj} \quad (1 \leqslant j \leqslant n). \qquad (8)$$

Легко видеть, что $0 \leqslant \omega_j \leqslant 1$ и

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j = \sum_{k=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} t_{kj} \Big) = m. \qquad (9)$$

Имеем на основании равенства (7)

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k' = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j - \sum_{j=1}^{n} \omega_j \alpha_j =$$
$$= \alpha_1 (1 - \omega_1) + \ldots + \alpha_m (1 - \omega_m) - \omega_{m+1}\alpha_{m+1} - \ldots - \omega_n \alpha_n. \qquad (10)$$

Уменьшая слагаемые в правой части, получаем

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j - \sum_{j=1}^{m} \alpha'_j \geqslant \alpha_m (1 - \omega_1) + \ldots + \alpha_m (1 - \omega_m) - \omega_{m+1}\alpha_m - \ldots$$
$$\ldots - \omega_n\alpha_m = \alpha_m (m - m) = 0. \tag{10'}$$

Следовательно, неравенства (3) имеют место. Так как, далее, при $m = n$ согласно (8) $\omega_j = 1$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, то в силу (7) справедливо и равенство (3'). Таким образом, достаточность условия (6) установлена. Доказательство необходимости этого условия требует известных усилий. Мы проведем его по индукции. В случае $n = 1$ последовательности содержат по одному элементу, $\alpha'_1 = \alpha_1$, и матрица T, очевидно, существует. Предположим, что утверждение справедливо для случая последовательностей из $n - 1$ элементов и рассмотрим две последовательности α' и α, которые связаны соотношением $\alpha' < \alpha$ и состоят из n элементов.

Из условия $\alpha'_1 \leqslant \alpha_1$ и равенства (3') следует, что

$$\alpha_n \leqslant \alpha'_1 \leqslant \alpha_1.$$

Поэтому найдется такое k $(1 \leqslant k \leqslant n - 1)$, при котором

$$\alpha_{k+1} \leqslant \alpha'_1 \leqslant \alpha_k. \tag{11}$$

Следовательно, при некотором τ, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, мы имеем

$$\alpha'_1 = \tau\alpha_k + (1 - \tau)\, \alpha_{k+1}. \tag{12}$$

Наряду с α' и α рассмотрим две последовательности по $n - 1$ элементов в каждой:

$$\alpha'_2, \alpha'_3, \ldots, \alpha'_k, \alpha'_{k+1}, \alpha'_{k+2}, \ldots, \alpha'_n \tag{13}$$

и

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k + \alpha_{k+1} - \alpha'_1, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n. \tag{13'}$$

Обозначим эти последовательности через $\tilde{\alpha}'$ и $\tilde{\alpha}$ соответственно.

Учитывая (11), легко заключить, что элементы последовательности $\tilde{\alpha}$ расположены в порядке убывания. Без труда проверяется также соотношение $\tilde{\alpha}' < \tilde{\alpha}$. Поэтому в силу индуктивного предположения существует такая двояко стохастическая матрица $\tilde{T} = \| t_{ij} \|_1^{n-1}$, что $\tilde{\alpha}' = \tilde{T}\tilde{\alpha}$, или в развернутой записи:

$$\alpha'_{s+1} = t_{s1}\alpha_1 + \ldots + t_{s,\,k-1}\alpha_{k-1} + t_{sk}(\alpha_k + \alpha_{k+1} - \alpha'_1) +$$
$$+ t_{s,\,k+1}\alpha_{k+2} + \ldots + t_{s,\,n-1}\alpha_n \quad (1 \leqslant s \leqslant n - 1).$$

Подставив сюда α'_1 из равенства (12), получим при $1 \leqslant s \leqslant n - 1$:

$$\alpha'_{s+1} = t_{s1}\alpha_1 + \ldots + t_{sk}(1 - \tau)\,\alpha_k + t_{sk}\tau\alpha_{k+1} + t_{s,\,k+1}\alpha_{k+2} + \ldots + t_{s,\,n-1}\alpha_n.$$

Добавляя сюда равенство $\alpha'_1 = \tau\alpha_k + (1-\tau)\,\alpha_{k+1}$, легко убеждаемся в том, что последовательности α' и α связаны двояко стохастической матрицей

$$T = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \tau & 1-\tau & \dots & 0 \\ t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1k}(1-\tau) & t_{1k}\tau & \dots & t_{1,\,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n-1,\,1} & t_{n-1,\,2} & t_{n-1,\,3} & \dots & t_{n-1,\,k}(1-\tau) & t_{n-1,\,k}\tau & \dots & t_{n-1,\,n-1} \end{Vmatrix}.$$

Лемма доказана полностью.

Нам понадобится ниже также следующее предложение:

Лемма 2. *Пусть* $\varphi(t)$ *— непрерывная выпуклая монотонно возрастающая функция.* (Функция $\varphi(t)$ называется выпуклой на интервале, если для любых точек этого интервала $\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\,[\varphi(x)+\varphi(y)]$.).

Пусть

$$\alpha'_1 \geqslant \alpha'_2 \geqslant \dots \geqslant \alpha'_p, \tag{14}$$

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \dots \geqslant \alpha_p \tag{15}$$

и

$$\alpha'_1 + \alpha'_2 + \dots + \alpha'_m \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m \quad (1 \leqslant m \leqslant p). \tag{16}$$

Тогда

$$\varphi(\alpha'_1) + \varphi(\alpha'_2) + \dots + \varphi(\alpha'_p) \leqslant \varphi(\alpha_1) + \varphi(\alpha_2) + \dots + \varphi(\alpha_p). \tag{17}$$

Доказательство. Предположим сначала, что при $m = p$ в соотношении (16) имеет место равенство. Тогда последовательность α' мажорируется последовательностью α и согласно лемме 1

$$\alpha'_s = \sum_{j=1}^{p} t_{sj}\alpha_j, \qquad 1 \leqslant s \leqslant p, \tag{18}$$

где t_{sj} — элементы двояко стохастической матрицы. В силу выпуклости $\varphi(t)$ из равенства (18) следует, что

$$\varphi(\alpha'_s) \leqslant \sum_{j=1}^{p} t_{sj}\varphi(\alpha_j). \tag{19}$$

(Доказательство неравенства (19) для непрерывных выпуклых функций проводится по индукции).

Суммируя неравенства (19), получаем

$$\sum_{s=1}^{p}\varphi(\alpha'_s) \leqslant \sum_{j=1}^{p}\Big(\sum_{s=1}^{p} t_{sj}\Big)\varphi(\alpha_j) = \sum_{j=1}^{p}\varphi(\alpha_j). \tag{20}$$

Таким образом, в указанном случае неравенство (17) выполняется.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть в соотношении (16) при $m = p$ имеет место знак <. Положим

$$\sum_{j=1}^{p}\alpha_j - \sum_{j=1}^{p}\alpha'_j = c > 0.$$

Наряду с последовательностями (14) и (15) рассмотрим две последовательности:

$$\alpha'_1 \geqslant \alpha'_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha'_p \geqslant \alpha'_{p+1} \qquad (21)$$

и

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_p \geqslant \alpha_{p+1}, \qquad (22)$$

где α'_{p+1} и α_{p+1} — произвольные два числа, удовлетворяющие неравенствам (21) и (22) и соотношению

$$\alpha_{p+1} = \alpha'_{p+1} - c. \qquad (23)$$

Легко видеть, что при таком выборе α'_{p+1} и α_{p+1} последовательность (21) мажорируется последовательностью (22), и по доказанному имеем

$$\varphi(\alpha'_1) + \varphi(\alpha'_2) + \ldots + \varphi(\alpha'_p) + \varphi(\alpha'_{p+1}) \leqslant$$
$$\leqslant \varphi(\alpha_1) + \varphi(\alpha_2) + \ldots + \varphi(\alpha_p) + \varphi(\alpha_{p+1}). \qquad (24)$$

Так как, далее, $\varphi(t)$ — монотонно возрастающая функция и

$$\alpha'_{p+1} > \alpha_{p+1},$$

то $\varphi(\alpha'_{p+1}) \geqslant \varphi(\alpha_{p+1})$ и из (24) снова следует неравенство (17).

Лемма доказана полностью.

Замечание. Из наших рассуждений следует, что в том случае, когда последовательность (14) мажорируется последовательностью (15) [т. е. при $m=p$ в (16) достигается равенство], то неравенство (17) справедливо для любой непрерывной выпуклой функции $\varphi(t)$ (возрастание является излишним требованием).

2. Неравенства Неймана—Хорна

Пусть A — линейный оператор, действующий в n-мерном унитарном пространстве R. Собственные числа неотрицательного эрмитова оператора $\sqrt{A^*A}$ (мы будем пользоваться также обозначением $(A^*A)^{1/2}$.) принято называть *сингулярными* числами оператора A.

В настоящем пункте мы установим неравенства, связывающие сингулярные числа произведения двух операторов с сингулярными числами сомножителей.

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_m$ и $z_1, z_2, \ldots, z_m$ — два набора векторов из R. Введем сокращенное обозначение для определителя порядка m, связанного с данными наборами:

$$[(y_i, z_j)] = \begin{vmatrix} (y_1, z_1) & (y_2, z_1) & \dots & (y_m, z_1) \\ (y_1, z_2) & (y_2, z_2) & \dots & (y_m, z_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (y_1, z_m) & (y_2, z_m) & \dots & (y_m, z_m) \end{vmatrix}. \qquad (25)$$

Рассмотрим далее неотрицательный эрмитов оператор $\boldsymbol{H}$, действующий в $\boldsymbol{R}$. Собственные значения оператора $\boldsymbol{H}$ занумеруем в убывающем порядке:

$$h_1 \geqslant h_2 \geqslant \dots \geqslant h_n \geqslant 0. \qquad (26)$$

Справедливо следующее предложение, принадлежащее А. Хорну: **Лемма 3.** *Пусть*

$$x_1, x_2, \dots, x_m \quad (m \leqslant n) \qquad (27)$$

— *произвольный набор векторов из* **R.** *Тогда*

$$[(\boldsymbol{H}x_i, x_j)] \leqslant h_1 h_2 \dots h_m [(x_i, x_j)]. \qquad (28)$$

(Определитель, стоящий в левой части (28), неотрицателен. Действительно, полагая $\boldsymbol{H}^{1/2}x_i = y_i$, получаем

$$[(\boldsymbol{H}x_i, x_j)] = [(\boldsymbol{H}^{1/2}x_i, \boldsymbol{H}^{1/2}x_j)] = [(y_i, y_j)] \geqslant 0.$$)

Для доказательства рассмотрим ортонормированный базис собственных векторов оператора $\boldsymbol{H}$:

$$e_1, e_2, \dots, e_n \qquad (29)$$

и разложим каждый из векторов x_i $(i = 1, 2, \dots, m)$ по базису (29). Вычисляя скалярное произведение, получаем:

$$(\boldsymbol{H}x_i, x_j) = \sum_{s=1}^{n} h_s (x_i, e_s) \overline{(x_j, e_s)} = \sum_{s=1}^{n} h_s (x_i, e_s)(e_s, x_j), \qquad (30)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, m.$$

Равенство (30) позволяет рассматривать матрицу определителя $[(\boldsymbol{H}x_i, x_j)]$ как результат умножения двух прямоугольных матриц размеров $m \times n$ и $n \times m$.

Разлагая определитель по формуле Бине — Коши, получаем в принятых обозначениях для определителей:

$$[(\boldsymbol{H}x_i, x_j)] = \sum_{1 \leqslant s_1 < s_2 < \dots < s_m \leqslant n} [(x_i, h_s e_s)] [(e_s, x_j)]. \qquad (31)$$

Здесь

$$[(x_i, h_s e_s)] = \begin{vmatrix} (x_1, h_{s_1} e_{s_1}) & \dots & (x_m, h_{s_1} e_{s_1}) \\ (x_1, h_{s_2} e_{s_2}) & \dots & (x_m, h_{s_2} e_{s_2}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (x_1, h_{s_m} e_{s_m}) & \dots & (x_m, h_{s_m} e_{s_m}) \end{vmatrix}, \qquad (31')$$

а суммирование ведется по всевозможным наборам натуральных чисел $1 \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_m \leqslant n$.

Оценив правую часть (31) по неравенству Коши — Буняковского, получим:

$$[(\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j)]^2 \leqslant \Big(\sum_{1 \leqslant s_1 < \ldots < s_m \leqslant n} |\, [(\boldsymbol{x}_i, h_s \boldsymbol{e}_s)]\,|^2\Big) \Big(\sum_{1 \leqslant s_1 < \ldots < s_m \leqslant n} |\, [\boldsymbol{e}_s, \boldsymbol{x}_j]\,|^2\Big). \quad (32)$$

Вторая сумма в правой части неравенства (32) равна определителю Грама $[(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j)]$. В этом легко убедиться, положив в формуле (31) $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{E}$, где $\boldsymbol{E}$ — единичный оператор.

В первой сумме правой части (32) вынесем из каждого определителя (31′) произведение $h_{s_1} h_{s_2} \ldots h_{s_m}$ и заменим его большим $h_1 h_2 \ldots h_m$. В результате получим:

$$[(\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j)]^2 \leqslant h_1^2 h_2^2 \ldots h_m^2\, [(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j)]^2.$$

Извлекая из обеих частей этого неравенства квадратные корни, мы устанавливаем справедливость неравенства (28). Докажем далее следующий факт.

Лемма 4. *Пусть* $\boldsymbol{K}$ *— произвольный оператор в* $\boldsymbol{R}$ *и*

$$\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \ldots \geqslant \varkappa_n \quad (33)$$

— его сингулярные числа. Тогда для произвольного набора векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ $(m \leqslant n)$ *справедливо неравенство*

$$[(\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}_j)] \leqslant \varkappa_1^2 \varkappa_2^2 \ldots \varkappa_m^2\, [(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j)]. \quad (34)$$

Неравенство (34) следует из леммы 3 при $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{K}^*\boldsymbol{K}$.

Установим еще одно вспомогательное предложение.

Лемма 5. *Пусть* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$ *— линейные операторы в* $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$, *и пусть* α_s, β_s *и* γ_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ *— сингулярные числа соответственно* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *и* $\boldsymbol{C}$, *занумерованные в убывающем порядке. Тогда при любом* $m \leq n$ *справедливы неравенства*

$$\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_m \leqslant \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m. \quad (35)$$

(При $m = n$ в формуле (35) достигается равенство. Действительно, имеем $\boldsymbol{C}^*\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$, отсюда $|\boldsymbol{C}^*\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B}|$. Поскольку определитель матрицы оператора равен произведению его собственных чисел, то $\gamma_1^2 \gamma_2^2 \ldots \gamma_n^2 = \alpha_1^2 \alpha_2^2 \ldots \alpha_n^2 \beta_1^2 \beta_2^2 \ldots \beta_n^2$.)

Для доказательства рассмотрим ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ собственных векторов оператора $\boldsymbol{C}^*\boldsymbol{C}$. Последовательно применяя (34), получаем

$$[(\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{C}\boldsymbol{e}_j)] = [(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_j)] \leqslant \alpha_1^2\alpha_2^2 \ldots \alpha_m^2 [(\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_j)] \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_1^2\alpha_2^2 \ldots \alpha_m^2\beta_1^2\beta_2^2 \ldots \beta_m^2 [(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)]. \quad (36)$$

С другой стороны, поскольку $\boldsymbol{e}_i\ (1 \leqslant i \leqslant m)$ — собственные векторы $\boldsymbol{C}^*\boldsymbol{C}$, мы имеем:

$$[(\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{C}\boldsymbol{e}_j)] = [(\boldsymbol{C}^*\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)] = \gamma_1^2\gamma_2^2 \ldots \gamma_m^2 [(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)]. \quad (37)$$

Следовательно, (35) имеет место.

Мы в состоянии теперь доказать следующую теорему, которая является основной целью настоящего параграфа.

Теорема 1 (Нейман — Хорн. *Пусть* ***А, В*** *и* ***С*** *— линейные операторы в n-мерном унитарном пространстве* ***R****. Пусть* ***С = АВ*** *и пусть* α_s, β_s *и* γ_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ *— сингулярные числа операторов* ***А, В*** *и* ***С****, занумерованные в порядке убывания.*

Пусть f(x) — непрерывная при $x \geqslant 0$ *функция такая, что* $\varphi(t) = f(e^t)$ *— монотонно возрастающая выпуклая функция параметра t. Тогда при всех* $m \leqslant n$ *справедливы неравенства*

$$\sum_{s=1}^{m} f(\gamma_s) \leqslant \sum_{s=1}^{m} f(\alpha_s\beta_s). \quad (38)$$

Доказательство. Пусть сначала операторы ***А*** и ***В*** невырождены, тогда все числа α_s, β_s и γ_s положительны. Логарифмируя неравенства (35), получаем

$$\sum_{s=1}^{m} \ln \gamma_s \leqslant \sum_{s=1}^{m} \ln(\alpha_s\beta_s), \quad 1 \leqslant m \leqslant n. \quad (39)$$

На основании леммы 2 имеем

$$\sum_{s=1}^{m} \varphi(\ln \gamma_s) \leqslant \sum_{s=1}^{m} \varphi(\ln \alpha_s\beta_s), \quad 1 \leqslant m \leqslant n. \quad (40)$$

Так как $\varphi(t) = f(e^t)$, то отсюда следует (38). В случае вырожденных операторов неравенства (38) устанавливаются по непрерывности.

Замечание 1°. В случае $f(x) = x^\sigma\ (\sigma \geqslant 0)$ получаем

$$\sum_{s=1}^{m} \gamma_s^\sigma \leqslant \sum_{s=1}^{m} \alpha_s^\sigma\beta_s^\sigma \quad (1 \leqslant m \leqslant n). \quad (41)$$

В таком виде неравенства (38) встречаются в приложениях чаще всего.

Замечание 2°. При *m* = *n* неравенство (39) превращается в равенство. Поэтому при *m* = *n* неравенство (40) справедливо для любой непрерывной выпуклой функции $\varphi(t)$ (см. замечание к лемме 2).

В частности, неравенство (41) при *m* = *n* справедливо и для $\sigma < 0$.

Замечание 3°. Пусть

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$$

— сингулярные числа оператора ***А*** и пусть

$$\alpha_{l,1} \geqslant \alpha_{l,2} \geqslant \ldots \geqslant \alpha_{l,n}$$

— сингулярные числа оператора A^l (l — натуральное число). Тогда при любом $\sigma \geqslant 0$ и любом $1 \leqslant m \leqslant n$

$$\sum_{s=1}^{m} \alpha_{l,s}^{\sigma} \leqslant \sum_{s=1}^{m} \alpha_s^{\sigma l}. \qquad (42)$$

Неравенства (42) докажем индукцией по l. При l = 1 соотношение (42) очевидно; пусть оно выполняется для l — 1. Так как $A^l = A^{l-1} \cdot A$, то согласно (41)

$$\sum_{s=1}^{m} \alpha_{l,s}^{\sigma} \leqslant \sum_{s=1}^{m} \alpha_{l-1,s}^{\sigma} \alpha_s^{\sigma}, \quad 1 \leqslant m \leqslant n. \qquad (43)$$

Применяя к правой части (43) неравенство Гёльдера с

$$p = \frac{l}{l-1} \text{ и } q = l \quad (p^{-1} + q^{-1} = 1),$$

получаем

$$\sum_{s=1}^{m} \alpha_{l,s}^{\sigma} \leqslant \left(\sum_{s=1}^{m} \alpha_{l-1,s}^{p\sigma}\right)^{1/p} \left(\sum_{s=1}^{m} \alpha_s^{q\sigma}\right)^{1/q}. \qquad (44)$$

По предположению индукции, имеем для первой суммы в правой части (44):

$$\left(\sum_{s=1}^{m} \alpha_{l-1,s}^{p\sigma}\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{s=1}^{m} \alpha_s^{p\sigma(l-1)}\right)^{1/p} = \left(\sum_{s=1}^{m} \alpha_s^{l\sigma}\right)^{1-\frac{1}{l}}.$$

Учитывая, что во второй сумме правой части (44) $q = l$, легко получаем из (44):

$$\sum_{s=1}^{m} \alpha_{l,s}^{\sigma} \leqslant \sum_{s=1}^{m} \alpha_s^{l\sigma},$$

что и требовалось доказать.

В частности, при σ = 2 и $m = n$ из формулы (42) следует, что

$$\mathrm{Sp}\,(A^{*l}A^l) \leqslant \mathrm{Sp}\,(A^*A)^l. \qquad (45)$$

3. Неравенства Вейля

В настоящем параграфе мы выведем принадлежащие Г. Вейлю неравенства, которые позволяют оценивать собственные числа линейного оператора A посредством его сингулярных чисел. Нам понадобится следующее предложение:

Лемма 6. *Пусть* λ_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ *— собственные числа линейного оператора* ***A****, занумерованные так, что*

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|, \qquad (46)$$

и пусть

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n \tag{47}$$

— *сингулярные числа этого оператора. Тогда при любом $m \leq n$ справедливы неравенства*

$$|\lambda_1||\lambda_2| \ldots |\lambda_m| \leqslant \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m. \tag{48}$$

Для доказательства рассмотрим ортонормированный базис

$$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n, \tag{49}$$

в котором матрица оператора A имеет треугольный вид. Существование такого базиса устанавливается теоремой Шура.

Мы воспользуемся леммой 4 и двумя способами оценим определитель

$$[(\boldsymbol{Ae}_k, \boldsymbol{Ae}_l)]_1^m. \tag{50}$$

Пусть a_{ij} — элементы матрицы оператора A в базисе (49). Имеем $\boldsymbol{Ae}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{e}_i$. Поскольку a_{ij}=0 при $i > j$, то

$$\boldsymbol{Ae}_j = \sum_{i=1}^{j} a_{ij}\boldsymbol{e}_i \tag{51}$$

и

$$(\boldsymbol{Ae}_k, \boldsymbol{Ae}_l) = \Big(\sum_{i=1}^{k} a_{ik}\boldsymbol{e}_i, \sum_{i=1}^{l} a_{il}\boldsymbol{e}_i\Big) = \sum_{i=1}^{q} a_{ik}\bar{a}_{il} \quad (q = \min(k, l)). \tag{52}$$

Формула (52) позволяет записать определитель (50) в виде следующего произведения двух определителей:

$$[(\boldsymbol{Ae}_k, \boldsymbol{Ae}_l)]_1^m = \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \bar{a}_{13} & \bar{a}_{23} & \bar{a}_{33} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{a}_{1m} & \bar{a}_{2m} & \bar{a}_{3m} & \ldots & \bar{a}_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2m} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix}. \tag{53}$$

Поскольку $a_{ii} = \lambda_i$ и оба определителя в правой части (53) равны произведению диагональных элементов, то

$$[(\boldsymbol{Ae}_k, \boldsymbol{Ae}_l)]_1^m = |\lambda_1|^2 |\lambda_2|^2 \ldots |\lambda_m|^2. \tag{54}$$

С другой стороны, в силу леммы 4

$$[(\boldsymbol{Ae}_k, \boldsymbol{Ae}_l)]_1^m \leqslant \sigma_1^2\alpha_2^2 \ldots \alpha_m^2, \tag{55}$$

так как $[(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l)]_1^m = 1$

Неравенства (48) следуют теперь из соотношений (54) и (55). Лемма 6 доказана.

Эту лемму можно доказать иначе, если воспользоваться теоремой КрокенераI, согласно которой произведение $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m$ является собственным числом ассоциированной матрицы $\mathfrak{A}_m$ для матрицы *A*. Пусть *x* — соответствующий собственный вектор $\mathfrak{A}_m$; умножая равенство $\mathfrak{A}_m x = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m x$ на сопряженное, получаем

$$|\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m|^2 = \frac{x^*\mathfrak{A}_m^*\mathfrak{A}_m x}{x^*x}.$$

Матрица $\mathfrak{A}_m^*\mathfrak{A}_m$ является ассоциированной для *A*A* и, следовательно, наибольшее собственное число $\mathfrak{A}_m^*\mathfrak{A}_m$ равно $\alpha_1^2\alpha_2^2\ldots\alpha_m^2$. Поскольку дробь в правой части последнего равенства не превосходит $\alpha_1^2\alpha_2^2\ldots\alpha_m^2$, то мы приходим к неравенствам (48).

Используя неравенства (48), мы сейчас докажем следующую теорему:

Теорема 2. *Пусть A — линейный оператор и пусть* λ_s *и* $\alpha_s\,(s=1,2,\ldots,n)$ *— его собственные и сингулярные числа, занумерованные так же, как и в лемме* 6. *Пусть f(x)* — *непрерывная при* $x \geqslant 0$ *функция такая, что* $\varphi(t) = f(e^t)$ *— монотонно возрастающая выпуклая функция параметра t. Тогда при любом m≤n справедливы неравенства*

$$\sum_{s=1}^{m} f(|\lambda_s|) \leqslant \sum_{s=1}^{m} f(\alpha_s). \qquad (56)$$

Доказательство. Если оператор *A* невырожден, то согласно (48) получаем:

$$\sum_{s=1}^{m} \ln|\lambda_s| \leqslant \sum_{s=1}^{m} \ln\alpha_s \qquad (57)$$

при всех $m \leqslant n$. Отсюда на основании леммы 2 уже следуют неравенства (56).

Если оператор *A* вырожден, то неравенства (56) могут быть получены по непрерывности. Теорема доказана.

Замечание 1°. При *m* = *n* неравенство (48) превращается в равенство, так как в этом случае равенство имеет место в формуле (55). Следовательно, при *m* = *n* равенство достигается и в (57). Используя замечания к лемме 2, мы можем заключить, что $\sum_{s=1}^{n} f(|\lambda_s|) \leqslant \sum_{s=1}^{n} f(\alpha_s)$ для любой функции *f(x),* если только функция $\varphi(t) = f(e^t)$ выпукла. Возрастание оказывается излишним требованием. Например, при любом вещественном σ

$$\sum_{s=1}^{n} |\lambda_s|^\sigma \leqslant \sum_{s=1}^{n} \alpha_s^\sigma. \qquad (58)$$

Замечание 2°. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \ln(1 + xz), \quad x \geqslant 0, \tag{59}$$

где z фиксировано и положительно. Легко проверить, что функция (59) удовлетворяет всем условиям теоремы 2. Поэтому при любом $m,\ 1 \leqslant m \leqslant n$, имеем:

$$\sum_{s=1}^{m} \ln(1 + |\lambda_s| z) \leqslant \sum_{s=1}^{m} \ln(1 + \alpha_s z).$$

Потенцируя, получаем неравенство

$$\prod_{s=1}^{m} (1 + |\lambda_s| z) \leqslant \prod_{s=1}^{m} (1 + \alpha_s z), \tag{60}$$

которое используется в теории интегральных операторов.

4. Максимально-минимальные свойства сумм и произведений собственных чисел эрмитовых операторов

В настоящем параграфе мы получим обобщение ряда результатов, относящихся к экстремальным свойствам собственных чисел эрмитовых операторов .

1°. Для дальнейшего удобно придать известной теореме, устанавливающей основное максимально-минимальное свойство собственных чисел, несколько иную формулировку.

Пусть $\boldsymbol{A}$ — эрмитов оператор, действующий в n-мерном унитарном пространстве $\boldsymbol{R}$, и пусть

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \tag{61}$$

— его собственные числа. Обозначим через $\boldsymbol{R}_q$ q-мерное подпространство пространства $\boldsymbol{R}$.

Справедлива следующая формула:

$$\lambda_q = \max_{\boldsymbol{R}_q} \min_{\substack{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}_q \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 1}} (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}). \tag{62}$$

В этой формуле минимум берется по всем нормированным векторам $\boldsymbol{x}$, принадлежащим некоторому фиксированному подпространству $\boldsymbol{R}_q$, а затем берется максимум по всем q-мерным подпространствам. Всякое q-мерное подпространство $\boldsymbol{R}_q$ может быть рассмотрено как совокупность векторов, удовлетворяющих некоторой системе n — q независимых линейных уравнений

$$L_k(x) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n - q \tag{63}$$

Если ввести эрмитову форму $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \equiv \sum_{s=1}^{n} |x_s|^2$ и выбирать лишь нормированные векторы x, то тогда $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 1$ и

$$\mu\left(\frac{A}{B}, L_1, L_2, \ldots, L_{n-q}\right) = \min_{\substack{x \in R_q \\ (x,x)=1}} (Ax, x). \qquad (64)$$

В силу известной формулы мы получаем:

$$\lambda_{(n-q+1)} = \max_{R_q} \min_{\substack{x \in R_q \\ (x,x)=1}} (Ax, x), \qquad (65)$$

где $n—q+1$ — номер собственного числа оператора A (в возрастающем порядке). Легко сообразить, что при новой нумерации $\lambda_{(n-q+1)} = \lambda_q$. Таким образом, соотношение (62) действительно имеет место. Легко также видеть, что согласно (62)

$$\lambda_1 = \max_{(x,x)=1} (Ax, x), \quad (66) \quad \lambda_n = \min_{(x,x)=1} (Ax, x). \qquad (66')$$

Непосредственным обобщением равенства (66) является следующее предложение, принадлежащее Фаню.

Теорема 3. *Для любого эрмитова оператора A с собственными числами* (61) *и любого $m \leq n$ справедлива формула*

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m = \max_{(x_i, x_j)=\delta_{ij}} (Ax_i, x_i). \qquad (67)$$

Максимум в правой части (67) берется по всем системам взаимно ортогональных нормированных векторов

$$x_1, x_2, \ldots, x_m. \qquad (68)$$

Для доказательства рассмотрим ортонормированный базис собственных векторов оператора A:

$$e_1, e_2, \ldots, e_n.$$

Полагая $x_i = \sum_{s=1}^{n} (x_i, e_s)\, e_s$, легко найдем:

$$(Ax_i, x_i) = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s \,|\,(x_s, e_s)\,|^2. \qquad (69)$$

Расширим систему (68) до ортонормированного базиса в R и заметим, что

$$\sum_{s=1}^{n} |\,(x_i, e_s)\,|^2 = (x_i, x_i) = 1, \qquad (70)$$

$$\sum_{i=1}^{n} |\,(x_i, e_s)\,|^2 = (e_s, e_s) = 1. \qquad (71)$$

Матрица $\left\|\, |(x_i, e_s)|^2 \,\right\|_1^n$, таким образом, является двояко стохастической. Из равенств (69) следует, что последовательность

$$(Ax_i, x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (72)$$

связана с последовательностью (61) двояко стохастической матрицей. На основании леммы 1 (см. (10')) мы заключаем, что

$$\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i) \leqslant \sum_{i=1}^{m}\lambda_i. \qquad (73)$$

Так как, далее, при $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{e}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ в формуле (73) достигается равенство, то теорема доказана.

Если наряду с оператором $\boldsymbol{A}$ ввести оператор $-\boldsymbol{A}$, собственные числа которого, очевидно, равны $-\lambda_s$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$, то на основании доказанной теоремы можно легко заключить, что

$$\lambda_n + \lambda_{n-1} + \ldots + \lambda_{n-m+1} = \min_{(x_i, x_j)=\delta_{ij}} \sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i). \qquad (74)$$

Эта формула обобщает равенство (66').

Замечание. Из неравенств (73) на основании леммы 2 заключаем, что для любой непрерывной выпуклой возрастающей функции φ*(t)* и любого *m* имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{m}\varphi(a_{ii}) \leqslant \sum_{i=1}^{m}\varphi(\lambda_i),$$

где $a_{ii} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i)$.

2°. Дальнейшее обобщение формулы (62) связано с установлением максимально-минимальных свойств сумм собственных чисел эрмитова оператора $\boldsymbol{A}$ вида

$$\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \ldots + \lambda_{i_l}, \qquad (75)$$

где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_l \leqslant n$ — некоторый набор натуральных чисел. Соответствующая теорема принадлежит Г. Виландту.

Сохраняя в основном ход рассуждений Виландта, мы докажем более общее предложение, установленное Амир Моэзом. Этим предложением мы воспользуемся и при оценке произведений собственных и сингулярных чисел.

Предварительно введем некоторые обозначения. Пусть

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n \qquad (76)$$

— фиксированный набор *m* натуральных чисел. Рассмотрим некоторую цепочку последовательно вложенных подпространств пространства $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R}_{i_1} \subset \boldsymbol{R}_{i_2} \subset \ldots \subset \boldsymbol{R}_{i_m}, \qquad (77)$$

где индекс указывает размерность подпространства. Пусть, далее,

$$\boldsymbol{x}_{i_1}, \boldsymbol{x}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{x}_{i_m} \qquad (78)$$

— система *m* взаимно ортогональных и нормированных векторов:

$$(\boldsymbol{x}_{i_k}, \boldsymbol{x}_{i_{k'}}) = \delta_{kk'}, \qquad (79)$$

таких, что

$$\boldsymbol{x}_{i_k} \in \boldsymbol{R}_{i_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, m). \qquad (80)$$

Условимся называть систему векторов (78) системой, *подчиненной* цепочке (77). Сформулируем и докажем теперь следующую лемму:
Лемма 7. *Пусть* ***А*** *— эрмитов оператор с собственными числами*

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n, \tag{61}$$

и пусть

$$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_m) \tag{81}$$

— монотонно возрастающая по каждому аргументу функция т вещественных переменных $(m \leqslant n)$(*) Предполагается, что область определения функции $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ содержит куб
$\alpha \leqslant t_s \leqslant \beta, \quad s = 1, 2, \ldots, m,$ где α и β — границы спектра оператора ***А***.). *Пусть* (77) *— некоторая цепочка подпространств, построенная по фиксированному набору* (76), *и пусть*

$$x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m} \tag{82}$$

— подчиненная этой цепочке система векторов. Обозначим через $\boldsymbol{P}_m$ *оператор проектирования на подпространство*

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}], \tag{83}$$

натянутое на векторы (82), *и пусть* $\tilde{\lambda}_1 \geqslant \tilde{\lambda}_2 \geqslant \ldots \geqslant \tilde{\lambda}_m$ — *собственные числа эрмитова оператора*

$$\boldsymbol{P}_m \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}_m, \tag{83'}$$

рассматриваемого в подпространстве (83). *Тогда*

$$\varphi(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \ldots, \lambda_{i_m}) = \max_{R_{i_1} \subset R_{i_2} \subset \ldots \subset R_{i_m}} \ \min_{x_{i_k} \in R_{i_k}} \varphi(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \ldots, \tilde{\lambda}_m). \tag{84}$$

Поясним, что в формуле (84) сначала выбирается некоторая цепочка подпространств и находится минимум по всем подчиненным ей системам векторов; после этого берется максимум по всевозможным цепочкам.

Доказательство формулы (84), очевидно, сводится к доказательству следующих двух утверждений.

А. *К любой цепочке* (77) *всегда можно подобрать такую подчиненную систему* (78), *что*

$$\varphi(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \ldots, \tilde{\lambda}_m) \leqslant \varphi(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \ldots, \lambda_{i_m}). \tag{85}$$

В. *Существует такая цепочка* (77), *что для любой подчиненной ей системы векторов выполняется неравенство*

$$\varphi(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \ldots, \lambda_{i_m}) \leqslant \varphi(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \ldots, \tilde{\lambda}_m). \tag{86}$$

Докажем сначала утверждение В. Пусть

$$e_1, e_2, \ldots, e_n \tag{87}$$

— базис собственных векторов оператора ***А***, соответствующих собственным числам (61).

Выберем следующую цепочку подпространств:

$$\boldsymbol{R}_{i_k} = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_k}], \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{88}$$

и покажем, что в этом случае неравенство (86) выполняется всегда. Пусть (78) — система векторов, подчиненная цепочке (88), и пусть $\boldsymbol{S}_l$ — некоторое l-мерное подпространство, принадлежащее оболочке (83). Как мы видели [см. (62)], при любом выборе $\boldsymbol{S}_l$

$$\tilde{\lambda}_l \geqslant \min_{\substack{x \in S_l \\ (x, x)=1}} (\boldsymbol{P}_m \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}_m \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}). \tag{89}$$

Заметив, что при $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}_l$ $(\boldsymbol{P}_m \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}_m \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{A} \boldsymbol{P}_m \boldsymbol{x}, \boldsymbol{P}_m \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, положим

$$\boldsymbol{S}_l = [\boldsymbol{x}_{i_1}, \boldsymbol{x}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{x}_{i_l}].$$

Легко видеть, что при этом $\boldsymbol{S}_l \subset \boldsymbol{R}_l$, вследствие чего мы получаем:

$$\min_{\substack{x \in S_l \\ (x, x)=1}} (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqslant \min_{\substack{x \in R_l \\ (x, x)=1}} (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}). \tag{90}$$

Но минимум в правой части (90) достигается на собственном векторе e_{il} и равен λ_{i_l}. Сравнивая (90) и (89), мы заключаем, что

$$\tilde{\lambda}_l \geqslant \lambda_{i_l}.$$

Отсюда в силу возрастания функции (81) следует (86). Таким образом, утверждение В доказано.

Утверждение А доказывается труднее. Мы проведем его по индукции, предполагая, что для операторов, действующих в (n — 1)-мерном пространстве, это утверждение справедливо. Заметим, что в случае n = 1 (пространство одномерно) $\lambda_{i_1} = \tilde{\lambda}_{i_1}$ и неравенство (85) имеет место для любой функции $\varphi(t)$.

Переходя к случаю n-мерного пространства, мы можем считать, что $m < n$. Действительно, при $m = n$ подпространство (83) совпадает со всем пространством, $\tilde{\lambda}_s = \lambda_s \ (s = 1, 2, \ldots, n)$, и, следовательно, неравенство (85) справедливо.

При $m < n$ мы разберем два подслучая:

1) Пусть $i_m < n$, тогда существует некоторое (n — 1)-мерное подпространство $\tilde{\boldsymbol{R}}_{n-1}$, содержащее все подпространства цепочки (77). Пусть — $\boldsymbol{P}_{n-1}$ оператор проектирования на подпространство $\tilde{\boldsymbol{R}}_{n-1}$. Введем в $\tilde{\boldsymbol{R}}_{n-1}$ эрмитов оператор

$$\boldsymbol{A}_{n-1} = \boldsymbol{P}_{n-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}_{n-1}. \tag{91}$$

Ясно, что для всех $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}_{n-1}$ имеет место равенство $(\boldsymbol{A}_{n-1}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$. Если $\lambda'_s \ (s = 1, 2, \ldots, n-1)$ — собственные числа оператора $\boldsymbol{A}_{n-1}$, то в силу известной теоремы

$$\lambda_s \geqslant \lambda'_s \quad (s = 1, 2, \ldots, n-1). \qquad (92)$$

По индуктивному предположению, для любой цепочки (77) в $\tilde{\boldsymbol{R}}_{n-1}$ найдется подчиненная ей система векторов (78) таких, что

$$\varphi(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \ldots, \tilde{\lambda}_m) \leqslant \varphi(\lambda'_{i_1}, \lambda'_{i_2}, \ldots, \lambda'_{i_m}).$$

Отсюда в силу (92) сразу следует, что неравенство (85) в рассматриваемом случае действительно имеет место.

2) Рассмотрим теперь случай $i_m = n \ (m < n)$. Пусть

$$i_m = n, i_{m-1} = n-1, \ldots, i_{m-p} = n-p \quad (p \geqslant 0) \qquad (93)$$

— последние элементы набора (76), и пусть число $n - p - 1$ уже не принадлежит набору (76).

Обозначим через $i_{m'}$ наибольший из оставшихся номеров набора (76). Очевидно,

$$i_{m'} \leqslant n - p - 2. \qquad (94)$$

Может случиться, что номера (93) исчерпывают весь набор (76), тогда для сохранения единообразия мы будем считать $i_{m'} = 0$, а соответствующее подпространство — $\boldsymbol{R}_{i_{m'}}$ состоящим из нуль-вектора.

Цепочка подпространств (77) в рассматриваемом случае может быть записана следующим образом:

$$\boldsymbol{R}_{i_1} \subset \boldsymbol{R}_{i_2} \subset \ldots \subset \boldsymbol{R}_{i_{m'}} \subset \boldsymbol{R}_{n-p} \subset \boldsymbol{R}_{n-p+1} \subset \ldots \subset \boldsymbol{R}_n. \qquad (95)$$

Пусть

$$\boldsymbol{e}_{n-p}, \boldsymbol{e}_{n-p+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n \qquad (96)$$

— собственные векторы оператора $\boldsymbol{A}$, занумерованные так же, как и в (87). Обозначим через $\tilde{\boldsymbol{R}}_{n-1}$ $(n - 1)$-мерное подпространство, содержащее векторы (96) (их всего $p + 1$) и подпространство $\boldsymbol{R}_{i_{m'}}$. Такое подпространство действительно существует, ибо

$$p + 1 + i_{m'} \leqslant p + 1 + n - p - 2 = n - 1.$$

Наряду с цепочкой (95) рассмотрим цепочку

$$\boldsymbol{R}_{i_1} \subset \boldsymbol{R}_{i_2} \subset \ldots \subset \boldsymbol{R}_{i_{m'}} \subset \tilde{\boldsymbol{R}}_{n-p-1} \subset \tilde{\boldsymbol{R}}_{n-p} \subset \ldots \subset \tilde{\boldsymbol{R}}_{n-1}, \qquad (97)$$

которая получается из цепочки (95), если каждое подпространство в (95) заменить его пересечением с подпространством $\tilde{\boldsymbol{R}}_{n-1}$. Ясно, что первые m' подпространств цепочки (95) при этом не изменяются, так как они содержатся в $\tilde{\boldsymbol{R}}_{n-1}$; последующие подпространства цепочки уменьшат свою размерность на единицу.

Если размерность пересечения не уменьшается, то, очевидно, пересечение всегда можно сузить так, чтобы подпространства в цепочке (97) имели указанные размерности.

Введем снова оператор $\boldsymbol{A}_{n-1}$на подпространстве $\tilde{\boldsymbol{R}}_{n-1}$ по формуле (91). По индуктивному предположению, к цепочке (97) можно подобрать подчиненную систему векторов

$$\boldsymbol{x}_{i_1}, \boldsymbol{x}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{x}_{i_{m'}}, \boldsymbol{x}_{n-p-1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1} \qquad (98)$$

таких, что

$$\varphi(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \ldots, \tilde{\lambda}_m) \leqslant \varphi(\lambda'_{i_1}, \lambda'_{i_2}, \ldots, \lambda'_{i_{m'}}, \lambda'_{n-p-1}, \ldots, \lambda'_{n-1}). \qquad (99)$$

В правой части штрихами обозначены собственные числа оператора $\boldsymbol{A}_{n-1}$. Согласно (92) имеем:

$$\lambda_{i_1} \geqslant \lambda'_{i_1}, \lambda_{i_2} \geqslant \lambda'_{i_2}, \ldots, \lambda_{i_m} \geqslant \lambda'_{i_{m'}}. \qquad (100)$$

Разумеется, на основании (92) мы не можем утверждать, что

$$\lambda_{n-p} \geqslant \lambda'_{n-p-1}, \lambda_{n-p+1} \geqslant \lambda'_{n-p}, \ldots, \lambda_n \geqslant \lambda'_{n-1}. \qquad (100')$$

Однако поскольку векторы (96) лежат в подпространстве $\tilde{\boldsymbol{R}}_{n-1}$, они являются собственными векторами оператора $\boldsymbol{A}_{n-1}$. Соответствующие им собственные числа $\lambda_{n-p} \geqslant \lambda_{n-p+1} \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ во всяком случае не меньше, чем числа $\lambda'_{n-p+1} \geqslant \lambda'_{n-p} \geqslant \ldots \geqslant \lambda'_{n-p}$, которые являются наименьшими собственными числами оператора $\boldsymbol{A}_{n-1}$. Таким образом, (100') имеет место, и в силу (100) и (100') мы заключаем, что

$$\varphi(\lambda'_{i_1}, \lambda'_{i_2}, \ldots, \lambda'_{i_m}, \lambda'_{n-p-1}, \lambda'_{n-p}) \leqslant \varphi(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \ldots, \lambda_{i_{m'}}, \lambda_{n-p}, \ldots, \lambda_n). \qquad (101)$$

Это неравенство вместе с (99) приводит к доказательству утверждения А, поскольку система векторов (98) подчинена не только цепочке (97), но и исходной цепочке (95). Таким образом, лемма 7 доказана полностью.

Из доказанной леммы вытекает следующая теорема:

Теорема 4. *Пусть А — эрмитов оператор с собственными числами* $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$. *Пусть*

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n \qquad (102)$$

— фиксированный набор п натуральных чисел; тогда

$$\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \ldots + \lambda_{i_m} = \max_{\boldsymbol{R}_{i_1} \subset \boldsymbol{R}_{i_2} \subset \ldots \subset \boldsymbol{R}_{i_m}} \min_{\boldsymbol{x}_{i_k} \in \boldsymbol{R}_{i_k}} \sum_{k=1}^{m} (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{i_k}, \boldsymbol{x}_{i_k}), \qquad (103)$$

где минимум берется по всем системам векторов $\boldsymbol{x}_{i_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, *подчиненным цепочке* $\boldsymbol{R}_{i_1} \subset \boldsymbol{R}_{i_2} \subset \ldots \subset \boldsymbol{R}_{i_m}$.

Для доказательства заметим, что матрица оператора $\boldsymbol{P}_m\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_m$ (см. лемму 7) в ортонормированном базисе (82) имеет вид

$$\| (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{i_k}, \boldsymbol{x}_{i_{k'}}) \|_{k, k'=1}^{m},$$

так как

$$(\boldsymbol{P}_m\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_m\boldsymbol{x}_{i_k}, \boldsymbol{x}_{i_{k'}}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{i_k}, \boldsymbol{x}_{i_{k'}}).$$

Поэтому сумма, стоящая в правой части (103), есть след оператора $\boldsymbol{P}_m\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_m$ и, значит, равна $\tilde{\lambda}_1+\tilde{\lambda}_2+\ldots+\tilde{\lambda}_m$. Формула (103) после этих замечаний следует из леммы 7 при

$$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_m) \equiv t_1+t_2+\ldots+t_m.$$

Теорема 4 доказана.

Укажем, что формула (62), равно как и (67) и (74), является частным случаем теоремы 4.

В заключение установим следующее утверждение, тоже непосредственно вытекающее из леммы 7.

Теорема 5. *Пусть A — неотрицательно определенный эрмитов оператор, и пусть*

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$$

— его собственные значения. Пусть $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n$ *— фиксированный набор т натуральных чисел. Тогда*

$$\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_m} = \max_{\boldsymbol{R}_{i_1}\subset\boldsymbol{R}_{i_2}\subset\ldots\subset\boldsymbol{R}_{i_m}} \min_{x_{i_k}\in\boldsymbol{R}_{i_k}} \operatorname{Det}\left\|(\boldsymbol{A}x_{i_k}, x_{i_{k'}})\right\|_{k,k'=1}^{m}, \tag{104}$$

где минимум берется по всем системам векторов, подчиненным цепочке

$$\boldsymbol{R}_{i_1}\subset\boldsymbol{R}_{i_2}\subset\ldots\subset\boldsymbol{R}_{i_m}.$$

Для доказательства теоремы достаточно в формуле (84) положить

$$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_m) = t_1t_2\ldots t_m \qquad (t_s \geqslant 0,\ s=1, 2, \ldots, m)$$

и заметить, что стоящий в правой части (104) определитель равен $\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2\ldots\tilde{\lambda}_m$.

Теоремами 4 и 5 мы воспользуемся в следующем параграфе при выводе неравенств для сумм и произведений собственных и сингулярных чисел.

5. Неравенства для собственных и сингулярных чисел сумм и произведений операторов

Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — два эрмитовых оператора в n-мерном унитарном пространстве $\boldsymbol{R}$, собственные числа которых известны. Теоремы предыдущего параграфа дают возможность оценить суммы вида (75) собственных чисел оператора $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$. Близкие по характеру оценки мы получим и в случае произведения операторов. Мы начнем со следующего предложения.

Теорема 6. *Пусть A, B и C — эрмитовы операторы такие, что* $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$; *пусть* λ_s, μ_s *и* ν_s $(s=1, 2, \ldots, n)$ *— собственные числа* *операторов* ***A, B*** *и* ***C*** *соответственно, занумерованные в порядке убывания.*

Тогда для любого набора т натуральных чисел

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n \tag{105}$$

справедливо неравенство

$$\nu_{i_1} + \nu_{i_2} + \ldots + \nu_{i_m} \leqslant \lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \ldots + \lambda_{i_m} + \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_m. \tag{106}$$

При т = п в формуле (106) *достигается равенство.*

Доказательство. По заданному набору (105) выберем такую цепочку подпространств

$$\boldsymbol{R}_{i_1} \subset \boldsymbol{R}_{i_2} \subset \ldots \subset \boldsymbol{R}_{i_m}, \tag{107}$$

чтобы для любой системы векторов

$$\boldsymbol{x}_{i_1}, \boldsymbol{x}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{x}_{i_m}, \tag{108}$$

подчиненной цепочке (107), выполнялось неравенство

$$\nu_{i_1} + \nu_{i_2} + \ldots + \nu_{i_m} \leqslant \sum_{k=1}^{m} (\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_{i_k}, \boldsymbol{x}_{i_k}). \tag{109}$$

Такая цепочка (107) найдется в силу теоремы 4 (ср. лемму 7).

Заметив, что

$$\sum_{k=1}^{m} (\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_{i_k}, \boldsymbol{x}_{i_k}) = \sum_{k=1}^{m} (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{i_k}, \boldsymbol{x}_{i_k}) + \sum_{k=1}^{m} (\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_{i_k}, \boldsymbol{x}_{i_k}), \tag{110}$$

подберем такую систему векторов, подчиненную цепочке (107), чтобы

$$\sum_{k=1}^{m} (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{i_k}, \boldsymbol{x}_{.k}) \leqslant \lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \ldots + \lambda_{i_m}. \tag{111}$$

Такую систему векторов можно найти также на основании теоремы 4 (ср. лемму 7, А). Так как, далее, в силу теоремы 3 для любой ортогональной нормированной системы $\boldsymbol{x}_{i_1}, \boldsymbol{x}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{x}_{ik}$

$$\sum_{k=1}^{m} (\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_{i_k}, \boldsymbol{x}_{i_k}) \leqslant \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_m, \tag{112}$$

то неравенство (106) следует из (109), (110), (111) и (112). При $m = n$ (106) превращается в равенство, поскольку $\operatorname{Sp} \boldsymbol{C} = \operatorname{Sp} \boldsymbol{A} + \operatorname{Sp} \boldsymbol{B}$.

Теорема 6 доказана полностью.

Следствие. *Для любой непрерывной выпуклой функции* $\varphi(t)$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{s=1}^{n} \varphi(\nu_s - \lambda_s) \leqslant \sum_{s=1}^{n} \varphi(\mu_s). \tag{113}$$

Этот результат следует из неравенств (106) на основании замечания к лемме 2.

Оказывается, неравенства типа (106) справедливы для сингулярных чисел произвольных линейных операторов. Для доказательства соответствующего предложения мы используем следующее замечание: пусть A — матрица некоторого линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в ортонормированном базисе, и пусть $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$ — сингулярные числа $\boldsymbol{A}$. Рассмотрим квадратную матрицу

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix}$$

порядка $2n$. Мы сейчас покажем, что собственные числа матрицы $\hat{A}$ равны $\pm \alpha_s \, (s = 1, 2, \ldots, n)$. Действительно, раскрыв характеристический определитель $\Delta(\lambda) = |\hat{A} - \lambda E_{2n}|$, легко найдем:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda^2 E_n - A^* A|.$$

Отсюда следует сформулированное утверждение.

Сопоставив каждому оператору $\boldsymbol{A}$ оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$, действующий в $2n$-мерном унитарном пространстве, мы на основании теоремы 6 установим следующее предложение:

Теорема 7. *Пусть* ***A, B*** *и* ***C*** *— линейные операторы в n-мерном унитарном пространстве. Пусть* $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, *и пусть* α_s, β_s *и* $\gamma_s \, (s = 1, 2, \ldots, n)$ *— сингулярные числа операторов* ***A, B*** *и* ***C****, занумерованные в порядке убывания. Тогда для любого набора натуральных чисел* (105) *справедливо неравенство*

$$\gamma_{i_1} + \gamma_{i_2} + \ldots + \gamma_{i_m} \leqslant \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \ldots + \alpha_{i_m} + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m. \tag{114}$$

Замечание. Так как собственные числа операторов $\hat{\boldsymbol{A}}$, $\hat{\boldsymbol{B}}$ и $\hat{\boldsymbol{C}}$ располагаются относительно начала координат симметричными парами, неравенства (114) на основании теоремы 6 легко обобщаются следующим образом:

$$\pm(\gamma_{i_1} - \alpha_{i_1}) \pm (\gamma_{i_2} - \alpha_{i_2}) \pm \ldots \pm (\gamma_{i_m} - \alpha_{i_m}) \leqslant \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m.$$

Поскольку выбор знака перед каждой скобкой произволен, то

$$|\gamma_{i_1} - \alpha_{i_1}| + |\gamma_{i_2} - \alpha_{i_2}| + \ldots + |\gamma_{i_m} - \alpha_{i_m}| \leqslant \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m. \tag{114'}$$

Используя лемму 2, мы можем на основании неравенств (114) заключить, что для любой непрерывной возрастающей выпуклой функции $\varphi(t)$, $t \geqslant 0$, и любого $m \leqslant n$

$$\sum_{s=1}^{m} \varphi(|\gamma_s - \alpha_s|) \leqslant \sum_{s=1}^{m} \varphi(\beta_s)$$

Перейдем теперь к оценке сингулярных и собственных чисел произведений двух операторов. Основной в этом направлении является следующая теорема, обобщающая неравенство (35) (см. лемму 5).

Теорема 8. *Пусть* ***A, B*** *и* ***C*** *— линейные операторы в n-мерном унитарном пространстве. Пусть* **C=*AB*** *и пусть* α_s, β_s *и* γ_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ *— сингулярные числа операторов* ***A, B*** *и* ***C*** *соответственно, занумерованные в порядке убывания; тогда для любого набора натуральных чисел*

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n \qquad (115)$$

справедливы неравенства

$$\gamma_{i_1}\gamma_{i_2} \ldots \gamma_{i_m} \leqslant \alpha_{i_1}\alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_m}\beta_1\beta_2 \ldots \beta_m, \qquad (116)$$

$$\gamma_{i_1}\gamma_{i_2} \ldots \gamma_{i_m} \leqslant \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m\beta_{i_1}\beta_{i_2} \ldots \beta_{i_m}. \qquad (116')$$

Доказательство этой теоремы вполне аналогично доказательству теоремы 6.

Докажем сначала неравенства (116'). На основании леммы 4 п. 2 получаем:

$$[(\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_{i_k}, \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_{i_k})] = [(\boldsymbol{AB}\boldsymbol{x}_{i_k}, \boldsymbol{AB}\boldsymbol{x}_{i_k})] \leqslant \alpha_1^2\alpha_2^2 \ldots \alpha_m^2 \, [(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_{i_k}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_{i_k})] \qquad (117)$$

для любой системы векторов $\boldsymbol{x}_{i_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. По данному набору натуральных чисел (115) найдем на основании теоремы 5 такую цепочку подпространств, чтобы для любой подчиненной ей системы векторов выполнялось неравенство

$$\gamma_{i_1}^2\gamma_{i_2}^2 \ldots \gamma_{i_m}^2 \leqslant [(\boldsymbol{C}^*\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_{i_k}, \boldsymbol{x}_{i_k})], \qquad (118)$$

после чего на основании той же теоремы 5 найдем такую подчиненную выбранной цепочке систему векторов, чтобы

$$[(\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_{i_k}, \boldsymbol{x}_{i_k})] \leqslant \beta_{i_1}^2\beta_{i_2}^2 \ldots \beta_{i_m}^2. \qquad (119)$$

Очевидно, неравенство (116) уже следует из неравенств (117), (118) и (119).

Для доказательства неравенства (116) следует повторить рассуждение применительно к оператору $\boldsymbol{C}^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$ и воспользоваться при этом тем фактом, что сингулярные числа у сопряженных операторов равны. Теорема 8 доказана полностью.

Заметим попутно, что сингулярные числа операторов ***AB*** и ***BA*** в общем случае не совпадают.

Отметим еще следующий факт, вытекающий из теоремы 8:

Теорема 9. *Пусть* ***A*** *и* ***B*** *— два положительно определенных эрмитовых оператора с собственными числами* λ_s *и* μ_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$, *занумерованными в убывающем порядке, и пусть*

$$\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \ldots \geqslant \nu_n \qquad (120)$$

— *собственные числа оператора* $\boldsymbol{AB}$.

Тогда для любого набора (115) *выполняется неравенство*

$$\nu_{i_1}\nu_{i_2}\ldots\nu_{i_m} \leqslant \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_m}\mu_1\mu_2\ldots\mu_m. \qquad (121)$$

Доказательство. Так как оператор $\boldsymbol{B}$ невырожден, то

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{B}^{-1/2}(\boldsymbol{B}^{1/2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{1/2})\,\boldsymbol{B}^{1/2} = \boldsymbol{B}^{-1/2}\{(\boldsymbol{A}^{1/2}\boldsymbol{B}^{1/2})^*\,(\boldsymbol{A}^{1/2}\boldsymbol{B}^{1/2})\}\,\boldsymbol{B}^{1/2} \qquad (122)$$

и, следовательно, собственные числа (120) являются квадратами сингулярных чисел оператора $\boldsymbol{A}^{1/2}\cdot\boldsymbol{B}^{1/2}$.

Применяя к произведению $\boldsymbol{A}^{1/2}\cdot\boldsymbol{B}^{1/2}$ неравенство (116), получаем (121).

6. Другая постановка задачи о спектре суммы и произведения эрмитовых операторов

В настоящем параграфе мы сопоставим набору собственных чисел $\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \ldots \geqslant \nu_n$ суммы эрмитовых операторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ точку в n-мерном координатном пространстве и рассмотрим множество точек, получающихся при сложении всевозможных операторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ *с* данными спектрами. Аналогичную задачу мы рассмотрим и в случае произведения операторов.

Постановка задач на собственные значения в указанной геометрической форме принадлежит И. М.

Мы приведем здесь лишь аналоги теорем 6 и 9, первоначально полученные другими методами.

1° Нам понадобится геометрическое описание всех последовательностей α', которые мажорируются данной последовательностью α. Соответствующую лемму мы установим, используя некоторые результаты Фробениуса, Кёнига и Биркгофа. Начнем со следующего замечания.

Пусть $\boldsymbol{T} = \| t_{ij} \|_1^n$ — квадратная матрица. *Нормальным набором* элементов матрицы T назовем набор n элементов этой матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, т. е. набор вида

$$t_{1j_1},\ t_{2j_2},\ \ldots,\ t_{nj_n}, \qquad (123)$$

где $j_1, j_2, \ldots, j_n$ — некоторая перестановка индексов 1, 2, ..., n.

Справедливо следующее предложение, имеющее самостоятельное значение в ряде разделов математики.

Лемма 8 (Фробениус—Кёниг). *Пусть* $\boldsymbol{T} = \| t_{ij} \|_1^n$ — *квадратная матрица порядка n с неотрицательными элементами, и пусть каждый нормальный набор матрицы T содержит нулевой элемент;*

тогда существует состоящий из нулей минор матрицы T размеров $p \times q$ такой, что $p + q = n + 1$.

Доказательство мы проведем по индукции, предположив, что для матриц всех порядков $k < n$ лемма справедлива. Случай $n = 1$ тривиален.

Обращаясь к матрице T порядка n, мы можем, очевидно, считать, что не все ее элементы равны нулю. Пусть для определенности $t_{nn} \neq 0$ (этого всегда можно добиться перестановками строк и столбцов, так как при этом условия леммы не нарушаются).

Для матрицы $T_1 = \| t_{ij} \|_1^{n-1}$, очевидно, выполняются условия леммы, и по индуктивному предположению найдется состоящий из нулей минор M_1 матрицы T_1 размеров $p_1 \times q_1$:

$$p_1 + q_1 = n. \tag{124}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что минор M_1 расположен на пересечении первых p_1 строк и первых q_1 столбцов матрицы T. Разобьем матрицу T следующим образом на блоки:

$$T = \begin{array}{r} \\ p_1\left\{\vphantom{M_1}\right. \\ q_1\left\{\vphantom{T_3}\right. \end{array} \left\| \begin{array}{c|c} \overbrace{\quad M_1 \quad}^{q_1} & \overbrace{\quad T_2 \quad}^{p_1} \\ \hline T_3 & \end{array} \right\|$$

и рассмотрим квадратные матрицы T_2 и T_3 размеров $p_1 \times p_1$ и $q_1 \times q_1$. Хотя бы одна из матриц T_2 или T_3 обладает тем свойством, что каждый нормальный набор ее элементов содержит нулевой элемент (в противном случае можно было бы образовать нормальный набор положительных элементов всей матрицы T). Пусть указанным свойством обладает матрица T_2. По предположению индукции, T_2 обладает состоящим из одних нулей минором M_2 размеров $p_2 \times q_2$:

$$p_2 + q_2 = p_1 + 1. \tag{125}$$

Очевидно, можно считать, что минор M_2 расположен в строках матрицы T с номерами $1, 2, \ldots, p_2$ и в столбцах с номерами $q_1 + 1,\ q_1 + 2, \ldots, q_1 + q_2$.

Легко видеть, что при этом минор матрицы T, расположенный в строках с номерами $1, 2, \ldots, p_2$ и в столбцах с номерами $1, 2, \ldots, q_1, q_1 + 1, \ldots, q_1 + q_2$, состоит из одних нулей, причем в силу (124) и (125)

$$p_2 + (q_1 + q_2) = q_1 + p_1 + 1 = n + 1.$$

Лемма 8 доказана.

Следствие. *Пусть элементы квадратной матрицы T неотрицательны и сумма элементов в каждой строке и в каждом столбце равна* $\omega > 0$. *Тогда матрица T обладает нормальным набором положительных элементов.*

В самом деле, допустив противное, мы сможем согласно лемме 8 указать минор матрицы *T* размеров $p \times q$, $p + q = n + 1$, состоящий из одних нулей. Легко видеть, что сумма элементов матрицы *T*, расположенных в тех *p* строках и тех *q* столбцах, на пересечении которых расположен данный минор, равна $p\omega + q\omega = (n + 1)\,\omega$. Последнее, однако, невозможно, так как сумма всех элементов матрицы *T* равна иы.

Условимся в дальнейшем матрицу *P* порядка *n* называть матрицей перестановки (permutation matrix), если она обладает нормальным набором элементов, каждый из которых равен единице, а все остальные элементы матрицы равны нулю. Ясно, что умножение матрицы *P* на столбцевую матрицу *x* приводит к некоторой перестановке элементов матрицы *x*.

Так как и, обратно, каждая перестановка элементов *x* порождает некотот рую матрицу *P*, то всего существует *n*! различных матриц перестановок.

Докажем теперь следующее предложение, принадлежащее Биркгофу.

Лемма 9. *Множество всех двояко стохастических матриц совпадает с выпуклой оболочкой матриц перестановок. Другими словами, любая двояко стохастическая матрица T может быть представлена в виде*

$$T = \sum_{s=1}^{n!} \tau_s P_s, \tag{126}$$

где

$$\tau_s \geqslant 0, \quad \sum_{s=1}^{n!} \tau_s = 1, \tag{127}$$

а P_s *— матрицы перестановок. Обратно, правая часть* (126) *при условии* (127) *является двояко стохастической матрицей.*

Последняя часть утверждения почти очевидна. В самом деле, сумма элементов *i*-го столбца матрицы $\tau_s P_s$ равна τ_s. Поэтому сумма элементов *i*-го столбца правой части (126) равна $\sum_{s=1}^{n!} \tau_s = 1.$ Аналогично в случае строк.

Доказательство первой части леммы существенно использует предыдущую лемму 8.

Пусть *T* — двояко стохастическая матрица. Тогда по следствию из леммы 8 существует положительный набор элементов

$$t_{1j_1}, t_{2j_2}, \ldots, t_{nj_n} \qquad (128)$$

этой матрицы. Пусть

$$\min_s t_{sj_s} = \tau_1 \quad (\tau_1 > 0), \qquad (129)$$

и пусть P_1 — матрица перестановки, у которой на местах элементов набора (128) стоят единицы. Рассмотрим матрицу

$$B_1 = T - \tau_1 P_1. \qquad (130)$$

В силу (129) элементы матрицы B неотрицательны, а сумма элементов в каждой строке и в каждом столбце B_1 равна

$$1 - \tau_1 = \omega_1 \geqslant 0.$$

Заметим, что число нулевых элементов B_1 во всяком случае на единицу больше, чем у матрицы T. Если $\omega_1 = 0$, то $B_1 = 0$, и лемма доказана. Если $\omega_1 > 0$, то B_1 обладает нормальным набором положительных элементов, и, повторив рассуждение, мы придем к неотрицательной матрице $B_2 = T - \tau_1 P_1 - \tau_2 P_2$, число нулевых элементов которой уже на два больше, чем у T. Суммы элементов в столбцах и строках B_2 равны $1 - \tau_1 - \tau_2 = \omega_2 \geqslant 0$. Ясно, что на некотором k-м шаге $(k < n^2 - n + 1)$ этот процесс приведет к числу $\omega_k = 1 - - \tau_1 - \tau_2 - \ldots - \tau_k = 0$ и, следовательно, к матрице

$$B_k = T - \tau_1 P_1 - \tau_2 P_2 - \ldots - \tau_k P_k = 0.$$

Действительно, при $k = n^2 - n + 1$ матрица B_k уже не имеет нормального набора положительных элементов (у нее $n^2 - n + 1$ нулевых элементов), и, следовательно, ω_k не может быть положительным числом. Лемма 9 доказана.

2° Условимся каждой числовой последовательности $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ставить в соответствие точку в n-мерном координатном пространстве $\mathbf{D}_n$.

Пусть

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n \qquad (131)$$

— некоторая последовательность. Рассмотрим $n!$ последовательностей, получающихся из последовательности (131) всевозможными перестановками ее элементов

$$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_n}. \qquad (131')$$

Сопоставив каждой последовательности (131') точку в $\boldsymbol{D}_n$, обозначим через $K(\alpha)$ линейную выпуклую оболочку, натянутую на эти точки. Легко видеть, что множество $K(\alpha)$ состоит из всех точек

$$x = \sum_{s=1}^{n!} \tau_s P_s \alpha, \qquad (132)$$

Где $\tau_s \geqslant 0,\ \sum_{s=1}^{n!} \tau_s = 1,\ P_s$ — матрицы перестановок и α — столбцевая матрица с координатами (131).

Заметим попутно, что каждая точка принадлежит множеству $K(\alpha)$ вместе с n! точками, получающимися перестановками ее координат. Для доказательства достаточно умножить равенство (132) на матрицу перестановки и воспользоваться тем, что произведение матриц перестановок есть матрица перестановки.

Мы теперь докажем следующее предложение:

Лемма 10. *Для того чтобы последовательность*

$$\alpha_1' \geqslant \alpha_2' \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n' \tag{133}$$

мажорировалась последовательностью $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$, *необходимо и достаточно, чтобы точка* α' *с координатами* (133) *принадлежала выпуклой линейной оболочке* $K(\alpha)$

Это утверждение было установлено Радо, использовавшим при доказательстве теорему об отделении выпуклых множеств плоскостями. Другое доказательство было основанно на теореме о крайних точках выпуклых множеств.

Идея приводимого здесь доказательства, опирающегося на лемму Биркгофа, принадлежит А. Хорну.

Доказательство леммы. Пусть сначала $\alpha' \in K(\alpha)$, тогда

$$\alpha' = \sum_{s=1}^{n!} \tau_s P_s \alpha, \tag{134}$$

где

$$\tau_s \geqslant 0, \quad \sum_{s=1}^{n!} \tau_s = 1,$$

а P_s — матрицы перестановок. Следовательно, по лемме 9

$$\alpha' = T\alpha, \tag{135}$$

где T — двояко стохастическая матрица, и значит, согласно лемме 1 последовательность (133) мажорируется последовательностью (131).

Пусть теперь, наоборот, известно, что $\alpha' < \alpha$, тогда по лемме 1 найдется дважды стохастическая матрица T, с которой выполняется равенство (135). Этому равенству согласно лемме 9 можно придать вид (134), откуда уже следует, что $\alpha' \in K(\alpha)$.

3° Перейдем теперь к теоремам, составляющим цель настоящего параграфа.

Теорема 10. *Пусть* ***A*** *и* ***B*** *— эрмитовы операторы в n-мерном унитарном пространстве с собственными значениями*

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \tag{136}$$

и \

$$\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_n. \qquad (137)$$

Пусть $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ *и пусть*

$$\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \ldots \geqslant \nu_n \qquad (138)$$

— собственные числа $\boldsymbol{C}$. *Обозначим через* K_1 *выпуклую линейную оболочку точек*

$$(\lambda_1 + \mu_{j_1}, \lambda_2 + \mu_{j_2}, \ldots, \lambda_n + \mu_{j_n}) \qquad (139)$$

и через K_2 *выпуклую линейную оболочку точек*

$$(\mu_1 + \lambda_{j_1}, \mu_2 + \lambda_{j_2}, \ldots, \mu_n + \lambda_{j_n}) \qquad (140)$$

(берутся всевозможные перестановки $j_1, j_2, \ldots, j_n$ *чисел* 1, 2, ..., *n*).

Тогда точка $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ *принадлежит пересечению оболочек* K_1 *и* K_2.

Доказательство. Рассмотрим точку

$$(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_n - \lambda_n). \qquad (141)$$

Согласно теореме 6 [см. неравенства (106)] последовательность, полученная упорядочением координат точки (141), мажорируется последовательностью $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. На основании леммы 10 мы заключаем, что точка (141) принадлежит выпуклой линейной оболочке точек $(\mu_{j_1}, \mu_{j_2}, \ldots, \mu_{j_n})$. Отсюда следует, что $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n) \in K_1$. Поменяв ролями $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, легко получим, что $\nu \in K_2$. Таким образом, теорема 10 доказана.

Мы вывели теорему 10 из теоремы 6. Легко видеть, что и обратно, ввиду леммы 10 теорема 6 следует из теоремы 10.

В связи с теоремой 10 сделаем несколько замечаний.

Обозначим через *М* множество точек (138), отвечающих спектрам операторов **C** = $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, где $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — всевозможные эрмитовы операторы с данными спектрами (136) и (137). Утверждение теоремы 10 состоит в том, что $M \subset K_1 \cap K_2$.

Полное описание множества *М* до сих пор не получено, несмотря на имеющиеся в этой области важные исследования.

В частности найдено полное описание множества *М* для случая $n \leq 4$.

Приведем без доказательства относящийся к этому вопросу следующий просто формулируемый результат

Пусть при всех i = 1, 2, ..., *n* — 1

$$\mu_1 - \mu_n < \lambda_{i+1} - \lambda_i \qquad (142)$$

или

$$\lambda_1 - \lambda_n < \mu_{i+1} - \mu_i. \qquad (142')$$

Тогда

$$M = K_1 \cap K_2.$$

Отметим здесь же, что при условии (142) или (142') среди собственных значений оператора **С** = ***A*** + ***B*** нет кратных. В самом деле, пусть, например, выполнено условие (142). Согласно теореме 10

$$\nu_{i+1} - \nu_i = \lambda_{i+1} - \lambda_i + \sum_{s=1}^{n!} \tau_s (\mu_{(s)} - \mu_{(s')}),$$

где

$$\tau_s \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \sum_{s=1}^{n!} \tau_s = 1.$$

Поэтому,

$$\nu_{i+1} - \nu_i \geqslant \lambda_{i+1} - \lambda_i - \sum_{s=1}^{n!} \tau_s (\mu_1 - \mu_n) = \lambda_{i+1} - \lambda_i - (\mu_1 - \mu_n) > 0$$

иследовательно, $\nu_{i+1} \neq \nu_i$.

Сформулируем в геометрических терминах теорему, эквивалентную теореме 9.

Теорема 11. *Пусть **A** и **B** — положительно определенные эрмитовы операторы с собственными числами* λ_s *и* μ_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$, *занумерованными в убывающем порядке, и пусть*

$$\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \ldots \geqslant \nu_n$$

— *собственные числа оператора **C** = **AB**. Пусть K_1 — выпуклая линейная оболочка точек*

$$(\ln \lambda_1 + \ln \mu_{j_1}, \ln \lambda_2 + \ln \mu_{j_2}, \ldots, \ln \lambda_n + \ln \mu_{j_n})$$

и K_2 — выпуклая линейная оболочка точек

$$(\ln \mu_1 + \ln \lambda_{j_1}, \ln \mu_2 + \ln \lambda_{j_2}, \ldots, \ln \mu_n + \ln \lambda_{j_n}).$$

Тогда точка с координатами $(\ln \nu_1, \ln \nu_2, \ldots, \ln \nu_n)$ *принадлежит пересечению оболочек K_1 и K_2.*

Доказательство. Прологарифмировав неравенства (121), получим:

$$(\ln \nu_{i_1} - \ln \lambda_{i_1}) + (\ln \nu_{i_2} - \ln \lambda_{i_2}) + \ldots + (\ln \nu_{i_m} - \ln \lambda_{i_m}) \leqslant$$
$$\leqslant \ln \mu_1 + \ln \mu_2 + \ldots + \ln \mu_m.$$

И в этом случае при $m = n$ достигается равенство, ибо $|\mathbf{C}| = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$. Далее поступаем так же, как в теореме 10.

Отметим также следующую теорему о спектре произведения унитарных матриц, принадлежащую А. А. Нудельману и П. А. Шварцман.

Пусть $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \ldots \leqslant \varphi_n < 2\pi$ — аргументы собственных чисел унитарной матрицы *U,* и пусть $0 \leqslant \psi_1 \leqslant \psi_2 \leqslant \ldots \leqslant \psi_n < 2\pi$ — аргументы собственных чисел унитарной матрицы *V*. Пусть, кроме того, $\varphi_n + \psi_n - \varphi_1 - \psi_1 < 2\pi$. Обозначим через N_1 выпуклую оболочку, натянутую на *n*! векторов $(\varphi_1 + \psi_{i_1}, \varphi_2 + \psi_{i_2}, \ldots, \varphi_n + \psi_{i_n})$, а через N_2 — выпуклую оболочку векторов $(\psi_1+\varphi_{i_1}, \psi_2+\varphi_{i_2}, \ldots, \psi_n+\varphi_{i_n})$. Пусть, наконец, $0 \leqslant \omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \ldots \leqslant \omega_n < 2\pi$ — аргументы собственных чисел матрицы UV; тогда точка с координатами $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ принадлежит пересечению выпуклых оболочек N_1 и N_2.

Приложения

Приложение А. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Комплексное число имеет вид

$$z = a + ib,$$

где a и b — вещественные числа и формальный символ i удовлетворяет соотношению $i^2 = -1$. Вещественное число a называют *вещественной частью* числа z и обозначают Re z; вещественное число b называют *мнимой частью* z и обозначают Im z. Комплексные числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ называют *комплексно-сопряженными,* переход от числа z к $\bar{z}$ называют *комплексным сопряжением.* Для пары комплексных чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ естественным образом (в терминах операций с вещественными числами) определяются бинарные операции сложения и умножения:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2), \quad z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i\,(a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Таким образом, комплексное сложение является результатом сложения вещественных частей и сложения мнимых частей операндов. Формула для комплексного умножения получается в результате алгебраических преобразований с учетом соотношения $i^2 = -1$. Противоположным к числу $z = a + ib$ является комплексное число $-z = -a + i\,(-b)$. При $z \neq 0 = 0 + i0$ формулой

$$\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\left(\frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$$

определяется обратное к z число. Вычитание и деление задаются следующим образом:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2), \qquad \frac{z_1}{z_2} = z_1\left(\frac{1}{z_2}\right) = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}.$$

Множество всех комплексных чисел обозначается символом **C**. Это множество, наделенное указанными выше операциями сложения и умножения, является полем с вещественным числом $0=0+i0$ в качестве нуля (аддитивной единицы) и вещественным числом $1=1+ i0$ в качестве · (мультипликативной) единицы. Операции сложения и умножения коммутативны и ассоциативны, связаны соотношением дистрибутивности и для них определены обратные операции вычитания и деления соответственно. Множество вещественных чисел **R** образует подполе в **C**. Неотрицательное число $z=+(z\bar{z})^{1/2}$ называется *модулем* или *абсолютной величиной* комплексного числа *z*. Выражение для частного z_1/z_2 можно записать, используя понятие модуля, в виде $(1/|z_2|^2)z_1\bar{z}_2$, если $z_2\neq 0$. Легко проверить, что операции умножения и комплексного сопряжения коммутируют: $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$, и что комплексное сопряжение, примененное дважды, оставляет число неизменным. Поскольку $\operatorname{Re} z=(1/2)(z+\bar{z})$ и $\operatorname{Im} z=(1/2i)(z-\bar{z})$, вещественные числа — это в точности все комплексные числа $z\in\mathbf{C}$, для которых $\operatorname{Im} z=0$ или, что эквивалентно, $z=\bar{z}(=\operatorname{Re} z)$.

В геометрической интерпретации комплексные числа из **C** можно представить векторами на плоскости с началом координат в точке 0 и (ортогональными) «вещественной и мнимой осями». Таким образом, число $z=a+ib$ можно отождествить с упорядоченной парой чисел *(a, b)*. *Вещественная ось* $\{z:\ \operatorname{Im} z=0\}$ есть просто обычная вещественная прямая. *Мнимую ось* $\{z:\ \operatorname{Re} z=0\}$ можно трактовать просто как умноженную на *i* вещественную ось или как множество всех «чисто мнимых» чисел. Проекцией числа $z\in\mathbf{C}$ на вещественную (мнимую) ось является число Re *z* (соответственно $i\operatorname{Im} z$). Комплексное сопряжение есть отражение числа относительно вещественной оси. Модуль $|z|$ совпадает с евклидовым расстоянием от точки *z* до начала координат комплексной плоскости. Множество $\{z\in\mathbf{C}:\ \operatorname{Re} z>(\geqslant)0\}$ составляет открытую (замкнутую) *правую полуплоскость* в **C**, аналогично $\{z\in\mathbf{C}:\ \operatorname{Im} z>(\geqslant)0\}$ — это открытая (замкнутая) *верхняя полуплоскость* в **C**. *Единичный круг* в **C** есть множество $\{z\in\mathbf{C}:\ |z|\leqslant 1\}$, тогда как множество $\{z\in\mathbf{C}:\ |z-a|\leqslant r\}$ является кругом радиуса *r* с центром в точке $a\in\mathbf{C}$.

В последнем абзаце комплексная плоскость **C** описана в терминах *прямоугольных координат.* На ней полезно также ввести *полярные координаты,* в которых местоположение точки $z\in\mathbf{C}$ на плоскости определяется радиусом *r* окружности с центром в начале координат, на которой лежит точка *z*, и углом θ между положительным направлением вещественной оси и направлением от начала координат к точке *z* (угол измеряется в радианах против часовой стрелки). Тогда полярные координаты точки *z* — это пара чисел (r,θ). Используется запись $z=re^{i\theta}$, в которой $e^{i\theta}\equiv\cos\theta+i\sin\theta$. Таким образом, переход от представления в полярных координатах $z = re^{i\theta}$ к представлению в декартовых координатах $z = a + ib$ осуществляется по формулам

$$a = r\cos\theta, \quad b = r\sin\theta.$$

Обратный переход задается соотношениями (при $r \neq 0$)

$$r = |z| = (a^2 + b^2)^{1/2}, \quad \theta = \arcsin\frac{b}{r},$$

в которых обычно угол θ выбирается так, чтобы $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.
Многие объекты на комплексной плоскости проще описываются в полярных координатах. Например, единичный круг в **C** *есть* множество $\{re^{i\theta}: 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta < 2\pi\}$.

Приложение В

ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА И ФУНКЦИИ

Через V обозначим векторное пространство над некоторым полем, содержащим поле вещественных чисел. *Выпуклая комбинация* набора $v_1, \ldots, v_k$ элементов пространства V есть линейная комбинация с неотрицательными коэффициентами, сумма которых равна единице:

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k; \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_k \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1.$$

Множество $K \subseteq V$ называют *выпуклым,* если любая выпуклая комбинация каждого набора элементов из K принадлежит K. В эквивалентной формулировке множество K выпукло, если все выпуклые комбинации каждой *пары* точек из K также принадлежат K. На языке геометрии это означает, что в K должен целиком лежать любой отрезок с концами из K, т. е. множество не имеет «выбоин» или «дыр». Выпуклое множество K называют *выпуклым конусом,* если $\alpha x \in K$ для любых $\alpha > 0$ и $x \in K$ (эквивалентно, положительные линейные комбинации элементов из K принадлежат K). Прямая проверка показывает, что и объединение, и пересечение двух выпуклых множеств (соответственно выпуклых конусов) — опять выпуклые множества (соответственно выпуклые конусы).

Элемент замкнутого выпуклого множества K называют *крайней точкой,* если он может быть представлен в виде выпуклой комбинации точек из K только тривиальным образом, т. е. равенство $z = \alpha x + (1-\alpha) y$, $0 < \alpha < 1$, $x, y \in K$, влечет за собой $x = y = z$.
В геометрической интерпретации крайняя точка не является внутренней ни для одного отрезка из множества

Замкнутое выпуклое множество может иметь конечное число крайних точек (например, многогранник), бесконечно много крайних точек (например, замкнутый круг) или не иметь их вовсе (например, замкнутая верхняя полуплоскость в $\mathbf{R}^2$). Однако компактное выпуклое множество всегда имеет крайние точки. Символом Co *(S)* обозначают *выпуклую оболочку* множества *S* точек из *V*, которая является просто множеством всех выпуклых комбинаций всевозможных наборов точек из *S*, или, эквивалентно, «наименьшим» выпуклым множеством, содержащим множество *S* (т. е. пересечением всех таких выпуклых множеств). В теореме Крейна — Мильмана утверждается, что компактное выпуклое множество совпадает с выпуклой оболочкой множества своих крайних точек. Компактное выпуклое множество с конечным числом крайних точек называют *конечно порожденным,* а сами крайние точки называются *базисом* данного множества.

Теперь предположим, что пространство *V* наделено вещественным скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. В *теореме о разделении гиперплоскостью* устанавливается, что для любых двух (непустых) непересекающихся выпуклых множеств $K_1 \subseteq V$ и $K_2 \subseteq V$ существует гиперплоскость *H* в *V*, разделяющая K_1 и K_2, т. е. множество K_1 лежит в одном замкнутом полупространстве, определяемом гиперплоскостью *H,* а множество K_2 — в другом. *Гиперплоскость H* в пространстве *V* определяется просто как сдвиг на вектор *p* подпространства, ортогонального к вектору *q*, т. е. $H = \{x \in V:\ \langle x - p,\ q\rangle = 0\}$ для заданных векторов $p,\ q \in V,\ q \neq 0$. Она определяет два открытых *полупространства*

$$H^+ = \{x \in V: \langle x - p,\ q\rangle > 0\},\quad H^- = \{x \in V: \langle x - p,\ q\rangle < 0\}$$

и два соответствующих замкнутых полупространства $H_0^+ = H^+ \cup H$ и $H_0^- = H^- \cup H$. Таким образом, гиперплоскость разделяет множества K_1 и K_2 в том смысле, что $K_1 \subseteq H_0^+$ и $K_2 \subseteq H_0^-$ для некоторой пары векторов *p, q*. При дополнительных предположениях о двух выпуклых множествах можно говорить о разделении их гиперплоскостью в более сильном смысле. Например, если не пересекаются замыкания множеств K_1 и K_2, то можно добиться строгого разделения, т. е. $K_1 \subseteq H^+,\ K_2 \subseteq H^-$. Замыкание выпуклой оболочки любого ограниченного множества $S \subset V$ можно получить как пересечение всех замкнутых полупространств, содержащих *S*.

В случае когда *V* есть векторное пространство $\mathbf{C}^n$ с комплексным скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, гиперплоскости и полупространства определяются аналогично, следует лишь рассматривать пространство $\mathbf{C}^n$ как $2n$-мерное вещественное пространство $\mathbf{R}^{2n}$ и перейти от

$\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ к вещественному скалярному произведению $\operatorname{Re}\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ следующим образом. Сопоставим друг другу элементы $x+iy\in\mathbf{C}^n$ и $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{2n}$ и заметим, что в силу аксиом комплексного скалярного произведения справедливо равенство $\operatorname{Re}\langle x_1+iy_1,\ x_2+iy_2\rangle=\langle x_1,\ x_2\rangle+\langle y_1,\ y_2\rangle$. Следовательно, выражение $\langle x_1,\ x_2\rangle+\langle y_1,\ y_2\rangle$ задает (вещественное) скалярное произведение элементов $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$. Гиперплоскости и полупространства из $\mathbf{R}^{2n}$ имеют подходящую геометрическую интерпретацию в $\mathbf{C}^n$.

Вещественнозначную функцию *f*, определенную на выпуклом множестве $K\subseteq V$, называют *выпуклой,* если для всех а, таких, что $0<\alpha<1$, и всех $x,\ y\in K,\ x\neq y$, выполнено неравенство

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leqslant\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y). \qquad (*)$$

Если это неравенство всегда строгое, говорят о *строгой выпуклости* функции *f*. Если выполняется противоположное неравенство, функцию *f* называют *вогнутой* (или *строго вогнутой,* когда, кроме того, неравенство строгое). Эквивалентным образом вогнутая (соответственно строго вогнутая) функция есть просто взятая со знаком минус выпуклая (соответственно строго выпуклая) функция. В геометрическом представлении хорда, соединяющая два произвольных значения *f(x)* и *f(y)* выпуклой (соответственно вогнутой) функции, расположена над (соответственно под) графиком этой функции. Линейная функция будет одновременно выпуклой и вогнутой. В случае $V=\mathbf{R}^N$ и открытого множества *К* для выпуклой функции *f* почти всюду в *К* существует гессиан

$$H(x)\equiv\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(x)\right],$$

который является симметричной матрицей из $M^n(\mathbf{R})$ и положительно полуопределен (в тех точках множества *К,* где он задан). Для строго выпуклой функции имеет место положительная определенность. Обратно, если всюду в выпуклом множестве гессиан некоторой функции положительно полуопределен (соответственно положительно определен), то эта функция выпукла (соответственно строго выпукла). Аналогично, отрицательная определенность гессиана соответствует вогнутости функции.

Задачам оптимизации для выпуклых и вогнутых функций присущи некоторые особенности. На компактном выпуклом множестве максимум (соответственно минимум) выпуклой (соответственно вогнутой) функции достигается в крайней точке. С другой стороны, на выпуклом множестве локальный минимум (соответственно максимум) является глобальным минимумом (соответственно максимумом) выпуклой (соответственно вогнутой) функции и множество всех точек локального минимума (соответственно максимума) само является выпуклым. Например, строго выпуклая функция на выпуклом множестве принимает свое минимальное значение не более чем в одной точке, и критическая точка обязательно будет точкой минимума.

Выпуклые комбинации вещественных чисел подчиняются некоторым простым, но часто используемым неравенствам. Если задан набор вещественных чисел $x_1, \ldots, x_k$, то для любой их выпуклой комбинации с коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geqslant 0$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1$ имеют место оценки

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant k} x_i \leqslant \sum_{i=1} \alpha_i x_i \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant k} x_i.$$

Различные классические неравенства можно вывести, рассматривая некоторые простые выпуклые функции $f(\cdot)$ от одной переменной на интервале. Двухточечное неравенство (*) по индукции влечет за собой n-точечное неравенство

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i), \quad n = 2,\ 3,\ \ldots, \tag{**}$$

в котором $\alpha_i \geqslant 0$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$ и все точки x_i принадлежат интервалу выпуклости функции $f(\cdot)$.

Применение неравенства (**) к строго выпуклой функции $f(x) = -\log x$ на интервале $(0, \infty)$ приводит к *неравенству между арифметическим и геометрическим средними с весами:*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \geqslant \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}, \quad x_i \geqslant 0.$$

Когда все α_i равны $1/n$, приходим к *неравенству между арифметическим и геометрическим средними:*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}, \quad x_i \geqslant 0.$$

Это неравенство обращается в равенство, только когда все числа x_i совпадают между собой.

Применение неравенства (**) к функции $f(x) = x^p$, $p > 1$, на интервале $(0, \infty)$ приводит к *неравенству Гёльдерах*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q},$$

где $x_i,\ y_i > 0,\ \ p > 1$ и $1/p + 1/q = 1.$ Равенство здесь имеет место только для линейно зависимых векторов $[x_i^p]$ и $[y_i^q]$. Выбирая $p = q = 2$, получаем один из вариантов *неравенства Коши — Шварца:*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}.$$

Равенство здесь выполняется только для линейно зависимых векторов $[x_i]$ и $[y_i]$.

Приложение С

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ

Исторически причиной для введения комплексных чисел послужило то обстоятельство, что многочлены с вещественными коэффициентами могут не иметь вещественных корней. Например, формула для корней квадратного уравнения $x^2 - 2x + 2 = 0$ приводит к решениям $\{1 + i,\ 1 - i\}.$ Все корни любого многочлена с вещественными коэффициентами принадлежат, однако, множеству комплексных чисел **С**. В действительности если расширить область коэффициентов до поля **С**, то по-прежнему все нули всевозможных многочленов с комплексными коэффициентами остаются в **С**. Таким образом, **С** является примером *алгебраически замкнутого поля.* Это означает, что нет такого расширения **F** поля **С**, чтобы некоторый многочлен с коэффициентами из **С** обращался в нуль на элементе из **F**, не входящем в **С**.

Основная теорема алгебры гласит, что любой многочлен *p(x)* степени не ниже первой с комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один корень (т. е. существует хотя бы одно решение *z* уравнения $p(x) = 0$) в поле комплексных чисел.

Используя деление многочленов, можно установить, что *x* — *z* делит *p(x),* если число *z* — корень многочлена *p(x).* Таким образом, справедливо представление $p(x) = (x - z)\,q(x),$ в котором *q(x)* есть многочлен с комплексными коэффициентами на единицу меньшей степени, чем многочлен *p(x).* Множество корней многочлена *p(x)* состоит из корней многочлена *q(x)* и числа *z.* Из основной теоремы алгебры вытекает следующее утверждение.

Теорема. *Многочлен степени* $n \geqslant 1$ *с комплексными коэффициентами имеет в точности n, учитывая кратности, корней в поле комплексных чисел.*

Кратность корня *z* уравнения $p(x) = 0$ есть наибольшее целое *k*, при котором степень $(x - z)^k$ делит многочлен *p(x);* таким образом, это число указывает, сколько раз *z* появляется в качестве корня уравнения *p*(z) = 0. Если корень *z* имеет кратность 3, то он учитывается трижды при подсчете числа *n* корней уравнения *p*(*x*) = 0. Следовательно, многочлен с комплексными коэффициентами всегда можно разложить на линейные множители над полем комплексных чисел.

Если многочлен с *вещественными* коэффициентами имеет несколько комплексных (невещественных) корней, то они обязательно образуют сопряженные пары, поскольку равенство 0=*p(z)* влечет за собой $0 = \overline{0} = \overline{p(z)} = p(\bar{z})$. В силу соотношения

$$(x - z)(x - \bar{z}) = x^2 - 2\operatorname{Re}(z)x + |z|^2$$

любой многочлен с вещественными коэффициентами можно разложить в произведение линейных и квадратных сомножителей с вещественными коэффициентами. Каждый неразложимый квадратный сомножитель отвечает сопряженной паре комплексных корней.

Приложение D

НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНОВ ОТ ИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Имеется важный факт, который проще всего доказать при помощи методов теории функций комплексного переменного, что *n* корней многочлена степени $n \geqslant 1$ с комплексными коэффициентами зависят от этих коэффициентов непрерывно.

Пусть $x \in \mathbf{C}^n$ и $f(x) = [f_1(x), \ldots, f_m(x)]^T$, где $f_i\colon \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$, $i = 1, \ldots, n$. Функция $f\colon \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^m$ *непрерывна* в точке *x,* если каждая функция f_i, $i = 1, \ldots, m$, непрерывна в точке *x*. Функция $f_i\colon \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ *непрерывна* в точке *x,* если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из $\|y - x\| < \delta$ следует $|f_i(y) - f_i(x)| < \varepsilon$, где $\|\cdot\|$ — векторная норма на пространстве $\mathbf{C}^n$.

Результат о непрерывной зависимости корней интуитивно можно было бы сформулировать следующим образом: функция $f\colon \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$, осуществляющая отображение *n* коэффициентов (при старшей степени коэффициент считается равным единице) многочлена степени *n* в *n* корней данного многочлена, является непрерывной. Однако для этой функции трудно дать точное определение, поскольку нет естественного способа упорядочения множества из *n* (комплексных) корней. Строгое утверждение о непрерывной зависимости корней многочлена от его коэффициентов мы сформулируем следующим образом.

Теорема. *Пусть* $n \geqslant 1$ *и задан многочлен*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ \ldots\ + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0$$

с комплексными коэффициентами. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что для произвольного многочлена*

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ \ldots\ + b_1 x + b_0$$

с ненулевым коэффициентом $b_n \neq 0$, *такого, что*

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant n} |a_i - b_i| < \delta,$$

выполнено неравенство

$$\min_{\tau} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\lambda_j - \mu_{\tau(j)}| < \varepsilon,$$

где $\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_n$ — *корни многочлена p(x) и* $\mu_1, \ \ldots, \ \mu_n$ — *корни многочлена q(x), записанные в произвольном порядке, с учетом кратности, и минимум берется по всем перестановкам* τ *индексов* 1, 2, ... *n.*

Таким образом, достаточно малое изменение коэффициентов многочлена может привести только к малому изменению каждого из его корней. Этот принцип играет фундаментальную роль в матричном анализе, поскольку коэффициенты характеристического многочлена $p_A(t)$ матрицы $A \in M_n$ являются непрерывными функциями (в действительности многочленами) от элементов матрицы *A* (см. (15.2.11)) и корни многочлена $p_A(t)$ суть собственные значения матрицы *A*. В силу непрерывности композиции непрерывных функций заключаем, что достаточно малые изменения элементов матрицы *A* будут вызывать только малые изменения в коэффициентах многочлена $p_A(t)$, что влечет за собой лишь малые изменения в собственных значениях. Таким образом, собственные значения квадратной вещественной или комплексной матрицы непрерывно зависят от ее элементов.

Приложение Е

ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА

Пусть *V* — конечномерное вещественное или комплексное векторное пространство с нормой $\|\cdot\|$. Определим *шар радиуса* ε с центром в точке *x* равенством $B_\varepsilon(x) = \{y \in V \colon \|y - x\| \leqslant \varepsilon\}$.

Множество $S \subseteq V$ называют *открытым,* если для каждого элемента $x \in S$ существует такое $\varepsilon > 0$, что имеет место включение

$B_\varepsilon(x) \subseteq S$. Множество $T \subseteq V$ называют *замкнутым,* если дополнение множества T в пространстве V открыто. Множество $S \subseteq V$ называют *ограниченным,* если найдется число $r>0$, при котором $S \subseteq B_r(0)$ (т. е. S содержится в некотором шаре конечного радиуса). Эквивалентным образом множество T замкнуто тогда и только тогда, когда предел любой сходящейся (по норме $\|\cdot\|$) последовательности элементов из T также принадлежит T. Одновременно замкнутое и ограниченное множество $S \subseteq V$ (в конечномерном пространстве V) называют *компактным.*

Заданная функция $f\colon S \to \mathbf{R}$, $S \subseteq V$ может достигать или не достигать своих (глобальных) максимального и минимального значений на S. Однако часто имеются некоторые обстоятельства, при которых можно быть уверенным, что функция f принимает свои экстремальные значения на множестве S.

Теорема (Вейерштрасс). *Пусть S — компактное множество в конечномерном вещественном или комплексном векторном пространстве V. Если функция $f\colon S \to \mathbf{R}$ непрерывна, то существует такая точка $x_{\min} \in S$, что*

$$f(x_{\min}) \leqslant f(x) \quad \textit{для всех} \quad x \in S,$$

и существует такая тонка $x_{\max} \in S$, что

$$f(x) \leqslant f(x_{\max}) \quad \textit{для всех} \quad x \in S.$$

Это означает, что функция f достигает своего минимума и максимума на S. Конечно, функция f может принимать каждое из значений $\max\limits_{x \in S} f(x)$ и $\min\limits_{x \in S} f(x)$ более чем в одной точке. Если хотя бы одно из ключевых допущений (компактность S или непрерывность f) теоремы Вейерштрасса не принимать во внимание, то заключение теоремы становится, вообще говоря, неверным. Однако предположение о включении S как подмножества в конечномерное вещественное или комплексное векторное пространство является несущественным. Теорема Вейерштрасса верна и для непрерывной вещественнозначной функции на компактном множестве произвольного топологического пространства, если подходящим образом обобщить понятие компактности.

ЛИТЕРАТУРА

[Ait] Aitken A. C. Determinants and Matrices. 9th ed. — Oliver and Boyd,Edinburgh, 1956.

[Bar 75] Barnett S. Introduction to Mathematical Control Theory. — Clarendon Press, Oxford, 1979.

[Bar 79] Barnett S. Matrix Methods for Engineers and Scientists. — McGraw-Hill, London, 1979.

[Bar 83] Barnett S. Polynomials and Linear Control Systems. — Dekker, New York, 1983.

[BB] Beckenbach E. E., Bellman R. Inequalities. — Springer-Verlag, NewYork, 1965. [Имеется перевод: Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. — М.: Мир, 1965.]

[Bel] Bellman R. Introduction to Matrix Analysis. 2d ed. — McGraw-Hill,New York, 1970. [Имеется перевод: Беллман Р. Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969.]

[Boa] Boas R. P., Jr. A Primer of Real Functions, 2d ed. — Carus Mathematical Monographs, No. 13. Mathematical Association of America, Washington, D. C, 1972.

[BP1] Berman A., Plemmons R. Nonnegative Matrices in the MathematicalSciences. — Academic Press, New York, 1979.

fBStl Barnett S., Storey C. Matrix Methods in Stability Theory. — Barnes& Noble, New York, 1970.

[CaLe] Carpenter J. A., Lewis R. A. KWIC Index for Numerical Algebra. — U. S. Dept. of Commerce, Springfield, Va. Microfiche. and printed versions available from National Technical Information Service, U. S. Dept. of Commerce, 5285 Port Royal Road, Springfield VA 22161.

[Chi] Childs L. A Concwete Introduction to Higher Algebra. — Springer- Verlag, Berlin 1979.

[Cul] Cullen C. G. Matrices and Linear Transformations. — Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.

[Don] Donoghue W. F., Jr. Monotone Matrix Functions and Analytic Continuation.— Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[Fad] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. —М.— Л.: Физматгиз, 1963.

[Fan] Ky Fan. Convex Sets and Their Applications. — Lecture Notes,Applied Mathematics Division, Argonne National Laboratory Summer 1959. ■...,..

[Fie] Fiedler M. Spectral Properties of Some Classes of Matrices. — Lecture Notes. Report No. 76.01 R. Chalmers University of Technology and the University of Goteborg, 1975.

[Fra] Franklin J. Matrix Theory. — Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1968.
[Gan] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Часть I, Основы теории. — М.j Наука, 1966.
[Gant] Гантмахер Ф. Р, Теория матриц. Часть II. Специальные вопросы и приложения. — М.: Наука, 1966.
[GKr] Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. — М: Гостехнздат, 1950.
[GLR 82] Gohberg I., Lancaster P., Rodman L. Matrix Polynomials. Academic Press, New York, 1982.
[CLR 83] Gohberg I., Lancaster P., Rodman L. Matrices and Indefinite Scalar Products. Birkhauser-Verlag, Boston, 1983.
[Grah] Graham A. Kronecker Products and Matrix Calculus with Applications. — Horwood, Chichester, U. K., 1981.
[Gray] Graybill F. A. Matrices with Applications to Statistics. 2d ed. — Wadsworth, Belmont, Calif., 1983.
[Gre] Greub W. H. Multilinear Algebra. 2d ed. — Springer-Verlag, New York, 1978.
[GVI] Golub G., VanLoan C. Matrix Computations. — Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1983.
[Hal 58] Halmos P. R. Finite-Dimensional Vector Spaces. — Van Nostrand, Princeton, N. J., 1958. [Имеется перевод: Халмош П. Конечномерные векторные пространства. — М.: Фнзматгнз, 1963.]
[Hal 67] Halmos P. R. A Hilbert Space Problem Book. — Van Nostrand, Princeton, N. J. 1967. [Имеется перевод: Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. — М.: Мнр, 1970.]
[HJ] Horn R., Jonhson C. Topics in Matrix Analysis. — Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
[HKu] Hoffman K., Kunze R. Linear Algebra. *2d* ed. — Prentice-Hall, Eng-lewood Cliffs, N. J., 1971.
[Hou 64] Householder A. S. The Theory of Matrices in Numerical Analysis. — Blaisdell, New York, 1964.
[Heu 72] Householder A. S. Lectures on Numerical Algebra. — Mathematical Association of America, Buffalo, N. Y., 1972.
[HSm] Hirsch M. W., Smale S. Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra.—Academic Press, New York, 1974.
[Jac] Jacobson N. The Theory of Rings. — American Mathematical Society, New York, 1943. [Имеется перевод: Джекобсон Н. Теория колец.— М.: ИЛ, 1947.]

[Кар] Kaplansky I. Linear Algebra and Geometry: A Second Course. — Allyn & Bacon, Boston, 1969.
[Кар] Rarlin S. Total Positivity. — Stanford University Press, Stanford, Calif., 1960.
[Kel] Kellogg R. B. Topics in Matrix Theory, — Lecture Notes, Report No. 71.04. Chalmers Institute of Teehnolgy and the University of G6teborg, 1971.
[Kow] Kjwalsky H. Lineare Algebra, 4tb ed. — deGrnyter, Berlin, 1969.
[LaH] Lawson C, Hanson R. Solving Least Squares Problems. — Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1974. [Имеется перевод: Лоусон Ч., Хенсои Р. Численное решение задач метода наименьших квадрате». — М.: Наужа, 1986.]
[Lan] Lancaster P. Theory of Matrices. — Academic Press, New York, 1969. [Имеется перевод: Ланкастер П. Теория матриц. — М.: Наука, 1978.]
[LaTi] Lancaster P., Tismenefsfcy M. The Theory of Matrices With Applications. 2d ed. — Academic Press, New York, 1985.
[Mac] MacDuffee C. C The Theory of Matrices. — Chelsea, New York, 1946
[Mar] Marcus M. Finite Dimensional Multilinear Algebra. 2 vols. — Dek-ker, New York, 1973—75. [Mir] Mirsky L. An Introduction to Linear Algebra. — Clarendon Press, Oxford, 1963.
[MMi] Marcus M., Mine H. A Survey of Matrix Theory anf Matrix Inequalities.— Allyn and Bacon, Boston, 1964. [Имеется перевод; Маркус М., Миик X. Обзор по теории матриц и матричных неравенств.— М.: Наука, 1972.1
[MO1] Marshall A. W., Olkin I. Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications. — Academic Press, New York, 1979. [Имеется перевод: Маршалл А., Олкин И. Неравенства теории мажоризации и ее приложения. — М.: Мир, 1983.]
[Mui] Muir T. The Theory of Determinants in the Historical Order of Development. 4 vols. — MacMillan, London, 1906, 1911, 1920, 1923; Dover, New York, 1966. Contributions to the History of Determinants, 1900—1920. — Blackie, London, 1930.
[Ner] Nering E. Linear Algebra and Matrix Theory. 2d ed. — Wiley, New York, 1963.
[New] Newman M. Integral Matrices. — Academic Press, New York, 1972.
[Nob] Noble B. Applied Linear Algebra. — Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1969.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\mathbf{R}$	поле вещественных чисел
$\mathbf{R}^n$	вещественное векторное пространство, состоящее из n-членных наборов с вещественными компонентами, $M_{n,1}(\mathbf{R})$
$\mathbf{C}$	поле комплексных чисел
$\mathbf{C}^n$	комплексное векторное пространство, состоящее из n-членных наборов с комплексными компонентами, $M_{n,1}(\mathbf{C})$
$\mathbf{F}$	поле (обычно $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$)
$\mathbf{F}^n$	векторное пространство (над $\mathbf{F}$), состоящее из n-членных наборов с компонентами из $\mathbf{F}$
$M_{m,n}(\mathbf{F})$	множество $m \times n$- матриц с элементами из $\mathbf{F}$
$M_{m.n}$	множество комплексных $m \times n$ матриц, $M_{m,n}(\mathbf{C})$
M_n	множество комплексных n Х «-матриц, $M_n(\mathbf{C})$
A, B, C и т. д.	матрицы; $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbf{F})$
x, y, z и т. д.	вектор-столбцы;$x = [x_i] \in \mathbf{F}^n$
I	единичная матрица
0	нулевой скаляр, нулевой вектор, нулевая матрица
$\bar{A}$	матрица, составленная нз комплексно-сопряженных к элементам матрицы $A \in M_{m,n}(\mathbf{C})$
A^T	транспонированная к матрице $A \in M_{m,n}(\mathbf{F})$
A^*	сопряженная к матрице $A \in M_{m,n}(\mathbf{C})$, $\bar{A}^T$
A^{-1}	обратная к невырожденной матрице $A \in M_n(\mathbf{F})$
$A^{1/2}$	единственный положительно полуопределенный квадратный корень из положительно полуопределенной матрицы $A \in M_n$
$\lvert A \rvert$	матрица абсолютных значений элементов матрицы $A \in M_{m,n}$
A^+	обобщенная обратная матрица Мура — Пенроуза для матрнцы $A \in M_{m,n}$
adj A	классическая присоединенная матрица для матрицы $A \in M_n(\mathbf{F})$
$\mathscr{B}$	базисвекторного пространства
e_i	i-й вектор естественного базнса в $\mathbf{F}^n$ (обычно)
$[v]_{\mathscr{B}}$	координатное представление вектора v в базнсе $\mathscr{B}$
${}_{\mathscr{B}_1}[T]_{\mathscr{B}_2}$	представление линейного преобразования T в паре базисов $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$
$\binom{n}{k}$	биномиальный коэффициент

$p_A(t)$	характеристический многочлен матрицы $A \in M_n(\mathbf{F})$
$\varkappa(A)$	число обусловленности невырожденной матрицы $A \in M_n$ по отношению к данной матричной норме
$\det A$	определитель матрицы $A \in M_n(\mathbf{F})$
$\oplus$	прямая сумма
$\Gamma(A)$	ориентированный граф матрицы $A \in M_n(\mathbf{F})$
$\Vert\cdot\Vert^D$	двойственная норма к норме
$f^D(\cdot)$	двойственная норма к полунорме
λ	собственное значение матрицы $A \in M_n$ (обычно)
$[\lambda_i(A)]$; $\sigma(A)$	множество собственных значений (спектр) матрицы $A \in M_n$; если A эрмитова, то обычно полагают $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$
$n!$	n факториал, $n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1$
$G(A)$	область Гершгорина матрицы $A \in M_n$
$GL(n, \mathbf{F})$	группа невырожденных матриц в $M_n(\mathbf{F})$
$A \circ B$	произведение Адамара матриц $A, B \in M_{m,n}(\mathbf{F})$
$\gamma(A)$	индекс примитивности примитивной матрицы A
$M(A)$	индикаторная матрица для $A \in M_{m,n}$
$J_k(\lambda)$	жорданов блок размера $k \times k$ с собственным значением λ
$q_A(t)$	минимальный многочлен матрицы $A \in M_n(\mathbf{F})$
$\Vert\cdot\Vert_1$	l_1-норма на $\mathbf{C}^n$; максимальная столбцовая норма на M_n
$\Vert\cdot\Vert_2$	l_2-норма (евклидова норма) на $\mathbf{C}^n$; спектральная норма на M_n
$\Vert\cdot\Vert_\infty$	t_∞-норма на $\mathbf{C}^n$; максимальная строчная норма на M_n
$\Vert\cdot\Vert_p$	l_p-норма на $\mathbf{C}^n$
$\Vert\cdot\Vert_{l_1}$	l_1-норма на M_n
$\Vert\cdot\Vert_E$	l_2-норма (евклидова норма) на M_n
$\Vert\cdot\Vert_{l_\infty}$	l_∞-норма на M_n
$r(A)$	числовой радиус матрицы $A \in M_n$ (обычно)
$\perp$	ортогональное дополнение
per A	перманент матрицы $A \in M_n(\mathbf{F})$
sgn	знак перестановки
$[\sigma_i(A)]$	множество сингулярных чисел матрицы $A \in M_{m,n}$; обычно полагают $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_{\min(m,n)}$
$\sigma_1(A)$	наибольшее сингулярное число матрицы $A \in M_{m,n}$, $\Vert A\Vert_E$
Span S	линейная оболочка подмножества S векторного пространства

$\rho(A)$	спектральный радиус матрицы $A \in M_n$
$A(\alpha, \beta)$	подматрица матрицы $A \in M_{m,n}(\mathbf{F})$, лежащая в строках с номерами из подмножества α и в столбцах с номерами из множества β
tr *A*	след
rank *A*	ранг матрицы $A \in M_{m,n}(\mathbf{F})$

Научно-практическое издание

Кононюк Анатолий Ефимович

Дискретная математика

Книга 3

Матрицы

Часть 4

Авторская редакция

Подписано в печать 25.12.2011 г.
Формат 60х84/16.
Усл. печ. л. 16,5. Тираж 300 экз.

Издатель и изготовитель:
Издательство «Освита Украины»
04214, г. Киев, ул. Героев Днепра, 63, к. 40
Свидетельство о внесении в Государственный реестр
издателей ДК №1957 от 23.04.2009 г.
Тел./факс (044) 411-4397; 237-5992
E-mail: osvita2005@ukr.net, www.rambook.ru