Парадигма развития науки

Методологическое обеспечение

А. Е. Кононюк

ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНАЯ МАТЕМАТИКА

Книга 1

Начала

Киев
«Освіта України»
2012

УДК 51 (075.8)
ББК В161.я7
К213

Рецензенты:

В. В. Довгай — к-т физ.-мат. наук, доц. (Национальный тех—нический университет «КПІ»);

В. В. Гавриленко — д-р физ.-мат. наук, проф.,

О. П. Будя — к-т техн. наук, доц. (Киевский университет эко—номики, туризма и права);

Н. К. Печурин — д-р техн. наук, проф. (Национальный ави—ационный университет).

Кононюк А. Е.
К213 Дискретно-непрерывная математика. (Начала). — В 12-и кн. Кн 1,— К.: Освіта України. 2012. — 576 с.

ISBN 978-966-373-693-8 (многотомное издание)
ISBN 978-966-373-694-5 (книга 1)

Многотомная работа содержит систематическое изложение математических дисциплин, иссползуемых при моделировании и исследованиях математических моделей систем.

В работе излагаются основы теории множеств, отношений, поверхностей, пространств, алгебраических систем, матриц, графов, математической логики, теории вероятностей и массового обслуживания, теории формальных грамматик и автоматов, теории алгоритмов, которые в совокупности образуют единную методолгически взамосвязанную математическую систему «Дискретно-непрерывная математика».

Для бакалавров, специалистов, магистров, аспирантов, докторантов и просто ученых и специалистов всех специальностей.

УДК 51 (075.8)
ББК В161.я7

ISBN 978-966-373-693-8 (многотомное издание)
ISBN 978-966-373-694-5 (книга 1)

© Кононюк А. Е., 2012
© Освіта України, 2012

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс высшей математики, которая читается в вузах, с упором на изучение непрерывных и детерминированных процессов оказывается недостаточным для изложения ряда общетеоретических и специальных дисциплин таких как, например, «Теоретические основы кибернетики», «Оптимальные и адаптивные системы», «Теория и применение управляющих машин», «Большие системы автоматического управления», «Математическое моделирование систем» и др., в которых упор делается на дискретное и случайное. В этих дисциплинах находят широкое применение методы оптимизации, основанные на использовании линейного, нелинейного и динамического программировань, теории игр, теории статистических решений, методы планирования эксперимента, методы теории расписаний и массового обслуживания и др. В основе этих методов лежат общие математические понятия теории множеств и отношений, теории графов, теории многомерных поверхностей и пространств и линейных преобразований, теории вероятностей и математической статистики. Общность математических основ для числовых методов оптимизации позволяет изложить все эти методы довольно компактно и с едининных позиций, что в значительной мере облегчает изучение перечисленных дисциплин и установление связи между ними.

Предлагаемая работа посвящена дискретно-непрерывной математике. Начнем изложение этой работы с описания элементов дискретной математики.

Общеизвестно, что прикладная математика опирается на чистую математику. В книгах по электротехнике не принято объяснять, что такое интеграл по контуру или векторное произведение: само собой разумеется, что необходимые знания читатель получил из курса математического анализа; верно и обратное - курс математического анализа технических и экономических вузов, оставаясь чисто математическим, ориентирован на прикладные задачи, который приходится решать его слушателям. Однако в дискретной математике обе эти традиции еще не установились. Прикладные книги обычно начинаются «с азов», объясняя, что такое дизъюнкция и цикл в графе, а курсы чистой дискретной математики, которые предназначены для специалистов технического и экономического профиля (будущих или действующих), хотя и существуют в виде учебных программ и циклов лекций, в необходимом объеме не реализованы в литературе. Одна из главных целей этой работы - попытка создать такой курс. В нем рассмотрены почти все основные разделы дискретной математики, за исключением линейного и дискретного программирования, которые рассмотрены автором в работе «Основы теории оптимизации».

У этой работы есть еще одна цель. Среди специалистов-«прикладников», очень распространен взгляд на математику как на большой справочник, который нужно уметь открыть на нужной странице. Специалисты-«прикладники» любят формулы и методы, но не любят теорем и тем более - их доказательств (да и в соответствующей литературе их по обыкновению печатают более мелким шрифтом). И это поняло. При утилитарном подходе к математике знание доказательств ничего не прибавляет к знанию результата: важно знать, «что» и «зачем», но очень редко - «как» и «чему». Такой подход тем не менее может оправдывать себя в областях с давно устоявшимися моделями объектов и процессов. Однако в задачах управления все чаще главной научной проблемой является не работа с существующими моделями, а создание новых моделей: вчера - это было сетевое планирование и логика цифровых схем, сегодня - это применение формальных грамматик в языках программирования, сегодня - это нечеткая математика и т.д. В такой ситуации **математика нужна уже не как метод расчетов, а как метод мышления, как язык, как средство формирования и организации понятий.** Такое владение математикой требует большой культуры: понимание важности точных формулировок и умение обходиться без них там, где они мешают пониманию сущности дела, «чувство нетривиальности» - умение понять, что просто, что сложно, а что невозможно, ощущение связи между, казалось бы, далекими идеями и понятиями.

В работе можно выделить следующие основные направления :

1) множества,
2) отношения,
3) алгебры,
4) матрицы
5) графы.
6) поверхности,
7) пространства,
8) формальная логика
9) вероятности и массовое обслуживание
10) автоматы,
11) математическая лингвистика
12) теория алгоритмов и формальные системы

Первая книга настоящей работы посвящена началам дискретной математики; собственно говоря эта часть работы служит развернутым словарем для других направлений работы. Ее «языковой» характер сказывается, в частности, в том, что в ней очень много определений и примеров, но мало теорем. Примеры подбирались как можно более широко, чтобы продемонстрировать универсальность языка теории множеств и отношений.

Нашим исходным неопределяемым понятием является понятие множества, которое описывает перечисление свойств, которыми оно обладает. Исходя из этого, можно определить все следующие понятия конструктивным и математически приемлемым образом. Такой подход необходим, поскольку любую ошибку легко можно проследить, возвратившись назад к неправильному предложению где-то в цепочке соображений. Это также означает, что часть или же вся рассмотренная теория может быть запрограммирована.

Множества обсуждаются в разделе 1.1 и используются дальше во всей работе.

В работе приводятся определения большинства понятий, которые, как правило, довольно хорошо известны, поскольку множества благодаря своей наглядности и универсальности за короткое время стали наиболее распространенным языком задач управления и математического моделирования. Напротив, материал последующих разделов не является элементарным. Кроме самостоятельного теоретического и прикладного содержания, которые имеют изложенные здесь задачи и методы их решения, представляет особый интерес взгляд на эти задачи с общетеоретической точки зрения, и прежде всего с точки зрения теории алгоритмов. Здесь речь идет о круге проблем, которые стали одними из важнейших в дискретной математике в целом - сложности вычислений. Важность результатов в этой области - не только в том, что они помогают оценить затраты времени и памяти при решении задач на ЭВМ. Подобно тому, как общая теория алгоритмов впервые показала, что бывают задачи неразрешимые, область, которая бурно развивается - теория сложности постепенно приводит к пониманию того, что бывают задачи объективно сложные (пример - так называемые универсальные задачи перебора), причем сложность может оказаться в некотором смысле абсолютной, т.е. практически невозможно выполнить перебор никаким увеличением мощности вычислительных средств. Рассмотрение этих задач поучительно еще и потому, что почти все они имеют характерный для дискретной математики эффект соединения простоты формулирования со сложностью решения.

Отдельные книги работы посвященные теориям логики и автоматов.

Логика и автоматы уже стали традиционным разделом курсов дискретной математики. Однако в отличие от большинства книг, из которых специалист черпает знание по этим вопросам, здесь они изложены как разделы чистой математики. В разделе об автоматах используются понятия теории алгоритмов и формальных систем. Основные идеи и результаты теории автоматов, которые в свое время считались непрактичными - задачи о распознавании множеств автоматами, асимптотическая теория схем Шеннона-Яблонского-Ляпанова и т.д.,- выдержали проверку временем. Именно они находят широкое применение в разных областях кибернетики - таких, как системное программирование, сложность вычислений, искусственный интеллект.

В поледующих книгах рассматриваются теория алгоритмов и формальных систем.

Вопрос теории алгоритмов и формальных систем традиционно относят к «высокой науке», считая их трудными для понимания. Возникли чисто прикладные ответвления этой теории, связанные с алгоритмическими языками программирования и сложностью вычислений. Знание основных неразрешимостей теории алгоритмов и принципов организации формальных вычислений становится важным элементом математической культуры любого исследователя, который имеет отношение к алгоритмизации процессов управления и моделирования. В сущности говоря, оно дает понимание того, что можно и чего нельзя сделать с помощью вычислительных машин. Сейчас, когда вычислительных машин больше, чем людей, которые умеют правильно их использовать, такое понимание особенно важно. Вообще, на наш взгляд, исследователь, который работает с задачами управления, моделирования и переработки информации, особенно, если он имеет дело с ЭВМ, подготовлен к восприятию основных идей теории алгоритмов ничуть не хуже, чем математик. Более того, при изложении этих идей в прикладной книге появляется возможность аппелировать к программистской интуиции читателя, что для понимания здесь не менее важно, чем запас обычных математических знаний.

Изложение материала носит, по возможности, конструктивный характер. Везде, где возможно, в каждой новой теме используются понятия и термины из предыдущих тем; материал сопровождается многочисленными упражнениями и примерами. Следует подчеркнуть, что разбор примеров и решение упражнений является составной частью изучения предлагаемого материала.

Одним из путей улучшения качества научно-учебно-методического процесса в вузах есть введение модульно-рейтинговой системы обучения, которая является неотъемлемой составной всего учебно-воспитательного процесса и диагностики результатов обучения. Модульно-рейтинговая система оказывает содействие созданию необходимых условий и обстоятельств для получения определенного уровня квалификации.

В отличие от существующей дидактической системы оценивания знаний модульно-рейтинговая система сориентирована на стимулирование познавательной деятельности студентов, за счет сокращения аудиторных занятий и прироста объема часов на самостоятельную работу, индивидуальную работу под руководством преподавателя. Студент в процессе обучения развивает в себе привычки самостоятельно оценивать свой уровень подготовки, выбирать и определять уровень усвоения знаний.

Многотомное научно-учебное пособие представляет собой методически взимосвязанный курс, который будет полезен для подготовки специалистов (магистров) по разным специальностям.

Учитывая разное количество часов, которые отводятся по учебному плану для изучения дискретной математики студентами разных специальностей, преподаватель (лектор) может корректировать содержание разделов, количество тестовых задач, которые студент должен выполнить на протяжении срока, отведенного учебным планом.

1. Базовые компоненты

1.1. Множества

1. Что такое множество? Ответить на этот вопрос не так просто, как это кажется на первый взгляд. В повседневной жизни и практической деятельности часто приходится говорить о некоторых совокупностях различных объектов: предметов, понятий, чисел, символов и т. п. Например, совокупность деталей механизма, аксиом геометрии, чисел натурального ряда, букв русского алфавита. На основе интуитивных представлений о подобных совокупностях сформировалось математическое понятие *множества* как объединения отдельных объектов в единое целое. Именно такой точки зрения придерживался основатель теории множеств немецкий математик Георг Кантор.

Множество относится к категории наиболее общих, основополагающих понятий математики. Поэтому вместо строгого определения обычно принимается некоторое основное положение о множестве и его элементах. Так, группа выдающихся математиков, выступающая под псевдонимом Н. Бурбаки, исходит из следующего положения: «Множество образуется из элементов, обладающих некоторыми свойствами и находящихся в некоторых отношениях между собой или с элементами других множеств».

2. Множество и его элементы. Утверждение, что множество A состоит из различимых элементов $a_1, a_2, ..., a_n$ (и только из этих элементов), условно записывается $A=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Принадлежность элемента множеству *(отношение принадлежности)* обозначается символом $\in$, т. е. $a_1 \in A, a_2 \in A, ..., a_n \in A,$ или короче $a_1, a_2, ..., a_n \in A$. Если b не является элементом A, то пишут $b \notin A$.

Два множества A и B *равны (тождественны)*, $A = B$, тогда и только тогда, когда каждый элемент A является элементом B и обратно. Это значит, что множество однозначно определяется своими элементами.

Множество может содержать любое число элементов — конечное или бесконечное. Соответственно имеем *конечные* (множество цифр 0, 1, ... 9 или страниц в книге) или *бесконечные* (множество натуральных чисел или окружностей на плоскости) множества. Не следует, однако, связывать математическое понятие «множество» с обыденным представлением о множестве как о большом количестве. Так, *единичное (одноэлементное)* множество содержит только один элемент. Более того, вводится также понятие *пустого множества,* которое не содержит никаких элементов. Пустое множество обозначается специальным символом $\varnothing$.

Роль пустого множества $\varnothing$ аналогична роли числа нуль. Это понятие можно использовать для определения заведомо несуществующей совокупности элементов (например, множество зеленых слонов, действительных корней уравнения $x^2+1=0$). Более существенным мотивом введения пустого множества является то, что заранее не всегда известно (или неизвестно вовсе), существуют ли элементы, определяющие какое-то множество. Например, множество выигрышей в следующем тираже спортлото на купленные билеты может оказаться пустым. Никто еще не знает, является ли пустым или нет множество всех решений в целых числах уравнения $x^3 + y^3 + z^3 = 30$. Без понятия пустого множества во всех подобных случаях, говоря о каком-нибудь множестве, приходилось бы добавлять оговорку «если оно существует».

3. Множество и подмножества. Множество A, все элементы которого принадлежат и множеству B, называется *подмножеством (частью)* множества B. Это отношение между множествами называют *включением* и обозначают символом $\subset$, т. е. $A \subset B$ *(A включено в B)* или $B \supset A$ *(B включает A)*. Например, множество конденсаторов электронной цепи является подмножеством всех ее компонентов, множество положительных чисел — это подмножество множества действительных чисел.

Отношение $A \subset B$ допускает и тождественность *($A = B$)*, т. е. любое множество можно рассматривать как подмножество самого себя *($A \subset A$)*. Полагают также, что подмножеством любого множества является пустое множество $\varnothing$, т. е. $\varnothing \subset A$. Одновременное выполнение соотношения $A \subset B$ и $B \subset A$ возможно только при $A = B$. И обратно $A = B$, если $A \subset B$ и $B \subset A$. Это может служить определением равенства двух множеств через отношение включения.

Наряду с $A \subset B$, в литературе можно встретить и другое обозначение $A \subseteq B$. При этом под $A \subseteq B$ понимают такое отношение включения, которое не допускает равенства A и B *(строгое включение)*. Если допускается $A = B$, то пишут $A \subseteq B$ *(нестрогое включение)*. Мы будем придерживаться принятого ранее обозначения как для строгого, так и для нестрогого включения.

4. Множество подмножеств. Любое непустое множество A имеет, по крайней мере, два различных подмножества: само A и пустое множество $\varnothing$. Эти подмножества называются *несобственными,* а все другие подмножества A называют *собственными* (эта терминология связана со словами «собственно подмножества», а не со словом «собственность»). Конечные собственные подмножества образуются всевозможными сочетаниями по одному, два, три и т. д. элементов данного множества.

Элементы множества сами могут являться некоторыми множествами. Например, книга из множества книг в шкафу может рассматриваться как множество страниц. Здесь следует обратить внимание на то, что речь идет об элементах множества, а не о подмножествах (никакая совокупность страниц не может рассматриваться как подмножество множества книг).

Множество, элементами которого являются *все* подмножества множества *A*, называют *множеством подмножеств (множеством-степенью) A* и обозначают через $P(A)$. Так, для трехэлементного множества $A=\{a, b, c\}$ имеем $P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$.

В случае конечного множества *A*, состоящего из n элементов, множество подмножеств $P(A)$ содержит 2^n элементов. Доказательство основывается на сумме всех коэффициентов разложения бинома Ньютона или на представлении подмножеств n-разрядными двоичными числами, в которых 1 (или 0) соответствует элементам подмножеств.

Следует подчеркнуть различия между отношением дринадлежности и отношением включения. Как уже указывалось, множество *A* может быть своим подмножеством $(A \subset A)$, но оно не может входить в состав своих элементов $(A \notin A)$. Даже в случае одноэлементных подмножеств следует различать множество $A = \{a\}$ и его единственный элемент a. Отношение включения обладает свойством транзитивности: если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$. Соотношение принадлежности этим свойством не обладает. Например, множество $A = \{1, \{2, 3\}, 4\}$ в числе своих элементов содержит множество $\{2, 3\}$, поэтому можно записать: $2,3 \in \{2, 3\}$ и $\{2, 3\} \in A$. Но из этого вовсе не следует, что элементы 2 и 3 содержатся в *A* (в приведенном примере мы не находим 2 и 3 среди элементов множества *A*, т. е. $2, 3 \notin A$).

5. Задание множеств. Множество $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ можно задать простым перечислением его элементов. Например, спецификация задает множество деталей изделия, каталог — множество книг в библиотеке. Но этот способ не пригоден для задания бесконечных множеств и даже в случае конечных множеств часто практически нереализуем.

Рассмотрим в качестве примера фасад 16-этажного дома с 38 окнами в каждом этаже. В вечернее время каждое из окон дома может быть освещено или затемнено, т. е. находиться в двух состояниях.

Определенные совокупности освещенных окон можно рассматривать как некоторые образы. Считая все окна (их число равно 38 • 16 = 608) различными по их расположению на фасаде, каждый такой образ можно связать с соответствующим подмножеством освещенных окон. Тогда количество всех образов равно количеству элементов множества подмножеств всех окон, т. е. $2^{608} \approx 10^{183}$. Полученное число настолько большое, что его трудно даже представить. Оно несравнимо больше числа атомов во всей видимой вселенной, которое равно примерно 10^{73}. Если бы каждый атом превратился во вселенную, то и тогда на один атом приходилось бы 10^{37} образов ($10^{183} = 10^{73} \cdot 10^{73} \cdot 10^{37}$). Поэтому, хотя множество всех образов конечно и любой из них можно легко определить, о задании подобных множеств перечислением их элементов не может быть и речи

6. Определяющее свойство. Другой способ задания множества состоит в описании элементов *определяющим свойством* $P(x)$ *(формой от* x*)*, общим для всех элементов. Обычно $P(x)$ — это высказывание, в котором что-то утверждается об x, или некоторая функция переменной x. Если при замене x на a высказывание $P(a)$ становится истинным или функция в заданной области определения удовлетворяется, то a есть элемент данного множества. Множество, заданное с помощью формы $P(x)$, обозначается как $X = \{x|P(x)\}$, или $X = \{x: P(x)\}$, причем $a \in \{x|P(x)\}$, если $P(a)$ истинно. Например $\{x \mid x^2 = 2\}$ — множество чисел, квадрат которых равен двум, $\{x|x$ есть животное с хоботом$\}$ — множество слонов.

Обычно уже в самом определении конкретного множества явно или неявно ограничивается совокупность допустимых объектов. Так, множество слонов следует искать среди млекопитающих, а не среди рыб и тем более не среди планет. Если речь идет о множестве чисел, делящихся на 3, то ясно, что оно является подмножеством целых чисел. Удобно совокупность допустимых объектов зафиксировать явным образом и считать, что рассматриваемые множества являются подмножествами этой совокупности. Ее называют *основным множеством (универсумом)* и обычно обозначают через U. Так, универсумом арифметики служат числа, зоологии — мир животных, лингвистики — слова и т. п.

Если множество выделяется из множества A с помощью формы $P(x)$, то запись $\{x|x \in A, P(x)\}$ часто упрощается: $\{x \in A|P(x)\}$. Запись $\{f(x)|P(x)\}$ означает множество всех таких $y = f(x)$, для которых имеется x, обладающий свойством $P(x)$. Например, $\{x^2| x$ — простое число$\}$ означает множество квадратов простых чисел.

7. Операции над множествами. Множества можно определять также при помощи операций над некоторыми другими множествами. Пусть имеются два множества A и B.

Объединение (сумма) $A \cup B$ есть множество всех элементов, принадлежащих A или B. Например, $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Пересечение (произведение) $A \cap B$ есть множество всех элементов, принадлежащих одновременно как A, так и B. Например, $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$. Множества, не имеющие общих элементов ($A \cap B = \varnothing$), называют *непересекающимися (расчлененными).*

Разность $A \backslash B$ (или $A — B$) есть множество, состоящее из всех элементов A, не входящих в B, например, $\{1,2,3\}\backslash\{2,3, 4\} = \{1\}$. Ее можно рассматривать как *относительное дополнение* B до A. Если $A \subset U$, то множество $U \backslash A$ называется *абсолютным дополнением* (или просто *дополнением)* множества A и обозначается через $\overline{A}$. Оно содержит все элементы универсума U, кроме элементов множества A. Дополнение A определяется отрицанием свойства $P(x)$, с помощью которого определяется A. Очевидно, $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.

Дизъюнктивная сумма (симметрическая разность) $A + B$ (или $A \oplus B$) есть множество всех элементов, принадлежащих или A, или B (но не обоим вместе). Например, $\{1, 2, 3\} + \{2, 3, 4\} = \{1, 4\}$. Дизъюнктивная сумма получается объединением элементов множеств за исключением тех, которые встречаются дважды.

8. Круги Эйлера. Для наглядного изображения соотношений между подмножествами какого-либо универсума U используют *круги Эйлера* (рис. 1).

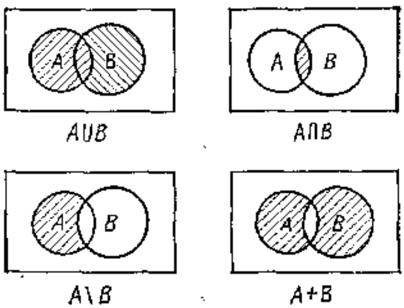


Рис. 1. Круги Эйлера для основных операций над множествами.

Обычно универсум представляется множеством точек прямоугольника, а его подмножества изображаются в виде кругов или других простых областей внутри этого прямоугольника.

Множества, получаемые в результате операций над множествами *A* и *B,* изображены на рис. 1 заштрихованными областями. Непересекающиеся множества изображаются неперекрывающимися областями, а включение множества соответствует области, целиком располагающейся внутри другой (рис.2).

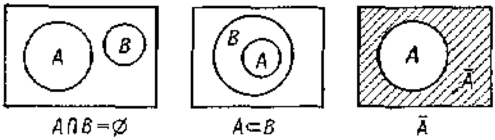


Рис. 2. Круги Эйлера для непересекающихся множеств, отношения включения и дополнения.

Дополнение множества *A* (до *U),* т. е. множество $\overline{A}$ изображается той частью прямоугольника, которая лежит за пределами круга, изображающего *A*.

9. Отношения. В начале этого параграфа речь шла о том, что элементы множества могут находиться в некоторых отношениях между собой или с элементами других множеств. В самом общем смысле **<u>отношение</u> означает какую-либо связь между предметами или понятиями**. Отношения между парами объектов называют *бинарными (двуместными).* Выше уже были рассмотрены два таких отношения — принадлежность $(a \in A)$ и включение $A \subset B$.

Первое из них определяет связь между множеством и его элементами, а второе — между двумя множествами. Примерами бинарных отношений являются равенство (=), неравенства (< или ≤), а также такие выражения как «быть братом», «делиться (на какое-то число)», «входить в состав (чего-либо)» и т. п.

Для любого бинарного отношения можно записать соответствующее ему *соотношение* (для отношения неравенства соотношением будет $x < y$, для отношения «быть братом» соотношение запишется как «*x брат y»).* В общем виде соотношение можно записать как *xAy,* где *A* — отношение, устанавливающее связь между элементом *x* из множества X $(x \in X)$ и элементом *y* из множества Y $(y \in Y)$. Ясно, что отношение полностью определяется множеством всех пар элементов *(x, y),* для которых оно имеет место. Поэтому любое бинарное отношение *A* можно рассматривать как множество *упорядоченных пар (x, y).*

Отношения могут обладать некоторыми общими свойствами (например, отношение включения и отношение равенства транзитивны). Определяя эти свойства и комбинируя их, можно выделить важные типы отношений, изучение которых в общем виде заменяет рассмотрение огромного множества частных отношений.

10. Функции как отношения. Функция *f*, ставящая каждому числу *x* (аргументу) в соответствие определенное число (значение функции) $y = f(x)$, также является бинарным отношением.

Обобщая это понятие, можно считать *функцией* такое бинарное отношение *f*, которое каждому элементу *x* из множества *X* ставит в соответствие один и только один элемент из множества *Y*, т. е. xfy. При этом считают, что элементами множеств *X* и *Y* могут быть объекты любой природы, а не только числа.

Функцией в таком общем понимании будет, например, соответствие между деталями какого-либо механизма и их массой (каждой детали соответствует ее масса), между человеком и его фамилией и т. п. В то же время такие отношения как неравенство $(<)$ или «быть братом» функциями не являются, так как для каждого числа можно указать бесконечные множества превышающих его чисел, а человек может иметь несколько братьев или совсем их не иметь.

Обобщение понятия функции явилось одним из отправных моментов нового важного раздела современной математики — функционального анализа. Это понятие имеет огромное прикладное значение, так как позволяет рассматривать функциональные отношения между объектами любой природы.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Какие из приведенных ниже соотношений неверны и почему?

а) $x \in \{2, a, x\}$;б) $3 \in \{1, \{2, 3\}, 4\}$; в) $x \in \{1, \sin x\}$; г) $\{x, y\} \in \{a, \{x, y\}, b\}$.

2.Равны ли между собой множества *A* и *B* (если нет, то почему)?

а) $A = \{2, 5, 4\}$, $B = \{5, 4, 2\}$;
б) $A = \{1, 2, 4, 2\}$, $B = \{1, 2, 4\}$;
в) $A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 3\}$;
г) $A = \{1, \{2, 5\}, 6\}$, $B = \{1, \{5, 2\}, 6\}$;
д) $A = \{1, \{2, 5\}, 6\}$, $B = \{1, 2, 5, 6\}$.

3. Связаны ли множества *A* и *B* отношением включения (если да, то укажите, какое из них является подмножеством другого)?

а) $A = \{a, b, d\}$, $B = \{a, b, c, d\}$;
б) $A = \{a, c, d, e\}$, $B = \{a, e, c\}$;
в) $A = \{c, d, e\}$, $B = \{c, a\}$.

4. В каких отношениях находятся между собой следующие три множества: $A = \{1, 3\}$; *B* — множество нечетных положительных чисел; *C* — множество решений уравнения $x^2 - 4x + 3 = 0$?

5. Образуйте множество праздничных дней 2010 г. Пересекается ли это множество с множеством воскресных дней того же года? Если да, то запишите элементы пересечения этих двух множеств.

6. К каким видам относятся следующие множества: A — множество конденсаторов в радиоприемнике; B — множество квадратов целых чисел; C — множество решений уравнения $2x - 3 = 0$; D — множество деревьев на Луне?

7. Приняв множество первых 20 натуральных чисел в качестве универсума, запишите следующие его подмножества: A — четных чисел; B — нечетных чисел; C — квадратов чисел; D — простых чисел. В каких отношениях находятся эти подмножества?

8. Запишите множества, получаемые в результате следующих операций над множествами из задачи 7: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cap D$, $C \setminus A$, $C \setminus B$, $C + D$. Сформулируйте определяющие свойства каждого из полученных множеств.

9. Три прибора x, y, z сравнивают по двум показателям, причем выделяют тот из приборов, у которого данный показатель наилучший (случаи одинаковых показателей исключаются).

а) Образуйте множество U всевозможных исходов такого сравнения, обозначив элементы этого множества упорядоченными парами букв для приборов с наилучшими показателями (например, исход yx означает, что по первому показателю лучшим оказался прибор y, а по второму — прибор x).

б) Сколько элементов содержит множество всевозможных исходов сравнения m приборов по n показателям?

в) Перечислите элементы множеств возможных исходов, при которых прибор x оказывается лучшим по первому показателю (A), по второму показателю (B), хотя бы по одному показателю (C), по обоим показателям (D), не является лучшим ни по одному показателю (E).

10. Для множеств A, B, C, D, E из задачи 9в дайте ответы на следующие вопросы:

в) Какие множества выражаются через объединение, дополнение, пересечение других множеств?

б) Какому множеству соответствует разность $A \setminus B$ и каков его смысл?

в) Какие множества связаны между собой отношением включений?

г) Какому множеству соответствует дизъюнктивная сумма $A + B$ и каков его смысл?

11. На примере множеств A и B из задачи 9в покажите справедливость соотношения $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ и проиллюстрируйте его с помощью кругов Эйлера.

12. Что можно сказать об отношениях между множествами A, B, C, представленными кругами Эйлера на рис. 3? Запишите с помощью операций над мргожествами выражения для множеств, соответствующих заштрихованным областям.

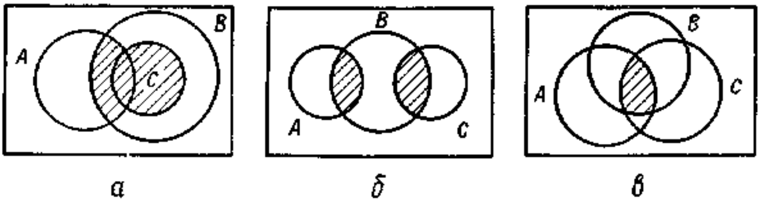


Рис. 3. Круги Эйлера к задаче 12.

13. Для написания цифр почтового индекса используют множество из девяти элементов, которые обозначены буквами на рис. В.4, *а,* а сами цифры изображены на рис. 4, *б.*

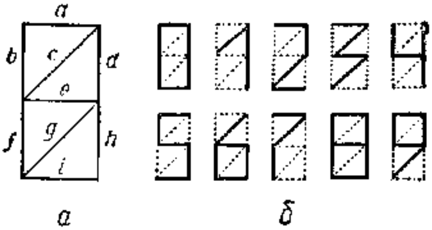


Рис. 4. Начертание цифр почтового индекса:
а — элементы исходного множества; *б*— цифры.

а) Сколько различных фигур можно изобразить с помощью всевозможных комбинаций из элементов исходного множества, считая, что в каждой такой комбинации может участвовать от 0 до 9 элементов? Какой процент этих комбинаций используется для начертания цифр?

б) Запишите множества A_k $(k = 0, 1, ..., 9)$ элементов каждой из десяти цифр (например, $A_7 = \{a, c, f\}$). Имеются ли среди них непересекающиеся множества?

в) Запишите для клждого из элементов s $(s = a, b, ..., i)$ множество B_s, состоящее из цифр, в написании которых используется элемент s (например, $B_f = \{0, 6, 7, 8\}$). Какие элементы используются наиболее редко и наиболее часто?

г) Считая мерой близости цифр количество общих элементов, укажите цифры, наименее и наиболее близкие цифре 3. Какой операции над множествами A_k соответствует множество, определяющее меру близости цифр?

14. В химическом продукте могут оказаться примеси четырех видов, обозначенных через a, b, c, d. Приняв в качестве исходного множества $A = \{a, b, c, d\}$, образуйте множество всех его подмножеств $P(A)$. Дайте содержательное истолкование этого множества и его элементов. Каким ситуациям соответствуют, в частности, несобственные подмножества?

15. Докажите, что для конечного множества, состоящего из n элементов, множество всех его подмножеств содержит 2^n элементов.

16. Проверьте свойство транзитивности отношения включения на примере множеств $X = \{b, c\}$, $Y = \{a, b, c\}$, $Z = \{b\}$.

17. Дайте словесное описание каждому из следующих множеств:

а) $\{x|x$ — точка плоскости, находящаяся на расстоянии r от начала координат$\}$;

б) $\{x|x^2 - 4x + 3 = 0\}$;

в) $\{x|x$— инженер нашего отдела$\}$;

г) $\{x|x \in A$ и $x \in B\}$; A —множество транзисторов; B —множество деталей радиоприемника;

д) $\{x \in R|x = 3k, k \in N\}$; N — множество натуральных чисел;

е) $\{x^2 + 1 \mid x$ — целое число$\}$.

18. Покажите, что для любых множеств A и B справедливо соотношение $\varnothing \subset A \cap B \subset A \cup B$.

19. Покажите, что для любого множества A справедливы соотношения: $A + A = \varnothing$; $A + \varnothing = A$.

20. Покажите, что из соотношения $A \cap B = C$ следует $C \subset A$ и $C \subset B$.

21. Пусть M_1 и M_2 — соответственно множества деталей первого и второго механизмов, а P—множество пластмассовых деталей. Запишите в виде теоретико-множественных соотношений следующие условия.

а) Среди деталей первого механизма имеются все пластмассовые детали.

б) Одинаковые детали, входящие в оба механизма, могут быть только пластмассовыми.

в) Во втором механизме нет пластмассовых деталей.

22. Является ли совокупность полученных в предыдущей задаче соотношений ($P \subset M_1$, $M_1 \cap M_2 \subset P$, $M_2 \cap P = \varnothing$) непротиворечивой? Если да, то можно ли ее упростить? Для ответа на поставленные вопросы проведите сначала логические рассуждения, а затем воспользуйтесь кругами Эйлера. Сформулируйте выводы, соответствующие полученному результату.

23. Запишите множество упорядоченных пар (x, y), выражающих отношение *«x — делитель y»* на множестве целых чисел от 2 до 10 включительно. Является ли это отношение функцией? Обладает ли оно свойством транзитивности?

24. Запишите отношение между элементами множества цифр из задачи 13, выражающееся как *«x* имеет больше двух общих элементов с *y»*.

25. Пусть $x \in X$, $y \in Y$ и A — отношение между элементами множеств X и Y, выражаемое соотношением xAy. Укажите, в каких случаях A можно рассматривать как функцию:

а) X — множество студентов, Y — множество учебных дисциплин, xAy — «x изучает y»;

б) X — множество спортсменов, Y —рост в единицах длины, xAy — «x имеет рост y»;

в) X — множество компонентов электрической цепи, Y — множество узлов цепи, xAy — «x связан с y».

1.2. Основные понятия арифметики

1.2.1. Операции и их свойства

Определение. *Операцией над множеством* S называется функция f: $S^n \to S$, $n \in$ N.

В этом определении есть два важных момента, которые заслуживают особого вспоминания. Во-первых, раз операция является функцией, то результат применения операции *однозначно определен.* Поэтому данный упорядоченный набор из n элементов S функция f переводит только в один элемент S. Во-вторых, поскольку область значений операции лежит в S, на которое операция действует, будем говорить, что операция *замкнута* на S,

Говорят, что операция $S^n \to S$ *имеет порядок* n. Ограничимся рассмотрением ситуаций, когда порядок равен 1 или 2. В этом случае операции называют *монадическими* (или *унарными)* и *диадическими* (или *бинарными)* соответственно. Элементы набора из n элементов в области определения называют ***операндами***. Операции обычно обозначают символами, которые называют ***операторами***. В случае унарных операций обычно символ оператора ставят перед операндом.

Наиболее простым примером является операция изменения знака на **R**. В предположении, что операция сложения уже определена, $-x$ определяет операцию x □ y: $x+y=0$ (x отображается в y: $x+y=0$).

Определение. Бинарные операции обозначают одним из трех способов. В первом случае оператор ставится между операндами *(infix),* во второму — перед операндами *(prefix)* и в третьему — после операндов *(postfix).*

Пример 1.

a+b   infix,

+ab   prefix,

ab+   postfix.

Переход от одной формы к другой нетруден и лучше всего описывается в терминах ориентированных графов, которые будут обсуждаться в дальнейших разделах.

В соответствии с большинством математических текстов, исключая некоторые работы по алгебре и формальной логике, мы будем использовать обозначение *infix.* Другие обозначения имеют то преимущество, что не требуют скобок при определении порядка вычислений сложных выражений, и это делает их особенно удобными для автоматической обработки. Можно проверить соответствие между следующими парами выражений, которые записаны в формах *infix* и *postfix* соответственно:

а) $a+b\bullet c+(d+e\bullet (f+g),$

$abc\bullet + defg+\bullet ++;$

б) $(a+b)\bullet c+d+e\bullet f+g,$

$ab+c\bullet d+ef\bullet +g+;$

в) $a+(b\bullet (c+d)+e)\bullet f+g,$

$abed+ e+f +g+.$

Пример 2. Рассмотрим алгебраическое выражение

$$a + b \bullet c + (d + e \bullet (f + g))$$

и его представление на рис. 1, корое называют деревом.

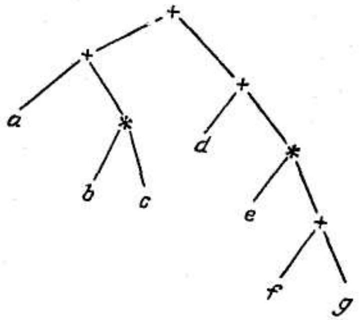


Рис. 1

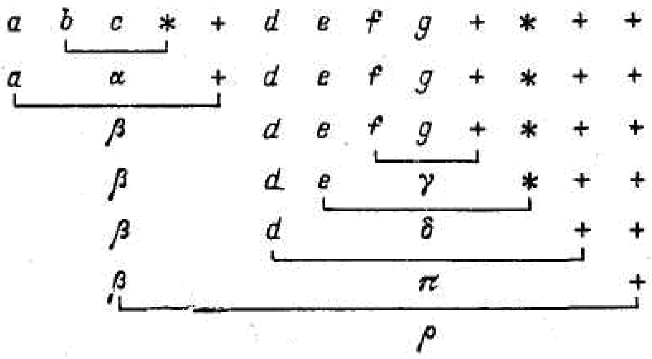
Из свойств арифметических операций мы знаем, что значение этого выражения можно вычислить многими способами. Однако если двигаться слева направо и снизу вверх, то получаем

$$\alpha \leftarrow b \bullet c,\ \ \beta \leftarrow a + \alpha,\ \ \gamma \leftarrow f + g,$$
$$\delta \leftarrow e \bullet \gamma,\ \ \pi \leftarrow d + \delta,\ \ \rho \leftarrow \beta + \pi.$$

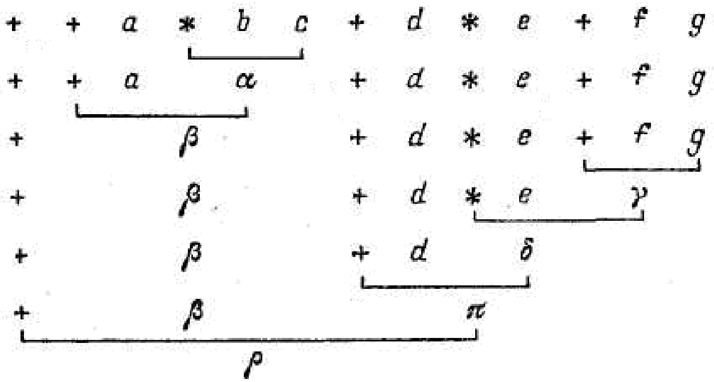
Здесь греческими буквами обозначаются промежуточные результаты, за исключением ρ - искомого результата.

Вычисление значения этого выражения с помощью дерева выполняется очень просто, однако если работать непосредственно с исходным выражением, то это можно сделать по-иному. Действительно, обычно *(infix)* выражение, как это показано в примере, нерегулярно потому, что некоторые подвыражения заключены в скобки, а некоторые нет. Особенно такая ситуация будет наблюдаться в том случае, если проинтегровать информацию о различных символах на дереве (поскольку на самом деле его нет). Очевидно, что формы записи *prefix* и *postfix* этого выражения несут больше информации.

Вычисление значения выражения в форме *postfix* осуществляется следующим образом:



Аналогично в форме *prefix* вычисления осуществляются следующим образом:



«Переходы» по дереву показаны на рис. 2, *а* (форма *prefix),* на рис. 2,*b* (форма *postfix)* и на рис. 2, *с* (форма *infix)* со скобками:

$$((a + (b \bullet c)) + (d + (e \bullet (g + g)))).$$

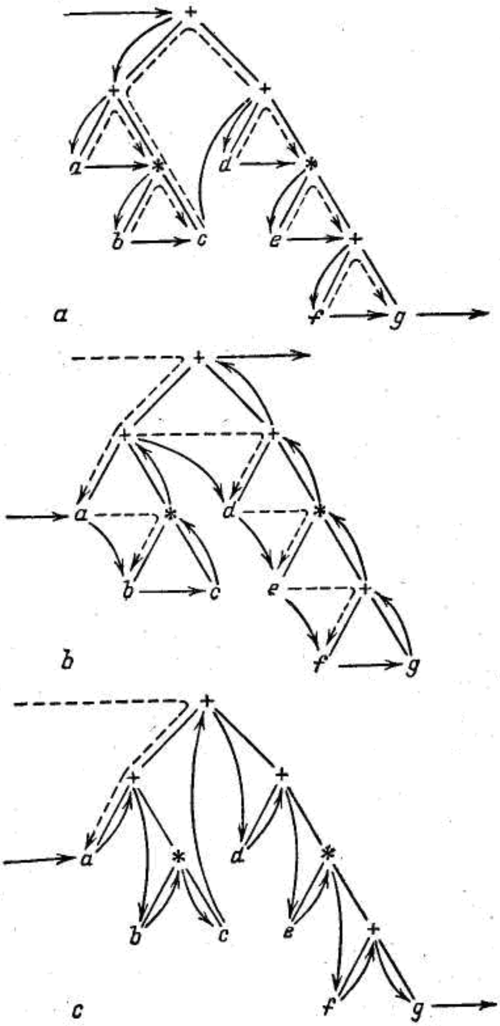


Рис. 2

К этим вопросам мы возвратимся позже.

Мы уже знакомы со многими бинарными операциями, например с арифметическими операциями +, •, —, / и операциями над множествами — объединением (□) и пересечение (I).

Операции, которые определены на конечных множествах, часто удобнее задавать при помощи таблиц.

Пример 3. Пусть операция $\otimes$ определена на множестве $\{a,\ b,\ c\}$ при помощи таблицы

$\otimes$	$a\ b\ c$
a	$a\ a\ b$
b	$b\ a\ c$
c	$a\ b\ b$

Следовательно,

$$a \otimes b = a,$$
$$b \otimes b = a,$$
$$c \otimes b = b,$$

разных операций, которые будут вво Такие символы, как ⊗ будут использоваться для обозначения

Такие символы, как $\otimes$ и $\oplus$, будут использоваться для обозначения различных операций, которые будут вводиться в процессе изложения материала.

Очевидно, что использование таблиц имеет важное значение, так как некоторые операции, с которыми приходится иметь дело в дискретной математике, непригодны для словесного задання.

Обратим теперь внимание на свойства операций. Операции вместе со своими следствиями обеспечивают основу всех алгебраических вопросов математики, так как они определяют порядок работы с объектами.

Определение. Говорят, что бинарная операция $\otimes$ на множестве *А коммутативна,* если

$$a \otimes b = b \otimes a \quad \text{для всех} \quad a, b \in A.$$

Следовательно, обычная операция сложения на Z коммутативна, а вычитания — нет.

Определение. Говорят, что операция $\otimes$ на множестве *А ассоциативна,* если

$$(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c) \quad \text{для всех} \quad a,b,c \in A.$$

Заметим, что в определении ассоциативности порядок операндов a, b и c сохранен (операция может быть некоммутативной!) и использованы круглые скобки, чтобы определить порядок вычислений.

Таким образом, выражение $(a \otimes b) \otimes c$ требует, чтобы сначала вычислялось $a \otimes b$ и результат этого (скажем, x) участвовал в операции с c, т.е. давал $x \otimes c$. Если операция ассоциативна, то порядок вычислений несуществен и, следовательно, скобки не нужны.

Пример 4. Над **Z** имеем

$$(1+2)+3 = 1+2+3 = 1+(2+3),$$

но

$$(1-2)-3 = -4 \text{ и } 1-(2-3)=2.$$

Таким образом, операция вычитания не ассоциативна.

Комутативность и ассоциативность являются двумя важнейшими свойствами, которые могут быть определены для простых операций. Перед тем как описывать свойства, которые связывают две операции, определим некоторые термины, относящиеся к специальным элементам множеств, к которым эти операции применяются.

Определение. Пусть $\otimes$ — бинарная операция на множестве A и $l \in A$ такая, что

$$l \otimes a = a \text{ для всех } a \in A.$$

Тогда l называется *левой единицей* по отношению к $\otimes$ на A. Аналогично, если существует $r \in A$ такое, что

$$r \otimes a = a \text{ для всех } a \in A,$$

то r является *правой единицей* по отношению к $\otimes$. Далее, если существует элемент e, который является и левой и правой единицей, т.е.

$$e \otimes a = a \otimes e = a \text{ для всех } a \in A,$$

то e называется *(двусторонней) единицей* по отношению к $\otimes$.

Пример 5. Над **R** 0 является правой единицей по отношению к вычитанию и единицей по отношению к сложению, так как

$$a - 0 = a,$$

но

$$0 - a \neq a, \text{ если } a \neq 0;$$

$$a + 0 = a \text{ и } 0 + a = a \text{ для всех } a.$$

Определение. Пусть $\otimes$ — операция на A с единицей e и $x \otimes y = c$. Тогда говорят, что x — *левый обратный* элемент к y, а y — *правый обратный* элемент к x. Далее, если x и y такие, что

$$x \otimes y = e = y \otimes x,$$

это y называется *обратным элементом* к x по отношению к $\otimes$, и наоборот.

Замечание. В некоторых работах левые (правые) обратные элементы относят к левой (правой) единице, однако, как мы в скором времени увидим, в большинстве случаев единицы являются двусторонними и, следовательно, не требуется делать никаких различий. Для решения уравнений необходимо существование и единственность единиц и обратных элементов. Менее общим свойством операций является идемпотентность, хотя оно используется в алгебре логики.

Определение. Пусть операция $\otimes$ на множестве A и произвольный элемент $x \in A$ таковы, что $x \otimes x = x$. Тогда говорят, что x *идемпотентен* по отношению к $\otimes$.

Очевидно, что любое подмножество идемпотентно по отношению к операциям пересечения и объединения.

Определение. Пусть дано множество A, на котором определено две операции $\otimes$ и $\oplus$. Тогда, если

$$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$$

для всех $a, b, c \in A$, то говорят, что $\otimes$ *дистрибутивна* по отношению к $\oplus$.

Если сказанное выше не совсем понятно, следует провести соответствие между этим тождеством и обычной арифметикой на **R**, например,

$$3*(1 + 2) = (3*1)+(3*2).$$

Наиболее общеизвестная алгебра может быть построена из относительно небольшого набора основных правил. Сейчас мы продемонстрируем, как из элементарных предположений можно извлечь некоторые простые следствия; большинство примеров даны в виде упражнений.

Пример 6. Пусть $\otimes$ — операция на множестве A и существует единица по отношению к $\otimes$. Тогда единичный элемент единствен.

Доказательство. Предположим, что x и y — единицы по отношению к $\otimes$, т.е.

$$x \otimes a = a \otimes x = a,$$

$$y \otimes a = a \otimes y = a \quad \text{для всех } a \in A.$$

Тогда $x = x \otimes y$, так как y — единица, и $x \otimes y = y$, поскольку x — единица. Следовательно, $x = y$.

Пример 7. Пусть $\otimes$ — ассоциативная операция на множестве A и e — единица по отношению к $\otimes$. Тогда если $a \in A$ и x имеет обратный элемент, то обратный элемент едининствен по отношению к $\otimes$.

Доказательство. Предположим, что x' и x'' - обратные элементы к x, так что

$$x \otimes x' = x' \otimes x = e \text{ и } x \otimes x'' = x'' \otimes x = e.$$

Тогда

$$x' = x' \otimes e = x' \otimes (x \otimes x'') = (x' \otimes x) \otimes x'' = e \otimes x''= x''.$$

Итак, мы определили операции и описали некоторые их свойства. Теперь посмотрим, что можно сделать с совокупностью операций, заданных на множестве.

Множество с заданными на ней операциями называют ***алгебраической структурой***

Некоторые из алгебраических структур, которые наиболее часто встречаются, будут рассмотрены позднее. Прежде чем приступить к их рассмотрению, посмотрим на арифметику с неформальной точки зрения. В большинстве случаев мы будем опускать формальные определения, делая ударения на «следствия из правил», даже в тех случаях, когда это приводит к непривычным способам использования известных символов, которые обычно используются для представления десятичных чисел,

1.2.2. «Малая» конечная арифметика

Арифметику *можно рассматривать как* ***множество с двумя операциями****, которые действуют подобно* ***сложению и умножению***.

Ее можно изучать многими способами. Чтобы уяснить требования ***арифметической системы***, примем конструктивное приближение и рассмотрим целые числа (0, 1, 2, ..,) просто как символы. В дальнейшем будем рассматривать только конечную арифметику, в которой используется лишь конечное множество чисел; сначала это множество будет небольшим. Имеется в виду, что если $A \sim \mathbf{N}_m$, то требуется m различных символов, при этом никакие комбинации символов не разрешаются. Если используются только десятичные числа, то $m \leq 10$. Поскольку все множества данного размера биективны, то можно рассматривать только множества $\mathbf{N}_m$.

Для большей наглядности рассмотрим множество $\mathbf{N}_6$. Для этого необходимо построить таблицы умножения и сложения. Множество $\mathbf{N}_6$ достаточно велико для того, чтобы изучать свойства основной структуры. Можно подумать, что для этой цели более уместным является множество $\mathbf{N}_2$, однако это не так. Начнем со сложения.

Операция сложения имеет единицу, которая обычно обозначается символом 0, однако $0 \notin \mathbf{N}_6$. Поэтому будем использовать множество $\mathbf{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, которое более удобно. Очевидно, что $\mathbf{Z}_6 \sim \mathbf{N}_6$. Поэтому можно работать с $\mathbf{Z}_6$, не теряя никаких свойств. Таким образом, мы можем построить соответствующую табл. 1.

Таблица 1

+	0 1 2 3 4 5
0	0 1 2 3 4 5
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5

Так как операция коммутативна, то таблица должна быть симметричной. Труднее отстоит дело с ассоциативностью. Если мы хотим, чтобы операция была ассоциативной, и требуем, как обычно, существование обратных элементов по сложению, то любой элемент должен входить ровно один раз в каждую строку и каждый столбец. Объясним это высказывание.

Если $a + b = a + c$, то

$$-a+(a + b)=- a + (a + c),$$
$$(-a + a)+ b = (-a + a) + c,$$
$$0 + b = 0 + c,$$
$$b=c.$$

Рассмотрим теперь операцию, определенную в табл. 2.

Таблица. 2

A	0 1 2 3 4 5 *B*	0 1 2 3 4 5 *C*	0 1 2 3 4 5
0	0 1 2 3 4 5 0	0 1 2 3 4 5 0	0 1 2 3 4 5
1	1 2 0 4 5 3 1	1 1 2 3 4 5 1	1 5 3 4 2 0
2	2 0 1 5 3 4 2	2 2 2 3 4 5 2	2 3 1 5 0 4
3	3 5 4 0 2 1 3	3 3 3 3 4 5 3	3 4 5 0 1 2
4	4 3 5 1 0 2 4	4 4 4 4 4 5 4	4 2 0 1 5 3
5	5 4 3 2 1 0 5	5 5 5 5 5 5 5	5 0 4 2 3 1

Из трех возможностей для операции сложения на $\mathbf{Z}_6$ только *C* удовлетворяет всем условиям, что выглядит несколько необычно. Операция *A* не коммутативна, а в *B* нарушен критерий «едининственности результата». Как же построить соответствующую операцию, удовлетворяющую всем обсуждаемым выше свойствам? Из дальнейшего изложения будет видно, что наиболее трудно обеспечить выполнение свойства ассоциативности. В предложенной ниже процедуре мы используем ассоциативность как основной шаг построения, и, следовательно, это свойство будет выполняться автоматически.

Шаг 1. Число 0 является единицей для операции сложения. Поэтому получаем табл. 3.

Таблица 3

+	0 1 2 3 4 5
0	0 1 2 3 4 5
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5

Шаг 2. Определим следующую строку таблицы, удовлетворяющую условию «единственности результата». Чтобы подчеркнуть используемую технику, специально выберем результат, который отличается от привычного. Возьмем

+	0 1 2 3 4 5
1	1 3 0 5 2 4

Так как операция должна быть коммутативной, заполним соответствующий столбец табл. 4.

Таблица 4

+	0 1 2 3 4 5
0	0 1 2 3 4 5
1	1 3 0 5 2 4
2	2 0
3	3 5
4	4 2
5	5 4

Шаг 3. Заполним другие клетки таблицы, используя ассоциативность. Проследим подробно за каждой деталью:

$$2 + 2 = 2 + (1 + 4) = (2 + 1)+4 = 0 + 4 = 4,$$
$$2 + 3 = 2 + (1 + 1) = (2+1)+1 = 0+1 = 1,$$
$$2 + 4 = (2+1) + 5 = 0 + 5 = 5,$$
$$2 + 5=(2 + 1)+3 = 0 + 3 = 3.$$

Здесь мы использовали соотношение $2+1 = 0$ и $0 + x= x$. Далее

$$3 + 3=(1 + 1) + 3 = 1 + (1 + 3)=1 + 5 = 4 \text{ и т.д.}$$

Таким образом, на основе значений $1+x$ получаем таблицу для операции + (табл. 5).

Таблица 5

+	0 1 2 3 4 5
0	0 1 2 3 4 5
1	1 3 0 5 2 4
2	2 0 4 1 5 3
3	3 5 1 4 0 2
4	4 2 5 0 3 1
5	5 4 3 2 1 0

При выполнении процесса надо учитывать дополнительные ограничения на шаге 2. Значения в нулевой строке должны выбираться так, чтобы они «продолжали» все $\mathbf{Z}_6$. Например, начиная с 1 (как мы делали), получаем

$$1 + 1 = 3,\quad 3+1 = 5,\quad 5+1 = 4,\quad 4+1 = 2,\ 2 + 1 = 0,\quad 0+1 = 1.$$

Следовательно, прибавляя только 1, можно получить все $\mathbf{Z}_6$.

Перейдем теперь к умножению. Сначала заметим, что единица для операции умножения должна отличаться от нуля. В противном случае для любых x и y мы имели бы

$$x = 0*x = x*0,\quad y = 0 + y = y + 0,$$

поэтому

$$x*y = x*(0 + y) = (x* 0) + (x* y) = x + (x*y),$$

а значит, $x= 0$. Поэтому 0 не является единицей для умножения.

На самом деле нам требуется число, которое будет порождать $\mathbf{Z}_6$. Следовательно, мы могли бы определить аналогичным образом операцию умножения на основе частной табл. 6.

Таблица 6

*	0	1	2	3	4	5
0	0					
1	0	1	2	3	4	5
2	2					
3	3					
4	4					
5	5					

Однако в этом случае мы не должны настаивать на выполнении критерия «единственности результата». (В обычной арифметике не существует целого числа, которое при умножении на 2 давало бы 1! Поэтому в конечном множестве могут быть повторения.)

Вместо того чтобы повторять процедуру построения таблицы для умножения, вернемся к проблеме связи двух операций - дистрибутивности умножения относительно сложения. Эта проблема связана с ассоциативностью. Рассмотрим (уже построенную) операцию сложения.

Заметим, что 1+1= 3. Поэтому из предположения дистрибутивности получаем, что

$$3*0-(1 + 1)*0=(1*0) + (1*0)=0 + 0=0,$$
$$3*2 = (1*2) + (1*2) = 2 + 2 = 4,$$
$$3*3 = (1*3) + (1*3)=3 + 3 = 4,$$
$$3*4 = (1*4) + (1*4)=4 + 4=3,$$
$$3*5=(1*5) + (1*5)=5 + 5 = 0.$$

Теперь $3 + 3 = 4$, $3+1 = 5$, $1 + 4 = 2$ и $1 + 2 = 0$. Действуя как и ранее, получаем следующую операцию (табл. 7).

Т а б л и ц а 7

*	0 1 2 3 4 5
0	0 0 0 0 0 0
1	0 1 2 3 4 5
2	0 2 1 4 3 5
3	0 3 4 4 3 0
4	0 4 3 3 4 0
5	0 5 5 0 0 5

Следовательно, начиная с почти произвольного выбора строки в таблице, не содержащей 1 по сложению, и накладывая ряд простых ограничений, мы приходим к приемлемой арифметической системе. Теперь достаточно установить, что полученная система не находится в противоречии с высказанными ранее соображениями, т.е., что 1+1 действительно существует. Короче говоря, если в нормальной (бесконечной) арифметике $a+b=c$ и $c\in\mathbf{Z}_6$, то хотелось бы, чтобы и в нашей арифметике ответ был *c*. Следовательно, мы пришли к выбору

+	0 1 2 3 4 5
1	1 2 3 4 5 ?

Недостающим элементом должен быть 0, поскольку $6\notin\mathbf{Z}_6$, и 0 является единственным элементом $\mathbf{Z}_6$, которого нет в строке. В результате такого выбора получаем соответствующую табл. 8.

Таблица 8

+	0 1 2 3 4 5	*	0 1 2 3 4 5
0	0 1 2 3 4 5	0	0 0 0 0 0 0
1	1 2 3 4 5 0	1	0 1 2 3 4 5
2	2 3 4 5 0 1	2	0 2 4 0 2 4
3	3 4 5 0 1 2	3	0 3 0 3 0 3
4	4 5 0 1 2 3	4	0 4 2 0 4 2
5	5 0 1 2 3 4	5	0 5 4 3 2 1

Она определяет так называемую арифметику по модулю (основанию) 6. (Эта арифметика работает точно так же, как и обычная целочисленная арифметика, за исключением того, что все целые числа заменяют на остатки от деления их на 6.)

1.2.3. «Большая» конечная арифметика

Мы уже построили арифметику для $\mathbf{Z}_6$. Возникает вопрос: как можно расширить эту систему, чтобы иметь возможность считать после 5? Для этого достаточно иметь множество *n*-значных чисел (наборов из *n* элементов из $\mathbf{Z}_6$) с арифметикой над $\mathbf{Z}_6$. Чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим упорядоченную тройку из $\mathbf{Z}_6$, т.е. элементы множества $\mathbf{Z}_6\times\mathbf{Z}_6\times\mathbf{Z}_6$. Если $\mathbf{Z}_6$ упорядочено обычным способом, т.е. $0<1<2<3<4<5$, тогда определим порядок на $\mathbf{Z}_6\times\mathbf{Z}_6\times\mathbf{Z}_6$ по правилу

$$(a,b,c)< (x, y, z),$$

если $a<x$ или $a = x$ и $b <y$ или $a= x,\ b=y$ и $c< z$.
В этом случае элементы $\mathbf{Z}^3_6=\mathbf{Z}_6\times\mathbf{Z}_6\times\mathbf{Z}_6$ будут упорядочены следующим образом:

(0,0,0), (0,0, 1), ... (0,0, 5),
(0,1,0),..., (0,1,5),
………………………………
(0,5,0),......., (0,5,5),
(1,0,0),..., (1,0,5),
………………………………
(5,5,0),..., (5,5,5).

Таким образом, существует $6^3 = 216$ различных троек. Поэтому нужно уметь делать арифметические вычисления над $\mathbf{Z}^3_6$ в пределах от 0 до 215. В приведенном выше упорядочивании элементов из $\mathbf{Z}^3_6$

(0, 0, 5) непосредственно предшествует (0, 1, 0).
(0, 1, 5) непосредственно предшествует (0, 2, 0),
....
(0, 5, 5) непосредственно предшествует (1, 0, 0).

Следовательно, хотелось бы, чтобы выполнялось соотношение

$$(0, 0, 5)+1=(0, 1,0).$$

Однако до сих пор не было представления 1 в $\mathbf{Z}^3_6$. И хотя это соотношение выглядит естественным, мы должны заботится о том, чтобы не использовать ни одного не определенного понятия. Для облегчения описания представим $\mathbf{Z}^3_6$ как $A_2\times A_1\times A_0$ и рассмотрим сумму $(a_2,\ a_1\ a_0)$ и $(b_2,\ b_1,\ b_0)$. Покомпонентное сложение дает $(a_2+b_2,\ a_1+b_1,\ a_0+b_0)$, где сложение осуществляется в $\mathbf{Z}_6$, и пока, как кажется, этого достаточно.

Пример.1. Рассмотрим соотношение

$$(0, 1,3)+ (4, 2, 1) = (4, 3, 4),$$

которое будет более наглядным, если записать его в виде

$$\begin{array}{r} 0,\ 1,\ 3 \\ +\quad\quad \\ \underline{4,\ 2,\ 1} \\ =4,\ 3,\ 4 \end{array}$$

Однако

$$\begin{array}{r} 1,\ 2,\ 5 \\ +\quad\quad \\ \underline{2,\ 3,\ 1} \\ =3,\ 5,\ 0 \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{r} 0,\ 0,\ 5 \\ +\quad\quad \\ \underline{0,\ 0,\ 1}\ (=1?) \\ =0,\ 0,\ 0\ (=0?). \end{array}$$

В результате операции сложение множество A_0 переходит в себя. Однако для того чтобы сумма достаточно больших чисел (таких, как 5+1) могла бы выйти за пределы A_0, нам необходимо производить некоторые действия в A_1 и также, возможно, в A_2. (Это иллюстрируется табл.9).

Таблица 9

$+_s$	0 1 2 3 4 5	$+_c$	0 1 2 3 4 5
0	0 1 2 3 4 5	0	0 0 0 0 0 0
1	1 2 3 4 5 0	1	0 0 0 0 0 1
2	2 3 4 5 0 1	2	0 0 0 0 1 1
3	3 4 5 0 1 2	3	0 0 0 1 1 1
4	4 5 0 1 2 3	4	0 0 1 1 1 1
5	5 0 1 2 3 4	5	0 1 1 1 1 1

Возьмем любые два числа a и b с $\mathbf{Z}_6$. Тогда их сумма (в $\mathbf{Z}$) составляет

$$6*(a +_c b) + (a +_s b).$$

Пример 2. 4 плюс 4 дает 6*(1) + (2) = 8 в $\mathbf{Z}$.

Таблица $+_s$ дает «обычную» сумму двух элементов из $\mathbf{Z}_6$, в то время как таблица $+_c$ показывает, когда необходим «переход» в следующее множество $\mathbf{Z}_6$, и содержит только нули и единицы. Значения в $+_c$ ограничены, так как если

$$0 \le x < n \quad \text{и} \quad 0 \le y < n,$$

то

$$0 \le x \le x + y < x + n < n + n = 2n \text{ (и } n = 6 \text{ в } \mathbf{Z}_6). ,$$

В действительности можно получить лучшую оценку, поскольку

$$0 \le x \le n-1 \quad \text{и} \quad 0 \le y \le n-1,$$

и, следовательно,

$$0 \leq x + y \leq 2n\text{-}2<2n - 1.$$

Возвращаясь к сложению (a_2, a_1, a_0) и (b_2, b_1, b_0) и обозначая ответ через (d_2, d_1, d_0), получим -

$$
\begin{aligned}
&d_0 = a_0 +_s b_0,\\
&x_0 = a_0 +_c b_0,\\
&d_1 = a_1 +_s b_1 +_s x_0,\\
&x_1 = \text{если } a_1 +_c b_1 = 1 \text{ тогда } 1,\\
&\qquad \text{иначе } (a_1 +_s b_1) +_c x_0,\\
&d_2 = a_2 +_s b_1 +_s x_1,\\
&x_2 = \text{если } a_2 +_s b_2 = 1 \text{ тогда } 1,\\
&\qquad \text{иначе } (a_2 +_s b_2) +_c x_1.
\end{aligned}
$$

Поскольку $0 \leq a_i + b_i < 2n — 1$ и $x_i = 0$ или $x_i = 1$, то переносимий результат из $a_i + b_i + x_{i-1}$ никогда не может быть больше 1.

Заметим, что в наших определениях числа (0, 0, 0) и (0, 0, 1) в $\boldsymbol{Z}^3_6$ действуют, как 0 и 1 в новой арифметике. Кроме этого, если x_2=5, то результат сложения может оказаться слишком большим для $\boldsymbol{Z}^3_6$. В этом случае говорят, что состоялось «переполнение». Этот случай мы обсудим более подробно в п.2.4, а до конца этого пункта возможность переполнения будем игнорировать,

Аналогично можно использовать операции $*_p$ и $*_c$ (таблицы произведения и переноса), заданные в табл. 10 для того, чтобы производить умножение над $\boldsymbol{Z}^3_6$, однако мы не будем этим заниматься.

Таблица 10

$*_p$	0 0 1 2 3 4 5	$*_c$	0 0 1 2 3 4 5
0	0 0 0 0 0 0	0	0 0 0 0 0 0
1	0 1 2 3 4 5	1	0 0 0 0 0 0
2	0 2 4 0 2 4	2	0 0 0 1 1 1
3	0 3 0 3 0 3	3	0 0 1 1 2 2
4	0 4 2 0 4 2	4	0 0 1 2 2 3
5	0 5 4 3 2 1	5	0 0 1 2 3 4

До сих пор мы рассматривали только символы, которые имеют вид положительных чисел. Конечно, с символами 0, 1, 2, ... можно обращаться «естественным» образом, и, следовательно, их можно интерпретировать как неотрицательные числа. Арифметика над $\boldsymbol{Z}^3_6$ оперирует с числами от 0 = (0, 0, 0) до 215 = (5, 5, 5), которые были получены из последовательности (от 0 до 5) в $\mathbf{Z}_6$. Если взять множество {—3, —2, —1, 0, 1, 2} вместо $\mathbf{Z}_6$, то получим систему, которая содержит отрицательные числа, но ведет себя странным образом.

Если мы возьмем два множества $\boldsymbol{Z}_6$ и множество {—3, —2, —1, 0, 1, 2}, которое назовем $\boldsymbol{Z}^{-}{}_6$, и образуем множество $\boldsymbol{Z}^{-}{}_{\boldsymbol{6}}\times\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{6}}\times\boldsymbol{Z}_6$, то можно построить арифметику с числами от —108 до 107. На самом деле арифметика является той же самой, за исключением того, что значение 3, 4 и 5 в A_2 сейчас интерпретируются як —3, —2, —1 соответственно. Поэтому, например, (-2, 4, 2) исчисляется в **Z** как

$$(-2*36) + (4*6)+2 = -46.$$

Биекция между двумя системами, определенная следующим образом:

3-3 □ ,
4-2 a ,
5-1 a ,
x a *x* в других случаях,

может быть применена в любой момент при условии, что результат вычислений не имеет цифр 3, 4 или 5 в A_2. Мы выбираем обозначения из соображения удобства, не вводя ограничений на случаи, когда можно применять биекцию или обратное отображение. На этом этапе мы советуем игнорировать любые очевидные противоречия, которые относятся к переполнению A_2. Этот случай будет подробно рассмотрено в следующих пунктах на более простом примере. Отметим, что новая система «переходит» от положительных чисел к отрицательным. Например,

$$(2, 2, 5)+(1, 0, 1)=\begin{cases}(3, \quad 0, 0) & \text{в старой системе}\\(-3, 0, 0) & \text{в новой системе}\end{cases}$$

(В **Z** это дает 107 + 1 = -108!)

Вычисления, которые включают у себя сложение и вычитание, в новой арифметике довольно просты и зависят от двух тождеств. Первое имеет вид

$$(5,5, 5) + (0, 0, 1) = (0,0,0)$$

((5, 5, 5) эквивалентно (-1, 5, 5)), а второе - вид

$$(a_2, a_1, a_0) + (b_2, b_2, b_0) =(5,5, 5).$$

Они имеют место тогда и только тогда, когда

$$a_2 + b_2 = 5, \quad a_1 + b_1 = 5, \quad a_0 + b_0 = 5.$$

Таким образом, чтобы вычислить обратное по сложению число к (a_2, a_1, a_0), мы должны сначала найти число (b_2, b_1, b_0), которое называют *дополнением по* 5, и затем прибавить 1=(0, 0, 1). Это даст дополнение до 6. Проиллюстрируем этот процесс на следующем примере.

Пример 3. Найдем обратные элементы к (-3, 4, 1) и (3, 4, 1).

Из 3, 4, 1
получаем 2, 1, 4 (дополнение до 5)
\+ 1
2, 1, 5 (дополнение до 6)
Проверим результат 3, 4, 1
\+
2, 1, 5
= 0, 0, 0
Поэтому - (-3, 4, 1) = (2, 1, 5).

Таким образом, вычисление сводится к сложению с соответствующим дополнением.

Пример 4. Вычислим (1, 3, 4) -(2, 1, 5).

Берем 2, 1, 5
получаем 3, 4, 0 (дополнение до 5)
результат 3, 4, 1 (дополнение до 6)
прибавим (1, 3, 4) (1, 3, 4)
5, 1, 5= (-1, 1, 5).

Проверяя вычисление над **Z**, получаем 58—83=—25. Конечно, причиной образования так называемых дополнений к 5 и 6 является тот факт, что мы проводим вычисления над $\mathbf{N}_6$ (или $\mathbf{Z}_6$).

В общем случае, если вычисление производится в $\mathbf{N}_m$, мы должны использовать дополнение к m—1 и m соответственно.

Надо подчеркнуть, что в вычислениях на ЭВМ мы обычно имеем дело с $\mathbf{Z}^n_m$ для некоторых фиксированных m и n и очень редко — с множеством **Z**. Таким образом, совокупность имеющихся в нашем распоряжении чисел всегда ограничена, и, хотя границы могут быть очень большими, мы не должны забывать о том, что они существуют. Риск тем более велик по той причине, что в записи обычно опускают запятые и все нули, которые стоят слева от первой ненулевой цифры за исключением числа (0, 0, 0). Следовательно (1, 3, 4) запишется как 134, (0, 0, 6) как 6 и (0, 0, 0) как 0.

1.2.4. Двоичная арифметика

Из уже построенных арифметик над $\mathbf{Z}^n_m$ и $\mathbf{Z}^{n-}_m$ легко выделить основы двоичной арифметики. Существуют две так называемые двоичные арифметики. Первая — это *знаковая* и *модульная форма,* которая определена на {—, +}×$\mathbf{Z}^n_2$, т.е. $\mathbf{Z}^n_2$ (определенное в предыдущем пункте) с добавленным знаком, который расширяет элементы $\mathbf{Z}^n{}_2$. Знак обычно кодируют в бинарной форме: 0 для «+» и 1 для «-».

Вторая арифметика *(двоичная арифметика дополнений)* — это $\mathbf{Z}^{n-}{}_2$ с элементами {0, 1} во всех *n* позициях. Этот вид двоичной арифметики используется в большинстве компьютеров. Поэтому ограничим наши рассмотрения $\mathbf{Z}^{n-}{}_2$. Чтобы сделать обсуждение более конкретным, рассмотрим $\mathbf{Z}^{5-}{}_2$, элементы которого лежат в пределах от 10 000 (=—16) до 01 111 (=+15) (т.е. содержит $32=2^5$ разных чисел). Число —1 представляется в $\mathbf{Z}^{5-}{}_2$ как 11 111. Поэтому легко найти двоичное дополнение. Для этого надо слегка изменить все двоичные цифры, називаемые *битами,* чтобы получить дополнение к 1, а затем прибавить 1, чтобы получить дополнение к 2.

Пример 1.

$$
\begin{array}{r}
—(01\ 011) \\
10\ 100 \\
+ \qquad\qquad \\
\underline{\qquad 1} \\
10\ 101 \\
(=-2^4 + 2^2 + 2^0 = -11);
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
-(10110) \\
+01\ 001 \\
\underline{\qquad 1} \\
01\ 010 \\
(=2^3 + 2^1 = 10).
\end{array}
$$

Очевидно, что могут возникнуть проблемы, вызванные ограниченностью чисел. Мы не можем их избежать, однако следует знать, когда возможна «ошибка». Форма дополнения делает проверку условия переполнения относительно легкой, использующей только значение старшего значащего бита. (В $\mathbf{Z}^{5-}{}_2$ это бит с номером 2^4.) Этот бит обозначает знак представляемого числа и называется знаковым битом или знаковым разрядом. Перед тем как проверить, какое значение имеет знаковый бит, напомним, что прибавление 1 к максимальному положительному числу в $\mathbf{Z}^{n-}{}_m$ дает максимальное отрицательное число (наибольшее отрицательное число — это отрицательное число, которое отстоит дальше всего от нуля). Другими словами, числа повторяются циклическим образом. В $\mathbf{Z}^{5-}{}_2$ мы имеем ситуацию, которая изображена на рис. 3.

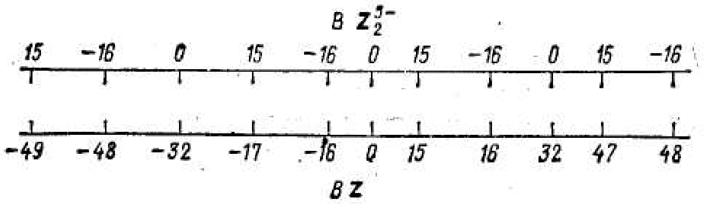


Рис. 3.

Что же произойдет, если мы сложим два числа x и y, где

$$— a \le x < a \text{ и } — a \le y < a \quad (\text{в } Z^{5-}{}_2,\ a = 16)?$$

Сумма $x + y$ будет ограничена:

$$2a \le x + y \le 2a - 2 < 2a - 1.$$

Само по себе это неравенство ничего не дает. Поэтому мы рассмотрим три случая;

(I) если $— a \le x < 0$ и $— a \le y < 0$
тогда $—2a \le x + y < 0$;

(II) если $0 \le x < a$ и $0 \le y < a$
тогда $0 \le x + y \le 2a - 2 < 2a – 1$;

(III) если $— a \le x < 0$ и $0 \le y < a$
тогда $-a \le x + y < a$.

Вначале заметим, что результат в случае (III) находится в требуемых пределах и, следовательно, всегда правильный. Чтобы понять, как могут возникать ошибки в случаях (I) и (П), необходимо вспомнить, что если $z \in \mathbf{Z}$ и $—2a \le z < -a$, то число z представимо в конечной арифметике числом z', где $z' = z + 2a$ и $0 \le z' < a$. Аналогично, если $a \le z < 2a — 1$, то z представимо z'', где $z'' = z — 2a$ и $—a \le z'' < 0$. Следовательно, ответ будет неправильный, если он в случае (I) положительный или в случае (II) отрицательный.

Чтобы объяснить эти заключения в терминах свойств знакового разряда, рассмотрим различные возможности сложения двух чисел:

а) оба чисела отрицательны;

б) оба чисела положительны;

в) числа имеют различные знаки.

Анализируя эти случаи, видим, что *переполнение* (ошибка переполнения) встречается тогда и только тогда, когда существует перенос в знаковый разряд или перенос из знакового разряда, *но не оба вместе.* Для иллюстрации этого рассмотрим несколько примеров в $\mathbf{Z}^{5-}{}_2$. Попытаемся сопоставить эти примеры со случаями (I)-(III) и а) - в), рассмотренными выше.

Пример 2. Напомним, что вычисление проводятся в $\mathbf{Z}^{5-}{}_2$:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}10101\\11010\end{array}\\ \hline 101111 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\begin{array}{r}11100\\10111\end{array}\\ \hline 110011 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}11101\\00110\end{array}\\ \hline 100011 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\begin{array}{r}00101\\00111\end{array}\\ \hline 01100 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}01100\\01010\end{array}\\ \hline 10110 \end{array}.$$

Вернемся теперь к умножению и делению. Сначала рассмотрим умножение. Напомним, что в **Z** (или, более точно, в $\mathbf{Z}^n{}_{10}$ для достаточно большого *n)* умножение на 10 можно получить «сдвигом» всех цифр на одну позицию влево и записью в 0-й позиции цифры 0. (В $\mathbf{Z}^n{}_m$ умножение на *m* также всегда можно осуществить сдвигом влево.)

Следовательно, мы имеем простой способ умножения на неотрицательные степени числа 2 в $\mathbf{Z}^n{}_2$ — сдвиг каждой цифры слева на соответствующее число позиций.

Пример 3. (Вычисление проводятся в $\mathbf{Z}^{5-}{}_2$.)

0 0 0 1 1	(3)	1 1 1 1 0	(-2)
0 0 1 1 0	(*2)	1 1 1 0 0	(*2)
0 1 1 0 0	(*2=12)	1 1 0 0 0	(*2 = -8)

0 0 1 0 1 (5)
0 1 0 1 0 (*2)
1 0 1 0 0 (*2)
0 1 0 0 0 (*2 = 8).

Из этих примеров видно, что метод также хорошо работает для отрицательных чисел, но результат будет с ошибкой (переполнение), если на каждом этапе менялся знак и если потом он опять изменился. Для умножения произвольного целого числа (элемента **N**) используем свойство дистрибутивности умножения по отношению к сложению и представим множитель как сумму степеней числа 2.

Пример 4. (Вычисление проводятся в $\mathbf{Z}^{5-}{}_2$).

$$3*5 = 3*2^2 + 3*2^0 (2^0=1)$$
$$(-5)*3 = (-5)*2^1 + (-5)*2^0.$$

Поэтому

$$\begin{array}{r} 00011\\ +\\ \underline{01100}\\ 01111 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11011\\ +\\ \underline{10110}\\ 110001 \end{array}.$$

Точно так же, как умножение производилось сдвигами влево деление на положительные степени числа 2 осуществляется сдвигом вправо. (Деление на другие целые числа должно получаться путем сведения к вычитанию степеней числа 2. Этот процесс мы обсуждать не будем.) Однако специального рассмотрения требуют отрицательные числа. Отметим также, что в общем случае ожидаемый результат (т.е. арифметически ожидаемый результат в **R**) будет не целым, а дробным.

Пример 5. Попытаемся в $\mathbf{Z}^{5-}{}_2$ вычислить 12/4, (—6)/2 и 7/4 сдвигом на 2, 1 и 2 позиции соответственно. Имеем

0 1 1 0 0 (12) 1 1 0 1 0 (-6),
0 0 0 1 1| 0 0 (3 = 12/4) 0 1 1 0 1|0 (13 $\neq$-6/2)
0 0 1 1 1| (7)
0 0 0 0 1| 1 1 (1$\approx$7/4).

Сдвиг на одну позицию вправо автоматически переводит любое отрицательное число к положительному. В $\mathbf{Z}^{5-}{}_2$ сдвиг переводит —16 к +8. Чтобы исправить это, следует отнять от результата число 16, что даст -8 (т.е. -16/2). То же самое можно получить, устанавливая знаковый разряд равным 1. Следовательно, правильный результат достигается использованием знакового разряда, значение которого равно 0 или 1 (в зависимости от знака числа), для того чтобы заполнить «пропуска», создаваемые в результате сдвига вправо.

Следовательно, (-6)/2 приводит к

$$11101 = -3.$$

Действие битов (со значением 1), «выпадающих» из числа в результате сдвига вправо, должно усекать результат. Поэтому 7/4 дает 1. Существует общепринятая практика округлять число (вверх независимо от знака) прибавлением к числу утерянного последнего бита. Это отвечает обычному арифметическому правилу округления, поскольку 1 в первом бите остатка представляет собой 0.5. Следовательно, 7/4 дает 2.

1.2.5. Логическая арифметика

Строго говоря, булева арифметика оперирует на множествах $\mathbf{Z}_2$ и $\mathbf{Z}^n{}_2$ и, следовательно, включает только числа 0 и 1. Для того чтобы подчеркнуть такую структуру, начнем с рассмотрения логической арифметики на «относительно большом» множестве $\mathbf{Z}_5$. Она дает основу многозначной логики. Отсюда легко получить более простой случай $\mathbf{Z}_2$. Возьмем множество $\mathbf{Z}_5$ = (0, 1, 2, 3, 4} и операции $\vee$ и $\wedge$, которые определены в табл. 11.

Таблица 11

$\vee$	0 1 2 3 4	$\wedge$	0 1 2 3 4
0	0 1 2 3 4	0	0 0 0 0 0
1	1 1 2 3 4	1	0 1 1 1 1
2	2 2 2 3 4	2	0 1 2 2 2
3	3 3 3 3 4	3	0 1 2 3 3
4	4 4 4 4 4	4	0 1 2 3 4

Упорядочивая $\mathbf{Z}_5$ обычным образом (порядок индуцируется **Z** и **R**), видим, что

$$a \vee b = \max\{a, b\},$$
$$a \wedge b = \min\{a, b\}.$$

Обе операции коммутативны и ассоциативны, 0 является единицей для $\vee$, а 4 является единицей для $\wedge$; $\wedge$ дистрибутивна по отношению к $\vee$, но не наоборот.

Пример 1. Возьмем множество $\mathbf{Z}_m$ с естественным порядком элементов. Введем операции $\wedge$ и $\vee$. Рассмотрим шесть возможных случаев упорядочивания трех произвольных элементов *a, b, c* с $\mathbf{Z}_m$:

(I) $a \le b \le c$;
(II) $a \le c \le b$;
(III) $b \le a \le c$;
(IV) $b \le c \le a$;
(V) $c \le a \le b$;
(VI) $c \le b \le a$.

Использование символа $\le$ является интуитивным, однако может быть обосновано с помощью следующего определения:

$a \le b$ тогда и только тогда, когда $a \vee b = b$.

Для проверки условия дистрибутивности нужно показать, что

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Это можно сделать проверкой того, что обе части выражения совпадают для каждого из наборов *a, b* и *c.* Будем одновременно вычислять и сопоставлять соответствующие выражения:

(I) $a \wedge (b \vee c) = a \wedge c = a,$
$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \vee a = a;$
(II) $a \wedge (b \vee c) = a \vee b = a,$
$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \vee a = a;$
(III) $a \wedge (b \vee c) = a \wedge c = a,$
$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = b \vee a = a;$
(IV) $a \wedge (b \vee c) = a \wedge c = c,$
$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = b \vee c = c;$
(V) $a \wedge (b \vee c) = a \wedge b = a,$

$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \vee c = a;$

(VI) $a \wedge (b \vee c) = a \wedge b = b,$

$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = b \vee c = b.$

Следовательно, $\wedge$ дистрибутивна по отношению к $\vee$.

Можно также показать, что $\vee$ дистрибутивна по отношению к $\wedge$, т.е. что

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

Проверку этого свойства оставляем как упражнение.

Перед тем как закончить обсуждение общего случая, давайте вернемся к табл. 11, определяющим $\vee$ и $\wedge$. Элементы, имеющие одинаковые значения в таблицах, расположены относительно единичных элементов так, как показано на рис. 4.

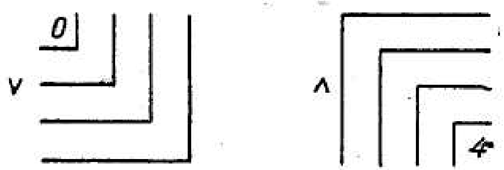


Рис. 4.

На самом деле каждая из этих операций является «отражением» другой и связь, которая позволяет одну операцию менять на другую, определяется (в $\mathbf{Z}_5$) парами (0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0). В сущности, это принцип двойственности, который будет обсуждаться в следующих разделах. Возвращаясь к $\mathbf{Z}_2$, имеем

$\vee$	0 1
0	0 1
1	1 1

$\wedge$	0 1
0	0 0
1	0 1

В $\mathbf{Z}_2$ операцию $\vee$ обычно интерпретируют как ***или*** (результат равен 1, если один из операндов равен 1, включая случай, когда они оба равны 1). Аналогично $\wedge$ читается как ***и***. Число 0 является единичным элементом по отношению к ***или***, число 1 является единичным элементом по отношению к ***и***. Можно распространить эти результаты на более высокие размерности (переходя от $\mathbf{Z}_2$ к $\mathbf{Z}^n_2$), расширяя компоненты и учитывая то, что не существует переноса из одной копии $\mathbf{Z}_2$ к другой.

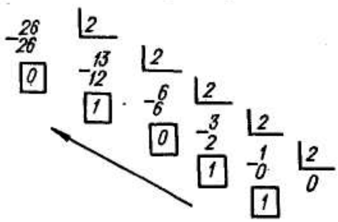
Пример 2.

$$\begin{array}{r} 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ \wedge \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \underline{0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1} \\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1. \end{array}$$

Примеры решения задач

Рассмотрим пример перевода целых десятичних чисел в двоичные.

Перевод целых десятичних чисел в двоичнные выполняется последовательным делением исходного числа и каждого частного на два. Получаемые при этом остатки (0 или 1), записанные в обратном порядке, и дают представление десятичного числа в двоичной системе счисления. Например:



$$26_{10} = 11010_2.$$

Действительно, проверяя полученный результат, получаем

$$1\bullet 2^4 + 1 \bullet 2^3 + 0 \bullet 2^2 + 1\bullet 2^1 + 0\bullet 2^0 = 16 + 8 + 2 = 26.$$

Дробное число переводится в двоичную систему счисления методом последовательного умножения на два. При этом каждый раз после запятой двоичного числа записывается 0 или 1 соответственно целой части результата умножения. Последовательное умножение продолжается до тех пор, пока дробная часть не обратится в нуль или пока не получим требуемое количество двоичных знаков после запятой. Например, двоичное представление числа 0,3125 получается следующим образом:

$$\begin{array}{cr} & 0{,}3125 \\ \times & 2 \\ \hline \boxed{0} & 6250 \\ \times & 2 \\ \hline \boxed{1} & 2500 \\ \times & 2 \\ \hline \boxed{0} & 5000 \\ \times & 2 \\ \hline \boxed{1} & 0000 \end{array} \qquad 0{,}3125_{10} = 0{,}0101_2.$$

Проверка полученного результата дает:

$$0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} = = (1/4) + (1/16) = 5/16 = 0{,}3125.$$

Если число является смешанным, т.е. его целая и дробная части отличны от нуля, то оно переводится в двоичную систему раздельно: целая часть - последовательным делением, а дробная - последовательным умножением.

Арифметические операции над числами сводятся к операциям сложения и умножение одноразрядных чисел. В двоичной системе счисления умножения задается таблицей конъюнкции: 0•0=0; 1•0=0; 0 •1 = 0 и 1•1 = 1. Сложение выполняется по правилу: 0 + 0 = 0; 1+0= 1; 0+1=1 и 1+1=10 (10 - это двоичное число, соответствующее десятичному числу 2). Операции над двоичными числами выполняются по правилам, аналогичным для десятичных чисел, но эти правила предельно упрощаются (особенно для умножения). Например, десятичные операции 41+27=68 и 41 5=205 выглядят следующим образом:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 101001 \\ 11011 \end{array} \\ \hline 1000100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 101001 \\ 101 \end{array} \\ \hline +\begin{array}{r} 101001 \\ 101001 \end{array} \\ \hline 11001101 \end{array}.$$

Как видно, умножение двоичних чисел сводится к сложению чисел, образованных сдвигом влево первого сомножителя. Поразрядное сложение осуществляется в соответствии с таблицей

x_1	x_2	
	0	1
0	0	1
1	1	0

,

причем в случае $x_1 = x_2 = 1$ образуется единица переноса в старший разряд.

Операция, задаваемая этой таблицей, называется *сложением по модулю 2.* Если при сложении перенос не учитывается, то эта операция вместе с операцией умножения определяет на множестве двоичных чисел *арифметику по модулю 2.*

Индивидуальные тестовые задачи

1. Рассмотреть указанные ниже «определения» $\otimes$. Решить, правильно, или нет каждое из них определяет бинарную операцию, и если так, то является ли операция коммутативной. Найти, если это возможно, единицу и обратный элемент к *x.* Предполагаются выполненными обычные свойства арифметики:

а) $x \otimes y = x - y$ на N;

б) $x \otimes y = (x * y) — 1$ на Z;

в) $x \otimes y = \max(x, y)$ на N;

г) $x \otimes y = \sqrt{x^2 + y^2}$ на $\{x\colon 0 \leq x, x \in \mathrm{R}\}$;

д) $x \otimes y = x/y$ на $\{x\colon 0 < x, x \in \mathrm{R}\}$.

2. Определим операцию φ на множестве $\{a, b, c\}$, как указано ниже. Проверить, что φ ассоциативна и коммутативна и найти единичный элемент.

φ	$a\ b\ c$
a	$b\ c\ a$
c	$a\ b\ c$
b	$c\ a\ b$

3. Предполагая обычные свойства операций +, -, $*$ и / на R, доказать, что операция ψ, определенная на $[1, \infty[$ следующим образом:

$$a\psi b=\frac{(a*b)+1}{a+b},$$

ассоциативна. Обосновать ответ.

Указание: не следует особенно обращать увагу на область определения.

4. Пусть $\otimes$ — ассоциативная операция на множестве A с единицей e такая, что каждый элемент $a\in A$ может быть обратным и обратный обозначается через a'. Показать, что

$$(a \otimes b)' = b' \otimes a'.$$

5. Показать, что если $\otimes$ — ассоциативная операция на множестве A с единицей e такая, что $a \otimes a = e$ для каждого $a\in A$, то $\otimes$ коммутативна.

6. Пусть $\otimes$ — ассоциативная операция на множестве A такая, что для любых $a, b \in A$, если $a\otimes b=b\otimes a$, то $a = b$. Показать, что каждый элемент A идемпотентен по отнощению к $\otimes$. Что можно сказать про $\otimes$, если операция имеет единицу?

7. По аналогии с «естественной» арифметикой, полученной для Z_6, построить аналогичную арифметику для Z_{16}, используя символы {0, 1, ,.., 9, *A, B*, ..., *F*}.

8. Построить арифметику для Z_6, которая согласуется со строкой

+	0	1	2	3	4	5
2	2	3	4	0	5	1

9. Рассматривая 1+3, показать, что следующая таблица приводит к противоречию:

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	0	3	4	5	2

10. Обозначим $Z^{-}_{m}\times Z^{n-1}_{m}$ через Z^{n-}_{m}, где

$$Z^{-}_{m} = \{-(m/2), .,., 0, ..., (m/2)-1\},\quad \text{если } m \text{ четное,}$$

и

$$Z^{-}_{m} = \{-(m\text{-}1/2), .,., 0, ..., (m\text{-}1/2)\},\quad \text{если } m \text{ нечетное.}$$

Вычислить: а) 10-7; б) 17-23; в) (-8)+(-21) в каждой из «естественных» арифметик Z^{4-}_{7} , Z^{3-}_{10} , Z^{5-}_{5} , Z^{2-}_{12}.

Замечание: числа в примерах заданы над Z; поэтому вначале требуется перевести их в соответствующую систему, а потом проводить вычисления.

11. Быстрый способ вычисления дополнения до 2 от данного битового элемента в Z^{n-}_{2} заключается в следующем. Начиная из правого конца,

копируем все идущие подряд нули и первую встретившуюся единицу. Затем все оставшиеся биты изменяем. Показать, что этот способ работает в большинстве случаев, и рассмотреть случаи, когда он не работает.

12. Пусть в $Z^{5-}{}_2$ производятся следующие вычисления. Складывают два числа x и y (обозначим их сумму через z). Если от z отнять y, то получим некоторый результат c, а если от z отнять c, то получим некоторое число d. Что можно сказать о c и d? Как отличаются результаты, если вычисления производятся в $Z^{n-}{}_2$?

13. Переведите в двоичную систему счисления десятичные числа:
а) 51; б) 64; в) 125; г) 1000.

14. Выполните в двоичной системе следующие операции над десятичними числами:
а) 21 + 37; б) 31 + 105; в) 25 8; г) (8 + 19)11; д) 24 8 - 17. Проверьте полученные результаты в десятичной системе.

15. Переведите в двоичную систему счисления с точностью до пяти двоичных знаков после запятой числа: а) 0,131; б) 0,25; в) 175,26.

16. Дайте обоснование правил перевода десятичных чисел в двоичные.

17. Сложите двоичные числа 11001110 и 11010111 по обычному правилу и по модулю два. Найдите разность полученных результатов и объясните ее смысл.

18. Определяя операции $\wedge$ и $\vee$ как минимум и максимум, показать для произвольного Z_n, что

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

1.3. МАТРИЦЫ

1. Матрица как таблица. *Матрица* — это совокупность чисел или объектов другой природы, расположенных в виде прямоугольной таблицы:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\hline
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\hline
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\hline
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\
\hline
\end{array}.$$

Такая таблица, состоящая из m строк и n столбцов, содержит mn клеток (позиций). При этом говорят, что матрица имеет *размер* $m\times n$ и ее называют *($m\times n$)-матрицей.* Позицию на пересечении i-й строки и j-го столбца будем называть ij-*клеткой.*

Числа или любые другие объекты, расположенные в клетках таблицы, называют *элементами* матрицы. Положение элементов строго фиксировано: в каждой клетке должен располагаться только один элемент и ни одна клетка не должна оставаться свободной.
В общем обозначении элемента a_{ij} первый индекс i всегда указывает номер строки, а второй — номер столбца. Элемент, расположенный в ij -клетке, называют ij-*элементом.*

Матрица обозначается одной буквой (часто буквы, обозначающие матрицы, набирают жирным шрифтом или снабжают какими-либо дополнительными символами). Однако независимо от принятого способа обозначения матрица всегда является совокупностью таблично упорядоченных элементов. Две матрицы равны, если и только если равны их соответствующие элементы, т. е. $A = B$ при условии $a_{ij} = b_{ij}$ $(i = 1,2, \dots , m;\ j = 1,2, \dots , n)$. Ясно, что сравнивать можно только матрицы одного и того же размера, между элементами которых определено отношение равенства.

Матрицы, элементами которых являются вещественные или комплексные числа, называют соответственно *вещественными* или *комплексными.* Пусть A — комплексная ($m\times n$)-матрица с элементами $a_{ij} = \alpha_{ij} + i\beta_{ij}$. Матрица A того же размера с элементами $a_{ij}^* = \alpha_{ij} - i\beta_{ij}$ называется *комплексно-сопряженной* с A.

Часто для упрощения нулевые элементы в таблицу не записывают, но при этом имеют в виду, что пустые клетки также содержат числа (нули).

Кроме приведенной выше клеточной записи, используют и другие способы представления матриц, например:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix};\quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};\quad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Матрицы впервые появились в середине позапрошлого столетия в работах английских математиков А. Кэли и У. Гамильтона. Представление совокупностей элементов в виде матриц и разработанные правила операций над ними оказались весьма плодотворными в математике и нашли широкое применение в физике, технике, экономике. Существенный вклад в разработку общей теории матриц и ее приложений внесли математики И. А. Лаппо-Данилевский, А. Н. Крылов, Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн.

2. Типы матриц. Матрица может иметь любое количество строк и столбцов (конечное или бесконечное). В дальнейшем при отсутствии оговорок будут рассматриваться конечные матрицы с числовыми элементами.

Если матрица состоит из одного столбца или одной строки, то она соответственно называется *столбцовой* или *строчной* (употребляются также названия *матрица-столбец* и *матрица-строка).* В таких случаях достаточно отмечать элементы одним индексом:

$$x = \begin{array}{|c|} \hline x_1 \\ \hline x_2 \\ \hline \cdots \\ \hline x_n \\ \hline \end{array}\,; \qquad y = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \hline \end{array}$$

Столбцевую и строчную матрицы называют также *векторами* и сокращенно обозначают как $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$. Обычно из контекста ясно, идет ли речь о векторе-столбце или о векторе-строке. В противном случае используют приведенные выше обозначения.

Матрица, количество строк и столбцов которой одинаково и равно n, называется *квадратной матрицей* порядка n. Совокупность ii-клеток ($i = 1, 2, ..., n$) образует *главную диагональ* квадратной матрицы. Матрица, все элементы которой вне главной диагонали равны нулю, т. е.

$$D = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline d_1 & & & \\ \hline & d_2 & & \\ \hline & & \cdots & \\ \hline & & & d_n \\ \hline \end{array}\,,$$

называется *диагональной* и более кратко записывается
D =diag(d_1, $d_{2,\dots,}$ d_n). Если в диагональной матрице $d_1 = d_2 = \dots = d_n = 1$, то имеем *единичную* матрицу n-го порядка

$$E_n = \begin{array}{|c|c|c|c|} 1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ \hline & & \cdots & \\ \hline & & & 1 \end{array},$$

которая часто обозначается также через 1_n или просто цифрой 1 (не следует принимать это обозначение за число, равное единице).

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается цифрой 0. Заметим, что нулевая матрица может иметь любой размер $m \times n$, в то время как единичная матрица — всегда квадратная. Матрица, состоящая только из одного элемента, обычно отождествляется с этим элементом. Квадратная матрица называется *верхней (нижней) треугольной,* если равны нулю все элементы, расположенные под (над) главной диагональю:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline & & & a_{nn} \end{array}; \qquad B = \begin{array}{|c|c|c|c|} b_{11} & & \cdots & \\ \hline b_{21} & b_{22} & \cdots & \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}.$$

Диагональная матрица является частным случаем как верхней *(А),* так и нижней *(В)* треугольных .матриц.

3. Сложение матриц. Сумма двух матриц A и B одинаковых размеров определяется как матрица C тех же размеров, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц, т. е. $C = A + B$, если $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Пример:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -7 \\ 1 & 2 & 0{,}5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -3 & 10 \\ 0 & 0{,}5 & -0{,}5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & 2{,}5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Из приведенного определения следует, что операция сложения матриц коммутативна, т. е. $A+B=B+A$, и ассоциативна, т. е. $(A+B)+C=A+(B+C)$. Она естественным образом распространяется на любое число слагаемых. Очевидно также, что матрица A не изменяется при суммировании ее с нулевой матрицей тех же размеров, т. е. $A+0=A$.

4. Умножение матрицы на число. По определению произведением матрицы A на число α (в отличие от матриц и векторов, числа часто называют *скалярами)* является матрица $C=\alpha A$, элементы которой получаются умножением соответствующих элементов матрицы A на это число α, т. е. $c_{ij} = \alpha a_{ij}$. Пример:

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 8 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Очевидно, справедливы следующие соотношения:

$$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B; \quad (\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A; \quad (\alpha)A = \alpha(\beta A),$$

где A и B — матрицы одинакового размера; α и β — числа (скаляры). Общий множитель элементов можно выносить за знак матрицы, считая его скалярным множителем.

Разность двух матриц одинаковых размеров сводится к уже рассмотренным операциям соотношением $A - B = A + (-1)B$, т. е. $C = A - B$, если $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

5. Умножение матриц. По многим соображениям целесообразно определить эту операцию следующим образом: *произведением* матрицы A размера $(m \times n)$ на матрицу B размера $(n \times r)$ является матрица $C = AB$ размера $(m \times r)$, элемент c_{ij} которой, расположенный в ij-клетке, равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B, т. е.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Умножение A на B допустимо (произведение AB существует), если число столбцов A равно числу строк B (в таких случаях говорят, что эти две матрицы *согласуются по форме).* Пример:

$$\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2\cdot1+0\cdot2+3\cdot4+1\cdot3 & 2\cdot3+0\cdot1+3\cdot0+1\cdot5 \\ 5\cdot1+1\cdot2+2\cdot4+0\cdot3 & 5\cdot3+1\cdot1+2\cdot0+0\cdot5 \\ 0\cdot1+0\cdot2+4\cdot4+1\cdot3 & 0\cdot3+0\cdot1+4\cdot0+1\cdot5 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 17 & 11 \\ 15 & 16 \\ 19 & 5 \end{Vmatrix}.$$

Для матриц $A(m \times n)$ и $B(n \times m)$ существует как произведение AB размера $m \times m$, так и произведение BA размера $n \times n$. Ясно, что при $m \neq n$ эти произведения не могут быть равными уже вследствие различных размеров результирующих матриц. Но даже при $m = n$, т. е. в случае квадратных матриц одинакового порядка, произведения AB и BA не обязательно равны между собой. Например, для матриц

$$A = \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix};$$

имеем:

$$AB = \begin{Vmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 12 \end{Vmatrix}; \quad BA = \begin{Vmatrix} -3 & 10 \\ -2 & 16 \end{Vmatrix}.$$

Отсюда следует, что вообще операция умножения матриц не подчиняется коммутативному закону $(A\ B \neq B\ A)$. Если же выполняется соотношение $AB = BA$, то матрицы A и B называют *коммутирующими* или *перестановочными*. Ассоциативный и дистрибутивный законы для матричного умножения выполняются во всех случаях, когда размеры матриц допускают соответствующие операции: $(AB)C = A(BC) = ABC$ (ассоциативность), $A(B+C)=AB+AC$ и $(A+B)C=AC+BC$ (дистрибутивность умножения слева и справа относительно сложения).

Умножение $(m \times n)$-матрицы A на единичную матрицу m-го порядка слева и на единичную матрицу n-го порядка справа не изменяет этой матрицы, т. е. $E_m A = A E_n = A$. Если хотя бы одна из матриц произведения AB является нулевой, то в результате получим нулевую матрицу.

Отметим, что из $AB = 0$ не обязательно следует, что $A=0$ или $B = 0$. В этом можно убедиться на следующем примере:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0{,}5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

6. Транспонирование матрицы. Преобразование матрицы A, состоящее в замене строк столбцами (или столбцов строками) при сохранении их нумерации, называется *транспонированием.* Полученная в результате такого преобразования матрица называется *транспонированной* к матрице A и обозначается A^t или A':

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}; \quad A^t = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Произвольная $(m \times n)$-матрица при транспонировании становится $(n \times m)$-матрицей, а элемент a_{ij} занимает ji-клетку, т. е. $a_{ij} = a^t_{ji}$.

Если матрица (квадратная) совпадает со своей транспонированной, т. е. $A = A^t$, то она называется *симметричной* и ее элементы связаны соотношением $a_{ij} = a_{ji}$ (симметрия относительно главной диагонали). Матрица, для которой $A = -A^t$, называется *кососимметричной,* и ее элементы связаны соотношением $a_{ij} = -a_{ji}$. Она, как и симметричная матрица, всегда квадратная, но диагональные элементы равны нулю, т. е. $a_{ii} = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Ниже приведены примеры симметричной и кососимметричной матриц:

2	0,5	3	–5
0,5	0	0	7
3	0	0,1	0
–5	7	0	–4

;

0	2	0,1	0
–2	0	–3	0
–0,1	3	0	–7
0	0	7	0

.

Ясно, что не все элементы таких матриц могут быть выбраны произвольно. Можно убедиться, что из n^2 элементов для симметричной матрицы независимыми могут быть только $\frac{1}{2}n(n+1)$, а для кососимметричной — $\frac{1}{2}n(n-1)$ элементов.

Комплексно-сопряженная и транспонированная матрица $(A)^t$ называется *сопряженной* с A и обозначается через A^*. Матрица, равная своей сопряженной, т. е. $A = (\bar{A})^t = A^*$, называется *эрмитовой.* Если $A = -(\bar{A})^t$, то A — *косоэрмитова* матрица.

Легко показать, что транспонирование произведения AB равно произведению транспонированных матриц, взятых в обратном порядке: $(AB)^t=B^t$. Дважды транспонированная матрица равна исходной, т. е. $(A^t)A^t = A$.

7. Матричная запись системы линейных уравнений. Первоначально матрицы были введены для упрощения записи систем линейных уравнений, что обусловило и определение основных матричных операций. Система линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{aligned}\right\}$$

записывается одним матричным равенством

$$\begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_m \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{Vmatrix}.$$

Действительно, перемножив в правой части равенства *(m × n)*-матрицу на столбцевую матрицу, получим

$$\begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_m \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{Vmatrix}.$$

Из равенства матриц-столбцов следуют равенства для соответствующих элементов, которые совпадают с исходной системой уравнений. Если обозначить

$$y = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_m \end{Vmatrix}; \quad A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}; \quad x = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{Vmatrix},$$

то матричное равенство запишется еще короче

$$y = Ax.$$

Такое представление системы линейных уравнений оказалось возможным благодаря правилу умножения матриц, которое наилучшим образом подходит для этой цели. Однако исторически дело обстояло как раз наоборот: правила действий над матрицами определялись, прежде всего, исходя из удобства представлений систем линейных уравнений.

8. Линейные преобразования. Систему уравнений, записанную в начале предыдущего пункта, можно рассматривать как линейное преобразование совокупности величин $x_1, x_2, ..., x_n$ в совокупность $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Это преобразование полностью определяется коэффициентами a_{ij} $(i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n)$. На языке матриц линейное преобразование $y = Ax$ означает преобразование столбца x в столбец y, которое определяется *матрицей преобразования A.*

Пусть величины $x_1, x_2, ..., x_n$ получаются из некоторой совокупности величин $z_1, z_2, ..., z_r$ посредством линейного преобразования $x = Bz$, где x и z — столбцы соответствующих величин; B — матрица их преобразования. Тогда формальной подстановкой x в первое матричное уравнение получаем

$$y = Ax = A(Bz) = (AB)z = Cz,$$

где $C = AB$ — матрица преобразования величин r в y. К этому же результату можно прийти путем подстановки значений $x_1, x_2, ..., x_n$ из второй системы уравнений в первую с учетом введенного ранее правила умножения прямоугольных матриц.

9. Обратная матрица. В обычной алгебре два числа, произведение которых равно единице, называют взаимно обратными. Число, обратное числу a, обозначается через a^{-1} и по определению $aa^{-1}=1$. Аналогично в матричной алгебре две квадратные матрицы, произведение которых равно единичной матрице, т. е. $AA^1=A^{-1}A=1$, называют *взаимно обратными* (A^{-1} обратна A). Однако дальше этого аналогия не проходит.

Выражение $a^{-1}b$, где a и b — числа, можно представить как частное от деления b на a, но для матриц такое представление не имеет смысла и в общем случае $A^{-1}B \neq BA^{-1}$. Поэтому вместо операции деления B на A различают левое частное $A^{-1}B$ и правое частное $B\,A^{-1}$, которые сводятся к умножению слева или справа на обратную матрицу A^{-1}.

Способ обращения матрицы проще всего установить, рассматривая решение системы n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = q_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = q_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = q_n \end{array}\right\}.$$

В матричной форме эта система уравнений запишется как $Ax = q$, где A — квадратная матрица n-го порядка, называемая *матрицей* *системы;* x и q — столбцевые матрицы неизвестных переменных и свободных членов:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{vmatrix}; \quad q = \begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ q_n \end{vmatrix}.$$

Матричное уравнение $Ax = q$ решается умножением *обеих* его частей слева на обратную матрицу A^{-1}, т. е. $A^{-1}Ax = A^{-1}q$, в результате чего получаем $x = A^{-1}q$.

В соответствии с правилам Крамера неизвестные x_k $(k = 1, 2, ...,n)$ определяются соотношением:

$$x_k = \frac{1}{\Delta}(\Delta_{1k}q_1 + \Delta_{2k}q_2 + \cdots + \Delta_{nk}q_n) = \frac{1}{\Delta}\sum_{s=1}^{n}\Delta_{sk}q_s,$$

где Δ — *определитель* системы уравнений и Δ_{sk} — *алгебраические дополнения.*

Определитель Δ представляет собой числовую функцию, которая вычисляется по определенным правилам на основании квадратной таблицы, состоящей из коэффициентов системы уравнений

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Табличное представление определителя Δ по форме совпадает с матрицей системы уравнений, т. е. состоит из тех же элементов и в том же порядке, что и матрица A. В таких случаях его называют *определителем матрицы A* и записывают $\Delta = \det A$.

Алгебраическое дополнение Δ_{sk} вычисляется как определитель матрицы, полученной удалением из матрицы A s-й строки и k-го столбца, причем этот определитель умножается еще на $(-1)^{s+k}$. Величину Δ_{sk} называют также *алгебраическим дополнением элемента* a_{sk} матрицы A. Часто определитель матрицы A обозначается через $|A|$, а алгебраическое дополнение — через A_{sk}.

Записав для всех элементов столбцевой матрицы x выражения по правилам Крамера, получим решение системы уравнений в виде:

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\Delta}(\Delta_{11}q_1 + \Delta_{21}q_2 + \cdots + \Delta_{n1}q_n) \\ \frac{1}{\Delta}(\Delta_{12}q_1 + \Delta_{22}q_2 + \cdots + \Delta_{n2}q_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{\Delta}(\Delta_{1n}q_1 + \Delta_{2n}q_2 + \cdots + \Delta_{nn}q_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ q_n \end{vmatrix},$$

откуда, сравниваяс $x = A^{-1}q$, имеем

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{vmatrix}.$$

Из полученного выражения следует правило определения обратной матрицы: 1) элементы a_{ij} данной матрицы A n-го порядка заменяются их алгебраическими дополнениями Δ_{ij}, 2) матрица алгебраических дополнений транспонируется, в результате чего получаем *присоединенную* или *взаимную матрицу* к A (она обозначается через $\mathrm{Adj}A$); 3) вычисляется определитель Δ матрицы A и присоединенная матрица $\mathrm{Adj}A$ умножается на величину, обратную этому определителю.

Обратная матрица существует для матрицы A при условии, что $\det A \neq 0$. Такие матрицы называются *неособенными,* в отличие от *особенных (вырожденных),* определитель которых равен нулю. Ниже вычисление обратной матрицы иллюстрируется примером:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 7 \\ -5 & 4 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -28 & -38 & -12 \\ 1 & -2 & -13 \\ 7 & -14 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$\det A = -94 \qquad\qquad (1)$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} -28 & 1 & 7 \\ -38 & -2 & -14 \\ -12 & -13 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \frac{14}{47} & -\frac{1}{94} & -\frac{7}{94} \\ \frac{19}{47} & \frac{1}{47} & \frac{7}{47} \\ \frac{6}{47} & \frac{13}{94} & -\frac{3}{94} \end{vmatrix} = A^{-1}.$$

$$(2) \qquad\qquad (3)$$

Матрица, обратная произведению двух матриц, равна переставленному произведению матриц, обратных исходным, т. е. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Действительно, умножив обе части этого равенства на AB, приходим к тождеству $E = B^{-1}A^{-1}(AB)$, так как

$$B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E,$$

где E—единичная матрица n-го порядка.

10. Блочные матрицы. Часто матрицу удобно разбить вертикальными и горизонтальными линиями на *блоки,* которые являются матрицами меньших размеров и при выполнении операций рассматриваются как элементы исходных матриц. Операции над *блочными матрицами* выполняются по сформулированным выше правилам при условии, что эти операции допускаются размерами соответствующих матриц.

Пусть, например, матрицы A и B разбиты на блоки (жирными линиями) так, чтобы для соответствующих блоков имела смысл операция умножения, т. е.

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}; \quad B = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ \hline 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix}.$$

По правилу умножения прямоугольных матриц можно записать:

$$C = AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{bmatrix}.$$

Вычислим блоки C_{11} и C_{21} матрицы С:

$$C_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 13 & -3 \end{bmatrix};$$

$$C_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

В результате имеем

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} -5 & 2 \\ 13 & -3 \\ \hline 1 & 7 \end{array}\right]$$

Конечно, тот же результат получается и при непосредственном перемножении матриц. Но разбиение на блоки позволяет оперировать с матрицами меньших размеров (это бывает необходимо, например, когда не хватает места на бумаге или ячеек оперативной памяти машины) и особенно удобно, если можно выделить нулевые блоки.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Любая матрица является прямоугольной таблицей. Справедливо ли обратное утверждение, т. е. можно ли считать всякую прямоугольную таблицу матрицей? Если нет, то какие дополнительные требования выдвигаются с позиций матричной алгебры?

2. Какие из приведенных ниже совокупностей объектов представляют собой матрицы:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } \begin{bmatrix} \sin x \\ x \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \text{в) } \begin{bmatrix} & 12 & \\ 0 & & 3 \\ 2 & & -1 \end{bmatrix}; \quad \text{г) } \begin{array}{cccc} & & 1 & \\ & 1 & 1 & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}.$$

3. Укажите, какие из приведенных ниже матриц являются равными между собой (при $x = 2$):

$$A = \begin{bmatrix} x^2 + 1 & 2 \\ 2^x & (x-1)^3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2x - 1 \\ 3x - 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 2^x + 1 & x \\ (4 - x)^2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. При каком значении x матрицы A и B равны:

$$A = \begin{bmatrix} (x-3)^2 & 3 \\ x^2 - 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2x + 1 \\ (x-1)(x+1) & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Найти сумму $A + B$ и разность $A — B$ матриц:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. Найти произведения AB и BA и сравнить полученные результаты для матриц:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{б) } A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}.$$

$$\text{в) } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

7. Проверить дистрибутивность умножения слева $A(B+C)=AB+AC$ и справа $(A+B)C = AC + BC$ относительно сложения для следующих матриц:

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}; \quad B=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad C=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

9. Каким условиям в общем случае должны удовлетворять элементы квадратных матриц A и B второго порядка, чтобы они были перестановочными $(AB = BA)$? Как выглядят эти условия для случая, когда A — симметричная матрица?

10. При каких условиях справедливы матричные соотношения:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2; \ (A-B)(A+B) = A^2 - B^2?$$

11. Каким условиям должны удовлетворять элементы ненулевых квадратных матриц A и B, чтобы $AB = 0$?

12. К каким типам относятся матрицы:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}; \ B=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}; \quad C=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}?$$

13. Построить транспонированную A^t, комплексно-сопряженную $\overline{A}$ и сопряженную A^* для матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 1+2i & 4 & 2-3i \\ -i & 2 & 4+2i \\ 5-3i & 1 & -6i \end{bmatrix}.$$

14. Показать, что матрица

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 1+i & 2+3i \\ 1-i & 2 & 3-4i \\ 2-3i & 3+4i & 3 \end{bmatrix}$$

является эрмитовой. Что можно сказать о диагональных элементах любой эрмитовой матрицы?

15. Какого типа должна быть квадратная матрица A, чтобы она была перестановочной с диагональной матрицей D того же порядка, т. е. чтобы $AD = DA$?

16. К какому типу относятся треугольные матрицы, если они кроме того: а) симметричные, б) кососимметричные?

17. Показать, что $\overline{(AB)} = \overline{A}\overline{B}$ и $(AB)^* = B^*A^*$.

18. Проверить соотношение $(AB)^* = B^*A^*$ для матриц задачи 6в.

19. Показать, что произведение AA^t существует для любой матрицы A и является симметричной матрицей.

20. Для заданных матриц найти обратные и проверить соотношение $AA^{-1}=1$:

$$а)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix};\quad б)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

21. Найти матрицы, обратные заданным, и проверить соотношение $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix};\quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}.$$

22. Дана система уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= -1 \end{aligned}\right\}.$$

Записать эту систему в матричной форме $Ax = q$, вычислить обратную матрицу A^{-1} и записать решение системы.

23. Зависимости между токами и напряжениями четырехполюсника (рис. 1, *а)* можно представить одной из систем уравнений:

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= a_{11}U_2 + a_{12}I_2 \\ I_1 &= a_{21}U_2 + a_{22}I_2 \end{aligned}\right\};\quad \left.\begin{aligned} I_1 &= y_{11}U_1 + y_{12}U_2 \\ I_2 &= y_{21}U_1 + y_{22}U_2 \end{aligned}\right\}.$$

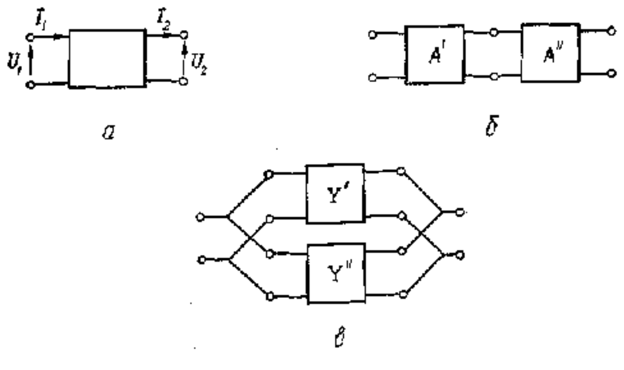


Рис. 1. Соединение четырехполюсника:
а — четырехполюсник; *б* — последовательное соединение;
в — параллельное соединение.

а) Записать эти уравнения в матричной форме и установить зависимости между элементами матриц:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix};\quad Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}.$$

6} Показать, что матрица *А* последовательного соединения четырехполюсликов (рис. В.5, *б)* равна произведению их матриц *А'* и *А''*, т. е. $A = A'A''$ (в порядки следования).

в) Показать, что матрица Y параллельного соединения четырехполюсников (рис, В.5, *в)* равна сумме их матриц Y' и Y'', т. е. $Y = Y' + Y''$.

24. Выполнить умножение матриц, воспользовавшись разбиением их на блоки:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 5 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right].$$

Проверить результат непосредственным умножением матриц.

1.4. ГРАФЫ

1. Происхождение графов. Многие задачи сводятся к рассмотрению совокупности объектов, существенные свойства которых описываются связями между ними. Например, глядя на карту автомобильных дорог, можно интересоваться только тем, имеется ли связь между некоторыми населенными пунктами, отвлекаясь от конфигурации и качества дорог, расстояний и других подробностей. При изучении электрических цепей на первый план может выступать характер соединений различных ее компонентов — резисторов, конденсаторов, источников и т. п. Органические молекулы образуют структуры, характерными свойствами которых являются связи между атомами. Интерес могут представлять различные связи и отношения между людьми, событиями, состояниями и вообще между любыми объектами.

В подобных случаях удобно рассматриваемые объекты изображать точками, называемыми *вершинами,* а связи между ними —линиями (произвольной конфигурации), называемыми *ребрами.* Множество вершин V, связи между которыми определены множеством ребер E, называют *графом* и обозначают $G = (V, E)$.

Первая работа по графам была опубликована двадцатилетним Леонардом Эйлером в 1736 г., когда он работал в Российской Академии наук. Она содержала решение задачи о кенигсбергских мостах (рис. 1, *а):* можно ли совершить прогулку таким образом, чтобы выйдя из любого места города, вернуться в него, пройдя в точности один раз по каждому мосту?

Рис. 1. К задаче о кенигсбергских местах:
а - план города; б - граф.

Ясно, что по условию задачи не имеет значения, как проходит путь по частям суши *a, b, c, d,* на которых расположен г. Кенигсберг (ныне Калининград), поэтому их можно представить вершинами. А так как связи между этими частями осуществляются только через семь мостов, то каждый из них изображается ребром, соединяющим соответствующие вершины. В результате получаем граф, изображенный на рис. 1, *б.* Эйлер дал отрицательный ответ на поставленный вопрос. Более того, он доказал, что подобный маршрут имеется только для такого графа, каждая из вершин которого связана с четным числом ребер.

С тех нор поток задач с применением графов нарастал подобно снежной лавине. Наряду с многочисленными головоломками и играми на графах, рассматривались важные практические проблемы, многие из которых требовали тонких математических методов. Уже в середине позапрошлого века Кирхгоф применил графы для анализа электрических цепей, а Кэли исследовал важный класс графов для выявления и перечисления изомеров насыщенных углеводородов. Однако теория графов как математическая дисциплина сформировалась только к середине тридцатых годов прошлого столетия благодаря работам многих исследователей, наибольшая заслуга среди которых принадлежит Д. Кенигу. Значительный вклад в теорию графов внесли Л. С. Понтрягин, А. А. Зыков, В. Г. Визинг и др.

Теория графов располагает мощным аппаратом решения прикладных задач из самых различных областей науки и техники. Сюда относятся, например, анализ и синтез цепей и систем, проектирование каналов связи и исследование процессов передачи информации, построение контактных схем и исследование конечных автоматов, сетевое планирование и управление, исследование операций, выбор оптимальных маршрутов и потоков в сетях, моделирование жизнедеятельности и нервной системы живых организмов, исследование случайных процессов и многие другие задачи. Теория графов тесно связана с такими разделами математики, как теория множеств, теория матриц, математическая логика и теория вероятностей. Во всех этих разделах графы применяют для представления различных математических объектов, и в то же время сама теория графов широко использует аппарат родственных разделов математики.

2. Ориентированные графы. Часто связи между объектами характеризуются вполне определенной ориентацией. Например, на некоторых улицах допускается только одностороннее автомобильное движение, в соединительных проводах электрической цели задаются положительные направления токов, отношения между людьми могут определяться подчиненностью или старшинством. Ориентированные связи характеризуют переход системы из одного состояния в другое, результаты встреч между командами в спортивных состязаниях, различные отношения между числами (неравенство, делимость).

Для указания направления связи между вершинами графа соответствующее ребро отмечается стрелкой. Ориетированное таким образом ребро называют *дугой,* а граф с ориентированными ребрами — *ориентированным графом* или короче *орграфом* (рис. 2, *а*).

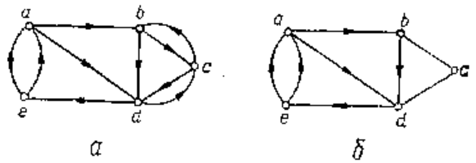


Рис. 2. Ориентированный (а) и смешанный (б) графы

Если пара вершин соединяется двумя или большим числом дуг, то такие дуги называют *"параллельными"*. При этом две дуги, одинаково направленные по отношению к данной вершине, называют *строго параллельными,* а различно направленные — *нестрого параллельными.* Ясно, что нестрого параллельные дуги, отображающие ориентацию связи в обоих направлениях, по существу равноценны неориентированной связи и могут быть заменены ребром. Произведя такую замену в орграфе, придем к *смешанному* графу, который содержит ребра и дуги (рис. 2, *б).* Обратно, любой неориентированный или смешанный граф можно преобразовать в ориентированный заменой каждого ребра парой нестрого параллельных дуг.

Изменив направления всех дуг орграфа на противоположные, получаем орграф, *обратный* исходному. Если направления дуг орграфа не учитываются и каждая дуга рассматривается как неориентированное ребро, то он называется *соотнесенным* (неориентированным) графом.

3. Взвешенные графы. Дальнейшее обобщение отображения связей между объектами с помощью графов состоит в приписывании ребрам и дугам некоторых количественных значений, качественных признаков или характерных свойств, называемых *весами.* В простейшем случае это может быть порядковая нумерация ребер и дуг, указывающая на очередность при их рассмотрении (приоритет или иерархия). Вес ребра или дуги может означать длину (пути сообщения), пропускную способность (линии связи), напряжение или ток (электрические цепи), количество набранных очков (турниры), валентность связей (химические формулы), количество рядов движения (автомобильные дороги), цвет проводника (монтажная схема электронного устройства), характер отношений между людьми (сын, брат, отец, подчиненный, учитель) и т. п.

Вес можно приписывать не только ребрам и дугам, но и вершинам. Например, вершины, соответствующие населенным пунктам на карте автомобильных дорог, могут характеризоваться количеством мест в кемпингах, пропускной способностью станций техобслуживания. Вообще, вес вершины означает любую характеристику соответствующего ей объекта (атомный вес элемента в структурной формуле, цвет изображаемого вершиной предмета, возраст человека и т. п.).

Особое значение для моделирования физических систем приобрели взвешенные ориентированные графы, названные *графами потоков сигналов* или *сигнальными графами.* Вершины сигнального графа отождествляются с некоторыми переменными, характеризующими состояние системы, а вес каждой вершины означает функцию времени или некоторые величины, характеризующие соответствующую неременную *(сигнал вершины).* Дуги отображают связи между переменными, и вес каждой дуги представляет собой численное или функциональное отношение, характеризующее передачу сигнала от одной вершины к другой *(передача дуги).* Сигнальные графы находят широкое применение в теории цепей и систем, а также во многих других областях науки и техники.

4. Типы конечных графов. Если множество вершин графа конечно, то он называется *конечным графом.* В математике рассматриваются и бесконечные графы, но мы заниматься ими не будем, так как в практических приложениях они встречаются редко. Конечный граф G — (V, E), содержащий p вершин и q ребер, называется (p, q)-*графом.*

Пусть $V = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ и $E = \{e_1, e_2, ..., e_q\}$ — соответственно множества вершин и ребер (p, q)-графа. Каждое ребро $e_k \in E$ соединяет пару вершин v_i, $v_j \in V$, являющихся его *концами (граничными вершинами).* Для ориентированного ребра (дуги) различают *начальную* *вершину,* из которой дута исходит, и *конечную вершину,* в которую дуга заходит. Ребро, граничными вершинами которого является одна и та же вершина, называется *петлей.* Ребра с одинаковыми граничными вершинами являются параллельными и называются *кратными.* В общем случае граф может содержать и *изолированные вершины,* которые не являются концами ребер и не связаны ни между собой, ни с другими вершинами. Например, для (5, 6)-графа на рис. 3, *а* $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$; $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$; ребра e_2 и e_3 параллельны, ребро e_6 является петлей, а v_4 — изолированная вершина.

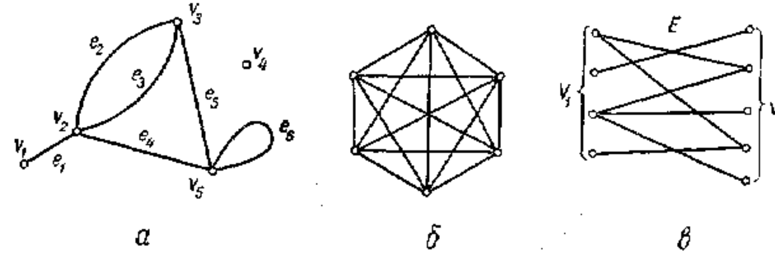


Рис. 3. Типы графов: *с* — псевдограф; *б* — полный граф (шестиугольник); *в* — двудольный граф (бигргаф).

Число ребер, связанных с вершиной v_i (петля учитывается дважды), называют *степенью вершины* и обозначают через $\delta(v_i)$ или deg (v_i). Так, для графа на рис. 3, *а* $\delta(v_1) = 1$, $\delta(v_2) = 4$ и т. д. Очевидно, степень изолированной вершины равна нулю ($\delta(v_4) = 0$). Вершина степени единицы называется *концевой* или *висячей вершиной* ($\delta(v_1) =1$). Легко показать, что в любом графе сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер, а число вершин нечетной степени всегда четно. В орграфе различают положительные $\delta^+(v_i)$ и отрицательные $\delta^-(v_i)$ степени вершин, которые равны соответственно числу исходящих из v_i и заходящих в v_i дуг. Например, для вершины d орграфа (см. рис. 2, *а*) имеем $\delta^+(d) = 2$ и $\delta^-(d) = 3$. Очевидно, суммы положительных и отрицательных степеней всех вершин орграфа равны между собой и равны также числу всех дуг.

Граф без петель и кратных ребер называют *простым* или *обыкновенным.* Граф без петель, но с кратными ребрами называют *мультиграфом.* Наиболее общий случай графа, когда допускаются петли и кратные ребра, называют *псевдографом.* Так, граф на рис. 1,*б* — это мультиграф, а на рис. 3, *а* — псевдограф. Если граф не имеет ребер ($E = \varnothing$), то все его вершины изолированы ($V \neq \varnothing$), и он называется *пустым* или *нуль-графом.* Простой граф, в котором любые две вершины соединены ребром, называется *полным* (на рис. 3, *б* приведен пример полного графа с шестью вершинами). Если множество вершин V простого графа допускает такое разбиение на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2 ($V_1 \cap V_2 = \varnothing$), что не существует ребер, соединяющих вершины одного и того же подмножества, то он называется *двудольным* или *биграфом* (рис. 3, *в).* Ориентированный граф считается *простым,* если он не имеет строго параллельных дуг и петель.

Граф, степени всех вершин которого одинаковы и равны r, называется *однородным (регулярным)* r-й *степени.* Полный граф с n вершинами всегда однородный степени $n—1$, а пустой граф— однородный степени 0. Граф третьей степени называют *кубическим.* Он обладает рядом интересных свойств и, в частности, всегда имеет четное число вершин.

5. Смежность. Две вершины v_i и $v_j \in V$ графа $G=(V, E)$ называются *смежными,* если они являются граничными вершинами ребра $e_k \in E$. Отношение смежности на множестве вершин графа можно определить, представив каждое ребро как пару смежных вершин, т. е. $e_k = (v_i, v_j)$, k=1, 2, ..., q. Для неориентированных графов такие пары неупорядочены, так что $e_k=(v_i, v_j)=(v_j, v_i)$, а для орграфов — упорядочены, причем v_i и v_j означают соответственно начальную и конечную вершины дуги e_k. Петля при вершине v_i в обоих случаях представляется неупорядоченной парой (v_i, v_i). Ясно, что множество вершин V вместе с определенным на нем отношением смежности полностью определяет граф.

Граф можно представить также *матрицей смежности.* Строки и столбцы этой матрицы соответствуют вершинам графа, а ее (ij)-элемент равен числу кратных ребер, связывающих вершины v_i, и v_j (или направленных от вершины v_i к вершине v_j для орграфа). Например, для графов, приведенных на рис. 2, *а* и 3, *а,* имеем соответственно следующие матрицы смежности:

$$
V_1 = \begin{array}{c c}
\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} & \\
\left|\begin{array}{c|c|c|c|c}
 & 1 & & 1 & \\ \hline
 & & 1 & 1 & \\ \hline
 & 1 & & 1 & \\ \hline
 & & 1 & & 1 \\ \hline
2 & & & &
\end{array}\right| & \begin{array}{c} a \\ b \\ c; \\ d \\ e \end{array}
\end{array}
\qquad
V_2 = \begin{array}{c c}
\begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} & \\
\left|\begin{array}{c|c|c|c|c}
 & 1 & & & \\ \hline
1 & & 2 & & 1 \\ \hline
 & 2 & \cdot & & 1 \\ \hline
 & & & & \\ \hline
 & 1 & 1 & & 1
\end{array}\right| & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3. \\ v_4 \\ v_5 \end{array}
\end{array}
$$

Матрица смежности неориентированного графа всегда симметрична, а орграфа — в общем случае несимметрична. Неориентированным ребрам соответствуют пары ненулевых элементов, симметричных относительно главной диагонали матрицы, дугам — ненулевые элементы матрицы, а петлям — ненулевые элементы главной диагонали. В столбцах и строках, соответствующих изолированным вершинам, все элементы равны нулю. Элементы матрицы простого графа равны 0 или 1, причем все элементы главной диагонали нулевые.

Для взвешенного графа, не содержащего кратных ребер, можно обобщить матрицу смежности так, что каждый ее ненулевой элемент равняется весу соответствующего ребра или дуги. Обратно, любая квадратная матрица n-го порядка может быть представлена орграфом с n вершинами, дуги которого соединяют смежные вершины и имеют веса, равные соответствующим элементам матрицы. Если матрица симметрична, то она представима неориентированным графом.

6. Инцидентность. Если вершина v_i является концом ребра e_k, то говорят, что они *инцидентны:* вершина v_i инцидентна ребру e_k, и ребро e_k инцидентно вершине v_i. В то время как смежность представляет собой отношение между однородными объектами (вершинами), инцидентность — это отношение между разнородными объектами (вершинами и ребрами). При рассмотрении орграфов различают *положительную инцидентность* (дуга исходит из вершины) и *отрицательную инцидентность* (дуга заходит в вершину).

Рассматривая инцидентность вершин и ребер (p, q)-графа, можно представить его *матрицей инцидентности* размера $p \times q$, строки которой соответствуют вершинам, а столбы — ребрам.

Для неориентированного графа элементы этой матрицы определяются по следующему правилу: ij-элемент равен 1, если вершина v_i инцидентна ребру e_j, и равен нулю, если v_i и e_j не инцидентны. В случае орграфа ненулевой ij-элемент равен 1, если v_i начальная вершина дуги e_j, и равен —1, если v_i — конечная вершина дуги e_j.

Например, матрица инцидентности графа, приведенного на рис. 3, *а*, имеет вид:

$$
A = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|l}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & \\
\hline
 & 1 & & & & & & v_1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & v_2 \\
\hline
 & & 1 & 1 & & 1 & & v_3. \\
\hline
 & & & & & & & v_4 \\
\hline
 & & & & 1 & 1 & & v_5 \\
\hline
\end{array}
$$

Каждый столбец матрицы инцидентности содержит обязательно два единичных элемента (для орграфа эти элементы всегда имеют различные знаки и равны соответственно 1 и —1). Количество единиц в строке равно степени соответствующей вершины (для орграфа количество положительных единиц определяет положительную степень, а количество отрицательных единиц — отрицательную степень). Нулевая строка соответствует изолированной вершине, а нулевой столбец — петле.

Следует иметь в виду, что нулевой столбец матрицы инцидентности лишь указывает на наличие петли, но не содержит сведений о том, с какой вершиной эта петля связана (в практических приложениях это может быть несущественно).

7. Изоморфизм. На рис. 4 изображены три графа, которые с геометрической точки зрения совершенно различны (пересечение ребер, если оно не отмечено точкой, не является вершиной). Но по существу они различаются лишь начертанием, а отношения инцидентности (при соответствующем обозначении вершин и ребер) для них одинаковы.

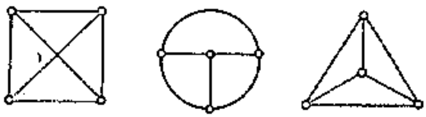


Рис. 4. Изоморфные графы.

Графы, для которых сохраняется отношение инцидентности, называются *изоморфными.*

Ясно, что матрица инцидентности определяет граф без петель с точностью до изоморфизма. Обычно на ее основе можно изобразить различные в геометрическом отношении, но изоморфные между собой графы, каждый из которых называют *геометрической реализацией.* Графы, которые имеют одинаковые начертания и отличаются лишь нумерацией вершин и ребер, не будучи тождественными, являются изоморфными.

Если существенные свойства графа не связаны со способом его изображения на плоскости или нумерацией вершин и ребер, то изоморфные графы, как правило, не различают между собой.

8. Маршруты. Нередко задачи на графах требуют выделения различных маршрутов, обладающих определенными свойствами и характеристиками. *Маршрут длины т* определяется как последовательность *т* ребер графа (не обязательно различных) таких, что граничные вершины двух соседних ребер совпадают. Маршрут проходит и через все вершины, инцидентные входящим в него ребрам. Примерами маршрутов на графе рис. 3, *а* могут служить последовательности $(e_1, e_3, e_2, e_3, e_5)$, (e_5, e_6, e_4, e_4). Первый маршрут проходит через последовательность вершин $(v_1, v_2, v_3, v_2, v_3, v_5)$ и соединяет вершины v_1 и v_5, а второй — через последовательность вершин $(v_3, v_5, v_5, v_2, v_5)$ и соединяет вершины v_3 и v_5. *Замкнутый маршрут* приводит в ту же вершину, из которой он начался.

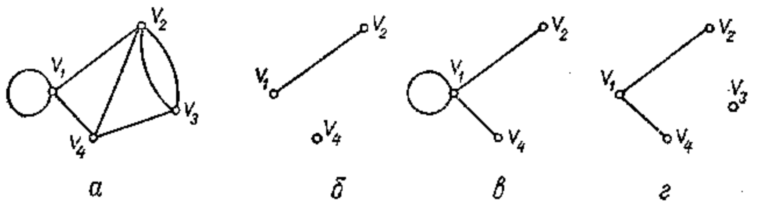
Маршрут, все ребра которого различны, называется *цепью,* а маршрут, для которого различны все вершины, называется *простой цепью.* Замкнутая цепь называется *циклом,* а простая цепь — *простым циклом.* Так, на графе рис. 3, *а* (e_2, e_5, e_6) — цепь, (e_1, e_2, e_5) — простая цепь, (e_2, e_3, e_4, e_5) — цикл, (e_2, e_4, e_5) — простой цикл.

Цикл, который содержит все ребра графа, называется *эйлеровым циклом* (задача о кенигсбергских мостах сводится к выяснению существования такого цикла), а граф, в котором имеется такой цикл, называется эйлеровым графом. Простой цикл, который проходит через все вершины графа, называют *гамильтоновым.* Если критерий существования эйлерового цикла очень прост (необходимо, чтобы степени всех вершин были четными), то для гамильтоновых циклов никакого общего правила не найдено.

Ориентированные маршруты на орграфе определяются аналогично с той разницей, что начальная вершина каждой последующей дуги маршрута должна совпадать с конечной вершиной предыдущей дуги. Иначе говоря, движение по маршруту допускается только в направлениях, указанных стрелками. Маршрут, не содержащий повторяющихся дуг, называется *путем,* а не содержащий повторяющихся вершин — *простым путем.* Замкнутый путь называется *контуром,* а простой замкнутый путь — *простым контуром.* Граф (орграф) называется *циклическим (контурным),* если он содержит хотя бы один цикл (контур), в противном случае он называется *ациклическим (бесконтурным).*

Понятия цепи и цикла применимы и к ориентированным графам. При этом направления дуг не учитываются, т. е. по существу вместо орграфа рассматривают неориентированный соотнесенный ему граф.

9. Части графа. Граф $G' = (V', E')$ является *частью графа* $G = (V, E)$, если $V' \subset V$ и $E' \subset E$, т. е. граф содержит все вершины и ребра любой его части. Часть, которая, наряду с некоторым подмножеством ребер графа, содержит и все инцидентные им вершины, называется *подграфом.* Часть, которая наряду с некоторым подмножеством ребер графа, содержит все вершины графа ($V' = V$, $E' \subset E$), называется *суграфом.* Рассмотренные графы показаны на рис. 5.



Ркс. 5. Граф и его части:
а — граф; *б* — часть графа; *в* — подграф; *г* — суграф.

Исходный граф по отношению к его подграфу называют *надграфом,* а по отношению к суграфу — *сверхграфом.* Совокупность всех ребер графа, не принадлежащих его подграфу (вместе с инцидентными вершинами), образует *дополнение подграфа.* Говорят, что подграфы $G' = (V', E')$ и $G'' = (V'', E'')$ *разделены ребрами,* если они не имеют общих ребер ($E' \cap E'' = \varnothing$) и *разделены вершинами,* если у них нет общих вершин ($V' \cap V'' = \varnothing$).

10. Связность. Две вершины графа называют *связанными,* если существует маршрут, соединяющий эти вершины. Граф, любая пара вершин которого связана, называют *связным графом.* Очевидно, в связном графе между любыми двумя вершинами существует простая цепь, так как из связывающего их маршрута всегда можно удалить циклический участок, проходящий через некоторую вершину более одного раза (рис. 6, где маршрут между вершинами *V;* и *V;* изображен жирными линиями).

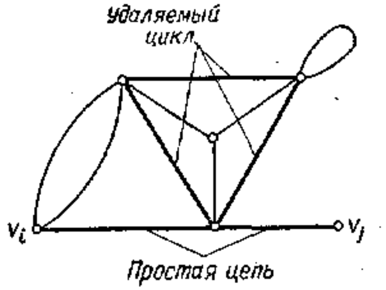


Рис. 6. Связный граф.

Если граф не связный, то множество его вершин можно единстнным образом разделить на непересекающиеся подмножества, каждое из которых содержит все связанные между собой вершины и вместе с инцидентными им ребрами образует связный подграф.

Таким образом, несвязный граф представляет собой совокупность отдельных частей (подграфов), называемых *компонентами.* На рис. 7 показан подграф, состоящий из трех компонент (изолированная вершина считается компонентой).

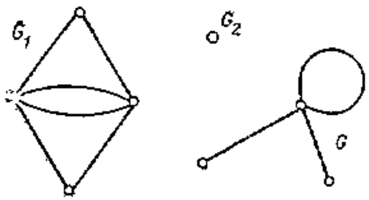


Рис. 7. Несвязный граф, стоящий из трех компонент (G_1, G_2, G_3).

Часто отношение связности усложняется дополнительными условиями. Граф называют *циклически связным,* если любые две различные вершины содержатся в цикле (например, граф на рис. 5, а циклически связный, а граф на рис. 6 — нет, так как вершина v_j, не содержится ни в каком цикле с другими вершинами). Граф называют *k-связным,* если любая пара различных вершин связана, по крайней мере k цепями, которые не имеют общих вершин (кроме начальной и конечной). Так, граф на рис. 5, *а* двусвязный, а на рис. 6 — односвязный.

Связность ориентированных графов определяется так же, как и для неориентированных (без учета направлений дуг). Специфичным для орграфа (или смешанного графа) является понятие сильной связности. Орграф называют *сильно связным,* если для любой пары его вершин v_i и v_j существует путь из v_i в v_j и из v_j в v_i (например, граф на рис. 2, *а* сильно связный). Граф, представляющий план города с односторонним движением по некоторым улицам, должен быть сильно связным, так как в противном случае нашлись бы вершины (площади и перекрестки), между которыми нельзя было бы проехать по городу без нарушения правил движения.

11. Разделимость. Связный граф может быть разделен на несвязные подграфы удалением из него некоторых вершин и ребер (при удалении вершин исключаются и все инцидентные им ребра, а при удалении ребер вершины сохраняются). Если существует такая вершина, удаление которой превращает связный граф (или компоненту несвязного графа) в несвязный, то она называется *точкой сочленения* (рис. 8, *а).* Ребро с такими же свойствами называется *мостом* (рис. 8, *б).* Ясно, что при наличии моста в графе имеется, по крайней мере, две точки сочленения,

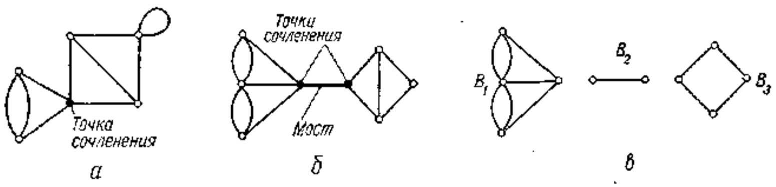


Рис. 8. Разделимые графы:
а — с точкой сочленения; *б* — с мостом; *в* — блоки B_1 — B_3 графа с мостом.

Граф называется *неразделимым,* если он связный и не имеет точек сочленения (например, граф на рис. 5, *а* неразделим). Граф, имеющий хотя бы одну точку сочленения, является разделимым и называется *сепарабельным.* Он разбивается на блоки, каждый из которых представляет собой максимальный неразделимый подграф (на рис. 8, *в* показаны блоки B_1, B_2, B_3 графа рис. 8, *б*).

Каждое ребро графа, как и каждая вершина (за исключением точек сочленения), принадлежат только одному из его блоков. Более того, только одному блоку принадлежит и каждый простой цикл. Отсюда следует, что совокупность блоков графа представляет собой разбиение множеств ребер и простых циклов на непересекающиеся подмножества.

В ряде приложений теории графов блоки можно рассматривать как компоненты. Это обычно допустимо, когда связи блоков посредством точки сочленения несущественны или когда существенные свойства графа связаны только с его простыми циклами (контурами). В таких случаях можно рассматривать несвязный граф как связный разделимый граф, который образуется путем такого объединения компонент, чтобы каждая из них была блоком (это всегда можно сделать, объединив, например, по одной вершине каждого блока в точку сочленения). Подобные операции используются при рассмотрении графов электрических цепей.

12. Деревья и лес. Особый интерес представляют связные ациклические графы, называемые *деревьями.* Дерево на множестве p вершин всегда содержит $q = p — 1$ ребер, т. е. минимальное количество ребер, необходимое для того, чтобы граф был связным. Действительно, две вершины связываются одним ребром, и для связи каждой последующей вершины с предыдущими требуется ребро, следовательно, для связи p вершин необходимо и достаточно $p — 1$ ребер.

При добавлении в дерево ребра образуется цикл, а при удалении хотя бы одного ребра дерево распадается на компоненты, каждая из которой представляет собой также дерево или изолированную вершину. Несвязный граф, компоненты которого являются деревьями, называется лесом (лес из k деревьев, содержащий p вершин, имеет в точности $p — k$ ребер). Сказанное иллюстрируется на примере дерева (рис. 9, *а),* которое превращается в циклический граф добавлением ребра (рис. 9, *б)* и распадается на лес из двух деревьев T_1 и T_2 при удалении ребра e (рис. 9, б).

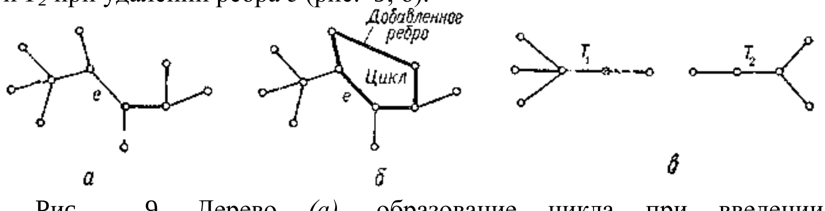


Рис. 9. Дерево *(а),* образование цикла при введении дополнительного ребра *(б)* и лес, который образуется после удаления ребра *е (в).*

Обычно деревья считаются существенно различными, если они не изоморфны. На рис. 10 показаны все возможные различные деревья с шестью вершинами.

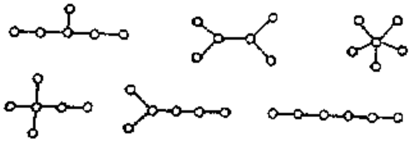


Рис. 10. Существенно различные деревья с шестью вершинами.

С увеличением числа вершин количество различных деревьев резко возрастает (например, при $p = 20$ их насчитывается около миллиона). Среди различных деревьев выделяются два важных частных случая: *последовательное дерево,* представляющее собой простую цепь, и *звездное дерево,* в котором одна из вершин (центр) смежна со всеми остальными вершинами.

Рассматриваются также деревья с ориентированными ребрами (дугами). Ориентированное дерево называется *прадеревом* с *корнем* v_0, если существует путь между вершиной v_0 и любой другой его вершиной (рис. 11). Ясно, что прадерево имеет единственный корень.

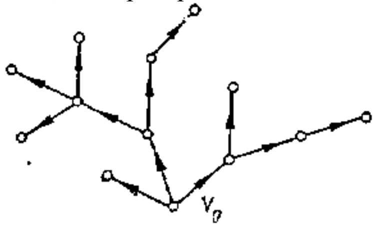


Рис. 11. Прадерево с корнем v_0.

До сих пор рассматривались деревья как минимальные связные графы на множестве p вершин. Важное значение имеет и другая точка зрения, когда деревья или лес являются частями некоторого графа, т. е. образуются из его ребер. Любая связная совокупность ребер, не содержащая контуров, вместе с инцидентными им вершинами образует *дерево графа* (рис. 12, *а*). Если такое дерево является суграфом (содержит все вершины графа), то оно называется *покрывающим деревом* или *остовом* (рис. 12, *б*).

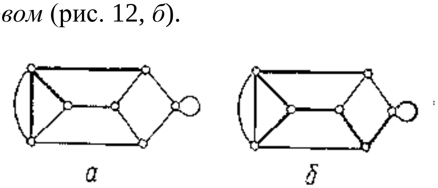


Рис. 12. Дерево как часть графа (выделено жирными линиями):
а – дерево, *б* - остов (покрывающее дерево).

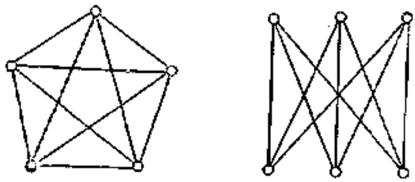
Так как петля представляет собой простейший цикл, состоящий из единственного ребра, то она не может входить в состав любого дерева графа.

Ребра графа, которые принадлежат его дереву, называют *ветвями.* Если дерево покрывает граф, то множество ребер графа разбивается на два подмножества: подмножество ветвей и подмножество ребер *дополнения дерева,* называемых *хордами.* При этом связный *(р, q)*-граф содержит $v = p - 1$ ветвей и $\sigma = q - p + 1$ хорд. Если граф несвязный, то совокупность остовов k его компонент образует *покрывающий лес.* В этом случае $v = p - k$ и $\sigma = q - p + k$

Деревья играют важную роль в различных прикладных задачах, когда, например, речь идет о связи каких-либо объектов минимальным числом каналов (линий связи, дорог, коммуникаций) с определенными свойствами. С помощью дерева определяется система координат при моделировании цепей и систем различной физической природы. Деревья используются в качестве моделей при рассмотрении иерархических систем объектов, структурных формул органических соединений и т. п.

13. Планарность. Граф называют *плоским (планарным),* если существует изоморфный ему граф (геометрическая реализация), который может быть изображен на плоскости без пересечения ребер. Например, хотя в одном из графов на рис. 4 ребра пересекаются, изоморфные ему не имеют пересечений, следовательно, он плоский.

На рис. 13 показаны два неплоских графа, играющие фундаментальную роль в теории планарности и называемые *графами Понтрягина—Куратовского.*



а *б*

Рис. 13. Графы Понтрягина — Куратовского:
а—полный пятиугольник; *б* — двудольный граф.

Полный пятиугольник (рис. 13,*а*) представляет собой простой неплоский граф с минимальным числом вершин (полный граф с четырьмя вершинами — плоский, а удаление из пятиугольника хотя бы одного ребра также превращает его в плоский граф). Двудольный граф (рис. 13, *б)* является моделью известной задачи о трех домах и трех колодцах: можно ли проложить от домов к каждому колодцу дороги так, чтобы они не пересекались (враждующие соседи должны иметь возможность пользоваться всеми колодцами, но не хотят встречаться на дорогах)?

Свойства планарности не нарушаются, если некоторое ребро разбить на два введением новой вершины второй степени или заменить два ребра, инцидентные вершине второй степени, одним ребром, удалив эту вершину. Два графа называют *гомеоморфными* (изоморфными с точностью до вершин второй степени), если после удаления из них вершин второй степени и объединения инцидентных этим вершинам ребер, они оказываются изоморфными (рис. 14). Очевидно, граф, гомеоморфный плоскому графу, также плоский.

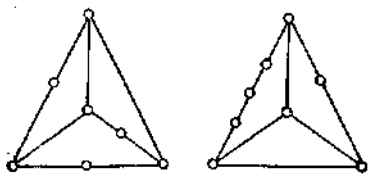


Рис. 14. Гомеоморфные графы.

Строго доказывается, что граф является плоским тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного одному из графов Понтрягина—Куратовского.

Планарность является существенным свойством графов, которые моделируют коммуникации и связи между объектами на плоскости (дороги между населенными пунктами, водопроводные и газопроводные сети, линии передач электроэнергии, межсоединения на печатных платах электронных устройств и кристаллах интегральных схем). Плоскими графами представляются различные карты, с которыми, в частности, связана известная *проблема четырех красок:* всегда ли можно раскрасить области, на которые плоский граф делит поверхность, так, чтобы никакие две смежные области не были окрашены в одинаковый цвет и чтобы при этом было использовано не более четырех цветов? Доказано, что для такой раскраски в любом случае достаточно пяти красок, но никто еще не привел примера, когда пять красок действительно необходимы. Проблема остается нерешенной, несмотря на огромные усилия многих выдающихся математиков, которые штурмуют ее более столетия.

14. Графы и отношения. Пусть на множестве X задано бинарное отношение A. Ему соответствует ориентированный граф, вершины которого отображают элементы из X, а дуга (x_i, x_j), где $x_i, x_j \in X$, существует тогда и только тогда, когда $x_i A x_j$. Обратно, множество ориентированных дуг графа (без строго параллельных дуг), заданных упорядоченными ларами (x_i, x_j), можно рассматривать как бинарное отношение на множестве X.

Если бинарное отношение xAy устанавливает связь между элементами x из множества X и элементами y из множества Y $(x \in X, y \in Y)$, то граф такого отношения будет ориентированным биграфом.

Следует заметить, что в общем случае орграф представляет нечто большее, чем бинарное отношение. Любое бинарное отношение, определенное на некотором множестве, можно представить соответствующим орграфом, вершины которого соответствуют элементам этого множества. Однако орграф с параллельными дугами позволяет отражать более общие связи между объектами, чем бинарные отношения.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Какие части города (см. рис. 1) нужно соединить мостами, чтобы задача о кенигсбергских мостах имела положительное решение? Достаточно ли для этого одного дополнительного моста?
2. Постройте граф отношений между сотрудниками Вашего подразделения: а) x_i связан по работе с x_j; б) x_i подчинен x_j ($x_i, x_j \in X$, где X — множество сотрудников подразделения). Охарактеризуйте полученные графы: что в них общего и чем они различаются? В каких случаях может получиться несвязный граф?
3. Постройте граф района, в котором Вы живете, отметив направления ребер для улиц с односторонним движением. Преобразуйте полученный граф в орграф. Можно ли проложить путь между любыми двумя вершинами, не нарушая установленных направлений движения и не выезжая за пределы района?
4. На графе, построенном в задаче 3, укажите (хотя бы приблизительно) расстояния между смежными вершинами. Найдите кратчайшие маршруты, соединяющие интересующие Вас вершины.
5. Существует ли эйлеров цикл для графа, построенного в задаче 3, и что он означает? Попытайтесь найти для этого графа гамильтонов цикл (если он существует).

6. Пометьте вершины и ребра графа (см. рис. 8, *а*) буквами или цифрами и выполните следующие упражнения:

а) Запишите все ребра как неупорядоченные пары вершин и отметьте кратные ребра и петли.

б) Определите степени всех вершин, а также суммы степеней всех вершин и всех нечетных вершин графа (что можно сказать об этих суммах?).

в) Является ли граф однородным (если нет, то добавлением ребер преобразуйте его в однородный)?

г) К какому типу относится рассматриваемый граф (простой, мультиграф, псевдограф)?

д) Запишите матрицу смежности графа.

7. Пометьте вершины и ребра орграфа (см. рис. 2, *а)* буквами или цифрами и выполните следующие упражнения:

а) Запишите все ребра как упорядоченные пары вершин и отметьте параллельные ребра.

б) Определите положительные и отрицательные степени всех вершин и соответственно их суммы (что можно сказать об этих суммах?).

в) Запишите матрицу инцидентности графа.

8. Докажите, что кубический граф имеет четное число вершин. Обобщается ли свойство четности вершин на однородные графы высших степеней?

9. Постройте графы, соответствующие следующим матрицам смежност*:*

$$V_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & & & \\ 1 & & 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & & 1 & & \\ & 1 & 1 & & 2 & 2 \\ & & & 2 & 1 & \\ & & & 2 & & 1 \end{vmatrix}; \quad V_2 = \begin{vmatrix} & & & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 1 & & & & 1 \\ & 1 & & & \end{vmatrix}.$$

Охарактеризуйте полученные графы и запишите для них матрицы инцидентности.

10. Расположите на плоскости четыре вершины, как в графе на рис. 5, *а*, но обозначения вершин v_2 и v_3 взаимно переставьте. На

множестве обозначенных таким образом вершин постройте граф, изоморфный исходному.

11. Выполните следующие упражнения с графом (см. рис. 5, *а):*

а) Найдите какие-либо маршруты длины 5 и длины 8 между вершинами v_1 и v_4.

б) Определите все цепи и простые цепи между вершинами v_1 и v_2.

в) Определите все простые циклы графа.

12.Выполните следующие упражнения с орграфом (см. рис. 2, *а).*

а) Найдите все ориентированные маршруты от вершины *а* к вершине *е.*

б) Найдите все пути и простые пути от вершины *а* к вершине *е.*

в) Определите все простые контуры графа.

13. В орграфе (см. рис. 2, *а)* измените направления дуг таким образом, чтобы он преобразовался в ациклический граф. Постарайтесь найти общее правило такого преобразования.

14. Для графа (см. рис. 6) постройте:

а) часть, состоящую из четырех вершин и пяти ребер;

б) суграф с четырьмя, пятью и шестью ребрами.

15. Два графа $G' = (V', E')$ и $G'' = (V'', E'')$ называются непересекающимися, если $V' \cap V'' = \varnothing$ и $E' \cap E'' = \varnothing$. Постройте непересекающиеся подграфы графа рис. 6, содержащие по три вершины.

16. Постройте блоки, на которые разбивается сепарабельный граф (см. рис. 8, *а).*

17. Постройте все различные деревья с восьмью вершинами (их должно быть 23).

18. Постройте все покрывающие деревья и их дополнения для графа (см. рис. 5,*а*). Сколько имеется существенно различных деревьев?

19. Постройте покрывающий лес несвязного графа (см. рис. 7),

20. Постройте все прадеревья орграфа (см. рис. 2, *а)* с корнем в вершине *d*.

21. Рассматривая компоненты несвязного графа (см. рис. 7) как блоки, постройте соответствующий сепарабельный граф. Сколько возможно различных вариантов (без учета изолированной вершины G_2)?

22. Покажите, что приведенные на рис. 15 графы неплоские. Какое минимальное число ребер необходимо удалить из графа на рис. 15, *а,* чтобы он превратился в плоский? Сколько имеется различных способов такого превращения с точностью до кзоморфизка?

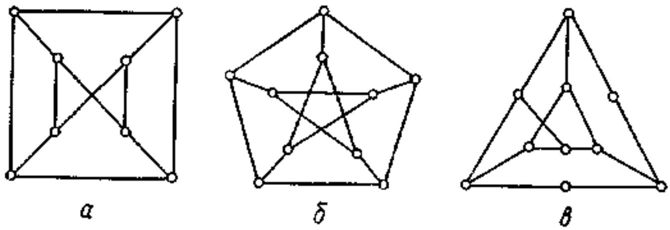


Рис. 15. Неплоские графы.

23. Покажите, что графы на рис. 15, *а* и *в* гомеоморфные.

24. Докажите, что при удалении ребра граф остается связным тогда и только тогда, когда это ребро содержится в некотором цикле.

25. Докажите, что $(p, p — k)$-граф при $k \geq 2$ всегда является несвязным и состоит не менее, чем из k компонент.

26. Изобразите все неизоморфные простые графы с пятью вершинами (изолированные вершины допускаются), содержащие три, пять, восемь, девять и десять дуг (всего их должно быть 14).

27. Покажите, что число ребер полного графа равно $\frac{1}{2}p(p — 1)$, где p — число его вершин.

28. Найдите общее выражение для числа ребер, при котором граф с p вершинами может быть несвязным.

29. Покажите, что любое дерево можно представить как двудольный граф. Какие деревья являются полными двудольными графами?

30. Докажите: а) кубический граф имеет точку сочленения тогда и только тогда, когда он содержит мост; б) наименьшее число вершин в кубическом графе, имеющем мост, равно 10.

31. Постройте граф, изоморфный графу Понтрягина — Куратовского (см. рис. 13, *б),* в котором внешние ребра образуют шестиугольник. Рассматривая его как подграф полного шестиугольника, нарисуйте дополнение этого подграфа. Укажите характерные свойства полученного дополнения.

32. Покажите, что следующие свойства дерева T равносильны:

а) T связно и не содержит циклов;

б) T не содержит циклов и имеет $p — 1$ ребер, где p — число вершин;

в) T связно и имеет $p — 1$ ребер;

г) T не содержит циклов, но добавление ребра между любыми двумя несмежными вершинами приводит к появлению цикла;

д) T связно, но утрачивает это свойство при удалении любого ребра;

е) всякая пара вершин в T соединена цепью и притом только одной.

1.5. ГРАФИКА

В этом разделе приводятся начальные сведения из геометрии, которые широко используются в компьютерной графике и компьютерном вспомогательном математическом обеспечении; при этом делается попытка изложить все более строго и унифицирование, чем это делается во многих книгах по компьютерам. Мы стремимся представить серию «приемов» в некотором, очевидно, случайном порядке, а также использовать концепции, освещенные в предыдущих разделах, чтобы обеспечить основу для обсуждения выбранных тем, включающих однородные координаты, кривые и поверхности. Дано также четырехмерное представление данных трехмерной геометрии, широко используемое на практике.

Перед началом обсуждения будет полезно, чтобы читатель имел некоторое представление о разнице между терминами «топология» и «геометрия»: **геометрия изучает расстояния и углы, тогда как топология занимается более общими свойствами**. Например, две сферы с различными радиусами являются топологически эквивалентными, а геометрически — нет. Два объекта топологически эквивалентны, если один из них может быть получен из другого искривлением и растяжением последнего без разрыва (чтобы быть более точными, путем использования непрерывного отображения, обратное к которому также непрерывно), тогда как в геометрии эквивалентные объекты должны быть идентичны во всех отношениях, за исключением их положения и ориентации в пространстве. Теория графов является частью топологии, поскольку вершины не обладают свойством положения в пространстве и топология графа есть отношение ребер.

Обычно удобно <u>запоминать в памяти компьютера два различных множества данных,</u> относящихся к рассматриваемому объекту,— <u>топологические данные и геометрические данные</u>. Например, можно предстаешь широкий класс объектов при помощи каркасных моделей. На рис. 1 дано такое представление конечного цилиндра.

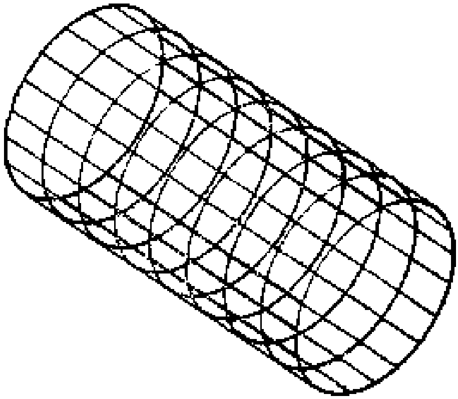


Рис. 1

Топология модели такого типа может рассматриваться как граф и может быть представлена в виде связной списочной структуры. Геометрические данные могут быть просто списком векторов, определяющих положения вершин в $\mathbf{R}^3$. Целью разделения содержания геометрии и топологии является то, что мы хотим преобразовать нашу модель некоторым образом, например чтобы она была физически меньше, или передвинуть ее «в некоторое новое положение, изменив ориентацию в пространстве. Такие преобразования не изменяют топологии модели, и нам просто изменить соответствующим образом геометрическое множество данных. В 1.5.2 и 1.5.3 мы будем заниматься системами координат, которые дают возможность представить геометрические данные, и некоторыми полезными в дальнейшем множествами преобразований, которые могут применяться к геометрическим множествам данных.

1.5.1. Линейная алгебра

Известно, что векторы определяют как объекты, обладающие «величиной» и «направлением». Такой подход берет начало из приложений в геометрии и физике. Эти вопросы формально будут обсуждаться в п. 1.5.1.2. Дадим более общее определение вектора, для которого понятия величины и направления несущественны.

1.5.1.1. Векторные пространства и линейные преобразования.

Определение. Пусть F — поле, а V — множество с бинарной операцией +. Предположим, что для каждого $a \in F$ и $\mathbf{x} \in V$ определен элемент $a\mathbf{x} \in V$. Тогда, если выполнены аксиомы:

а) $(V, +)$ — коммутативная группа;

б) для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ и $a, b \in F$

$$(a+b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x},$$

$$a(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = a\mathbf{x} + a\mathbf{y},$$

$$(ab)\mathbf{x} = a(b\mathbf{x}),$$

$$1_F\mathbf{x} = \mathbf{x},$$

где 1_F — мультипликативная единица в F, то говорят, что V является *векторным пространством* над F. Элементы V называются *векторами,* операция + называется *сложением векторов,* а отображение

$$\Lambda\colon\ F \times V \to V,$$

определяемое соотношением $\Lambda(a, \mathbf{x}) = a\mathbf{x}$, называют *умножением скаляра на вектор..*

Векторное пространство над F может рассматриваться как тройка $(V, +, \Lambda)$, удовлетворяющая приведенным выше аксиомам. Нуль векторного пространства по сложению обозначают символом 0. Из аксиом следует, что

$$0_F\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{для всех} \quad \mathbf{x} \in V,$$

где 0_F — аддитивная единица в F, и

$$a\mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \text{для всех} \quad a \in F.$$

В следующих примерах будет показано, что различные классы множеств обладают структурой векторного пространства.

Пример 1.

1. F^n $(n \in \mathbf{N})$ является векторным пространством над F с операциями

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n),$$
$$a(a_1, \ldots, a_n) = (aa_1, \ldots, aa_n).$$

Нулем F^n является вектор $(0_F, \ldots, 0_F)$. Элементы $a_1, \ldots, a_n$ называются *компонентами* вектора $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$.

2. Пусть $\mathcal{F}$ — множество всех отображений $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$. Тогда $\mathcal{F}$ является векторным пространством над $\mathbf{R}$ с операциями

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \quad \text{для всех} \quad f, g \in \mathcal{F},$$
$$(af)(x) = af(x) \qquad \text{для всех} \quad a \in \mathbf{R}.$$

3. Пусть $\mathcal{C}$, $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ — множество всех непрерывных отображений из $\mathcal{F}$. Тогда $\mathcal{C}$ является векторным пространством с операциями, определенными в $\mathcal{F}$.

Множество U, $U \subseteq V$, называется *векторным подпространством* пространства *V*, если оно является векторным пространством с операциями из *V*.

Множество $\{(a_1, \ldots, a_{n-1}, 0_F): a_i \in F\}$ является векторным подпространством пространства F^n; $\mathcal{C}$ является векторным подпространством пространства $\mathcal{F}$. Если *U*, $U \subseteq V$, — векторное подпространство пространства *V*, то $\mathbf{0} \in U$.

Векторные пространства $\mathbf{R}^n$ $(1 \leqslant n \leqslant 4)$ возникнут естественным образом в разделах 1.5.2., 1.5.3. Операции в $\mathbf{R}^n$ имеют геометрическую интерпретацию. Для пространства $\mathbf{R}^2$ это показано на рис. 2.

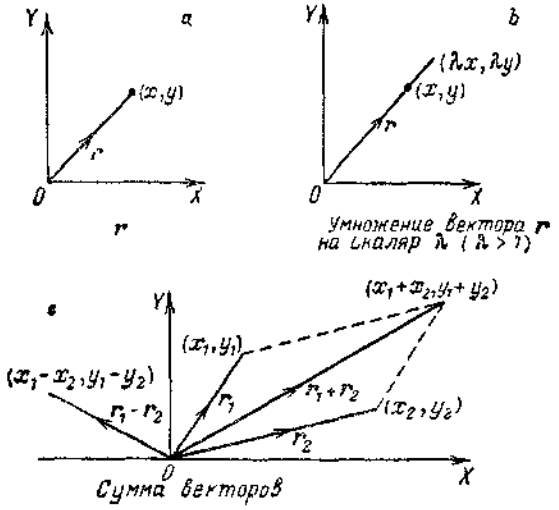


Рис. 2

Если $\mathbf{r} = (x, y) \in \mathbf{R}^2$, то компоненты *x* и *y* измеряются вдоль ортогональных линий, начиная с точки пересечения *O* (рис. 2, *а*). Компоненты *x* и *y* откладываются вдоль линий *OX* (ось *x)* и *OY* (ось *y)* соответственно. Эти линии проведены под углом 90°друг к другу, и угол между ними измеряется против часовой стрелки от оси *OX.* Такую систему осей называют *правосторонней* системой координат в $\mathbf{R}^2$. Векторное сложение в $\mathbf{R}^2$ геометрически соответствует правилу параллелограмма, как это показано на рис. 2, *с*.

Геометрия векторных пространств $\mathbf{R}^n$ будет рассматриваться ниже, а сейчас мы введем понятия базиса и размеюности. Если V — векторное пространство над F и $S \subseteq V$, то сумму вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{x}_i, \quad a_i \in F, \quad \mathbf{x}_i \in S,$$

называют *линейной комбинацией* векторов из S. Говорят, что конечное множество векторов $\{\mathbf{x}_i\colon 1 \leqslant i \leqslant k\}$ является *линейно независимым,* если

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0_F;$$

в противном случае множество является *линейно зависимым.* Подмножество $S \subseteq V$ такое, что любой элемент V представим в виде линейной комбинации элементов из S, называется *порождающим множеством* пространства V (или же еще говорят, что S порождает V). Упорядоченное линейно независимое порождающее множество пространства V называется *базисом* этого пространства.

Пример 2. В $\mathbf{R}^3$ вектор $(5,\ 5,\ \sqrt{2})$ является линейной комбинацией векторов (1, 1, 0) и (0, 0, 3), так как

$$(5, 5, \sqrt{2}) = 5(1, 1, 0) + \frac{\sqrt{2}}{3}(0, 0, 3).$$

Множество $L = \{(1,\ 1,\ 0),\ (0,\ 0,\ 3)\}$ является линейно независимым подмножеством в $\mathbf{R}^3$, так как $a(1, 1, 0) + b(0, 0, 3) = =(a, a, 3b)=\mathbf{0}$ тогда и только тогда, когда $a=0$ и $b=0$. Однако подмножество L не является базисом, поскольку оно только определяет векторное подпространство

$$\{(x,\ x,\ y)\colon\ x,\ y \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^3.$$

Базис $B = L \cup \{(1,\ 0,\ 0)\}$ «расширяет» L до базиса в $\mathbf{R}^3$.

Легко показать, что каждый элемент векторного пространства имеет *единственное* представление в фиксированном базисе, так как если V имеет базис $B = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} b_i \mathbf{e}_i,$$

то

$$\mathbf{0} = \mathbf{x} - \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)\,\mathbf{e}_i.$$

Однако B — линейно независимое множество. Поэтому $b_i = a_i$ для всех $i,\ 1 \leqslant i \leqslant n$.

Докажем следующий важный результат.

Предложение. *Пусть* $S = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ — *порождающее множество пространства V, а* $L = \{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_l\}$ — *линейно независимое множество векторов из V, Тогда* $m \geqslant l$.

Доказательство. Предположим, что $m < l$. Так как S порождает V, то существуют элементы $a_1, \ldots, a_m \in F$ такие, что

$$\mathbf{y}_1 = a_1\mathbf{x}_1 + \ldots + a_m\mathbf{x}_m.$$

Однако $\mathbf{y}_1 \neq 0$, так как L — линейно независимое множество, и, следовательно, не все $a_1, \ldots, a_m$ равны нулю. Для определенности положим $a_1 \neq 0_F$. Тогда

$$\mathbf{x}_1 = a_1^{-1}\mathbf{y}_1 - a_1^{-1}a_2\mathbf{x}_2 - \ldots - a_1^{-1}a_m\mathbf{x}_m,$$

т. е. $\mathbf{x}_1$ является линейной комбинацией $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m\}$. Так как S порождает V, то по доказанному выше множество векторов $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ также порождает V. Аналогично получаем, что $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ порождает V. Повторяя этот процесс m раз, получаем, что множество $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m\}$ порождает V. Следовательно,

$$\mathbf{y}_{m+1} = p_1\mathbf{y}_1 + p_2\mathbf{y}_2 + \ldots + p_m\mathbf{y}_m,$$

где $p_1, \ldots, p_m \in F$ не все равны нулю (так как $\mathbf{y}_{m+1}$ не может быть равно нулю). Отсюда

$$\mathbf{y}_{m+1} - p_1\mathbf{y}_1 - p_2\mathbf{y}_2 - \ldots - p_m\mathbf{y}_m = 0,$$

однако последнее невозможно, потому что $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_l\}$ — линейно независимое множество векторов. Следовательно, $m \geqslant l$.

Предложение. *Пусть B и B'— базисы векторного пространства V над F. Тогда* $|B| = |B'|$.

Доказательство. Пусть $B = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $B' = \{\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_m'\}$. Тогда из предыдущего предложения следует, что $n \geqslant m$ и $m \geqslant n$, т. е. $m = n$.

Мощность базиса векторного пространства V называется *размерностью* V и обозначается через dim(V).

Предложение. dim$(F^n) = n$.

Доказательство. Определим $B = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, где

$$\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 0, \underset{i\text{-й разряд}}{1_F}, 0, \ldots, 0),$$

и покажем, что B является базисом в F^n. Очевидно, что

$$(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{e}_i;$$

поэтому B порождает F^n и

$$\sum_{i=1}^{n} b_i\mathbf{e}_i = 0 \Rightarrow (b_1, \ldots, b_n) = 0 \Rightarrow b_1 = 0_F,\ b_2 = 0_F, \ldots, b_n = 0_F.$$

Следовательно, B является базисом в F^n и $\dim(V) = |B| = n$.

Из данного выше определения следует, что базис всегда состоит из конечного числа векторов, и не во всяких векторных пространствах можно выделить базис (например, в $\mathcal{F}$, $\mathcal{C}$ нет базиса). Понятия базиса и размерности можно расширить на все векторные пространства, однако такое обобщение нам не потребуется. Если пространство V имеет базис, соответствующий данному выше определению, то говорят, что пространство имеет *конечную размерность,* а само пространство называется *конечномерным векторным пространством.*

Рассмотрим теперь гомоморфные отображения между векторными пространствами.

Определение. Пусть V_1 и V_2 — векторные пространства над полем F. Говорят, что отображение $T: V_1 \to V_2$ *линейно,* если

$$T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = T\mathbf{x} + T\mathbf{y}, \quad T(a\mathbf{x}) = a(T\mathbf{x}).$$

Если $V_2 = V_1$, то T называют линейным преобразованием пространства V_1.I

Далее нас будут интересовать конечномерные векторные пространства над **R** и линейные преобразования над ними. В оставшейся части главы через V будем обозначать векторное пространство, а через End(V)— множество всех линейных преобразований V (эндоморфизмов V). Заметим, что большинство приводимых утверждений можно представить в более общем виде.

Перейдем от алгебры V к алгебре End(V) и покажем, что End(V) замкнуто по отношению к естественным операциям сложения, умножения и умножения на скаляр. Вначале заметим, что единичное отображение I_V и нулевое отображение 0_V являются линейными на V, так как по определению

$$I_V\mathbf{x} = \mathbf{x} \quad \text{для всех} \quad \mathbf{x} \in V,$$
$$0_V\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{для всех} \quad \mathbf{x} \in V.$$

Следовательно, для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ и $\lambda \in \mathbf{R}$ имеем

$$I_V(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{x}+\mathbf{y} = I_V\mathbf{x} + I_V\mathbf{y},$$
$$I_V(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x} = \lambda(I_V\mathbf{x}),$$
$$0_V(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{0} = 0_V\mathbf{x} + 0_V\mathbf{y},$$
$$0_V(\lambda\mathbf{x}) = \mathbf{0} = \lambda\mathbf{0} = \lambda 0_V\mathbf{x}.$$

Если $S, T \in \mathrm{End}(V)$, то *сумма* $S+T$ и *произведение* $S \circ T$ *(композиция)* определяются формулами

$$(S+T)\mathbf{x} = S\mathbf{x} + T\mathbf{x} \quad \text{для всех} \quad \mathbf{x} \in V$$
$$(S \circ T)\mathbf{x} = S(T\mathbf{x}) \quad \text{для всех} \quad \mathbf{x} \in V.$$

Отметим следующие свойства End(V) относительно приведенных выше операций.

Предложение. *Множество* $(\mathrm{End}(V), \circ, +)$ *является кольцом с единицей.*

Доказательство. Укажем основные этапы доказательства. Надо показать, что:

(I) $S, T \in \mathrm{End}(V) \Rightarrow S + T \in \mathrm{End}(V)$ и $S \circ T \in \mathrm{End}(V)$;

(II) $(\mathrm{End}(V), +)$ — коммутативная группа.

Если $S, T, U \in \mathrm{End}(V)$, то:

(III) $S \circ (T \circ U) = (S \circ T) \circ U$;

(IV) $S \circ (T + U) = S \circ T + S \circ U$;

(V) $I_V \circ T = T \circ I_V = T$.

Имеем

$$\text{(I)}\quad (S+T)(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = S(\mathbf{x}+\mathbf{y}) + T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = S\mathbf{x} + S\mathbf{y} + T\mathbf{x} + T\mathbf{y} = (S\mathbf{x}+T\mathbf{x}) + (S\mathbf{y}+T\mathbf{y}) = (S+T)\mathbf{x} + (S+T)\mathbf{y}.$$

Аналогично

$$(S+T)(\lambda\mathbf{x}) = S\lambda\mathbf{x} + T\lambda\mathbf{x} = \lambda S\mathbf{x} + \lambda T\mathbf{x} = \lambda(S\mathbf{x}+T\mathbf{x}) = \lambda(S+T)\mathbf{x}.$$

Доказательство того, что $S \circ T \in \mathrm{End}(V)$, оставляем в качестве упражнения.

$$\text{(II)}\quad (S+(T+U))\mathbf{x} = S\mathbf{x} + (T+U)\mathbf{x} = S\mathbf{x} + (T\mathbf{x}+U\mathbf{x}) = (S\mathbf{x}+T\mathbf{x}) + U\mathbf{x} = (S+T)\mathbf{x} + U\mathbf{x} = ((S+T)+U)\mathbf{x}.$$

Следовательно, операция + ассоциативна. Элемент $0_V \in \mathrm{End}(V)$ удовлетворяет условию

$$T + 0_V = 0_V + T = T \quad \text{для всех} \quad T \in \mathrm{End}(V)$$

и является аддитивной единицей End(F). Для $T \in \mathrm{End}(V)$ определим отображение $-T\colon V \to V$ соотношением

$$(-T)\mathbf{x} = -(T\mathbf{x}) \quad \text{для всех} \quad \mathbf{x} \in V.$$

Легко показать, что $-T \in \mathrm{End}(V)$ и

$$(-T+T) = T + (-T) = 0_V.$$

Поэтому отображение —*T* является аддитивным, обратным к *T*. Коммутативность $(\mathrm{End}(V), +)$ следует из коммутативности $(V, +)$.

(III) Утверждение следует из известных результатов.

(IV) Для $\mathbf{x} \in V$ имеем

$$(S \circ (T+U))\mathbf{x} = S((T+U)\mathbf{x}) = S(T\mathbf{x}+U\mathbf{x}) = S(T\mathbf{x}) + S(U\mathbf{x}) = (S \circ T)\mathbf{x} + (S \circ U)\mathbf{x} = (S \circ T + S \circ U)\mathbf{x}.$$

(V) Утверждение очевидно.

Пусть $T \in \mathrm{End}(V)$ и $\lambda \in \mathbf{R}$. Определим отображение $\lambda T\colon V \to V$ следующим образом:

$$(\lambda T)\mathbf{x} = \lambda(T\mathbf{x}) \quad \text{для всех} \quad \mathbf{x} \in V.$$

Легко показать, что $\lambda T \in \mathrm{End}(V)$. Отображение

$$\Lambda\colon \mathbf{R} \times \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V),$$

определяемое соотношением $\Lambda(\lambda, T) = \lambda T$, называют *умножением на скаляр.*

Предложение. $(\mathrm{End}(V), +, \Lambda)$ — *векторное пространство над* **R**.

Доказательство. Из предыдущего утверждения следует, что $(\mathrm{End}(V), +)$ — коммутативная группа; следовательно, нам надо показать, что умножение на скаляр удовлетворяет условиям

$$(\lambda + \mu)T = \lambda T + \mu T, \ \lambda(S + T) = \lambda S + \lambda T,$$

$$(\lambda\mu)T = \lambda(\mu T), \ 1_{\mathbf{R}}T = T,$$

где $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ и $S, T \in \mathrm{End}(V)$. Имеем цепочку соотношений

$$((\lambda + \mu)T)\mathbf{x} = (\lambda + \mu)(T\mathbf{x}) = \lambda(T\mathbf{x}) + \mu(T\mathbf{x}) = \\ = (\lambda T)\mathbf{x} + (\mu T)\mathbf{x}.$$

Остальные соотношения доказываются аналогично.

Предложение. *Операции умножения в кольце и умножения на скаляр* Λ *в* End(V) *удовлетворяют соотношению*

$$\lambda(S \circ T) = (\lambda S) \circ T = S \circ (\lambda T),$$

где $\lambda \in \mathbf{R}$ *и* $S, T \in \mathrm{End}(V)$.

Доказательство.

$$(\lambda(S \circ T))\mathbf{x} = \lambda((S \circ T)\mathbf{x}) = \lambda(S(T\mathbf{x})) = \\ = (\lambda S)(T\mathbf{x}) = ((\lambda S) \circ T)\mathbf{x},$$

$$(\lambda(S \circ T))\mathbf{x} = \lambda((S \circ T)\mathbf{x}) = \lambda(S(T\mathbf{x})) = \\ = S(\lambda(T\mathbf{x})) = (S \circ (\lambda T))\mathbf{x}.$$

Алгебраические структуры, удовлетворяющие таким же свойствам, как и End(V), называют линейными алгебрами. Дадим строгое определение.

Определение. Четверка $(X, +, \circ, \Lambda)$ называется *линейной алгеброй* над **R**, если $\Lambda\colon \mathbf{R} \times X \to X$ и

(I) $(X, +, \Lambda)$ — векторное пространство над **R**;

(II) $(X, \circ, +)$ — кольцо;

(III) Λ и $\circ$ удовлетворяют условиям

$$\lambda(\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_2) = (\lambda\mathbf{x}_1) \circ \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 \circ (\lambda\mathbf{x}_2)$$

для всех $\lambda \in \mathbf{R}$ и $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$.

Результаты, полученные для End (V), можно сформулировать следующим образом.

Предложение. End (V) с *введенными выше операциями является линейной алгеброй с мультипликативной единицей.*

Если $T \in \mathrm{End}(V)$ и существует преобразование $S\colon V \to V$ такое, что

$$S \circ T = T \circ S = I_V,$$

то $S \in \mathrm{End}(V)$. Тогда T называют *обратимым,* а $S = T^{-1}$ — *обратным к T преобразованием.*

Обозначим через Aut(V) множество всех обратимых преобразований из End(V), т. е. множество автоморфизмов V.

Предложение. $(\mathrm{Aut}(V),\ \circ)$ *является группой.*

Доказательство. Так как $I_V \in \mathrm{Aut}(V)$ и $I_V \circ I_V = I_V,$ следовательно, существует I_V^{-1}, равное I_V. Пусть $S \in \mathrm{Aut}(V)$; тогда

$$S^{-1} \circ S = S \circ S^{-1} = I_V.$$

Поэтому $(S^{-1})^{-1}$ существует и совпадает с S. Следовательно, $S^{-1} \in \mathrm{Aut}(V)$. Если теперь $S,\ T \in \mathrm{Aut}(V)$, то

$$(S \circ T)\circ(T^{-1} \circ S^{-1}) = S \circ (T \circ T^{-1}) \circ S^{-1} = S \circ S^{-1} = I_V.$$

Аналогично

$$(T^{-1} \circ S^{-1}) \circ (S \circ T) = I_V.$$

Поэтому $(S \circ T)^{-1}$ существует, и из $S,\ T \in \mathrm{Aut}(V)$ следует, что $S \circ T \in \mathrm{Aut}(V)$. Ассоциативность операции $\circ$ уже доказана.

1.5.1.2. Структурные изображения в R^n.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию пространства $\mathbf{R}^n$, при которой понятия «направление» и «величина» для векторов имеют геометрический смысл. Вернемся к геометрическому изображению $\mathbf{R}^2$. Мы видим, что если $\mathbf{r} = (x,\ y) \in \mathbf{R}^2$, то расстояние от точки $(x,\ y)$ до (0, 0) есть $(x^2 + y^2)^{1/2}$. Обозначим это расстояние через $\|\mathbf{r}\|$, которое можно рассматривать как отображение $\|\cdot\|\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Оно называется *длиной, модулем* или *нормой.* Рассмотрим точки $\mathbf{r}_1 = (x_1,\ y_1)$ и $\mathbf{r}_2 = (x_2,\ y_2)$ (рис. 3).

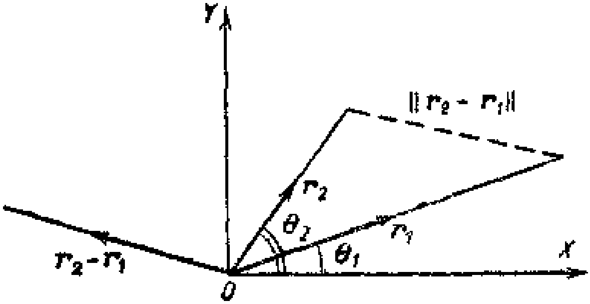


Рис. 3

Пусть θ_1 и θ_2 — углы в интервале $[0, \pi]$ между положительной полуосью *OX* и векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ соответственно. Тогда расстояние между $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ равно $\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|$, а угол между ними равен $\theta = \theta_2 - \theta_1$. Имеем

$$\cos\theta = \cos(\theta_2 - \theta_1) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 =$$

$$= \frac{x_1}{\|\mathbf{r}_1\|}\frac{x_2}{\|\mathbf{r}_2\|} + \frac{y_1}{\|\mathbf{r}_1\|}\frac{y_2}{\|\mathbf{r}_2\|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\|\mathbf{r}_1\|\|\mathbf{r}_2\|}.$$

Выражение $x_1x_2 + y_1y_2$ можно использовать для вычисления расстояний и углов в $\mathbf{R}^2$. Определим отображение

$$\Phi\colon\ \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$$

следующим образом:

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Тогда

$$\|\mathbf{r}\| = (\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}))^{1/2}, \quad \cos\theta = \frac{\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{(\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1)\,\Phi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2))^{1/2}}.$$

Угол θ между двумя векторами в $\mathbf{R}^2$ определяется однозначно при условии, что $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Когда $\theta = 0$ или $\theta = \pi$, то говорят, что r_1 и r_2 *параллельны (коллинеарны)*. В прикладной математике удобно обозначать $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ через $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$ и называть *скалярным произведением* $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Если $\mathbf{r}_1 \neq 0$ и $\mathbf{r}_2 \neq 0$, то $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = 0$ тогда и только тогда, когда $\theta = \pi/2$; в этом случае говорят, что $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ взаимно *ортогональны, перпендикулярны* или *нормальны.* Ниже приведены некоторые свойства скалярного произведения.

Предложение.

а) $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} \geqslant 0$ *и* $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}=0$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{r}=(0, 0)$;

б) $\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2=\mathbf{r}_2\cdot\mathbf{r}_1$ *для всех* $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \mathbf{R}^2$;

в) $\mathbf{r}_1\cdot(\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3)=\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_3$ *для всех* $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3 \in \mathbf{R}^2$;

г) $\lambda(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2)=(\lambda\mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{r}_2=\mathbf{r}_1\cdot(\lambda\mathbf{r}_2)$, $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \mathbf{R}^2$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

Доказательство.

а) Если $\mathbf{r}=(x, y)\in \mathbf{R}^2$, то $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}=(x^2+y^2)\geqslant 0$ для всех $x, y \in \mathbf{R}$ и $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}=0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$ и $y = 0$.

б) $\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2=x_1x_2+y_1y_2=x_2x_1+y_2y_1=\mathbf{r}_2\cdot\mathbf{r}_1$.

Соотношения в) и г) доказываются аналогично и оставляются в качестве упражнения.

В более общем случае, если V — векторное пространство над $\mathbf{R}$ и $\Phi\colon V\times V\to\mathbf{R}$ — отображение, удовлетворяющее свойствам а) —г), то (V, Φ) становится пространством, для которого могут изучаться понятия длины и угла. Отображение Ф называют *внутренним произведением* для V, а (V, Φ) — *векторным пространством с внутренним произведением.* В частности, если определить $\Phi\colon \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}\,(n\in\mathbf{N})$ соотношением

$$\Phi(\mathbf{a}, \mathbf{b})\equiv\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\sum_{i=1}^{n} a_ib_i,$$

Где $\mathbf{a}=(a_1, \ldots, a_n)$, $\mathbf{b}=(b_1, \ldots, b_n)$, то отображение $\cdot$ будет соблюдать требуемыми свойствами. Определим длину вектора $\mathbf{a}\in\mathbf{R}^n$ как

$$\|\mathbf{a}\|=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})^{1/2},$$

а косинус угла между двумя векторами **a** и **b** как

$$\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|};$$

угол лежит на отрезке $[0, \pi]$.

На $\mathbf{R}^n$ могут быть определены другие внутренние произведения. Внутреннее произведение, введенное выше, называется *обычным* или *евклидовым* внутренним произведением. Оно дает те значения длины и угла, которые ожидались интуитивно.

Когда n = 1, ясно, что $\cdot$ является лишь умножением в **R**, и угол между двумя векторами определяют как

$$\arccos\frac{xy}{|x||y|};$$

угол равен или 0, или π в зависимости от знака xy. Норма $\|\cdot\|$ обобщает понятие модуля $|\cdot|$ в **R** и обладает аналогичными свойствами. Например, можно показать, что

$$\|\mathbf{a}\| \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad \mathbf{a} \in \mathbf{R}^n,$$
$$\|\mathbf{a}\| = 0 \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad a = 0,$$
$$\|\lambda \mathbf{a}\| = |\lambda| \|\mathbf{a}\| \quad \text{для всех} \quad a \in \mathbf{R}^n \text{ и } \lambda \in \mathbf{R},$$
$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leqslant \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| \quad \text{для всех} \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n.$$

Вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ такой, что $\|\mathbf{a}\| = 1$ (что эквивалентно $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 1$), называется *единичным вектором.* Если $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n \backslash \{0\}$, то $\mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|$ — единичный вектор, параллельный **а**. Единичный вектор обычно обозначается $\widehat{\mathbf{a}}$. Если $B = \{\widehat{\mathbf{e}}_1, \ldots, \widehat{\mathbf{e}}_n\}$ — базис в $\mathbf{R}^n$ и

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i \neq j, \\ 1, & \text{если} \quad i = j, \end{cases}$$

то базис *B* называется *ортонормированчым.* Ортонормированный базис в $\mathbf{R}^n$, определенный следующим образом:

$$\widehat{\mathbf{e}}_i = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-й разряд}}}{1}, 0, \ldots, 0), \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

называется *стандартным базисом* в $\mathbf{R}^n$. В $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}^3$ стандартные базисы удобно записывать в виде $(\widehat{\mathbf{i}}, \widehat{\mathbf{j}})$ и $(\widehat{\mathbf{i}}, \widehat{\mathbf{j}}, \widehat{\mathbf{k}})$ соответственно. Рассмотрим следующую геометрическую интерпретацию этих базисов. Векторы $\widehat{\mathbf{i}}$ и $\widehat{\mathbf{j}}$ определяют правостороннюю систему осей в $\mathbf{R}^2$, а третья ось *OZ* перпендикулярна плоскости, содержащей векторы $\widehat{\mathbf{i}}$ и $\widehat{\mathbf{j}}$, и направлена таким образом, чтобы концы векторов $\widehat{\mathbf{i}}$, $\widehat{\mathbf{j}}$ и $\widehat{\mathbf{k}}$ (в указанном порядке) определяли правостороннее движение (рис. 4).

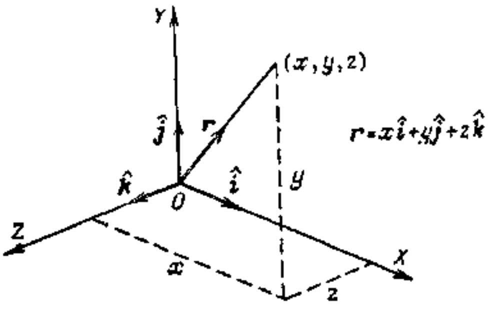


Рис. 4

Это свойство известно как *правило правой руки.* В системах такого типа в $\mathbf{R}^3$ оси называются *правосторонними.*

Определение. Если $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)\in\mathbf{R}^3$ и $\mathbf{b}=(b_1, b_2, b_3)\in\mathbf{R}^3$, то *векторным произведением* **a** и **b** (обозначается **a**×**b**) по определению называют вектор

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1).$$

Операция × может рассматриваться как отображение

$$\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3.$$

Предложение. *Если* $\mathbf{a}, \mathbf{b}\in\mathbf{R}^3$, *то*

а) $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|=\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\sin\theta$, *где* θ — *угол между* **a** и **b**;

б) *вектор* **a**×**b** *ортогонален векторам* **a** и **b**.

Доказательство.

$$\text{а)}\ \|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|^2=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2=$$
$$=a_2^2b_3^2+a_3^2b_2^2-2a_2b_3a_3b_2+a_3^2b_1^2+a_1^2b_3^2-$$
$$-2a_3b_1a_1b_3+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2-2a_1b_2a_2b_1=$$
$$=\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2=$$
$$=\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2=\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2\left(1-\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}{\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2}\right)=$$
$$=\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2(1-\cos^2\theta)=\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2\sin^2\theta.$$

б) Легко показать, что $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0$, и $\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0$, откуда и следует требуемый результат.

Чтобы получить геометрическую интерпретацию **a**×**b**, заметим, что если

$$\mathbf{a}=(a_1, 0, 0),\quad \mathbf{b}=(b_1, b_2, 0),$$

то

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(0, 0, a_1b_2);$$

поэтому если $a_1>0$, то

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{cases}|a_1b_2|\,\hat{\mathbf{k}} & \text{для}\quad b_2>0,\\ -|a_1b_2|\,\hat{\mathbf{k}} & \text{для}\quad b_2<0,\end{cases}$$

и направление **a**×**b** определено таким образом, чтобы выполнялось правило правой руки относительно векторов **a**, **b** и **a**×**b**. Это правило носит общий характер, поскольку для произвольной пары векторов в правосторонней системе координат всегда можно выбрать способ представленпя векторов, который определяется векторами **a** и **b**. В результате векторное произведение будет иметь вид

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\sin\theta\,\hat{\mathbf{n}},$$

где $\hat{\mathbf{n}}$ — единичный вектор, ортогональный **a** и **b**, с направлением, выбираемым по правилу правой руки. Если $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=0$, то векторы **a** и **b** линейно зависимы, а если $\|\mathbf{a}\|>0$ и $\|\mathbf{b}\|>0$, то из равенства **a**×**b** =0 следует, что **a** и **b** параллельны. Пусть **a** и **b** — векторы, изображенные на рис. 5.

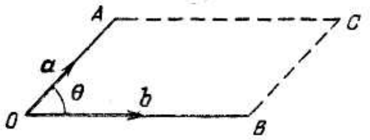


Рис. 5.

Тогда $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|$ — площадь параллелограмма *OACB* и **a**×**b** может рассматриваться как *вектор* площади.

Некоторые свойства векторного произведения приведем ниже; доказательства оставляем в качестве упражнений.

Предложение.

а) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$;

б) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$;

в) $(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b})=\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$;

г) $\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}}=\hat{\mathbf{k}},\ \hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{k}}=\hat{\mathbf{i}},\ \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{i}}=\hat{\mathbf{j}}$;

д) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$;

е) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\ \ (\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=-\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{b})=$
$=-\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c})=-\mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$. //

Выражение $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ часто называют *тройным векторным произведением* **a, b** и **c**, а $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ — *смешанным произведением.* Геометрически $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ означает объем параллелепипеда с ребрами **a, b** и **c**.

Предложение. *Множество* $\{\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}\}\subset\mathbf{R}^3$ *линейно зависимо тогда и только тогда, когда* $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=0$.

Доказательство. Предположим, что **a, b** и **c** линейно зависимы. Тогда существуют $\lambda,\ \mu,\ \sigma\in\mathbf{R}$, не все равные нулю, такие, что

$$\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\sigma\mathbf{c}=0.$$

Не ограничивая общности, предположим, что $\lambda\neq0$. Тогда

$$\mathbf{a}=-\lambda^{-1}(\mu\mathbf{b}+\sigma\mathbf{c}),$$

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=-\lambda^{-1}(\mu\mathbf{b}+\sigma\mathbf{c})\ \ (\mathbf{b}\times\mathbf{c})=$$
$$=-\lambda^{-1}[\mu\mathbf{b}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\sigma\mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]=0,$$

Обратно, если $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, то или а) один из векторов **a**, **b**, **c** равен нулю (в этом случае результат очевиден), или

б) вектор **a** ортогонален **b** × **c**.

Однако **b** и **c** ортогональны к **b** × **c**; поэтому $\mathbf{a} = \lambda'\mathbf{b} + \mu'\mathbf{c}$ при некоторых $\lambda', \mu' \in \mathbf{R}$ и **a**, **b**, **c** линейно зависимы.

Закончим главу кратким рассмотрением вопросов дифференцируемости «векторнозначных» функций. Пусть на $\mathbf{R}^n$ задана обычная норма. Определим производную функции вида

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n.$$

Обобщая одномерный случай, скажем, что *f* дифференцируема в точке *t*, если существует вектор $\mathbf{F}(t) = (F_1(t), \ldots, F_n(t)) \in \mathbf{R}^n$ такой, что

$$\left\| \frac{\mathbf{f}(t+h) - \mathbf{f}(t)}{h} - \mathbf{F}(t) \right\| \to 0$$

при $h \to 0$, или, что эквивалентно, если **f** имеет компоненты $f_1, \ldots, f_n$ такие, что

$$\left\| \left(\frac{f_1(t+h) - f_1(t)}{h} - F_1(t), \ldots, \frac{f_n(t+h) - f_n(t)}{h} - F_n(t) \right) \right\| \to 0$$

при $h \to 0$. Очевидно, что каждая компонента должна стремиться к нулю при $h \to 0$, поэтому $d\mathbf{f}/dt$ существует тогда и только тогда, когда $df_1/dt, \ldots, df_n/dt$ существуют и

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \left(\frac{df_1}{dt}, \ldots, \frac{df_n}{dt} \right).$$

Другими словами, чтобы продифференцировать векторнозначную функцию, мы должны продифференцировать ее покомпонентно. Например, если $\mathbf{f}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ определена соотношением

$$\mathbf{f}(t) = (2t^2, \ln t, \sin^2 t),$$

то

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \left(4t, \frac{1}{t}, 2\sin t \cos t \right).$$

Пусть $\mathbf{f}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ и $\mathbf{g}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$. Определим функции $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и $\mathbf{f} \times \mathbf{g}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$. Положим

$$(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})(t) = \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}(t), \qquad (\mathbf{f} \times \mathbf{g})(t) = \mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}(t).$$

Дифференцирование этих функций производится следующимобразом:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = \mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{g}}{dt} + \frac{d\mathbf{f}}{dt} \cdot \mathbf{g}, \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{f} \times \frac{d\mathbf{g}}{dt} + \frac{d\mathbf{f}}{dt} \times \mathbf{g}.$$

Проверку этих формул оставляем в качестве упражнения.

Упражнения.

1. Показать, что если *V* — векторное пространство над полем *F*, то

$$0_F\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{для всех} \quad \mathbf{x} \in V,$$

$$a\mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \text{для всех} \quad a \in F.$$

2. Представить вектор $(a, 1, 3) \in \mathbf{R}^3$, где $a \in \mathbf{R}$, в виде линейной комбинации векторов множества

$$S = \{(1, 1, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 4)\}$$

и показать, что S — линейно независимое множество векторов. Является ли *S* базисом в $\mathbf{R}^3$?

3. Показать, что если $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ — линейно независимое подмножество векторного пространства *V*, то $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}$ при любом i, $1 \leqslant i \leqslant m$.

4. а) Какие из следующих преобразований являются линейными:

$$T_1(x, y) = (a, y),\ a \in \mathbf{R}\backslash\{0\},$$

$$T_2(x, y) = (\lambda x + y, \sigma y),\ \lambda, \sigma \in \mathbf{R}\backslash\{0\},$$

$$T_3(x, y) = (x^2, 0),\ T_4(x, y) = (x, 0)?$$

б) Определить произведения $T_2 \circ T_4$ и $T_4 \circ T_2$.

в) Доказать, что если $T \in \mathrm{End}(V)$, то $T\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

5. а) Если *V* — векторное пространство, то *проекцией (проектором)* *V* называют преобразование $P\colon V \to V$, обладающее свойством

$$(P \circ P)\mathbf{x} = P\mathbf{x} \quad \text{для всех} \quad \mathbf{x} \in V.$$

Доказать, что преобразование $P\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, определяемое соотношением

$$P(x, y) = \left(\frac{1}{a-b}(ax - y + c), \frac{b}{a-b}(ax - y + c) + c\right)$$

при $a, b, c \in \mathbf{R}$ и $a \neq b$, является проектором в $\mathbf{R}^2$. При каких условиях $P \in \mathrm{End}(\mathbf{R}^2)$?

б) Какие из определенных в п. 4. а) преобразований являются проекторами?

6. Пусть $T \in \mathrm{End}(V)$. *Нулевым подпространством (ядром) T* называют множество $\mathcal{N}(T)$, определяемое соотношением

$$\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{x} \in V\colon T\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Доказать, что $\mathcal{N}(T)$ является векторным подпространством *V*. Доказать также, что образ *T* является векторным подпространством *V*.

7. Пусть *V* — векторное пространство над R в $T \in \mathrm{End}(V)$ Говорят, что *T* имеет *действительное собственное значение* $\lambda \in \mathbf{R}$, если существует ненулевой вектор $\mathbf{x} \in V$ такой, что

$$T\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x};$$

при этом $\mathbf{x}$ называют *собственным вектором T,* соответствующим собственному значению λ.

а) Доказать, что если $T \in \mathrm{End}(V)$ такое, что

$$T(x, y) = (x + ay, y),$$

то любой вектор вида $(p, 0)$ при $p \neq 0$ является собственным вектором *T*. Какие у *T* собственные значения?

б) Пусть $T \in \mathrm{End}(V)$. Обозначим через V_λ множество собственных векторов *T,* соответствующих собственному значению λ. Показать, что $V_\lambda \cup \{0\}$ является векторным подпространством *V*. Доказать аналогичное утверждение для $\mathcal{N}(T)$.

8. Найти собственные значения и собственные векторы преобразований $T_1, T_2 \in \mathrm{End}(\mathbf{R}^2)$:

$$T_1(x, y) = (-y, x), \; T_2(x, y) = (x, -y).$$

Какой геометрический смысл имеют T_1 и T_2?

9. Доказать, что

а) если $S, T \in \mathrm{End}(V)$, то $S \circ T \in \mathrm{End}(V)$;

б) если при $T \in \mathrm{End}(V)$ существует преобразование $S\colon V \to V$ такое, что

$$S \circ T = T \circ S = I_V,$$

то $S \in \mathrm{End}(V)$;

в) если $T \in \mathrm{Aut}(V)$, то $\mathcal{N}(T) = \{0\}$.

10. Доказать, что если $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3 \in \mathbf{R}^2$ и $\lambda \in \mathbf{R}$, то

а) $\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3) = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3$;

б) $\lambda(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) = (\lambda\mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 \cdot (\lambda\mathbf{r}_2)$;

в) $|\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2| \leqslant \|\mathbf{r}_1\| \, \|\mathbf{r}_2\|$;

г) $\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^2 = \|\mathbf{r}_1\|^2 + \|\mathbf{r}_2\|^2 - 2\|\mathbf{r}_1\| \, \|\mathbf{r}_2\| \cos\theta$,

где θ — угол между $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$;

д) $|\|\mathbf{r}_1\| - \|\mathbf{r}_2\|| \leqslant \|\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2\| \leqslant \|\mathbf{r}_1\| + \|\mathbf{r}_2\|$

(последнее неравенство известно как *неравенство треугольника).* Дать геометрические иллюстрации этим результатам.

В действительности вышесказанное имеет место для любого пространства со скалярным произведением; в частности, результаты справедливы для $\mathbf{R}^n (n \in \mathbf{N})$ с обычным внутренним (скалярным) произведением.

11. Вычислить единичные векторы, параллельные

а) $\mathbf{a}=(1, 1, 1)$;

б) $\mathbf{b}=(1, p, 0)$, $p\in\mathbf{R}$.

Определить единичный вектор, ортогональный *a* и *b* одновременно.

12. Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\in\mathbf{R}^3$ и $\lambda\in\mathbf{R}$. Доказать, что

а) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$;

б) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$;

в) $(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b})=\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$;

г) $\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}}=\hat{\mathbf{k}}$, $\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{k}}=\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{i}}=\hat{\mathbf{j}}$;

д) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\quad\mathbf{b})\mathbf{c}$;

е) $\mathbf{a}\quad(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=-\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{b})=$
$=-\mathbf{b}\quad(\mathbf{a}\times\mathbf{c})=-\mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$.

13. Используя результаты 12, доказать, что операция $\times$: $\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ не ассоциативна, т. е. в общем случае $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\neq(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$.

14. Пусть $\mathbf{f}, \mathbf{g}$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}^3$. Доказать, что

а) $\frac{d}{dt}(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})=\mathbf{f}\cdot\frac{d\mathbf{g}}{dt}+\frac{d\mathbf{f}}{dt}\cdot\mathbf{g}$;

б) $\frac{d}{dt}(\mathbf{f}\times\mathbf{g})=\mathbf{f}\times\frac{d\mathbf{g}}{dt}+\frac{d\mathbf{f}}{dt}\times\mathbf{g}=-\frac{d\mathbf{g}}{dt}\times\mathbf{f}-\mathbf{g}\times\frac{d\mathbf{f}}{dt}$;

в) если $\|\mathbf{f}(t)\|=a$ для всех *t*, где $a\in\mathbf{R}$ — постоянная, то $d\mathbf{f}/dt$ ортогонален к **f** при всех *t*. Провести вычисления при

$$\mathbf{f}(t)=(a\cos t, a\sin t, 0), \ \mathbf{g}(t)=(0, 1, t).$$

1.5.2. Системы координат для подмножеств R^3

В общем случае система координат (координатная система) или параметризация множества $S\subseteq\mathbf{R}^n$ являеся идентификацией каждой точки в *S* при помощи единственного упорядоченного набора чисел $(\xi_1, \ldots, \xi_q)\in\mathbf{R}^q$ $(q\in\mathbf{N})$. В терминологии отображений система координат для *S* может быть определена как непрерывная биекцпя Φ: $S\to\mathcal{S}$, где $\mathcal{S}\subseteq\mathbf{R}^q$. Любое преобразование или другое вычисление, осуществляемое на *S*, тогда выполняется в терминах координат $(\xi_1, \ldots, \xi_q)$. Конкретное отображение, которое выбирается для данной задачи, часто будет определяться геометрией пространства *S*. Можно показать, что *q* для фиксированного *S* является постоянным для всех систем координат и называется *размерностью* *S*. К сожалению, в одном из приведенных ниже примеров (однородные системы координат) требуется, чтобы $\mathcal{P}$ было всем пространством; кроме того, существует много полезных подмножеств, для которых такие отображения не существуют (например, круг или сфера). Чтобы разобраться с этим, следовало бы совершить небольшой экскурс в топологию; однако вместо этого будем надеяться, что проведенное ниже рассуждение, несмотря на недостатки определения, поможет хорошо разобраться в данном вопросе.

В основном нас будут интересовать пространства размерности 3 и меньше; например, кривые являются одномерными объектами, а поверхности имеют размерность 2. В следующих примерах представлены некоторые наиболее общие координатные системы в $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}^3$, однако там, где легко обсудить более общий случай, мы это будем делать.

Пример 1. Прямоугольная система координат в $\mathbf{R}^n$ $(n \in \mathbf{N})$. Если $B = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathbf{R}^n$, то каждый элемент $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ может быть записан единственным образом в виде

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{e}_i, \text{ где } a_i \in \mathbf{R}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Отображение $\Phi\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, задаваемое как $\Phi(\mathbf{x}) = (a_1, \ldots a_n)$, определяет координатную систему в $\mathbf{R}^n$. Если B ортонормирован, то соответствующие координаты называются *декартовыми координатами* в $\mathbf{R}^n$. В $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}^3$ обычно ортонормированный базис интерпретируют геометрически как правостороннюю систему координат.

Следующий пример в $\mathbf{R}^n$ является более сложным с математической точки зрения. Необходимо некоторое предварительное обсуждение перед тем, как мы опишем эту систему.

Начнем с определения отношения ~ на $\mathbf{R}^{n+1}$. Определим его следующим образом: $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, если $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$ для некоторого $\alpha \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$. Важные свойства этого отношения сформулированы в следующем предложении, доказательство которого оставляется в качестве упражнения.

Предложение. *Отношение ~ является отношением эквивалентности на* $\mathbf{R}^{n+1}$.

Отношение ~ определяет следующие классы эквивалентности:

$\mathbf{P}^n = \{L\setminus\{\mathbf{0}\}\colon L$ — одномерное векторное подпространство $\mathbf{R}^{n+1}$, $\mathbf{0}$ — нулевой вектор в $\mathbf{R}^{n+1}\}$ и $\{0\}$,

Очевидно, что $\mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{P}^n \cup \{\mathbf{0}\}$. Определим подмножество $\mathbf{P}^n$.

Определение. Пусть $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n+1}$ имеет вид $(x_1, \ldots \ldots, x_n, 0)$, где не все x_i равны нулю. Тогда $[\mathbf{x}] \in \mathbf{P}^n$ называют *бесконечно удаленной точкой.*

Обозначим множество всех бесконечно удаленных точек $\mathbf{P}^n$ через $\mathbf{L}^n_\infty$ и определим H^n как $\mathbf{P}^n \setminus \mathbf{L}^n_\infty$.

Следующий результат играет важную роль: он устанавливает координатное отображение $\mathbf{R}^n$.

Предложение. *Существует биекция* $Q^n\colon H^n \to \mathbf{R}^n$.

Доказательство. Определим отношение $Q^n\colon H^n \to \mathbf{R}^n$ следующим образом:

$$Q^n([(x_1, \ldots, x_{n+1})]) = \frac{1}{x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n).$$

Вначале заметим, что правая часть всегда определена, так как L^n_∞ исключена из области определения Q^n; следовательно, $\mathcal{D}(Q^n) = H^n$.

Необходимо установить три факта:

O^n — отображение на H^n;

Q^n инъективно;

Q^n *сюръективно.*

Q^n является отображением, если

$$(x_1, \ldots, x_{n+1}) \sim (y_1, \ldots, y_{n+1}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Q^n([(x_1, \ldots, x_{n+1})]) = Q^n([(y_1, \ldots, y_{n+1})]).$$

Пусть $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \sim (y_1, \ldots, y_{n+1})$; тогда существует $\alpha \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ такое, что $x_i=\alpha y_i$ для всех i, $1 \leqslant i \leqslant n+1$. Тогда по определению

$$Q^n([(x_1, \ldots, x_{n+1})]) = Q^n([\alpha y_1, \ldots$$
$$\ldots, \alpha y_{n+1})]) = \frac{1}{\alpha y_{n+1}}(\alpha y_1, \ldots, \alpha y_n) = \frac{1}{y_{n+1}}(y_1, \ldots, y_n) =$$
$$= Q^n([(y_1, \ldots, y_{n+1})]).$$

Следовательно, Q^n — отображение на H^n.

Q^n инъективно, если $Q^n([\mathbf{x}]) = Q^n([\mathbf{y}]) \Rightarrow \mathbf{x} \sim \mathbf{y}$. Записывая выражение для **x** и **y** в виде $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ и $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n, y_{n+1})$, получаем

$$Q^n([\mathbf{x}]) = Q^n([\mathbf{y}]) \Rightarrow \frac{1}{x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{y_{n+1}}(y_1, \ldots, y_n),$$

откуда $x_1 = (x_{n+1}/y_{n+1})\, y_1 \Rightarrow x \sim y$, $\alpha = x_{n+1}/y_{n+1}$. Следовательно, Q^n инъективно.

Q^n сюръективно, если для всех $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ существует $\mathbf{x}^* \in \mathbf{R}^{n+1}$ такое, что $Q^n([\mathbf{x}^*]) = \mathbf{x}$. Если определим $\mathbf{x}^* = (x_1, \ldots, x_n, 1) \in \mathbf{R}^{n+1}$, тогда очевидно, что $Q^n([\mathbf{x}^*]) = \mathbf{x}$, т. е. Q^n сюръективно.

Пример 2. Однородные координаты в $\mathbf{R}^n (n \in \mathbf{N})$.

Однородные координаты в $\mathbf{R}^n$ определяют как отображение $\mathbf{R}^n$ на H^n, имеющее обратное отображение Q^n, так что $\Phi\colon \mathbf{R}^n \to H^n$, где $\Phi = (Q^n)^{-1}$. Другими словами, однородными координатами точки $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ являются $(n+1)$-мерные наборы классов эквивалентности

$$[(x_1, \ldots, x_n, 1)] = \{(px_1, \ldots, px_n, p)\colon\ p \neq 0\}.$$

Элемент из $[(x_1, \ldots, x_n, 1)]$ называют *однородным представлением* для $(x_1, \ldots, x_n)$.

Часто бывает удобно представить в компьютере геометрические данные в однородной форме. Чтобы из однородных координат получить физические, осуществим отображение

$$(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto \frac{1}{x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n).$$

Сформулированное выше предложение показывает, что все однородные представления данной физической точки имеют *те же самые* физические координаты.

Чтобы прояснить ситуацию, рассмотрим геометрическую интерпретацию однородных координат в **R**. Случай более высоких размерностей имеет подобную геометрическую интерпретацию, однако ее нелегко изобразить на рисунке. Элементы $\mathbf{P}^1$ являются бесконечными линиями в $\mathbf{R}^2$, проводящими через начало координат, однако начало координат выброшено (рис. 1).

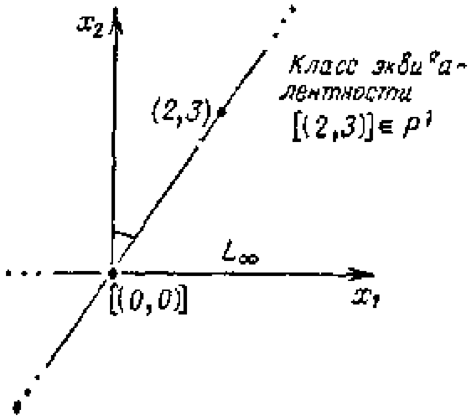


Рис. 1

Ясно, что единственной, бесконечно удаленной точкой будет ось Ox_1 с выброшенным началом координат. Рис. 2 проясняет понятие «бесконечно удаленная точка в P^1».

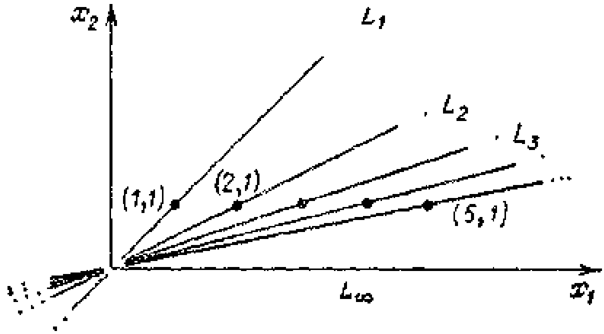


Рис. 2

Точки на линии $L_n = [(n, 1)]$ являются однородным представлением $n \in \mathbf{R}$. Из рис. 2 видно, что при $n \to \infty$ прямая L_n стремится к бесконечно удаленной точке L_∞.

Пример 3. Полярные координаты в $\mathbf{R}^2$.

Пусть $L \subseteq \mathbf{R}^2$ — полубесконечная линия $L = \{(x, 0): x \geqslant 0\}$ и $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \backslash L$. Тогда, если $\Phi: \mathbf{R}^2 \backslash L \to]0, \infty[\times]0, 2\pi[$ определено как $\Phi(x, y) = (r, \theta)$, где $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, а $\theta = \operatorname{arctg}(y/x)$, то Ф определяет множество полярных координат в $\mathbf{R}^2$. Обратное к Ф отображение задается соотношением $\Phi^{-1}(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$. Геометрическая интерпретация r и θ дана на рис. 3.

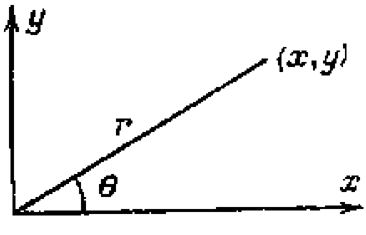


Рис. 3

Исключение L из области определения Ф часто неправильно комментируется в элементарных учебниках. Линию L удаляют, чтобы получить непрерывность Ф.

Пример 4. Цилиндрические координаты в $\mathbf{R}^3$. Пусть

$P \subset \mathbb{R}^3$— полуплоскость $P = \{(x, 0, z) : x \geqslant 0\}$ и $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus P$. Тогда отображение

$$\Phi: \mathbb{R}^3 \setminus P \to]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R},$$

определяемое как $\Phi(x, y, z) = (\rho, \varphi, z)$, где $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}(y/x)$, определяет множество *цилиндрических координат* в $\mathbb{R}^3 \setminus P$. Обратное к Ф отображение задается формулой $\Phi^{-1}(\rho, \varphi, z) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$.

На рис. 4 изображены величины ρ, φ, z, относящиеся к осям декартовой системы координат.

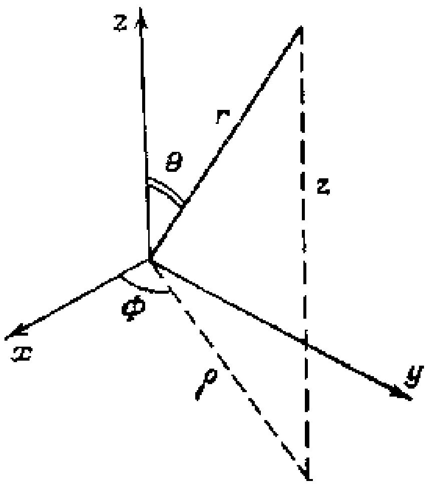


Рис. 4

Полуплоскость *P* исключена пз области определения Ф, чтобы получить непрерывность.

Пример 5. Сферическая система координат в $\mathbb{R}^3 \setminus P$; *P* определено, как в примере 4. *Сферическую систему координат* определяют как отображение

$$\Phi: \mathbb{R}^3/P \to]0, \infty[\times [0, \pi] \times]0,2\pi[,$$

где $\Phi(x, y, z) = (r, \theta, \varphi)$, а $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, $\theta =$

$= \arccos(z/r)$, $\varphi = \operatorname{arctg}(y/x)$.

1.5.3. Преобразования

Одной из наиболее часто используемых операций над геометрическими данными является преобразование. Например, вращение трехмерного пространства $\mathbf{R}^3$ дает возможность рассматривать трехмерные геометрические объекты с любой удобной точки. Это может оказаться полезным при проверке геометрической целостности объекта, или при подробном изучении какого-либо свойства, или по какой-лпбо другой причине. Некоторые подходы основаны на библиотеках основных геометрических «строительных блоков», из которых путем преобразования могут быть построены более сложные геометрии. Они следуют из некоторых теоретико-множественных операций, которые будут построены далее. Алгоритмы для такого типа геометрического синтеза являются весьма специальными и не будут здесь обсуждаться, однако мы упомянем, что обобщенная форма теоремы Эйлера для графов может быть использована для исследования топологии конструируемого объекта. Преобразования используются более широко. Некоторые из наиболее употребляемых преобразований и их линейные представления будут сейчас описаны.

1. Преобразования в $\mathbf{R}^2$. *Переносом* в $\mathbf{R}^2$ называется отображение вида $T\mathbf{r} = \mathbf{r} + \mathbf{r}_0$ для всех $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^2$, где $\mathbf{r}_0 \in \mathbf{R}^2$ — фиксированный вектор. Перенос перемещает всю плоскость сдвигом на фиксированный вектор и может быть записан в координатной форме:

$$T(x, y) = (x, y) + (x_0, y_0) = (x + x_0, y + y_0).$$

Обозначим через *T(*2*)* множество всех переносов на $\mathbf{R}^2$ и определим произведение в *T*(2), используя композицию отображений. Пусть T_1 — перенос на вектор $\mathbf{r}_1$, а T_2 — перенос на вектор $\mathbf{r}_2$. Тогда произведение $T_2 \circ T_1$ определим как

$$T_2 \circ T_1\mathbf{r} = T_2(T_1\mathbf{r}) = \mathbf{r} + \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2.$$

Очевидно, что $T_2 \circ T_1$ есть перенос на $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$, и, следовательно, операция $\circ$ является бинарной на *T*(2). В действительности справедливо более сильное утверждение.

Предложение. $(T(2), \circ)$ — *коммутативная группа нелинейных преобразований* **R**.

Докдзательство. Замкнутость относительно операции $\circ$ уже доказана. Аксиомы группы следуют из групповой структуры $(\mathbf{R}^2, +)$; например, если $T_i (1 \leqslant i \leqslant 3)$ — переносы на $\mathbf{r}_n$, то

$$(T_3 \circ (T_2 \circ T_1))r = T_3((T_2 \circ T_1)r) = T_3(r + r_1 + r_2) =$$
$$= \mathbf{r} + \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = (\mathbf{r} + \mathbf{r}_1) + (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3) =$$
$$= (T_3 \circ T_2)(T_1\mathbf{r}) = ((T_3 \circ T_2) \circ T_1)\mathbf{r};$$

поэтому $(T(2), \circ)$ ассоциативна. Единицей является перенос на вектор (0, 0), а обратным переносом к $T\mathbf{r} = \mathbf{r} + \mathbf{r}_0$ будет $T'\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$; поэтому

$$T \circ T'\mathbf{r} = T'T\mathbf{r} = \mathbf{r} \text{ для всех } \mathbf{r} \in \mathbf{R}^2.$$

Коммутативностьтакже выполняется, поскольку

$$(T_2 \circ T_1)\mathbf{r} = \mathbf{r} + \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \mathbf{r} + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 = (T_1 \circ T_2)\mathbf{r}.$$

В общем случае, если $T \in T(2)$, то $T(0, 0) \neq (0, 0)$; поэтому начало координат смещается и, следовательно, перенос является нелинейным отображением.

На практике это означает, что можно применить любое число переносов к геометрическому объекту и получить один и тот же результат. Кроме того, нелинейный характер элементов T (2) означает, что мы не можем выполнить T(2) при помощи элементов из $\mathscr{M}(2, \mathbf{R})$; другими словами, уравнение

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + x_0 \\ y + y_0 \end{bmatrix} \text{ для всех } (x, y) \in \mathbf{R}^3$$

не имеет решения. Следствия из этого факта будет рассмотрены ниже. Опишем поворот в $\mathbf{R}^2$, используя рис. 1.

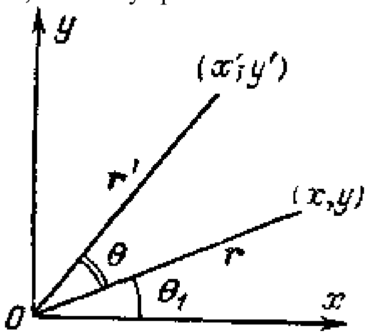


Рис. 1

Интуитивно ясно, что поворот на угол θ, обозначаемый *W*(θ), отображает точку *(x, y)* в точку *(x' , y'),* где $\|\mathbf{r}\| = \|\mathbf{r}'\| = r$. Из рисунка видно, что

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,$$

$$x' = r\cos(\theta + \theta_1),\ y' = r\sin(\theta + \theta_1).$$

Применяя тригонометрические формулы, получаем

$$x' = r(\cos\theta\cos\theta_1 - \sin\theta\sin\theta_1) = x\cos\theta - y\sin\theta,$$

$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta,$$

так что

$$W(\theta)(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta).$$

В матричной форме это можно записать следующим образом:

$$W(\theta)(x, y) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix};$$

W(θ) геометрически соответствует повороту вокруг начала координат *O*.

Следующее предложение непосредственно вытекает из представления $\mathscr{M}(2, \mathbf{R})$ и, с нашей точки зрения, суммирует основные свойства поворотов.

Предложение.

а) *Преобразование W(*θ*):*

— *линейно,*

— *ортогонально,* det *W(*θ*)*=l.

б) *Множество* { *W(*θ): 0 ≤ θ < 2 π } *является коммутативной группой по отношению к композициям отображений (умножением матриц).*

С практической точки зрения из а) следует, что для вычисления преобразования, обратного к повороту, достаточно лишь транспонировать матрицу. Часть б) означает, что любое число поворотов может применяться к множеству геометрических данных в любом порядке и будет давать одинаковые результаты. На самом деле верно обратное к а) утверждение. В частности, если $W \in \mathscr{M}(2, \mathbf{R})$ и выполнены условия, а) *W* является поворотом. Другими словами, мы можем определить поворот в $\mathbf{R}^2$ как элемент группы *SO (*2*).*

Хотя $T(2)$ и $SO(2)$ являются коммутативными группами, преобразования из $T(2)$ не коммутируют с преобразованиями из $SO(2)$, так как если $W \in SO(2)$ и $T \in T(2)$ — сдвиг на $\mathbf{r}_0$, то мы имеем $TW\mathbf{r} = W\mathbf{r} + \mathbf{r}_0$ и $WT\mathbf{r} = W(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) = W\mathbf{r} + W\mathbf{r}_0 \neq TW\mathbf{r}$ при $\mathbf{r}_0 \neq (0,\ 0)$. На практике это означает, что преобразования переноса и поворота надо применять строго в том порядке, в каком они записапы. Некоммутативность проиллюстрирована на рис. 2, где показаны результаты применения преобразований $T \circ W(\pi/2)$ и $W(\pi/2) \circ T$ к полусфере.

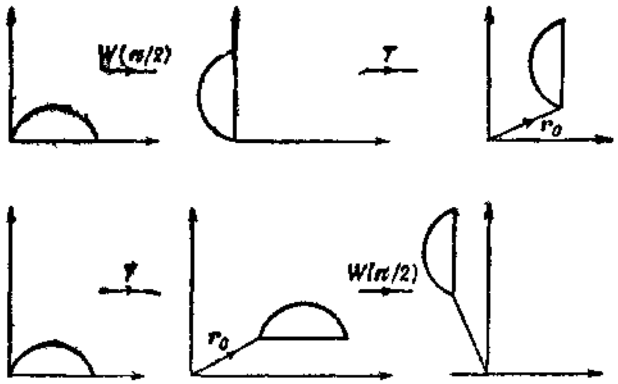


Рис. 2

Из рис. 2 видно, что если площадь $\{(x,\ y):\ 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b\}$ соответствует экрану графического терминала, то результат применения $W(\pi/2) \circ T$ к полукругу даст в итоге пустой экран,

Группы $T(2)$ и $SO(2)$ могут быть объединены в виде третьего множества $E(2)$ преобразований плоскости, называемых *евклидовыми.* Элементы $U \in E(2)$ имеют вид $U\mathbf{r} = W\mathbf{r} + \mathbf{r}_0$ для всех $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$, где $W \in SO(2)$, а $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^2$ — фиксированный вектор. Эти преобразования часто записывают в виде пар вида $(W,\ \mathbf{r}_0)$. Если $(W_1,\ \mathbf{r}_1) \in E(2)$ и $(W_2,\ \mathbf{r}_2) \in E(2)$, то

$$(W_2,\ \mathbf{r}_2) \circ (W_1,\ \mathbf{r}_1)\mathbf{r} = (W_2,\ \mathbf{r}_2)(W_1\mathbf{r} + \\ + \mathbf{r}_1) = W_2(W_1\mathbf{r} + \mathbf{r}_1) + \mathbf{r}_2 = (W_2W_1,\ W_2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)\mathbf{r},$$

так что

$$(W_2,\ \mathbf{r}_2) \circ (W_1,\ \mathbf{r}_1) = (W_2W_1,\ W_2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \in E(2)$$

и $E(2)$ замкнуто. В действительности имеет место следующее предложение.

Предложение. *E(2) является группой по отношению к операции композиции.*

Доказательство. Ограничимся указанием основных моментов доказательства. Замыкание уже доказано. Ассоциативность следует из применения преобразований несколько раз. Если $I \in GL(2, \mathbb{R})$ — единица, то справедливы соотношения

$$(I, 0) \circ (W, \mathbf{r}_0) = (W, \mathbf{r}_0) \circ (I, 0) = (W, \mathbf{r}_0)$$

$$\text{для всех } (W, \mathbf{r}_0) \in E(2);$$

следовательно, $(I, 0)$ является единицей в *E(2)*. Обратный элемент $(W, \mathbf{r}_0)^{-1}$ к $(W, \mathbf{r}_0)$ будет равен $(W^T, -W^T\mathbf{r}_0)$ при $(W^T, -W^T\mathbf{r}_0) \in E(2)$, и

$$(W, \mathbf{r}_0) \circ (W^T, -W^T\mathbf{r}_0) = (I, 0) = (W^T, -W^T\mathbf{r}_0) \circ (W, \mathbf{r}_0).$$

$SO(2)$ и $T(2)$ являются подгруппами $\{(W, 0): W \in SO(2)\}$ и $\{(I, \mathbf{r}_0): \mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^2\}$ из $E(2)$ соответственно, и каждый элемент $(W, \mathbf{r}_0) \in E(2)$ может быть представлен следующим образом:

$$(W, \mathbf{r}_0) = (I, \mathbf{r}_0) \circ (W, 0).$$

$E(2)$ — некоммутативная группа, так как

$$(W_2, \mathbf{r}_2) \circ (W_1, \mathbf{r}_1) = (W_2W_1, W_2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2),$$

$$(W_1, \mathbf{r}_1) \circ (W_2, \mathbf{r}_2) = (W_1W_2, W_1\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1) \neq (W_2, \mathbf{r}_2) \circ (W_1, \mathbf{r}_1).$$

В приложениях компьютерной графики часто хотят повернуть объект около некоторой фиксированной точки, отличной от начала координат. Например, на рис. 3 полукруг повернут на $\pi/2$ около точки P.

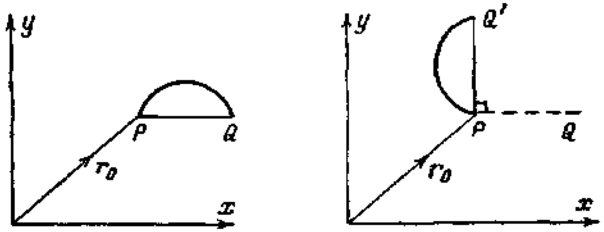


Рис. 3

Общая ошибка при этом заключается в попытке применить преобразование $W(\pi/2)$; однако это приводит к результату, изображенному на рис. 4.

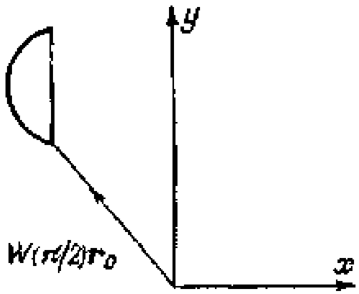


Рис. 4

Проиллюстрируем последовательность преобразований поворота вокруг фиксированной точки $\mathbf{r}_0 \in \mathbf{R}^2$ на рис. 5, используя понятия *E*(2).

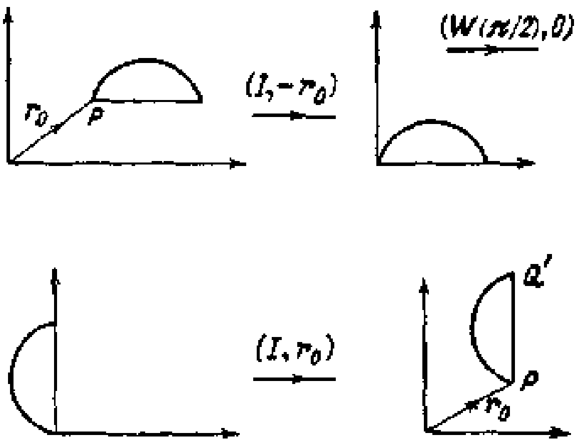


Рис. 5

Требуемое преобразование, таким образом, будет равно

$$(I,\ \mathbf{r}_0)\circ(W(\pi/2),\ 0)\circ(I,\ -\mathbf{r}_0).$$

Эту запись можно упростить, используя правило произведения в *E(2);* получим

$$(W(\pi/2),\ -W(\pi/2)\mathbf{r}_0+\mathbf{r}_0).$$

Ясно, что применять составное преобразование к множеству геометрических данных более эффективно, чем применять в отдельности каждое преобразование. *E(2)* дает возможность расположить объект в любой точке плоскости и в требуемой ориентации.

Множество полезных операций на плоскости включает в себя преобразование масштаба. Преобразованием масштаба на $\mathbf{R}^2$ называют отображение вида

$$S(x, y) = (\lambda x, \mu y), \ \lambda, \mu > 0,$$

или же (в матричной форме)

$$S(x, y) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Множество всех преобразований такого типа обозначается $S(2)$. Важные свойства $S(2)$ сформулированы в следующем предложении, доказательств которого оставляем в качестве упражнения.

Предложение. $S(2)$ *является коммутативной группой линейных преобразований по отношению к операции композиции. (Другими словами,* S (2) *является коммутативной подгруппой* $GL(2, \mathbf{R})$.*)*

Преобразование масштаба не коммутирует с переносом, так как если T — перенос на вектор $\mathbf{r}_0$ и

$$S(x, y) = (\lambda x, \mu y),$$

то

$$S \circ T(x, y) = S(x + x_0, y + y_0) = (\lambda(x + x_0), \mu(y + y_0)),$$
$$T \circ S(x, y) = T(\lambda x, \mu y) = (\lambda x + x_0, \mu y + y_0) \neq S \circ T(x, y)$$

в общем случае некоммутативность проиллюстрирована на рис. 6; используются преобразование масштаба

$$S(x, y) = (2x, 2y)$$

и перенос

$$T(x, y) = (x + 1, y + 1)$$

единичного квадрата с вершиной в начале координат.

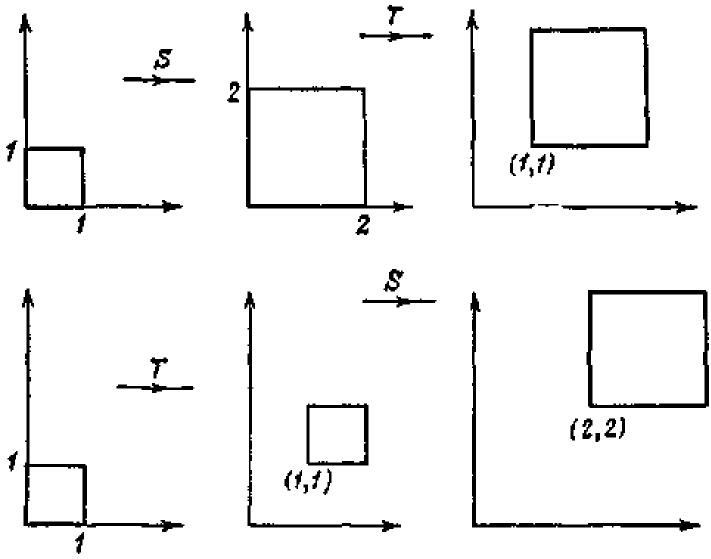


Рис. 6

Аналогично можно показать, что преобразования масштаба не коммутируют с поворотами. Доказательство этого и построение соответствующего рисунка, который это демонстрирует, оставляем в качестве упражнения.

На практике это означает, что если преобразование масштаба комбинируют с переносом или с поворотом, то следует обращать особое внимание на порядок применения преобразований.

Языки высокого уровня предусматривают массивы как структуры данных; следовательно, матричное представление всех рассмотренных выше преобразований должно существенно упростить их применение. Например, все произведения преобразований тогда могли бы вычисляться путем умножения матриц вместо того, чтобы работать с определениями этих преобразований. Нелинейная природа переносов препятствует представлению в $\mathcal{M}(2, \mathbf{R})$; однако возможно получить подходящее представление обсуждаемых выше преобразований в $\mathcal{M}(3, \mathbf{R})$, где матрицы оперируют в пространстве H^2 однородных координат $\mathbf{R}^2$. Поскольку техника получения представления в однородных координатах носит весьма общий характер и, в частности, может быть применена к преобразованиям в $\mathbf{R}^3$ (где получается представление в $\mathcal{M}(4, \mathbf{R})$), мы отложим рассмотрение до описания преобразований в $\mathbf{R}^3$.

2.2. Преобразования в $\mathbf{R}^3$. *Перенос в* $\mathbf{R}^3$ есть отображение $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ вида

$$T\mathbf{r} = \mathbf{r} + \mathbf{r}_0 \text{ для всех } \mathbf{r} \in \mathbf{R}^3,$$

где $\mathbf{r}_0 \in \mathbf{R}^3$ — фиксированный вектор. Если $\mathbf{r}_0 = (x_0,\ y_0,\ z_0)$, то перенос на $\mathbf{r}_0$ может быть записан в компонентной форме как

$$T(x,\ y,\ z) = (x + x_0,\ y + y_0,\ z + z_0).$$

Пусть $T(3)$ обозначает множество всех переносов R^3. Тогда $T(3)$ образует коммутативную группу (по отношению к операции композиции) нелинейных преобразований $\mathbf{R}^3$, изоморфную группе $(\mathbf{R}^3,\ +)$. Следствием этого является тот факт, что последовательность переносов $\mathbf{R}^3$ может применяться в произвольном порядке и будет давать один и тот же результат и что мы не можем выполнить $T(3)$ при помощи элементов из $\mathscr{M}(3,\ \mathbf{R})$.

Группа поворотов в $\mathbf{R}^3$ имеет более сложную структуру, чем $SO(2)$. Рассмотрим поворот $W_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta)$ на угол θ вокруг оси, определяемой единичным вектором $\hat{\mathbf{n}} \in \mathbf{R}^3$, как это изображено на рис. 7.

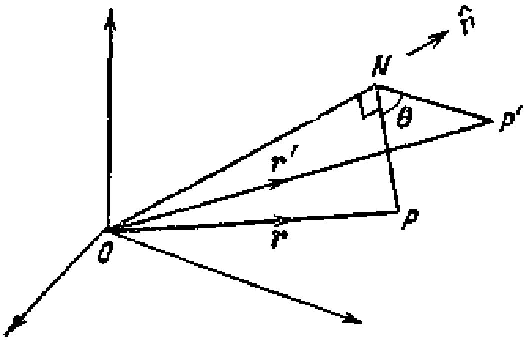


Рис. 7

Тогда

$$W_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta)\,\mathbf{r} = \mathbf{r}',$$

где $\mathbf{r}$ — вектор с концом в точке P, а $\mathbf{r}'$ — преобразованный вектор с концом в точке P'. Чтобы определить явно $W_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta)$, мы должны выразить $\mathbf{r}'$, как функцию $\mathbf{r}$, $\hat{\mathbf{n}}$ и θ. Ясно, что если $\mathbf{r}_n$ — вектор, определяемый точкой N, лежащей на оси поворота, то

$$\mathbf{r}_N = (\hat{\mathbf{n}};\ \mathbf{r})\,\hat{\mathbf{n}},$$

и если $\mathbf{r}_{NP}$ – вектор, соединяющий N и P, то

$$\mathbf{r}_{NP}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_N=\mathbf{r}-(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r})\hat{\mathbf{n}}=(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{r})\times\hat{\mathbf{n}}.$$

Рисунок 8 показывает, как выглядит поворот из точки N в направлении начала координат O; Q — точка, полученная поворотом точки P на $\pi/2$ относительно оси ON.

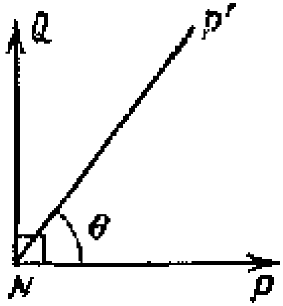


Рис. 8

Таким образом, $W_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta)$ — поворот; следовательно,

$$\|\mathbf{r}_{NQ}\|=\|\mathbf{r}_{NP}\|=\|\mathbf{r}_{NP'}\|,$$
$$\mathbf{r}_{NP'}=\mathbf{r}_{NQ}\sin\theta+\mathbf{r}_{NP}\cos\theta,$$

где $\mathbf{r}_{NQ}$ — проекция вектора на ось NQ. Отсюда следует, что

$$\mathbf{r}_{NQ}=\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{r}_{NP}=\hat{\mathbf{n}}\times((\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{r})\times\hat{\mathbf{n}})=\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{r}$$

(см. упражнение 1); следовательно,

$$\mathbf{r}_{NP'}=(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{r})\sin\theta+((\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{r})\times\hat{\mathbf{n}})\cos\theta=$$
$$=(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{r})\sin\theta-(\hat{\mathbf{n}}\times(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{r}))\cos\theta,$$

но

$$W_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta)\mathbf{r}=\mathbf{r}'=\mathbf{r}_N+\mathbf{r}_{NP'}=$$
$$=\mathbf{r}+(\hat{\mathbf{n}}\times(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{r}))(1-\cos\theta)+(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{r})\sin\theta.$$

Предложение. $W_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta)\in SO(3)$.

Доказательство. Некоторые детали доказательства будем оставлять в качестве упражнений. Запишем $W_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta)$ в несколько иной форме. Если $\hat{\mathbf{n}}\in\mathbf{R}^3$ определяет ось поворота, то определим преобразование $A_{\hat{\mathbf{n}}}$: $\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ следующим образом:

$$A_{\hat{\mathbf{n}}}\mathbf{r}=\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{r};$$

$A_{\hat{n}}$ является непрерывным и антисимметричным (см. упражнение1).

$$A_{\hat{n}}^2 \mathbf{r} = A_{\hat{n}} \left(A_{\hat{n}} \mathbf{r}\right) = A_{\hat{n}} (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r});$$

Тогда

$A_{\hat{n}}^2$ линейно и симметрично. Сейчас мы можем записать $W_{\hat{n}}(\theta)$ как сумму

$$W_{\hat{n}}(\theta) = I + (1 - \cos\theta) A_{\hat{n}}^2 + \sin\theta A_{\hat{n}}$$

в $\mathscr{M}(3, \mathbf{R})$. Но „$\mathscr{M}(3, \mathbf{R})$ — векторное пространство; следовательно, $W_{\hat{n}}(\theta)$ линейно. Ортогональность следует из свойств $A_{\hat{n}}$, так как

$$W_{\hat{n}}(\theta)^T = I + (1 - \cos\theta) \left(A_{\hat{n}}^2\right)^T + \sin\theta \left(A_{\hat{n}}\right)^T =$$

$$= I + (1 - \cos\theta) A_{\hat{n}}^2 - \sin\theta A_{\hat{n}},$$

$$W_{\hat{n}}(\theta) W_{\hat{n}}(\theta)^T = \left[I + (1 - \cos\theta) A_{\hat{n}}^2 + \sin\theta A_{\hat{n}}\right] *$$

$$* \left[I + (1 - \cos\theta) A_{\hat{n}}^2 - \sin\theta A_{\hat{n}}\right] =$$

$$= I + [2(1 - \cos\theta) - \sin^2\theta] A_{\hat{n}}^2 + (1 - \cos\theta)^2 A_{\hat{n}}^4 =$$

$$= I + (1 - \cos\theta)^2 \left(A_{\hat{n}}^2 + A_{\hat{n}}^4\right),$$

но (см. упражнение 1)

$$A_{\hat{n}}^4 = -A_{\hat{n}}^2.$$

Следовательно,

$$W_{\hat{n}}(\theta) W_{\hat{n}}(\theta)^T = I$$

и $W_{\hat{n}}(\theta)$ ортогонально.

Доказательство того, что $\det W_{\hat{n}}(\theta) = 1$, оставляем в качестве упражнения.

Обратное утверждение также справедливо (см. задачу 12 упражнения 1); в частности, если $W \in SO(3)$, то можно показать, что существуют единичный вектор $\hat{\mathbf{n}} \in \mathbf{R}^3$ и угол θ в пределах $0 \leqslant \theta < 2\pi$ такой, что

$$W = W_{\hat{n}}(\theta).$$

Следовательно, разумпо определить *повороты* в $\mathbf{R}^3$ как группу *SO*(3).

Определим некоторые подгруппы *SO(3)*. Часто требуется повернуть объект вокруг одной из декартовых осей координат. Соответствующие матрицы могут быть получены из общего вида $W_{\hat{n}}(\theta)$. Например, чтобы осуществить поворот на угол θ вокруг оси *OZ*, выберем $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{k}} = (0, 0, 1)$, для которого

$$A_{\hat{\mathbf{k}}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2_{\hat{\mathbf{k}}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

так что

$$W_{\hat{\mathbf{k}}}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогично матрицы

$$W_{\hat{\mathbf{i}}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad W_{\hat{\mathbf{j}}}(\chi) = \begin{bmatrix} \cos\chi & 0 & \sin\chi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\chi & 0 & \cos\chi \end{bmatrix}$$

соответствуют поворотам на углы φ и χ вокруг осей *OX* и *OY* соответственно. Доказательство этого оставляем в качестве упражнения. Сейчас легко показать, что *SO*(3) — некоммутативная группа, так как в общем случае

$$[W_{\hat{\mathbf{i}}}(\varphi), W_{\hat{\mathbf{j}}}(\chi)] \neq 0, \quad [W_{\hat{\mathbf{i}}}(\varphi), W_{\hat{\mathbf{k}}}(\theta)] \neq 0,$$
$$[W_{\hat{\mathbf{j}}}(\chi), W_{\hat{\mathbf{k}}}(\theta)] \neq 0.$$

Однако все подгруппы

$$\{W_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta):\ 0 \leqslant \theta < 2\pi\}, \quad \hat{\mathbf{n}} \in \mathbf{R}^3$$

коммутативны (см. упражнение 1).

С практической точки зрения из этих результатов следует, что для обращения поворота надо просто транспонировать матрицу, и если к некоторому геометрическому объекту применяют несколько поворотов, то порядок их применения важен.

Следуя двумерному случаю, объединим *T*(3) и *SO*(3) в виде множества *E*(3) *евклидовых* преобразований $\mathbf{R}^3$. Элементы *E(3)* имеют вид $U\mathbf{r} = W\mathbf{r} + \mathbf{r}_0$ для всех $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^3$, где $W \in SO(3)$ и $\mathbf{r}_0 \in \mathbf{R}^3$. Правило композиции в *E(*3*)* записывается следующим образом:

$$(W_2, \mathbf{r}_2) \circ (W_1, \mathbf{r}_1) = (W_2 W_1, W_2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2);$$

по отношению к нему *E(3)* становится некоммутативной группой нелинейных преобразований $\mathbf{R}^3$. Отсюда вытекают следствия, аналогичппе двумерному случаю. В частности, подчеркнем, что *E(3)* не может выполняться в $\mathscr{M}(3, \mathbf{R})$.

Преобразование *масштаба* в $\mathbf{R}^3$ является линейным отображением вида

$$S(x, y, z) = (\lambda x, \mu y, \sigma z), \ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3,$$

где $\lambda, \mu, \sigma > 0$. Множество $S(3)$ всех преобразований масштаба определяет коммутативную группу по отношению к операции композиции.

Остальные преобразования, рассматриваемые в этом параграфе, имеют цели и свойства, отличные от рассмотренных выше. Нашей целью является задача представления трехмерного геометрического объекта на двумерном графическом терминале. С математической точки зрения мы ищем преобразования $\mathbf{R}^3$ в двумерные подпространства, в которых получаются необходимые графические представления нашего объекта. Напомним, что преобразование P векторного пристрапства называют проекцией, если $P^2 = P$.

Пусть объект описывается в декартовой системе координат (x, y, z) и в этой системе экран графического дисплея соответствует прямоугольному подмножеству

$$\{(x, y): 0 \leqslant x \leqslant a, \ 0 \leqslant y \leqslant b\}$$

на плоскости xy. Простейший метод получения образа объекта на экране — это применить преобразование $P_1\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, где $\mathbf{r} = (x, y, z)$ и $\mathbf{r}' = (x, y, 0)$, к множеству геометрических данных. При условии что все значения x и y для множества данных находится внутри экрана, получаем полную картину объекта. Если некоторые значения x и (или) y находятся вне пределов экрана, то надо вначале произвести подходящее преобразование масштаба. P_1 — линейная проекция, так как

$$P_{\perp}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

и $P_1^2\mathbf{r} = P_1\mathbf{r}$ для всех $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^3$. Однако P_1^{-1} не существует, так как

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Геометрически P_1 можно получать следующим образом. Начертим линию сегмента (линию проекции) из точки O, определяющей положение вектора $\mathbf{r}$, в точку O', определяющую положение $\mathbf{r}'$, в плоскости xy так, чтобы линия отрезка QQ' была ортогональна плоскости xy (рис. 9).

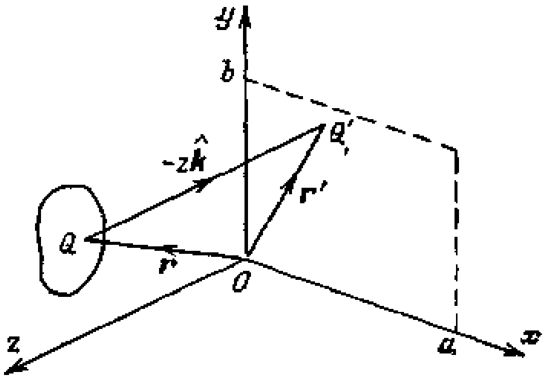


Рис. 9

Тогда ясно, что

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + (-z\hat{\mathbf{k}}) = (x,\ y,\ 0) = P_1\mathbf{r}.$$

P_1 называют *параллельной ортогональной проекцией* $\mathbf{R}^3$.

В параллельной проекции не отражается глубина получаемого образа; высота объекта появляется на экране такой же независимо от его расстояния до плоскости *xy*.

Последнее преобразование, которое мы опишем, предназначено для того, чтобы дать глубину образа или «перспективу». Вместо линий параллельной проекции построим линии проекции, выходящие из некоторой фиксированной точки. Определим проекцию $P_2\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, где фиксированной точкой является конец вектора $z_p\hat{\mathbf{k}}$ (как показано на рис. 10) и, следовательно, точка *Q* отображается в точку *Q'*.

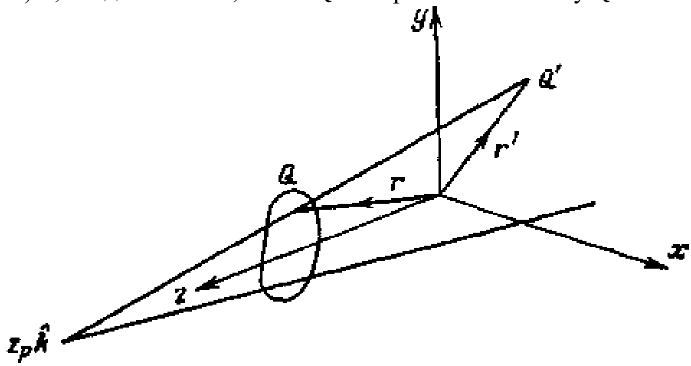


Рис. 10

Рисунок 11 представляет вид рис. 10, если смотреть вдоль оси *OX*.

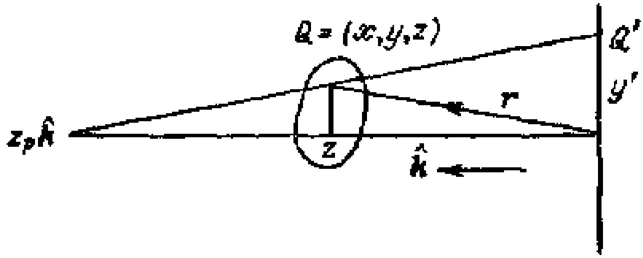


Рис. 11

Очевидно, что

$$\frac{y'}{z_p}=\frac{y}{z_p-z},$$

или же

$$y'=\frac{y}{1-z/z_p}.$$

Аналогично получаем

$$x'=\frac{x}{1-z/z_p};$$

явная форма для P_2 имеет вид

$$P_2(x, y, z)=\frac{1}{1-z/z_p}(x, y, 0).$$

Предложение. P_2 *является нелинейной проекцией* $\mathbf{R}^3$.
Доказательство.

$$P_2\lambda(x, y, z)=P_2(\lambda x, \lambda y, \lambda z)=\frac{1}{1-\lambda z/z_p}(\lambda x, \lambda y, 0),$$

$$\lambda P_2(x, y, z)=\frac{1}{1-z/z_p}(\lambda x, \lambda y, 0)\neq P_2\lambda(x, y, z)$$

для произвольного λ. Следовательно, P_2 нелинейно. Имеем

$$P_2(P_2(x, y, z))=P_2\left(\frac{x}{1-z/z_p}, \frac{y}{1-z/z_p}, 0\right)=$$
$$=\frac{1}{1-0}\left(\frac{x}{1-z/z_p}, \frac{y}{1-z/z_p}, 0\right)=P_2(x, y, z),$$

и, таким образом, P_1 — проекция в $\mathbf{R}^3$ по определению.

Отсюда можно сделать заключение, что P_2 нельзя включить в $\mathcal{M}(3, \mathbf{R})$. В образе можно достигнуть хорошей глубипы применением P_2, при условии что выбрана подходящая точка проекции. На рис. 12 показан вид прямоугольного параллелепипеда, полученный проекциями P_1 и P_2.

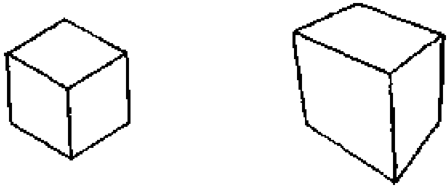


Рис. 12

3. Однородные координаты и линейное представление. В этом разделе мы опишем технику представления преобразований $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}^3$ рассмотренных выше, при помощи элементов из $\mathcal{M}(3, \mathbf{R})$ и $\mathcal{M}(4, \mathbf{R})$ соответственно.

Идея является общей и описывается в $\mathbf{R}^n$; мы ищем вложение некоторых специальных классов преобразований $\mathbf{R}^n$, не все из которых являются линейными, в алгебру матриц $\mathcal{M}(n+1, \mathbf{R})$.

Ранее было показано, что Q^n является биекцией $\mathbf{H}^n \to \mathbf{R}^n$ и может быть использовано для определения системы координат в $\mathbf{R}^n$. Это означает, что если T — преобразование $\mathbf{R}^n$, то мы можем его выразить как преобразование $\mathbf{H}^n$. Другими словами, существует отображение $\tilde{T}\colon \mathbf{H}^n \to \mathbf{H}^n$ такое, что диаграмма на рис. 13 коммутативна.

$$\begin{tikzcd}
H^n \arrow[r, "Q^n"] \arrow[d, "\tilde{T}"'] & R^n \arrow[d, "T"] \\
H^n \arrow[r, "Q^n"'] & R^n
\end{tikzcd}$$

Рис.13

Имеем $Q^n \circ \tilde{T} = T \circ Q^n$, но отображение Q^n имеет обратное. Поэтому мы можем записать $\tilde{T} = (Q^n)^{-1} \circ T \circ Q^n$. Если S — другое преобразование $\mathbf{R}^n$, то

$$\widetilde{S \circ T} = (Q^n)^{-1} \circ S \circ T \circ Q^n =$$
$$= (Q^n)^{-1} \circ S \circ Q^n \circ (Q^n)^{-1} \circ T \circ Q^n = \tilde{S} \circ \tilde{T}.$$

Другими словами, мы можем соеднпить вместе диаграммы, не нарушая коммутативность, как это показано на рис. 14.

$$
\begin{tikzcd}
H^n \arrow[r, "Q^n"] \arrow[d, "\hat{T}"'] & R^n \arrow[d, "T"] \\
H^n \arrow[r, "Q^n"] \arrow[d, "\hat{S}"'] & R^n \arrow[d, "S"] \\
H^n \arrow[r, "Q^n"'] & R^n
\end{tikzcd}
$$

Рис. 14

Для некоторых преобразований T пространства $\mathbf{R}^n$ существует линейное преобразование

$$T_L\colon \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^{n+1}$$

такое, что $\hat{T}[\mathbf{x}] = [T_L \mathbf{x}]$ для всех $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n+1}$.

T_L существует для всех преобразований, рассмотренных в этой главе, и является требуемым представлением T в $\mathbf{R}^{n+1}$, так как если $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^n$, то мы имеем

$$T\mathbf{r} = Q^n \circ \hat{T} \circ (Q^n)^{-1}\mathbf{r} = Q^n \circ \hat{T}[\mathbf{r}, 1] = Q^n [T_L(\mathbf{r}, 1)].$$

Таким образом, преобразование T получается путем применения T_L к однородному представлению и последующим применением Q^n для возврата к физическим координатам.

Чтобы иметь уверенность в том, что все работает правильно, надо показать, что композиция $\hat{S} \circ \hat{T}$ соответствует произведению матриц $S_L T_L$. Это легко сделать, так как

$$\hat{S} \circ \hat{T}[\mathbf{x}] = \hat{S}[T_L \mathbf{x}] = [S_L T_L \mathbf{x}].$$

Графически это означает, что мы можем расширить коммутативную диаграмму, изображенную на рис. 14, до коммутативной диаграммы, изображенной на рис. 15.

$$\begin{tikzcd}
R^{n+1} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "T_L"'] & H^n \arrow[r, "Q^n"] \arrow[d, "\tilde{T}"'] & R^n \arrow[d, "T"] \\
R^{n+1} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "S_L"'] & H^n \arrow[r, "Q^n"] \arrow[d, "\tilde{S}"'] & R^n \arrow[d, "S"] \\
R^{n+1} \arrow[r, "\sim"] & H^n \arrow[r, "Q^n"] & R^n
\end{tikzcd}$$

Рис. 15

Отсюда следует, что, один раз определив матрицы T_L, S_L, ..., соответствующие преобразованиям *T, S,* ..., которые мы хотим осуществить, мы затем сохраняем их, опуская обозначения классов эквивалентности и работаем с векторами, представляющими эти классы. Произведения преобразований в $\mathbf{R}^n$ получают путем умножения матриц из $\mathcal{M}(n+1, \mathbf{R})$, примененных к векторам, представляющим классы. Все представители данного класса будут давать те же самые физические координаты в соответствии с отображением

$$(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \mapsto \frac{1}{x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n).$$

Обычно выбирают вектор $(\mathbf{r}, 1) \in \mathbf{R}^{n+1}$, чтобы представить $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^n$. Такой выбор, очевидно, всегда возможен. В следующих примерах мы получим матрицы T_L для преобразований, описанных ранее. Все матрицы вычисляются в стандартном базисе.

Пример 1. Пусть T: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$—линейное преобразование с матрицей A_T. Тогда матрица T_L будет равна

$$\begin{bmatrix} & & & 0 \\ & A_T & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

так как если $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, 1) \in \mathbf{R}^{n+1}$, то

$$\tilde{T}[\mathbf{x}] = (Q^n)^{-1} \circ T \circ Q^n [\mathbf{x}] = (Q^n)^{-1} \circ T\mathbf{r} =$$

$$= (Q^n)^{-1} A_T \mathbf{r} = [(A_T \mathbf{r}, 1)] = \left[\begin{bmatrix} & & & 0 \\ & A_T & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \\ 1 \end{bmatrix} \right].$$

Для $\begin{bmatrix} A_T & & 0 \\ & & \vdots \\ & & 0 \\ 0 & \ldots\, 0 & 1 \end{bmatrix}$, если это удобно, используют обозначение $\begin{bmatrix} A_T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Раскладывая по последней строке, видим, что $\det \begin{bmatrix} A_T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$ тогда и только тогда, когда det A_T = 0; очевидно, что

$$\begin{bmatrix} A_T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_T^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пример 1 показывает, как применять линейные преобразования; например, применяя преобразования к *SO(2),* получаем представление

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

в $\mathscr{M}(3, \mathbf{R})$ для матрицы

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Аналогично, если $W \in SO(3)$, то W_L имеет вид

$$\begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

В $\mathscr{M}(4, \mathbf{R})$ и

$$\begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} W^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пример 2. Пусть $T\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$— перенос

$$T\mathbf{r} = \mathbf{r} + \mathbf{a} \quad \text{для всех } \mathbf{r} \in \mathbf{R}^n,$$

где $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$— фиксированный вектор. Тогда матрица T_L будет равна

$$\begin{bmatrix} & & a_1 \\ I & & \vdots \\ & & a_n \\ 0 & \dots 0 & 1 \end{bmatrix};$$

она может быть записана в более краткой форме:

$$\begin{bmatrix} I & \mathbf{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Легко показать, что если $\mathbf{x} = (\mathbf{r},\ 1)$, то

$$\widetilde{T}[\mathbf{x}] = \left(Q^n\right)^{-1} \circ T \circ Q^n [\mathbf{x}] = \left(Q^n\right)^{-1} \circ T\mathbf{r} =$$

$$= \left(Q^n\right)^{-1} (\mathbf{r} + \mathbf{a}) = [(\mathbf{r} + \mathbf{a},\ 1)] = \left[\begin{bmatrix} I & \mathbf{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ 1 \end{bmatrix}\right].$$

Пример 3. Аналогичными вычислениями можно показать, что преобразование $(W,\ \mathbf{a}) \in E(2)$ можно выполнить, используя

$$\begin{bmatrix} W & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in GL(3, \mathbf{R}), \quad \text{где} \quad W \in SO(2) \ \text{и} \ a \in \mathbf{R}^2,$$

а преобразование $(W,\ \mathbf{a}) \in E(3)$ можно выполнить, используя

$$\begin{bmatrix} W & \mathbf{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in GL(4, \mathbf{R}), \quad \text{где} \quad W \in SO(3) \quad \text{и} \quad \mathbf{a} \in \mathbf{R}^3.$$

Обратные матрицы имеют вид

$$\begin{bmatrix} W & \mathbf{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} W^T & -W^T\mathbf{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

как в $E(2)$, так и в $E(3)$.

Пример 4. Проекция $P_2\colon\ \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, определяемая соотношением

$$P_2(x, y, z) = \frac{1}{1 - z/z_n}(x, y, 0),$$

может быть выполнена в $\mathscr{M}(4, \mathbf{R})$ как

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/z_p & 1 \end{bmatrix},$$

так как если $\mathbf{x} = (\mathbf{r},\ 1) \in R^4$ и $\mathbf{r} = (x,\ y,\ z)$, то

$$\tilde{P}_2[\mathbf{x}] = (Q^n)^{-1}\circ P_2\circ Q^n[(\mathbf{r}, 1)] = (Q^n)^{-1}\circ P_2\mathbf{r} =$$

$$= (Q^n)^{-1}\left(\frac{x}{1-z/z_p}, \frac{y}{1-z/z_p}, 0\right) = \left[\left(\frac{x}{1-z/z_p}, \frac{y}{1-z/z_p}, 0, 1\right)\right] =$$

$$= [(x, y, 0, 1-z/z_p)] = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/z_p & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}\right].$$

Упражнения.

1. Показать, что группы

$$(T(2), \circ) \quad \text{и} \quad (\mathrm{R}^2, +)$$

изоморфны.

2. Доказать, что если

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

то матрица поворота $W(\theta) \in SO(2)$ может быть записана в экспоненциальной форме $W(\theta) = \exp(\theta J)$.

3. Определить евклидово преобразование, отображающее треугольник *PQR,* изображенный на рис. 16, *а,* в треугольник *P'Q'R',* изображенный на рис. 16, б.

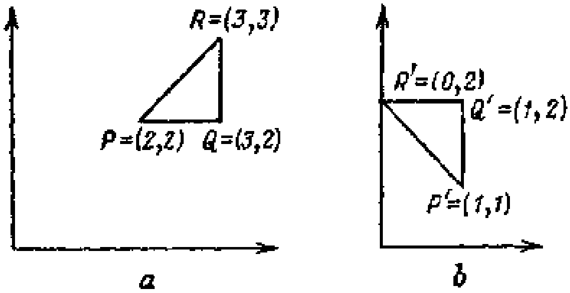


Рис. 16

4. Доказать, что *S*(2)— коммутативная подгруппа линейных преобразований $\mathbf{R}^2$.

5. Показать, что в общем случае элементы *S*(2) не коммутируют с элементами *SO*(2), и построить рисунок, демонстрирующий это.

6. Доказать, что единица нетривиальной подгруппы *S*(2) не коммутирует с *SO*(2).

7. Используя преобразование $S(x, y) = (3x, 5y)$, изменить масштаб $\mathbf{R}^2$ так, чтобы точка (2, 2) оставалась фиксированной. Определить это преобразование.

8. Показать, что если $\hat{\mathbf{n}} \in \mathbf{R}^2$— единичный вектор, то
$\mathbf{n} \times ((\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{n}}) = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}$ для всех $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^3$.
9. Пусть $\mathbf{n} \in \mathbf{R}^3$ и $A_\mathbf{n}\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ определено соотношением $A_\mathbf{n}\mathbf{r} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}$ для всех $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^3$. Показать, что A_n — линейное преобразование $\mathbf{R}^3$, и определить матрицу A_n — в стандартном базисе $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.
10. Используя результаты п. 9 этого упражнения и выражение $W_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta)$ через $A_{\hat{\mathbf{n}}}$, получить в явном виде матричную форму поворота $W_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta)$ в R^3. Показать, что

$$\det W_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta) = 1.$$

11. В обозначениях п. 9 показать, что для всех $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^3$ имеем

$$A_{\hat{\mathbf{n}}}^3\mathbf{r} = -A_{\hat{\mathbf{n}}}\mathbf{r}, \quad A_{\hat{\mathbf{n}}}^4\mathbf{r} = -A_{\hat{\mathbf{n}}}^2\mathbf{r},$$

$$A_{\hat{\mathbf{n}}}^5\mathbf{r} = A_{\hat{\mathbf{n}}}\mathbf{r}, \quad A_{\hat{\mathbf{n}}}^6\mathbf{r} = A_{\hat{\mathbf{n}}}^2\mathbf{r},$$

$$A_{\hat{\mathbf{n}}}^{6+k}\mathbf{r} = A_{\hat{\mathbf{n}}}^{2+k}\mathbf{r}$$

для всех $k \in \mathbf{N}$; использовать эти результаты для доказательства равенства

$$W_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta) = \exp\left(\theta A_{\hat{\mathbf{n}}}\right).$$

12. а) Используя экспоненциальную форму $W_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta)$, получить другое доказательство того, что

$$W_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta)\left(W_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta)\right)^T = 1.$$

б) Если $A \in \mathscr{M}(n, \mathbf{R})$, то можно показать, что

$$\det(\exp A) = \exp\left\{\sum_{i=0}^{n} A_{ii}\right\};$$

используя этот факт, получить другое доказательство соотношения

$$\det W_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta) = 1.$$

13. Доказать, что $\hat{\mathbf{n}}$ является собственным вектором $W_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta)$ при любом θ, $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Чему равно собственное значение? Дать геометрическую интерпретацию этому результату.
14. Вывести формулу для матриц поворота

$$W_{\hat{\mathbf{i}}}(\varphi), \quad W_{\hat{\mathbf{j}}}(\chi).$$

15. Показать, что все подгруппы $S_{\hat{\mathbf{n}}} = \{W_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta)\colon 0 \leqslant \theta < 2\pi\}$ изоморфны $SO(2)$.
16. Пусть $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^2$— фиксированный вектор и преобразование $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ определено как

$$T\mathbf{r} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{r}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}} & \text{при} \quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{r} \neq 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

а) Доказать, чго T — нелинейная проекция в $\mathbf{R}^3$.
б) Доказать, чго

$$T[(\mathbf{r},\ 1)] = [(\mathbf{r},\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{r})]$$

для всех $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^3$ при $\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} \neq 0$.
в) Определить матрицу $A \in \mathscr{M}(4,\ \mathbf{R})$ такую, что

$$T[\mathbf{x}] = [A\mathbf{x}] \text{ для всех } \mathbf{x} \in \mathbf{R}^4, \text{ где } [\mathbf{x}] \in \mathbf{H}^3.$$

1.5.4. Кривые и поверхности

1. Математическое представление. Кривые и поверхности образуют основу большинства вспомогательных устройств компьютера и графического математического обеспечения. Возможны различные математические описания одной и той же геометрической формы; некоторые из них обсуждались и доступны с точки зрения приложений.

Если $I \subset \mathbf{R}$— интервал, то через $\varkappa^n$ обозначим множество всех отображений класса C^1:

$$c\colon\ I \to \mathbf{R}^n,$$

причем $c' \neq 0$ на I. На $\varkappa^n$ определим отношение ~ следующим образом. Пусть

$$c_1\colon\ I_1 \to \mathbf{R}^n, \quad c_2\colon\ I_2 \to \mathbf{R}^4;$$

тогда $c_1 \sim c_2$, если существует отображение $\varphi\colon\ I_1 \to I_2$ из класса C^1 такое, что $c_1 = c_2 \circ \varphi$ и $\varphi' \neq 0$ на I_1.

Предложение. *Отношение ~ является отношением эквивалентности на* $\varkappa^n$.

Доказательство оставляем в качестве упражнения.

Пусть $\mathscr{C}^n$ обозначает классы эквивалентности $\varkappa^n/\sim$.

Определение. *Кривой* в $\mathbf{R}^n$ называется элемент $\mathscr{C}^n$.

Если $c \in \varkappa^n$ и $c\colon\ I \to \mathbf{R}^n$, то I называют *параметрическим пространством c,* а t — параметром или координатой c. График c (graph c) определяют как множество точек

$$\{c(t)\colon\ t \in I\}.$$

Если [c] обозначает класс эквивалентности c в $\mathscr{C}^n$, то для всех $c_1 \in [c]$ имеем

$$\operatorname{graph} c_1 = \operatorname{graph} c,$$

так что разумнее говорить о графике кривой [c]. Обратное неверно; мы можем иметь соотношение graph $[c_1]$ = graph $[c_2]$, но при этом $[c_1] \neq [c_2]$. Отношение эквивалентности ~ группирует вместе элементы $\varkappa^n$, которые параметризуются «аналогичным» образом.

Для вычислительных целей выберем элемент $c \in [c]$ и назовем кривую также c, хотя с точки зрения терминологии это неправильно. Это возможно при условии, что мы понимаем разницу и проявляем осторожность, когда это необходимо. График кривой в $\mathscr{C}^2$ является множеством точек, которые мы видим отображенными на графическом терминале. Тогда $\mathscr{C}^2$ — множество плоских кривых, а элементы $\mathscr{C}^3$ — множество пространственных кривых. $\mathscr{C}^2$ и $\mathscr{C}^3$ важны для приложений, однако, где легко провести рассуждения в более общем случае, будем это делать.

В литературе по компьютерной графике употребляют термины «параметрический», «явный», «неявный» по отношению к различным методам определения кривых. Если $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$— система координат в $\mathbf{R}^n$ и элемент $c \in \varkappa^n$ определен при помощи n функций $t \to \xi_i(t)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, то такое задание кривой называют *явным параметрическим описанием.* Иногда выделяют два типа— «симметричный» и «несимметричный». Описание несимметрично, если параметр является одной из координат, т. е. $t = \xi_i$ для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Следовательно, несимметричные описания имеют вид

$$(\xi_i, (\xi_1(\xi_i), \xi_2(\xi_i), \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_n(\xi_i))), \xi_i \in I;$$

в случае $\mathscr{C}^2$ и декартовых координат эта запись имеет знакомый вид

$$(x, (x, y(x))), \quad x \in [x_0, x_1],$$

и кривую определяют, задавая явно y как функцию от x. С другой стороны, мы можем описать кривую в $\mathbf{R}^n$, определяя подходящую функцию f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Для фиксированного $a \in \mathbf{R}$ функция f определяет кривую с графиком

$$f^{-1}(a) = \{(\xi_1, \ldots, \xi_n): f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = a\};$$

называют *уравнением* кривой (строго говоря, $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ следовало бы назвать графиком кривой). В принципе уравнению такого типа можно придать явную форму, хотя в общем случае это сделать достаточно сложно. Говорят, что кривые, определяемые такими уравнениями, описаны *неявно.*

Заметим, что не все отображения $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ будут задавать кривые описанным выше способом. Например, постоянное отображение задает все $\mathbf{R}^n$. Далее функция $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ может для одних значений постоянной a задавать кривую, а для других — нет, как мы это увидим ниже.

Плоская кривая, заданная неявно уравнением вида

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0,$$

называется *квадратичной* кривой *(кривой второго порядка)* .

Пусть $c_1\colon [a,\ b] \to \mathbf{R}^n$ и $c_2\colon [c,\ d] \to \mathbf{R}^n$, где $a<b=c<d$ и $c_1(b) = c_1(b)$. Тогда $c_1 \vee c_2$ определяют следующим образом:

$$c_1 \vee c_2 = \begin{cases} c_1 & \text{на} \quad [a, b], \\ c_2 & \text{на} \quad [c, d] \end{cases}$$

и называют *объединением* функций c_1 и c_2. Для симметричных описаний, если $c \neq b$, c_2 может быть параметризовано таким образом, чтобы это условие выполнялось. Это означает, что мы можем построить $c_2^* \in [c_2]$ такое, что интервал для c_2 начинается с b. Следовательно, при условии $c_1(b) = c_2(b)$ объединение $c_1 \vee c_2$ имеет смысл, но может не быть, строго говоря, кривой. Проблема состоит в том, что $c_1 \vee c_2$ может не принадлежать C^1.

Пример 1. Прямолинейная кривая (прямая) может быть определена в $\mathbf{R}^2$ обычным образом как

$$y(x) = mx + c,$$
$$x_0 \leqslant x \leqslant x_1,$$

где m — наклон прямой,
а c — точка пересечения с осью Oy (рис. 1).

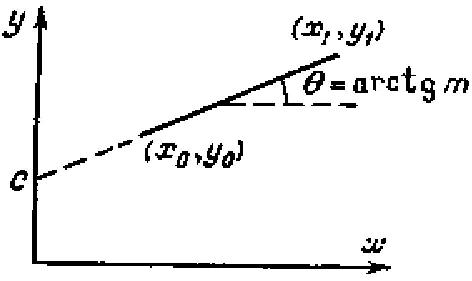


Рис. 1

В наших обозначениях это будет

$$(x,\ (x,\ mx + c)),\quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1;$$

m и *c* могут быть заданы непосредственно, однако более естественно использовать концы $r_0=(x_0,\ y_0)$ и $r_1=(x_1,\ y_1)$, откуда получаем

$$m=(y_1-y_0)/(x_1-x_0),\quad c=y_1-mx_1.$$

Проблема, возникающая в несимметричных описаниях, теперь очевидна. Эта форма не описывает вертикальную линию (когда $x_0=x_1$). ЕСЛИ вместо этого воспользоваться неявной формой

$$(y-y_0)(x_1-x_0)-(y_1-y_0)(x-x_0)=0,\quad x_0\leqslant x\leqslant x_1,$$

то при $x_1=x_0$ получим уравнение вертикальной линии $x=x_0$. Неявное уравнение прямой линии в общем случае имеет вид

$$ax+by+c=0,$$

и вертикальные линии описываются этим уравнением при $b=0$.
Обычное симметричное описание может быть записано в векторной форме:

$$(t,\ \mathbf{r}_0+t\widehat{\mathbf{u}}),\quad t\in[0,\ \|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0\|],$$

где $\widehat{\mathbf{u}}$ — единичный вектор, $\widehat{\mathbf{u}}=(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)/\|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0\|$.
Рассмотренные выше примеры приводят к общим наблюдениям о природе кривых, определенных несимметричным способом. Перед тем как обсуждать это, дадим несколько необходимых определений.

Определение. Говорят, что плоская кривая $(u,\ (x(u),\ y(u))),\ u\in I=[u_A,\ u_B]$ является:

— *однозначной,* если для всех $u_1,\ u_2\in I$ имеем

$$x(u_1)=x(u_2)\Rightarrow y(u_1)=y(u_2);$$

— *многозначной,* если предыдущее условие не выполнено;

— *замкнутой,* если $(x(u_A),\ y(u_A))=(x(u_B),\ y(u_B))$.

На рис. 2 проиллюстрированы все три случая.

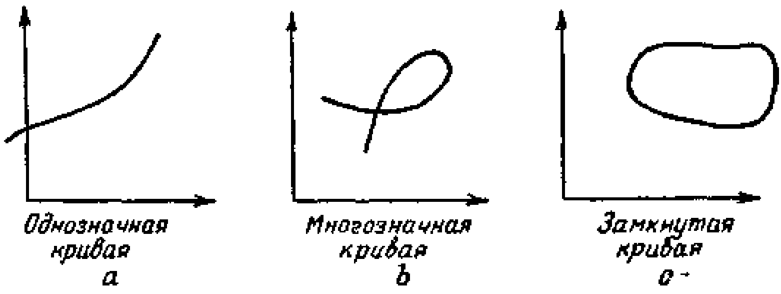


Рис. 2

Очевидно, что замкнутая кривая является многозначной. Несимметричное описание $(x,\ (x,\ y(x))),\quad x_0\leqslant x\leqslant x_1$ может определять только *однозначную* кривую. Это потому, что *y* является функцией от *x* и, следовательно,

$$x_1 = x_2 \Rightarrow y(x_1) = y(x_2).$$

Вертикальная линия является многозначной кривой.

Многие приложения в компьютерной графике требуют, чтобы замкнутые и многозначные кривые были включены в описания Единственный путь достижения этого — объединять кривые, как это описывалось ранее. При использовании несимметричных форм это не очень удобно и редко применяется на практике. Симметричные описания не имеют этого ограничения и, следовательно, являются более удобными для таких приложений. Несимметричные формы обычно используют, когда требуется однозначная кривая.

Пример 2. Окружность является примером замкнутой кривой. Рассмотрим окружность в $\mathbf{R}^2$ радиуса *a* с центром в начале координат (рис. 3).

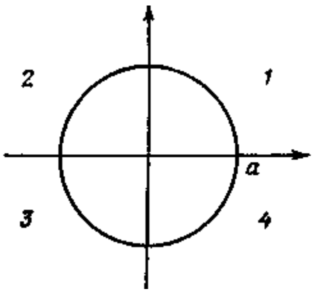


Рис. 3

Чтобы записать окружность в несимметричной форме, необ ходимы две кривые: $y_1(x) = (a^2 - x^2)^{1/2}$, $-a \leqslant x \leqslant a$ в квадрантах 1 и 2 и $y_2(x) = -(a^2 - x^2)^{1/2}$, $-a \leqslant x \leqslant a$ в квадрантах 3 и 4. Уравнение окружности и неявной форме имеет вид

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

или же в векторных обозначениях,

$$\|\mathbf{r}\| - a = 0.$$

Это уравнение описывает всю окружность; оно может быть записано в симметричной параметрической форме

$$(\theta,\ a(\cos\theta,\ \sin\theta)),\quad \theta \in [0,\ 2\pi[,$$

$$\left(t, a\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\right), \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Возможно бесконечное число других симметричных форм, выбор которых зависит от приложений. Для выполнения рисунков более предпочтительной является параметризация с относительно постоянным изменением **r**(*t*). Математически это означает, что величина $\|\mathbf{r}'(t)\|$ приблизительно постоянна на *I*. Несимметричное представление в большинстве случаев является неудобным, так как требуется проверка, на какой ветви кривой мы сейчас находимся.

Примерами кривых второго порядка являются эллипс, гипербола и парабола.

Если *G* — группа преобразований $\mathbf{R}^n$, тогда *G* преобразует $\mathscr{C}^n$ естественнымобразом. Если $c \in \mathscr{C}^n$ — кривая

$$c = (t, \mathbf{r}(t)), \qquad t \in I,$$

и $g \in G$, то определим кривую *gc* следующим образом:

$$gc = (t, g\mathbf{r}(t)), \qquad t \in I.$$

Например, когда *G* = *SO(2)* и $c \in \mathscr{C}^2$, то график *W*(θ)*c* является графиком *c*, повернутым на угол θ (рис. 4).

Рис.

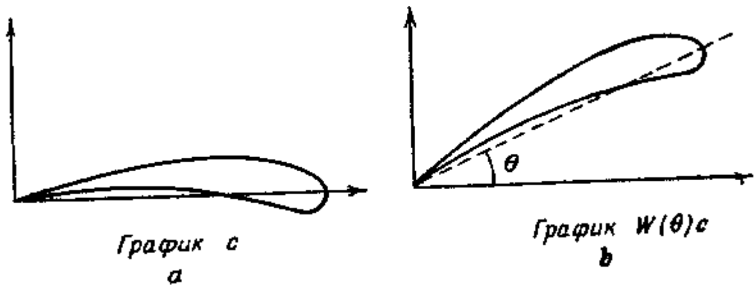


Рис. 4

Уравнения обычно описывают кривые в «стандартном» положении, когда ось *OX* является осью симметрии. Чтобы получить уравнение геометрически эквивалентной кривой в некотором другом положении и ориентации в пространстве, надо просто применить подходящий элемент группы *E(2)* к уравнению. В качестве примера выведем уравнение эллипса с графиком ε, изображенным на рис. 5.

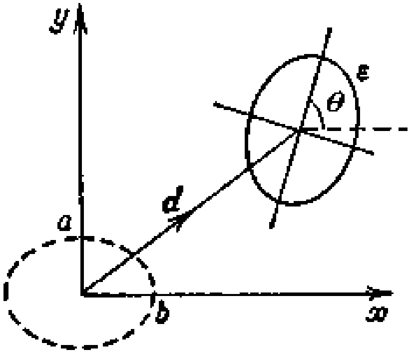


Рис. 5

В стандартном положении (изображенном штриховой кривой на рисунке) кривая записывается в виде

$$c=(\varphi,\ (a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)),\quad \varphi\in[0,\ 2\pi[;$$

следовательно, кривая с графиком ε имеет вид

$$(W(\theta),\ \mathbf{d})c=(\varphi,\ (W(\theta),\ \mathbf{d})\,(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi))=$$
$$=(\varphi,\ (a\cos\varphi\cos\theta-b\sin\varphi\sin\theta+d_1,\ a\cos\varphi\sin\theta+$$
$$+b\sin\varphi\cos\theta+d_2)),\ \varphi\in[0,\ 2\pi[.$$

Неявные уравнения для кривых в нестандартном положении могут быть получены аналогично.

Перед тем как перейти к другой теме, упомянем один факт, проверка которого осуществляется довольно легко, когда кривые заданы неявными уравнениями. Пусть $f(x,y)=0$ — уравнение плоской кривой, которая делит плоскость $\mathbf{R}^2$ на три части, тогда, если *(x', y')*— произвольная точка пространства, то знак $f(x',\ y')$ определяет область, в которой лежит *(x', y')*. Например, возьмем уравнение окружности

$$f(x,\ y)=x^2+y^2-a^2=0;$$

тогда

$f(x',\ y')>0\Rightarrow(x',\ y')$ лежит за пределами круга, $f(x',\ y')=0\Rightarrow(x',\ y')$ лежит на окружности, $f(x',\ y')<0\Rightarrow(x',\ y')$ лежит внутри круга.

Проверки такого типа используют в трехмерных случаях в алгоритмах удаления невидимых линий с изображений.

Исследование поверхностей может быть проведено по аналогии с исследованием кривых. Методы представления имеют те же самые преимущества и недостатки.

Поверхности двумерны и имеют пространство параметров вида $I_1 \times I_2$, где $I_1,\ I_2 \subseteq \mathbf{R}$ — интервалы. Параметрическое представление в общем случае имеет вид

$$((u,\ v),\ r(u,\ v)),\quad (u,\ v) \in I_1 \times I_2.$$

Неявное уравнение поверхности записывается в виде $f(x,\ y,\ z) = 0$, а поверхностью второго порядка является поверхность, определяемая уравнением

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0,$$

где $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h,\ i,\ j \in \mathbf{R}$.

Пример 3. Пусть $D = \{\mathbf{r}_i\colon\ \mathbf{r}_i \in \mathbf{R}^3,\ 0 \leqslant i \leqslant 2\}$ — множество линейно независимых векторов. Тогда

$$\mathbf{r}(u,\ v) = \mathbf{r}_0 + u(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) + v(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0),\ (u,\ v) \in \mathbf{R}^2,$$

есть симметричное описание плоскости *P*, проходящей через точки *D* (рис. 6).

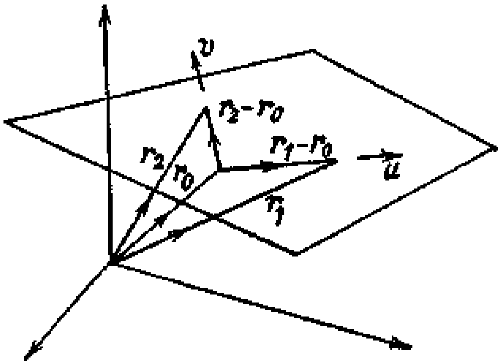


Рис. 6

Если $\mathbf{q} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$, тогда $\widehat{\mathbf{n}} = \mathbf{q}/\|\mathbf{q}\|$ — единичпый вектор, ортогональный *P* (называемый *нормалью)*. Таким образом, $\mathbf{r} \in P$ тогда и только тогда, когда $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \widehat{\mathbf{n}} = 0$, или

$$(x - x_0)n_1 + (y - y_0)n_2 + (z - z_0)n_3 = 0.$$

Это является неявным представлением *P*.

Пример 4. Пусть *S* — сфера в $\mathbf{R}^3$ радиуса *a* с центром в начале координат. Очевидно, что $\mathbf{r} \in S$ тогда и только тогда, когда $\|\mathbf{r}\| = a$, или же

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0.$$

Сферические координаты дают симметричное представление

$$((0, \varphi), a(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)),$$
$$(\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times]0, 2\pi[. \; /\!/$$

Пример 5. Пусть *C* — цилиндр радиуса *a* с осью симметрии *OZ*. В этом случае $(x, y, z) \in C$ тогда и только тогда, когда

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Используя цилиндрические координаты, получаем симметричную форму

$$((\varphi, z), (a\cos\varphi, a\sin\varphi, z)).$$

Обычно рассматривают «конечный» цилиндр (рис. 7).

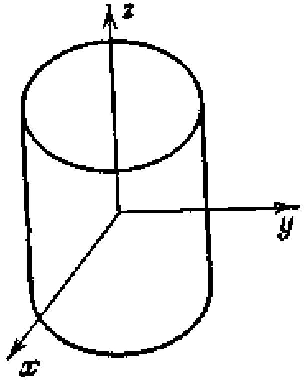


Рис. 7

Для него уравнение будет иметь вид

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0, \quad z_0 \leqslant z \leqslant z_1.$$

Относительно уравнений поверхностей, находящихся в нестандартном положении, можно сделать те же замечания, что и для случая кривых; надо лишь *E(2)* заменить на *E(3)*.

2. Геометрия плоских кривых. Целью данного раздела является определение понятий длины, касательной и кривизны плоских кривых. На рис. 8 изображена плоская кривая

$$c = (t, \mathbf{r}(t)), \; t \in [t_A, t_B].$$

P — произвольная точка на *c,* являющаяся концом вектора $\mathbf{r}(t)$, а *P'*— конец вектора $\mathbf{r}(t + \delta t)$, $\delta t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

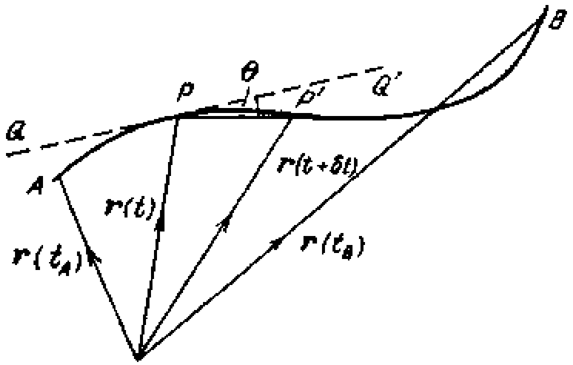


Рис. 8

Пусть $\delta\mathbf{r}(t)$ обозначает вектор $\overrightarrow{PP'}$. Тогда, очевидно,

$$\delta\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}(t+\delta t)-\mathbf{r}(t),$$

$$\|\delta\mathbf{r}(t)\|=\left\|\frac{\mathbf{r}(t+\delta t)-\mathbf{r}(t)}{\delta t}\right\|\delta t$$

есть длина отрезка *PP'*.

Если разбить интервал $[t_A,\ t_B]$ на много маленьких интервалов равной длины $[t_{i-1},\ t_i]$, $t_A=t_0<t_1<\ldots<t_n=t_B$, то можно образовать сумму

$$S_{AB}=\sum_{i=1}^{n}\|\delta\mathbf{r}_i\|,$$

где $\delta\mathbf{r}_i=\mathbf{r}(t_i)-\mathbf{r}(t_{i-1})$, которая равна длине ломаной линии вдоль *c*. Интуитивно ясно, что мы получаем аппроксимацию кривой S_{AB} между $\mathbf{r}(t_A)$ и $\mathbf{r}(t_B)$. Приближение будет тем лучше, чем больше число разбиений отрезка $[t_A,\ t_B]$. Эти интуитивные понятия приводят нас к определению *длины кривой* S_{AB}.

$$S_{AB}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\|\delta\mathbf{r}_i\|.$$

С вычислительной точки зрения эта формула трудна для использования. Поэтому мы перепишем ее в более удобном виде:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\|\delta\mathbf{r}_i\|=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\|\mathbf{r}(t_i)-\mathbf{r}(t_{i-1})\|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\mathbf{r}(t_{i-1}+\delta t)-\mathbf{r}(t_{i-1})}{\delta t}\right\|\delta t,$$

где $\delta t = (t_B - t_A)/n.$ Но это по определению интеграл

$$\int_{t_A}^{t_B} \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| dt;$$

следовательно,

$$S_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| dt.$$

Если $\mathbf{r}(t) = (x(t),\ y(t)),$ то формула принимает вид

$$S_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt.$$

Интуитивно ясно, что линия наклона (на рис. 8 это *QQ')* к кривой *c* является прямой, касающейся этой кривой и имеющей тот же самый наклон, что и *c*, в точке *P*. Пусть θ — это угол между отрезком *PP'* и касательной *QQ'*. Тогда при $\delta t \to 0$ следует ожидать, что $\theta \to 0.$ Это означает, что направление $\delta\mathbf{r}(t)$ или же $\delta\mathbf{r}(t)/\delta t$ стремится к направлению *QQ'* при $\delta t \to 0.$ Другими словами, вектор

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t}$$

параллелен *QQ'*. Если

$$s = \int_{t_A}^{t} \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| dt,$$

тогда в принципе все кривые могут быть выражены в терминах параметра *длины дуги* $(s,\ \mathbf{r}(s)),\ s \in [0,\ S_{AB}].$ Из определения длины дуги получаем

$$s = \int_{0}^{s} \left\| \frac{d\mathbf{r}}{ds'} \right\| ds';$$

дифференцируя обе части по *s*, имеем

$$1 = \left\| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right\|$$

Другими словами, $d\mathbf{r}/ds$ — единичный вектор, параллельный касательной линии к **r***(s)*. Это вызывает следующее определение.

Определение. Пусть $(s,\ \mathbf{r}(s)),\ s \in [0,\ S_{AB}]$, — кривая с длиной дуги в качестве параметра. Определим *единичный вектор касательной* $\widehat{\mathbf{T}}(s)$ к кривой в точке s как

$$\widehat{\mathbf{T}}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}(s),$$

а *нормальный вектор* $\widehat{\mathbf{N}}(s)$ к кривой как

$$\widehat{\mathbf{N}}(s) = W(\pi/2)\widehat{T}(s).$$

Базис $(\widehat{T},\ \widehat{N})$ образует правостороннюю систему координат в $\mathbf{R}^2$. Если кривая не параметризуется в терминах длины дуги, то выражение для $\widehat{\mathbf{T}}$ (см. упражнение 2) будет иметь вид

$$\widehat{\mathbf{T}}(u) = \begin{cases} \dfrac{d\mathbf{r}}{du}\Big/\left\|\dfrac{d\mathbf{r}}{du}\right\|, & \text{если } \dfrac{ds}{du} > 0, \\ -\dfrac{d\mathbf{r}}{du}\Big/\left\|\dfrac{d\mathbf{r}}{du}\right\|, & \text{если } \dfrac{ds}{du} < 0. \end{cases}$$

Эти формулы неявно предполагают условия на s. В действительности знак $\widehat{\mathbf{T}}$ не образует класса эквивалентности, инвариантного на $\mathscr{C}^2$, а является функцией выбранного параметрического представления. Даже если параметризация осуществлена с помощью параметра — длины дуги, она зависит от того, с какого копца мы начинаем измерять s. Касательное пространство к точке кривой является классом, инвариантным на $\mathscr{C}^2$, где касательное пространство к $[c]$ в точке P имеет вид $\{\alpha\widehat{\mathbf{T}}:\ \alpha \in \mathbf{R}$, где $\widehat{\mathbf{T}}$— касательный вектор в P для некоторого $c \in [c]\}$.

Известно, что $d\widehat{\mathbf{T}}/ds$ ортогонален к $\widehat{\mathbf{T}}$; следовательно, существует функция $\varkappa:\ [0,\ S_{AB}] \to \mathbf{R}$ такая, что $\dfrac{d\widehat{\mathbf{T}}(s)}{ds} = \varkappa(s)\widehat{N}(s)$; $\varkappa(s)$ называют *кривизной* кривой $\mathbf{r}(s)$, а $1/\varkappa(s)$ — *радиусом кривизны* $\mathbf{r}(s)$.

Упражнения.

1. Получить в $\mathbf{R}^2$ явное уравнение прямой, проходящей через точки (— 1, 3) и (2, —1). Определить единичный вектор, параллельный этой прямой, и написать уравнение в параметрической векторной форме.

2. Определить касательный и нормальный векторы $\widehat{\mathbf{T}}$ и $\widehat{\mathbf{N}}$ и кривизну $\varkappa$ следующих плоских кривых:

а) окружности — $(\theta,\ \ a(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})),\ \ 0 \leqslant \theta < 2\pi$;

б) эллипса — $(\varphi,\ (a\cos\varphi\,\widehat{i}+b\sin\varphi\,\widehat{j})),\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi;$

в) параболы — $(t,\ (at^2\widehat{i}+2at\widehat{j})),\quad -\infty<t<\infty,$ где
$a>0$ и $b>0$ действительные.

3. Плоская кривая определена формулой

$$(u,\ (a\cos u\widehat{i}+b(1-e^{-u/2})\widehat{j})),\quad 0\leqslant u<\infty,$$

где $a>0$ и $b>0$ действительные.

а) Показать, что касательный вектор к кривой задается формулой

$$\widehat{\mathbf{T}}(u)=\frac{-2a\sin u\,\widehat{i}+be^{-u/2}\widehat{j}}{(4a^2\sin^2 u+b^2e^{-u})^{1/2}}.$$

б) Начертить кривую в интервале $0\leqslant u\leqslant 2\pi.$

в) Найти нормаль к кривой.

4. Начертить кривую $(u,\ (a\cos u,\ b\sin u,\ bu)),$
$-\infty<u<\infty,$ и найти выражение для касательного вектора $\widehat{\mathbf{T}}(u).$

5. Пусть $(x,\ (x,\ y(x))),\ x_0\leqslant x\leqslant x_1,$ описывает плоскую кривую Показать, что касательный вектор $\widehat{\mathbf{T}}(x)$ может быть записан как

$$\widehat{\mathbf{T}}(x)=\frac{(1,\ dy/dx)}{(1+(dy/dx)^2)^{1/2}},$$

и, следовательно, кривизна $\varkappa(x)$ в точке x имеет вид

$$\varkappa(x)=\frac{d^2y/dx^2}{(1+(dy/dx)^2)^{3/2}}.$$

6. Получить формулы, аналогичные полученным в п. 5, для симметричного представления $(u,\ (x(u),\ y(u))),\ u_0\leqslant u\leqslant u_1.$

7. Найти симметричное параметрическое уравнение плоскости *P,* проходящей через точки (0, 1, 0), (3, —2, 0) и (1, 3, 4) в $\mathbf{R}^3$. Показать, что нормальный вектор будет параллелен (—4, —4, 3), и использовать этот факт для вывода неявного уравнения для *P.*

8. *Поверхностью вращения* называется поверхность, являющаяся результатом вращения плоской кривой вокруг некоторой фиксированной оси в $\mathbf{R}^3$.

а) Показать, что если плоская кривая

$$(u,\ (p(u)\widehat{\mathbf{i}}+q(u)\widehat{\mathbf{k}})),\quad u_A\leqslant u\leqslant u_B$$

делает поворот на угол 2π вокруг оси *OZ,* то соответствующая поверхность вращения описывается уравнением

$$((u,\ \varphi),\ (p(u)\cos\varphi\widehat{\mathbf{i}}+p(u)\sin\varphi\widehat{\mathbf{j}}+q(u)\widehat{\mathbf{k}})),$$

где $u_A\leqslant u\leqslant u_B,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.$

б) Использовать результаты задачи 8, а) для получения симметричных параметрических представлений следующих поверхностей:
— цилиндра; — конуса; — тора.

9. Цилиндр C_1 длины $2l$ определяется уравненном $x^2+z^2=b^2,\ -l\leqslant y\leqslant l,$ и пересекается с цилиндром C_2 длины h, который определяется уравнением $y^2+(z-\alpha)^2=a^2,\ 0\leqslant x\leqslant h,$ где $0<\alpha<b,\ h>b.$ Используя параметрические координаты

$$\{(x,\theta):\ 0\leqslant x\leqslant h,\ 0\leqslant\theta<2\pi\}\ \text{на}\ C_2,$$

показать, что кривая, являющаяся пересечением C_1 и C_2, может быть записана как $(0,\ \mathbf{r}(\theta)),\ 0\leqslant\theta<2\pi,$ где

$$\mathbf{r}(\theta)=((b^2-(\alpha+a\sin\theta)^2)^{1/2},\ a\cos\theta,\ \alpha+a\sin\theta).$$

Показать также, что единичный касательный вектор к кривой в точке $\theta=0$ задается формулой

$$\frac{1}{ab}\left(-a\alpha,0,a(b^2-\alpha^2)^{1/2}\right).$$

1.6. Логика

1. Чем занимается математическая логика? Логика как искусство рассуждений зародилась в глубокой древности. Начало науки о законах и формах мышления связывают с именем Аристотеля. Прошло два тысячелетия, прежде чем Лейбниц предложил ввести в логику математическую символику и использовать ее для общих логических построений. Эту идею последовательно реализовал в прошлом столетии Джордж Буль и тем самым заложил основы *математической (символической) логики.*

Главная цель применения в логике математической символики заключалась в том, чтобы свести операции с логическими заключениями к формальным действиям над символами. При этом исходные положения записываются формулами, которые преобразуются по определенным законам, а полученные результаты истолковываются в соответствующих понятиях.

Бурное развитие математической логики связано, прежде всего, с задачами обоснования математики, где она используется для доказательства непротиворечивости исходных понятий и правильности рассуждений и выводов математических теорий. Некоторые ученые даже склонны рассматривать логику как одну из наиболее общих наук, частью которой является сама математика.

Логика нашла широкое применение в технике при исследовании и разработке релейно-контактных схем, вычислительных машин, дискретных автоматов. Ее методы используются в теории преобразования и передачи информации, теории вероятностей и комбинаторном анализе. Математическая логика внедрилась в такие нематематические области, как экономика, биология, медицина, психология, языкознание, право. Интенсивно развиваются специальные разделы математической логики, призванные обслуживать конкретные области науки и техники.

Столь энергичный выход математической логики за пределы математики объясняется тем, что ее аппарат легко распространяется на объекты самой общей природы, лишь бы только они характеризовались конечным числом состояний.

Двузначная логика имеет дело с такими объектами, которые принимают одно из двух возможных значений (истинное или ложное высказывание, высокое или низкое напряжение, наличие или отсутствие заданного признака у объекта и г. п.). Объекты, которые могут принимать значения из конечного множества, содержащего больше двух элементов, называют *многозначными.* Они либо сводятся каким-нибудь способом к двузначным объектам, либо обслуживаются аппаратом *многозначной логики.*

Устоявшееся представление о математической логике как науке, изучающей законы мышления с применением аппарата математики, главным образом, для нужд самой математики, в современных условиях становится слишком узким. С расширением областей применения и дальнейшим развитием математической логики изменяется и взгляд на нее. Объектами математической логики являются любые дискретные конечные системы, а ее главная задача — структурное моделирование таких систем.

2. Булевы функции. Объекты с двумя возможными состояниями характеризуются *булевыми переменными,* которые способны принимать лишь два различных значения. Для обозначения этих двух значений обычно используются цифры 0 и 1 или буквы Л (ложно) И (истинно).

Отношения между булевыми переменными представляются *булевыми функциями,* которые подобно числовым функциям могут зависеть от одной, двух и, вообще, n переменных (аргументов). Запись $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ означает , что y — функция аргументов $x_1, x_2, ..., x_n$. Важнейшая особенность булевых функций состоит в том, что они, как и их аргументы, принимают свои значения из двухэлементного множества {0,1}, или {И, Л}, т. е. характеризуются одним из двух возможных состояний.

Функции небольшого числа переменных можно задавать с помощью таблиц, подобных таблицам сложения и умножения одноразрядных чисел. Для этого нужно только указать значения функции для каждой комбинации значений ее аргументов. Основными в двузначной логике являются следующие три функции.

Отрицание — функция $y = f(x)$, принимающая значения 1, когда $x = 0$, и значение 0, когда $x = 1$; она обозначается $y = \overline{x}$ (читается «не x»).

Дизъюнкция — функция $y = f(x_1, x_2)$, принимающая значение 0 тогда и только тогда, когда оба аргумента имеют значение 0; она обозначается $y = x_1 \vee x_2$ (читается «x_1 или x_2»).

Конъюнкция — функция $y = f(x_1, x_2)$, принимающая значение 0 тогда и только тогда, когда оба аргумента имеют значение 1; она обозначается $y = x_1 \wedge x_2$ (читается «x_1 и x_2»).

Таблицы для этих функций имеют вид:

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

$x_1 \vee x_2$

x_1	x_2	
	0	1
0	0	1
1	1	1

$x_1 \wedge x_2$

x_1	x_2	
	0	1
0	0	0
1	0	1

3. Логические операции и формулы. Булевы функции можно рассматривать как *логические операции* над величинами, принимающими два значения — 0 и 1. Отрицание— это *одноместная* операция, а дизъюнкция и конъюнкция — *двухместные операции.* При Этом выражения $\overline{x}$, $x_1 \vee x_2$, $x_1 \wedge x_2$ являются *логическими формулами.*

Более сложные формулы получаются замещением входящих в них переменных другими логическими формулами, которые обычно заключаются в скобки. Например, положив $x_1 = \overline{a}$ и $x_2 = b \wedge c$ из $x_1 \vee x_2$, имеем $(\overline{a}) \vee (b \wedge c)$. Каждая формула определяет некоторую булеву функцию. Ее значение при различных значениях переменных определяется на основании таблиц функций, приведенных в (2). Так, при $a = 0$, $b=1$ и $c = 0$ имеем: $x_1 = \overline{a} = \overline{0} = 1$,

$x_2 = b \wedge c = 1 \wedge 0 = 0$ и $x_1 \vee x_2 = \overline{a} \vee (b \wedge c) = 1 \vee 0 = 1$.
Аналогично получаем значения функции и при других комбинациях значений аргументов.

Две функции (как и определяющие их формулы) считаются *равносильными* при любых значениях аргументов эти функции (формулы) принимают одинаковые значения. Равносильные функции соединяются знаком равенства, например: $\overline{(x \wedge y) \vee \bar{z}} =$

$= (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge z$ или $((x \vee \bar{x}) \wedge y) \vee (y \vee x) = x \vee y$.

Равносильность функций проверяется по таблицам основных операций, причем необходимо сравнить их значения для всех комбинаций значений переменных.

4. Булева алгебра. Множество всех булевых функций вместе с операциями отрицания, конъюнкции и дизъюнкции образует *булеву алгебру.*

На основе определения основных операций нетрудно убедиться в справедливости следующих тождеств (свойств) булевой алгебры:

коммутативность

$$x \vee y = y \vee x, \quad x \wedge y = y \wedge x;$$

ассоциативность

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z;$$

дистрибутивность

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z);$$

свойство констант

$$x \vee 0 = x, \quad x \wedge 1 = x;$$

свойство отрицания

$$x \vee \bar{x} = 1, \quad x \wedge \bar{x} = 0.$$

5. Тождественные преобразования. Приведенные свойства позволяют получить ряд других важных законов и тождеств уже без обращения к таблицам соответствия: $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$, $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$ *(законы де Моргана),* $x \vee (x \wedge y) = x \wedge (x \vee y) = x$ *(законы поглощения) x $\vee$ x= x $\wedge$ x = x)законы идемпотентности),* а также тождества

$$x \vee (\bar{x} \wedge y) = x \vee y; \ (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge \bar{z}); = (x \wedge$$
$$\wedge z) \vee (y \wedge \bar{z}); \quad \bar{\bar{x}} = x; \quad \bar{1} = 0; \quad \bar{0} = 1; \quad x \vee 1 = 1; \quad x \wedge 0 = 0$$

и т. д.

Так, законы идемпотентности доказываются следующими преобразованиями:

$$x \vee x = (x \vee x) \wedge 1 = (x \vee x) \wedge (x \vee \bar{x}) = x \vee (x \wedge$$
$$\wedge \bar{x}) = x \vee 0 = x; \quad x \wedge x = (x \wedge x) \vee 0 = (x \wedge x) \vee (x \wedge \bar{x}) = x \wedge$$
$$\wedge (x \vee x) = x \wedge 1 = x.$$

Используя

$$x \vee 1 = x \vee (x \vee \bar{x}) = (x \vee x) \vee \bar{x} = x \vee \bar{x} = 1; \quad x \wedge 0 = x \wedge (x \wedge$$

полученные соотношения, имеем: $\wedge\ \bar{x}) = x \wedge \bar{x} = 0.$
Доказательство законов поглощения имеет вид:

$x \vee (x \wedge y) = (x \wedge 1) \vee (x \wedge y) = x \wedge (1 \vee y) = x \wedge 1 = x$; $x \wedge (x \vee y) = (x \vee 0) \wedge (x \vee y) = x \vee (0 \wedge y) = x \vee (y \wedge 0) = x \vee 0 = x.$

Соотношение $\bar{\bar{x}} = x$ доказывается следующим образом: из $x \vee \bar{x} = 1$ по закону коммутативности следует $\bar{x} \vee x = 1$, откуда сравнением с $\bar{x} \vee \bar{\bar{x}} = 1$ имеем $x = \bar{\bar{x}}$.

Интересно доказательство закона де-Моргана. На основании свойств отрицания равенство функций $\overline{x \vee y}$ и $\bar{x} \wedge \bar{y}$ должно означать, что $(x \vee y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) = 1$ и $(x \vee y) \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y}) = 0$. Действительно,

$(x \vee y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) = ((x \vee y) \vee \bar{x}) \wedge ((x \vee y) \vee \bar{y}) = ((x \vee \bar{x}) \vee y)) \wedge (x \vee (y \vee \bar{y})) = (1 \vee y) \wedge (x \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1$, а также $(x \vee y) \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y}) = (x \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y})) \vee (y \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y})) = ((x \wedge \bar{x}) \wedge \bar{y}) \vee ((y \wedge \bar{y}) \wedge \bar{x}) = (0 \wedge \bar{y}) \vee (0 \wedge \bar{x}) = (\bar{y} \wedge 0) \vee (\bar{x} \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0.$

Следовательно, соотношение

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$$

доказано. Аналогично доказывается и второй закон.

6. Упрощение записи формул. Операции дизъюнкции и конъюнкции удовлетворяют законам коммутативности и ассоциативности. Поэтому если переменные или формулы связаны только посредством одной из этих операций, то их можно выполнять в любом порядке, а формулы записывать без скобок. Например: $((x_1 \vee x_2) \vee (x_3 \vee x_4)) \vee x_5 = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5$, а также $(x_1 \wedge x_2) \wedge (x_3 \wedge (x_4 \wedge x_5)) = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4 \wedge x_5.$

Если считать, что операция конъюнкции должна предшествовать операции дизъюнкции (конъюнкция связывает сильнее дизъюнкции), то можно опустить скобки, в которые заключены формулы со знаком конъюнкции. При наличии скобок в первую очередь должны выполняться операции внутри скобок, независимо от их старшинства. Обычно опускают также скобки, в которые заключены формулы со знаком отрицания.

Еще одно упрощение связано с символикой. Знак конъюнкции в формулах можно опустить и вместо $x \wedge y$ писать xy. Операцию конъюнкции часто называют *логическим умножением,* а операцию дизъюнкции — *логическим сложением.*

С учетом приведенных условий запись существенно упрощается. Например, формуле $(x \wedge (y \wedge \bar{z})) \vee ((\overline{x \vee y}) \wedge z)$ соответствует запись $xy\bar{z} \vee \overline{x \vee yz}$.

7. Переключательные схемы. В качестве одной из интерпретаций булевых функций рассмотрим электрическую схему, состоящую из источника напряжения (батареи), лампочки и одного или двух ключей (x_1 и x_2). Ключи управляются кнопками с двумя состояниями: кнопка нажата (1) и кнопка отпущена (0). Если в исходном состоянии ключ разомкнут, то при нажатии кнопки он замыкается.

Ключ может быть сконструирован и так, что в исходном состоянии он замкнут, тогда нажатие кнопки означает его размыкание, т. е. приводит к противоположному результату. Поэтому нормально замкнутые ключи обозначим через $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$.

При соответствующих состояниях кнопок лампочка принимает одно из двух состояний: горит (1) и не горит (0). Состояния кнопок отождествляются со значениями булевых переменных x_1 и x_2, а состояние лампочки — со значением функций этих переменных.

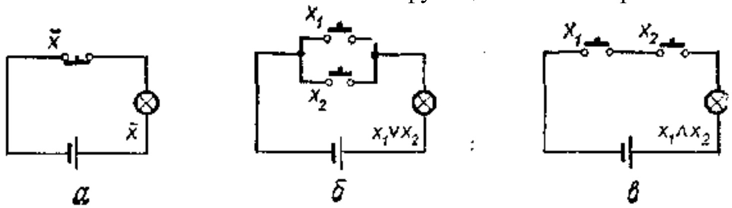


Рис. 1. Переключательные схемы, соответствующие операциям отрицания (а), дизъюнкции *(б)* и конъюнкции (в).

Операции отрицания соответствует схема с одним нормально замкнутым ключом (рис. 1, *а)*. Если кнопка нажата *(*$x = 1$), ключ разомкнут и лампочка не горит, т. е. $f(x)= 0$; при отпущенной кнопке *(*$x = 0$) ключ замкнут и лампочка горит, т. е. $f(x) = 1$. Операциям дизъюнкции и конъюнкции соответствуют схемы с двумя нормально разомкнутыми ключами (рис. 1, *б, в*). Легко убедиться, что в схеме рис. 1, *б* лампочка горит при нажатии хотя бы одной из кнопок, а в схеме рис. 1, *в* — только при нажатии обеих кнопок одновременно.

Любую сложную булеву функцию можно представить некоторой переключательной схемой. На рис. 2,*а* показана схема, реализующая функцию $y = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_3x_4$. Та же функция представляется равносильной формулой $y = x_1\bar{x}_2 \vee (\bar{x}_1x_2 \vee x_4)x_3$, которой соответствует другая более простая схема (рис. 2, *б)*. Следует иметь в виду, что ключи, обозначенные одинаковыми буквами *(x* или $\bar{x}$), связаны между собой и управляются общей кнопкой.

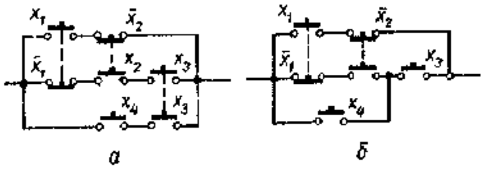


Рис. 2. Переключательная схема, реализующая логическую функцию *(а),* и упрощенная схема *(6).*

В реальных устройствах используются ключи различной конструкции и физической природы (механические, электромагнитные, электронные, гидравлические, пневматические в т. д.) Однако при реализации логических функций многие технические особенности не имеют значения. Существенными свойствами контактных схем являются исходные положения ключей (нормально разомкнуты или нормально замкнуты) и способ их соединения между собой и внешними устройствами. Эта информация полностью отображается графом, ребра которого соответствуют ключам, а вершины — точкам их соединения. Ребра нормально разомкнутых ключей обозначаются соответствующей переменной *(х),* а нормально замкнутых — отрицанием переменной ($\overline{x}_1$). Например, контактная схема (рис. 2, *б*) изображается графом, как показано на рис. 3, *а*.

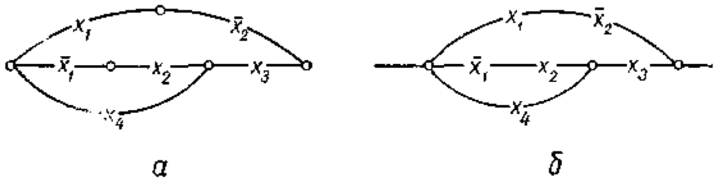


Рис. 3. Граф переключательной схемы *(а)* и его упрощенное изображение *(б).*

При изображении контактных схем графами принимаются некоторые специфические условия и упрощения. Обычно переменные обозначаются в разрывах линий, изображающих ребра. При этом ребрами считаются только такие линии, которые обозначены какой-либо переменной или ее отрицанием. Другие линии, не являющиеся ребрами графа, могут изображать входы и выходы схемы, связи с другими схемами и т. п. Кроме того, вершины второй степени могут не изображаться, так как им инцидентны пары последовательно соединенных ребер, из которых каждое обозначено соответствующей переменной. На рис. 3, *б* показана контактная схема в обычно принятом виде.

8. Высказывания. Пусть x_1 и x_2 — некоторые *высказывания,* которые могут быть истинными (1) или ложными (0), например: «Я пойду в театр» (x_1) и «Я встречу друга» (x_2). Дизъюнкцией $x_1 \vee x_2$ является сложное высказывание «Я пойду в театр *или* встречу друга», а конъюнкцией $x_1 \wedge x_2$ — высказывание «Я пойду в театр *и* встречу друга».

Ясно, что если высказывание истинно, то его отрицание ложно. Сложное высказывание, образованное дизъюнкцией двух высказываний, истинно при условии, что истинно хотя бы одно из них. Сложное высказывание, образованное конъюнкцией двух истинных высказываний истинно, если истинны оба эти высказывания одновременно.

Итак, высказывания можно рассматривать как двоичные переменные, а связки «не», «или», «и», с помощью которых образуются сложные высказывания,— как операции над этими переменными. В алгебре высказываний используются еще две операции: *импликация* $x_1 \to x_2$, соответствующая связке «если, то» и *эквиваленция* $x_1 \sim x_2$, соответствующая связке «если и только если». Они задаются следующими таблицами:

$x_1 \to x_2$

x_1	x_2 = 0	x_2 = 1
0	1	1
1	0	1

$x_1 \sim x_2$

x_1	x_2 = 0	x_2 = 1
0	1	0
1	0	1

В нашем примере импликацией будет высказывание: «*Если* я пойду в театр, *то* встречу друга», а эквиваленцией— «Я пойду в театр, *если и только если* встречу друга». Как видно из таблиц, импликация высказываний ложна только в случае, когда первое из простых высказываний истинно, а второе ложно. Эквиваленция является истинным высказыванием, если оба простые высказывания истинны или ложны одновременно.

Обозначив буквами простые высказывания, можно представить сложное высказывание формулой с помощью соответствующих связок. Например, высказыванию «*Если* давление масла на шарик клапана больше усилия его пружины (x_1), *то* масло открывает клапан (x_2) *и* частично перетекает из нагнетательной полости во впускную (x_3)» соответствует формула $x_1 \to x_2x_3$.

9. Предикаты. Обычно высказывания выражают свойства одного или нескольких объектов. Содержательная часть высказывания играет роль определяющего свойства совокупности объектов, для которых это высказывание истинно, и называется *предикатом.* Например, высказывание «Иванов — отличник» истинно или ложно в зависимости от оценок, которые имеет данный студент. В то же время предикат *«х* — отличник» определяет подмножество отличников на некотором множестве студентов (группа, курс, факультет). Подставив вместо x фамилии студентов, получим множество высказываний. Совокупность истинных высказываний и будет соответствовать подмножеству отличников,

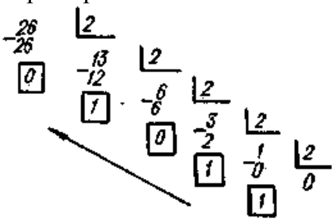
Предикат представляет собой логическую функцию $P(x)$, принимающую, как и булевы функции, значение 0 или 1, но в отличие от них, значения аргумента x выбираются из некоторого множества M объектов $(x \in M)$. В общем случае такая функция может зависеть от многих аргументов $x_1, x_2, ..., x_n$, принимающих значения из одного и того же или различных множеств. Ее записывают $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и называют *n-местным предикатом.* Например: «x— четное число», «x — компонент цепи» —одноместные предикаты $P(x)$; «x брат y», «x меньше y» — двуместные предикаты $P(x, y)$; «x и y — родители z», «x — сумма y и z» — трехместные предикаты $P(x,y, z)$ и т. д. Если аргументы $x_1, x_2.....x_n$ замещены конкретными значениями (объектами), то предикат, переходит в высказывание, которое рассматривают как *О-местный предикат.*

Так как предикаты способны принимать только значения 0 и 1, то их, как и булевы переменные, можно связывать логическими операциями. В результате получаем формулы, определяющие более сложные предикаты. Так, если $P(x)$ означает «x — инженер», а $Q(x)$ — «x — сотрудник нашего отдела», то $P(x) \wedge Q(x) = R(x)$ есть одноместный предикат «x — инженер и сотрудник нашего отдела» или проще «x — инженер нашего отдела». Очевидно, если P — множество инженеров, а Q — множество сотрудников данного отдела, то этот предикат соответствует пересечению P I Q. Таким образом, имеет место тесная связь между логикой предикатов и операциями над множествами.

10. Двоичная арифметика. В позиционной системе счисления с основанием m любое целое неотрицательное число a записывается последовательностью различных цифр $x_1x_2 \ ... \ x_n$, что означает $a = x_1m^{n-1} + x_2m^{n-2} + ... + x_nm^0$. Десятичная система использует цифры 0, 1, ..., 9, например: $2907 = 2 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 0 \times 10 + 7 \cdot 10^0$. Для двоичной системы счисления достаточно двух цифр, которые обозначаются 0 и 1. При этом последовательность $x_1x_2 \dots x_n$ таких цифр является записью двоичного n-разрядного числа

$$x_1\bullet 2^{n-1}+x_2\bullet 2^{n-2}+\dots+x_n\bullet 2^0.$$

Перевод целых десятичных чисел в двоичные осуществляется последовательным делением исходного числа и каждого частного на два. Получаемые при этом остатки (0 или 1), записанные в обратном порядке, и дают представление десятичного числа в двоичной системе счисления. Например:

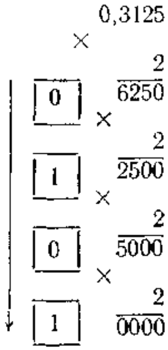


$$26_{10} = 11010_2.$$

Действительно, проверяя полученный результат, получаем

$$1 \bullet 2^4 + 1 \bullet 2^3 + 0 \bullet 2^2 + 1 \bullet 2^1 + 0 \bullet 2^0 = 16 + 8 + 2 = 26.$$

Дробное число переводится в двоичную систему счисления методом последовательного умножения на два. При этом каждый раз после запятой двоичного числа записывается 0 или 1 соответственно целой части результата умножения. Последовательное умножение продолжается до тех пор, пока дробная часть не обратится в нуль или пока не получим требуемое количество двоичных знаков после запятой. Например, двоичное представление числа 0,3125 получается следующим образом:



$$\mathbf{0{,}3125_{10} = 0{,}0101_2.}$$

Проверка полученного результата дает:

$$0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16} = 0{,}3125.$$

Если число является смешанным, т. е. его целая и дробная части отличны от нуля, то оно переводится в двоичную систему раздельно: целая часть — последовательным делением, а дробная — последовательным умножением.

Арифметические операции над числами сводятся к операциям сложения и умножения одноразрядных чисел. В двоичной системе счисления умножение задается таблицей конъюнкции:

$$0 \bullet 0= 0;\ 1 \bullet 0 = 0;\ 0 \bullet 1 = 0 \text{ и } 1 \cdot 1 = 1.$$

Сложение выполняется по правилу:

$$0 + 0 = 0;\ 1 +0 = 1;\ 0 + 1 = 1 \text{ и } 1 + 1= 10$$

(10— это двоичное число, соответствующее десятичному числу 2). Операции над двоичными числами выполняются по правилам, аналогичным для десятичных чисел, но эти правила предельно упрощаются (особенно для умножения). Например, десятичные операции 4+ 27 = 68 и 41 • 5 = 205 выглядят следующим образом:

$$+\begin{array}{r} 101001 \\ 11011 \\ \hline 1000100 \end{array} \qquad \times\begin{array}{r} 101001 \\ 101 \\ \hline 101001 \\ 101001 \\ \hline 11001101 \end{array}.$$

Как видно, умножение двоичных чисел сводится к сложению чисел, образованных сдвигом влево первого сомножителя. Поразрядное сложение осуществляется в соответствии с таблицей

x_1	x_2: 0	x_2: 1
0	0	1
1	1	0

причем в случае $x_1 = x_2 = 1$ образуется единица переноса в старший разряд. Операция, задаваемая этой таблицей, называется *сложением по модулю 2.* Если при сложении перенос не учитывается, то эта операция вместе с операцией умножения определяет на множестве двоичных чисел *арифметику по модулю 2.*

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Подстановкой в формулу $a \vee b$ переменных запишите новые формулы и упростите их, если это возможно:

а) $a = \bar{x}y,\ b = z$; б) $a = xy,\ b = x\bar{y}$;

в) $a = x,\ b = xy$; г) $a = x,\ b = \bar{x}y$; д) $a = xy,\ b = c \vee d,\ c = xz,\ d = y\bar{z}$.

2. Запишите таблицы соответствия для следующих формул: а) $x\bar{x}$;

б) $xy \vee \bar{x}$; в) $(p \vee q)(\bar{p} \vee \bar{\bar{q}})$; г) $\overline{x \vee y}$.

3. Проверьте с помощью таблиц соответствия следующие тождества:

а) $\overline{x \vee y} = \bar{x}\bar{y}$; б) $x(x \vee y) = x$; в) $x \vee \bar{x}y = x \vee y$.

4. Постройте переключательные схемы для обеих частей приведенных ниже тождеств и убедитесь в том, что эти схемы функционируют одинаково:

а) $xy \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y} = y \vee \bar{x}\bar{y}$;
б) $(x \vee y)(x \vee z) = x \vee yz$;
в) $xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y} = x$.

5. Упростите следующие формулы:

а) $\bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z}$;
б) $xy \vee z \vee \overline{xy \vee z}(zv \vee x)$;
в) $x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee xyz$;
г) $(x \vee y)(\overline{xy} \vee z) \vee \bar{z} \vee (x \vee y)(u \vee v)$.

6. Комитет, состоящий из трех членов, принимает решения большинством голосов. Постройте такую схему, чтобы голосование каждого члена комитета производилось нажатием своей кнопки и чтобы лампочка загоралась, если и только если решение принято. Какое наименьшее количество ключей необходимо?

7. Постройте схему освещения так, чтобы лампочка могла независимо включаться и выключаться двумя выключателями

8. Преобразуйте формулы к такому виду, чтобы операция отрицания применялась только к логическим переменным;

а) $\overline{xy \vee \bar{z}}$; б) $x(xy \vee \overline{yz} \vee \overline{y \vee z\bar{v}}$.

9. Убедитесь с помощью таблиц соответствия в справедливости выражений для импликации и эквиваленции:

а) $x_1 \to x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2$; б) $x_1 \sim x_2 =$

$= x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 = (x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)$; в) $x_1 \sim x_2 = (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_1)$.

10. Постройте переключательные схемы для импликации и эквиваленции в соответствии с тождествами, приведенными в задаче 9.

11. Запишите формулу, соответствующую переключательной схеме рис. 4. Упростите эту формулу и постройте более простую схему.

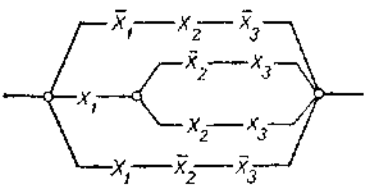


Рис. 4. Граф переключательной схемы к задаче 11.

12. Постройте переключательные схемы по формулам:

а) $(x_1 \vee x_2\bar{x}_3)(x_1x_2 \vee x_3x_4)$;

б) $(\bar{x}_1(x_2 \vee \bar{x}_3) \vee \bar{x}_4)\, x_1$.

13. Из простых высказываний x_1— «испытания проведены» и x_2— «программа выполнена» образуйте сложные высказывания но формулам:

а) $x_1 \vee \bar{x}_2$; б) x_1x_2; в) $x_1 \to x_2$; г) $x_1 \sim x_2$.

14. Запишите формулы для следующих высказываний, обозначив буквами входящие в них простые высказывания:

а) Давление падает и система не работает.

б) Вычисления выполнены точно или конструкция несовершенна.

в) Проект разработал Андрей или Петр, а эксперимент выполнил Иван.

г) Если будет хорошая погода, мы отправимся на стадион или пойдем за грибами.

д) Программа может быть выполнена, если и только если материалы поступят своевременно.

е) Если я поеду на автобусе, то опоздаю на работу, или я воспользуюсь такси.

ж) Андрей помогает Петру или Петр помогает Андрею, или они помогают друг другу.

15. Запишите формулу, соответствующую высказыванию: «Программа будет выполнена тогда и только тогда, когда закончатся испытания и показатели будут удовлетворительны; если программа не будет выполнена, сотрудники не получат премию или будут пересмотрены технические условия».

16. Даны простые высказывания: x_1 — «идет дождь», x_2 — «очень жарко».

а) Запишите формулу сложного высказывания «Неверно, что идет дождь и очень жарко».

б) Преобразуйте формулу по закону де-Моргана и составьте соответствующее высказывание.

в) Убедитесь в тождественности исходного и преобразованного высказываний.

17. Путешественник остановился у развилки дорог, ведущих в пункты *А* и *В,* и ему нужно выяснить, в какой именно пункт ведет каждая из дорог. Находившиеся у развилки два человека заявили, что они могут ответить только на один вопрос и что один из них всегда правдчв, а другой лжец. Какой вопрос должен задать путешественник, чтобы в любом случае ответ на него содержал необходимую информацию?

а) Решите задачу путем непосредственных рассуждений без применения алгебры логики.

б) Представьте ситуацию в виде сложного высказывания, составленного из простых.

в) Запишите соответствующую формулу и таблицу соответствия.

г) По таблице соответствия сформулируйте искомый вопрос.

18. Высказывание является логически истинным, если соответствующая ему формула тождественно равна единице, и логически ложным, если формула равна нулю. Определите с помощью таблиц соответствия, каким высказываниям соответствуют приведенные ниже формулы (истинным, ложным или ни тем и не другим): а) $p \sim p$; б) $p \to \bar{p}$; в) $(p \vee q) \sim pq$; г) $(p \to \bar{q}) \to (q \to \bar{p})$;

д) $(p \to q) \to p$; е) $((p \to q) \to p) \to p$; ж) $\overline{p \vee q} \sim \bar{p}\bar{q}$.

19. При $x_1 = 1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$ и $x_4 = 1$ найдите значения каждой из следующих функций:

а) $\overline{x_1 \vee x_2} \vee x_3 x_4$;
б) $x_1 x_2 \vee x_3 (x_1 \vee x_4) \vee x_4 (x_2 \vee x_3)$;
в) $x_1 \to (x_2 \vee x_3)$;
г) $(x_1 \vee x_2) \sim x_2 x_3$;
д) $x_1 x_2 \to (x_2 \sim x_3)$;
е) $x_1 x_2 \to (x_3 \to x_2 x_4)$.

20. Пусть X — множество сотрудников отдела и на этом множестве определены относительно переменной $x \in X$ одноместные предикаты $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, означающие соответственно: x — занимается спортом, изучает иностранный язык, имеет изобретения. Расшифруйте предикаты, образованные с помощью следующих логических операций: а) $P(x) \vee Q(x)$; б) $P(x)\, Q(x)$;

в) $\overline{P(x)}\, Q(x) \to R(x)$; г) $Q(x) \sim R(x)$; д) $\overline{R(x)} \sim (Q(x) \vee R(x))$.

21. Пусть V — множество вершин и E — множество ребер графа, причем ребро $e \in E$ соединяет вершины $x,\ y \in V$. Что означают предикаты $P(x, y)$, $Q(e, x,y)$, $R(x,$ e)?

22. Каким десятичным числам соответствуют следующие двоичные числа: а) 1011; б) 1000110; в) 110100111?

23. Переведите в двоичную систему счисления десятичные числа: а) 51; б) 64; в) 125; г) 1000.

24. Выполните в двоичной системе следующие операции над десятичными числами: а) 21 + 37; б) 31 + 105; в) 25 • 8; г) (8 + 19)11; д) 24 • 8 — 17. Проверьте полученные результаты в десятичной системе.

25. Переведите в двоичную систему счисления с точностью до пяти двоичных знаков после запятой числа: а) 0,131; б) 0,25; в) 175,26.

26. Дайте обоснование правил перевода десятичных чисел в двоичные.

27. Сложите двоичные числа 11001110 и 11010111 по обычному правилу и по модулю два. Найдите разность полученных результатов и объясните ее смысл.

1.7. Языки и грамматики

Все средства общения включают язык. Обычно мы «общаемся» с компьютером при помощи языка, который каким-либо образом записывается (диски, телетайп, экран дисплея и т. п.), и, следовательно, предложения языка состоят из строк символов. Действительно, весь вычислительный процесс может рассматриваться как преобразование одного множества строк в другое. Такие процессы ведут себя совершенно определенным образом, и, следовательно, с ними можно обращаться как с математическими объектами — по крайней мере строки могут рассматриваться как элементы моноида. В этой главе мы будем подходить к изучению языка скорее с математической точки зрения, чем с литературной. В п. 1.7.1 будет введено понятие строки и будут рассмотрены некоторые проблемы, относящиеся к этому вопросу; в п. 1.7.2 будут введены языковые структуры. Далее будут более детально исследованы некоторые важные классы языков и рассмотрено введение в грамматический разбор.

1.7. 1. Основные понятия

1. Строки. *Буква* (или *символ)* — это простой неделимый знак, или символ; множество букв образует *алфавит.*

Пример 1.

$$A = \{a, b, c\},\ B = \{0, 1\},$$
$$C = \{\text{PERFORM, ADD, GIVING, TO, ...}\},$$
$$E = \{a, b, c, ..., x, y, z\}.$$

Здесь мы можем рассматривать B как бинарный алфавит, C — как алфавит языка Кобол (в котором слова типа PERFORM не могут быть разделены), а E — как английский алфавит,

Алфавиты являются множествами, и поэтому к ним можно применять теоретико-множественные обозначения. В частности, если A и B такие алфавиты, что $A \subseteq B$, то будем говорить, что A является *подалфавитом В,* или что B является *расширением А.*

Строки являются упорядоченными совокупностями букв алфавита (например, алфавита A) и, следовательно, выглядят подобно элементам $A^n = A \times A \times \ldots \times A$. Однако будет более естественным записывать их в виде $a_1a_2...a_n$, а не $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Буквы сами по себе также являются строками для случая n=1. Мы будем допускать случай, когда строка не имеет букв *(пустая строка),* и обозначать эту строку через Λ. Заметим, что Λ не является символом, т. е. $\Lambda \notin A$ для любого алфавита A.

По аналогии с лингвистикой будем строки также называть *словами.* Множество всех строк (слов) над алфавитом A называют *замыканием А* и обозначают A^*, так что

$$A^* = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \ldots = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n, \quad \text{где} \quad A^0 = \{\Lambda\}.$$

Для удобства определим также множество непустых строк над A следующим образом:

$$A^+ = A^* \setminus \{\Lambda\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n.$$

Как уже упоминалось, основная операция над строками называется конкатенацией; формально она может быть определена как бинарная операция $\odot$ на A^* следующим образом:

$$\odot\colon (\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta.$$

Аналогично эта же операция определяется для A^+. Операция $\odot$ ассоциативна, но не коммутативна; Λ является единицей в A^* по отношению к $\odot$. Сформулируем нижt основные свойства операции $\odot$ на A^* и A^+.

Предложение. *По отношению к операции* $\odot$

а) A^* *является моноидом;*

б) A^+ *— полугруппа.*

Результат слияния строк α и β, т. е. αβ, заключается в следующем: строка β записывается сразу же за строкой α. Другой способ определения строки — рекурсивный: α является строкой над алфавитом *A,* если или $\alpha = \Lambda$, или $\alpha = a\beta$, где $a \in A$, а β — строка над *A*. Здесь $a\beta$ означает, что буква *a* стоит непосредственно перед строкой β.

Все слова в A^n $(n \in \{0\} \cup \mathbf{N})$ состоят точно из *n* букв; в этом случае говорят, что строка имеет *длину n.* Длина $\alpha \in A^*$ обозначается как $|\alpha|$ и $|\alpha| = n$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in A^n$.

Очевидно, что $|\Lambda| = 0$ и $|a| = 1$ тогда и только тогда, когда $a \in A$.

Если строки состоят из повторяющихся букв, то обычно принимают сокращенные обозначения, чтобы показать, что строку следует рассматривать как произведение (по отношению к операции конкатенации). Поэтому для $a \in A$ будем писать

$$\Lambda = a^0, \qquad aa = a^2, \qquad aa^{n-1} = a^n, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Будем использовать следующее обозначение для повторяющихся строк: строку *ababa* будем записывать как $(ab)^2a$ или же как $a(ba)^2$.

Этот пример иллюстрирует одну из основных трудностей при рассмотрении строк. Мы используем строки для описания строк, и, следовательно, мы должны иметь возможность различать используемые алфавиты. Если приведенные выше выражения рассматривались над алфавитом *A,* а символов «(» и «)» в *A* нет, тогда смысл понятен; с другой стороны, если круглые скобки есть в *A,* то выражение $(ab)^2a$ может быть понято как *(ab))a.* При условии что мы осознаем возможность таких проблем и знаем, какие алфавиты используются, этих ошибок можно избежать, используя различные алфавиты и биекцию между двумя алфавитами. В некоторых случаях может быть более удобно построить мономорфизм между множествами строк, так что одно множество рассматривается над существенно более простым алфавитом.

Пример 2. Пусть $B = \{0, 1\}$ и $A = \{a, b, c\}$. Тогда φ: $A^* \to B^*$, определенное соотношением

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y),$$

где $x, y \in A^*$ и

$$\varphi(a) = 0, \qquad \varphi(b) = 10, \qquad \varphi(c) = 110,$$

является гомоморфизмом моноида (нам надо сохранять комбинации) из A^* в $\{0, 10, 110\}^* \subseteq B^*$. Например,

$$\varphi\colon abbca \to 010101100, \ \varphi^{-1}\colon 01011010110 \to abcbc.$$

В действительности этот метод построения может использоваться для отображения произвольного конечного алфавита в $\{0, 1\}^*$.

Из определения длины строки следует, что если $\alpha, \beta \in A^*$, то

$$|\alpha\beta| = |\alpha| + |\beta|, \qquad |\alpha^n| = n|\alpha|.$$

Более того, если $a \in A$, то

$$|a^n| = n.$$

При преобразовании одной строки в другую нежелательно, чтобы вся входная строка изменялась под действием одной операции; в противном случае процесс можно было бы определить только с помощью множества входных-выходных пар. В дальнейшем нам понадобится понятие подстроки.

Пусть заданы строки α и β пад алфавитом *A*. Строка β называется *подстрокой* α, если

$$\alpha = \gamma\beta\delta, \qquad \gamma, \delta \in A^*.$$

Пример 3. Пусть $A = \{a, b, c\}$ и $\alpha = abac$. Тогда подстроками α являются следующие строки:

$$\Lambda, a, b, c, ab, ba, ac, aba, bac, abac.$$

В частности, заметим, что α является подстрокой самой себя, а Λ — подстрокой α (и любой другой строки), поскольку

$$\alpha = \Lambda abac = \Lambda a\Lambda bac = \Lambda a\Lambda b\Lambda ac = \Lambda a\Lambda b\Lambda a\Lambda c =$$
$$= \Lambda a\Lambda b\Lambda a\Lambda c\Lambda = a\Lambda bac = a\Lambda\Lambda bac = \ldots$$

Выделение подстроки естественно приводит к замене подстроки другой строкой. Однако пока еще мы не достигли уровня, достаточного для корректного выполнения этой операции. Рассмотрим, что случится, если мы имеем «функцию» *f*, которая замещает строку *xy* строкой *yxx* при условии, что первая строка является подстрокой в операнде. Тогда

$$f(pqxy) = pqyxx.$$

Однако неясно, что является результатом *f(xypxy)*. Возможны два случая — *yxxpxy* или *xypyxx*. Аналогично получается, если мы применяем *f* несколько раз. Тогда $f^2(xypxy) = yxxpyxx$, однако, применяя *f* к *xxyy*, получаем

$$f(xxyy) = xyxxy, \qquad f^2(xxyy) = yxxxxy \text{ или } xyxyxx.$$

Таким образом, «функция» является не полностью определенной, и мы не можем поправить дело, потребовав, чтобы операция изменяла все подстроки, поскольку они могут частично перекрываться.

Ситуация еще более усложняется, если применяются несколько замещающих функций. Необходимы средства выбора определенной подстроки всякий раз, когда возникает такой выбор; в частности, мы будем рассматривать подстроку, встречающуюся первой при чтении слева направо.

Для формализации рассуждений будем использовать порядковые свойства целых чисел и сами целые числа, соответствующие длинам строк. Предположим, что α и β — строки над A, $|\alpha| \leqslant |\beta|$ и α является подстрокой β. Предположим, что α в β встречается m различными способами и что $|\beta| - |\alpha| = n.$ Тогда мы можем записать βm различными способами:

$$\beta = \gamma_1\alpha\delta_1 = \gamma_2\alpha\delta_2 = \ldots = \gamma_m\alpha\delta_m,$$

где $\gamma_i,\ \delta_i \in A^*,\ 1 \leqslant i \leqslant m$ и $m \leqslant n+1$ (если $\alpha = \beta$, то $n = 0$; поэтому существует только одна возможность). Будем говорить, что $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ *специфицируют* различные вхождения α в β и что γ_1 дает *первое вхоокдение,* а вхождение α непосредственно за γ_1 является *первым вхождением.*

Пример 4. Пусть g — функция $A^* \to A^*$ такая, что $\{x,\ y,\ p,\ q\} \subseteq A$, и g заменяет первое вхождение xy в строке на yxx. Тогда

$$g(pqxy) = pqyxx, \qquad g(xypxy) = yxxpxy,$$
$$g^2(xypxy) = yxxpyxx.$$

Заметим также, что

$$g^6(x^2y^2) = g^5(xyx^2y) = g^4(yx^4y) = g^3(yx^3yx^2) =$$
$$= g^2(yx^2yx^4) = g(yxyx^6) = y^2x^8,$$
$$g(y^2x^8) = y^2x^8;$$

поэтому

$$g^6(x^2y^2) = g^7(x^2y^2) = \ldots$$

Перед тем как продолжить изложение, отметим, что существует альтернативный набор терминов для буквы, алфавита и слова; это — *слово, словарь* и *предложение* соответственно. В некоторых контекстах эти термины более разумны, однако в этом случае необходимо проявлять особую тщательность в использовании термина «слово», поскольку оно имеет два смысла.

2. Языки. Совокупность строк (или предложений) называется языком, Формально *язык* L над алфавитом A— это множество строк в A^*; поэтому $L \subseteq A^*$. Следовательно, операции над строками индуцируют операции на языках. Отсюда получаем L^+ *(транзитивное замыкание L)* и L^* *(рефлексивное замыкание L)* следующим образом:

а) $L^0 = \{\Lambda\}$;

б) если L_i и L_j — языки, то $L_iL_j = \{xy\colon\ x \in L_i,\ y \in L_j\}$;

в) $L^n = L^{n-1}L,\ n \in \mathbf{N}$;

г) $L^+ = \cup_{n\geqslant 1} L^n$;

д) $L^* = \cup_{n\geqslant 0} L^n$.

Сейчас обратим внимание на то, как слова могут составляться в предложения, а множество всех предложений, имеющих смысл, образует язык. Нас будут в основном интересовать искусственные языки, такие как языки программирования или языки, описывающие правильные математические выражения, однако вначале будет полезно рассмотреть случай английского языка. Это даст возможность сформулировать некоторые определения таким образом, что мы сможем сделать первые шаги в теорию языка. Возьмем предложение

«The dog bit me».

Это предложение можно рассматривать двумя способами. Во-первых, изучать его как простую совокупность слов, каждое из которых является упорядоченной совокупностью букв; в этом случае предложение рассматривается *синтаксически.* Во-вторых, интерпретировать предложение, считая, что мы понимаем значения слов и их внутренние связи; тогда мы получаем *семантику* — значение предложения. В дополнение заметим, что если мы произносим предложение, то оно влияет на нас своим воздействием — прагматизмом. В совокупности эти три области образуют *семиотику* языка.

Пример 5. В языках программирования Фортран и Кобол утверждения

A=B + C, ADD B TO C GIVING A

имеют одинаковый семантический смысл понятий сложения и присваивания, однако у них разный синтаксис. Прагматически они могут быть представлены на некоторой машине как результат выполнения кода

LOAD B
ADD C
STORE A.

Основным объектом нашего рассмотрения будет область синтаксиса. Чтобы проиллюстрировать класс структур, которые мы будем изучать, рассмотрим диаграмму на рис. 1.

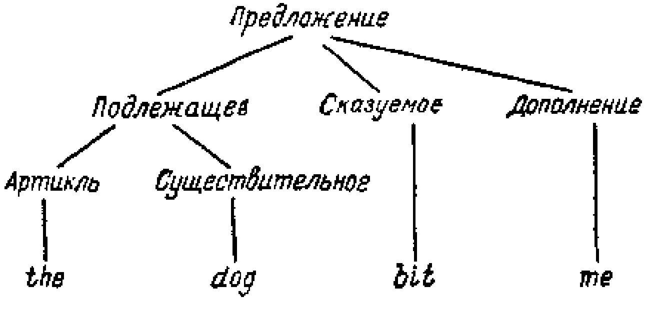


Рис. 1

На самом деле эта диаграмма означает, что <предложение> может быть построено путем слияния <подлежащего>, <сказуемого> и <дополнения>, хотя это требует формального определения. Подлежащее состоит из <артикля> с <существительным>, и окончательно получаем <артикль> «the», <существительное> «dog», ..., что дает нам предложение «the dog bit me».

Перед тем как ввести терминологию и обозначения, необходимые для уточнения общих понятий в конкретной ситуации, изображенной на рис. 1, мы установим основные цели теории языков и сделаем обзор оставшейся части главы.

Напомним, что для заданного алфавита A язык L является произвольным подмножеством множества A^*, однако произвольные подмножества представляют очень незначительный интерес. Мы хотим сосредоточить внимание на специальных языках, содержащих строки, которые благодаря внешней информации об их семантике считаются осмысленными или хорошо сконструированными.

Наиболее интересные языки бесконечны и, следовательно, не могут быть выписаны явно. В этих случаях надо придумать способы порождения языка; грамматика G может рассматриваться как такая порождающая система. Сформулируем две основные задачи формальной теории языков:

а) Как по заданной грамматике G (и связанным с ней языком L) порождать предложения α: $\alpha \in L$?

б) Как по заданным $L \leqslant A^*$ и $\alpha \in A^*$ устанавливать, принадлежит ли $\alpha \in L$? Для того чтобы проверить, входят ли эти строки в L, надо знать, как L порождается грамматикой G. В п.п. 1.7.2 и 1.7.3 мы опишем общие принципы грамматик с фразовой структурой, а затем подробнее рассмотрим некоторый подкласс, имеющий большое практическое значение.

Обозначим через $L(G)$ язык, порожденный грамматикой G. Тогда алгоритм проверки вхождения $\alpha \in L(G)$ называется грамматическим разбором; он использует α и G. Часто первоначальная грамматика не подходит для определенной техники разбора, однако она может быть преобразована к эквивалентному, более подходящему виду. Вопросы, относящиеся к грамматическому разбору или модификации грамматики, будут рассматриваться в п.1.7.4.

Проводя далее идею манипулирования грамматикой G, в некоторых весьма специальных (но обычных) ситуациях можно перенести почти все (а иногда и все) трудности грамматического разбора в анализ грамматики и, следовательно, намного упростить анализ конкретных строк. Спецификация ограничений, которым должны удовлетворять эти грамматики, является более сложной. Изучению этих проблем посвящен п.1.7.5.

Упражнение 1. Предположим, что *A* и *Б* — непустые алфавиты такие, что

$$|A| = p, \quad |B| = q,$$

и φ: $A \to \mathbf{N}_p$, ψ: $B \to \mathbf{N}_q$— биекции. Пусть χ_1: $A^* \to \mathbf{N}$ определено как

$$\chi_1: \ a_1 \ldots a_k \mapsto \sum_{i=1}^{k} \varphi(a_i) * p^{(i-1)},$$

а χ_2: $B^* \to \mathbf{N}$ определено как

$$\chi_2: \ b_1 \ldots b_k \mapsto \sum_{i=1}^{k} \psi(b_i) * q^{(i-1)}.$$

Доказать, что $\chi_2^{-1} \circ \chi_1$ является бисекцией строк, и показать, как применяется это отображение. Для этого надо найти прямые и обратные образы строк x^2yxz в *A** и 145332 в *B*,* где

$$A = \{x, y, z\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

1.7.2. Грамматики с фразовой структурой

1. Основные определения.

Определение. *Грамматикой с фразовой структурой* (ГФС) *G* называется алгебраическая структура, состоящая из упорядоченной четверки *(N, T, P, S),* где:

а) *N* и *T* — непустые конечные алфавиты *нетерминальных* и *терминальных символов)* соответственно таких, что $N \cap T = \varnothing$;

б) *P* — конечное множество *продукций,* $P \subseteq V^+ \times V^*$, где $V = N \cup T$ называется *словарем G;*

в) $S \in N$ называется *начальным символом* или *источником.*

Предполагая, что символ → не содержится в *V,* соотношение $(\alpha, \beta) \in P$ обычно записывают в виде $\alpha \to \beta$.

Понятие продукции, которую также называют *правилом преобразования,* должно давать возможность заменять одну строку символов другой. Терминальные символы обычно рассматриваются как неизменяемые символы. Поэтому, возможно, определение продукции в ГФС является чрезмерно общим. На практике соответствующие ограничения будут вводиться так, чтобы не нарушать постоянства терминальных символов, однако сейчас этого определения достаточно.

В качестве первого шага рассмотрим рис. 1 и попытаемся понять, как он связан со следующими примерами.

Пример 1. Предложение на английском языке, приведенное ранее в качестве иллюстрации, может быть определено в грамматике *G = (N, T, P, S)*, где *N* = {<предложение>, <подлежащее>, <артикль>, <существительное>, <сказуемое>, <дополпепне>}; *T* = {the, dog, bit, me); *P* = = {(<предложение), <существительное>, <сказуемое>, <дополнение>), (<существительное>, <артикль>, <подлежащее>), (<артикль> the), (<подлежащее> dog), (<сказуемое> bit), (<дополнение> me)}; *S* = <предложение>.

Эта частная система порождает только одно предложение «the dog bit me» и, следовательно, может быть заменена на

N = {<предложение>},

P = {(<предложение> the dog bit me)}

или даже на

L = {the dog bit me}.

Однако если мы в данном случае захотим расширить язык, чтобы включить в него все предложения, начинающиеся со слов, скажем, «the lion», «the rat», «the tiger», со сказуемыми «ate» и «attacked» и дополнениями «you» и «Napoleon» (тогда *L* будет иметь более 35 элементов), то это может быть сделано добавлением только семи дополнительных элементов к каждому из множеств *T* и *P*. В этом примере размер яыка составляет 4*3*3, в то время как размер множества *P* примерно равен 4 + 3 + 3. Еще большее значение имеет тот факт, что мы можем включить все предложения вида «the dog bit (the son of)^n Napoleon» (их бесконечное множество), добавляя к *T* и *P* незначительное число элементов.

Перед тем как описать механизм порождения предложений, мы должны упомянуть нотацию, введенную Бэкусом (нормальная форма Бэкуса или форма Бэкуса-Наура, БНФ). Она особершо полезна, когда мы хотим использовать элементы из *N*, которые можно спутать с элементами из *T* такими, как <предложение> и «предложение». Эта нотация использует четыре символа:

::=(мета-присвоить), <(мета-открыть),

>(мета-закрыть), | (мета-или).

Понятия «мета-открыть» и «мета-закрыть» используются для того, чтобы выделять строки в качестве элементов *N*, «мета-присвоить» заменяет символ →, и если $(\alpha, \beta) \in P$, $(\alpha, \gamma) \in P$, то это может быть записано в виде $\alpha ::= \beta \mid \gamma$, что читается как «α есть β или γ.

БНФ впервые использовалась для определения синтаксиса Алгол-60. В работах по формальным языкам обычно избегают длинных строк в *N* и, следовательно, нотация Бэкуса не используется, за исключением символа мета-или. Обычно прописпые буквы используют для обозначения элементов *N*, а строчные — для элементов *T*.

Пример 2. Рассмотрим *G* = (*N, T, P, S*), где

$$N = \{S, T\}, \qquad T = \{a, b, c, d\},$$
$$P = \{S \to aTd, \quad T \to bT \mid b \mid cT \mid c\}.$$

Заметим, что двойное использование *T* в этом примере не вызывает никаких затруднений.

Грамматика будет порождать все строки $a\{b, c\}^+d$, однако мы все еще не показали, как этого можно достичь. Будем использовать продукции следующим образом.

Пусть $\alpha, \beta \in V^*$; тогда β *прямо выводится* из α, если $\alpha = \gamma\sigma\beta$ и $\beta = \gamma\rho\delta$, где $\gamma, \delta, \rho \in V^*$, $\sigma \in V^+$ и $\sigma \to \rho \in P$.

Этот факт будем записывать в виде $\alpha \Rightarrow \beta$; он может неформально рассматриваться как преобразования строки α в строку β замещением подстроки σ в α на ρ. (Заметим, что не обязательно заменять конкретное вхождение σ в α или использовать конкретную продукцию с левой частью σ. Возможны любые вариации.)

Пусть теперь α и β — слова над *V* и существует конечная последовательность $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$, где $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_r = \beta$ и $\alpha_{i-1} \Rightarrow \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, r)$. Тогда будем говорить, что α *порождает* β (записывается $\alpha \overset{*}{\Rightarrow} \beta$) и что вывод β из α реализуется следующим образом: $\alpha \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha_{r-1} \Rightarrow \beta$. Аналогично $\alpha \overset{+}{\Rightarrow} \beta$, если вывод использует непустую последовательность прямых выводов. Если $\alpha \in V^*$ такое, что $S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha$, то α называют *сентенциальной формой.* Более того, если $\alpha \in T^*$ и $S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha$, то α является *предложением,* порожденным *G*. Таким образом, *язык L(G),* порожденный *G,* есть $\{\alpha: \alpha \in T^* \text{ и } S^* \Rightarrow \alpha\}$. Там, где *G* подразумевается, можно определить $L(X) = \{\alpha: \alpha \in T^*, X \in N \text{ и } X \overset{*}{\Rightarrow} \alpha\}$. Поскольку, применяя продукции к сентенциальным формам, можно действовать достаточно произвольно, то возможно существование нескольких допустимых выводных последовательностей для данного предложения в *L(G),* где *G* — конкретная грамматика. Среди этих последовательностей мы выбираем ту, которая на каждом этапе оперирует с самой левой из возможных подстрок, в которой элементы заменяются на элементы из *P*. Такая последовательность называется (левой) *канонической выводной последовательностью* для предложения.

Пример 3. Пусть

$$G = (\{B\}, \{(\ ,\ )\}, P, B),$$

где

$$P = \{B \to (B) \mid BB \mid (\ \ )\}.$$

Тогда предложение ( ) (( ) ( )) может быть выведено многими способами. Приведем пять из них:

1) $B \Rightarrow BB \Rightarrow$
$\Rightarrow (\ \ )B \Rightarrow$
$\Rightarrow (\ \ )(B) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\ \ )(BB) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\ \ )((\ \ )B) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\ \ )((\ \ )(\ \ ));$

2) $B \Rightarrow BB \Rightarrow$
$\Rightarrow (\ \ )B \Rightarrow$
$\Rightarrow (\ \ )(B) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\ \ )(BB) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\ \ )(B(\ \ )) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\ \ )((\ \ )(\ \ ));$

3) $B \Rightarrow BB \Rightarrow$
$\Rightarrow B(B) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\ \ )(B) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\ \ )(BB) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\ \ )((\ \ )B) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\ \ )((\ \ )(\ \ ));$

4) $B \Rightarrow BB \Rightarrow$
$\Rightarrow B(B) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\ \ )(B) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\ \ )(BB) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\ \ )(B(\ \ )) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\ \ )((\ \ )(\ \ ));$

5) $B \Rightarrow BB \Rightarrow$
$\Rightarrow B(B) \Rightarrow$
$\Rightarrow B(BB) \Rightarrow$
$\Rightarrow B((\ \ )B) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\ \ )((\ \ )B) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\ \ )((\ \ )(\ \ )).$

Первый из этих выводов является каноническим.

2. Иерархия Хомского. Обсуждавшаяся до сих пор система — сильное описательное средство, однако при создавшемся положении вещей она является слишком общей. Тем не менее, если наложить ограничения, мы получим более интересный, хотя все еще достаточно мощный математический объект. Начальные ограничения, которые мы будем накладывать на структуру грамматики, определяют элементы *P*.

Определение (иерархия Хомского). Пусть $G = (N, T, P, S)$ является ГФС, описанной в п. 1. Такую грамматику называют *грамматикой Хомского типа* 0. Если все элементы *P* получаются из формы $\alpha \to \beta$, где $\alpha = \gamma_1 x \gamma_2$, а $\beta = \gamma_1 \delta \gamma_2$, γ_1, $\gamma_2 \in V^*$, $x \in N$, $\delta \in V^+$, то говорят, что *G* является контекстно-зависимой грамматикой, или *грамматикой Хомского типа* 1 (КЗГ). (В этом определении строки γ_1 и γ_2 могут рассматриваться как контекст, в котором *x* может заменяться посредством δб.)

Другим (альтернативным) ограничением для грамматики Хомского типа 1 является то, что в каждой продукции α и β должны быть такими, что $1 \leqslant |\alpha| \leqslant |\beta|$. (Эквивалентность этих двух определений неочевидна и доказывается ниже.) Если подстановки могут быть выполнены без рассмотрения контекстов, тогда мы можем заменить «контексты» γ_1 и γ_2 пустой строкой Λ и получить более слабое ограничение: если $x \to \delta \in P$, то $x \in N$ и $\delta \in V^+$. Этому ограничению удовлетворяют *грамматики Хомского типа* 2. Наконец, если *P* состоит только из продукций вида $x \to \delta$, где $x \in N$ и $\delta \in T \cup TN$ (так, что правая часть является или единичным терминалом, или единичным терминалом, за которым следует единичный нетерминал), то говорят, что *G* является *грамматикой Хомского типа* 3.

Часто бывает полезно использовать более общие формы внутри множества продукций, хотя формально это и не разрешается. Хотелось бы быть в состоянии включить пустую строку Λ в качестве правой части любой продукции. Однако, как увидим позднее, это вызывает трудности. Такие Λ-продукции крайне необходимы с общей точки зрения, если только $\Lambda \in L$. В этом случае мы можем добавить $S \to \Lambda$ к *P* при условии, что *S* не встречается в правой части любой продукции. Однако в некоторых случаях необходимо разрешать также и более общие Λ-продукции. Чтобы различать грамматики Хомского и те грамматики, в которых разрешаются Λ-продукции, введем расширенные версии грамматик Хомского типа 2 и 3 — *контекстно-свободные* и *регулярные* грамматики соответственно.

Языки, порожденные каким-либо из этих типов грамматик, имеют аналогичные названия. Так, структурная грамматика порождает структурный язык, структурная грамматика Хомского типа 1 — язык Хомского типа 1, контекстно-свободная грамматика — *контекстно-свободный язык,* а регулярная грамматика порождает *регулярный язык* (или *регулярное множество).* Большинство примеров этой главы будет касаться контекстно-свободных языков, а в п.1.8 мы сконцентрируем внимание на регулярных языках. Однако большинство практических языков являются некоторыми расширениями контекстно-зависимых языков. Чтобы указать на ограничения контекстно-свободной грамматики, рассмотрим следующий важный пример.

Пример 4. $\{x^n y^n z^n\colon n \in \mathbf{N}\}$ является контекстно-зависимым языком. Предположим, что *G=(N, T, P, S),* где

$$N = \{S, X, Y, Z\}, \quad T = \{x, y, z\}, \quad P = \{P_1, \ldots, P_7\},$$
$$P_1 = S \to xSYZ, \quad P_2 = S \to xYZ,$$
$$P_3 = xY \to xy, \quad P_4 = yY \to yy, \quad P_5 = yZ \to yz,$$
$$P_6 = ZY \to YZ, \quad P_7 = zZ \to zz.$$

Вначале заметим, что для любого $n \in \mathbf{N}$ мы можем получить

$$S \overset{*}{\Rightarrow} x^{n-1}S(YZ)^{n-1} \Rightarrow \qquad (P_1)$$
$$\Rightarrow x^n(YZ)^n \overset{*}{\Rightarrow} \qquad (P_2)$$
$$\overset{*}{\Rightarrow} x^nY^nZ^n \Rightarrow \qquad (P_6)$$
$$\Rightarrow x^nyY^{n-1}Z^n \overset{*}{\Rightarrow} \qquad (P_3)$$
$$\overset{*}{\Rightarrow} x^ny^nZ^n \Rightarrow \qquad (P_4)$$
$$\Rightarrow x^ny^nzZ^{n-1} \overset{*}{\Rightarrow} \qquad (P_5)$$
$$\overset{*}{\Rightarrow} x^ny^nz^n; \qquad (P_7)$$

поэтому

$$\{x^ny^nz^n\colon\ n \in \mathbf{N}\} :\subseteq L(G).$$

Теперь мы должны показать, что никакие другие строки по могут быть порождены *G*. Хотя возможны некоторые изменения в порядке применения правил (P_1), (P_2) и (P_6), любое предложение должно выводиться посредством сентенциальной формы такой, как $x^nYZ\alpha$, где α состоит из n — 1 символов *Y* и *Z*. Для того чтобы получить строку над *T,* мы должны в конце концов использовать правила *(P_4), (P_5)* и *(P_7),* однако *(P_7)* может преобразовать *Z* в *z* только в контексте *zZ,* а *(P_5)* осуществляет такую же замену в контексте *yZ.* Аналогично для замены *Y* на *y* при помощи правил (P_4) и (P_3) требуются контексты *yY* и *xY* соответственно. На этой стадии подстрока x^n состоит только из терминалов, поэтому на следующем шаге строка должна иметь вид $x^nyZ\alpha$ и получаться при помощи *(P_3).* Однако мы знаем, что правильное предложение должно порождаться преобразованием из $Z\alpha$ в $Y^{n-1}Z^n$ посредством (P_6). Действительно, только таким образом можно успешно получить строку.

Предположим, что мы имеем промежуточную подстроку вида $yY^mZ^pY\beta$, где β состоит из оставшихся элементов *Y* и *Z.* Из рассуждений, аналогичных приведенным выше, следует, что для получения подстроки $y^{m+1}Z^pY\beta$ нужно *m* раз применить (P_4). Однако, если сейчас мы используем (P_5) для получения $y^{m+1}zZ^{p-1}Y\beta$, то никаким правилом нельзя заменить элемент Y на y (или любой другой терминал). Единственный способ выйти из этого положения — это p раз применить (P_6), чтобы переместить Y влево и, следовательно, получить $x^n y^n z^n$.

Это пример контекстно-зависимого языка, который, как будет показано, не является контекстно-свободным. Аналогично существуют контекстно-свободные языки, которые не являются регулярными (см. п.1.8). Вернемся теперь к доказательству эквивалентности альтернативных определений контекстно-зависимых грамматик.

Определение. Грамматики G_1 и G_2 *эквивалентны,* если

$$L(G_1) = L(G_2).$$

Предложение. *L является контекстно-зависимым языком тогда и только тогда, когда он может быть порожден грамматикой, у которой продукции* $\sigma \to \mu$ *удовлетворяют условию* $1 \leqslant |\sigma| \leqslant |\mu|$.

Доказательство. Если L — контекстно-зависимый язык, то существует грамматика G с продукциями вида $\alpha A\beta \to \alpha\gamma\beta$, где $A \in N$, $\gamma \in V^+$ и α, $\beta \in V^*$ такие, что $L = L(G)$. Однако

$$|\alpha A\beta| = |\alpha| + |A| + |\beta| = |\alpha| + 1 + |\beta| \geqslant 1,$$

$$|\alpha\gamma\beta| = |\alpha| + |\gamma| + |\beta| \geqslant |\alpha| + 1 + |\beta| = |\alpha A\beta|.$$

Следовательно, $1 \leqslant |\alpha A\beta| \leqslant |\alpha\gamma\beta|$, что и требовалось доказать.

Пусть $G = (N, T, P, S)$— грамматика, у которой продукции $\sigma \to \mu$ удовлетворяют соотношению $1 \leqslant |\sigma| \leqslant |\mu|$. Мы должны создать грамматику G', эквивалентную G, с продукциями вида $\alpha A\beta \to \alpha\gamma\beta$.

Продукции из G имеют вид

1) $A \to \gamma_1 \ldots \gamma_p$ или же

2) $\alpha_1 \ldots \alpha_n \to \beta_1 \ldots \beta_q$, где $n \leqslant q$ и $A \in N$, α_i, β_i, $\gamma_i \in V$.

Во всех продукциях заменим каждый встречающийся элемент $a_i \in T$ новым нетерминальным элементом A_i и включим продукции $A_i \to a_i$ в G'. Продукции типа 1) теперь имеют правильную форму и включены в G'. Однако продукции типа 2) необходимо модифицировать. Сейчас они имеют вид

$$W_1 \ldots W_n \to Y_1 \ldots Y_q, \quad n \leqslant q,$$

где W_i и Y_i являются нетерминальными символами новой грамматики. Для каждой такой продукции введем новые элементы $\widehat{Y}_1, \ldots, \widehat{Y}_q$, не являющиеся терминалами, и $n + q$ новых продукций: n продукций

$$W_1 \quad \dots \qquad W_n \to \hat{Y}_1 W_2 \dots W_n,$$
$$\hat{Y}_1 W_2 \dots \qquad W_n \to \hat{Y}_1 \hat{Y}_2 W_3 \dots W_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\hat{Y}_1 \dots \hat{Y}_{n-2} W_{n-1} W_n \to \hat{Y}_1 \dots \hat{Y}_{n-2} \hat{Y}_{n-1} W_n,$$
$$\hat{Y}_1 \dots \hat{Y}_{n-2} \hat{Y}_{n-1} W_n \to \hat{Y}_1 \dots \hat{Y}_{n-2} \hat{Y}_{n-1} \hat{Y}_n \hat{Y}_{n+1} \dots \hat{Y}_q$$

и q продукций

$$\hat{Y}_1 \hat{Y}_2 \dots \hat{Y}_q \to Y_1 \hat{Y}_2 \dots \hat{Y}_q,$$
$$Y_1 \hat{Y}_2 \dots \hat{Y}_q \to Y_1 Y_2 \hat{Y}_3 \dots \hat{Y}_q,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$Y_1 Y_2 \dots Y_{q-1} \hat{Y}_q \to Y_1 Y_2 \dots Y_{q-1} Y_q.$$

Все эти продукции имеют вид $\alpha A \beta \to \alpha\gamma\beta$.

Новые нетерминалы $\hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_q$ вынуждают применять эти продукции в написанном порядке так, чтобы никакие из предложений, не входящих в исходный язык, не могли быть созданы.

В заключение этого параграфа обсудим понятие неоднозначности. Классическим примером неоднозначного предложения является предложение

«They are flying planes».

Мы имеем две интерпретации этого предложения, зависящие от того, рассматриваем мы «are flying» как сказуемое или же «flying planes» как дополнение. Это приводит нас непосредственно к точному определению неоднозначности. Язык называется *неоднозначным,* если он содержит неоднозначное предложение. Предложение является *синтаксически неоднозначным,* если оно имеет более одного канонического вывода, и *семантически неоднозначным,* если для заданиого канонического вывода оно имеет более одной интерпретации. (Выводы относятся не непосредственно к языку, а к грамматике, порождающей его. Следовательно, мы должны ссылаться на *неоднозначную* грамматику; однако существуют существенно неоднозначные языки, которые могут порождаться только неоднозначными грамматиками.) Проиллюстрируем синтаксические неоднозначности двумя примерами.

Пример 5.

1. Пусть $G = (\{E\}, \{1, -\}, \{E \to E - E \mid 1\}, E)$. Тогда

а) $E \Rightarrow E - E \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - E \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - E - E \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - 1 - E \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - 1 - 1;$

б) $E \Rightarrow E - E \Rightarrow$

$\Rightarrow E - E - E \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - E - E \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - 1 - E \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - 1 - 1.$

Из этих последовательностей следует, что два указанных вывода являются различными, и, следовательно, хотелось бы придать им различные значения. В примере *а*) второй знак «минус», вычисляемый вначале, дает 1; в примере б) первый знак «минус», выполняемый первым, дает -1. (Диаграммы на рис. 2 иллюстрируют различные структуры).

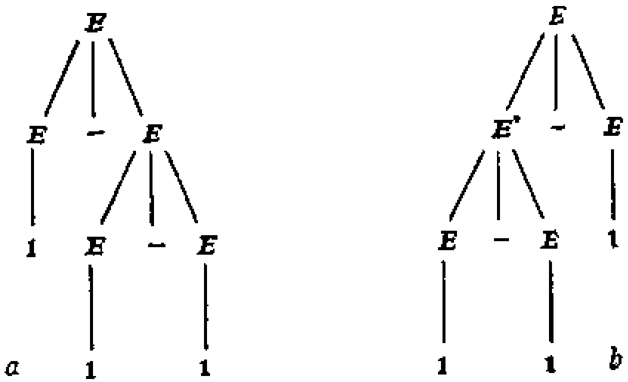


Рис. 2

Рассмотрим хорошо известный пример из первой спецификации языка Алгол-60. Сужая грамматику до относящегося к делу подъязыка, будем иметь продукции

$$S \rightarrow \textbf{if } B \textbf{ then } S \textbf{ else } S \mid \textbf{if } B \textbf{ then } S \mid U,$$

где S — утверждение, B — булево выражение, U — безусловное утверждение. Теперь рассмотрим выражение

$$\textbf{if } B_1 \textbf{ then if } B_2 \textbf{ then } U_1 \textbf{ else } U_2.$$

Мы не знаем, принадлежит ли **else** U_2 к **if** B_1 или к **if** B_2. Формально мы можем вывести это предложение, рассматривая B и U как терминалы, следующим образом (рис. 3, *а, b* соответственно):

а) $S \Rightarrow \textbf{if } B \textbf{ then } S \Rightarrow$

$\Rightarrow \textbf{if } B \textbf{ then if } B \textbf{ then } S \textbf{ else } S \Rightarrow$

б) $S \Rightarrow \textbf{if } B \textbf{ then } S \textbf{ else } S \Rightarrow$

$\Rightarrow \textbf{if } B \textbf{ then if } B \textbf{ then } S \textbf{ else } S \Rightarrow$

$\Rightarrow \textbf{if } B \textbf{ then if } B \textbf{ then } U \textbf{ else } S \Rightarrow$

$\Rightarrow \textbf{if } B \textbf{ then if } B \textbf{ then } U \textbf{ else } U.$

$\Rightarrow \textbf{if } B \textbf{ then if } B \textbf{ then } U \textbf{ else } S \Rightarrow$

$\Rightarrow \textbf{if } B \textbf{ then if } B \textbf{ then } U \textbf{ else } U;$

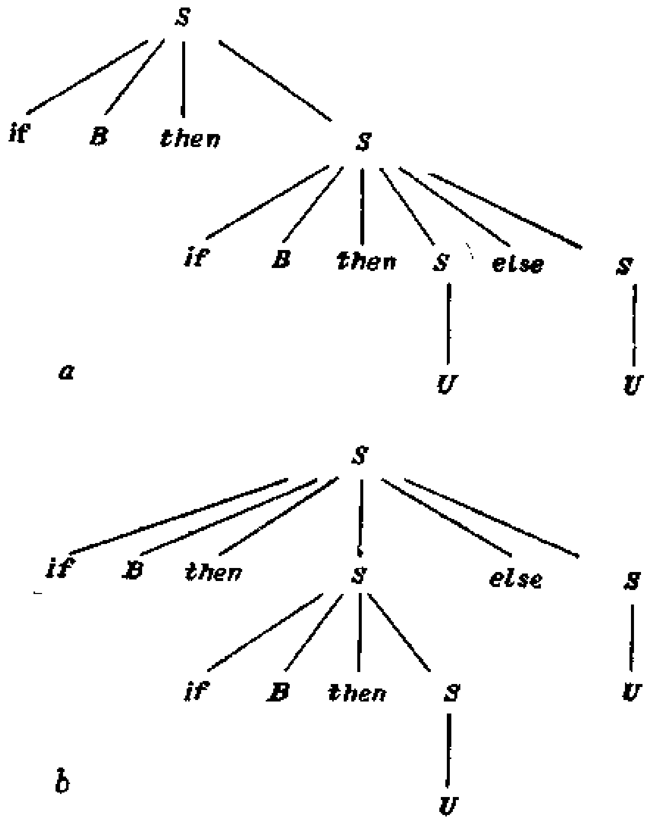


Рис. 3

Упражнения.

1. Выразить явно языки, определенные следующими грамматиками:

$P = \{\langle\text{число}\rangle \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9\}$;

а) $G = (\{\langle\text{число}\rangle, \{0, 1, 2, \ldots, 9\}, P, \langle\text{число}\rangle)$, где

б) $G = (\{\langle P\rangle, \langle L\rangle \ \langle D\rangle\}, \{0, 1, 2, \ldots, 9\}, P, \langle P\rangle)$, где

$$P = \{\langle P\rangle \rightarrow \langle L\rangle\langle D\rangle \mid \langle L\rangle,$$

$$\langle L\rangle \rightarrow 1 \mid 2 \mid 3 \ldots 8 \mid 9, \quad \langle D\rangle \rightarrow \langle L\rangle, \quad \langle D\rangle \rightarrow 0\}.$$

2. Определить грамматику $G' = (N', T', P', S')$, эквивалентную

$$G = (\{A, B, C, S\}, \{x, y, z\}, P, S),$$

где

$$P = \{S \to AB^2C,\ AB \to BAz,\ zB \to A^2Bx,\ A \to x,$$
$$B \to y,\ C \to z\},$$

с продукциями вида $\alpha Q\beta \to \alpha\gamma\beta$ для

$$Q \in N',\ \gamma \in (N' \cup T')^+,\ \ \alpha,\ \beta \in (N' \cup T')^*.$$

3. Определить класс Хомского грамматики, определенной следующим образом:

$$G = (\{A,\ B,\ T,\ S\},\ \{x,\ y,\ z\},\ P,\ S),$$

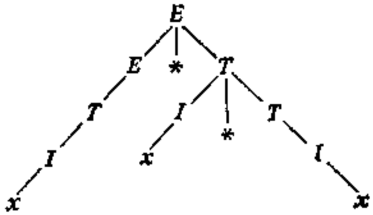
где

$$P = \{S \to xTB \mid xB,\ T \to xTA \mid xA,$$
$$B \to yz,\ Ay \to yA,\ Az \to yzz\}.$$

Используя свойство класса, к которому принадлежит *G,* установить, принадлежат или нет *L(G)* следующие строки:

$$x^2yxz,\ x^2y^2z^2,\ xyxz.$$

4. Определить последовательность разрезов представленного здесь производящего дерева, соответствующую самому правому выводу предложения $x + x * x$.



5. Определить порядок в множестве продукций *P* таким образом, чтобы была возможность канонического вывода, определяющего последовательность целых чисел в **N**. Продемонстрировать две такие последовательности для предложения *«aza»* в $L(G_1)$, где G_1 дано ниже. Вывести также строку над **N**, описывающую все выводы в языке $L(G_2)$, т. е. показать, что $A \overset{+}{\Rightarrow} A$ подразумевает неоднозначность. Здесь

$$G_1 = (N,\ T,\ P,\ E),\quad G_2 = (N,\ T,\ P,\ A),$$

где $N = \{A,\ B,\ C,\ E,\ R\}$, $T = \{a,\ d,\ e,\ x,\ z\}$ и

$$P = \{A \to B \mid Cd,\ B \to Bx \mid eC \mid C,$$
$$C \to A \mid xR,\ E \to aE \mid Ea \mid R,\ R \to z\}.$$

6. Выяснить, являются ли следующие грамматики неоднозначными:

а) $G=(\{A, B, S\}, \{a, b, c\}, P, S)$, где $P=\{S\to AB, A\to a \mid ab, B\to c\mid bc\}$;

б) $G=(\{\langle$целое без знака$\rangle, \langle$число$\rangle\}, D, P, \langle$целое без знака$\rangle)$, где $D = \{0, 1, 2, ..., 9\}$ и
$P=\{\langle$целое без знака$\rangle \to \langle$число$\rangle$,
$\langle$число$\rangle \to \langle$число$\rangle\langle$число$\rangle$, $\langle$число$\rangle \to 0\mid 1\mid 2 \ldots \mid 9\}$.

1.7.3. Контекстно-свободные языки

1. Основные определения. Контекстно-свободные грамматики (КСГ) и контекстно-свободные языки (КСЯ) важны для практических вычислений, так как, хотя большинство языков является некоторым расширением контекстно зависимых языков, их легче изучать как контекстно свободные языки, а затем по другим (семантическим) критериям отбросить некоторые из предложений. В этих случаях на КЗГ можно ссылаться как на грамматики, специфицированные *связанным* синтаксисом, а на КСГ — как специфицированные *несвязанным* синтаксисом. КСГ также дают возможность прояснить вопросы, содержащие (синтаксическую) неоднозначность.

Последовательность вывода $\alpha\in L(G)$ может быть изображена как упорядоченное дерево (см. ниже). Корень дерева обозначен через S, и если $S\overset{*}{\Rightarrow}\alpha\in T^*$ и $\alpha = a_1\ldots a_n$, то выходы помечены по порядку $a_1, \ldots, a_n$.

Предположим, что $S\overset{*}{\Rightarrow}\beta\Rightarrow\gamma\overset{*}{\Rightarrow}\alpha$ и что $\beta\Rightarrow\gamma$ достигается в результате применения продукции $C\to\gamma_1\ldots\gamma_m$, где $\gamma_i\in V$. В дереве это представляется пометкой вершины C и m ее преемников (точек, из которых C достигается за один шаг) $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$. Поэтому метки могут быть одинаковыми.

Пример 1. Рассмотрим грамматику с продукциями

$$E\to T\mid E+T,\ T\to I\mid I*T,\ I\to(E)\mid x.$$

Обычно в случае контекстно-свободных грамматик мы будем опускать другие элементы грамматики; первое правило специфицирует источник, а нетерминалами являются только символы в левой стороне продукций. В этом случае вывод предложения $x+x*x$ может быть изображен так, как это сделано на рис.4.

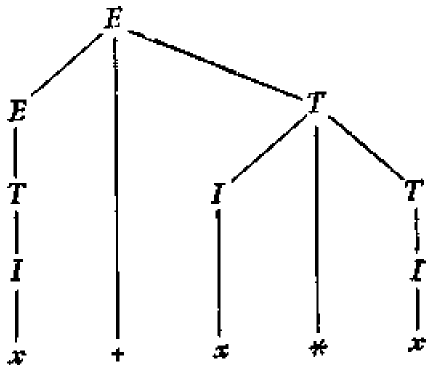


Рис. 4

С конструктивной точки зрения это изображение называется деревом вывода. (Когда это дерево используют для того, чтобы проанализировать, могут или не могут строки содержаться в *L(G)*, оно называется *деревом грамматического разбора.)* Легко видеть, что предложение является неоднозначным, если оно имеет два неизоморфных дерева вывода, и что для коптекстно-свободных грамматик канонический грамматический разбор изоморфен любой другой схеме обхода дерева.

Мы уже установили тот очевидный факт, что КСГ являются более ограниченными, чем КЗГ, но тем не менее они все же обладают весьма широкими изобразительными возможностями.

Пример 2. Используя контекстно-свободные правила, можно породить:

1) все последовательности из символов *A:*

$S \Rightarrow AS \mid \Lambda;$

2) все непустые списки из символов *A,* отделенные друг от друга символами *B:*

$$S \to A \mid ABS;$$

3) те же списки, что и в примере 2,2, однако допускается возможность пустого списка:

$$S \to T \mid \Lambda, \qquad T \to A \mid ABT;$$

4) все строки, начинающиеся с последовательности символов *A* или *B* и оканчивающиеся символами *C* или *D* соответственно:

$$S \to ASC \mid BSD \mid X;$$

например,

$$S \to [S] \mid (S) \mid X.$$

В этих примерах *A, B, C, D* и *X* могут быть определены дополнительно.

2. Характеристические свойства. Особенностью рассмотренных выше примеров, о которых вскоре мы сможем сказать несколько больше, является свойство рекурсии (один шаг рекурсии при каждом $n \in \mathbf{N}$). Трудности возникают тогда, когда требуется наложить некоторые ограничения на глубину рекурсии, не придумывая новых правил для каждой допустимой глубины рекурсии. Поскольку *N* и *P* конечны, то очевидно, что если не разрешать никаких рекурсий, то *L(G)* также будет конечен, и этот случай не очень интересен.

Прежде чем идти дальше, введем необходимую терминологию. Говорят, что грамматика *G:*

а) *леворекурсивная,* если в ней имеются выводы вида

$$X \overset{*}{\Rightarrow} X\alpha, \quad \text{где} \quad X \in N, \alpha \in V^+;$$

б) *праворекурсивная,* если в ней имеются выводы вида

$$X \overset{*}{\Rightarrow} \alpha X, \quad \text{где} \quad X \quad \text{и} \quad \alpha \text{ такие же, как и выше;}$$

в) *самовключающая,* если она имеет выводы вида

$$X \overset{*}{\Rightarrow} \alpha X \beta, \quad \text{где} \quad X \in N \quad \text{и} \quad \alpha, \beta \in V^+.$$

Говорят, что КСГ *рекурсивна,* если имеется один из случаев а) — в). Из сделанных выше замечаний ясно, что желательно бы иметь в грамматике «петли», однако не произвольного типа. К этому вопросу мы вернемся в п.1.7.4. Сформулируем результат о возможностях КСГ. В теории КСЯ это, вероятно, наиболее известный результат. Его доказательство использует рекурсивные свойства КСГ и структуру деревьев. Этот результат известен как *лемма о разрастании* для КСЯ или же как *uvwxy* теорема.

Теорема. *Если L — контекстно-свободный язык, то существует* $n \in \mathbf{N}$ *такое, что если* $z \in L$ *и* $|z| \geqslant n$, *то z может быть записано в виде uvwxy, где* $u, v, w, x, y \in T^*$, $vx \neq \Lambda$ *и для любого* $i \in \mathbf{N}$ *выполняется условие*

$$uv^iwx^iy \in L.$$

Доказательство. Поскольку *L* — контекстно-свободный язык, то он может быть порожден некоторой грамматикой *G = (N, T, P, S)* и не имеет продукций, за исключением, возможно, $S \to \Lambda$ (если $\Lambda \in L(G)$), уменьшающих длину сентенциальных форм. (Если $\Lambda \in L$, то *S* также исключают из правых частей продукций для того, чтобы не уменьшалась длина сентенциальных форм. В п.1.7.4 показано, что такая грамматика *G* может быть найдена.)

Если *G* не рекурсивна, то, поскольку *N* и *P* конечны, *L(G)* также конечен, и, следовательно, теорема справедлива, если взять *n* большим, чем длина самой длинной строки в *L(G).* С другой стороны, если *G* рекурсивна, то существует дерево вывода, в котором некоторый нетерминал, например *A,* встречается дважды на пути от корня к листу. Эта ситуация изображена на рис. 5. (Сюда включены лишь необходимые нам свойства.)

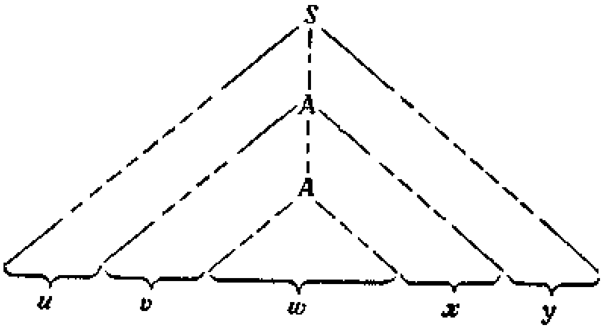


Рис. 5

Более того, поскольку *G* рекурсивна, то мы можем добиться выполнения соотношения $|uvwxy| \geqslant n,$ где *n* больше длины самого длинного предложения, полученного путем нерекурсивного вывода ($\leqslant k^m$, где *k* — длина самой длинной продукции *P,* а $m = |N|$). Таким образом, если $z \in L$ и $|z| \geqslant n,$ то z должно иметь требуемый вид

для некоторых пяти строк. Тогда $A \overset{+}{\Rightarrow} vAx$ $(vx \neq \Lambda,$ поэтому $|vAx| > |A|)$ и $A \overset{*}{\Rightarrow} w.$ Следовательно,

$$A \overset{*}{\Rightarrow} v^i A x^i \overset{*}{\Rightarrow} v^i w x^i$$

для любого $i \in \mathbf{N}.$ Отсюда, так как $S \overset{*}{\Rightarrow} uAy,$ имеем

$$S \overset{*}{\Rightarrow} uv^i w x^i y$$

для любого $i \in \mathbf{N}$ и, таким образом,

$$uv^i w x^i y \in L$$

для любого $i \in \mathbf{N}.$

Этот результат может быть использован для проверки того, что некоторые конструкции в языках программирования не могут быть определены с помощью КСГ. Дадим более реальный пример, который не требует знания конкретного языка.

Пример 3. Грамматика из примера 4 п.1.7.3 порождает язык $\{x^n y^n z^n: n \in \mathbf{N}\}$. Сейчас мы можем показать, что этот язык является контекстно-зависимым и не может быть порожден КСГ. Из теоремы следует, что существует некоторое достаточно большое *n,* при котором $x^n y^n z^n$ может быть записано в виде *abcdf* (требуется очевидная замена символов) для некоторых строк *a, ..., f.* Поскольку *x* и z в строке разделены, то очевидно, что строки *a* и *b* не могут содержать все символы *x, y* и z; аналогично и для всех других пар из $\{a, b, c, d, f\}$. В частности, по крайней мере один из символов *x, y* и z не может быть одновременно в строках *bad;* таким образом, строка ab^2cd^2f, которая по теореме содержится в *L,* содержит не все символы *x, y* и *z* (они также могут быть расположены в другом порядке, однако в дальнейшем мы не будем рассматривать эту возможность). Следовательно, мы не получаем тот же самый язык, из чего и следует требуемый результат.

Подобные противоречия могут быть получепы во многих ситуациях, когда информация, содержащаяся в более ранней части строки, влияет на требуемую структуру последующей подстроки. Следующий пример является типичным в этом отношении.

Пример 4. Язык $L = \{1^p: p \in \mathbf{N},$ *p* — простое число) не является контекстно-свободным:

$$L = \{11, 111, 11111, ...\}.$$

Предположим, что *L* является КСЯ. Так как существует бесконечное множество простых чисел, то имеется простое число *q* такое, что

$$1^q = uvwxy, \quad vx \neq \Lambda,$$

$$uv^iwx^iy \in L \quad \text{для всех } i \in \mathbf{N}$$

(это следует из приведенной выше леммы). Таким образом, существуют *a, b, c, d, e* такие, что

$$1^q = 1^a 1^b 1^c 1^d 1^e$$

при $b + d > 0$ и

$$1^{q_i} = a^a \left(1^b\right)^i 1^c \left(1^d\right)^i 1^e \in L$$

для всех $i \in \mathbf{N}$, так что $q = a + b + c + d + e$ — простое число и $q > 1$, а $q_i = a + c + e + (b + d)i$ — простое число для всех $i \in \mathbf{N}$. В частности, q_i — простое число при $i = a + b + c + d + e+1$, и в этом случае

$$q_i = (a + c + e) + (b + d)\,(a + b + c + d + e + 1) =$$
$$= (a + c + e) + (b + d)\,((a + c + e) + (b + d) + 1) =$$
$$= ((a + c + e) + (b + d))\,(1 + (b + d)) = q(1 + b + d),$$

Однако $q>1$ и $b+d+1>1$; следовательно, q_i не является простым числом для всех $i \in \mathbf{N}$, и мы получаем противоречие. Поэтому $L = \{1^p\colon p \in \mathbf{N}$, p — простое число) не является КСЯ.

Этот пример также демонстрирует практическую важность связанного и несвязанного синтаксисов. Можно придумать жесткий фиксированный синтаксис, которыйв ключает правильную семантику. Однако, где это возможно, часто гораздо удобнее и эффективнее разрешить использование более широкого языка, порожденного (обычно контекстно-свободной) грамматикой, а затем, если необходимо, сузить множество путем дальнейшей семантической проверки.

В примере 4 мы могли бы использовать правило

$$S \to 1S \mid 11,$$

чтобы породить все строки $1^q\colon q > 1$, и после этого проверить, что «q — простое число», с помощью подходящего арифметического алгоритма.

Короче говоря, контекстно-зависимые грамматики являются сложными и не изучены с достаточной полнотой. С другой стороны, контекстно-свободным грамматикам уделяется достаточно много внимания, и они составляют основу почти всех практических компьютерных трансляционных систем.

Упражнения.

1. Вывести КСГ, которая порождает множество всех строк над $\{a, b\}$, имеющих равное количество a и b.
2. Построить грамматики, порождающие следующие языки:

а) $\{a^{3n}\colon n \geqslant 1\}$;

б) $\{a^n b^{2m-1}\colon n, m \geqslant 1\}$;

в) $\{a^n b^n\colon n \geqslant 1\}$, $n, m \in \mathbf{N}$.

3. Используя лемму о разрастании, показать, что язык

$$L = \left\{a^{n^2}\colon n \in \mathbf{N}\right\}$$

не является контекстно-свободным.

4. Показать, что если L_1 и L_2 являются КСЯ, то таким же является язык $L_1 \cup L_2$.
5. Доказать, что множества

$$\{x^n y^n z^m\colon n \geqslant 1,\ m \geqslant 1\},\ \{x^m y^n z^n\colon n \geqslant 1,\ m \geqslant 1\}$$

являются КСЯ; показать, что если языки L_1 и L_2 являются контекстно-свободными, то отсюда не следует, что язык $L_1 \cap L_2$ является контекстно-свободным,

1.7.4. Понятия грамматического разбора и грамматических модификаций

Наиболее непосредственный и очевидный контакт, который средний пользователь имеет с процессами перевода (трансляцией с одного языка на другой),— это использование различного рода компиляторов для языков высокого уровня. При использовании такого языка программа, которую мы написали, транслируется в *эквивалентную* программу в машинном коде *(объектную программу),* которая может быть расшифрована и выполнена компьютером. Общая схема компиляции изображена на рис. 6.

Рис. 6

В общем случае стадии процесса компиляции могут рассматриваться связанными последовательно, как это изображено на диаграмме; однако на практике они часто выполняются одновременно. Генерация кода требует знания семантических интерпретаций, которые связаны с каждой синтаксической структурой внутри программы. Для оптимизации машинного кода необходимо знать тонкости строения машины. Мы не будем рассматривать эти стадии, а ограничимся лишь обсуждением трансляции ключевой программы в дерево грамматического разбора. Ключевая (исходная) программа является просто строкой символов. Внутри этой строки часто встречаются некоторые комбинации символов, в которых отдельные символы не имеют смысла, однако комбинация символов передает смысл. (См. пример 1 п.1.7.2; «dog» имеет значение, а буква «о» внутри «dog», очевидно, отдельно не несет смысловой нагрузки.) Такие составные символы, называемые также *лексемами,* не являются абсолютно необходимыми и могут не использоваться в некоторых языковых трансляторах, однако обычно они существуют и кодируются одним символом (для каждой комбинации свой символ), чтобы сократить длину исходной программы (на данный момент в ее лексической форме) и избежать необходимости рассматривать ненужные детали на следующих этапах. Типичными лексемами являются:

а) ключевые слова, т. е. слова с постоянным значением в языке; например,

$$\left.\begin{matrix}\mathbf{begin}\\ \mathbf{end}\\ \mathbf{while}\end{matrix}\right\}\ \textbf{Паскаль},\qquad \left.\begin{matrix}\mathrm{GOTO}\\ \mathrm{DO}\\ .\mathrm{OR}.\end{matrix}\right\}\ \textbf{Фортран},$$

$+, -, *, /$ в большинстве языков;

б) числа 52, 31.65 и т. п.;

в) строки или последовательности символов;

г) идентификаторы, введенные программистом.

Лексемы обычно описываются регулярными грамматиками. Следовательно, мы свели исходную проблему к грамматическому разбору строки лексем. Графически это означает — заполнить треугольник на рис. 7 таким образом, чтобы он был совместим с продукцией правил грамматики.

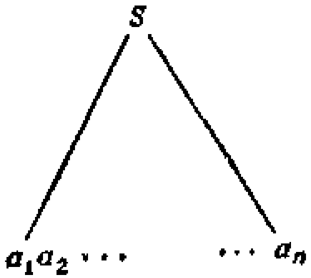


Рис.7

1. Процедуры приведения. В общем случае нам не разрешается изменять строку $\alpha = a_1a_2\ldots a_n;$ поэтому вся деятельность до проведения процесса грамматического разбора должна быть направлена на грамматику. Потенциально нам будет необходимо осуществить достаточно сложные преобразования грамматики, чтобы проверить, что все нетерминалы действительно можно использовать в грамматическом разборе. Существует два варианта, в которых нетерминалы могут не подходить для проведения произвольного грамматического разбора; опишем их формально.

Определение. Пусть $G = (N, T, P, S)$ есть КСГ. Тогда говорят, что нетерминальный символ $X \in N$ является:

а) *недоступным,* если $X \neq S$ и не существует вывода вида

$$S \overset{+}{\Rightarrow} \alpha X \beta \quad \text{для} \quad \alpha, \beta \in V^*;$$

б) *непродуктивным,* если не существует строки $\gamma \in T^*$ такой, что $X \overset{+}{\Rightarrow} \gamma;$

в) *бесполезным,* бели он недоступен или непродуктивен.

Грамматика, не имеющая бесполезных нетерминалов, называется *редуцированной.*

Ясно, что бесполезные символы не играют никакой роли в построении предложений. Хотя хотелось бы не включать в грамматику бесполезность символов, они могут быть введены алгоритмами, предназначенными для модификации грамматики с целью соответствия некоторым требованиям (см. ниже). Бесполезные символы не обязательно увеличивают размер грамматического разбора, и сейчас мы опишем процесс их удаления.

Пусть $G = (N, T, P, S)$ есть КСГ. Определим множество N' как

$$N' = N \cup \{\tau\},$$

где τ — новый символ $(\tau \notin V)$, и отношение ρ на N' следующим образом: $(A, \ B) \in \rho$, если $A \to \alpha B\beta \in P$ при $A,\ B \in N,\ \alpha,\ \beta \in V^*$; $(A,\ \tau) \in \rho$, если $A \to \gamma \in P$ при некотором $\gamma \in T^*$.

Предложение.

а) *A доступно тогда и только тогда, когда A = S или* $(S,\ A) \in \rho^+$;

б) *A является продуктивным тогда и только тогда, когда* $(A,\ \tau) \in \rho^+$.

Доказательство.

а) *A* доступно тогда и только тогда, когда существует вывод вида $S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha A\beta$ для $\alpha,\ \beta \in V^*$ или, что эквивалентно, тогда и только тогда, когда существует $i \geqslant 0$ такое, что

$$\overbrace{S \Rightarrow \ldots \Rightarrow}^{i} \alpha A\beta.$$

Когда $S \neq A$, это имеет место лишь в случае $S\rho^+A$; о поэтому $(S,\ A) \in \rho^+$.

б) *A* продуктивно тогда и только тогда, когда $A \overset{i}{\Rightarrow} \gamma$ для некоторого *i* > 0 и $\gamma \in T^*$, т. е. тогда и только тогда, когда существует последовательность сентенциальных форм $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_i$ таких, что

$$A \Rightarrow \alpha_0 \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha_i = \gamma,$$

т. е. когда существует последовательность $A = A_0,\ A_1, \ldots,\ A_{i-1} \in N$ такая, что A_i является подстрокой α_i, и, следовательно,

$$A_0\rho A_1,\ A_1\rho A_2,\ \ldots,\ A_{i-2}\rho A_{i-1},\ A_{i-1} \to \beta,$$

где β — подстрока γ, т. е. $A_0\rho A_1,\ A_1\rho A_2,\ \ldots,\ A_{i-1}\rho\tau$. Поэтому $A\rho^+\tau$.

На практике ρ^+ можно вычислять, используя алгоритм Уоршолла. Пусть $N_u \subset N$ — множество бесполезных символов *G* и $N' = N \backslash N_u,\ P' = P \backslash P_u$, где P_u — множество продукций, содержащих элементы N_u. Тогда *G'=(N', T', P', S),* где *T'* — множество терминальных символов, появляющихся в продукциях *P',* эквивалентно КСГ без бесполезных символов.

Алгоритм. Удаление бесполезных символов.

Вход: КСГ *G = (N, T, P, S).*

Выход: эквивалентная КСГ *G'* = (*N', T', P', S)* без бесполезных символов.

Метод: построить *N', T', P',* как указано выше.

Пример 1. Рассмотрим грамматику

$$G = (\{A, B, C, D\}, \{x, y, p, q, w, a\}, P, A),$$

где

$$P = \{A \to x \mid yDC \mid D,\ B \to q \mid Bx,\ C \to Cx \mid yC,\ D \to Da \mid Cw \mid p\}.$$

Используем отношение ρ, определенное выше, и его представление в матричной форме:

$$M(\rho) = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ \tau \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & \tau \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

В этом примере имеем $M(\rho^+) = M(\rho) = M$. Таким образом, $M_{AB} = M_{C\tau} = 0$, и поэтому *B* недоступно, а *C* непродуктивно. Следовательно, грамматика сводится к

$$G' = (\{A, D\}, \{x, a, p\}, P', A),$$

где

$$P' = \{A \to x \mid D,\ D \to Da \mid p\}.$$

После удаления бесполезных символов каждый оставшийся нетерминальный символ *X* встречается по крайней мере в одном дереве вывода (рис. 8) с *X*, связанным вверх с *S* и вниз с некоторыми терминальными строками $a_1 \ldots a_n$.

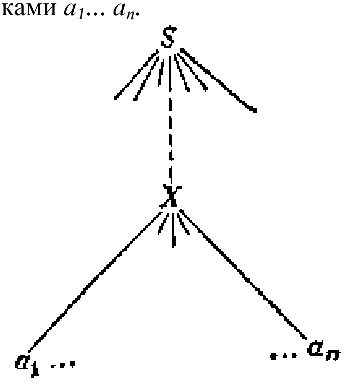


Рис. 8

Один «очевидный» путь грамматического разбора строки — это вывести все строки, отметить их соответствующие канонические последовательности, а затем проверить предложение, сравнивая его с каждой строкой. При совпадении использовать выводящую последовательность, чтобы определить дерево грамматического разбора. Конечно, в большинстве примеров величина $|L|$ бесконечна, и поэтому этот процесс невозможен; однако если грамматика не имеет неудачных продукций, то это приближение обеспечивает основу техники разбора, которая, по крайней мере в локальном контексте, может использоваться на практике.

Если длина сентенциальных форм не может уменьшаться при применении *G*, то при проверке $\alpha \in L(G), |\alpha| = n$ можно отбросить все формы (перед получением строк над *N*), чья длина превосходит *n.* Предложения, длина которых не превосходит *n,* могут сравниваться с α обычным путем; в разумной грамматике все такие возможные строки должны порождаться за конечное число шагов. Сейчас мы займемся приведением грамматики и построением ее эквивалентной версии, которая обладает «более легким» грамматическим разбором.

Для того чтобы процесс порождения, связанный с данным предложением, был конечен, необходимо гарантировать, что все последовательности вывода действительно могут быть получены. Следовательно, появление таких ситуаций, как $X \to X$ и $X \to \Lambda,$ представляет интерес. Записывая их непосредственно как продукции, это легко обнаружить; однако более общие ситуации $X \overset{+}{\Rightarrow} X$ и $X \overset{+}{\Rightarrow} \Lambda$ труднее локализовать. Более того, два типа выводов связаны таким образом, как это продемонстрировано в следующем примере.

Пример 2. Предположим, что включенные продукции некоторой грамматики имеют вид

$$X \to Y, \quad Y \to W, \quad Z \to V, \quad W \to Z, \quad V \to X.$$

Следуя возможной последовательностью вывода из *X,* получаем, что $X \overset{+}{\Rightarrow} X,$ и, следовательно, как только *X* встречается в сентенциальной форме, мы могли бы вставить прогрессию $X \Rightarrow Y \Rightarrow W \Rightarrow Z \Rightarrow V \Rightarrow X$ (снова и снова), не получая, таким образом, ничего, кроме неоднозначности.

Как нетрудно видеть, это «петля» из нетерминалов внутри *N*. Заметим, однако, что мы могли бы иметь практически такую же ситуацию в завуалированном виде, если вместо $X \to Y$ и $Y \to W$ имели бы, например,

$$X \to AY, \; Y \to AWA, \; A \to \Lambda.$$

Определение. Λ-*продукцией* является продукция вида

$$X \to \Lambda, \quad X \in N.$$

КСГ $G = (N, T, P, S)$ называется Λ-*свободной,* если

а) или P не имеет Λ-продукций,

б) или существует только одна Λ-продукция $S \to \Lambda$

и S не появляется в правой части произвольной продукции из P.

Продукция является *одиночной,* если она имеет вид

$$X \to Y, \quad \text{где} \quad X, Y \in N.$$

Продукция вида $X \to X$ при $X \in N$ называется *тривиальной.* КСГ $G =(N, T, P, S)$ называется *циклически свободной,* если не существует выводов вида $X \overset{+}{\Rightarrow} X$ для любого $X \in N.$

Как уже отмечалось, обнаружение и удаление циклов и Λ-выводов тесно связаны. Мы начнем с места расположения всех нетерминалов, из которых может быть достигнуто Λ.

Замечание. Для заданной грамматики G — (N, T, P, S) через N_Λ будем обозначать множество $\{X\colon\ X \overset{+}{\Rightarrow} \Lambda\} \subseteq N$.

Алгоритм. Вычисление N_Λ.

Вход: произвольная КСГ $G=(N, T, P, S)$.

Выход: N_Λ.

Метод: пусть $P = \{P_1, \ \ldots, \ P_{|P|}\}$, где каждое P_i имеет вид

$$\alpha_i \to \beta_i\colon\ \alpha_i \in N, \ \beta_i \in V^*;$$

тогда, рассматривая N_Λ как «переменную» типа множества, имеем

$$\begin{aligned}
&N_\Lambda \leftarrow \varnothing,\\
&i \leftarrow |P|,\\
&\textbf{repeat} \ \ (\textbf{if}\,(\alpha_i \notin N_\Lambda)\,\textbf{and}\,(\beta_i \in N_\Lambda^*)\\
&\qquad\qquad \textbf{then}\,(N_\Lambda \leftarrow N_\Lambda \cap \{\alpha_i\}, \ i \leftarrow |P|)\\
&\qquad\qquad \textbf{else}\ i \leftarrow i-1)\\
&\textbf{until}\ i = 0. \ /\!\!/
\end{aligned}$$

Алгоритм. Переход к Λ-свободной грамматике.

Вход: произвольная КСГ $G = (N, T, P, S)$.

Выход: эквивалентная Λ-свободная КСГ $G' = (N', T, P', S')$.

Метод:

1) определяем N_Λ;

2) строим P' следующим образом:

а) Пусть $A \to \alpha_0 B_1 \alpha_1 B_2 \alpha_2 \ldots B_k \alpha_k \in P,$

где $k \geqslant 0$ и при $1 \leqslant i \leqslant k$ каждое B_i есть в N_Λ, но ни один символ в $\alpha_j \in V^*$ $(0 \leqslant j \leqslant k)$ не находится в N_Λ. Тогда добавим к P' продукции вида

$$A \to \alpha_0 X_1 \alpha_1 X_2 \alpha_2 \ldots X_k \alpha_k,$$

где X_i есть или B_i или Λ, без добавления $A \to \Lambda$ к P' (это могло бы иметь место, если бы все α_i совпали с Λ).

б) Пусть $S \in N_\Lambda$. Тогда добавим к P' продукции

$$S' \to \Lambda | S,$$

где S' — новый символ, и тогда $N' = N \cup \{S'\}$; в противном случае $N' = N$ и $S' = S$.

Сейчас мы можем рассмотреть удаление циклов из КСГ. Месторасположение циклов может быть легко найдено выделением отношения $\rho = \{(A,\ B):\ A \to B \in P\}$ и формированием замыкания ρ^+. Тогда ясно, что произвольное X: $X\rho^+X$ должно быть в цикле. Объединим это вместе со схемой «обратной замены», которая удаляет все нетерминалы внутри произвольного цикла. (Она также удаляет любую тривиальную продукцию.)

Алгоритм. Переход от КСГ к эквивалентной циклически свободной грамматике.

Вход: Λ-свободпая КСГ $G=(N, T, P, S)$.

Выход: эквивалентная циклически свободная грамматика

$$G' = (N',\ T',\ P',\ S')$$

(Нетерминалы G переименованы: A_1 на A_n, где $n = |N|$, S на A_1, а каждую продукцию P_i выражают через $\alpha_i \to \beta_i$.) Дополнительно мы используем множество INCYCLES, а n нетерминалов обозначаем через REPLACEi, где $1 \leqslant i \leqslant n$. Алгоритм будет иметь следующий вид:

1) определяем ρ над $\mathbf{N}_n$ так, что $i\rho j$ тогда и только тогда, когда $A_i \to A_j \in P$;

2) пусть $\sigma = \rho^+$;

3) INCYCLES $\leftarrow \varnothing$;

4) **for** i **from** 1 **to** $n-1$

  do (**for** j **from** $i+1$ **to** n

    do if ($j \notin$ INCYCLES **and**

      $i\sigma j$ **and**

      $j\sigma i$)

    then (INCYCLES $\leftarrow$ INCYCLES $\cup \{j\}$,

      REPLACE$j \leftarrow A_i$))

5) $j \leftarrow 0$

  for i **from** 1 **to** $|P|$

  do (**for all** $k \in$ INCYCLES

    in P_i replace A_k by REPLACEk

      giving new P_i

    if (new $P_i \notin \{P'_1, \ldots, P'_j\}$

      and $\alpha_i \neq \beta_i$ in new P_i)

    then ($j \leftarrow j+1$, $P'_j \leftarrow$ new P_i))

6) $G' = (N \setminus \text{INCYCLES}, T, P', S)$. //

Говорят, что КСГ является приведенной, если она Λ-свободна, циклически свободна и редуцирована. Получив собственную КСГ G, мы можем использовать ее для проверки условия $\alpha \in L(G)$ для данного $\alpha \in T^*$.

2. Модификации грамматического разбора. Как было установлено во введении к п.1.7.4, задача грамматического разбора строки состоит в заполнении треугольника вывода (рис. 7) с соответствующим деревом. Конечно, в большинстве случаев это заполнение нельзя разумно выполнить за один шаг, и обычно оно получается при помощи последовательности поддеревьев. Эти последовательности поддеревьев могут быть получены многими способами; три наиболее используемых способа изображены на рис. 9.

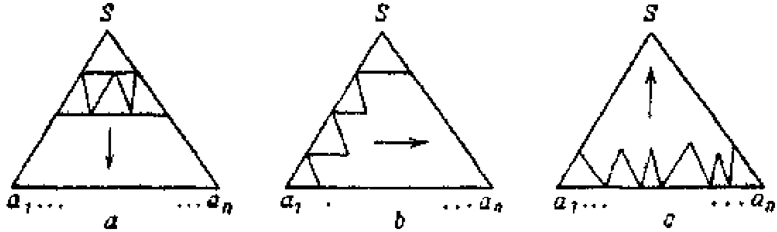


Рис. 9

Стратегия грамматического разбора, изображенная на рис. 9, *а*, называется грамматическим разбором сверху вниз. В нем применяют продукции (в некотором выбранном порядке) к сентенциальным формам, пытаясь расширить *S* внутрь строки $a_1 \dots a_n$. При таком разборе естественно использовать в качестве гида часть строки $(a_1 \dots a_n)$, чтобы управлять выводом. Для практических рассмотрений, согласующихся с чтением $a_1 \dots a_n$слева направо (рис. 9, *б)* и желанием начать разбор перед включением полной строки, необходимо использовать начало строки. Следовательно, в поиске сентенциальных форм, которые пачинаются с $a_1 \in T$ (и соответственно исследуя терминальные строки как начальные подстроки последовательных частей входной строки), мы должны отвергнуть возможность выводов вида $X \overset{+}{\Rightarrow} X\beta$ $(X \in N,$ $\beta \in V^+)$. Таким образом, чтобы начать разбор сверху вниз, мы должны удалить левую рекурсию.

В общем случае это может быть сделано с использованием процесса, аналогичного решению системы линейных алгебраических уравнений. Часто возможно рассматривать одну рекурсию за один раз и удалять ее, используя довольно простое тождество. Оправданием такого подхода служит порождаемый язык. Рассмотрим $X \overset{+}{\Rightarrow} X\alpha$. Путем «обратной подстановки» правых частей продукций мы можем получить прямую рекурсию как элемент *P;* таким образом, имеем $X \to X\alpha \mid \beta$. Рассматривая это как полную грамматику над $\{\alpha, \beta\}$ (β представляет все другие нелеворекурсивные возможности для *X),* очевидным образом получаем, что

$$L(X) = \{\beta\alpha^n: \ n = 0 \text{ или } n \in \mathbf{N}\}.$$

Это множество может порождаться также продукциями

$$X \to \beta Y, \quad Y \to \alpha Y \mid \Lambda,$$

которые не являются леворекурсивными (они праворекурсивны). Чтобы закончить преобразование, продукция $X \to \beta Y$ должна быть расширена при необходимости до правильного числа термов.

Пример 3. Рассмотрим грамматику с продукциями

$$A \to Bc \mid dC,\ B \to xA \mid Ce,\ C \to Ab \mid w.$$

Она леворекурсивна, поскольку

$$A \Rightarrow Bc \Rightarrow Cec \Rightarrow Abec.$$

Путем обратной подстановки для C в B и B в A получаем

$$B \to xA \mid (Ab \mid w)e \equiv B \to xA \mid Abe \mid we,$$

$$A \to BC \mid dC \equiv A \to (xA \mid Abe \mid we)c \mid dC \equiv$$

$$\equiv A \to xAc \mid Abec \mid wec \mid dC \equiv A \to A\,\underbrace{bec}_{\alpha} \mid \underbrace{xAc \mid wec \mid dC}_{\beta}.$$

Поэтому, используя преобразование

$$A \to \beta Y, \quad Y \to \alpha Y \mid \Lambda,$$

получаем

$$A \to (xAc \mid wec \mid dC)Y \equiv A \to xAcY \mid wecY \mid dCY,$$

$$Y \to bec\,Y \mid \Lambda,\ B \to xA \mid Ce,$$

$$C \to Ab \mid w.\ /\!/$$

Заметим, что в этом примере B может быть «вырезано» и может не принимать никакого участия в произвольном предложении, порожденном из корня A (следовательно, надо удалить все следы B из грамматики.)

Отметим также, что мы ввели Λ-продукцию. Эта продукция, созданная как побочный эффект «преобразования грамматического разбора», вызвала бы меньше проблем, чем аналогичная продукция, встречающаяся естественным образом. Символ B может быть удален при помощи алгоритма для удаления бесполезного символа.

Хотя обычно будет достаточно частичного удаления отдельных леворекурсивных цепей внутри N, мы должны использовать матричное обобщение описанного процесса для того, чтобы справиться с удалением внутренних левых рекурсий.

Напомним, что в обычном случае мы заменяем $X \to X\alpha \mid \beta$ при помощи $X \to \beta Y,\ Y \to \alpha Y \mid \Lambda$. Если мы имеем n нетерминалов $X_1, \ldots, X_n$, которые являются взаимно леворекурсивными, так что не сводятся путем последовательности обратных замен к простому счучаю, тогда мы можем представить соответствующие продукции схематически следующим образом:

$$X_1 \to X_1A_{11} \mid X_2A_{21} \mid \ldots \mid X_nA_{n1} \mid B_1,$$

$$X_2 \to X_1A_{12} \mid X_2A_{22} \mid \ldots \mid X_nA_{n2} \mid B_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_n \to X_1A_{1n} \mid X_2A_{2n} \mid \ldots \mid X_nA_{nn} \mid B_n,$$

где каждое A_{ij} представляет собой остаток всех операций, которые могут быть выведены из X_j и которые начинаются с X_i, и аналогично каждое B_j представляет все альтернативы для нетерминалов X_j, которые не начинаются с элементов $\{X_1, \ldots, X_n\}$.

Теперь, поскольку A_{ij} и B_j являются множествами строк, отсюда следует, что:

1) если $X_j \to X_i$, то $\Lambda \in A_{ij}$;

2) если $X_j \to \alpha$ и $\alpha \neq X_i\beta$ для $\beta \in V^*$, то $\alpha \in B_j$;

3) если $X_j \not\to X_i\gamma$ для любого $\gamma \in V^*$, то $A_{ij} = \varnothing$.

Следовательно, над алгебраической системой $(V^*, \odot, |)$ мы можемсвести эти продукции к матричной схеме

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}\mathbf{A} \mid \mathbf{B} \quad \text{в} \quad \mathscr{M}(n, (V^*, \odot, |)),$$

или, записывая альтернативный оператор | как +, к схеме

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{B} \quad \text{в} \quad \mathscr{M}(n, (V^*, \odot, +)).$$

По аналогии с простым (нематричным) случаем, о котором будет более подробно сказано в п.1.8, скажем, что

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{Y},$$

где $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{I}$, а $\mathbf{I}$ определяется на $(V^*, \odot, +)$ как

$$\mathbf{I}_{ij} = \begin{cases} \{\Lambda\}, & \text{если} \quad i = j, \\ \varnothing, & \text{если} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Пример 4. Предположим, что $S = D$ и G имеет следующие продукции:

$$D \to Dx \mid Ey \mid Fz, \quad E \to Da \mid Fc,$$
$$F \to Dp \mid Eq \mid Fr \mid w.$$

Таким образом, используя общую схему, получаем

	$X_j \to X_1 \; A_{1j}$	$X_2 \; A_{2j}$	$X_3 \; A_{3j}$	B_j
$X_1 =$	$D \to Dx$	Ey	Fz	
$X_2 =$	$E \to Da$		Fc	
$X_3 =$	$F \to Dp$	Eq	Fr	w.

Итак, $X_i = \sum\limits_k B_k Y_{ki}$. Поэтому

$$X_1 = D \to \sum_k B_k Y_{k1} = B_3 Y_{31} = wY_{31},$$

$$E \to wY_{32}, \quad F \to wY_{33}, \quad Y_{ij} = \sum_k A_{ik} Y_{kj} + I_{ij};$$

следовательно,

$$
\begin{aligned}
&Y_{11} \to xY_{11} \mid aY_{21} \mid pY_{31} \mid \Lambda,\\
&Y_{12} \to xY_{12} \mid aY_{22} \mid pY_{32},\\
&Y_{13} \to xY_{13} \mid aY_{23} \mid pY_{33},\\
&Y_{21} \to yY_{11} \mid \qquad qY_{31},\\
&Y_{22} \to yY_{12} \mid \qquad qY_{32} \mid \Lambda,\\
&Y_{23} \to yY_{13} \mid \qquad qY_{33},\\
&Y_{31} \to zY_{11} \mid cY_{21} \mid rY_{31},\\
&Y_{32} \to zY_{12} \mid cY_{22} \mid rY_{32},\\
&Y_{33} \to zY_{13} \mid cY_{23} \mid rY_{33} \mid \Lambda.
\end{aligned}
$$

В этом примере преобразования производят ненужные нетерминалы; удаляя их, получаем

$$
\begin{aligned}
&D \to wY_{31},\\
&Y_{31} \to zY_{11} \mid cY_{21} \mid rY_{31},\\
&Y_{11} \to xY_{11} \mid aY_{21} \mid pY_{31} \mid \Lambda,\\
&Y_{21} \to yY_{11} \mid qY_{31}.
\end{aligned}
$$

Изменяя соответствующим образом имена, получаем

$$
\begin{aligned}
&D \to wJ,\\
&J \to zK \mid cL \mid rJ,\\
&K \to xK \mid aL \mid pJ \mid \Lambda,\\
&L \to yK \mid qJ.
\end{aligned}
$$

Чтобы нагляднее показать степень трансформации, приведем здесь дерево грамматического разбора строки *«wcqzayx»* для первоначальной грамматики (рис. 10, а) и модифицированной (рис. 10, *б)* грамматик.

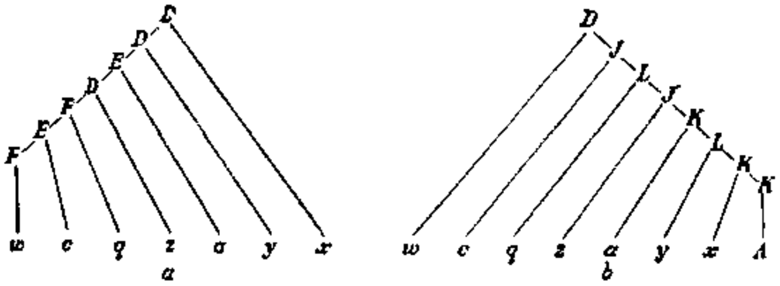


Рис. 10

Удаление левых рекурсий обеспечивает, если это возможно, вывод строки, начинающейся с требуемого терминального символа; однако это не гарантирует, что мы получим только одну такую строку, и, следовательно, может случиться, что мы пойдем неправильным путем.

Пытаясь избежать неправильных последовательностей грамматического разбора, мы можем явно использовать манипуляции, уже встречавшиеся при предыдущих преобразованиях. Этот процесс называют *левой факторизацией.* Процесс требует, чтобы были проведены продукции, включающие в левую часть данный нетерминал. Затем расширяют все правые части и те, которые начинаются с общей подстроки над *T,* собирают вместе.

Пример 5.

$$A \to xyB \mid xyBC \mid yPQ \mid yxV =$$

$$= A \to xyB(\Lambda \mid C) \mid y(PQ \mid xV) = A \to xyBA_1 \mid yA$$

где $A_1 \to \Lambda \mid C$, обычно записываемое как $C \mid \Lambda$, и $A_2 \to PQ \mid xV$.

Заметим, что мы вновь можем ввести Λ-продукции. Однако если в настоящий момент нет Λ-продукций, то в заключительных левофакторизованных продукциях и грамматике не будет левых рекурсий. В этом случае следующий символ входной строки можно использовать для того, чтобы непосредственно определить, какие альтернативы надо использовать для расширения нетерминалов в сентенциальную форму. Если Λ-продукции встречаются в явном виде, то это вызывает затруднения.

В силу того что Λ является ведущей подстрокой каждой строки над произвольным алфавитом, она всегда совпадает с началом строки задания, и, следовательно, никакие последующие альтернативы никогда не будут рассматриваться. Здесь нет возможности входить в полный анализ проблемы, однако заметим, что если *G = (N, T, P, S)* и мы определяем

а) $\mathrm{FIRST}(\alpha) = \left\{x\colon\ \alpha \overset{*}{\Rightarrow} x\beta,\ x \in T, \beta \in V^*\right\}$

и * -

б) $\mathrm{FOLLOW}(\alpha) = \left\{x\colon\ S \overset{*}{\Rightarrow} \gamma\alpha x\delta,\ x \in T,\ \gamma\delta \in V^*\right\}$,

и если для каждой продукции $X \to \alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \ldots \mid \alpha_n$ J

а) $\mathrm{FIRST}(\alpha_i) \cap \mathrm{FIRST}(\alpha_j) = \varnothing,\ i \neq j$

и

б) $X \overset{*}{\Rightarrow} \Lambda$,

то

$$\mathrm{FIRST}(X) \cap \mathrm{FOLLOW}(X) = \varnothing.$$

В этом случае G можно использовать для предсказывающего анализа (см. рис. 9,б). В таком анализе можно проверять альтернативы в произвольном порядке, не применяя Λ-выводов, пока все другие возможности не исчезли. Следующий пример иллюстрирует этот процесс.

Пример 6. Предположим, что единственной продукцией в грамматике является

$$C \to xCx \mid \Lambda.$$

Попытаемся провести грамматический разбор строки *«хх»* Строка отбрасывается, хотя она и законна, потому что мы вынуждены применить первую продукцию дважды, порождая таким образом неправильное продвижение, поскольку $x \in \mathrm{FIRST}(C) \cap \mathrm{FOLLOW}(G)$ и $C \to \Lambda$. Это графически изображено на рис. 11.

Использование грамматики $C \to xxC \mid \Lambda$ (рис. 12) не вызывает никаких трудностей в грамматическом разборе, потому что сейчас $x \notin \mathrm{FOLLOW}(C)$.

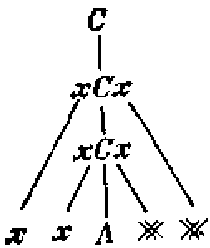


Рис. 11

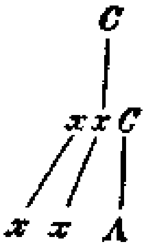


Рис. 12

Перед тем как завершить параграф, упомянем другой основной метод грамматического разбора — *снизу вверх,* в котором продукции применяют *назад,* пытаясь свести строку задания к S (см. рис. 9, *с*). Этот метод применяют более широко по сравнению с методом сверху вниз; используя некоторые модификации этого метода, можно повысить эффективность грамматического разбора.

Упражнения.

1. Модифицировать грамматику, продукции которой даны ниже, таким образом, чтобы она не была леворекурсивной:

$$A \to Bx \mid Cz \mid w, \quad B \to Ab \mid Bc, \quad C \to Ax \mid By \mid Cp.$$

2. Пусть $G = (N, T, P, S)$ является КСГ и символ $A \in N$ не является бесполезным символом G. Показать, что существование одного из следующих выводов в G влечет за собой неоднозначность G:

а) $A \overset{+}{\Rightarrow} A\gamma A$;

б) $A \overset{+}{\Rightarrow} \alpha A \mid A\beta$;

в) $A \overset{+}{\Rightarrow} \alpha A \mid \alpha A \beta A$;

г) $A \overset{+}{\Rightarrow} A$

при $\gamma \in (N \cup T)^*$ и $\alpha, \beta \in (N \cup T)^+$.

3. Определить Λ-свободную КСГ, эквивалентную КСГ и определенную как

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S),$$

где

$$P = \{S \to aSbS \mid bSaS \mid \Lambda\}.$$

4. Пусть

$$G = (\{A, B, C, D, E, S\}, \{a, b, c\}, P, S),$$

где

$$P = \{S \to A \mid B,\ A \to C \mid D,\ B \to D \mid E,\ C \to S \mid a \mid \Lambda,$$
$$D \to S \mid b,\ E \to S \mid c \mid \Lambda\}.$$

Найти приведенную грамматику, эквивалентную G.

1.7.5. Грамматики операторного предшествования

Важное подмножество КСГ содержит к себе так называемые *операторные грамматики.* Это грамматики, в которых все продукции такие, что никакие два нетерминала не являются смежными в любой правой части, и, следовательно, лежащий между ними терминал можно представить как оператор (хотя не обязательно в арифметическом смысле). Попытаемся определить отношения предшествования на множестве $T \cup \{\vdash, \dashv\}$, где $\vdash$ и $\dashv$ суть новые символы, которых нет в V и которые ограничивают «предложение». Правила определим следующим образом:

1. $a \doteq b$, если $A \to \alpha a \beta b \gamma \in P$; здесь α, $\gamma \in V^*$ и $\beta \in$ $\in N \cup \{\Lambda\}$.

2. $a < \cdot b$, если $A \to \alpha a B \beta \in P$; здесь $B \overset{+}{\Rightarrow} \gamma b \delta$, $\gamma \in N \cup \{\Lambda\}$ и α, β, $\delta \in V^*$.

3. $a \cdot > b$, если $A \to \alpha B b \beta \in P$; здесь $B \overset{+}{\Rightarrow} \gamma a \delta$, $\delta \in N \cup$ $\cup \{\Lambda\}$ и α, β, $\gamma \in V^*$.

4. $\vdash < \cdot\, a$, если $S \overset{+}{\Rightarrow} \alpha a \beta$, $\alpha \in N \cup \{\Lambda\}$, $\beta \in \Lambda^*$.

5. $a \cdot > \dashv$, если $S \overset{+}{\Rightarrow} \alpha a \beta$, $\beta \in N \cup \{\Lambda\}$, $\alpha \in V^*$.

Символы $< \cdot$, $\doteq$ и $\cdot >$ обозначают отношения предшествования (читается как «имеет меньшее старшинство, чем», «имеет такое же старшинство, как», «имеет большее старшинство, чем»); при условии что не более одного такого отношения справедливо между двумя произвольными операторами из $T \cup \{\vdash, \dashv\}$, соответствующую операторную грамматику называют *грамматикой операторного предшествования.*

Хотя она и является гораздо более сложной, чем другие виды грамматик, встречавшихся до сих пор, понятие предшествования может быть введено так, что будет совпадать с обычным старшинством арифметических операторов и будет расширено до операторов, действия которых важны с точки зрения вычислений, однако обычно считаются само собой разумеющимися при вычислениях «на бумаге».

Пример 1.

$$E \to E + T \mid T, \quad T \to T * P \mid P, \quad P \to (E) \mid x.$$

Для этой грамматики отношения предшествования приведены в виде таблицы на рис. 13.

	$+$	$*$	$($	$)$	x	$\dashv$
$\vdash$	$<$	$<$	$<$		$<$	
$+$	$>$	$<$	$<$	$>$	$<$	$>$
$*$	$>$	$>$	$<$	$>$	$<$	$>$
$($	$<$	$<$	$<$	$\doteq$	$<$	
$)$	$>$	$>$		$>$		$>$
x	$>$	$>$		$>$		$>$

Рис. 13

Для того чтобы увидеть, что происходит в действительности, рассмотрим этап внутри вывода предложения $\vdash x * (x + x) \dashv$. Из правила 2 определений предшествования видно, что для символов «*» и «(» имеем

$$T \to T * P, \quad P \overset{+}{\Rightarrow} (E).$$

Таким образом, выполняется отношение $* \lessdot ($, и поэтому поддерево P должно быть вычислено перед вычислением $T * P$; следовательно, действие, связанное с «(», которым является удаление этой и парной к ней закрывающей скобки, выполняется перед действием, обозначенным «*». (Графически ситуацию можно представить так, как это сделано на рис. 14.

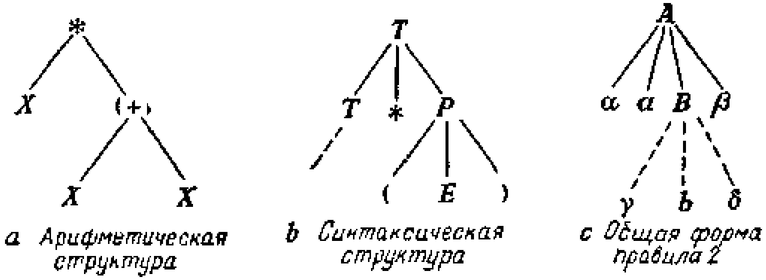


Рис. 14

Здесь для правила 2 имеем

$A \equiv T$, $\alpha \equiv T$, $a \equiv *$, $B \equiv P$, $\beta \equiv \Lambda$, $\gamma \equiv \Lambda$, $b \equiv ($ и $\delta \equiv E$.

Отсюда видно, что основная структура грамматик операторного предшествования является простой и естественной, однако выглядит сложной при записи из-за общности правил.) Заменяя x целыми числами 2, 3 и 4, получаем $\vdash 2 * (3 + 4) \dashv$. Записывая отношения предшествования под этим выражением, видим, как определяется порядок вычислении

$$\begin{array}{ccc} \vdash & 2 & *; \\ \lessdot & & \gtrdot: \end{array}$$

а) выберем число 2 и сохраним его в стеке:

$$\begin{array}{ccccc} \vdash & * & (& 3 & +, \\ \lessdot & \lessdot & \lessdot & & \gtrdot; \end{array}$$

б) аналогично удалим 3 из выражения и поместим в стек:

$$\begin{array}{cccccc} \vdash & * & (& + & 4 &), \\ \lessdot & \lessdot & \lessdot & \lessdot & & \gtrdot; \end{array}$$

в) с 4 поступим подобным образом:

$\vdash \quad * \quad (\quad + \quad),$

$\lessdot \; \lessdot \; \lessdot \quad \gtrdot;$

г) выполним сложение диух верхних элементов в стеке и результат оставим там же; удалим символ +:

$\vdash \quad * \quad (\;),$

$\lessdot \; \lessdot \; \doteq;$

д) отбросим скобки:

$\vdash \quad * \quad \dashv,$

$\lessdot \; \gtrdot;$

е) произведем умножение двух верхних элементов стека, оставляя результат в стеке; удалим символ *:

$\vdash \quad \dashv;$

ж) останов из-за отсутствия отношений предшествования; ответ находится в стеке.

Конечно, вместо выполнения арифметических операций мы могли бы породить код и после этого вычислить выражение — это как раз то, что сделал бы компилятор.

Упражнение 5.

1. В проведенном ранее обсуждении привлекаемая семантика принималась само собой разумеющейся, однако она была тесно переплетена с грамматической структурой. Показать, что каждая из следующих грамматик является грамматикой операторного предшествования, и исследовать, как ее внутренняя семантика отличается от обычных соглашений:

$$P_1 = \{E \to E * T \mid T,\ T \to T + P \mid P,\ P \to (E) \mid x\},$$

$$P_2 = \{E \to T + E \mid T - E \mid T,\ \ T \to T * P \mid P,\ \ P \to (E) \mid x\}.$$

1.8. Конечные автоматы

Автоматом является устройство, управляющее и контролирующее само себя. Обычный компьютер с программой способен при достаточном запасе энергии контролировать сам себя и, следовательно, является автоматом. Как таковые, компьютеры изучались много лет, однако более естественно рассматривать программу и машину, в которой она содержится, как отдельные компоненты.

Конечно, для выполнения вычислений нам нужна не только программа, но и машина, на которой эти вычисления могут выполняться. Однако здесь мы не стремимся приступать к детальному изучению теории вычислений, поэтому, за исключением тех случаев, где это необходимо для полноты, мы ограничим наше внимание математическим описанием некоторых конечных машин.

Несмотря на эти замечания, мы начнем с общего введения, которое показывает границы того, что машины могут выполнять. Далее мы изучим математические модели устройств (обычно их малые фрагменты), а затем связанную с этим алгебру.

1.8.1. Общие понятия

Все используемые на практике компьютерные устройства ограничены (некоторым образом) количеством информации, которую они могут хранить, — они конечны. Цель данного параграфа — показать, как можно делать утверждения о программах без рассмотрения синтаксических деталей; затем мы продемонстрируем, что даже при отсутствии ограничения на размеры памяти существуют задачи, которые нельзя решить.

1. Универсальная машина. Несмотря на использование многочисленных различпых типов данных и множеств символов внутри реальных программ, для теоретического изучения достаточно ограничиться рассмотрением программ, которые действуют на множестве $V = \mathbf{N} \cup \{0\}$. Это равносильно изучению программ, вычисляющих теоретико-числовые функции, которые будут введены в п.1.8.2; наша непосредственная задача — описать идеализированный компьютер, позволяющий запоминать элементы *V*, с которыми можно осуществлять преобразования, и дать детальное описание того, как могут быть представлены программы для машины.

Предположим, что машина имеет память, состоящую из неограниченного числа регистров: R_1, R_2, R_3 и т. д., и что содержание каждого регистра R_i есть $r_i \in V$. Это можно изобразить так, как это сделано на рис. 1.

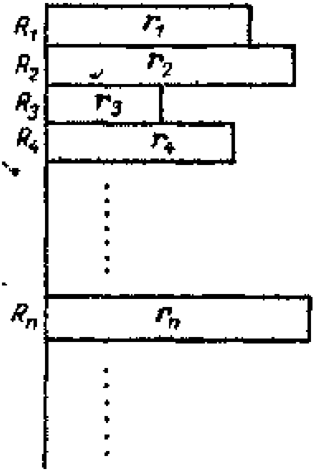


Рис. 1

Для более явного изложения удобно разрешить использование многих операций, действующих над регистрами, однако на самом деле необходимы лишь две операции:

$$R_n \leftarrow R_n + 1, \quad R_n \leftarrow R_n - 1.$$

Обозначая содержимое регистра *n* до операции и после через r_n и r'_n соответственно, можно описать результаты выполнения этих операций следующим образом:

$$R_n \leftarrow R_n + 1 \equiv r'_n = r_n + 1,$$

$$R_n \leftarrow R_n - 1 \equiv r'_n = \begin{cases} r_n - 1, & \text{если} \quad r_n > 0, \\ 0, & \text{если} \quad r_n = 0. \end{cases}$$

Кроме операций, изменяющих значения регистров памяти, необходимо, чтобы машина имела связь с программой для того, чтобы влиять на ее работу. Необходимой в этом случае является только одна операция, а именно та, которая осуществляет сравнение $R_n = 0$. Однако, как и прежде, мы будем разрешать более общие формы операций такого рода. Результат $R_n = 0$ справедлив тогда и только тогда, когда r_n=0, и это условие используется для управления программами. Множество регистров вместе с описанными выше определениями называется *машиной с неограниченной памятью* (МНП).

Программы состоят из конечной совокупности операций, занумерованных от 1 до некоторого $n \in \mathbf{N}$. Мы не будем вдаваться в детали, а выведем более общие заключения об этих программах.

Поэтому не будем давать формального определения такой структуры. Рисунков 2 и 3 достаточно, чтобы понять, какого рода конструкции допустимы в ней.

Программа на рис. 2 не предназначена для выполнения особо разумных вычислений, однако она указывает вид блок-схемы программы для нашей машины.

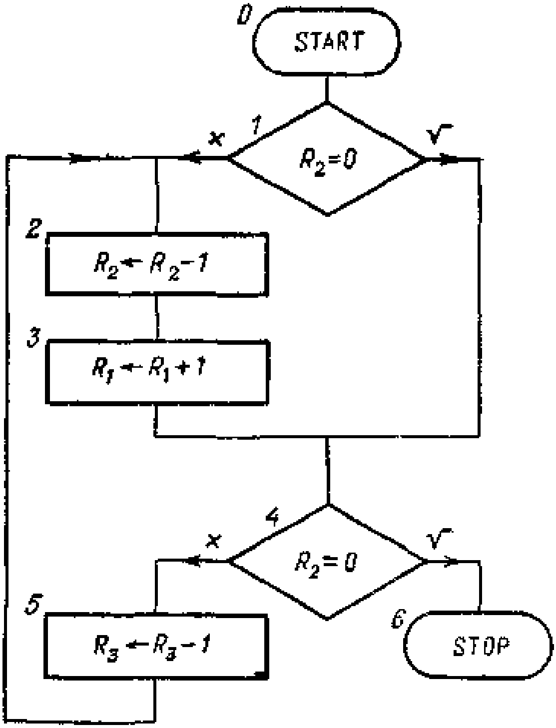


Рис. 2

Заметим, что все это может быть записано не обязательно в виде рисунка. Например, можно написать:

1: если $R_2 = 0$ то перейти к 4 иначе перейти к 2

2: $R_2 \leftarrow R_2 - 1$ (затем перейти к 3)

8: $R_1 \leftarrow R_1 + 1$ (затем перейти к 4)

4: если $R_2 = 0$ то перейти к 6 иначе перейти к 5

5: $\mathrm{R}_3 \leftarrow R_3 - 1$ (затем перейти к 2)

6: STOP

На рис. 3 представлена более общая форма программы, в которую включены *макрокоманды F*, и проверки T_i.

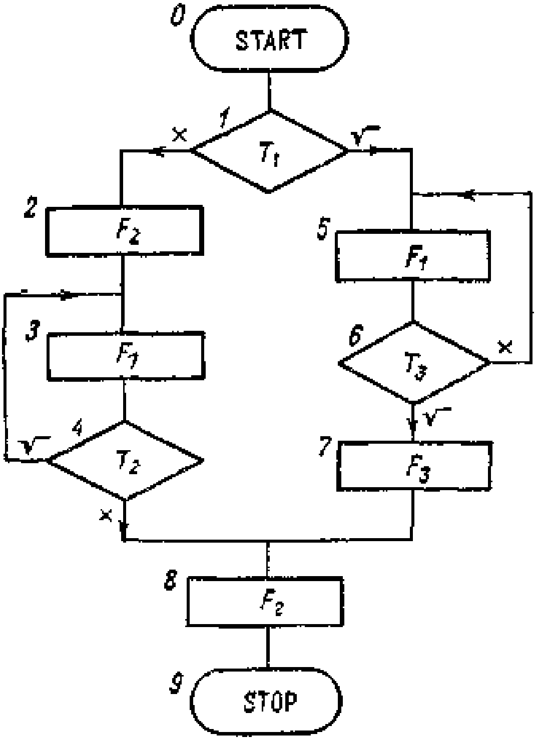


Рис. 3

Это могут быть стандартные команды того типа, который уже определен, или же они могут быть представлены последовательностью основные команд, которым для удобства чтения даны имена (подобно подпрограмме), детали которых уже где-то определены. Такие последовательности будем называть макропоследовательностями.

Сейчас мы можем описать некоторые из этих макро-последовательностей, которые обеспечат связь с последующими темами, а также помогут убедить читателя, что наше небольшое число простых команд на самом деле является достаточно мощным средством.

Пример 1. $R_i \leftarrow 0$ может быть реализовано следующим фрагментом программы, где метки *x, y* и z выбраны так, чтобы не пересекаться с другими командами в программе:

x: если $R_i = 0$ то перейти к z иначе перейти к *y*

y: $R_i \leftarrow R_i - 1$ (затем перейти к *x)*

z: ?

В терминах блок-схем этот фрагмент программы изображен на рис. 4.

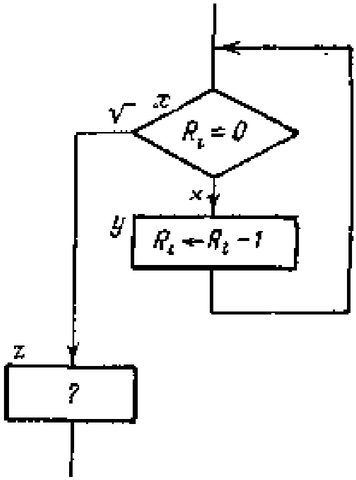


Рис. 4

Пример 2. Сейчас, определяя макрокоманду, удовлетворяющую предыдущему примеру, и включая в явном виде выражения «go to» («перейти к») только тогда, когда мы уклоняемся от выполнения команды «go to next instruction» («перейти к следующей команде»), мы можемдать раскрытие формулы $R_i \leftarrow m$ (для некоторого $m \in \mathbf{N}$):

$$
\begin{aligned}
&R_i \leftarrow 0\\
&\left.\begin{aligned}
&R_i \leftarrow R_i + 1\\
&R_i \leftarrow R_i + 1\\
&\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\\
&R_i \leftarrow R_i + 1
\end{aligned}\right\} m \text{ раз}
\end{aligned}
$$

Очередное расширение множества команд требует использования «рабочей памяти». Мы будем предполагать, что по крайней мере в простейших случаях читатель в состоянии придумать подходящую стратегию работы с памятью, и, следовательно, не будем специально упоминать о том, как выбираются эти дополнительные регистры.

Случаи, когда количество требуемой памяти неизвестно (такие, как стеки и т. п.), будут рассмотрены ниже (в дальнейшем будем использовать символы: «go to z» — «перейти к z»; «if (условие) then (оператор)»—«если (условие), то (оператор)»; «else*—<<иначе>>; «then go to z»—«затем перейти к *z*»).

Пример 3. Используя R_h в качестве рабочего регистра, мы можем скопировать содержимое R_j в R_i $(R_i \leftarrow R_j)$. Делая это, мы уничтожаем содержимое R_i, которое в дальнейшем должно быть восстановлено. Следующая программа осуществляет требуемые вычисления:

$$\begin{aligned}
&R_k \leftarrow 0\\
x:\ &\text{if } R_j = 0 \text{ then go to } y\\
&R_k \leftarrow R_k + 1\\
&R_j \leftarrow R_j - 1 \text{ then go to } x\\
y:\ &R_i \leftarrow 0\\
w:\ &\text{if } R_k = 0 \text{ then go to } z\\
&R_i \leftarrow R_i + 1\\
&R_j \leftarrow R_j + 1\\
&R_k \leftarrow R_k - 1 \text{ then go to } w\\
z:\ & \qquad\qquad\qquad\qquad //
\end{aligned}$$

Сейчас мы вернемся к «собственно» арифметическим вычислениям. Сложение и вычитание строятся непосредственно, однако, поскольку в регистрах существуют ограничения на значения величин, операция вычитания должна быть несколько модифицирована. Подобным же образом можно выполнить умножение и усеченное деление.

Пример 4. Сложение $R_i \leftarrow R_i + R_k$, имеющее результатом $r_i' = r_i + r_k$, может быть выполнено следующим образом:

$$\begin{aligned}
&R_j \leftarrow R_k\\
x:\ &\text{if } R_j = 0 \text{ then go to } y\\
&R_i \leftarrow R_i + 1\\
&R_j \leftarrow R_j - 1 \text{ then go to } x\\
y:\ &
\end{aligned}$$

Чтобы получить полную программу в терминах основных команд, мы должны расшифровать макрокоманду «$R_j \leftarrow R_k$», как это было сделано в примере 3. С этого времени мы не будем требовать доказательства таких расшифровок.

Подобным образом «ограниченное вычитание» $R_i \leftarrow R_i - R_k$ может быть выполнено как

$$R_j \leftarrow R_k$$
$$x\text{: } \mathbf{if}\ R_j = 0\ \mathbf{then\ go\ to}\ y$$
$$R_j \leftarrow R_j - 1$$
$$R_i \leftarrow R_i - 1\ \mathbf{then\ go\ to}\ x$$
$$y\text{:}$$

Заметим, что если первоначальные значения R_i и R_k были такие, что $r_i < r_k$, то после r_i итераций операция $R_i \leftarrow R_i - 1$ не будет иметь эффекта. Аналогично $R_i \leftarrow R_i * R_k$ может быть представлено как

$$R_j \leftarrow 0$$
$$R_i \leftarrow R_k$$
$$x\text{: } \mathbf{if}\ R_i = 0\ \mathbf{then\ go\ to}\ y$$
$$R_i \leftarrow R_i - 1$$
$$R_j \leftarrow R_j + R_i\ \mathbf{then\ go\ to}\ x$$
$$y\text{: } R_i \leftarrow R_j$$

В большинстве случаев таким же способом, каким может быть расширено множество операций над регистрами путем определения макрокоманд, можно также ввести команды сравнения, которые на первый взгляд оказываются более сложными, однако в действительности строятся из последовательностей стандартных операций и операций сравнения.

Пример 5. Мы можем записать операцию «if $R_i > R_k$ then go to x else go to y» («если $R_i > R_k$, то перейти к x; иначе перейти к y») следующим образом:

$$R_j \leftarrow R_i$$
$$R_j \leftarrow R_j - R_k$$
$$\mathbf{if}\ R_j = 0\ \mathbf{then\ go\ to}\ y\ \mathbf{else\ go\ to}\ x$$

Этими операциями условного перехода мы можем дополнить наше множество первоначальных арифметических операций вместе с операцией деления «$R_i \leftarrow R_i \div R_k$, где $r_i = 0$, если $r_k = 0$». В нашем случае этой операции соответствует следующий алгоритм:

$R_l \leftarrow 0$

if $R_k = 0$ **then go to** x

y: **if** $R_l < R_k$ **then go to** x

$R_l \leftarrow R_l + 1$

if $R_i = R_k$ **then go to** x

$R_i \leftarrow R_i - R_k$ **then go to** y

x: $R_l \leftarrow R_l$

Из менее общего, но необходимого приложения, которое кратко приведено ниже, следуют две операции, связанные с точностью усечения при делении целых чисел.

Пример 6. Если $r_i \neq 0$, операция «если R_k — делатель R_i, то перейти к x; иначе перейти к y» действует следующим образом:

if $R_k = 0$ **then go to** y

$R_j \leftarrow R_i$

$R_j \leftarrow R_j \div R_k$

$R_j \leftarrow R_j * R_k$

if $R_j = R_i$ **then go to** x **else go to** y

При помощи этой (возможно, несколько странной) операции и операции сравнения вида $R_i = m$ (оставленной в качество упражнения) мы можем проверить, является ли r_i простым числом.

Ясно, что можно операцию «если R_i простое, то перейти к x; иначе перейти к y» смоделировать следующим образом:

if $R_i = 0$ **then go to** y

if $R_i = 1$ **then go to** y

$R_j \leftarrow R_i - 1$

z: **if** $R_j = 1$ **then go to** x

if R_i **делитель** R_j **then go to** y

$R_j \leftarrow R_j - 1$ **then go to** z

Перед последним примером этого параграфа мы должны упомянуть, как в машине вводятся данные и выводится результат. Предположим, что мы хотим вычислить значение теоретико-числовой функции $f\colon V^n \to V^m$. Значения n и m известны перед началом выполнения соответствующей программы; поэтому мы можем вначале выделить n регистров (в которые должны быть загружены начальные значения перед началом выполнения программы) для входных данных и m регистров (которые не должны быть обязательно отличными от выбранных вначале) для выходных данных. Когда программа останавливается, мы предполагаем, что некоторый «внешний представитель» может выдать «ответы» из соответствующих мест. Это, конечно, разумный путь моделирования потоков данных в программе, поскольку точно показывает взаимодействие операций ввода-вывода. С этими соглашениями пример 7 может рассматриваться или как полная программа (в которой R_i и R_j выбраны как входные и выходные регистры), или как схема для подпрограммы.

Пример 7. Последовательность команд приведенных ниже, помещает n-е простое число в R_j, где n является содержимым R_i; предполагается, что n не равно нулю:

(Start)
$R_k \leftarrow R_i - 1$
$R_j \leftarrow 2$
x: **if** $R_k = 0$ **then go to** y
$R_j \leftarrow R_j + 1$
z: **if** R_j простое **then go to** w $\qquad$ w: $R_k \leftarrow R_k - 1$ **then go to** x
$R_j \leftarrow R_j + 1$ **then go to** z $\qquad$ y: (stop)

Сейчас мы объясним наш очевидный интерес к простым числам.

2. Кодирование программ. Программы п.1 могли работать с элементами из $V = \mathbf{N} \cup \{0\}$. Мы должны объяснить, как в принципе можно любую программу рассматривать в качестве программы такого типа. Это можно сделать, описав способы, при помощи которых различные типы данных могут быть закодированы в элементы из V. Для этого рассматриваем данные предложения над подходящими алфавитами и, следовательно, почти как постороннее следствие этого процесса получаем также метод для кодирования предложений на языках программирования, а именно сами программы.

Основное математическое средство, используемое для этой цели, это *теорема о единственности разложения,* известная также как основная теорема арифметики. Эта теорема устанавливает, что произвольный элемент из V является или 0, или 1 либо может быть выражен единственным образом как произведение упорядоченных простых чисел. Ясно, что если $n \in V \setminus \{0, 1\}$ и

$$n = q_1 * q_2 * \ldots * q_i = s_1 * s_2 * \ldots * s_j,$$

где $q_1, \ldots, q_i, s_1, \ldots, s_j$ — все простые числа такие, что

$$q_1 \leqslant q_2 \leqslant \ldots \leqslant q_i, \; s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_j,$$

то $i = j$ и $s_k = q_k$ для всех k, $1 \leqslant k \leqslant i$. Напомним, что простые числа — это элементы из **N**, которые делятся только на 1 и на самих себя.

Полное доказательство этой теоремы несложно, но его запись существенно отвлекла бы нас от основной задачи. Поэтому вместо доказательства мы предлагаем рассмотреть конструкцию алгоритма (процедуры/программы) для выделения упорядоченных простых множителей q_1, ..., q_i для любого данного n. Таким образом, избегая деталей ввода и вывода, мы можем использовать схему, представленную на рис. 5.

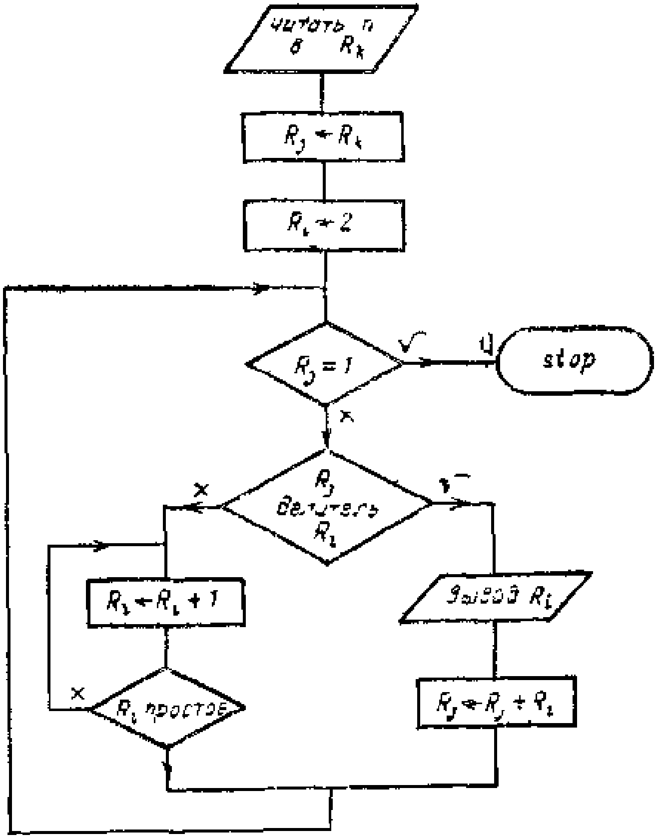


Рис. 5

Предположим теперь, что некоторая программа читает данные, которые состоят из последовательности символов алфавита $A = \{x, y, z\}$. Произвольно выбирая порядок φ для элементов из A, можно получить $\varphi(1) = x$, $\varphi(2) = y$, $\varphi(3) = z$. Если вводимая последовательность α имеет длину n и выражается как $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$, где $\alpha_i \in A$, тогда существует последовательность

$$\varphi^{-1}(\alpha_1)\varphi^{-1}(\alpha_2)\ldots\varphi^{-1}(\alpha_n)$$

над {1, 2, 3}. Взяв первые n простых чисел $p_1, \ldots, p_n$, мы можем составить число

$$\prod_{i=1}^{n} p_i^{\varphi^{-1}(\alpha_i)} = p_1^{\varphi^{-1}(\alpha_1)} * \ldots * p_n^{\varphi^{-1}(\alpha_n)};$$

назовем его $\Phi(\alpha)$. Пусть по соглашению $\Phi(\Lambda)=1$.

Чтобы проиллюстрировать использование этой общей формулы, закодируем строку «*xyxz*» посредством 1, 2, 3 следующим образом: $2^1 3^1 5^1 7^1$ = 30 870. Используя теорему о единственности разложения на простые множители и тот факт, что Φ^{-1} является биекцией, имеем, что «*xyxz*» является единственной строкой над *A*, которая дает это значение. Следовательно, применяя Ф, мы можем «обратить» вычисления, чтобы восстановить строку «*xyxz*».

При помощи этой процедуры все строки над *A* можно закодировать таким образом, чтобы они имели разные значения в множестве *V*. Это в силу упорядоченности, индуцируемой Z (поскольку $V \subseteq \mathbf{Z}$), влечет упорядоченность строк из A^*. Например, $«xy» > «yx»$.

Необходимо отметить два фактора, связанных с этим методом. Во-первых, поскольку *A* конечно, в **N** существуют значения, которые не являются кодами какой-либо строки в A^* (например, не существует $\alpha \in A^*$ такого, что $\Phi(\alpha) = 2^5$, так как иначе $a \in A$: $\varphi^{-1}(5) = a$, а такого a не существует). Во-вторых, поскольку элементы A^* являются неограниченными, то таковыми являются и коды. (Для любого $n \in \mathbf{N}$ возьмем простое $p_m > n$ и рассмотрим строку

$$\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_m \ldots \alpha_q$$

такую, что $|\alpha| \geqslant m$; тогда отсюда следует, что

$$\Phi(\alpha) = \prod_{i=1}^{q} p_i^{\varphi^{-1}(\alpha_i)} \geqslant p_m^{\varphi^{-1}(\alpha_m)} \geqslant p_m^1 = p_m > n.)$$

Используя методику, описанную ранее, преобразуем кодирование Ф так, чтобы получить новое кодирование, которое сохраняет порядок, полученный Ф, по использует все *V*. Это один из тех случаев, когда трудно дать *арифметическую* формулу для вычисления измененных кодов, однако все еще достаточно легко описать способ их получения.

Очевидно, что новое кодирование Ψ с областью значений *V* задается формулой

$$\alpha \mapsto |\{\beta\colon\ \Phi(\beta) < \Phi(\alpha)\}|.$$

упорядочения φ первые десять значений Φ и Ψ приведены в табл. 1.

Таблица 1

Строка α	Λ	x	y	xx	z	yx	xy	zx	xxx	yy
$\Phi(\alpha)$	1	2	4	6	8	12	18	24	30	36
$\Psi(\alpha)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Чтобы получить эти коды и выполнить процедуры кодирования, требуется машина, способная понимать и создавать символы вне алфавита D = (0, 1, 2, ..., 8, 9), на котором определены элементы множества V. Для этого необходимо только устройство, позволяющее имитировать действие φ (и φ^{-1}), некоторым простым способом воздействуя на таблицу ввода-вывода; остаток процедуры кодирования, включающий Φ и Ψ можно потом учесть при помощи машины с неограниченной памятью.

Следовательно, любой ввод в данную компьютерную систему может рассматриваться как конечная строка (взятая из потенциально бесконечного множества строк над некоторым конечным алфавитом), и если применить описанный выше процесс к соответствующему алфавиту A, то эту строку можно преобразовать в единственный элемент V. Обратная процедура, примененная к полученному значению из V, дает значение над другим алфавитом B.

Следовательно, программа $P\colon A^* \to B^*$ похожа на соответствующую программу $P'\colon V \to V$, где

$$P\colon \alpha \mapsto \Phi^{-1}(P'(\bar{\Phi}(\alpha))), \quad P'\colon n \mapsto \Phi\left(P\left(\Phi^{-1}(n)\right)\right).$$

Величина используемых значений даже в простых ситуациях делает примеры непригодными, однако связанные диаграммы на рис. 6 восстанавливают сущность пропущенных этапов.

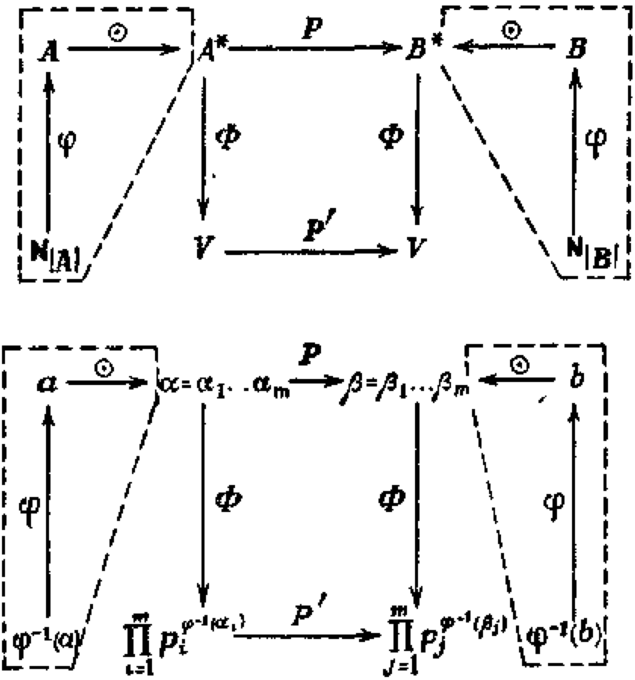


Рис. 6

Переходы, включающие детальную спецификацию P', являются сложными и не обязательно соответствуют P «очевидным» образом. Однако если P вычислимо, то и P' вычислимо.

Как отмечалось выше, мы можем также применять такие же кодирующие процедуры к программам, и, следовательно, расширив Ψ таким образом, чтобы можно было игнорировать семантически неверные программы так же, как и программы, включающие синтаксические ограничения, можно перечислить все программы для данной системы, использующей числа из V. Мы предполагаем, что для того, чтобы программа превосходила любое заданное в V число, к ней можно добавить неограниченное множество кодов, которые содержат произвольно много нулевых утверждений, таких, как $R_i \leftarrow R_i$. Однако в большинстве языков программирования существует много избыточности в синтаксисе; поэтому в лучшем случае мы будем обращать внимание только на лексические знаки. Прежде чем пытаться сделать замечания общего характера, рассмотрим, что можно сделать с простым языком, который использовался ранее в машине с неограниченной памятью. Существует четыре типа команд:

$$x\colon\ R_i \leftarrow R_i + 1 \quad \textbf{then go to } y$$
$$x\colon\ R_i \leftarrow R_i - 1 \quad \textbf{then go to } y$$
$$x\colon\ \textbf{if } R_i = 0 \textbf{ then go to } y \textbf{ else go to } z$$
$$x\colon\ \textbf{stop}$$

(Без потери общности мы можем предполагать, что все программы начинаются с команды, помеченной индексом 1.) Все, что мы должны знать из команды *x,*— это, какой тип операции должен выполняться, на каком регистре и какая команда выполняется следующей. Для того чтобы можно было использовать ту же самую схему для всех команд, введем формат (тип, регистр, правильный выход, неправильный выход). Обозначая команды «останов» («stop»), «больше», «меньше» и «равно нулю» через 0, 1, 2 и 3 соответственно, получаем Ф-уровневое кодирование типичных утверждений, как показано ниже:

$$\Phi(R_i \leftarrow R_i + 1 \textbf{ then go to } y) = 2^1 3^i 5^y 7^y$$
$$\Phi(R_i \leftarrow R_i - 1 \textbf{ then go to } y) = 2^2 3^i 5^y 7^y$$
$$\Phi(\textbf{if } R_i = 0 \textbf{ then go to } y \textbf{ else go to } z) = 2^3 3^i 5^y 7^z$$
$$\Phi(\textbf{stop}) = 2^0 3^0 5^0 7^0 = 1.$$

Поэтому команда Ф содержит всю информацию, необходимую для ее выполнения или, если необходимо, для перехода к следующему шагу выполнения программы. Поскольку все строки в A^* конечны, а блок-схема программы для машины с бесконечной памятью сверху не ограничена, то каждая отдельная программа имеет n утверждений, $n \in \mathbf{N}$. Тогда можно распространить Ф на программы следующим образом:

$$\Phi(\textbf{prog}) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\Phi(s_i)},$$

где «prog» состоит из n помеченных утверждений, из которых i-м является s_i.

Из Ф(prog) можно получить $\Phi(s_i)$ выделением компоненты p_i, и, следовательно, разлагая это значение на простые сомножители, мы можем узнать детали утверждения, помеченного номером i.

Используя подходящую «урезающую» функцию Ψ, мы получаем кодирование, которое является биекцией между $\mathscr{P}$, множеством всех программ для машины с бесконечной памятью и V.

3. Проблема останова. Теперь мы можем доказать, что конструкции некоторых общих программ невозможны: не только потому, что мы не находим решения, но и потому, что решение может не существовать. Формальные доказательства ограничим рассмотрением двух основных случаев. Первое из доказательств получим, исходя из начальных принципов, а затем покажем, как второе выводится пз первого, иллюстрируя, таким образом, общее использование техники сведения одних задач к другим. После этого сформулируем перечень проблем, относительно которых будет показано, что они неразрешимы подобным образом.

Строго говоря, все утверждения, приведенные ниже, относятся к программам на машине с бесконечной памятью со специальным кодированием функций Ψ_1 и Ψ_2. Однако, задав произвольную «универсальную» машину и подходящий язык программирования, мы в состоянии построить адекватные кодирующие функции, и, следовательно, полученные результаты применимы и в общем случае.

Первой задачей, относительно которой мы докажем ее неразрешимость, является задача *самоприменимости.*

Теорема. *Для машины с бесконечной памятью не существует программы, которая для любой заданной программы А при ее кодировании* $a = \Psi_1(A)$ *будет останавливатъся с выходным значением* 0, *если А(а) останавливается (т. е. программа А останавливается, если входное значение равно а), и с выходным значением* 1, *если А(а) не останавливается.*

Доказательство. Будем строить доказательство от противного. Предположим, что такая программа существует; назовем ее *В*. Итак, *В(а)* останавливается с результатом, равным 0, если *а* приводит программу *А* к останову, и с результатом, равным 1, если *а* не приводит к останову *А*.

Изменим программу *В* следующим образом. Заменим команду останова условной петлей, так что, если выходной регистр имеет значение 0, мы обводим эту команду; в противном случае — останов. Назовем эту программу *С* (рис. 7).

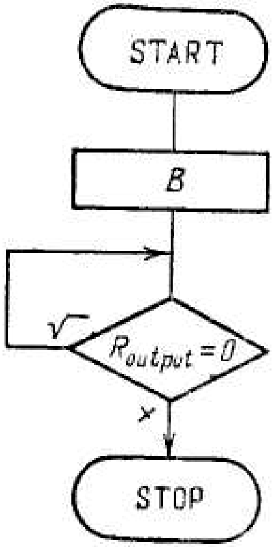


Рис. 7

Имеем следующее: *C(x)* останавливается (и имеет то же самое выходное значение, что и *B(x))* тогда и только тогда, когда выходное значение равно 1.

Рассматривая *C* при входном значении $c = \Psi(C)$, получаем противоречие: так как *C(c)* останавливается тогда и только тогда, когда $C(c) = B(c) = 1$, то $B(c)=1$ тогда и только тогда, когда *C(c)* не останавливается. Отсюда следует, что *C* не может существовать, а поэтому и *B* не существует.

Предыдущее доказательство по стилю подобно тому, которое использовалось ранее , чтобы опровергнуть существование множества Рассела в приведенном примере1. Кажется, что оно носит тривиальный характер, однако, подобно многим другим кратким математическим рассуждениям, является достаточно тонким. Следует на это обратить внимание перед тем, как использовать этот факт при доказательстве более общего результата — неразрешимости проблемы останова.

Теорема. *Для машины с бесконечной памятью не существует программы, которая по произвольным входным данным, представляющим программу и ее данные, будет определять, останавливается программа на этих данных или нет.*

Доказательство. Покажем, что если бы такая программа существовала, то мы могли бы путем выбора правильных входных данных решить проблему самоприменимости. Поскольку последнее невозможно, то отсюда будет следовать, что решение проблемы останова также невозможно.

Очевидно, что программа требует ввода двух сортов данных: $a(=\Psi_1(A))$ — кода программы *A* и $x(=\Psi_2(X))$, где *X* — входные данные для *A*. Это может быть закодировано обычным путем — с использованием двух различных простых чисел *p* и *q*. Пусть входные данные будут $p^a q^x$, и предположим, что существует программа для решения нашей задачи; назовем ее *B*. Тогда $B(p^a q^x)$ останавливается с результатом 1, если *A(X)* останавливается, и останавливается с результатом 0, если *A(X)* не останавливается. В этом случае из *B* можно создать новую программу *C,* добавляя к началу *B* последовательность команд, которые превращают содержимое *i*-го входного элемента в $(pq)^i$. Тогда

$$C(a) = B(p^a q^a) = \begin{cases} 1, & \text{если } A(a) \text{ останавливается}, \\ 0, & \text{если } A(a) \text{ не останавливается.} \end{cases}$$

Следовательно, *C* решает проблему самоприменимости, о которой мы знаем, что она неразрешима. Следовательно, *C* не существует, а поэтому не существует и *B*.

Проблема останова является классическим результатом о неразрешимости в теории компьютеров. Приведенное здесь доказательство использует общую технику сведения одной задачи к другой. Далее показывается, что первая задача неразрешима, поскольку если бы это было не так, то была бы разрешима и другая задача, о которой известно, что она неразрешима.

Используя этот принцип (и соответствующие конструкции, детали которых здесь опускаются), можно показать, что многие другие проблемы также неразрешимы. В частности, неразрешимы следующие проблемы:

а) останавливается или нет произвольная программа, если входное значение равно 0;

б) останавливается или нет произвольная программа при любых входных данных;

в) выполнено ли равенство $L(G)=\varnothing$ для произвольной контекстно-зависимой грамматики *G*;

г) выполнено ли равенство $L(G_1)\cap L(G_2)=\varnothing$, где G_1 и G_2 — произвольные контекстно-свободные грамматики;

д) выполнено ли равепство $L(G)=T^*$, где $G = (N, T, P, S)$— произвольная контекстно свободная грамматика;

е) выполнено ли равенство $L(G_1)=L(G_2)$, где G_1 и G_2— произвольные контекстно-свободные грамматики;

ж) является ли произвольная контекстно-свободная грамматика неоднозначной.

4. «Расширенная» машина. Насколько реалистичной является машина с бесконечной памятью в качестве модели компьютера? Память такой машины, очевидно, превосходит память любой существующей машины, которая подвергается ограничениям как на число регистров, так и на значения, которые могут содержаться в каждом регистре. Однако эта идеализация в пределах машины с неограниченной памятью расширяет, а не ограничивает возможности машины. Существуют ли аспекты в компьютерных системах, которые не могут быгь смоделированы на машине с неограниченной памятью?

Мы утверждаем, что нет. Хотя формально мы не можем доказать это высказывание, остановимся на основных моментах такой «расширенной» машины, которая может моделировать все нужные свойства, хотя в качестве абстрактной модели она применяется редко.

Нас будут интересовать следующие свойства:

а) большой набор операций;

б) более широкий набор внешних типов данных;

в) массивы;

г) стеки;

д) более сильные команды управления;

е) общий механизм управления;

ж) рекурсия.

В пп. 1 и 2 мы показали, как в случае а) можно добавить арифметические операции к множеству команд, а в случае б), добавляя простые периферийные устройства (для того чтобы иметь возможность работать с символами, которых нет в машине с неограниченной памятью), можно расширить диапазон представлений входных и выходных данных над произвольным алфавитом.

Остановимся на работе с массивами. Предположим, что нам необходим массив с десятью компонентами A [1], ..., A [10] и что содержимое этих регистров суть a_1, ..., a_{10}. С помощью методики, которая уже использовалась, мы можем сохранить эти значения, вводя величину

$$a = \prod_{i=1}^{10} p_i^{a_i},$$

которую затем можно запомнить в одном регистре. Мы уже описывали процедуру выделения каждого a_i из a. Этот метод не зависит от границы массива и поэтому переносится на случай работы со стеками. В стеках можно хранить результаты промежуточных вычислений, не требуя существенно больше регистров. С помощью подходящего механизма управления (см. ниже) мы можем также поместить в стек адреса возврата из подпрограмм. Любая программа на машине с неограниченной памятью конечпа, и строки программы могут быть пронумерованы (помечены) числами от 1 до *n*, $n \in \mathbf{N}$. В контексте блок-схемы программы мы можем сконструировать в случае е) «вычисление goto», используя табличную технику, данную выше, для того, чтобы получить «go to (R_k) », как указано на рис.8.

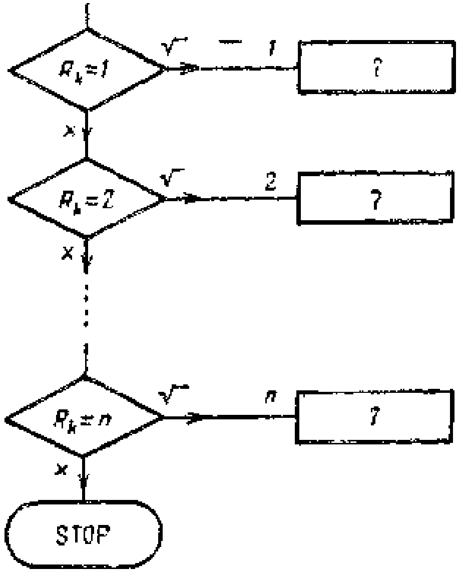


Рис. 8

Используя схему прямого кодирования для программ Ф (а не Ψ*)*, мы можем закодировать всю программу одним значением, которое запоминается в регистре. Разложение на простые множители затем может использоваться для выделенпя кода «следующего утверждения». Это моделирует свойство ж), а вместе с использованием стеков дает возможность рекурсии з).

Следовательно, используя машину с неограниченной памятью, можно произвести «расширение» путем добавления этих свойств. Однако в действительности такие расширения носят лишь внешний характер, а результирующая система может быть смоделирована с использованием другой машины с неограниченной памятью, у которой блок-схема программы состоит из простых команд увеличения, уменьшения и «равенства нулю».

Упражнения.

1. Построить на машине с неограниченной памятью блок-схему программы, осуществляющей проверку «$R_i=m$»
2. Спроектировать машину с неограниченной памятью, которая, если дана программа, закодированная в R_0, будет выполнять эту программу. (За основу взять кодирующую схему из п. 2.)

1.8.2. Конечные автоматы

Уже достаточно много сказано об универсальных машинах (их свойствах и ограничениях на эти свойства), которые могут вычислять *все,* что вычисляется, и, следовательно, проводя рассуждения в обратном порядке, получим, что любая вычислительная проблема, которая неразрешима в такой общей системе, будет неразрешима и в *любой* другой системе. Однако возникает вопрос: как это связано с реальными компьютерами? Основная проблема — это конечность памяти реальной машины (правда, и ее можно несколько сгладить, используя машину с неограниченной памятью, описанную в п. 1 п. 1.8.1). Машина с неограниченной памятью состояла из неограниченного числа регистров, каждый из которых имел возможность содержать любое число из множества *V*. Хотя, как это следует из построений п. 4 п.1.8.1, мы можем обменять «короткую и широкую» память (имеющую несколько регистров, каждый с большой емкостью) на «длинную и тонкую» память (в которой емкость каждого регистра уменьшена, зато число регистров увеличено), существенное ограничение состоит в конечности числа различных конфигураций или состояний, которые может принимать память. Такое ограничение вызвано физическими ограничениями. Это понятие формирует основу нашей математической модели конечных машин.

1. Детерминированные машины. В соответствии с опытом электронного машиностроения (низким уровнем аппаратуры при построении элементов типа «не и» и т. п., микропроцессорных систем или универсальных цифровых машин) наша первая модель воплощает в себе понятие детерминизма, т. е. если некоторая ситуация достигается более одного раза, то в каждом случае устройство ведет себя одинаковым образом. Начнем с формального описания.

Определение. *Конечным (детерминированным) автоматом М* называется алгебраическая структура

$$M=(Q,\ \Sigma,\ t,\ q_0,\ F,\ p),$$

где Q — непустое *множество состояний;* $\sum$ — конечный *входной алфавит;* t — отображение $Q \times \Sigma \to Q$, называемое *переходом* (или *функцией переходов);* $q_0 \in Q$ —*начальное состояние;* $F \subseteq Q$, F— множество *заключительных состояний* (или *принимающих состояний);* p — функция $Q \times \Sigma \to \Sigma$, называемая *функцией печати* (или *функцией выходов).*

(В некоторых случаях полезно модифицировать функцию выходов таким образом, чтобы она имела вид p: $Q \times \quad \times \Sigma \to \Sigma'$, где Σ'— некоторый другой алфавит.)

Идея состоит в том, что мы начинаем из состояния q_0, и если $q_1 \in t(q_0, s)$, то под действием входного символа s автомат переходит в состояние q_i Аналогично, если $(q_0, s) \in D_p$, то, когда автомат перейдет в состояние (q_0, s), на выходе появится $p(q_0, s)$. Продолжая таким образом и читая каждый раз очередной входной символ, будем переходить от одного состояния к следующему, пока или не прочитаем символ, которого нет в $\sum$, или входные данные будут исчерпаны — в этих случаях обработка прекращается.

Входная последовательность называется представимой (автоматом M), если состояние, в которое перешел автомат M, принадлежит F. Для наглядности рассмотрим пример. Однако прежде опишем представление M в виде диаграммы.

Во-первых, мы представим элементы Q вершинами ориентированного графа, которые изображаются маленькими кругами; имя состояния указывается внутри круга. Элементы из F имеют дополнительные круги, начерченные вокруг маленьких кругов. Если $((q_i, s_j), q_k) \in t$, то проведем ориентированное ребро от q_i к q_k и пометим его символом s_j. Далее, если $((q_i, s_j), s_l) \in p$, то пометим ребро через s_j: s_l. К одному и тому же ребру может быть добавлено несколько меток. Наконец, определим q_o стрелкой, входящей в q_o.

Пример 1. Рассмотрим машину, изображенную на рис. 9.

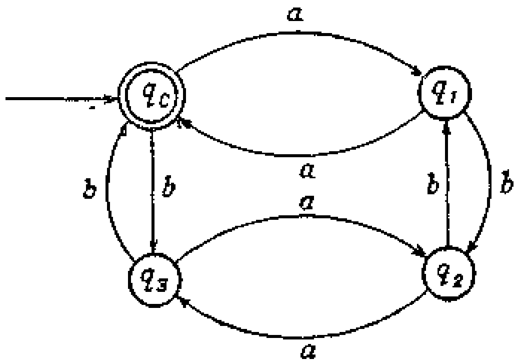


Рис. 9

Предположим, что мы читаем строку «*abbaa*». Ребра, обозначающие функции перехода, заставляют машину проходить через состояния q_0, q_1, q_2, q_1, q_0 и q_1 в указанном порядке. Легко видеть, что, начиная с q_o, под действием *t* получаем

$$(q_0, a) \mapsto q_1, \quad (q_1, b) \mapsto q_2, \quad (q_2, b) \mapsto q_1,$$

$$(q_1, a) \mapsto q_0, \quad (q_0, a) \mapsto q_1.$$

Однако q_1 не является заключительным состоянием, и поэтому этот вход не подходит. Проверка диаграммы показывает, что строками, представимыми этой машиной, являются только те строки над алфавитом (*a, b),* в которых имеется четное число символов *a* и четное число символов *b.* У этой машины нет явного выхода; требуемая информация может быть извлечена из результирующего состояния только после останова машины.

Следующие два примера относятся к арифметическому «оборудованию» и фактически порождают непосредственный входной результат.

Пример 2. Машина, изображенная на рис. 10 для пары строк над {0, 1), вычисляет и выводит их сумму.

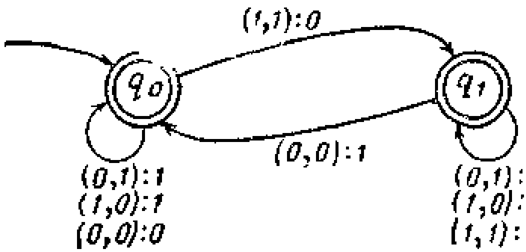


Рис. 10

Входные данные начинаются с битов с наименьшими значениями, и пары читаются справа налево. По данным двум n-разрядным числам эта машина вычисляет их n-разрядную сумму. Однако она не распознает условий переполнения и не работает с отрицательными числами.

Проверяя свойства функции выхода (функция выхода имеет вид $Q \times \{0, 1\}^2 \to \{0, 1\}$), полезно вспомнить факты, касающиеся ДВОИЧНОЙ арифметики и описанные ранее. В более сложной модели можно учитывать условия, при которых возможны ошибки при двоичном сложении.

Пример 3. Машина, изображенная на рис. 11, также осуществляет двоичное сложение тем же самым способом, что и в предыдущем случае, за исключением того, что она содержит два дополнительных состояния q_2 и q_3, которые проверяют наличие ошибок, связанных с внесением в знаковый бит и вынесением из знакового бита соответственно.

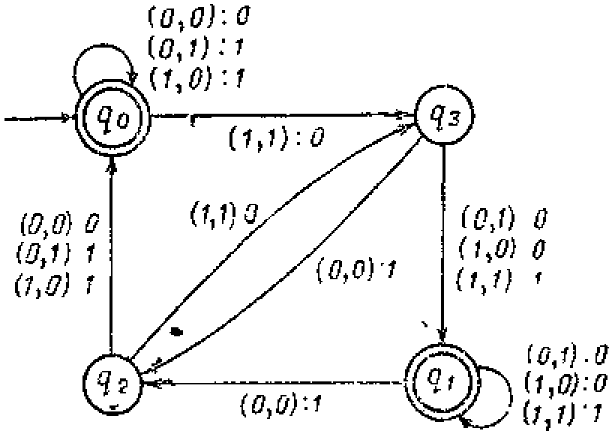


Рис. 11

Заключительные состояния q_0 и q_1 обозначают выходы, в которых либо произошли оба эти переноса одновременно, либо не произошел ни один из них. Следовательно, эти выходы являются арифметически правильными.

Эти примеры показывают, что можно выполнить некоторые полезные преобразования и вычисления, однако остается открытым вопрос: насколько «сильными» являются конечные автоматы? В ответе на этот вопрос встречаются две точки зрения. Первая, хотя и нетипичная, заключается в следующем: можно заметить, что использованные в примерах алфавиты основывались лишь на двух символах. Мы можем использовать любой конечный алфавит, однако, как отмечалось ранее, алфавита размерности 2 всегда достаточно.

Вторая точка зрения заключается в том, что общая доступная память в данное время в определенном компьютере является конечной. Если она содержит *n* битов, то существует ровно 2^n конечных состоянии, в которых память может находиться. Это число может быть большим, но оно всегда конечно (см. упражнение 2), и, следовательно, мы имеем конечную машину.

2. Недетерминированные машины. Рассмотрим с математической точки зрения, что могут делать эти абстрактные машины. Чтобы упростить дело, в определении, данном выше, будем игнорировать функцию *р.* Следовательно, мы будем иметь дело только с устройствами, имеющими конечное число состояний; будем их для краткости называть КР (конечными распознавателями или акцепторами). В дальнейшем будет удобно расширить область значений функции переходов *t* (см. определение) так, чтобы выполнялось условие

$$t\colon Q \times \Sigma \to \mathscr{P}(Q).$$

Следовательно, из данного состояния под действием заданных входных значений машина может иметь выбор, куда идти дальше. Это ничего не добавляет к определению, однако обеспечивает простой способ конструирования КР, который будет активно использоваться в этом параграфе. Машины такого типа называют *недетерминированными* КР.

Чтобы еще более прояснить, дело для заданного КР *М* определим множество строк, представимых машиной *М* (обозначим это множество через *A(M)),* как указано ниже.

Пусть $M = (Q,\ \Sigma,\ t,\ q_0,\ F)$ и $s \in \Sigma^*$. Запишем *s* в виде $s = s_1 s_2 \ldots s_n$ и определим множество *T(s)* индукцией по длине слова *s* следующим образом:

$$T(\Lambda) = \{q_0\} \text{ и } T(\sigma s_k) = \bigcup_{q \in T(\sigma)} t(q,\ s_k),$$

где $\sigma = s_1 \ldots s_{k-1}$ для всех $k,\ 1 \leqslant k \leqslant n.$ Таким образом, *T(s)* — это множество всех заключительных состояний *М,* которые могут быть достигнуты под действием входной последовательности *s.* Если $T(s) \cap F = \varnothing$, то слово *s* представимо; поэтому множество строк, представимых машиной *М,* имеет вид

$$A(M) = \{s\colon\ T(s) \cap F \neq \varnothing\}.$$

Недетерминированные КР полезны тем, что они упрощают задачу построения сложных машин. Существенным является то, что нам хотелось бы иметь возможность собрать машины вместе таким образом, чтобы не было нужды, по крайней мере на первом этапе, касаться вопроса, является или нет результат перехода функцией или отношением над $(Q\times\Sigma)\times Q$. (Напомним, что функция $Q\times\Sigma\to\mathcal{P}(Q)$ соответствует отношению $Q\times\Sigma\to Q$.)

Введение недетерминированности не увеличивает потенциала КР. От недетерминированной машины всегда можно перейти к детерминированной, как будет показано в следующей теореме.

Теорема. *Для любого недетерминированного КР M_1 существуетдетерминированный КР M_2 такой, что*

$$A(M_1)=A(M_2).$$

Доказательство. Дадим вначале общую схему доказательства. Пусть

$$M_1=(Q_1,\Sigma_1,t_1,q_0,F_1),\ \text{а}\ M_2=\left(Q_2,\Sigma_2,t_2,q_0',F_2\right).$$

Установим вначале, что $Q_2=\mathcal{P}(Q_1)$ (в общем случае все эти состояния нам будут не нужпы) и $\Sigma_2=\Sigma_1$. Для этого, начиная с $q_0\in Q_1$, рассмотрим множество всех состояний в $t(q_0,s_1)$ (для $s_1\in\Sigma_1)$ и назовем это множество образом (q_0',s_1) функции t_2; т. е. мы переводим различные возможности машины M_1 в единственное состояние машины M_2. Предположим, что далее мы читаем символ s_2. В M_1 это могло бы вызвать перевод состояния $t_1(q_0,s_1)$ в состояние из множества $t_1(t_1(q_0,s_1),s_2)$. Множество всех состояний, полученных таким образом, сейчас дает единственное состояние в M_2, получающееся в результате применения t_2 к образу из (q_0',s_1) и s_2. Таким образом, мы приходим к конструкции переходов между состояниями в Q_2.

Так как Q_1 конечно, то конечно и Q_2; следовательно, необходимо вернуться к ранее построенным состояниям, и, таким образом, процесс в конце концов оборвется. Если одно из «выбранных» состояний в Q_1 было в F_1, то состояние в Q_2 является заключительным и, следовательно лежит в F_2.

Перейдем к подробному доказательству. В соответствии с описанной выше конструкцией $q_0'=\{q_0\}_n$

$$t_2\colon\ (\{q_{i1},\ldots,q_{ij}\},s_k)\mapsto\left\{\bigcup_{l=1}^{j}t_1(q_{il},s_k)\right\}$$

и

$\{q_{i1},\ldots,q_{ij}\}\in F_2$ тогда и только тогда, когда

$$q_{ik}\in F_1\ \text{при некотором}\ k,\ 1\leqslant k\leqslant j.$$

Возвращаясь назад к определению множества *A(M)* для данной машины M_1, мы можем расширить t_1 и t_2, чтобы получить T_1 и T_2 так, как это показапо ниже:

$$T_1(\Lambda) = \{q_0\}, \quad T_1(\sigma s_k) = \bigcup_{q \in T_1(\sigma)} t_1(q, s_k),$$

$$T_2(\Lambda) = \{q_0'\}, \quad T_2(\sigma s_k) = \bigcup_{q \in T_2(\sigma)} t_2(q, s_k) = t_2(q, s_k),$$

где $T_2(\sigma) = \{q\}$ и $\sigma = s_1 \dots s_{k-1}$.

Поскольку $A(M) = \{s\colon\ T(s) \cap F \neq \varnothing\}$ и существует естественное соответствие между F_1 и F_2, то мы должны лишь продемонстрировать такое же соответствие между $T_1(s)$ и $T_2(s)$ для любого s; т. е. $\{\dots,\ q_i,\ \dots\} = T_1(s)$ тогда и только тогда, когда $\{\{\dots,\ q_i,\ \dots\}\} = T_2(s)$. Сделаем это индукцией по длине *s*.

Если $|s| = 0$, то $s=\Lambda$, откуда

$$T_1(\Lambda) = \{q_0\}, \quad T_2(\Lambda) = \{q_0'\} = \{\{q_0\}\}.$$

Предположим теперь, что соответствие имеет место для всех строк σ: $|\sigma| \leqslant k - 1$, и рассмотрим строку σs_k.

По предположению индукции

$\{\dots,\ q_i,\ \dots\} = T_1(\sigma)$ тогда и только тогда, когда

$$\{\{\dots,\ q_i,\ \dots\}\} = T_2(\sigma).$$

Однако тогда, если $q_j \in t_1(q_i,\ s_k)$, то отсюда следует, что $q_j \in T_1(\sigma s_k)$ и (по определению t_2)

$$\{\dots,\ q_j,\ \dots\} \in t_2(\{\dots,\ q_i,\ \dots\},\ s_k) = T_2(\sigma s_k).$$

Из определения T_2 и t_2 следует, что все элементы из $T_2(\sigma s_k)$ должны выводиться таким же образом; поэтому $\{\dots, q_i,\ \dots\} = T_1(\sigma s_k)$ тогда и толькотогда, когда

$$\{\{\dots,\ q_i,\ \dots\}\} = T_2(\sigma s_k).$$

Следовательно, $T_1(s)$ для любого $s \in \Sigma^*$ «соответствует» $T_2(s)$, и поэтому

$$A(M_1) = \{s\colon\ T_1(s) \cap F_1 \neq \varnothing\} = \\ = \{s\colon\ T_2(s) \cap F_2 \neq \varnothing\} = A(M_2).$$

Приведенная выше аргументация была достаточно сложной и включала некоторое сомнительное (однако строго определенное) понятие «соответствие», которое подразумевало уровень вложения включаемых множеств. В частных примерах мы можем обойти это путем введения подходящих имен для результирующих состояний в детерминированной машине M_2.

Как будет показано в последующем примере, построение M_2 из M_1 является непосредственным, однако, чтобы сохранить математическую строгость, напомним вначале общепринятое соглашение, связанное с функциями. В силу используемых построений такое соглашение было бы здесь неуместным, однако краткое напоминание об этой погрешности послужит объяснением, «откуда берутся некоторые множества».

Пусть задана функция $f\colon A \to B$ такая, что $f\colon x \mapsto y$. Мы должны были бы писать $f(x) = \{y\}$, однако часто запись сводится к $f(x) = y$.

Аналогично обычно детерминированный перенос обозначаем как

$$t\colon\ Q \times \Sigma \to Q,$$

где

$$t\colon\ (q_i,\ s) \mapsto q_j, \quad t(q_i,\ s) = q_j.$$

Однако, когда мы имеем $t\colon\ Q \times \Sigma \to \mathscr{P}(Q)$ (как в M_1 и M_2), то мы должны заключать множества в скобки даже тогда, когда $|t(q_i,\ s)| = 1$, и писать $t(q_i,\ s) = \{q_j\}$. Перейдем к примеру.

Пример 4. Возьмем M_1 таким, как указано на рис. 12, *а*.

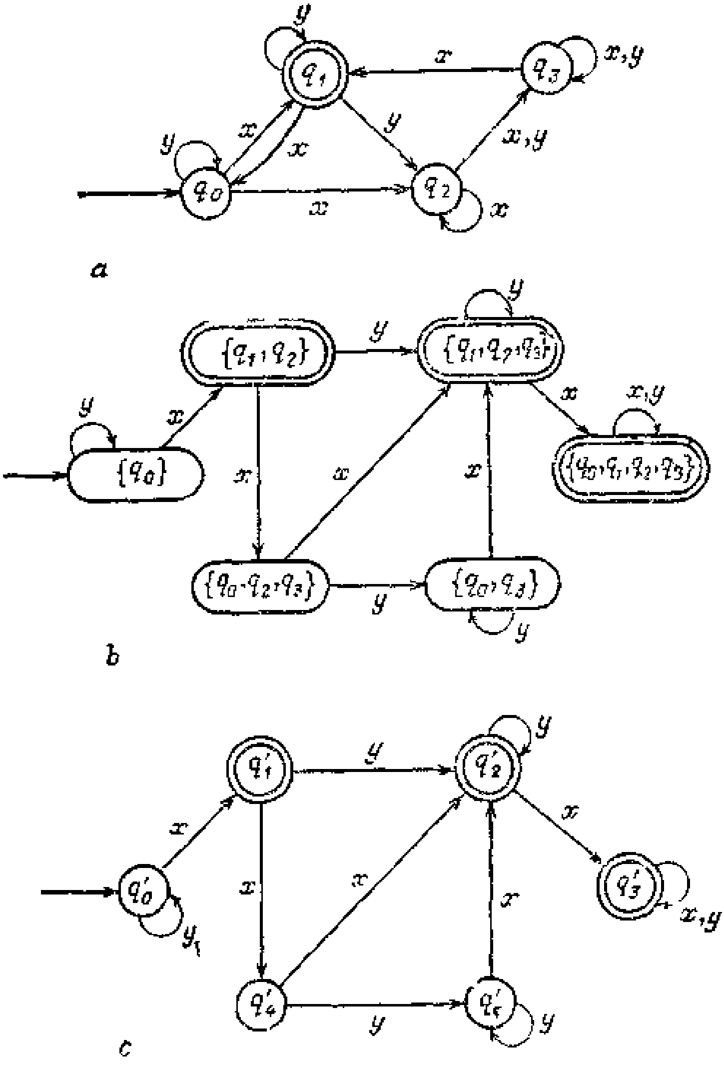


Рис.12

Тогда

$$t_1(q_0, x) = \{q_1, q_2\}$$

и $q_1 \in F_1$; следовательно, получаем $\{q_1, q_2\}$ в F_2. Аналогично
$t_1(q_1, x) = \{q_0\}$, $t_1(q_2, x) = \{q_2, q_3\}$;
следовательно,

$$t_2(\{q_1, q_2\}, x) = \{q_0, q_2, q_3\} \text{ в } M_2 \text{ и т. д.}$$

Окончательно получаем ситуацию, изображенную на рис. 12, *б.* Тогда перенумерация дает нам рис. 12, *с.*

С этого момента мы не будем выяснять, какие машины рассматриваются — детерминированные или нет; они всегда могут рассматриваться как детерминированные.

3. Составные машины. Сейчас мы в состоянии описать, как заданную совокупность КР можно «собрать вместе» для того, чтобы получить некоторые корректно определенные множества строк. Основные свойства даны в виде предложения, однако вместо формальных доказательств мы дадим лишь описание включаемых в доказательство построений.

Предложение. *По заданным машинам*

$$M_1 = (Q_1, \Sigma, t_1, q, F_1), \quad M_2 = (Q_2, \Sigma, t_2, p, F_2)$$

мы можем построить машины M_3, . …, M_8 такие, что

$$A(M_3) = \Sigma^* \setminus A(M_1),$$
$$A(M_4) = A(M_1) \cap A(M_2),$$
$$A(M_5) = A(M_2) \setminus A(M_1),$$
$$A(M_6) = A(M_1) \cup A(M_2),$$
$$A(M_7) = A(M_1) A(M_2),$$
$$A(M_8) = A^*(M_1).$$

Построение M_3. Машина M_3 получается из M_1 заменой множества F_1 заключительных состояний на множество $Q_1 \setminus F_1$. Следовательно,

$$M_3 = (Q_1, \Sigma, t_1, q, Q_1 \setminus F_1).$$

Чтобы получить M_4 возьмем $Q_4 = Q_1 \times Q_2$, возможно, с некоторыми подходящими переобозначениями. Пусть $r = (q, p)$. Определим t_4 как

$$t_4\colon ((q_i, p_j), s) \mapsto (t_1(q_i, s), t_2(p_j, s)),$$

и множество

$$F_4 = \{(q_i, p_j)\colon q_i \in F_1, p_j \in F_2\}.$$

Тогда

$$M_4 = (Q_4, \Sigma, t_4, r, F_4) \text{ (см. пример 5).}$$

Построение M_5 следует из M_2 и M_3 так как

$$A(M_2) \setminus A(M_1) = A(M_2) \cap (\Sigma^* \setminus A(M_1)) = A(M_2) \cap A(M_3).$$

Построение M_6 проводится подобно M_4. Имеем $Q_6 = Q_4$, $t_6 = t_4$, однако

$$F_6 = \{(q_i, p_j)\colon q_i \in F_1 \text{ или } p_j \in F_2\}.$$

Тогда

$$M_6 = (Q_6,\ \Sigma,\ t_6,\ r,\ F_6).$$

При построении M_7 используется идея присоединения выхода из M_1 к входу M_2. Однако при этом следует быть внимательными, чтобы не проделать лишний шаг при движении от M_1 к M_2. Итак, возьмем $Q_7 = Q_1 \sqcup Q_2$ (разъединяющее объединение $\sqcup$ изменяет названия так, чго Q_1 и Q_2 не имеют общих состояний, и использует $Q_1 \cup \cup Q_2)$, множество

$$F_7 = \begin{cases} F_2, & p \notin F_2, \\ F_1 \cup F_2, & p \in F_2, \end{cases}$$

и добавим переходы от элементов F_1 к другим состояниям M_2, а именно

$$t_7 = t_1 \cup t_2 \cup \{((q_i,\ s),\ p_j),\ \text{где}\ q_i \in F_1,\ p_j \in t_2(p,\ s)\}.$$

Тогда

$$M_7 = (Q_7,\ \Sigma,\ t_7,\ q,\ F_7).$$

Построение M_8 проводится аналогично. Сначала необходимо позаботиться о том, чтобы $\Lambda^0(M_1) = \varnothing$ было представимо. Для этого добавим новое начальное состояние u $(u \notin Q_1)$ таким образом, чтобы выполнялись условия $Q_8 = Q_1 \cup \{u\}$, $F_8 = F_1 \cup \{u\}$, а t_8 расширим (так же, как и t_7) следующим образом:

$$t_8 = \begin{cases} t_1 \cup \{((u,\ s),\ q_j), & q_j \in t_1(q,\ s),\ s \in \Sigma\}, \\ t_1 \cup \{((q_i,\ s),\ q), & t_8(q_i,\ s) \in F_1,\ s \in \Sigma\}. \end{cases}$$

Тогда

$$M_8 = \{Q_8,\ \Sigma,\ t_8,\ u,\ F_8\}.$$

Пример 5. На рис. 13—15 даются последовательность диаграмм состояний для машин M_1 и M_2 и результирующие составные машины $M_3, \ldots, M_8$, которые были построены выше.

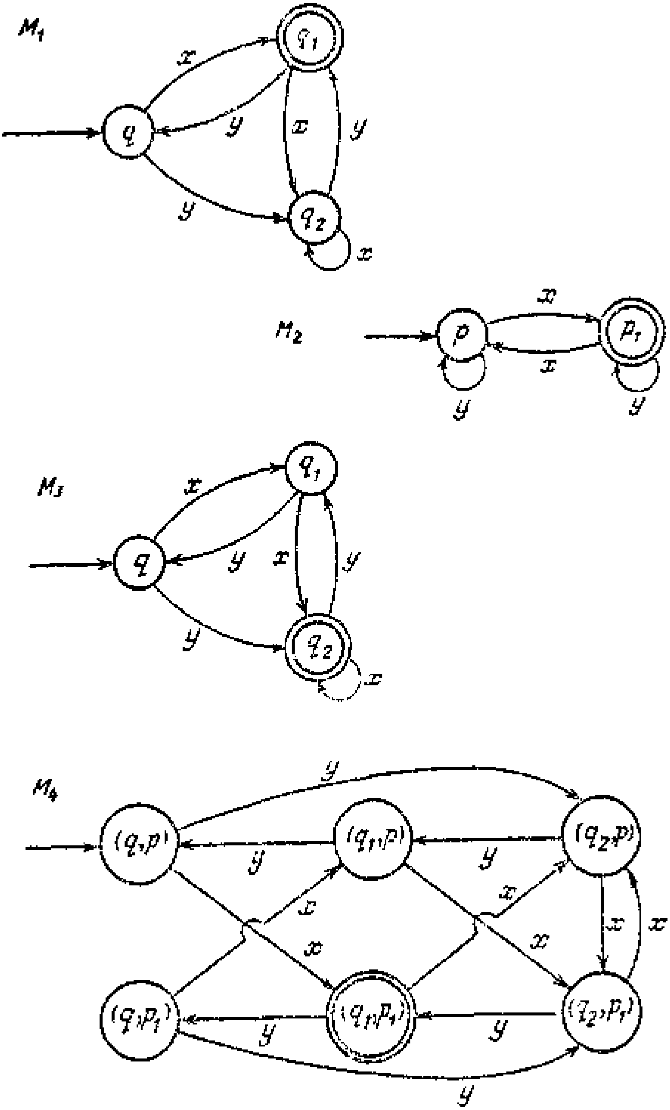


Рис. 13

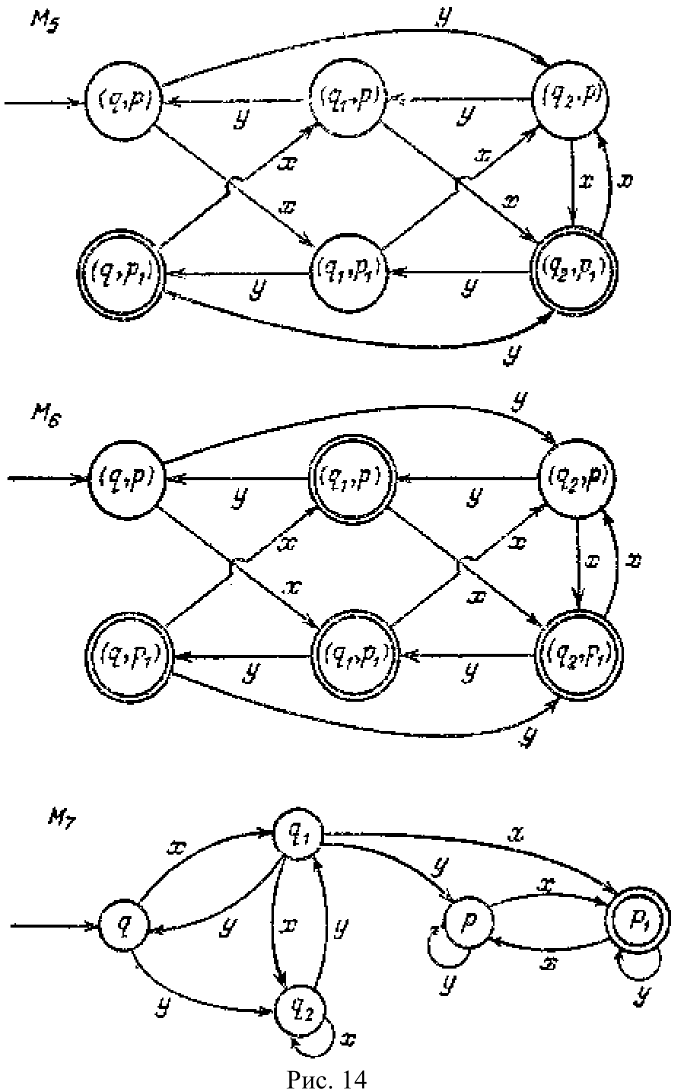


Рис. 14

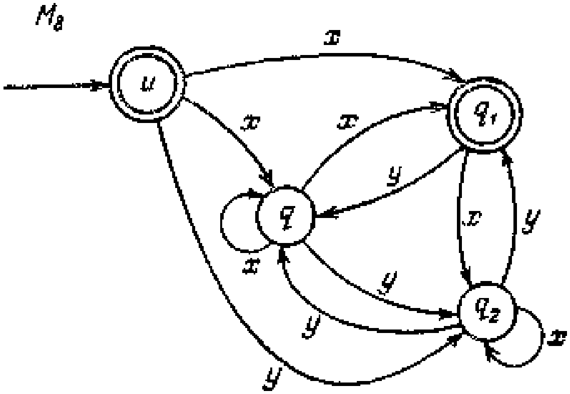


Рис. 15

Заметим, что некоторые из этих машин являются недетерминированными, однако от недетерминированности можно избавиться при помощи предыдущих результатов.

Построения, включающие объединение, конкатенацию и замыкание (операция «звездочка»), обеспечивают основу алгебраических систем для описания множеств, представимых конечными распознавателями. Эта алгебра будет обсуждаться в п.1.8.3, а в оставшейся части этого параграфа обратим внимание на моделирование *реальных* компьютеров.

4. Моделирование «реальных» компьютеров. Как уже отмечалось, если данный компьютер имеет память, состоящую из *n* битов, то для того, чтобы смоделировать его поведение, вообще говоря, необходим конечный автомат с 2^n состояниями. Пусть начальное состояние имеет такую конфигурацию, что программа и значения данных находятся в «ядре». Тогда не существует внешних стимулов, которые могли бы дать начало последовательности переходов. Однако рассмотрение машины в несколько другом виде может привести к выполнению команд, использующих конечное число (уже определенных) состояний машины.

Предположим, что память состоит из *m* *l*-битных слов; тогда $n = m * l$. Теперь отделим программный указатель (называемый также программным счетчиком или указателем следующей команды) от оставшейся части машины; получим машину с $n' = l * (m - 1)$ битами памяти. (Для простоты предполагается, что указатель имеет ту же длину, что и другие компоненты памяти.) Теперь можно программный указатель рассматривать после каждого изменения состояния ц его значение использовать для того, чтобы осуществлять очередной переход. Таким образом, функция перехода имеет вид

$$t: Q \times P \to Q \times P,$$

где $t: (q_a, p_b) \mapsto (q_c, p_d)$ соответствует значению указателя p_b, что означает: выделить команду из состояния q_a так, чтобы перевести машину в состояние q_c, а значение p_b в программном указателе заменить на p_d. (Здесь удобно рассматривать команду как действие, частично осуществляемое программным обеспечением, а частично — аппаратным методом. В этой модели мы не делаем различия между ними; на практике бывает, что программное обеспечение — это просто начальные данные, которые управляют аппаратными процессами.)

Обычно программы начинают работу с программного указателя, установленного на определенное значение. Начиная с этого значения, все последующие значения порождаются автоматически при помощи описанного выше процесса до тех пор, пока не выполнится команда останова.

Конечно, не все 2^l значений, которые могут содержаться в программном указателе, должны быть верными. Часто 2^l может быть больше m, и, следовательно, $2^l - m$ значений будут неправильными адресами и будут вызывать ошибку, приводящую к останову.

Число правильных значений, которые может принимать программный указатель, определяет число переходов, которые могут быть нарисованы в виде стрелок из каждого состояния. Однако это не ограничивает число состояний, которое равно $2^{n'}$.

При отсутствии дополнительной информации о моделируемой системе мы можем сказать о ней довольно мало, однако на один момент следует обратить внимание. Если построенный нами конечный автомат останавливается за «короткое» время или под воздействием команды останова, или из-за полученного неправильного значения указателя, то результат известен. Однако если машина продолжает считать в течение длительного промежутка времени, то встает вопрос: остановится ли она когда-нибудь и получим ли мы результат? Поскольку машина конечна (и, следовательно, имеет ограниченную память), то эта задача разрешима, однако неизвестно, как долго ждать результат. В силу способа построения машины пара (q, p), являющаяся указателем состояния, единственным образом определяет последовательность состояний, которые должны последовать за данным состоянием, и, следовательно, повторение любой данной пары подразумевает бесконечный цикл. Поэтому, чтобы гарантировать, что последовательность вычислепий никогда не остановится, мы должны обеспечить, чтобы она пересекала заданную дугу перехода *дважды*. Все это требует достаточно много времени, так как необходимо выполнить $2^{n'} * m = 2^{l*(m-1)} * m$ команд. Даже при достаточно малых значениях m и l число операций очень велико, и поэтому реальное время их выполнения требует десятков, сотен и даже тысяч лет.

Урок, который мы должны извлечь из рассмотрения этого упражнения, заключается в том, что практически невозможно проверить *корректность* программы разумных размеров, используя тестовые данные. Требуется слишком много времени для выполпения всех прогонов программы. Такие тестовые прогоны могут только находить ошибки.

Упражнения.

1. Построить конечный автомат, который будет распознавать четные числа, записанные в двоичной форме и читаемые слева направо.
2. Построить конечный автомат с входным алфавитом *(a, b),* который останавливается в заключительном состоянии тогда и только тогда, когда входные данные не содержат рядом двух соседних элементов *a* и двух соседних элементов *b.*
3. Показать невозможность построения конечного автомата, на вход которого поступают только строки над алфавитом *(a, b),* и только те из них являются представимыми, которые имеют равное количество символов *a* и *b.*
4. Построить (детерминированный конечный автомат, для которого представимыми являются только строки над (0, 1), состоящие из чередующихся единиц и нулей, следующих за чередующимися парами из единиц и нулей.
5. Придумать конечный автомат, способный распознавать десятичные числа, записанные в виде

$$\pm dd^*,\ d^*E \pm dd,$$

где $d \in \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 9\}$.

1.8.3. Регулярная алгебра

Способы комбинирования конечных распознавателей могут использоваться для проверки аксиом множеств, из которых могут развиваться алгебраические системы. Классическая система, известная как регулярная алгебра, основана на трех операциях — объединении, пересечении и конкатенации, определенных на множестве строк. Уравнения в алгебре могут точно определять некоторые множества строк; эти множества являются решением уравнений (п. 1). Результаты, вытекающие из решений, имеют непосредственное применение к аспектам теории языков (п. 2).

1. Выражения и уравнения. Перед тем как дать формальное определение, мы введем две константы внутри системы. Существует множество строк Ø и $\{\Lambda\}$, которые обозначим символами 0 и 1 соответственно. Мы обосновываем их использование изображением конечных распознавателей соответственно на рис. 16, *a* и *b*.

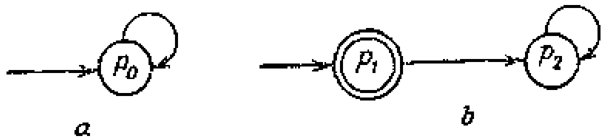


Рис. 16

Определение. Пусть *X*— множество строк, представимое конечным распознавателем. Тогда *X* называется *регулярным выражением.* Если *X* и *Y* обозначают множества строк, представимых двумя определенными машинами, то (в силу определения построения конечных распознавателей) $X \cup Y$ (далее будем писать $X+Y$), X^* и XY также являются регулярными выражениями.

Разрешенные конструкции составных конечных автоматов предполагают следующие аксиомы для работы с произвольными регулярными выражениями *A, B* и *C:*

1) $A+B=B+A$; 2) $A+(B+C)=(A+B)+C$;

3) $A+A=A$; 4) $A+0=A$;

5) $A(BC)=(AB)C$; 6) $A1=A=1A$;

7) $A0=0=0A$; 8) $A(B+C)=AB+AC$;

9) $(A+B)C=AB+BC$; 10) $0^*=1$;

11) $A^*=A+A^*$; 12) $(A^*)^*=A^*$.

Такую алгебраическую систему называют *регулярной алгеброй.*

Проверка достоверности этих аксиом требует рассмотрения совершенно *общих* случаев. Поэтому их трудно должным образом описать. Тем не менее, чтобы обозначить используемые ниже идеи, рассмотрим два примера, исходя из двух аксиом, примененных к *конкретному* регулярному выражению.

Пример 1. Пусть $A=\{ab^n\colon\ 0\leqslant n\}$. Это выражение регулярно, так как является представимым для машины *M,* изображенной на рис. 17, *a*.

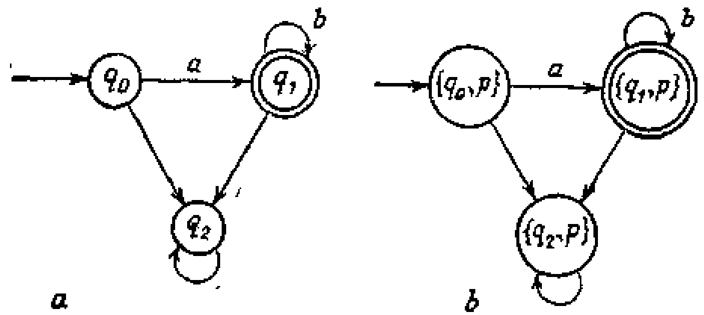


Рис. 17

Используя машину, изображенную на рис. 16, *a*, которая распознает 0, и применяя подходящее построение, получим машину, изображенную на рис. 17,*b*, которая, очевидно, эквивалентна *M*. Следовательно,

$$A = A + 0.$$

Пример 2. Используя *A* и 1, определяемые машинами, данными выше, и обычной конструкцией конкатенации, получаем недетерминированный конечный распознаватель, изображенный на рис. 18, *a*, который будет представлять строки в регулярном выражении 1*A*.

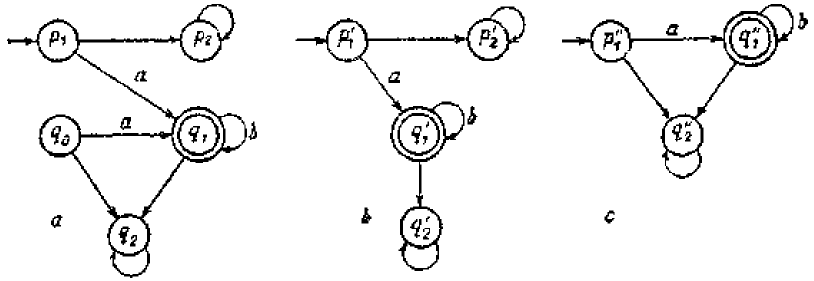


Рис. 18

Эту машину делаем детерминированной (рис. 18, *b*), затем получаем машину (рис. 18, *c*), эквивалентную *M,* которая удовлетворяет (в данном случае) части аксиомы 6), а именно 1*A*=*A*.

Определив регулярную алгебру, посмотрим, как ее использовать. Предположим, что *A, B* и *C* являются заданными регулярными выражениями (множествами строк) и что *X* и *Y* — неизвестные регулярные выражения такие, что выполнены следующие соотношения:

$$X = AX + BY, \quad Y = XC + B.$$

Существуют ли решения этих «уравнений», и если да, то как их найти? Как мы вскоре увидим, регулярные уравнения не имеют единственного решения; поэтому мы вначале введем понятие аппроксимации для регулярных выражений.

Определение. Для регулярных выражений *X* и *Y* *отношение* ≤ определяем следующим образом:

$$X \leqslant Y \ (X \text{ аппроксимирует } Y), \text{ если } X + Y = Y.$$

Теорема. *Отношение ≤, определенное над регулярными выражениями, является отношением порядка.*

Доказательство. Транзитивность имеет место, так как

$$X \leqslant Y,\ Y \leqslant Z \Rightarrow X + Y = Y,\ Y + Z = Z.$$

Поэтому

$$X + Z = X + (Y + Z) = (X + Y) + Z = Y + Z = Z$$

и, следовательно, $X \leqslant Z$.

Антисимметричность имеет место, поскольку

$$X \leqslant Y,\ Y \leqslant X \Rightarrow Y = X + Y = Y + X = X.$$

Рефлексивность следует из $X + X = X$.

Отсюда также следует, что $X \leqslant Y \Rightarrow ZX \leqslant ZY$ для регулярных выражений *X, Y* и *Z,* однако детали доказательства оставим в качестве упражнения.

Перед тем как рассматривать уравнения, напомним, что из определения операции замыкания следует

$$A^* = A^0 + A^1 + \ldots + A^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} A^n,$$

где $A^0 = 1$. Это соотношение оказывается полезным при доказательстве следующих утверждений.

Лемма. *Пусть Y и Z — решения регулярного урав~ нения* $X = AX + B$. *Тогда*

а) $B \leqslant Y$,

б) $AY \leqslant Y$,

в) $Y + Z$ — *решение.*

Доказательство.

а) Так как *Y* — решение уравнения $X = AX + B$, то $Y = AY + B$, и поэтому

$$Y + B = (AY + B) + B = AY + (B + B) = AY + B = Y.$$

Следовательно, $B \leqslant Y$.

б) Аналогично $Y + AY = (B + AY) + AY = B + AY = Y$

Следовательно, $AY \leqslant Y$.

в) Имеем

$$Y + Z = AY + B + AZ + B = A(Y + Z) + B.$$

Уже достаточно много сказано о свойствах решений уравнения, однако существует ли хотя бы одно решение?

Лемма. A^*B *является решением уравнения* $X = AX + B.$

Доказательство. Подставляя A^*B в уравнение, имеем

$$A(A^*B) + B = (AA^* + A^0)B = \left(A\sum_{n=0}^{\infty} A^n + A^0\right)B =$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} A^n + A^0\right)B = \left(\sum_{n=0}^{\infty} A^n\right)B = A^*B.$$

Теорема. A^*B *является наименьшим (по отношению к* $\leq$*) решением регулярного уравнения* $X = AX + B.$

Доказательство. Из лемм следует, что A^*B — решение, и если Y — какое-либо другое решение, то $B \leqslant Y$, $AB \leqslant AY \leqslant Y$. Поэтому $AB \leqslant Y$, $A^nB \leqslant Y$, и, добавляя неравенства для всех $n \in \mathrm{N} \cup \{0\}$, получаем $A^*B \leqslant Y.$

Следовательно, утверждение теоремы верно.

Заметим, что A^*B — это множество строк, каждая из которых является решением уравнения; если $A = \{a\}$ и $B = \{b\}$, то все строки вида a^nb также являются решениями.

Заметим также, что так как A^*B является наименьшим решением уравнения $X = AX + B$, то оно является наименьшим выражением таким, что $X \mapsto AX + B$ совпадает с тождественным отображением. Поэтому его также называют *наименьшей стационарной точкой* уравнения (или *минимальной стационарной точкой).*

Рассмотрев одно частное уравнение, мы сейчас можем непосредственно получить аналогичные результаты для других похожих уравнений; доказательства в этих случаях будем опускать.

Теорема. *Для заданных регулярных выражений A и B уравнение* $X = AX + B$ *эквивалентно паре уравнений*

$$X = YB,\ Y = YA + 1$$

в том смысле, что они имеют одно и то же наименьшее решение, и это решение есть $X = A^*B.$

Теорема. *Для заданных регулярных выражений A и B уравнение* $X = AX + B$ *эквивалентно паре уравнений*

$$X = BY,\ Y = AY + 1.$$

(В этом случае обе системы имеют наименьшее решение $X = BA^*.$*)*

Эти две теоремы позволяют нам преобразовывать правые линейные формы $(X = AX + B)$ в левые линейные формы $(X = XA + B)$, которые соответствуют правым и левым рекурсиям внутри регулярных грамматик. Детали этого соответствия даны в п. 2, однако сначала мы обобщим результаты на системы алгебраических уравнений.

Предположим, что $X_1, \ldots, X_n$ — неизвестные регулярные выражения и что A_{ij} $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ и $B_1, \ldots, B_n$ — известные регулярные выражения такие, что

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1A_{11} + X_2A_{21} + \ldots + X_nA_{n1} + B_1, \\ &\ldots \\ X_i &= X_1A_{1i} + X_2A_{2i} + \ldots + X_nA_{ni} + B_i, \\ &\ldots \\ X_n &= X_1A_{1n} + X_2A_{2n} + \ldots + X_nA_{nn} + B_n. \end{aligned}$$

Теперь можно использовать операции, определенные на регулярных выражениях, чтобы ввести операции на матрицах из регулярных выражений:

$$(\mathbf{C} + \mathbf{D})_{ij} = \mathbf{C}_{ij} + \mathbf{D}_{ij},$$

$$(\mathbf{CD})_{ij} = \sum_k \mathbf{C}_{ik}\mathbf{D}_{kj},$$

$$\mathbf{C}^* = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{C}^n;$$

$\mathbf{C} \leqslant \mathbf{D}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{C}_{ij} \leqslant \mathbf{D}_{ij}$ для всех i, j, где **C** и **D** — согласованные матрицы, элементы которых являются регулярными выражениями. Обозначив через **X** «регулярную матрицу», мы можем представить приведенные выше уравнения в виде

$$\mathbf{X} = \mathbf{XA} + \mathbf{B}.$$

Применяя рассуждения, аналогичные тем, которые использовались в случае одного уравнения, можно показать, что эта система имеет минимальную стационарную точку $\mathbf{BA}^*$, которая достигается на решениях $\mathbf{X} = \mathbf{BY}$, где $\mathbf{Y} = \mathbf{AY} + \mathbf{I}$; $\mathbf{I}$ — единичная матрица. Соответствующие результаты справедливы для правых линейных систем. Из замечаний следует, что эти системы эквивалентны. Это помогает удалению левых рекурсий в контекстно-свободных грамматиках.

Ясно, что для уравнения $\mathbf{X} = \mathbf{XA} + \mathbf{B}$ решение может быть определено как

$$\mathbf{X}_i = (\mathbf{BY})_i = \sum_k \mathbf{B}_k\mathbf{Y}_{ki},$$

где

$$\mathbf{Y}_{ij} = (\mathbf{AY} + \mathbf{I})_{ij} = \sum_k \mathbf{A}_{ik}\mathbf{Y}_{kj} + \mathbf{I}_{ij}.$$

Пример 4 п.1.7 показывает, как этот результат переносится на контекстно-свободиые грамматики. Преобразования, используемые в этом примере (хотя они и не строго обоснованы), появились при помощи рассуждений по аналогии. Мы завершаем этот раздел, указывая на формальную связь между регулярной алгеброй конечных распознавателей и регулярными грамматиками.

2. Представления регулярных грамматик. Напомним, в п.1.7 структурная грамматика *G =(N, T, P, S)* называлась грамматикой Хомского типа 3 или (Λ-свободной) *регулярной грамматикой,* если все элементы *P* имели вид $A \to x$ или $A \to xB$,где $x \in T$ и $A,\ B \in N$, или же (если $\Lambda \in L(G)$) $S \to \Lambda$; в этом случае *S* не встречается ни в какой правой части.

Множество предложений, порожденных регулярной грамматикой, называют *регулярным множеством* или *регулярным языком.* В настоящий момент мы в состоянии обосновать использование дважды одной и той же терминологии и, следовательно, использовать регулярную алгебру в грамматиках.

Основной результат состоит из двух частей и дан в виде теоремы с конструктивным доказательством.

Часть I является непосредственной, так как каждый переход определяют на всей его области определения; в части II не обязательно, чтобы грамматика *(N, T, P, S)* для данных $X \in N$ и $a \in T$ имела продукцию вида $X \to a$ или $X \to aY$ при некотором $Y \in N$.

Теорема. *Множество, представимое конечным автоматом, является в точности таким же, как если бы выводилось из регулярных грамматик.*

Доказательство. Опишем конструкции доказательства.

Вначале рассмотрим конечный автомат *M* = (*Q*, ∑, *t, q, F*). Теперь построим регулярную грамматику *G=(N, T, P, S)*. Если $\Lambda \notin A(M)$,то можно сделать следующее.

Пусть $N = Q,\ T = \Sigma$ и $S = q$; построим *P* такое, что

$$P = \{X \to aY,\ Y \in t(X, a)\} \cup \{X \to a,\ t(X, a) \cap F \neq \varnothing\}.$$

Если $\Lambda \in A(M)$,то расширяем конструкцию, создавая новый нетерминал $\bar{q}$, полагая $S = \bar{q}$ и добавляя к *P* продукции

$$S \to \Lambda,$$
$$S \to aY \quad (\text{если } Y \in t(q, a)),$$
$$S \to a \quad (\text{если } t(q, a) \cap F = \varnothing).$$

Сейчас легко показать, что для каждого $x \in \Sigma^*$ условие $x \in A(M)$ выполнено тогда и только тогда, когда $x \in L(G)$. Очевидно, что если $q \in F$, то Λ представимо автоматом M и $S \to \Lambda$ — продукция G и наоборот. Если также $a \in A(M)$ и $|a| = n$, то

$$a = a_1 a_2 \ldots a_n,\ a_i \in \Sigma,$$

и поэтому существует путь в графе M, как показано на рис. 19.

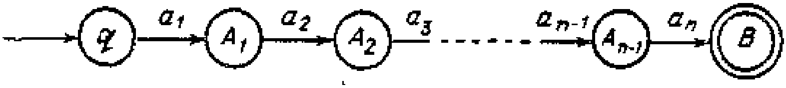


Рис. 19

Здесь $A_i \in N$ (не обязательно все различны) и $B \in F$, и по построению

$$\{S \to a_1 A_1,\ A_1 \to a_2 A_2,\ \ldots,\ A_{n-2} \to a_{n-1} A_{n-1},\ A_{n-1} \to a_n\} \subseteq P$$

(рис. 20). Таким образом, $a \in L(G)$.

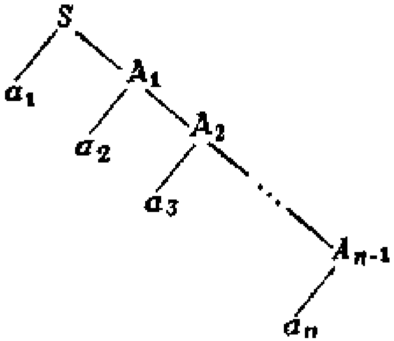


Рис. 20

Проводя рассуждения в обратном порядке, аналогично получаем $L(G) \subseteq A(M)$, и, следовательно, равенство доказано. Сейчас надо показать, что для данной (Λ-свободной) регулярной грамматики предложения этой грамматики могут быть представимы некоторым конечным автоматом, а все другие строки не представимы этим автоматом.

Возьмем $G_1 = (N_1, T_1, P_1, S_1)$ и построим $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, t_1, q_1, F_1)$, как показано далее. Пусть $\Sigma_1 = T_1$ и $Q_1 = N_1 \cup \{\tau\} \cup \{\pi\}$ (где τ и π — специальные символы, которых нет в N_1; τ представляет правильную терминальную строку, а π представляет ошибку), $q_1 = S_1$ и $F_1 = \{\tau\}$. Если также $\Lambda \in L(G_1)$, т. е $S_1 \to \Lambda$ принадлежит P_1, то $F_1 = \{\tau, q_1\}$. Окончательно имеем

$$t_1 = \{((X, a), Y): X \to aY \text{ есть в } P_1\} \cup$$

$$\cup \{((X, a), \tau): X \to a \text{ есть в } P_1\} \cup$$

$$\cup \{((\tau, a), \pi) \text{ для всех } a \in \Sigma_1\} \cup$$

$\cup\{((X, b), \pi\}$: если $X \equiv N_1$ и не $X \to bY$ для любого $Y \in N_1$ и не выполняется условие $X \to b$ есть в $P_1\} \cup$

$$\cup \{((\pi, a), \pi) \text{ для всех } a \in \Sigma_1\}.$$

Обоснование того факта, чго эта машина представляет *L(G₁)*, оставляем в качестве упражнения.

Пример 3. Пусть задана регулярная грамматика

$G = (\{A, B, C, D\}, \{x, y, z\}, P, A)$, где

$$P = \{A \to \Lambda \mid xB \mid yC,\ B \to zB \mid y \mid yC,\ C \to xD,\ D \to yD \mid x\}.$$

Используя описанную выше конструкцию, получим машину, изображенную на рис. 21.

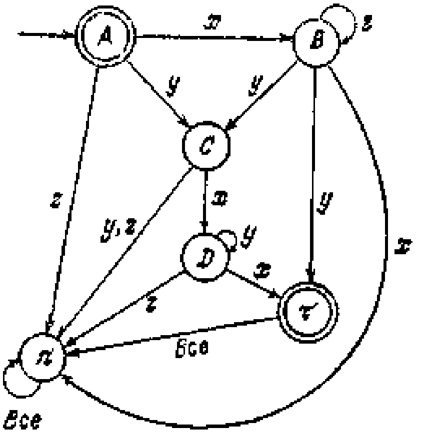


Рис. 21

Упражнения.

1. Пусть заданы регулярные выражения *A, B, C* и *D* такие, что $A \leqslant C$ и $B \leqslant C$. Доказать, что

а) $A + D \leqslant C + D$; б) $AD \leqslant CD$;

в) $DA \leqslant DC$; г) $A^* \leqslant C^*$; д) $A + B \leqslant C$.

2. Исследовать, как преобразуются результаты п. 1 данного упражнения, если **A, B, C** и **D** — регулярные матрицы размера $n \times n$.

3. Определить конечный автомат для языка *L*, определенного как $11{*}01{*}$ (т. е. $L = \{w \in \{0, 1\}^*: w\}$, начинается с 1 и имеет только

один нуль. Выписать правую линейную грамматику, определяемую этим автоматом, и последовательность перемещений, делающих представимой строку 111011.

1.9. ВЕРОЯТНОСТИ

1.9.1 Как описать случайность?

Некоторые историки науки считают, что представление о вероятности ввел еще ученик Сократа Платон. Действительно, в «Тимее» Платона есть одна туманная фраза, которую при желании можно истолковать любым образом, в том числе и в пользу введения понятия вероятности: «Как возникновение относится к бытию, так размышление относится к истине...»

Как бы там ни было, ясно, что древние не только знали о случайных явлениях, но и выводили из них некоторые закономерности. В знаменитой поэме «О природе вещей» Лукреций Кар пишет:

Первоначала вещей, разумеется, вовсе невольно
Все остроумно в таком разместилися стройном порядке
И о движеньях своих не условились раньше, конечно,
Но многократно свои положения в мире меняя,
От бесконечных времен постоянным толчкам подвергаясь,
Всякие виды пройдя сочетаний и разных движений,
В расположенья они, наконец, попадают, из коих
Вся совокупность вещей получилась в теперешнем виде
И, приведенная раз в состояние нужных движений,
Много бесчисленных лет сохраняется так и при этом
Делает то, что всегда обновляется жадное море...

Мудрецы видели, что кажущийся хаос лежит в основе правопорядка реального мира, его точных законов.

Уже в Древнем Китае и Древнем Риме знали о том, сколько продуктов нужно завозить ежедневно в крупный город, сколько там понадобится одежды к осени. Здесь интуитивно использовались некоторые законы теории вероятностей.

Важно разгуливали по священному саду Аполлона мудрые философы, создавая фундамент множества наук и в том числе науки, родившейся лишь спустя 2 тысячи лет — теории надежности. Но были люди,

совсем далекие от научных устремлений, которые, как ни странно, тоже невольно содействовали прогрессу этой науки будущего.
Можно вообразить себе, как где-то в шумном портовом кабачке Древней Греции или в роскошном доме богатого купца садятся за стол несколько игроков. Нервность рук и блеск глаз выдают волнение, вызванное расположением бросаемых на стол костей... Азартные игры — бич человечества, спутник порока и сами — порок, приносившие шальное счастье, боль и страдание, уносили здоровье, богатство и даже жизни. Но приносили они с собой и некоторый опыт. «Как бросать кости, чтобы выигрывать?» — вот вопрос, волновавший в равной степени и бедного рыбака, и пресыщенного патриция. И придумывались «беспроигрышные» системы, и оставлялись с разочарованием... Относительно «беспроигрышных» систем существует даже средневековый анекдот, приведенный французским математиком Жозефом Бертраном в его книге «Исчисление вероятности»:
«Однажды в Неаполе преподобный Галиани увидел человека из Базиликаты, который, встряхивая три игральные кости в чаше, держал пари, что выбросит три шестерки. И действительно, он немедленно получил три шестерки. Вы скажете, такая удача возможна. Однако человеку из Базиликаты это удалось и во второй раз, и пари повторилось. Он клал кости назад в чашку три, четыре, пять раз, и каждый раз выбрасывал три шестерки. «Кровь Вакха! — вскричал преподобный.— Кости налиты свинцом». Так оно и было. Но почему преподобный воспользовался нечестивым выражением?»
Азартные игры — спутник человека на протяжении всей его истории. Есть указания на то, что и египтяне, и индусы, и древние греки с равным ожиданием и волнением всматривались тысячи лет назад в одни им ведомые знаки на игральных костях.
Греки называют конкретного изобретателя — Паламеда. Вряд ли! В песках Египта, в каменных храмах майя археологи находят игральные кости разной формы — четырех-, шесги-, двенадцати-, двадцатиграниые...
Римские легионеры играли костями коленной чашечки овцы, которые назывались талус или таксиллус, и заимствовали они эту игру у древних греков, называвших ее астроголос. А может быть, и сами легионеры в пыльных походах придумали ее и, скрашивая одиночество, кидали кости в тщетной надежде и ждали, когда выпадет «Венера» — бросок, в котором кажая кость выпадала своей, особой, определенной стороной.
Другие, совсем другие кости были у богатых римлян, красного дерева или дорогих камней, и называвшись они по-другому — тессера. Но тем

же, неведомым еще пока никому законам подчинялись эти правильные кубики.

Кости пришли с человеком и в средневековье. В кости играли даже монахи, у них игра, говорят, шла на «добродетели» — выигравший обязан был наставиить проигравшего на путь истинный в отношении той добродетели, которая была тем проиграна.

Тонкостям игры в кости обучали в специальных школах — своеобразных «предшественницах» современных математических школ, где изучается теория вероятностей. Каким зависимостям подчиняется выпадение костей? Какие цифры будут на верхней стороне кубиков, когда они, умерив свой неровный бег, распределятся на столе, брошенные дрожащей рукой игрока? Видимо, предсказанию этого и обучали в старинных школах азартных игр, и, наверняка, тамошние «профессора» давно подметили некоторые закономерности

Они не могли не заметить, например, что каждая сторона игральных костей «равноправна». И хотя при бросании костей в полной мере господствует случай, при достаточно большом количестве бросков каждал грань выпадает примерно равное число раз.

Это ощущалось интуитивно, и лишь Якоб Бернулли, один из первых представителей знаменитой швейцарской научной династии, придал неясным догадкам силу математического закона, «закона больших чисел» (очень близко к этому подходили и Галилей, и Паскаль). Вот какую мысль выразил он в книге «Искусство догадок», вышедшей в 1713 году: «По мере увеличения числа опытов частота события сближается со значением вероятности, то есть со «степенью уверенности в результате».

Чем больше раз метальщики костей, неугомонные и азартные, выбросят кости, тем упрямей дает себя знать равноправность граней; и «двойка», и «пятерка», и «шестерка» выпадут примерно равное число раз, причем «частота» их выпадения будет равна одной шестой. При 6000 бросков любая грань должна была бы выпасть около 1000 раз и «частота» ее выпадения была бы примерно $\frac{1000}{6000}=\frac{1}{6}$. С увеличением числа бросков действительная «частота» выпадения любой грани все более и более точно приближалась бы к значению 1/6, к «значению вероятности».

Но что такое вероятность? Не изучали это понятие в школах азартных игр, не знали о нем безвестные игроки! Чтобы прийти к истокам, нам придется вернуться назад и попытаться выяснить, кто первым приблизился к этому понятию, что в него вкладывал, придется вернуться опять к Галилео Галилею.

Однажды к нему зашел приятель, любитель поиграть в кости.

— Почему,— спросил он,— играя тремя костями, мне удается в сумме чаще получить десятку, чем девятку? Ведь все цифры равноправны, а девятка и десятка могут быть набраны одинаковым числом способов — шестью?

Размышления Галилея привели к созданию важнейшего инструмента расчетов вероятностей — комбинаторике. Галилей доказал, что важно не то, сколькими способами набираются числа 9 и 10, а то, сколько вариантов выпадения костей приводят к суммам 9 и 10. Оказалось, что десятка может быть получена двадцатью семью способами, а девятка — двадцатью пятью. Следовательно, вероятности появления на костях сумм 10 и 9 относятся как 27 : 25.

Теория вероятностей из своей колыбели подавала советы. Но кому — игрокам! Говорят, со времен Галилея игроки в кости чаще ставили на десятку. И она в полном соответствии с законами природы выигрывала...

Исследователь жизни и трудов Паскаля, крупный венгерский математик Альфред Реньи в книге «Письма о вероятности» приводит интересную историческую реконструкцию процесса создания теории вероятностей.

Блез Паскаль, родившийся в городке Клермон-Фер ране в 1623 году, столь рано проявил свой математический талант, что об этом позже стали рассказывать уже совсем малоправдоподобные истории. Во всяком случае острый ум мальчика и общение его в раннем детстве с друзьями отца — знаменитыми учеными того времени Робером, Каркави, Мерсенном принесли необычайные плоды. Это был счастливый век. Процесс научного познания победил. Раскрепощались умы, рождая вопросы к природе. Какие типы законов ей свойственны? Шестнадцати лет Паскаль уже выпустил сложную научную книгу о конических сечениях, где доказал весьма важную теорему геометрии. Отец, боявшийся чрезмерного умственного истощения мальчика, одно время отнимал у него книги и просил друзей не растравлять страсть сына научными разговорами. Как выяснилось позже, у отца были серьезные основания — столь интенсивные научные занятия Паскаля вызвали его преждевременную усталость, его силы истощились, он стал склонен к ипохондрии, и однажды, чудом избежав смерти, он забросил научные труды и посвятил себя религии.

Это произошло в ночь на 23 ноября 1654 года. Ей предшествовали несколько дней сильного душевного волнения Паскаля. Записки, написанные той ночью в порыве религиозного экстаза, знаменуют

новый период его жизни, малоэффективный в научном отношении. Паскаль с религиозными «записками», написанными в ночь на 23 ноября 1654 года,— это совсем другой Паскаль, резко отличающийся от того, что был ранее.
Профессор Реньи делает из этого заключение о том, что понятие о теории вероятности было разработано Паскалем до 23 ноября 1654 года. Если же учесть, что последнее письмо Паскаля к Ферма было написано всего месяц назад и не содержало точного определения, то Альфред Реньи мог сделать предположение о том, что создание теории вероятностей потребовало у Паскаля месяц времени. Именно в этот период были написаны воображаемые письма Паскаля, вошедшие в книгу Реньи «Письма о вероятности».
Как отмечают биографы, в 1652—1654 годах Паскаль вел весьма рассеянный образ жизни. В 1653 году со своими знатными друзьями — Дамьеном Митоном, герцогом Роаннским и кавалером де Мере Паскаль совершил путешествие в Пуату. Чтобы скоротать время, приятели частенько прикладывались к игральным костям. И однажды кавалер де Мере задал друзьям два вопроса об игре в кости, которые потребовали от Паскаля размышлений.
Вопросы, которые поставил игрок в кости кавалер де Мере, были такие.
Сколько раз надо бросать две игральные кости, чтобы вероятность хотя бы однажды выбросить две шестерки была больше половины?
Пусть два игрока играют в азартную игру; в каждой партии шансы на выигрыш у них одинаковы; в начале игры ставки одинаковы; ставку выигрывает тот, кто первым наберег k выигранных партий. Как следует разделить ставку, если по какой-то причине игра прервана в тот момент, когда один игрок выиграл n партий, а другой — m партий?
Вопросы де Мере настолько заинтересовали Паскаля, что он написал 29 июля 1654 года (на этот раз действительное) письмо своему другу, знаменитому математику Ферма: «Дорогой г-н Ферма! Мной овладело нетерпение, и хотя я еще нахожусь в постели, мне трудно удержаться от того, чтобы взять перо и сообщить Вам, что вчера вечером г-н Каркави передал мне Ваше письмо о справедливом разделе ставки, которое привело меня в неописуемый восторг. Не стану растягивать вступления и скажу фазу: Вы вполне правильно решили задачу о костях и задачу о справедливом разделе ставки. Для меня это большая радость, кольку теперь, когда мы получили столь изумительно совпадающий результат, я больше не сомневаюсь в собственной правоте.
Метод, которым Вы решили проблему разделенияя, восхитил меня еще больше, чем решение задачи об игре в кости. Многие, и среди них сам

кавалер де Мерс и г-н Роберваль, удачно ответили на последний заданный вопрос. Но де Мере не смог правильно решить ни дачу о разделе ставки, он даже не смог подступиться к этому вопросу, так что до сих пор я был единственным, кто знал правильное соотношение раздела.

Ваш метод вполне надежен; в свое время, когда я сам начал размышлять над указанным вопросом, я также шел подобным путем. Однако подсчет различных встречающихся комбинаций утомителен, и поэтому позднее мне удалось найти другой, более простой и изящный метод, о котором мне и хотелось бы Вам расказать. Я и впредь хотел бы по мере возможности делиться с Вами своими мыслями. Я более не сомнеаюсь в правильности полученного мной результата, так как он удивительным образом совпадает с найденными Вами. Как я вижу, истина одна: и в Тулузе, и в Париже».

В процессе последующей переписки родилась теория вероятностей. Однако увлеченный решением задач игральных костей, Паскаль «забыл» дать систематическое изложение разработанной им теории, что заставило Реньи «домыслить» четыре письма Паскаля к Ферма и самому изложить «пером Паскаля», что вкладывал Паскаль в понятие вероятности. Один из важных философских вопросов, возникающих в этой связи, такой: на каких позициях стоял Паскаль, считал ли он вероятность субъективной оценкой психологического состояния наблюдающего субъкта, говоря, что вероятность — это мера нашей уверенности?

Нет, не было этого! Паскаль, как и многие ученые прошлых веков, странным образом успешно сочетал религиозную истовость с вполне материалистическим мировоззрением, когда дело касалось науки. Он твердо настаивает на том, что вероятность есть объективная характеристика событий, ни в коей мере не зависящая от наблюдателя.

В вымышленном диалоге Паскаля с Митоном Реньи приводит интересный пример, касающийся вероятности кораблекрушений: «Я слышал, в Англии торговцы стремятся обезопасить себя от потери грузов, отправленных на корабле, заранее выплачивая некоторую сумму обществу, которое специально этим занимается; общество же взамен возмещает торговцу ущерб, если груз погибнет в результате кораблекрушения или же из-за нападения пиратов. Если же груз благополучно прибывает на место назначения, то первичный страховой взнос остается у общества. Несомненно, при установлении размера взноса торговец и общество как-то оценивают вероятность потери груза, и хотя оба суждения имеют чисто субъективный характер, все же, по-моему, и в этом случае можно говорить об объективной вероятности благополучного прибытия корабля; только нужно честно признаться, что нам эта вероятность неизвестна. Каково бы ни было наше личное мнение о шансах благополучного прибытия корабля в порт, оно никак не скажется на судьбе корабля. На нее оказывает влияние лишь объективная вероятность, которая является не чем иным, как квинтэссенцией объективных обстоятельств. Как по-Вашему, если бы Вы подумали, что некий корабль может утонуть и это на самом деле случилось бы, мог бы суд привлечь Вас к ответственности на том основании, что Вы послужили причиной катастрофы? Не правда ли, Вы отвергли бы обвинение, заявив, что Ваше личное мнение никак не могло повлиять на судьбу корабля? Будь я судьей, я снял бы с Вас обвинение в гибели судна, но осудил бы Вашу точку зрения относительно субъективности вероятности».

Паскалю первому удалось сформулировать законы теории вероятностей и придать им четкий философский смысл.

Анализ переписки Паскаля и Ферма послужил опорой книги Христиана Гюйгенса «О расчетах в азартных играх» (1658).

У Гюйгенса теория вероятностей имела несколько иное истолкование, чем у Паскаля. Как далеко можно обогнать свой век! Гюйгенс говорит не о «вероятности», а о «математическом ожидании», то есть как раз о том понятии, которое лежит в основе современной теории вероятности. Вот как он определяет «математическое ожидание»:

«Если число случаев, в которых я выигрываю сумму *М,* равно *т,* а число случаев, в которых я выигрываю сумму *N*, равно *п,* причем все случаи одинаково $Mm + Nn$ возможны, то значение моего ожидания равно $\dfrac{Mm+Nn}{m+n}$».

Пророчески звучат сейчас слова Гюйгенса из его книги: «Я полагаю, что при внимательном изучении предмета читатель заметит, что имеет дело не только с игрой, но что здесь закладываются основы очень интересной и глубокой теории».

Затем появились уже упоминавшееся «Искусство догадок» Бернулли (1713), «Опыт анализа азартных игр» Монморта (1708) и «Об измерении случайности или о вероятности результатов в случайных играх» Абрахама де Муавра (1711). Все эти книги были прямо или косвенно связаны с перепиской Паскаля и Ферма и совсем непосредственно с азартными играми. Другие проблемы там не рассматривались. А они уже были поставлены жизнью.

Англичанин Джон Уоткинс составил в 1662 году таблицы смертности граждан в зависимости от возраста. Он опирался на мрачную статистику смертности, ведущуюся в Лондоне с 1592 года. Таблицы

смертности были нужны для вычисления величины пожизненной ренты.
Вероятность того, что судно благополучно вернется из плавания, интересовала судовладельцев и страховщиков — в Англии зарождалась система страхования судов.
К сожалению, сама теория вероятностей для этих насущных нужд использовалась мало — она была для страховщиков слишком абстрактной наукой.
С другой стороны, «чистые» математики тоже весьма ревниво оберегали свою науку от вторжения самозванки, указывая, что она должна относиться скорее к философии. Или — к физике. Но не к математике. И это несмотря на то, что теория вероятностей была необычайно укреплена и расширена Гауссом, Лапласом, Пуассоном, Чебышевым, Пуанкаре, Марковым. Это может показаться странным, но именно легкая «приложимость» теории вероятностей к проблемам естествознания, к экономическим и техническим наукам мешала ей войти в круг наук, обычно причисляемых к классической математике.
Лишь с 1900 года благодаря трудам Давида Гильберта теория вероятностей получила права гражданства. Гильберт поставил проблему — **аксиоматически обосновать теорию вероятностей**. 33 года потребовалось для того, чтобы эта задача была, наконец, решена. Это было выполнено математиком А. И. Колмогоровым.
Теория Колмогорова служит основой построения и понимания современнейшей и вместе с тем древнейшей науки — теории вероятностей. Именно на ее основе инженеры могут делать далекоидущие выводы, предсказания, с се помощью они смогли, наконец, ввести в свои расчеты случайность.
Как описать случайность?
Еще недавно понятия теории вероятностей казались совершенно абстрактными, а уже сегодня многие довольно свободно ориентируются в ее положениях и терминах. Возьмем сначала понятия о «вероятном» и «невероятном». Какие числа, например, могут, а какие не могут представлять продолжительность жизни человека? Существует ли максимальный для человека возраст или величина, определяющая возраст, может принимать любые значения? Мы, конечно, не решимся вообразить, что человек может прожить 1000 лет. В соответствии с формулами, выведенными из современных таблиц смертности, доля людей, которые могли бы дожить до 1000 лет, равна единице, деленной на число, записывающееся единицей с тремястами шестью нулями. Утверждение, что человек может дожить до такого возраста, лишено смысла с точки зрения биологии, но если его

рассматривать исключительно с точки зрения статистики, то оно не противоречит опыту. В течение столетия рождается не более 10 миллиардов людей, и чтобы опровергнуть вышеуказанное утверждение статистически, потребовалось бы более чем 10^{350} столетий, что превышает возраст земного шара более чем в 10^{340} раз. Очевидно, что столь малые вероятности совместимы с нашим понятием невозможности. Можно было бы подумать, что их применение является полным абсурдом. В действительности оно совершенно безвредно и приводит к упрощению многих формул. Кроме того, если бы мы решили всерьез исключить возможность дожить до 1000 лет, то тут мы столкнулись бы с большими трудностями, ибо мы должны были бы допустить существование максимального возраста. А право же, предположение о том, что человек может прожить сколько-то лет, но не может прожить на 10 секунд больше, нисколько не убедительнее, чем представление об отсутствии границы для продолжительности жизни. Так мы приходим к математическому понятию о «невероятном».

Условимся называть событиями результаты опытов или наблюдений. Так, мы будем говорить о событии, заключающемся в том, что из пяти подброшенных вверх монет три упали гербом вверх. Событиями будем также называть состав выборки («среди 85 человек двое — левши») и результаты измерения («температура 80°», «семь бракованных деталей»).

Наблюдаемые нами события можно подразделить на три вида: достоверные, невозможные и случайные.

Достоверным называется событие, которое произойдет обязательно, если осуществлена некоторая совокупность условий. Например, если монета подброшена на Земле, причем ее начальная скорость равна 1 метру в секунду, то событие «монета упала на Землю» является достоверным. Аналогично невозможным называют событие, которое при данных условиях заведомо не произойдет. Например, при тех же условиях событие «монета улетела на Луну» является невозможным.

Случайным называют событие, которое в данных условиях может произойти, а может не произойти. Та же монета может упасть так, что сверху будет или герб, или надпись. Поэтому событие — «при падении монеты выпал герб» — случайное.

Каждое случайное событие (выпадение герба или надписи при бросании монеты, например) есть результат действия очень многих причин (среди них сила, с которой брошена монета, форма монеты, состояние атмосферы в том месте, где она брошена, и т. п.). Невозможно учесть влияние всех этих причин, тем более что некоторые из них могут быть вообще неизвестны. Поэтому теория вероятностей не ставит перед собой задачу предсказать, произойдет единичное событие или нет, она просто не в силах это сделать.

По-иному обстоит дело, если рассматриваются случайные события, которые могут многократно наблюдаться при осуществлении тех или иных условий, то есть если речь идет о массовых случайных однородных событиях. Например, хотя и нельзя определить наперед результат одного бросания монеты, можно указать, причем достаточно точно, число появлений герба, если монета в одинаковых условиях будет подбрасываться большое число раз. Достаточно большое число однородных случайных событий независимо от их конкретной природы подчиняется определенным закономерностям, а именно вероятностным закономерностям. Установлением этих закономерностей и занимается теория вероятностей.

Продолжим наш разговор о событиях и введем еще несколько определений.

События называются несовместными, если на протяжении испытания появление одного из них исключает появление других. Например, выпадение герба и выпадение надписи при одном бросании монеты — события несовместные.

События называются единственно возможными, если в результате испытания лишь одно (и только одно!) из этих событий является достоверным. Например, если вы стреляете по мишени в тире, то возможны только два события: попадание в мишень или промах. Эти события единственно возможные.

События называются равновозможными, если есть основания считать, что ни одно из этих событий не является более возможным, чем другие. Появление герба или надписи при бросании монеты являются равновозможными событиями, если мы предполагаем, что монета изготовлена из однородного материала, имеет правильную форму, а наличие чеканки не оказывает влияния на выпадение той или иной стороны монеты. Теперь уже мы подошли к тому, чтобы ввести основное определение — что же такое вероятность? Определение вероятности не единственно. Поэтому мы сначала введем так называемое классическое определение вероятности. Рассмотрим, например, извлечение шара из урны, в которой находится 10 шаров — четыре красных и шесть белых. Пусть нас интересует событие, заключающееся в извлечении из урны красного шара. Очевидно, что возможность вынуть из урны красный шар меньше, чем белый (их там меньше). Можно ли охарактеризовать эту возможность числом? Разумеется, можно. Это число и будет вероятностью события. Таким образом, вероятность есть число, характеризующее возможность события. Подсчитаем это число для нашего примера.

Будем рассматривать появление красного шара как благоприятный для нас исход испытания. А СКОЛЬКО всего исходов может иметь место в данном случае? Естественно, десять — в урне всего десять шаров. Легко видеть, что эти исходы единственно возможны (обязательно появится хотя бы один шар) и равновозможны (шары одинаковы и тщательно перемешаны, шар вынимают наудачу). Сколько благоприятных для нас исходов может быть при испытаниях? Конечно, четыре — в урне всего четыре красных шара.

Отношение числа благоприятных исходов к общему числу исходов и называется вероятностью события. Так, в нашем примере вероятность извлечь из урны красный шар составляет $^{4}/_{10}$.

Из определения вероятности вытекают ее основные свойства: вероятность достоверного события равна единице, вероятность невозможною события равна нулю, вероятность случайного события заключена между нулем и единицей. Эти свойства совершенно очевидны и не нуждаются в каких-либо доказательствах.

Однако такое определение вероятности имеет несколько существенных недостатков. Например, как быть, если число исходов испытания невозможно указать заранее? Далеко не всегда можно доказать, что исходы испытания равновозможны или единственно возможны.

Поэтому наряду с классическим определением вероятности используют также ее статистическое определение. За вероятность события принимают отношение числа испытаний с благоприятным исходом к общему числу фактически проведенных испытаний. Главное отличие определений состоит в том, что при классическом определении вероятность можно вычислить до проведения испытания, да и вообще для вычисления вероятности никаких опытов можно совсем и не производить. Статистическое же определение требует обязательного проведения испытаний, причем чем больше их проведено, тем больше точность вычисления вероятностей.

Любые события могут быть независимыми и зависимыми. Независимыми называются события, если вероятность одного из них не зависит от появления или непоявления другого.

Вернемся к нашему примеру с урной и шарами. Мы вычислили вероятность того, что при первом извлечении из урны появится красный шар. А если попытаться выяснить, какова вероятность появления красного шара при втором извлечении? Естественно, эта вероятность будет зависеть от того, какой шар вынули в первый раз. Теперь уже изменится число возможных исходов — в урне остается только девять шаров. Изменяется и число благоприятных исходов.

Действительно, если первый раз извлекли белый шар, то в урне осталось четыре красных шара и пять белых, то есть вероятность появления красного шара при втором извлечении будет $^4/_9$. Если же в первый раз извлекли красный шар, то в урне осталось три красных шара и шесть белых, и интересующая нас вероятность будет составлять только $^3/_9$. Таким образом, мы приходим к очень важному понятию — понятию условной вероятности, которое очень часто встречается в приложениях теории вероятностей. Условной вероятностью называют вероятность некоторого зависимого события при условии, что уже произошло какое-то другое событие.

На практике мы всегда имеем дело с так называемыми случайными величинами. Это величины, принимающие только одно возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены. Например, число мальчиков среди ста новорожденных есть случайная величина, которая имеет возможные значения от нуля до ста. Расстояние, которое пролетит снаряд после выстрела, тоже случайная величина, зависящая не только от типа орудия и установки прицела, но и от многих других причин (силы и направления ветра, температуры и т. д.). Каждому значению случайной величины соответствует определенная вероятность, с которой эта случайная величина появляется при испытаниях. Действительно, среди ста наугад выбранных новорожденных вряд ли будут одни девочки или мальчики; вероятности таких событий будут весьма малы. С другой стороны, велика вероятность того, что число мальчиков и девочек будет приблизительно одинаковым. Мы приходим к выводу, что задание только значений случайной величины еще не описывает ее, необходимо, кроме того, задать те вероятности, с которыми эта величина может принимать те или иные значения. Соответствие между значениями случайной величины и их вероятностью называют законом распределения случайной величины.

Закон распределения случайной величины с наибольшей полнотой описывает эту величину. Мы можем предсказывать вероятности интересующих нас значений случайной величины и на этом основании прогнозировать ее поведение.

Естественно, что математики давно уже, начиная с Гаусса, занимались исследованием различных законов распределения случайных величин. Их интересовали предпосылки возникновения тех или иных законов, каковы физические причины, приводящие к тому или иному закону распределения. На этом пути ими были достигнуты значительные успехи. Была разработана стройная теория распределений, которая широко используется в современной инженерной практике. Это распределения Гаусса, Пуассона, гамма-распределение, экспоненциальное распределение и целый ряд других. Все они используются в теории надежности. Однако особенно большое значение приобрели так называемые распределения экстремальных значений, большой вклад в развитие которых внесен советскими учеными, особенно трудами академика Б. В. Гнеденко.

В очень многих случаях инженеров интересует наибольшее или наименьшее значение случайной величины, так называемое экстремальное значение. Рассмотрим пример. На некоторой реке необходимо построить плотину. Спроектировать ее надо таким образом, чтобы она не была разрушена паводком. Каким образом узнать возможную величину паводка, скажем, через 100 лет? По утверждение комиссии США по водным ресурсам, «какие бы большие паводки ни наступали, всегда можно ожидать еще больших. Так утверждает теория экстремальных значений и это подтверждает практика». Но нельзя же рассчитывать плотину на неограниченно большой паводок, такой, который можеч возникнуть, скажем, один раз в течение ста тысяч лет. В этом случае пришлось бы намного завысить необходимую стоимость сооружения. Здесь на помощь приходит теория экстремальных значений. Она позволяет на основании предыдущих наблюдений за случайной величиной предсказать, какие значения и с какой вероятностью в будущем может принимать эта случайная величина, в данном случае высота паводка. Число областей, в которых необходимо оценить максимальные (или минимальные) значения случайной величины при последовательных ее наблюдениях, буквально неограниченно. Такими вопросами задаются геофизики при оценке максимальной скорости ветра, специалисты по электросетям — при расчете максимальной нагрузки в энергосистеме, кораблестроители — при расчете прочности корабля при максимальном волнении на море и многие другие специалисты. В теории надежности нашло неожиданное применение еще одно из направлений теории вероятности — теория массового обслуживания.

На начальное развитие этой теории большое влияние оказал датский ученый А. К. Эрланг. Его труды в области проектирования и эксплуатации телефонных станций явились толчком к появлению ряда работ в области массового обслуживания. Огромную роль в развитии этой теории сыграл выдающийся математик А. Я. Хинчин. Большую работу по дальнейшему развитию идей и методов теории массового обслуживания вел крупнейший математик Б. В. Гнеденко со своими учениками. Значительный вклад в развитие этой теории внес А. Н. Колмогоров. Какие же вопросы решает теория массового обслуживания? Уже само название теории в какой-то степени раскрывает ее содержание. Сразу ясно, что содержание теории имеет отношение к обслуживанию, причем к обслуживанию массовому. При этом под обслуживанием понимаются все его виды даже в переносном смысле. В прямом смысле примером обслуживания является обычное бытовое обслуживание — продажа билетов, ремонт телевизоров в ателье и т. д. В переносном смысле «обслуживанием», например, можно назвать обстрел артиллерией танков противника. Предметом теории массового обслуживания является количественная сторона процессов, связанных с массовым обслуживанием.

Целью теории является разработка математических методов для отыскания основных характеристик процессов массового обслуживания, для оценки качества функционирования обслуживающей системы.

Рассмотрим несколько примеров применения теории массового обслуживания, связанных с использованием ее в теории надежности.

Возьмем организацию ремонта автомашин. В автохозяйстве всей страны и даже в большом автохозяйстве крупного города число машин очень велико. Время от времени некоторые машины выходят из строя и требуют ремонта. Для его проведения необходимо иметь авторемонтные предприятия, необходимую рабочую силу и запасные части. Но каким образом определить, например, необходимое количество авторемонтных предприятий? Если их будет очень много, то часть из них будет простаивать из-за недостаточного числа поврежденных машин. Если же их организовать слишком мало, то часть машин будет простаивать в ожидании ремонта. Помощь в нахождении оптимального числа таких заводов и оказывает теория массового обслуживания.

Если рассматривать выход из строя элемента системы как потребность в обслуживании, то теория массового обслуживания позволяет находить количественные показатели надежности различных систем, обосновывать выбор элементов этих систем, исходя из необходимой надежности всей системы в целом.

Из приведенных примеров видно, что теория вероятностей к середине XX века уже «созрела» для того, чтобы ее практически использовать в целях повышения надежности создаваемых сложнейших устройств и систем. С другой стороны, к этому же времени и техника стала испытывать насущную необходимость в новом подходе к ее использовании.

1.9.2. Вероятности

1. Случайные события. Познание закономерностей объективного мира позволяет выявлять связи между событиями (или явлениями) и условиями, которые определяют их появление. Если можно указать комплекс условий, при каждой реализации которого событие неизбежно происходит, то это событие называется *достоверным.* Событие, которое заведомо не может произойти при реализации данного комплекса условий, называется *невозможным.* Очевидно, невозможность события равносильна достоверности противоположного события.

Однако предсказать с полной определенностью наступление того или иного события удается далеко не всегда. Это связано с тем, что часто указываемый комплекс условий не отражает всей совокупности причинно-следственных связей между явлениями. Либо вызывающие данное событие причины еще недостаточно изучены, либо учет всей совокупности причин настолько сложен, что практически целесообразно ограничить комплекс условий наиболее существенными и поддающимися контролю. Возникающая при этом неопределенность является признаком *случайных событий.*

Случайное событие относительно некоторого комплекса вполне определенных условий может произойти, а может и не произойти. Примеры случайных событий: перегорание лампочки через 1000 ч работы, попадание в цель при обстреле тремя снарядами, выпадение пяти очков при бросании игральной кости, победа киевского «Динамо» в предстоящем футбольном чемпионате и т. п.

2. Вероятность. Возможность появления случайного события A при реализации комплекса условий S оценивается количественной мерой, которая называется *вероятностью* и обозначается как $P(A/S)$ или короче $P(A)$. Обычно вероятность достоверного события принимается равной единице, а невозможного события — нулю. Тогда для любого события $0<P(A)<1$, а вероятность случайного события выражается положительным числом, меньшим единицы.

Интуитивно ясно, что событие тем более вероятно, чем чаще оно происходит в рассматриваемых условиях. Таким образом, вероятность $P(A/S)$ непосредственно связана с *частотой* появления события A при многократном повторении комплекса условий S. С увеличением числа таких повторений, называемых *испытаниями,* частота все более точно характеризует значение вероятности.

Закономерности, присущие случайным событиям, имеют массовый характер и называются *вероятностными* или *стохастическими.* Они играют большую роль в науке и технике при исследовании сложных явлений, проектировании и планировании.

Существует много различных подходов к определению вероятности, которые обычно сводятся к описанию практических приемов ее вычисления. Основные из них рассматриваются ниже.

3. Классическое (комбинаторное) определение. Если из общего числа n равновозможных и несовместных исходов (случаев) событию A благоприятствуют m исходов, то вероятность события A

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Например, при подбрасывании монеты возможны два исхода — выпадение герба (Г) и цифры (Ц). Эти исходы можно считать равновозможными (никакой из них не имеет преимущества перед другим) и несовместными (они не могут появиться вместе). Поэтому вероятность выпадения герба равна $\frac{1}{2}$. Такая же вероятность и выпадения цифры. Полученный результат говорит о том, что при многократных подбрасываниях монеты примерно в половине случаев выпадает герб, причем этот результат тем ближе к действительности, чем больше число испытаний. При подбрасывании двух монет число всех исходов равно четырем {ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ}. Вероятность выпадения двух гербов (как и двух цифр) равна $\frac{1}{4}$, но герб и цифра будут появляться с вероятностью $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, поскольку этому событию благоприятствуют два исхода (ГЦ, ЦГ).

В более сложных случаях для подсчета числа исходов используются комбинаторные методы. Пусть, например, известно, что в партии из r изделий имеется s бракованных. Найдем вероятность того, что из выбранных наугад v изделий w окажутся бракованными (событие A). Общее число исходов равно количеству сочетаний из r изделий по v, т. е. C^v_r. Благоприятствующие исходы соответствуют сочетаниям из w бракованных и v—w годных изделий. Так как w бракованных изделий можно выбрать C^w_s различными способами, а v—w годных изделий можно выбрать C^{v-w}_{r-s} способами, то число исходов, благоприятствующих событию A, будет $C^w_s\, C^{v-w}_{r-s}$ и следовательно,

$$P(A) = \frac{C^w_s\, C^{v-w}_{r-s}}{C^v_r}.$$

Комбинаторное определение возникло в самом начале развития теории вероятностей в связи с изучением шансов на выигрыш в азартных играх. Оно удобно в тех случаях, когда заведомо применимо положение о равновозможности исходов наблюдений (подбрасывание монет или игральных костей, извлечение шаров из урны или карт из колоды, случайная выборка объектов из некоторой их совокупности при статистических исследованиях, распределения и взаимодействия физических частиц и т. п.). В то же время изложенный подход нельзя считать определением вероятности в строгом смысле, так как используемое в нем понятие равновозможности по существу означает равновероятность (вероятность определяется через равновероятность). Кроме того, он оказывается практически бесполезным, если неясно, какие исходы следует считать равновозможными.

4. Статистическое (частотное) определение. Статистический подход основан на регистрации появления события при многократных наблюдениях в одинаковых условиях. Если событие A появляется в m исходах наблюдений из их общего числа n, то вероятность этого события

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}.$$

Разумеется, бесконечное число наблюдений n можно представить лишь теоретически, а на практике приходится довольствоваться конечным и часто весьма ограниченным числом наблюдений. Получаемое при этом значение для частоты события m/n называют *статистической вероятностью.* При небольшом числе наблюдений частота события может существенно отклоняться в различных сериях экспериментов, но с увеличением числа наблюдений она все более стабилизируется, сосредоточиваясь вблизи истинного значения вероятности. Так, никто не удивится, если при десятикратных бросаниях монеты герб выпадает 3, 7 или 8 раз. Но если бы при 1000 бросаний герб выпал 300, 700 или 800 раз, то это заставило бы полностью пересмотреть предположение о равновозможности выпадений герба и цифры или искать какой-то скрытый изъян в проведении экспериментов (известны, например, следующие результаты выпадения герба в десяти сериях, каждая из которых состояла из 1000 подбрасываний монеты: 502, 511, 497, 529, 504, 476, 507, 528, 504, 529).

Статистические вероятности широко используют на практике. Например, при изучении большого числа данных установлено, что частота рождения девочек равна 0,482. Если известно, что из 10000 конденсаторов бракованных оказалось 116, то в аналогичных условиях следует ожидать появление негодного конденсатора с вероятностью 0,0116 или 1,16%.

5. Множество событий. Совокупность всех возможных исходов при данном комплексе условий образует *множество элементарных событий.* Любое событие рассматривается как подмножество этого основного множества (универсума).

Например, множество всех исходов при бросании двух игральных костей содержит 6 • 6 = 36 элементов. Каждый из них представляет собой упорядоченную пару (a, *b),* где *a* и *b* — числа очков, выпавших соответственно при бросании первой и второй кости. Событию, заключающемуся в выпадании дубля, соответствует подмножество *A* (дубль) = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)}, а выпаданию в сумме меньше шести очков — подмножество *B* (меньше 6 очков) = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1)}.

Выбор трех из пяти кандидатов *{a, b, c, d, e}* имеет C^3_5 = 10 исходов, которые и образуют множество элементарных событий. Выбору кандидата *a* (среди трех кандидатов) соответствует событие *A* (выбор *a*) = *{(abc), (abd), (abe), (acd), {ace), (ade)},* выбору кандидатов *b* и *d* — событие *B* (выбор *b* и *d) = {(abd), (bed), (bde)},* выбору только одного из кандидатов *b* или *d* (но не обоих вместе) — событие *C* (выбор или *b,* или *d) = {abc), (abe), (acd), (ade), (bee), (cde)}.*

6. Несовместные события. События *A* и *B* называют *несовместными,* если соответствующие им подмножества не пересекаются, т. е. $A \cap B = \varnothing$ (например, выпадение при бросании двух игральных костей дубля и нечетного числа очков). Если из осуществления события *A* неизбежно следует событие *B,* то *A* является подмножеством *B,* т. е. $A \subset B$ или $A \cap B = A$ (например, из выпадения дубля следует событие, заключающееся в выпадении четного числа очков). Подобные события всегда совместные.

Событие, заключающееся в реализации несовместных событий *A* или *B,* соответствует их объединению $A \cup B$ или дизъюнктивной сумме *A* + *B* и его вероятность равна сумме вероятностей *P(A)* и *P(B),* т. е.

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Действительно, если m_A и m_B — числа исходов, благоприятствующих событиям *A* и B, то появлению события *A* или *B* будет благоприятствовать $m_A + m_B$ исходов из общего числа *n* исходов, поэтому

$$P(A + B) = \frac{m_A + m_B}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} = P(A) + P(B).$$

Этот вывод естественно обобщается на любое число несовместных событий, т. е.

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Если объединение попарно несовместных событий составляет основное множество, то появление одного из них является достоверным событием, т. е. $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1$. Говорят, что такие события образуют *полную систему событий,* а их вероятности удовлетворяют *нормирующему условию*

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

В частности, $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$, откуда следует выражение для вероятности противоположного события

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Например, при бросании двух игральных костей полную систему образуют несовместные события: выпадение меньше четырех очков *(А),* выпадение четырех или пяти очков *(В)* и выпадение больше пяти очков (*С*). Число благоприятствующих им элементарных событий $m_A = 3$, $m_B = 7$ и $m_C = 26$, следовательно, имеем:

$$P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}; \quad P(B) = \frac{7}{36}; \quad P(C) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18};$$

$$P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{12} + \frac{7}{36} + \frac{13}{18} = 1.$$

7. Независимые события. События *А* и *В* называются *независимыми,* если вероятность одного из них не зависит от исхода другого. Так, число выпавших очков при каждом бросании игральной кости не зависит от результатов предыдущих испытаний. Вероятность вынуть белый шар из урны, в которой находится несколько белых и черных шаров, не зависит от цвета шара, вынутого в предыдущем испытании, если каждый раз он возвращается в урну. Однако если ранее вынутый шар не возвращается, то эта вероятность изменяется после каждого испытания и, следовательно, вероятность его исхода будет зависеть от предыдущего исхода. Пусть, например, в урне находится 2 белых и 3 черных шара. Вероятность «вынуть белый шар до испытания равна $\frac{2}{5}$,

а после него она становится равной $\frac{1}{4}$, если был вынут белый шар,

и $\frac{1}{2}$ если был вынут черный шар.

Событие, заключающееся в реализации как события *А*, так и события *В,* соответствует пересечению множеств, и его вероятность при независимости событий *A* и *B* равна произведению их вероятностей, т. е.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Это соотношение можно доказать на основе классического определения вероятности (3). Пусть

$$P(A) = \frac{m_1}{n_1} \text{ и } P(B) = \frac{m_2}{n_2}.$$

Если события *A* и *B* независимы, то при каждом из m_1 исходов, благоприятствующих событию *A,* будет также m_2 исходов, благоприятствующих событию *B.* Значит, число исходов, благоприятствующих свершению как события *A,* так и события *B,* будет m_1m_2. Аналогично выводим, что общее число возможных исходов равно n_1n_2., Поэтому

$$P(A \cap B) = \frac{m_1m_2}{n_1n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = P(A)P(B).$$

Для нескольких независимых событий формула принимает вид:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n).$$

Пусть, например, устройство состоит из трех блоков, вероятности безотказной работы которых в течение времени *t* равны соответственно $P(A_1) = 0{,}7$; $P(A_2) = 0{,}8$ и $P(A_3) = 0{,}9$. Отказ в работе хотя бы одного из блоков приводит к отказу всего устройства, причем отказы блоков происходят независимо. Тогда вероятность безотказной работы устройства $P(A) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}504$.

8. Условная вероятность. Если события *A* и *B* зависимы, то как указывалось в (7), после наступления одного из них, например *A,* вероятность другого будет отличаться от его вероятности *P(B),* вычисленной без учета наступления события *A*. Вероятность события *B* при условии, что уже произошло событие *A,* называют *условной вероятностью* и обозначают через $P_A(B)$ или $P(B/A)$. Поэтому формула для вероятности одновременного наступления двух зависимых событий должна быть записана в виде:

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B).$$

Например, вероятность вынуть два белых шара из урны, в которой находятся 2 белых и 3 черных шара (предполагается, что вынутый шар не возвращается в урну) равна произведению вероятности вынуть белый шар первый раз (событие *A*) на вероятность вынуть белый шар второй раз (событие *B)* при условии, что первым был белый шар (произошло событие *A),* т. е. $P(A \cap B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$.

Если вынутый шар возвращается в урну, то *A* и *B* независимы и

$P(A \cap B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$. Из приведенной выше формулы следует выражение

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$

которое часто рассматривается как определение условной вероятности, если каким-либо способом определены *P(A* | *B)* и *P(A).* Ясно, что для независимых событий $P_A(B)$ совпадает с *P(B).* Вероятность одновременного наступления нескольких зависимых событий выражается формулой

$$P(A_1, A_2, \ldots, A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) \ldots P_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n),$$

которая получается по индукции из формулы для двух событий. Здесь $P_{A_1 A_2 \ldots A_{i-1}}(A_i)$ — условная вероятность события A_i, вычисленная при условии, что произошли события $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}$.

9. Объединение событий. Простая формула для вероятности появления одного из несовместных событий (6) нуждается в обобщении, если события совместны. Пусть из *n* равновозможных исходов событию *A* благоприятствуют m_A исходов, а событию *B* — m_B исходов. Так как множества совместных событий пересекаются, то сумма $m_A + m_B$, кроме исходов, благоприятствующих появлению одного из событий *A* или *B,* дважды учитывает m_{AB} исходов, благоприятствующих одновременному появлению *A* и *B*. Поэтому из общего числа исходов *n* появлению событий *A* или *B* (или обоих вместе) будут благоприятствовать $m_A + m_B — m_{AB}$ исходов, на основании чего имеем

$$P(A \cup B) = \frac{m_A + m_B - m_{AB}}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} - \frac{m_{AB}}{n} = \\ = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Эта формула получена без каких-либо ограничений относительно характера событий *A* и *B:*

для зависимых событий

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P_A(B),$$

для независимых событий

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).$$

10. Независимость и несовместность. При использовании приведенных соотношений необходимо четко понимать смысл таких свойств событий, как *независимость и несовместность.* Условиями независимости событий можно рассматривать каждое из соотношений

$$P(A \cap B) = P(A)P(B); \quad P_A(B) = P(B).$$

Так, при бросании двух игральных костей вероятности событий *A* (дубль) и *B* (меньше 6 очков) равны соответственно $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ и $P(B) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$. Одновременному появлению этих событий соответствует подмножество $A \cap B$ = {(1,1), (2,2)}, и его вероятность $P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. Так как $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$, то рассматриваемые события являются зависимыми. С другой стороны, событие *B* при условии наступления события *A* определяется как подмножество {(1,1), (2,2)} основного множества

$$\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}, \text{ и } P_A(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

т. е. не совпадает с $P(B) = \frac{5}{18}$. По соответствующим формулам имеем:

$$P(A \cap B) = P(A)\,P_A(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18};$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)\,P_A(B) = \frac{1}{6} + \frac{5}{18} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{18}.$$

Очевидно, те же результаты получим, если примем *B* в качества дополнительного условия для *A.* Так как множество {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1)}, соответствующее событию *B,* служит основным для события *A,* то

$$P_B(A) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5},$$

и, следовательно, получаем:

$$P(A \cap B) = P(B)\,P_B(A) = \frac{5}{18} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{18};$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(B)\,P_B(A) = \frac{1}{6} + \frac{5}{18} - \frac{5}{18} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{18}.$$

Общее условие несовместности событий выражается как $P(A \cap B) = 0$, что соответствует $A \cap B = \varnothing$. Так, в рассматриваемом примере $A \cap B = \{(1,1), (2,2)\} \neq \varnothing$, следовательно, события *A* и *B* совместны.

Независимые события *A* и *B* при ненулевых вероятностях *P(A)* и *P(B)* всегда совместны. Действительно, из соотношения $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ имеем $P(A \cap B) \neq 0$, а значит, и $A \cap B \neq \varnothing$, что свидетельствует о совместности независимых событий. Однако совместность событий не обязательно влечет их независимость. Из условия $A \cap B \neq \varnothing$ при $P(A) \neq 0$ следует лишь, что $P(A \cap B) \neq 0$ и условная вероятность $P_A(B) \neq 0$. Но может иметь место неравенство

$P_A(B) = P(B)$, что означает зависимость рассматриваемых совместных событий.

Зависимые события A и B при ненулевых вероятностях $P(A)$ и $P(B)$ могут быть как совместными, так и несовместными. В первом случае $A \cap B \neq \varnothing$, и поэтому условные вероятности $P_A(B)$ и $P_B(A)$ не равны нулю, т. е. одно из событий может наступить при условии, что произошло другое событие. Во втором случае $A \cap B = \varnothing$, следовательно, услозные вероятности зависимых и несовместных событий $P_A(B) = P_B(A) = 0$. Это значит, что при наступлении события A событие B произойти уже не может, а при наступлении события B не может произойти событие A. В то же время из несовместности событий $(A \cap B = \varnothing)$ следует их зависимость, что выражается равенством нулю условных вероятностей $P_A(B)$ и $P_B(A)$.

Иначе говоря, если события A и B несовместны, то при наступлении одного из них другое произойти не может, т. е. несовместные события не могут быть независимыми.

Несовместность совокупности событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ следует из их попарной несовместности, т. е. из условия

$$A_i \cap A_j = \varnothing \ (i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j).$$

Однако полная независимость совокупности событий, вообще говоря, еще не определяется их попарной независимостью. Кроме условий

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j) \ (i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j),$$

должны выполняться также аналогичные условия для любых сочетаний по 3, 4, ..., n событий. Например, для трех событий условие полной независимости выражается системой соотношений:

$$\begin{gathered} P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2); \\ P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3); \\ P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3); \\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3). \end{gathered}$$

Невыполнение хотя бы одного из этих соотношений свидетельствовало бы о том, что события A_1, A_2 и A_3 в совокупности зависимы. На практике, однако, попарная независимость обычно влечет за собой и независимость в совокупности.

ЗАДАЧИ и УПРАЖНЕНИЯ

1. Какова вероятность угадать все шесть номеров (из 49) в спортлото?

2. Из урны, содержащей 8 белых и 12 черных шаров, вынимают один шар. Какова вероятность того, что он будет белым; что он будет черным?

3. Найдите на основе рассмотрения множества событий при бросании двух игральных костей (каждая кость имеет шесть равноправных граней, пронумерованных от 1 до 6) вероятности следующих событий:

а) на одной кости четыре очка, а на другой — меньше четырех;

б) на одной кости число очков вдвое больше, чем на другой;

в) сумма очков меньше пяти;

г) сумма очков больше восьми.

4. Какова вероятность открыть замок автоматической камеры хранения при случайном наборе цифр (замок открывается только при определенных значениях четырех десятичных цифр)?

5. Оцените вероятность того, что в группе из 23 студентов, по крайней мере, у двух студентов дни рождения совпадают.

6. Партия из 10 телевизоров принимается в магазине при условии, что случайно выбранные два из них окажутся исправными. Какова вероятность того, что магазин примет партию, содержащую 4 неисправных телевизора?

7. Два стрелка производят по одному выстрелу, причем вероятности попадания в цель для них равны соответственно 0,8 и 0,9. Найдите вероятность поражения цели обоими стрелками и вероятность поражения цели хотя бы одним из них.

8. Исследуйте на независимость события A и B при следующих испытаниях:

а) из колоды в 52 карты выбирают одну: A — «туз»; B — «бубна»;

б) бросают две игральные кости: A — «одно очко на первой кости»; B — «четное число очков на второй кости»;

и) бросают три монеты: A — «выпало два герба»; B — «выпало три герба».

9. Исследуйте на несовместность события A и B при бросании игральной кости, если:

а) A — «четыре очка»; B — «четное число очков»;

б) A — «четное число очков»; B — «нечетное число очков».

10. Пять карточек, помеченные цифрами от 1 до 5, тщательно перетасовывают. Какова вероятность того, что;

а) трехзначное число, определяемое номерами трех извлеченных наугад карточек, окажется четным;

б) при случайной раскладке всех карт на пять мест с номерами от 1 до 5 ни одна карточка не займет места, отмеченного ее номером;

в) при поочередном выборе всех карточек их номера будут появляться в возрастающем порядке.

11. Из 30 выстрелов по цели отмечено 25 попаданий. Найти относительную частоту попаданий в цель.

2. Начала нечеткой математики

Введение

Во многих работах по нечетким множествам приведены отдельные понятия элементов нечеткой математики с инженерной точки зрения, применительно к отдельным конкретным разделам техники. Поэтому приводимые ими определения этих понятий расплывчаты и имеют отдельные недостатки.

Предлагаемый вниманию читателя материал по нечеткой математике отличается тем, что здесь определения всех приводимых понятий даются с чисто математической точки зрения. Поэтому с математической точки зрения они не содержат каких-либо недостатков и при переносе этих понятий в четкую (классическую) математику никаких противоречий не возникает.

С другой стороны, здесь осуществлена попытка изложить материал в стиле учебного пособия, доступного широкому кругу читателей, желающих ознакомиться с элементами нечеткой математики. Кроме того, им можно пользоваться и как справочником по нечеткой математике, для инженеров и научных сотрудников, так как в нем приведены определения основных понятий как элементарно, так и высшей математики.

Неопределенность и расплывчатость представлений человеческих знаний привело к насущей необходимости создания теории, позволяющей формально описать нестрогие нечеткие понятия и обеспечивающей возможность познания процессов рассуждений, содержащих такие понятия. Крупным шагом в этом направлении явился подход, основанный на использовании понятия нечеткого множества Л.Заде, который позволяет дать строгое математическое описание в действительности расплывчатых утверждений.

Теория нечетких множеств появилась в результате обобщения и переосмысления достижений в многозначной логике, теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики, теории матриц, теории графов, теории грамматики и т.д. и начала развиваться после публикации в 1965 году основополагающей работы Л.Заде. У ее истоков лежат идеи и достижения многозначной логики (трехзначной логики Лукасевича, *k*-значной логики Поста).

Дальнейшие шаги в этом направлении связаны с созданием строгих и гибких математических методов исследования нечетко определенных объектов. При этом можно выделить следующие основные классификационные признаки способов формализации нечеткости:

1) по виду представления нечеткой субъективной оценки величины (нечеткого множества);
2) по виду области значений функции принадлежности;
3) по виду области определения функции принадлежности;

2.1. Нечеткая арифметика

Нечеткая арифметика - это наука о нечетких числах. Поэтому сначала будут рассмотрены основные понятия нечетких чисел и арифметических операций над ними.

Отметим, что самостоятельной областью применения нечеткой арифметики являются нечеткое линейное программирование - анализ обычного линейного программирования. В раде работ приводятся примеры решения задач линейного программирования для случая нечетких коэффициентов, а также примеры решения неравенств с нечеткими числами (LR-типа).

Хорошо известны случаи применения нечеткой арифметики как самостоятельного аппарата для решения практических з адач .

В одном из случаев решалась задача составления квартального расписания занятий в учебном заведении. Необходимость обращения к нечетким числам в данном случае была обусловлена отсутствием экспериментальных данных и непосредственным характером критериев оптимальности. Для решения задач были использованы некоторые экспертные оценки, характеризующие длительность лекционных курсов, лабораторных з анятий, наличие экзаменов и т.д. Врезультате было получено расписание на квартал.

Во втором случае решалась задача оптимизации транспортной сети города. Информация, характеризующая транспортируемость, задавалась с помощью нечетких чисел и лингвистических переменных. Решение осуществлялось с примененме Фортран-программы для траспортной сети Тулузы.

2.1.1. Нечеткие числа и операции над ними

Математической основой для построения математической модели систем с использованием лингвистических переменных и обычных арифметических операций является алгебра нечетких чисел.

В классической математике принадлежность элементов $x \in X$ множеству А часто рассматривается как характеристическая функция μ_A из X в {0;1},т.е.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x \in A \\ 0, \text{если } x \notin A \end{cases} \qquad (1.1)$$

При этом множество {0;1} называется множеством оценок, из которого следует, элемент x либо принадлежит множеству А, либо не принадлежит. Однако на практике зачастую не представляется возможности однозначного определения принадлежности элементов одному и тому же множеству. Поэтому в этих случаях $\mu_A(x)$ не определяется значениями, а может из меняться на отрезке [0;1]. Это значит, что в этом случае $\mu_A(x)$ характеризует не только принадлежность того или иного элемента x некоторому множеству А, но и выражает степень его принадлежности этому множеству.

Определение 1.1. Функцию $\mu_A(x)$, сопоставляющую каждому элементу $x \in X$ число $\mu_A(x) \in [0;1]$ и характеризующую степень принадлежности элемента x множеству А будем называть функцией принадлежности элемента x множеству А.

Из определения 1.1. следует, что функция принадлежностиесть ничто иное, как характеристическая функция, но принимающая не два значения, а бесчисленное множество значений из всего [0;1].

Определение 1.2. Значения функции принадлежности элемента x множеству А будем называть степенью четкости или четкостью элементах на множестве А.

Аналогичным образом введем понятие четких и нечетких значений числа.

Определение 1.3. Значение $\widetilde{a}$ будем называть нечетким значением числа *a*, если значение степени принятия его числом *a* принадлежит интервалу (0;1), т.е. $\mu_a(x) \in (0;1)$.

Определение 1.4. Четким з начением числа будем называть з начение, степень принятия которого равна единице, т.е. $\mu_a = 1$.

Определение 1.5. Нечетким числом $\widetilde{a}$ называется нечеткое подмножество числовой оси R, имеющей функцию принадлежности $\mu_a : R \to [0;1]$, где R-множество действительных чисел, $F(R) = \{\mu / \mu : R \to [0;1]\}$ - множество числовой оси.

Наряду с этим вводится понятие нечеткого множества.

Оп ределение 1.6. Нечеткое множество

$$\widetilde{A} = \{(x, \mu_A(x)) > 0\} \tag{1.2}$$

математически определяется как совокупность упорядоченных пар, составленных из элементов *x* универсального множества *X* и соответствующих степеней принадлежности $\mu_A(x)$ или (поскольку функция принадлежности является исчерпывающей характеристикой нечеткого множества) непосредственно в виде функций $\mu_A : X \to [0;1]$. На основании определения (1.6), если $\widetilde{A}$ - нечеткое числовое множество, а элемент $\widetilde{x} \in \widetilde{A}$ - есть нечеткое число, определенное через (1.1), как пара $(x, \mu_A(x))$, которая соответствует точно числовой оси R, то это понятие нечеткого числа противоречит определению нечеткого числа 1.5

С другой стороны из определений 1.5 и 1.6 следует, что нечеткое число есть подмножество множества (числовой оси) R и нечеткое множество есть подмножество числовой оси R с той же функцией принадлежности μ_A, переобозначенное $\mu_a : R \to [0;1]$. В связи с этим заранее следует отметить, что будь это в смысле классической математики, либо в терминах так называемой нечеткой математики, строющейся на понятиях нечетких чисел и нечетких множеств, каждое число - четкое, либо нечеткое число L-типа, либо R-типа с единой конкретной степенью нечеткости принимает единственное з начение. Если же рассматривается класс нечетких чисел (LR)-типа способна принять два з начения (одно L-типа и другое R-типа).

При этом (как это всегда следует иметь в виду), если за исходное понятие взять понятие носителя числа, тип числа можно определить по виду его носителя.

Действительно:

Определение 1.7. Подмножество S_a действительного множества (числовой оси) R б удем называть носителем числа *«а»,* если

$$S_a = \{x; \mu_a(x) > 0; \; x \in R\} \tag{1.3}$$

При этом следует принять определение 1.8. Число «*a*» называется четким числом, если его носитель состоит из единственного элемента множества R, т.е.

$$S_a = \{a; \mu_a = 1\} \tag{1.4}$$

Так как понятие нечеткого числа играет наиболее важную и основную роль в создании математической модели и его применении в задачах управления, то для более глубокого понимания смысла понятия нечетких чисел и их алгебры приведем понятие нечетких чисел и действий над ними, где понятие нечеткого числа вводится подобно определению 1.5, но не придерживаясь этого определения.

Определение 1.9. Число $\widetilde{a}$ будем называть нечетким числом, если оно принимает нечеткое значение и будем называть четким числом, если оно принимает четкое значение. Поэтому, нечеткое число может быть представлено как

$$\widetilde{a} = \{x; \mu_{\varsigma}(x) > 0; \quad x \in R\} \tag{1.5}$$

где S_a -носитель нечеткого числа .

Пример 1.1.

На рисунке 1.1 числа $\widetilde{a} = \{-1/0,6\}, \;\; \widetilde{b} = \{1/0,4\}$ и $\widetilde{d} = \{3/08\}$ - есть нечеткие числа, так как они принимают нечеткие значения.

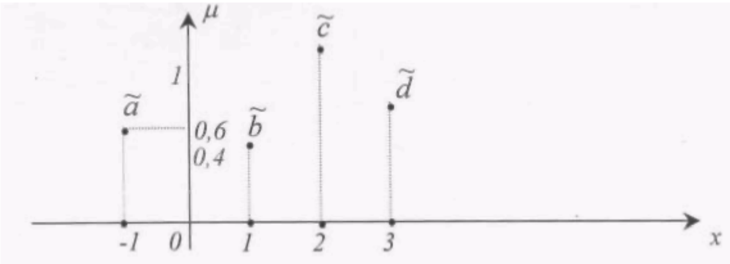


Рис. 1.1

Число *c= {2 /1}* - есть четкое число, так как оно принимает четкое значение. Нечеткие числа $\widetilde{a}$ и $\widetilde{d}$ - есть нечеткие числа с одинаковой степенью нечеткости, равной 0,6.

Если учесть, что каждой точке действительной прямой можно сопоставить единственное четкое действительное число, то можно ввести следующее определение нечеткого ч исла.

Определение 1.10. Под нечетким числом & на действительной прямой будем понимать одно из нечетких значений водящих в набор нечетких значений, характеризуемый функцией принадлежности $\mu_a : R \to [0;1]$ и представленный в виде (1.5).

Из данного определения нечеткого числа и понятия выпуклого множества (учитывая существование выпуклого множества) следует, что нечеткие числа обладают свойством выпуклости.

Определение 1.11. Нечеткое число & будем называть выпуклым, если множество его нечетких значений носитель образует выпуклое множество

Определение 1.12. Множество нечетких значений будем называть выпуклым множеством, если для любых значений *x, y* и z из этого множества, удовлетворяющих условию $x \le y \le z$, справедливо неравенство

$$\mu_a(y) \ge min\{\mu_a(x); \mu_a(z)\} \qquad (1.6)$$

На рис. 1.2. приведено схематическое изображение нечеткого числа $\widetilde{N}$.

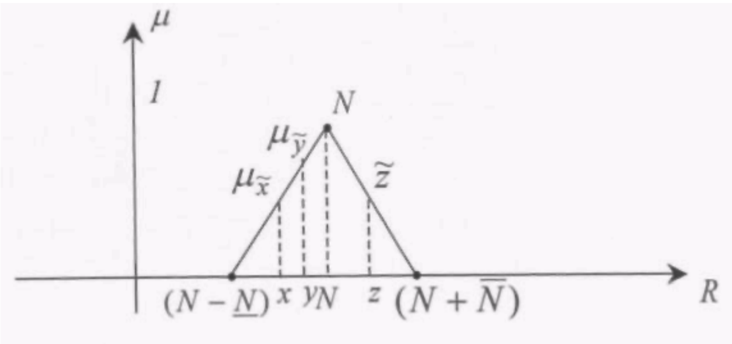


Рис. 1.2

Здесь интервалы $(N-\underline{N};\ N)$ и $(N; N+\overline{N})$ - называются соответственно левый и правый расширениями нечеткого числа $\overline{N}$; а N - его четкое значение. Из рисунка 1.2 и определения 1.9 следует, что нечеткое число $\widetilde{N}$ - выпукло, так как для его нечетких значений *x*<*y*<*z* имеем $\mu_y > min(\mu_x, \mu_z)$.

Определение 1.13 Множество нечетких значений нечеткого числа &, степени принадлежности которых числу & больше, либо равны «α» называются нечеткими значениями α-уровня.

Определение 1.14 α-срезом нечеткого числа будем называть те нечеткие значения, степени принятия которых даны нечетким числом равны α.

Определение *1.15* Переходным з начением нечеткого числа $\tilde{a}$ называется то значение, степень принятия которого равна 0,5, т.е. $\mu_{\tilde{a}}(x) = 0{,}5$. Для проведения арифметических действий над нечеткими числами можно пользоваться принципом обобщения Л.Заде, т.е.

Принцип обобщения. Пусть на действительной оси R зданы нечеткие числа $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$. Операцию над нечеткими числами $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ можно выполнить, используя соотношение:

$$\tilde{a} * \tilde{b} = \left\{ \bigcup_{S_{\tilde{a}*\tilde{b}}} min\left(\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y)\right)/(x*y) \right\} \qquad (1.7)$$

Используя взамен гипотетической операции арифметические действия (+;-;x;:) можно получить четыре арифметических действий над числами $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$.

$$\tilde{a} + \tilde{b} = \left\{ \bigcup_{S_{\tilde{a}-\tilde{b}}} min^{\mu_{\tilde{a}}(x)\mu_{\tilde{b}}(y)} \Big/ _{(x-y)} \right\} \qquad (1.8)$$

$$\tilde{a} - \tilde{b} = \left\{ \bigcup_{S_{\tilde{a}-\tilde{b}}} min^{\mu_{\tilde{a}}(x),\mu_{\tilde{b}}(y)} \Big/ _{(x-y)} \right\} \qquad (1.9)$$

$$\tilde{a} \times \tilde{b} = \left\{ \bigcup_{S_{\tilde{a}\tilde{b}}} min^{\mu_{\tilde{a}}(x),\mu_{\tilde{b}}(y)} \Big/ _{(x\times y)} \right\} \qquad (1.10)$$

$$\tilde{a} : \tilde{b} = \left\{ \bigcup_{S_{\tilde{a}:\tilde{b}}} min^{\mu_{\tilde{a}}(x),\mu_{\tilde{b}}(y)} \Big/ _{(x:y)} \right\} \qquad (1.11)$$

где $S_{\tilde{a}*\tilde{b}}$ - означает $\{ x \in S_{\tilde{a}};\ \ y \in S_{\tilde{b}} \}$.

Исходя из (1.5) можнополучить соотношения:

$$\tilde{a} * \tilde{b} = \left\{ \bigcup_{\underline{a}}^{a} \mu_{\tilde{a}}(x)/x + \bigcup_{a}^{\bar{a}} \mu_{\tilde{a}}(x)/x \right\} * \left\{ \bigcup_{\underline{b}}^{b} \mu_{\tilde{b}}(x)/x + \bigcup_{b}^{\bar{b}} \mu_{\tilde{b}}(x)/x \right\} =$$

$$= \left\{ \bigcup_{\underline{a}}^{a*b} \mu_{\tilde{a}*\tilde{b}}(x)/x + \bigcup_{a*b}^{\bar{b}'} \mu_{\tilde{a}*\tilde{b}}(x)/x \right\}$$

где a' и b' получены из $\underline{a};\ \overline{a};\underline{b}$ и $\overline{b}$ в з ависимости от конкретных операций и нормировки μ. Вычислим

$$\widetilde{a}+\widetilde{b}=\left\{\bigcup_{\underline{a}}^{\overline{c}}\mu_{\widetilde{c}}(x)/x+\bigcup_{\overline{c}}^{\overline{b}'}\mu_{\widetilde{c}}(x)/x\right\}=\widetilde{c} \tag{1.12}$$

$$\overline{c}=a+b;\quad \underline{a}'=\underline{a}+b;\quad \overline{b}'=\overline{a}+\overline{b}$$

$\mu_{\widetilde{c}}$ определяется в виде: $\mu_{\widetilde{c}}=K_1x+K_2$

Исходя из нормировки для $\underline{a}\leq\widetilde{x}\leq\overline{c}$ можно записать [ ]:

$$\widetilde{a}+\widetilde{b}=\bigcup_{\underline{a}}^{\overline{c}}\frac{x-a}{\overline{c}-\underline{a}}/x+\bigcup_{\overline{c}}^{\overline{b}'}\frac{\overline{b}'-x}{\overline{b}'-\overline{c}}/x=\widetilde{c}_1 \tag{1.13}$$

Для остальных арифметических операций аналогичным образом можно получить:

$$\widetilde{a}-\widetilde{b}=\bigcup_{\underline{a}}^{\overline{c}}\frac{x-a}{\overline{c}-\underline{a}}/x-\bigcup_{\overline{c}}^{\overline{b}'}\frac{\overline{b}'-x}{\overline{b}'-\overline{c}}/x=\widetilde{c}_2 \tag{1.14}$$

где $\underline{a}=a-\overline{b};\quad \overline{b}'=\overline{b}-\overline{a};\quad \overline{c}=\overline{a}-\underline{b}$

Применяя функцию принадлежности в виде:

$$\mu_c=K_1\sqrt{\underline{x}}+K_2$$

получим: $$\widetilde{a}\times\widetilde{b}=\bigcup_{a''}^{c}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a''}}{\sqrt{\overline{c}}-\sqrt{a''}}/x-\bigcup_{\overline{c}}^{b''}\frac{\sqrt{b''}-\sqrt{x}}{\sqrt{b''}-\sqrt{\overline{c}}}/x=\widetilde{c}_3 \tag{1.15}$$

где $a''=a\times a';\quad b''=b\times b'';\quad \overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}$

Применяя функцию принадлежности $\mu_c=\dfrac{K_1}{x}+K_2$ получим:

$$\widetilde{a}:\widetilde{b}=\bigcup_{a''}^{\overline{c}}\frac{(x-a'')\overline{c}}{(\overline{c}-a'')}/x-\bigcup_{\overline{c}}^{b''}\frac{(b''-x)\overline{c}}{(b''-\overline{c})}/x=\widetilde{c}_4 \tag{1.16}$$

где $a''=a'\times a;\quad b''=b'\times b;\quad \overline{c}=\overline{a}:\overline{b}$

Пример 1.2. $\widetilde{a}=\widetilde{5};\ \widetilde{b}=\widetilde{9}$

при $x^4 = 4$; $\tilde{5}\big|_{x=4} = 4 - 4 = 0$;

при $x = 4{,}5$ $\tilde{5}\big|_{x=4,5} = 4{,}5 - 4 = 0{,}5$;

при $x = 5$ $\tilde{5}\big|_{x=5} = 5 - 4 = 1$;

при $x = 5{,}5$ $\tilde{5}\big|_{x=5,5} = 6 - 5{,}5 = 0{,}5$;

при $x = 6$ $\tilde{5}\big|_{x=6} = 6 - 6 = 0$. Следовательно,

$\tilde{5} = \{0/4; 0{,}5/4{,}5; 1/5; 0{,}5/4{,}5; 0/6\}$

$$\tilde{5} = \bigcup_{4}^{5}(x-4)/x + \bigcup_{5}^{6}(6-x)/x$$

Для $\tilde{9}$ при x=7;8;9;10;11 аналогичным образом можно получить:

$\tilde{9} = \{0.7; 0{,}5/8; 1/9; 0{,}5/10; 0/11\}$

Верхняя и нижняя границы и вершины этих чисел следующие: для $\tilde{5}$; $\underline{a} = 4; \overline{a} = 6$; $a = 5$; для $\tilde{9}$ $\tilde{5}$; $\underline{b} = 7; \overline{b} = 11$; $b = 9$;

Приведем все четыре арифметических действия над этими числами.

Сложение. Согласно (1.13) вычислим границы и вершину суммы $(\tilde{5} + \tilde{9})$:

$\underline{c} = \underline{a} + \underline{b} = 4 + 7 = 11$; $\overline{b}' = \overline{a} + \overline{b} = 6 + 11 = 17$;

$\overline{c} = a + b = 5 + 9 = 14$

Таким об разом $\tilde{5} \times \tilde{9} = \bigcup_{11}^{14}\frac{x-11}{3}/x + \bigcup_{14}^{17}\frac{17-x}{3}/x = \tilde{14}$

Вычисляя $\tilde{14}$ при различных Х имеем:

$\tilde{14}$ = {0/11;0,5/12,5;1/14;0,5/15,5;0/17}

Вычитание. Границы и вершина разности $\tilde{9} - \tilde{5}$ в соответствии с (1.9) определяется как:

$\underline{a}$ =7 - 4 = 3; $\overline{a}$ = 11 - 6 = 5; $\overline{c}$ = b - a = 9 - 5 = 4

$$\tilde{9} - \tilde{5} = \bigcup_{3}^{4}\frac{x-3}{4-3}/x + \frac{5-x}{5-4}/x = \tilde{4}$$

Значения функции принадлежности при значения x=3,5; x=4,5 будут равны 0,5.

$$\tilde{4} = \{0/3; 0{,}5/3{,}5; 1/4; 0{,}5/4{,}5; 0/5\}$$

Схематически это означает:

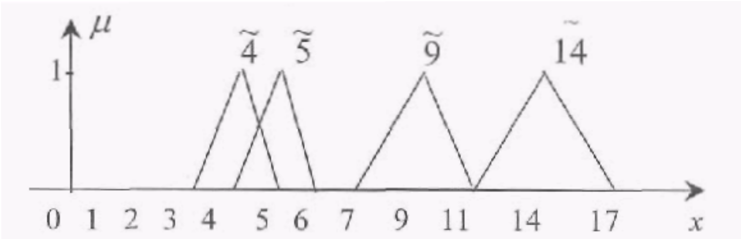


Рис. 1.3 Нечеткие числа $\tilde{4}; \tilde{5}; \tilde{9}; \tilde{14}$

Умножение. С помощью соотношения (1.12)

$$\tilde{5}\times\tilde{9}=\bigcup_{28}^{4,5}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{28}}{\sqrt{45}-\sqrt{28}}/x+\bigcup_{4,5}^{6,6}\frac{\sqrt{66}-\sqrt{x}}{\sqrt{66}-\sqrt{45}}/x=$$

$$=\bigcup_{28}^{4,5}\frac{\sqrt{x}-5{,}23}{1{,}41}/x+\bigcup_{4,5}^{6,6}\frac{8{,}12-\sqrt{x}}{1{,}41}/x=\tilde{4{,}5}$$

Значения функции принадлежности при значении x=3 5; x=40; x=55; x=60 значения функции принадлежности соответственно будет: 0,45; 0,73; 0,5; 0,27.

Таким образом

$$\tilde{5}\times\tilde{9}=\{0/28;0{,}45/35;0{,}73/40/1/45;52/55;\ 0{,}27/60\}$$

Деление. Согласно (1.16) границы и вершина результата деления $\tilde{9}$ на $\tilde{5}$ будет:

$$\underline{c}=7:6=1{,}16;\quad \overline{c}=11:4=2{,}75;\quad c=b:a=9:5=1{,}8$$

Функция принадлежности определяется как:

$$\tilde{5}:\tilde{9}=\bigcup_{1,16}^{18}\frac{(x-1{,}16)1{,}8}{(1{,}8-1{,}16)x}/x+\bigcup_{1,8}^{2,75}\frac{(2{,}75-x)1{,}8}{(2{,}75-1{,}8)x}/x=\tilde{1{,}8}$$

Вычисляя значения функции принадлежности при различных значениях x получим:

$$\tilde{5}:\tilde{9}=\{0/1{,}16;0{,}3/1{,}3;0{,}77/1{,}6;1/1{,}8;0{,}71/2;0{,}19/2{,}5\}$$

Рассмотрим другой метод выполнения арифметических операций над нечеткими числами, основанный на использовании уровневых множеств, отличающихся значительным упрощением вычислений по сравнению операциями на основе принципа обобщения. При этом дополнительно следует использовать следующее понятие.

Определение 1.16. Бинарная операция (*) на R называется возрастающей, если для любых $(x_1 * x_2) > (y_1 * y_2)$ из $x_1 > x_2$; $y_1 < y_2$ следует $(x_1 * x_2) < (y_1 * y_2)$

Если заданы нечеткие числа $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ с функциями принадлежности $\mu_{\tilde{a}}$ и $\mu_{\tilde{b}}$, то результат обобщенной операции (*) над ними есть нечеткое число $\tilde{c} = (\tilde{a} * \tilde{b})$, заданное функцией принадлежности $\mu_{\tilde{a}}$ и $\mu_{\tilde{b}}$, то результат обобщенной операции (*) над ними есть нечеткое число $\tilde{c} = (\tilde{a} * \tilde{b})$, заданное функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{c}}(x) = \underset{z=x*y}{sur}\ min\big(\mu_{\tilde{a}}(x);\ \mu_{\tilde{b}}(x)\big) \qquad (1.17)$$

Более коротко все четыре арифметические операции можно представить как:

Сложение:

$$\mu_{\tilde{a}+\tilde{b}}(x) = \underset{z=x+y}{sur}\ min\big(\mu_{\tilde{a}}(x); \mu_{\tilde{b}}(y)\big) = \underset{x}{sur} min\big(\mu_{\tilde{a}}(x); \mu_{\tilde{b}}(z-x)\big) \qquad (1.18)$$

Вычитание:

$$\mu_{\tilde{a}+\tilde{b}}(x) = \underset{z=x-y}{sur}\ min\big(\mu_{\tilde{a}}(x); \mu_{\tilde{b}}(y)\big) = \underset{x}{sur} min\big(\mu_{\tilde{a}}(x); \mu_{\tilde{b}}(z-x)\big) \qquad (1.19)$$

Умножение:

$$\mu_{\tilde{a}\times\tilde{b}}(z) = \underset{z=xy}{sur} min\big(\mu_{\tilde{a}}(x);\ \mu_{\tilde{b}}(y)\big) = \underset{x}{sur} min\big(\mu_{\tilde{a}}(x);\ \mu_{\tilde{b}}(z:x)\big) \qquad (1.20)$$

Деление:

$$\mu_{\tilde{a}:\tilde{b}}(z) = \underset{z=x:y}{sur} min\big(\mu_{\tilde{a}}(x); \mu_{\tilde{b}}(y)\big) = \underset{x}{sur} min\big(\mu_{\tilde{a}}(x); \mu_{\tilde{b}}(z:x)\big) \qquad (1.21)$$

Если нечеткие числа можно представить в виде:

$$\tilde{a} = \{\omega_1 / x_{11}; \omega_2 / x_2; \omega_1 / x_{1,2}\};\ \tilde{b} = \{\omega_1 / y_{11}; \omega_2 / y_{21}; \omega_1 / y_{1,2}\}, \qquad (1.22)$$

то результатом обобщенной операции (*) над ними будет нечеткое число

$$\tilde{c} = \tilde{a} * \tilde{b} = \{\omega_1 /(x_{11} * y_{11}); \omega_2 /(x_{21} * y_{21}); \omega_1 /(x_{1,2} * y_{1,2}\}; \qquad (1.23)$$

Это справедливо, когда операция (*) является возрастающей, либо убывающей. Операции вычитания и деления не являются такими, однако их можно определить следующим образом

$$\tilde{a} - \tilde{b} = \tilde{a} + (-\tilde{b});\ \tilde{a} : \tilde{b} = \tilde{a} \times (\tilde{b}^{-1}) \qquad (1.24)$$

Пример 1.3. Зададим два нечетких числа

$$\tilde{4} = \{0 / 3;\ 0,5 / 3,5; 1 / 4; 0,5 / 4,5; 0 / 5\}$$

$$\tilde{5} = \{0 / 4 / 0,5 / 4,5 / 1 / 5 / 0,5 / 5,5 / 0 / 6\}$$

Проведем все четыре арифметические действия над этими нечеткими числами:

Сложение:

$$\tilde{5}+\tilde{4}=\{0/(4+3);0{,}5/(4{,}5+3{,}5);1/(5+4);$$
$$0{,}5/(5{,}5+4{,}5);0/(6+5)\}=\{0/7;0{,}5/8;1/9;0{,}5/10;0/11\}$$

Умножение:

$$\tilde{5}\times\tilde{4}=\{0/12;0{,}5/15{,}75;1/20;0{,}5/24{,}75;0/30\}$$

Вычитание: сначала определим $\tilde{4}$.Имеем:

$$-\tilde{4}=\{0/-5;0{,}5/-4{,}5;1/-4;0{,}5/-3{,}5;0/-3\},$$

тогда

$$\tilde{5}-\tilde{4}=\tilde{5}+(-\tilde{4})=\{0/-1;0{,}5/0;1/1;0{,}5/2;0/3\}$$

Деление: Сначала определим $\tilde{4}^{-1}$.Имеем:

$$\tilde{4}^{-1}=\{0/1:3;0{,}5/1:3{,}5;1/1:4;0{,}5/1:4{,}5;0/1:5\}=$$
$$=\{0/0{,}33;0{,}5/0{,}29;1/0{,}25;0{,}5/0{,}22;0/0{,}2\},$$

отсюда

$$\tilde{5}:\tilde{4}=\tilde{5}\times(\tilde{4}^{-1})=\{0/1{,}32;0{,}5/1{,}29;1/1{,}25;0{,}5/1{,}21;0/1{,}2\}$$

Понятие дополнительного вычитания

При решении нечетких уравнений приходится вычислять противоположные и обратные нечеткие числа. Рассмотренные выше арифметические операции, основанные на принципе обобщения, не позволяют отыскать противоположное число A' (такое,что ($A + A' = 0$)) и обратное число A'' $(A \times A'' = 1)$.

Кроме того, отметим, что для нечетких множеств имеет место неравенства

$$(A-B)+B\neq A;\ \text{и}\ (A:B)\times B\neq A. \qquad (1.25)$$

Поэтому, для точного решения уравнения

$$Ax+B=D \qquad (1.26)$$

Где A,B,D - нечеткие числа, x - неизвестное, используются операции дополнительного вычитания (--) и дополнительного деления (/./)

$$AX=D\text{-}B \qquad (1.27)$$

Носителями множеств B и D являются, соответственно интервалы $S_B=\{b_1,b_2\}$ и $S_D=\{d_1,d_2\}$. Носителем множества X, определяемого дополнительным вычитанием, будет

$$S_{AX}=\{d_1-b_1;d_2-b_2\}, \qquad (1.28)$$

а функцией принадлежности

$$\mu_{AX}(X)=\inf_z\begin{cases}1, если\ \mu_B(z-x)<\mu_D(z)\\ \mu_D, если\ \mu_B(z-x)\geq\mu_D(z)\end{cases}$$

Рассматриваемая операция вычитания определена тогда, когда длина интервала носителя уменьшаемого больше, чем у вычитаемого.

Дополнительное деление

Решением уравнения *AX=D* будет нечеткое число *X=D/A* Если носителями нечетких чисел *A* и *D* являются $S_A=\{a_1;a_2\}$ и $S_D=\{d_1;d_2\}$, то носитель нечетких числа X определяется, как $d_2;a_2$

$$S_x=[d_1,d_2]\,//[a_1;a_2]=\begin{cases}d_1:a_1, если\, S_A>0; S_D>0\\ d_1:a_2, d_2:a_1, если\, S_A>0; S_D<0\\ d_2:a_1, d_1:a_2, если\, S_A<0; S_D>0\\ d_2:a_2; d_1:a_2, если\, S_A<0; S_D<0\end{cases}\quad(1.29)$$

или через функции принадлежности

$$\mu_x(x)=\begin{cases}1, если\, \mu_A(t/x)<\mu_D(t)\\ \mu_D(t), если\, \mu_A(t/x)\geq\mu_D(t)\end{cases}\quad(1.30)$$

Эта операция определена не для любых нечетких чисел *A* и *D*, а для таких, у которых интервалы - носители удовлетворяют определенным условиям.

Пример 1.4. Решить уравнение *X+B=D*

$$B=\widetilde{8}=\{0/6;0{,}5/7;1/8;0{,}5/9;0/10\}$$

при

$$D14=\{0/10;0{,}5/12;1/14;0{,}5/16;0/18\}$$

Интервалы - носители для B и D будут

$$S_B=[6{,}10]:S_D=[10{,}18].$$

Согласно (28) $S_x=[4:8]$

Согласно (1.27) можно определить функцию принадлежности μ_x $X=\{0/4;0{,}5/5;1/6;0{,}5/7;0/8\}$

Пример 1.5 Решить уравнение *AX=D* при

$$A=\widetilde{8}=\{0/6;0{,}5/14;1/24;0{,}5/36;0/50\}$$

$$S_A=\{6:10\}; S_D=[6;50]$$

согласно(28)

$$S_x = [6:6;50:10] = [1:5]$$

Функцию принадлежности можно определить на основании (1.29)

Решением уравнения является нечеткое число:

$$x = \{0/1;0{,}5/2;1/3;0{,}5/4;0/5\}$$

Замечание. Следует отметить, что при одной и той же степени нечеткости (при одном и то же значении функции принадлежности μ_α) нечеткое число $\tilde{a}$ обязано принимать лишь одно нечеткое значение. Но несмотря на это из рассматриваемого выше понятия нечеткого числа следует, что одно и то же нечеткое число при одной и той же степени нечеткости способно принять два значения. И кроме того, одно и то же значение с различными степенями нечеткости принимаются различными нечеткими числами.

Пример 1.6

$$\tilde{2} = \{0/1;0{,}7/1{,}7;1/2;0{,}7/2{,}3;0/3\};$$
$$\tilde{3} = \{0/2;0{,}3/2{,}3;1/3;0{,}3/3{,}7;0/4\}$$

Из данного примера в конкретности видно, что нечеткое значение 2,3 можно одновременно отнести к обеим указанным нечетким числам с различными степенями четкости. Причем, если эти нечеткие числа имеют одинаковые растяжения, равные половине разности четких значений этих нечетких чисел, то сумма значений функций принадлежности одного и того же значения принимаемое этими нечеткими числами равна единице. Кроме того, следует отметить, что чем больше растяжение нечеткого числа, тем большему числу нечетких чисел будет отнесено одно и то же значение действительной прямой.

Во избежание выше указанного противоречия, которое может привести к неординарности получения результатов при решении различных задач, целесообразно применить нечеткую арифметику на нечетких числах L и R - типа.

2.1.2. Нечеткие числа L-R типа и действия над ними

Определение 1.17 Совокупность нечетких значений нечеткого числа $\tilde{a}$ меньших ее четкого значения будем называть левым расширением этого нечеткого числа (носителя нечеткого числа).

Определение 1.18 Совокупность нечетких значений нечеткого числа $\tilde{a}$ больших ее четкого значения будем называть правым расширением нечеткого числа.

Если $S_{\tilde{a}}$ - носитель нечеткого числа $\tilde{a}$, то

$$S_{a_L} = \{x < a; \mu_{\tilde{a}} > 0\} \text{ и } S_{a_R} = \{x > a, \mu_{\tilde{a}}(x) > 0, x \in R\}$$

являются соответственно левым и правым носителями растяжения нечеткого числа $\tilde{a}$

Определение 1.19 Число $\tilde{a}_L$будем называть нечетким числом L-типа, если оно может принимать нечеткое значение из левого расширения нечеткого числа $\tilde{a}$

Определение 1.20 Число $\tilde{a}_R$ - будем называть нечетким числом R-типа, если оно может принимать нечеткие значения из правого расширения нечеткого числа $\tilde{a}$.

Эти нечеткие числа могут быть представлены в виде (1.31)

$$\begin{aligned} \tilde{a}_L &= \{\mu_{\tilde{a}_L}(x) / x \in S_{a_L}\}; \\ \tilde{a}_R &= \{\mu_{\tilde{a}_R}(x) / x; x \in S_{\tilde{a}_R}\} \end{aligned} \tag{1.31}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \mu_{\tilde{a}_L}(x) &= \frac{a-x}{a_L} \quad \text{для} \quad a - a_L \le x \le a; \quad a_L > 0 \\ \mu_{\tilde{a}_L}(x) &= \frac{x-a}{a_R} \quad \text{для} \quad a \le x \le a + a_R; \quad a_R > 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.32}$$

a -четкое значение; a_L -левое растяжение; a_R -правое растяжение нечеткого числа $\tilde{a}$.

Определение 1.21 Значение a называется левой (правой) границей нечеткого числа $\tilde{a}$, если для любого достаточно малого $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \mu_a &= 0; \mu(a-\delta) = 0; \mu(a+\delta) \ne 0; \\ \mu_a &= 0; \mu(a+\delta) = 0; \mu(a-\delta) \ne 0 \end{aligned} \tag{1.33}$$

Исходя из данного определения нечеткое число $\tilde{a}$ можно представить в виде

$$\tilde{a} = \left\{ \bigcup_{\bar{a}}^{a} (x - \underline{a}) + \bigcup_{a}^{\bar{a}} (\bar{a} - x); \quad x \right\} \tag{1.34}$$

где $\underline{a}$ и $\overline{a}$ - соответственно левая и правая (либо нижняя и верхняя) границы нечеткого числа $\tilde{a}$. При этом

*Определение 1.22.*Нечеткие числа $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ называются нечеткими числами одинакового порядка, если они имеют одинаковые расширения и называются нечеткими числами различного расширения; т.е.

если $\{a-\underline{a}=b-\underline{b};\overline{a}-a=\overline{b}-b\}$, то $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ - есть нечеткие числа одинакового порядка и если $\{a-\underline{a}\neq b-\underline{b};\overline{a}-a\neq\overline{b}-b\}$, то нечеткие числа $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ - есть нечеткие числа раличного порядка.

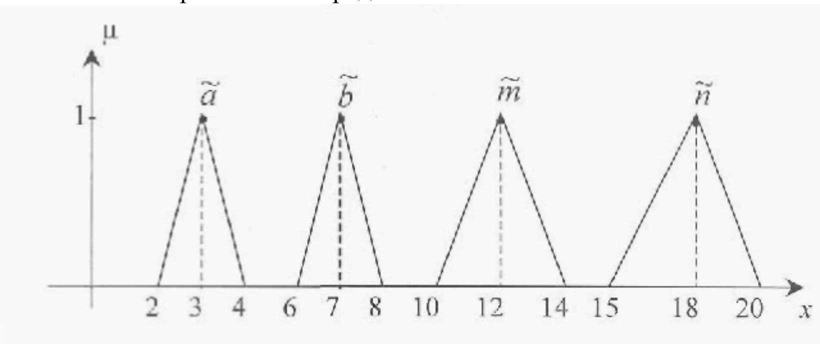


Рис. 1.4

На рисунке 1.4 нечеткие числа $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ - одинакового порядка, а нечеткие числа $\tilde{m}$ и $\tilde{n}$ - различных порядков.

Определение 1.23 Нечеткое число называется нормальным, если его левое расширение равно правому, в противном случае оно называется субнормальным нечетким числом.

На рисунке 1.3. $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ и $\tilde{m}$- нормальные нечеткие числа, а $\tilde{n}$ субнормальное нечеткое число.

Следует отметить, что на практике левый и правый растяжения нечеткого числа одинаковые, т.е. на практике рассматриваются лишь нормальные нечеткие ч исла.

Кроме того, 1) для нормального нечеткого числа его наиболее четкое значение совпадает с его четким значением;

2) если интервалы растяжения нечеткого числа равны нулю, то оно является четким числом;

3) по мере увеличения интервалов расширения нечеткое число становится более нечетким. Справедливы следующие свойства функции принадлежности нечеткого числа:

1) $\mu_{\widetilde{a}_L}(x)$-монотонно возрастающая, а $\mu_{\widetilde{a}_R}(x)$ монотонно убывающая функции, причем

$$\mu_{\widetilde{a}_L}(a) = \mu_{\widetilde{a}_R}(a) = 1 \tag{1.35}$$

2) Функции μ_L и μ_R-четные функции, т.е.

$$\mu_L(-x) = \mu_L(x) \text{ и } \mu_R(-x) = \mu_R(x)$$

3) Если нечеткое число - нормальное нечеткое число, то линии, описываемые функциями $\mu_L(x)$ и $\mu_R(x)$ симметричны относительно прямой $x = a$, где a - четкое значение нечеткого числа $\widetilde{a}$.

Примерами функций $\mu_L(x)$ и $\mu_R(x)$ могут служить

$$1)\ \mu_R(x) = \frac{1}{1+(x-a)^p};\ \mu_L(x) = \frac{1}{1+(a-x)^p},$$ где $p > 0$

$$2)\ \mu_R(x) = e^{-(x-a)^p};\ \mu_L(x) = e^{-(a-x)^p},$$ где p>0

Наряду с выше изложенным нечеткое число L-R - типа с учетом понятия уровня четкости, можно ввести следующим образом:

Определение 1.24. Нечеткое число $\widetilde{a}$ называется нечетким числом L-R-типа, если

$$\mu_{\widetilde{a}}(\alpha) = \begin{cases} \mu_L(a) = 1 - \dfrac{a - a_L(\alpha)}{a_L} \\ \mu_R(a) = 1 - \dfrac{a_R(\alpha) - a}{a_R} \end{cases} \tag{1.36}$$

где a - четкое значение числа $\widetilde{a}$, т.е. $a = a_L(1) = a_R(1);$

a_L и a_R -соответственно левое и правое растяжения нечеткого числа $\widetilde{a}$; $a_L(\alpha)$ и $a_R(\alpha)$- соответственно левое и правое значения нечеткого числа $\widetilde{a}$ четкости a. Из (1.36) следует, что если $\widetilde{a}(\alpha) = \{a_L(\alpha); a_R(\alpha)\}$, то

$$a_L(\alpha) = a - (1-\alpha)a_L;\ a_R(\alpha) = a + (1-\alpha)a_R$$

Следует учесть, что если растяжение нечеткого числа равно нулю, то оно является четким числом. Кроме того, по мере увеличения левого и правого растяжений $\widetilde{a}$ оно становится более нечетким числом. Символически нечеткое число L-R - типа обозначим $\{a, a_L, a_R\}$

Рассмотрим алгебраические действия над четкими числами L-R-типа. Сложение. Пусть $\tilde{a} = \{a, a_L, a_R\}, \tilde{b} = \{b; b_L; b_R\}$, тогда

$$\tilde{a} + \tilde{b} = \{a + b; a_L + b_L; a_R + b_R\} \tag{1.37}$$

Формула отрицания нечеткого числа имеет вид:

$$-\tilde{a} = -\{a.a_L, a_R\} = \{-a; a_R; a_L\}$$

Вычитание:

$$\tilde{a} - \tilde{b} = \bar{a} + (-\tilde{b}) = \{a - b; a_L + b_R; a_R + b_L\} \tag{1.38}$$

Если $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ есть нечеткие числа α-уровня (нечеткости α), то

$$\begin{aligned} &\tilde{a} + \tilde{b} = \{a + b - (1 - \alpha)(a_L + b_L); \\ &a + b + (1 - \alpha)(a_R + b_R)\} \\ &\tilde{a} - \tilde{b} = \{a - b - (1 - \alpha)(a_L + b_R); \\ &a - b + (1 - \alpha)(a_R + b_L)\} \end{aligned} \tag{1.39}$$

Умножение. Пусть $\tilde{a} = \{a; a_L; a_R\}, \tilde{b} = \{b; b_L; b_R\}$.

1) если $a > 0; b > 0$,то

$$\begin{aligned} &\tilde{a} \cdot \tilde{b} = \{a, a_L, a_R\} \cdot \{b; b_L; b_R] = \\ &\{(a - a_L)(b - b_L); (a + a_R)(b + b_R)\} = \\ &= \{ab; ab_L + ba_L - a_L b; ab_R + ba_R + a_R b_R\} \end{aligned} \tag{1.40}$$

2) аналогично для $a > 0$; $b < 0$

$$\tilde{a} \cdot \tilde{b} = \{ab; ab_R + b_L a_L - a_L b; ab_L + ba_R + a_R b_L\}$$

3) для $a<0; b<0$

$$\tilde{a} \cdot \tilde{b} = \{ab; -ab_R - ba_R + a_R b_R; ab_L - ba_L + a_L b_L\}$$

Если $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ - нечеткие числа (нечетност α) α-уровня, то

1) для $a>0; b>0$

$$\begin{aligned} &\tilde{a}\tilde{b} = \{ab; (1 - \alpha)(ab_L + ba_L) - (1 - \alpha)a_L b_L; \\ &(1 - \alpha)(ab_R + ba_R) + (1 - \alpha)a_R b_L)\} \end{aligned}$$

2) для $a>0; b<0$

$$\tilde{a}\tilde{b} = \{ab; (1-\alpha)(ab_R + ba_L) - (1-\alpha)a_L b_L; \\ (1-\alpha)(ab_L + ba_R) + (1-\alpha)a_R b_L)\} \qquad (1.41)$$

3) для $a<0;\ b<0$

$$\tilde{a}\tilde{b} = \{ab; (1-\alpha)(ab_R + ba_R - (1-\alpha)a_R b_R; \\ (1-\alpha)(ab_L + ba_L - (1-\alpha)a_L b_L)\}$$

Деление: Пусть $\tilde{a} = \{a; a_L; a_R\}; \tilde{b} = \{b; b_L; b_R\}$,тогда,

1) если $a > 0,\ b > 0$,то

$$\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \frac{\{a; a_L; a_R\}}{\{b; b_L; b_R\}} = \frac{\{a - a_L; a + a_R\}}{\{b - b_L; b + b_R\}} = \left\{\frac{a - a_L}{b + b_R}; \frac{a + a_R}{b - b_L}\right\}$$

или же

$$\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \left\{\frac{a}{b}; \frac{ab_R + ba_L}{b(b + b_R)}; \frac{a_R b - ab_L}{b(b - b_L)}\right\}$$

2) если $a > 0, b < 0$,то

$$\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \frac{\{a - a_L; a + a_R\}}{\{b - b_L; b + b_R\}} = \left\{\frac{a + a_R}{b + b_R}; \frac{a - a_L}{b - b_L}\right\} \qquad (1.42)$$

или же

$$\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \frac{\{a; a_L; a_R\}}{\{b; b_L; b_R\}} = \left\{\frac{a}{b}; \frac{ab_R - ba_R}{b(b + b_R)}; \frac{ab_L + ba_L}{b(b - b_L)}\right\}$$

3) если $a < 0;\ b > 0$, то

$$\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \frac{\{a - a_L; a + a_R\}}{\{b - b_L; b + b_R\}} = \left\{\frac{a - a_L}{b - b_L}; \frac{a + a_R}{b - b_R}\right\}$$

или же

$$\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \frac{\{a; a_L; a_R\}}{\{b; b_L; b_R\}} = \left\{\frac{a}{b} \frac{a_L b - ab_L}{b(b - b_L)}; \frac{ba_R + ab_R}{b(b + b_R)}\right\}$$

4) если $a < 0;\ b < 0$, то

$$\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \frac{\{a; a_L; a_R\}}{\{b; b_L; b_R\}} = \frac{\{a - a_L; a + a_R\}}{\{b - b_L; b + b_R\}}$$

или же

$$\left\{\frac{a+a_R}{b-b_L};\frac{a-a_L}{b+b_R}\right\}$$

$$\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}=\left\{\frac{a}{b};-\frac{ab_L+a_Rb}{b(b-b_L)};\frac{a_Lb+ab_R}{b(b+b_R)}\right\}$$

Если $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ - нечеткие числа (нечетности α) α-уровня, т.е. если $\tilde{a}=\tilde{a}(\alpha);\tilde{b}=\tilde{b}(\alpha)$ - нечеткие числа со степенью нечеткости α (α -уровня), то в (1.42), вместо $a_L;a_R;b_L$ и b_R всюду берутся соответственно $a_L(\alpha);a_R(\alpha);a_R(\alpha)$ и $b_R(\alpha)$.

Пример 1.7 $\tilde{a}=\{5;0,4;0,6\};\quad \tilde{b}=\{3;0,5;0,7\}$

1) $\tilde{a}+\tilde{b}=\{5;0,4;0,6\}+\{3;0,5;0,7\}=\{8;0,9;1,3\}$

2) $\tilde{a}-\tilde{b}=\{5;0,4;0,6\}-\{3;0,5;0,7\}=\{2;1,1;1,1\}$

3) $$\begin{aligned}\tilde{a}\cdot\tilde{b}&=\{5;0,4;0,6\}\cdot\{3;0,5;0,7\}=\\&=\{15;5\cdot 0,5+3\cdot 0,4-0,4\cdot 0,5;5\cdot 0,7+3\cdot 0,6+0,7\cdot 0,6\}=\\&=\{15;3,5;5,72\}\end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned}\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}&=\frac{\{5;0,4;0,6\}}{\{3;0,5;0,7\}}=\left\{\frac{5}{3};\frac{5\cdot 0,7-3\cdot 0,4}{3(3+0,7)};\frac{5\cdot 0,5+3\cdot 0,6}{3(3-0,5)}\right\}=\\&=\left\{\frac{5}{3};0,207;0,575\right\}\end{aligned}$$

или же

$$\begin{aligned}\tilde{a}\cdot\tilde{b}&=\{5;0,4;0,6\}\cdot\{3;0,5;0,7\}=\{4,6;5,6\}\cdot\{2,5;3,7\}=\\&=\{4,6\cdot 2,5\cdot 5,6\cdot 3,7\}=\{11,5;20,72\}=\{15;3,5;5,72\}\end{aligned}$$

$$\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}=\frac{\{4,6;56\}}{\{2,5;3,7\}}=\{1,243;2,24\}=\left\{\frac{5}{3};0,207;0,575\right\}$$

Замечание 1. Так как нечеткие числа могут быть заданы разными способами, а при проведении арифметических действий над ними следует учесть принцип обобщения Заде, то при проведении арифметических действий желательно предварительно привести их (с помощью 35) к одинаковым степеням четкости (уровня четкости). Если же все нечеткие числа заданы с помощью среднего значения (четкого значения) и левого и правого расширений, то арифметические действия следует произвести без приведения к одному уровню нечеткости.

Замечание 2. При применении нечетких чисел в решении практических задач пользуются нечеткими числами L-типа (определение (1.19)), либо нечеткими числами R - типа (определение (1.23)), поэтому (как частный случай нечетких чисел LR - типа) рассмотрим арифметические действия отдельно над нечеткими числами L-типа и R -типа.

I. Пусть $\tilde{a} = \{a; a_L\}$ и $\tilde{b} = \{b; b_L\}$, тогда

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \tilde{a} + \tilde{b} = \{a; a_L\} + \{b; b_L\} = \{a + b; a_L + b_L\} \\ 2)\ \tilde{a} - \tilde{b} = \{a - b; a_L + b_L\} \\ 3)\ \tilde{a} \cdot \tilde{b} = \{a; a_L\} \cdot \{b; b_L\} = \{a \cdot b; -a_L b - a b_L + a_L b_L\} \\ \quad \text{для } a > 0;\ b > 0 \end{array}\right\} \quad (1.43)$$

$$\tilde{a} \cdot \tilde{b} = \{a - a_L\} \cdot \{b + b_L\} = \{ab; ab_L - a_L b - a_L b_L\}$$
$$(\text{для } a > 0; b < 0)$$

$$\tilde{a} \cdot \tilde{b} = \{a + a_L\}\{b - b_L\} = \{ab; a_L b - ab_L - a_L b_L\}$$
$$(\text{для } a < 0; b > 0)$$

$$\tilde{a}\tilde{b} = \{a + a_L; b + b_L\} = \{ab; ab_L + ab_L + a_L b_L\}$$
$$(\text{для } a < 0; b < 0)$$

$$4)\ \frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \frac{\{a; a_L\}}{b; b_L} = \frac{\{a - a_L\}}{b - b_L} = \left\{\frac{a}{b}; \frac{a_L - ab_L}{b(b - b_L)}\right\}$$
$$(\text{для } a > 0; b > 0)$$

$$\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \frac{\{a + a_L\}}{\{b - b_L\}} = \left\{\frac{a}{b}; \frac{ab_L + a_L b}{b(b - b_L)}\right\} \ (\text{для } a < 0; b > 0)$$

$$\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \frac{\{a - a_L\}}{\{b + b_L\}} = \left\{\frac{a}{b}; \frac{ab_L + a_L b}{b(b + b_L)}\right\} (\text{для } a > 0; b < 0)$$

$$\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \frac{\{a + a_L\}}{\{b + b_L\}} = \left\{\frac{a}{b}; \frac{ab_L - a_L b}{b(b + b_L)}\right\} \ (\text{для } a < 0; b < 0)$$

II. Пусть $\tilde{a} = \{a; a_R\}$ и $\tilde{b} = \{b; b_R]$, тогда

1) $\tilde{a} + \tilde{b} = \{a; a_R\} + \{b; b_R\} = \{a + b; a_R + b_R\}$

2) $\tilde{a} - \tilde{b} = \{a; a_R\} - \{b; b_R\} = \{a - b; a_R - b_R\}$

3) $\tilde{a} \cdot \tilde{b} = \{a + a_R\} \cdot \{b + b_R\} = \{a \cdot b; ab_R + a_R b + a_R b_R\}$
(для $a > 0; b > 0$)

$\tilde{a} \cdot \tilde{b} = \{a - a_R\} + \{b + b_R\} = \{a \cdot b; ab_R - a_R b - a_R b_R\}$
(для $a < 0; b > 0$)

$\tilde{a} \cdot \tilde{b} = \{a + a_R\}\{b - b_R\} = \{a \cdot b; a_R b - ab_R - a_R b_R\}$
(для $a > 0; b < 0$)

4) $\dfrac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \dfrac{\{a + a_R\}}{\{b + b_R\}} = \left\{\dfrac{a}{b}; \dfrac{a_R b - a_R b}{b(b + b_R)}\right\}$ (для $a > 0; b > 0$)

$\tilde{a} \cdot \tilde{b} = \{a - a_R\}\{b - b_R\} = \{a \cdot b; -ab_R - a_R b + a_R b_R\}$
(для $a < 0; b < 0$)

$\dfrac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \dfrac{\{a - a_R\}}{\{b + b_R\}} = \left\{\dfrac{a}{b}; -\dfrac{ab_R + a_R b}{b(b + b_R)}\right\}$ (для $a < 0; b > 0$)

$\dfrac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \dfrac{\{a + a_R\}}{\{b - b_R\}} = \left\{\dfrac{a}{b}; \dfrac{ab_R - a_R b}{b(b - b_R)}\right\}$ (для $a > 0; b < 0$)

$\dfrac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \dfrac{\{a - a_R\}}{\{b - b_R\}} = \left\{\dfrac{a}{b}; \dfrac{a_R b - ab_R}{b(b - b_R)}\right\}$ (для $a < 0; b < 0$)

Следует отметить, что как и в случае нечетких чисел *LR*-типа α уровня, для случая нечетких чисел $a_L(\alpha)$ и $a_R(\alpha)$ следует всюду вместо $a_L; a_R; b_L$ и b_R на основании (25) взять соответственно $a_L(\alpha), a_R(\alpha), b_R(\alpha), b_L(\alpha)$.

Пример 1.8: Заданы два нечетких числа *L*-типа:

$$\tilde{7}_L = \{7; 0{,}6\} \text{ и } \tilde{3}_L = \{3; 0{,}4\}$$

Найти сумму, разность, произведение и частное этих чисел.

$$1)\tilde{7}_L+\tilde{3}_L=\{7-0,6\}+\{3-0,4\}=\{10;1\};$$

$$2)\tilde{7}_L-\tilde{3}_L=\{7-0,6\}-\{5-0,4\}=\{4;0,2\};$$

$$3)\tilde{7}_L\cdot\tilde{3}_L=\{7-0,6\}\cdot\{3-0,4\}=\{21;4,36\};$$

$$4)\frac{\tilde{7}_L}{\tilde{3}_L}=\frac{\{7-0,6\}}{\{3-0,4\}}=\left\{\frac{7}{3};0,128\right\}$$

Наконец следует отметить, что если:

1) в (1.42)-(1.44) один из сомножителей есть нечеткое число, то получим формулы умножения нечеткого числа на скаляр;

2) в (1.28), (1.32) и (1.34) делитель будет четким числом, то получим формулы деления нечеткого числа на скаляр.

2.1.3. Сравнение нечетких чисел

Как из вестно, между двумя четкими числами a и b могут быть справедливым одно из следующих соотношений:

$$a>b;a<b;\ \text{либ о}\ a=b \qquad (1.45)$$

Поэтому возникает вопрос: какова возможность того, что нечеткое число $\tilde{a}$ б ольше (меньше),$\tilde{b}$,либо $\tilde{a}=\tilde{b}$.

Определение 1.25. Будем говорить, что нечеткое число $\tilde{a}$ больше (меньше) нечеткого числа $\tilde{b}$, если любое значение носителя нечеткого числа $\tilde{a}$ больше (меньше) любого значения носителя нечеткого числа $\tilde{b}$, т.е.

$$\tilde{a}>\tilde{b}<=>\{x>y;\forall x\in S_a;\forall y\in S_b\} \qquad (1.46)$$

$$\tilde{a}<\tilde{b}<=>\{x<y;\forall x\in S_a;\forall y\in S_b\} \qquad (1.47)$$

Определение 1.26. Будем говорить, что нечеткое число $\tilde{a}$ равно нечеткому числу $\tilde{b}$, если их носители совпадают (совпадение носителей этих чисел означает, что при любом конкретном значении функции принадлежности нечеткие з начения обеих чисел равны друг другу), т.е.

$$\tilde{a}=\tilde{b}<=>\{x=y;\mu_a(x)=\mu_b(y);\forall x\in S_a;\forall y\in S_b\} \qquad (1.48)$$

Следует отметить, что для различных видов функций принадлежности (степени четкости) значения нечеткого числа при одном и том же уровне четкости не равны друг другу, т.е. если $\mu_{\underset{A}{1}}(\alpha) \neq \mu_{\underset{A}{2}}(\alpha)$, то для

$$A_{L_1}(\alpha) \neq A_{L_2}(\alpha) \text{ и } A_{R_1}(\alpha) \neq A_{R_2}(\alpha) \tag{1.49}$$

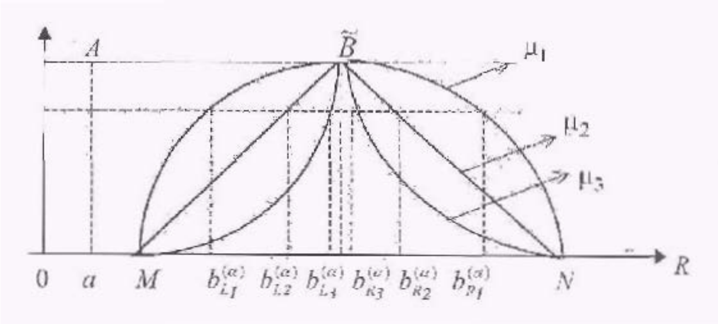


Рис. 1.5

На рисунке 1.5 *A* - четкое число. $\widetilde{B}$- нечеткое число $S_{\widetilde{B}}[MN]$ - носитель нечеткого числа $\widetilde{B}$. $\mu_{1_{\widetilde{B}}} \geq \mu_{2_{\widetilde{B}}} \geq \mu_{3_{\widetilde{B}}}$.

Поэтому, для указанного $\alpha \in (0,1)$.

$$\begin{gathered} b_{L_1}(\alpha) < b_{L_2}(\alpha) < b_{L_3}(\alpha) < b \\ < b_{R_3}(\alpha) < b_{R_2}(\alpha) < b_{R_1}(\alpha) \end{gathered} \tag{1.50}$$

где *b* - четкое значение числа *B;* b_{L_i} и b_{R_i} - соответственно нечеткие числа *L* и *R* - типа для функций принадлежности $\mu_{\widetilde{B}}(i = 1,2,3)$ четкости α-уровня.

Из рисунка 1.5 следует, что функция принадлежности нечеткого числа $B - \mu(x)$ слева (*x* < *b*) -возрастает, а справа (*x* > *b*) - убывает.

Пример 1.9. Требуется найти значения нечеткого числа слева и справа уровня α=0,6, при функциях принадлежности (виды нечеткости) $\mu_1(x) = \ell^{-x^2}$ и $\mu_2(x) = \ell^{-x^4}$ и растяжение слева и справа σ=2. Исходя из

$$\alpha = \mu_A(x) = \left\{ \ell^{-\left(\frac{x_R-a}{\sigma}\right)^k} \ \ell^{-\left(\frac{a-x_L}{\sigma}\right)^k} \right\}$$

имеем:

1) При $\underset{A}{\mu_1}$

$$\ell^{-\left(\frac{\tilde{3}_R-3}{2}\right)^2} = 0{,}6 \Rightarrow \tilde{3}_R = 3 + 2\sqrt{ln\frac{1}{0{,}6}} = 3{,}942$$

$$\ell^{-\left(\frac{3-\tilde{3}_L}{2}\right)^2} = 0{,}6 \Rightarrow \tilde{3}_L = 3 + 2\sqrt{ln\frac{1}{0{,}6}} = 2{,}058$$

2) при $\underset{A}{\mu_2}$

$$\ell^{-\left(\frac{\tilde{3}_R-3}{2}\right)^4} = 0{,}6 \Rightarrow \tilde{3}_R = 3 + 2\sqrt[4]{ln\frac{1}{0{,}6}} = 4{,}3726$$

$$\ell^{-\left(\frac{3-\tilde{3}_L}{2}\right)^4} = 0{,}6 \Rightarrow \tilde{3}_L = 3 - 2\sqrt[4]{ln\frac{1}{0{,}6}} = 1{,}6274$$

Этот результат подтверждает справедливость (1.50). Отметим, что не следует отождествлять виды и свойства функций принадлежности нечетких чисел с видами функций принадлежности нечетких множеств, так как носитель нечеткого числа содержит лишь одно четкое значение этого числа, а носитель нечеткого множества может содержать любое количество четких значений (если нечеткое множество - нормальное), а может и не содержать четких значений (если нечеткого множеств - субнормальное).

Определение 1.27. Нечеткое число называется положительным, если все элементы его носителя положительны, называется отрицательным - если все элементы его носителя отрицательны. Наряду с этим, приведем понятие нечеткого неотрицательного действительного числа, предложенного Хеле: - Нечеткое неотрицательное действительно число определяется как отображение $\rho: \quad R_+ \to [0,1]$, удовлетворяющее условиям:

$\rho(0)=0,\ sup(\rho(r)/r\in R_+)=1$ (граничные условия)
$\forall r\in R:\rho(r)=sup(\rho(r')/r'\in r)$ (непрерывность слева)

Если ρ - нечеткое неотрицательное действительное число, то величину $\rho(r)$ можно интерпретировать как степень принадлежности (степень четкости) неявного числа ρ четкому интервалу $[0;r)$.

Из приведенного понятия нечеткого числа следует, что автор не рассматривает нечеткое число как нечеткое подмножество из R_+ (положительной полуоси), а рассматривает как неявную величину. При этом за его носитель принимается полуинтервал [0;r)$[0;r)$, куда входят множество четких и нечетких чисел вида $0<r'<r$.

Определение 1.28 Нечткое число $\tilde{A}$ называется нечетким нулем, если наиболее четкое его значение равно нулю, т.е.

$$\mu_A(0)=\sup_x\{\mu_A(x)\} \tag{1.51}$$

Если растяжение нечеткого нуля равно σ, то под нечетким нулем четкости $\alpha\in(0;1)$ на основании (4) будем понимать одно из чисел

$$O_L(\alpha)=-(1-\alpha)\sigma\text{, либо } O_R(\alpha)=-(1-\alpha)\sigma \tag{1.52}$$

$$\text{для }\ \mu_A(x)=1-\left|\frac{x-a}{\sigma}\right| \tag{1.53}$$

Для другой функции принадлежности значение (1.53) будет другим. Но во всех случаях для $\alpha\in(0;1)$,

$$O_L(\alpha)<0;\ O_R(\alpha)>0.$$

Теорема 1. Для того, чтобы нечеткое число $\tilde{a}_{LR}$ было больше нечеткого числа $\tilde{b}_{LR}$ необходимо и достаточно, чтобы любое значение левого растяжения числа $\tilde{a}_{LR}$ было больше любого значения правого растяжения числа $\tilde{b}_{LR}$

Доказательство: Необходимость. Пусть $\tilde{a}=\{a,a_L,a_R\}$ и $\tilde{b}=\{b,b_L,b_R\}$ - нечеткие числа и пусть $\tilde{a}>\tilde{b}$. Тогда в силу (1.46) $x>y$ для любых $x\in(a-a_L;a+a_R)$ и любых

$$y\in(b-b_L;b+b_R)\ \text{ имеем }\ x>y \tag{1.54}$$

Но так как для любого нечеткого числа его значение из левого растяжения меньше любого значения из его правого растяжения, то

$$\underline{x}<\overline{x},\underline{x}\in(a-a_L,a);\overline{x}\in(a;a+a_R) \tag{1.55}$$

$$\underline{y}<\overline{y},\underline{y}\in(b-b_L,b);\overline{y}\in(b;b+b_R) \tag{1.56}$$

Тогда из (1.54)-(1.56) следует, ч то $\underline{x} > \overline{y}$.

Достаточность: Пусть $\underline{x} > \overline{y}$,тогда в силу (1.55) $\overline{y} < x$, а следовательно и $\overline{y} < \overline{x}$ для любых

$$x \in (a - a_L; a + a_L) \tag{1.57}$$

С другой стороны в силу (1.56) $y \leq \overline{y}$ для любых

$$y \in (b - b_L; b + b_L) \tag{1.58}$$

Поэтому из (1.57) и (1.58) следует справедливость (1.54). Откуда в силу определений левого и правого растяжений и носителя нечеткого числа следует справедливость теоремы. Аналогично, доказывается справедливость.

Теоремы 1.2 Для того, чтобы нечеткое число $\tilde{a}_{LR}$ было меньше нечеткого числа $\tilde{b}_{LR}$ необходимо и достаточно, чтобы любое значение правого растяжения нечеткого числа $\tilde{a}_{LR}$ было меньше любого значения левого растяжения нечеткого числа $\tilde{b}_{LR}$.

Из рез ультатов теорем 1.1 и 1.2 следует:

$$\tilde{a}_{LR} = \tilde{b}_{LR} <=> \begin{cases} a = b \\ a_L = b_L \\ a_R = b_R \end{cases} \tag{1.59}$$

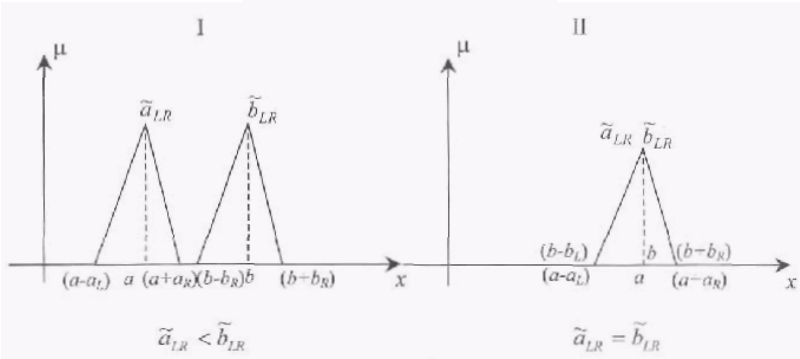


Рис. 1.6

На рис. 1.6 (I) схематически показаны нечеткие числа $\tilde{a}_{LR} < \tilde{b}_{LR}$, а на рисунке 1.6(II) – случай $\tilde{a}_{LR} = \tilde{b}_{LR}$

Замечание 1.5. Для случая нечетких чисел L и R - типа легко доказать, что

$$\tilde{a}_L > \tilde{b}_L <=> \{x < y, \forall x \in (a - a_L; a); \forall y \in (b - b_L; b)\}$$
$$\tilde{a}_R > \tilde{b}_R <=> \{x > y, \forall x \in (a; a + a_R); \forall y \in (b; b + b_R)\}$$

Отметим, что здесь и всюду под левым и правым растяжением, расширением и сужениями нечеткого числа следует понимать левое и правое растяжение, расширение и сужение носителя нечеткого числа.

2.2. Нечеткая алгебра

2.2.1. Теоретическое обоснование нечетких уравнений

Ряд задач анализа математических моделей нечетких систем требует решение уравнений с нечеткими числами.

Практический интерес представляет рассмотрение уравнений с обычными математическими терминами и нечеткими математическими отношениями и уравнения с нечеткими числами и обычными математическими отношениями. В общем случае нечетким уравнением называются уравнения, в которых коэффициенты и переменные являются нечеткими числами.

В раде работ рассматриваются примеры решения уравнений с нечеткими отношениями и обычными математическими терминами. Для чего использованы следующие понятия и теоремы.

Определение 2.1. Математическим термом называется конструкция из элементов $x \in R$ и связывающих их операций (+;-;x;:)

Определение 2.2. Если $\mu_A \in F(R), \mu_A : R \to [0,1]$, то A называется нечетким отношением, а $\mu_A(x, y)$ указывает на то, с какой степенью (x,y) удовлетворяет .

Примером A может быть A «приближенно равенство».

Определение 2.3. Если f_1 и f_2 есть математические термы и A есть нечеткое отношение, т.е. $\mu_A : R^2 \to [0;1]$, то f, Af_2 называется нечетким уравнением с нечетким отношением.

Например $f_1 = y^2$; $f_2 = x^3$; А есть при умножении f_2 на $\tilde{3}$; Тогда $f_1 A f_2 \to y^2 \approx \tilde{3} x^3$, где $\tilde{3} = \{3;0,4;0,6\}$ нечеткое число (LR)- типа.

Теорема 2.1 Предположим, что f_1 и f_2 математические термы, А-нечеткое отношение и имеет место уравнение $f_1 A f_2$. Тогда, если $a \in R$,то

$$\begin{aligned} &1)\quad (f_1 + a)(A + a)(f_2 + a) \\ &2)\quad (f_1 \cdot a)(A \cdot a)(f_2 \cdot a) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Теорема 2.2. Нечеткое отношение являются адитивно независимым тогда и только тогда, когда

$$A(x, y) = A(|x - y|) \tag{2.2}$$

Теорема 2.3 Нечеткое отношение А является мультипликативно независимым тогда и только тогда, когда

$$A(x; y) = A((x / y)h), \quad h \geq 1 \tag{2.3}$$

Определение 2.4. Нечетким математическим термом называется конструкция из элементов $\mu_{A_i} \in F(R), i \in N$,

связанных отношениями $:;+;-;\ \cdot,\ \ \widetilde{\max},\ \ \min.$ Далее, поскольку семейство выпуклых нормальных нечетких чисел (семейство нечетких чисел, имеющих выпуклые носители, содержащие их четкие значения) образуют только коммутативное полукольцо, то решение уравнения с нечеткими термами возможно только при использовании разложения нечетких термов по α-уровням. Метод, описанный в литературе, неизбежно приводит к нечетким нулям и к изменению степени истинности математических отношений.

Определение 2.5. Скобочной формой уравнения $\widetilde{f}_1 A \widetilde{f}_2$ называется следующее разложение по α-уровням:

$$\left(\bigcup_\alpha \alpha \widetilde{f}_1 \alpha\right) A \left(\bigcup_\alpha \alpha \widetilde{f}_2 \alpha\right) = \left(\bigcup_\alpha \alpha \left[f_{L_1} f_{R_1}\right]\right) A \left(\bigcup_\alpha \alpha \left[f_{L_2} f_{R_2}\right]\right) \tag{2.4}$$

Например. Пусть

$\widetilde{a}x^2 + \widetilde{b}x + \widetilde{c} = 0$, где $\widetilde{a} = \{a_L; a_R\}$; $\widetilde{b} = \{b_L; b_R\}$ и $\widetilde{c} = \{c_L; c_R\}$, тогда

$$\widetilde{a}x^2 + \widetilde{b}x + \widetilde{c} = \{a_L x^2 + b_L x + c_L = 0; a_R x^2 + b_R x + c_R = 0\} = 0$$

Если все нормальные унимодельные числа, из которых состоят нечеткие термы $\widetilde{f}_1$ и $\widetilde{f}_2$ имеют носители S_{f_1} и S_{f_2} такие, что

они не содержат одновременно положительных и отрицательных элементов, то будет справедливо следующее соотношение:

$$\widetilde{f}_1(\alpha)A\widetilde{f}_2(\alpha)=\begin{cases}(f_L(\alpha)A(f_{L_2}(\alpha)) \\ (f_{R_1})A(f_{R_2})\end{cases}\forall\alpha\in[0,1] \qquad (2.5)$$

Поскольку элементы скобочной формы и *А* являются обычными математическими нормами и отношением, то для скобочной формы будут справедливы соответствующие условия адитивной и мультипликативной независимости, которые справедливы для любых обычных уравнений.

Таким образом, чтобы решить уравнений вида $\widetilde{f}_1(x)A\widetilde{f}_2(x)$ необходимо привести его к виду (2.4) и решить отдельно относительно x_L и x_R. Условием адитивности явяляется выпуклость и нормальность (носителей).

В случае нечетких чисел (LR)-типа уравнение с Н.Н. можно решить, получив соответствующую скобовую форму. При этом необходимо учитывать приближенный характер «.», «..» для нечетких чисел (LR)-типа.

Следует отметить, что разложение по α-уровням дает возможность производить дальнейший анализ задач с Н.Н. с помощью метода интервального анализа. Ниже применяя метод интервального анализа проводится решение алгебраических уравнений и систем линейных алгебраических уравнений с нечеткими коэффициентами.

2.2.2. Нечеткие линейные алгебраические уравнения

Определение 2.6. Нечетким алгебраическим уравнением называется алгебраическое уранение, в котором хотя бы один из коэффициентов при неизвестных либо свободный член (либо тот и другой) являются нечеткими числами.

Следует отметить, что корни нечеткого алгебраического уравнения являются нечеткими числами.

В частности, исходя из основного правила алгебры. Если один из коэффициентов a_i алгебраического уравнения

$$\sum_{i=1}^{n}a_1x^{n-i}=0 \qquad (2.6)$$

есть нечеткое число, то хотя бы один из корней этого уравнения является нечетким числом. Следует отметить, что если показатель степени у равнения (2.1) есть нечеткое число, то уравнение (2.1) называется уравнением с нечеткой степенью и при этом решением ее будет нечеткое число.

Определение 2.7. Нечеткое алгебраическое уравнение линейное относительно неизвестной называется нечетким линейным уравнением оообозначается:

$$\tilde{a}\tilde{x} = \tilde{b} \qquad (2.7)$$

$$\tilde{x} = -\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}};\ \mu(x) = \min(\ \mu(a)\mu(b)) \qquad (2.8)$$

Рассмотрим различные виды нечетких линейных алгебраических уравнений:

1) $ax = \tilde{b}$, тогда $\tilde{x} = \dfrac{\tilde{b}}{a}; \mu(x) = \mu(b)$, где

$$b_L = b_1 - b_L;\ b_2' = b + b_L$$

а) Если $\tilde{b} = \{b_L'; b_R'\}$, то

$$\tilde{X} = \{x_L; X_R\} = \\ = \begin{cases} \left\{\dfrac{b_L'}{a}; \dfrac{b_R}{a}\right\}, если\, a > 0;\ b > 0;\ \ a > 0; b < 0 \\ \left\{\dfrac{b_R'}{a}; \dfrac{b_L'}{a}\right\}, если\, a < 0;\ b > 0;\ \ a < 0; b < 0 \end{cases} \qquad (2.9)$$

б) Если $\tilde{b} = \{b; b_L; b_R\}$, то

$$\tilde{X} = \{x; x_L; X_R\} = \begin{cases} \left\{\dfrac{b}{a}; \dfrac{b_L}{a}; \dfrac{b_R}{a}\right\}, если\, a > 0; \\ \left\{\dfrac{b}{a}; \dfrac{b_R}{a}; \dfrac{b_L}{a}\right\}, если\, a < 0; \end{cases}$$

Пример 2.1. $3x = \{6;0,9;0,3\}; \tilde{x} = \{2;0,3;0,1\}$

2) $\tilde{a}x = b; \tilde{x} = \dfrac{b}{a}; \mu(x) = \mu(a)$

а) $\tilde{a} = \{a_L'; a_R'\}$ где $a_L' = a - a_L; a_R' = a + a_R$, то

$$\widetilde{X}=\{x_L;X_R\}=\begin{cases}\left\{\dfrac{b}{a_R};\dfrac{b}{a_L}\right\}, для:\begin{Bmatrix}a>0;b>o\\a<0;b<0\end{Bmatrix}\\\left\{\dfrac{b}{a_L};\dfrac{b}{a_R}\right\}, для:\begin{Bmatrix}a>0;b<o\\a<0;b>0\end{Bmatrix}\end{cases}$$

б) если $\widetilde{a}=\{a;a_L;a_R\}$, то

$$\widetilde{X}=\{x;x_L;X_R\}=$$
$$=\begin{cases}\left\{\dfrac{b}{a};\dfrac{ba_R}{a(a+a_R)};\dfrac{ba_L}{a(a-a_L)}\right\}, для\begin{Bmatrix}a>0;b>0\\a<0;b<0\end{Bmatrix}\\\left\{\dfrac{b}{a};\dfrac{ba_R}{a(a-a_L)};\dfrac{ba_R}{a(a+a_R)}\right\}, для\begin{Bmatrix}a>0;b<0\\a<0;b>0\end{Bmatrix}\end{cases}$$

Пример 2.2

$$\widetilde{x}=\{3;0{,}397;0{,}273\}$$

3) $\widetilde{a}x=\widetilde{b}$, тогда $\widetilde{x}=\dfrac{\widetilde{b}}{\widetilde{a}};\mu(x)=\min(\mu(a)\mu(b))$

а) если $\widetilde{a}=\{a'_L;a'_R\};\quad \widetilde{b}=\{\widetilde{b}_L;b'_R\}$, тогда, пользуясь правилом деления нечетких чисел имеем:

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{X}&=\left\{\frac{b'_L}{a'_R};\frac{b'_R}{a'_L}\right\}, для\,(a>0;b>0)\\\widetilde{X}&=\left\{\frac{b'_L}{a'_L};\frac{b'_R}{a'_R}\right\}, для\,(a>0;b<0)\\\widetilde{X}&=\left\{\frac{b'_R}{a'_R};\frac{b'_L}{a'_L}\right\}, для\,(a<0;b>0)\\\widetilde{X}&=\left\{\frac{b'_R}{a'_L};\frac{b'_L}{a'_R}\right\}, для\,(a<0;b<0)\end{aligned}\right\}\qquad(2.10)$$

б) Если $\widetilde{a}=\{a;a_L;a_R\}$ $\qquad\widetilde{b}=\{b;b_L;b_R\}$,то

$$\left.\begin{aligned}
&\widetilde{X}=\left\{\frac{b}{a};\frac{a_R b+ab_L}{a(a+a_R)};\frac{ab_R+a_L b}{a(a-a_L)}\right\}, для\ a>0;b>0\\
&\widetilde{X}=\left\{\frac{b}{a};\frac{ab_L-a_L n}{a(a-a_L)};\frac{ab_R-a_R b}{a(a+a_R)}\right\}, для\ a>0;b<0\\
&\widetilde{X}=\left\{\frac{b}{a};\frac{a_R b-ab_R}{a(a+a_R)};\frac{a_L b-ab_L}{a(a+a_L)}\right\}, для\ a<0;b>0\\
&\widetilde{X}=\left\{\frac{b}{a};\frac{-ab_R-a_L b}{a(a-a_L)};\frac{-ba_R-ab_L}{a(a+a_R)}\right\}, для\ a<0;b<0
\end{aligned}\right\}\quad(2.11)$$

Пример 2.3 $\{2;0,4;0,6\}$ $\widetilde{x}=\{10;0,6;0,7\}$

а) $\widetilde{x}=\dfrac{\{9,4;10,7\}}{\{1,6;2,6\}}=\{5;1,38;1,69\}=\{3,62;6,69\}$

б) $\widetilde{x}=\dfrac{\{10;0,6;0,7\}}{\{2;0,4;0,6\}}=\{5;1,38;1,69\}=\{3,62;6,69\}$

Отметим, что

3) если в (2.7) $\widetilde{a}=\widetilde{a}_R;\widetilde{b}=\widetilde{b}_R$, т.е. $\widetilde{a}=\{a;a_R\}$ и $\widetilde{b}=\{b;b_R\}$, то

$$\widetilde{X}=\left\{\frac{b}{a};\frac{ab_L-a_L b}{a(a-a_L)}\right\}$$

4) если в (2.7) $\widetilde{a}=\{a;a_R\};\widetilde{b}=\{b;b_R\}$, то

$$\widetilde{X}=\left\{\frac{b}{a};\frac{ab_R-a_R b}{a(a-a_R)}\right\}$$

5) если $\widetilde{a}=\{a;a_L\}$ $\widetilde{b}=\widetilde{b}_R\{b;b_R\}$, то

$$\widetilde{X}=\left\{\frac{b}{a};\frac{a_R b+ab_L}{a(a+a_R)}\right\}=\{x;x_L\}\qquad(2.12)$$

4) если $\widetilde{a}=\widetilde{a}_R=\{a;a_R\}$, а $\widetilde{b}=\widetilde{b}_L=\{b;b_L\}$, то

$$\widetilde{X}=\left\{\frac{b}{a};\frac{ab_R+a_L b}{a(a-a_L)}\right\}=\{x;x_R\}\qquad(2.13)$$

Замечание. Если коэффициенты и свободные члены уравнения (2.7) являются нечеткими числами α-уровня, то всюду a_L и b_L заменяются на $a_L(\alpha)$ и $b_L(\alpha)$ с помощью (1.28).

Пример 2.4 Найти решение уравнения $\tilde{a}x = \tilde{b}$, коэффициенты которого взяты изданных примера (2.3), со степенью четкости α =0,8

$$\tilde{a}(0{,}8) = \{2;(1-0{,}8)0{,}4;(1-0{,}8)0{,}6\} = \{2;0{,}08;0{,}12\}$$

Имеем: $\tilde{b}(0{,}8) = \{10;0{,}12;0{,}14\}$

$$\tilde{X} = \frac{\{10;0{,}12;0{,}14\}}{\{2;0{,}08;0{,}12\}} = \{5;0{,}29;0{,}34\} = \{4{,}71;5{,}34\}$$

2.2.3 Нечеткие квадратные уравнения

Определение 2.8. Квадратное уравнение, хотя бы один коэффициент которого либо свободный член есть нечеткое число называется нечетким квадратным уравнением.

Как и в случае четкого квадратного уравнения полное нечеткое квадратное уравнение имеет вид:

$$\tilde{a}x^2 + \tilde{b}x + \tilde{c} = 0 \qquad (2.14)$$

Рассмотрим различные виды нечетких квадратных уравнений:

I. Неполное нечеткое квадратное уравнение:

$$1)\ \tilde{a}x^2 + \tilde{b}x = 0, \ \ \textit{если} \ \ \tilde{c} = 0 \qquad (2.15)$$

При этом

$$x_1 = 0; \quad \tilde{x}_2 = -\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}} \qquad (2.16)$$

В зависимости от типа нечетких чисел $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ определяем значение (2. 16) как решение нечеткого линейного алгебраического уравнения.

$$2)\ \tilde{a}x + \tilde{c} = 0\text{, если } \tilde{b} = 0 \qquad (2.17)$$

откуда

$$\tilde{x}_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{\tilde{c}}{\tilde{a}}} \qquad (2.18)$$

Очевидно, что если $\tilde{a}$ и $\tilde{c}$ - нечеткие числа противоположного знака, то корни уравнения (2.17) действительные и различны; если же $\widetilde{a}$ и $\widetilde{c}$ - одинакового знака, то корни уравнения (2.17) - комплексно сопряженные нечеткие числа.

а) Пусть $\widetilde{a} = \{a'_L\ a'_R\}; \quad \widetilde{c} = \{c'_L; c'_R\}$,тогда

$$\left.\begin{array}{l} \widetilde{X}_1 = \left\{\begin{array}{l} \left\{\sqrt{-\dfrac{c'_R}{a'_R}}; \sqrt{-\dfrac{c'_L}{a'_L}}\right\} (\text{для} \quad a > 0; c < 0) \\ \left\{\sqrt{-\dfrac{c'_L}{a'_L}}; \sqrt{-\dfrac{c'_R}{a'_R}}\right\} (\text{для} \quad a < 0; c > 0) \end{array}\right\} \\ \widetilde{X}_2 = \left\{\begin{array}{l} \left\{-\sqrt{-\dfrac{c'_L}{a'_L}}; -\sqrt{-\dfrac{c'_R}{a'_R}}\right\} (\text{для} \quad a > 0; c < 0) \\ \left\{-\sqrt{-\dfrac{c'_R}{a'_R}}; -\sqrt{-\dfrac{c'_L}{a'_L}}\right\} (\text{для} \quad a < 0; c > 0) \end{array}\right\} \end{array}\right\} \qquad (2.19)$$

б) Пусть $\widetilde{a} = \{a; a_L; a_R\}, \quad \widetilde{c} = \{c; c_L; c_R\}$, тогда

$$\widetilde{x}_1 = \begin{cases} \left\{\sqrt{-\dfrac{c}{a}}\dfrac{\sqrt{-c(a-a_R)} - \sqrt{(-c+c_R)a}}{\sqrt{a(a+a_R)}}; \dfrac{\sqrt{-c(c-c_L)} - \sqrt{-a-a_L}}{\sqrt{a(a-a_L)}}\right\} \\ \qquad (\text{для} a>0; c<0) \\ \left\{\sqrt{-\dfrac{c}{a}}; \dfrac{\sqrt{-c(a-a_L)} - \sqrt{(-c-c_L)a}}{\sqrt{a(a+a_L)}}; \dfrac{\sqrt{-c(c+c_R)} - \sqrt{c(-a+a_R}}{\sqrt{a(a-a_R)}}\right\} \\ \qquad (\text{для} a<0; c>0) \end{cases} \qquad (2.20)$$

$$\widetilde{x}_2 = \begin{cases} \left\{-\sqrt{-\dfrac{c}{a}}; \dfrac{-\sqrt{-c(a-a_L)} + \sqrt{(-c-c_L)}}{\sqrt{c(a+a_L)}}; \dfrac{\sqrt{-c(-c+c_R)} - \sqrt{c(-a+a_R)}}{\sqrt{c(a-a_L)}}\right\} \\ \qquad (\text{для} a<0; c>0) \\ \left\{-\sqrt{-\dfrac{c}{-a}}; \dfrac{\sqrt{+c(-c+a_R)} - \sqrt{(-c(+a+a_R)}}{\sqrt{c(a+a_R)}}; \dfrac{\sqrt{-c(a-a_L)} - \sqrt{c(-c-c_L}}{\sqrt{c(a-a_L)}}\right\} \\ \qquad (\text{для} a>0; c<0) \end{cases}$$

Из (2.19) следует, что при умножении или делении коэффициентов уравнения (2.17) на (-1) носители его корней из меняются

Пример 2.5 $\widetilde{3}x - \widetilde{12} = 0$, где $\widetilde{3} = \{3; 0{,}4; 0{,}6\}$; $\widetilde{12} = \{12; 0{,}3; 0{,}7\}$

Имеем $\widetilde{3} = \{2{,}6; 3{,}6\}$; $\widetilde{12} = \{11{,}7; 12{,}7\}$

Так как $a > 0$, $c < 0$, то

а) $\begin{cases} \widetilde{X}_1 = \left\{\dfrac{11{,}7}{3{,}6}; \sqrt{\dfrac{12{,}7}{2{,}6}}\right\} = \{1{,}8; 2{,}21\} \\ \widetilde{X}_2 = \{-2{,}21; \ -1{,}8\} \end{cases}$

б) $\begin{cases} \widetilde{X}_1 = \{2; 0{,}16; 0{,}19\} \\ \widetilde{X}_2 = \{-2; 0{,}19; 0{,}16\} \end{cases}$

II. Полное квадратное уравнение

Рассмотрим уравнение (2.14), когда все коэффициенты нечеткие числа, отличные от нуля.
Учитывая формулы корней квадратного уравнения для квадратных уравнений с четкими коэффициентвми имеем:

$$\widetilde{X}_1 = \frac{-\widetilde{b} + \sqrt{\widetilde{b}^2 - 4\widetilde{a}\widetilde{c}}}{2\widetilde{a}}; \quad \widetilde{X}_2 = \frac{-\widetilde{b} - \sqrt{\widetilde{b}^2 - 4\widetilde{a}\widetilde{c}}}{2\widetilde{a}} \qquad (2.21)$$

1) Пусть в (2.14)

$$\widetilde{a} = \{a'_L \ a'_R\}; \ \widetilde{b} = \{b'_L; b'_R\} \quad и \quad \widetilde{c} = \{c'_L; c'_L\}$$

Если при этом корни уравнения (2.14) искать в виде
$\widetilde{X}_1 = \{X'_L; X'_R\} : \widetilde{X}_2 = \{X'_{L2} : X'_{R2}\}$, то
при a>0; b>0; c>0

$$\left.\begin{aligned} X'_{L1} &= \frac{-b'_R + \sqrt{b'^2_L - 4a'_R c'_R}}{2a'_L}; \quad X'_{R1} = \frac{-b'_L + \sqrt{b'^2_R - 4a'_L c'_L}}{2a'_L} \\ X'_{L_2} &= \frac{-b'_R - \sqrt{b'^2_R - 4a'_L c'_L}}{2a'_L}; \quad X'_{R1} = \frac{-b'_L - \sqrt{b'^2_L - 4a'_R c'_R}}{2a'_R} \end{aligned}\right\} (2.22)$$

при a>0; b>0; c>0

$$X'_{L1} = \frac{-b'_R + \sqrt{b'^2_L - 4a'_L c'_R}}{2a'_R}; \quad X'_{R1} = \frac{-b'_L + \sqrt{b'^2_R - 4a'_R c'_L}}{2a'_R},$$

если числители дробей отрицательны.

$$X'_{L1}=\frac{-b'_R+\sqrt{b'^2_L-4a'_Lc'_R}}{2a'_R};\quad X'_{R1}=\frac{-b'_L+\sqrt{b'^2_R-4a'_Rc'_L}}{2a'_L},\tag{2.23}$$

если числители дробей положительны.

$$X'_{L2}=\frac{-b'_R-\sqrt{b'^2_L-4a'_Rc'_L}}{2a'_L};\quad X'_{R1}=\frac{-b'_L-\sqrt{b'^2_L-4a'_Lc'_R}}{2a'_R}$$

при a>0; b<0; c>0

$$\left.\begin{aligned}X'_{L1}&=\frac{-b'_R+\sqrt{b'^2_R-4a'_Rc'_R}}{2a'_R};\quad X'_{R1}=\frac{-b'_L+\sqrt{b'^2_L-4a'_Lc'_L}}{2a'_L}\\ X'_{L_2}&=\frac{-b'_R-\sqrt{b'^2_L-4a'_Lc'_L}}{2a'_R};\quad X'_{R1}=\frac{-b'_L-\sqrt{b'^2_R-4a'_Rc'_R}}{2a'_L}\end{aligned}\right\}\tag{2.24}$$

при a>0; b<0; c<0

$$\left.\begin{aligned}X'_{L1}&=\frac{-b'_R+\sqrt{b'^2_R-4a'_Lc'_R}}{2a'_R};\quad X'_{R1}=\frac{-b'_L+\sqrt{b'^2_L-4a'_Rc'_L}}{2a'_L}\\ X'_{L_2}&=\frac{-b'_R-\sqrt{b'^2_L-4a'_Rc'_L}}{2a'_L};\quad X'_{R2}=\frac{-b'_L-\sqrt{b'^2_R-4a'_Lc'_R}}{2a'_R}\end{aligned}\right\}\tag{2.25}$$

при a<0; b>0; c>0

$$\left.\begin{aligned}X'_{L1}&=\frac{-b'_R+\sqrt{b'^2_L-4a'_Rc'_L}}{2a'_R};\quad X'_{R1}=\frac{-b'_L+\sqrt{b'^2_L-4a'_Lc'_R}}{2a'_R}\\ X'_{L_2}&=\frac{-b'_R-\sqrt{b'^2_R-4a'_Rc'_R}}{2a'_L};\quad X'_{R2}=\frac{-b'_L-\sqrt{b'^2_L-4a'_Rc'_L}}{2a'_R}\end{aligned}\right\}\tag{2.26}$$

при a<0; b>0; c<0

$$\left.\begin{array}{l} X'_{L1}=\dfrac{-b'_R+\sqrt{b'^2_L-4a'_L\,c'_L}}{2a'_R};\quad X'_{R1}=\dfrac{-b'_L+\sqrt{b'^2_R-4a'_R\,c'_R}}{2a'_L} \\ \text{если ч ислитель дроб и положительный и} \\ X'_{L1}=\dfrac{-b'_R+\sqrt{b'^2_L-4a'_R\,c'_R}}{2a'_L};\quad X'_{R1}=\dfrac{-b'_L+\sqrt{b'^2_R-4a'_L\,c'_L}}{2a'_R} \\ \text{если ч ислитель дроб и отрицательный} \\ X'_{L2}=\dfrac{-b'_R-\sqrt{b'^2_R-4a'_R\,c'_R}}{2a'_L};\quad X'_{R2}=\dfrac{-b'_L-\sqrt{b'^2_L-4a'_L\,c'_L}}{2a'_R} \end{array}\right\}\quad(2.27)$$

при a<0; b<0; c>0

$$\left.\begin{array}{l} X'_{L1}=\dfrac{-b'_R+\sqrt{b'^2_R-4a'_R\,c'_L}}{2a'_R};\quad X'_{-R1}=\dfrac{-b'_L+\sqrt{b'^2_L-4a'_L\,c'_R}}{2a'_L} \\ X'L_2=\dfrac{-b'_R-\sqrt{-b'^2_L-4a'_L\,c'_R}}{2a'_L};\quad X'_{R2}=\dfrac{-b'_L-\sqrt{b'^2_R-4a'_R\,c'_L}}{2a'_L} \end{array}\right\}\quad(2.28)$$

при a<0; b<0; c<0

$$\begin{array}{l} X'_{L1}=\dfrac{-b'_R+\sqrt{b'^2_R-4a'_L\,c'_L}}{2a'_R};\quad X'_{R1}=\dfrac{-b'_L+\sqrt{b'^2_L-4a'_R\,c'_R}}{2a'_L} \\ X'L_2=\dfrac{-b'_R-\sqrt{-b'^2_L-4a'_R\,c'_R}}{2a'_R};\quad X'_{R2}=\dfrac{-b'_L-\sqrt{b'^2_R-4a'_L\,c'_L}}{2a'_L} \end{array}\quad(2.29)$$

если числитель дробей положительный и

$$X'_{L2}=\frac{-b'_R+\sqrt{b'^2_L-4a'_R\,c'_R}}{2a'_L};\quad X'_{R2}=\frac{-b'_L+\sqrt{b'^2_R-4a'_L\,c'_L}}{2a'_R}$$

если числитель дроби отрицательный

2) Пусть $\tilde{a}=\{a;a_L;a_R\}$; $\tilde{b}=\{b;b_L;b_R\}$ и $\tilde{c}=\{c;c_L;c_R\}$

При этом учитывая, что $a'_L=a-a_L$; $a'_R=a'+a_R$

$$b'_L=b-b_L;b'_R=b+b_R;c'_L=c-c;c'_R=c+c_R \quad (2.30)$$

на основании (2.22)-(2.29), определим

$$\tilde{X}_i=\{X'_{Li};X'_{Ri}\};\ (i=1,2).$$

Затем определив решение четкого квадратного уравнения

$$X_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad X_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2.31)$$

находятся

$\widetilde{X}_1 = \{X_1, X_{Li}; X_{Ri}\}$; и $\widetilde{X}_1 = \{X_1, X_{Li}; X_{Ri}\}$; где

$$X_{R_i} = \{X'_{Ri} - X_i\}; \; X_{Li} = X_i - X_{Li} \quad (i = 1,2). \quad (2.32)$$

Если же требуется найти корни уравнения (2.14) со степенью четкости $\mu(x) = \alpha$, то:

а) следует всюду в (2.22)-(2.29) вместо $\{X'_{L_i}; X'_{Ri}; (i = 1,2)\}$ взять $\{X'_{L_i}(\alpha); X'_{Ri}(\alpha); (i = 1,2)\}$, где

$$\{X'_{L_i}(\alpha) = X_i - (1-\alpha)X'_{Li}; \; X'_{Ri}(\alpha) = X_i + (1-\alpha)X_{Ri} \quad i = 1,2\} \quad (2.33)$$

б) следует с помощью (2.22)-(2.32) найти решение уравнения (2.14), а затем с помощью (2.33) найти решение данного нечеткого квадратного уравнения с нужной степенью четкости

Пример 2.5

$\tilde{a}x^2 + \tilde{b}x - \tilde{c} = 0$, где

$\tilde{a} = \{2;0,2;0,3\}$; $\tilde{b} = \{5;0,1;0,3\}$; $\tilde{c} = \{3;0,3;0,2\}$ ибо

$\tilde{a} = \{1,8;2,3\}$; $\tilde{b} = \{4,9;5,3\}$; $\tilde{c} = \{2,7;3,2\}$

Имеем: $X'_L = \dfrac{-5,3 + \sqrt{4,9^2 - 4 \cdot 1,8(-2,7)}}{2 \cdot 2,3} = 0,281$

$$X'_{R_1} = \frac{-4,9 + \sqrt{5,3^2 - 4 \cdot 2,3(-3,3)}}{2 \cdot 1,8} = 0,746$$

$$X'_{L2} = \frac{-5,3 - \sqrt{5,3^2 - 4 \cdot 2,3(-3,2)}}{2 \cdot 1,8} = -3,58$$

$$X'_{R2} = \frac{-4,9 - \sqrt{4,9^2 - 4 \cdot 1,8(-2,7)}}{2 \cdot 2,3} = -2,5$$

$\widetilde{X}_1 = \{0,281;0,746\}$; $\widetilde{X}_2 = \{-3,58;2,5\}$

$2x^2 + 5x - 3 = 0$; $x_1 = 0,5$; $x_2 = -3$

$\tilde{x}_1 = \{0,5;0,219;0,246\}$; $\tilde{x}_2 = \{-3;0,58;0,5\}$

Вычислим: $\widetilde{X}(\alpha = 0,8) = \{\widetilde{X}_1(0,8); \widetilde{X}_2(0,8)\}$. Имеем:

$$\tilde{X}_1(0,8)=\begin{cases}X'_{L1}(0,8)=0,5-(1-0,8)0,219=0,456\\ X'_{R1}(0,8)=0,5+(1-0,8)0,246=0,549\end{cases}$$

$$\tilde{X}_2(0,8)=\begin{cases}X'_{L2}(0,8)=-3-(1-0,8)0,58=-3,116\\ X'_{R2}(0,8)=-3+(1-0,8)0,5=-2,9\end{cases}$$

Таким образом, решение квадратного уравнения можно представить в виде нечетких чисел:

$$\tilde{X}_1=\{0/0,28;0,8/0,456;1/0,5;\ 0,8/0,549;0/0,746\}$$

$$\tilde{X}_2=\{0/-3,58;0,8/-3,116;1/-3;0,8/-2,9;0/-2,5\}$$

II. Приведенные квадратные уравнения LR-типа

Рассмотрим нечеткое квадратное уравнение:

$$x^2+\tilde{P}x+\tilde{q}=0 \qquad (2.34)$$

где $\tilde{P}=\{P'_L;P'_R\};\tilde{q}=\{q'_L;q'_R\}$

Учитывая формулы корней приведенного квадратного уравнения имеем:

$$\tilde{X}_1=\frac{-\tilde{p}+\sqrt{p^2-4q}}{2};\quad \tilde{X}_2=\frac{-\tilde{p}-\sqrt{p^2-4\tilde{q}}}{2} \qquad (2.35)$$

Если принять $X'_{Li};X'_{Ri}\quad (i=1,2)$, то

При p>0; q>0

$$X'_{L1}=\frac{-p'_R+\sqrt{p'^2_L-4q'_R}}{2};\quad X'_{R1}=\frac{-p'_L+\sqrt{p'^2_R-4q_L}}{2}$$

$$X'_{L2}=\frac{-p'_R-\sqrt{p'_R-4q'_L}}{2};\quad X'_{R2}=\frac{-p'_L-\sqrt{p'^2_L-4q_R}}{2}$$

при p>0; q<0

$$X'_{L1}=\frac{-p'_R+\sqrt{p'_L-4q'_R}}{2};\quad X'_{R1}=\frac{-p'_L+\sqrt{p'^2_R-4q'_L}}{2}.$$

$$X'_{L2}=\frac{-p'_R-\sqrt{p'_R-4q'_L}}{2};\quad X'_{R2}=\frac{-p'_L-\sqrt{p'^2_L-4q'_R}}{2}.$$

при p<0; q>0

$$X'_{L1}=\frac{-p'_R+\sqrt{p'^2_R-4q'_R}}{2};\quad X'_{R1}=\frac{-p'_L+\sqrt{p'^2_L-4q'_L}}{2}.$$

$$X'_{L2}=\frac{-p'_R-\sqrt{p'^2_L-4q'_L}}{2};\quad X'_{R2}=\frac{-p'_L-\sqrt{p'^2_R-4q'_R}}{2}.$$

при p<0;q<0

$$X'_{L1}=\frac{-p'_R+\sqrt{p'_R-4q'_R}}{2};\quad X'_{R1}=\frac{-p'_L+\sqrt{p'^2_L-4q'_L}}{2}.$$

$$X'_{L2}=\frac{-p'_R-\sqrt{p'_L-4q'_L}}{2};\quad X'_{R2}=\frac{-p'_L-\sqrt{p'^2_R-4q'_R}}{2}.$$

Пример 2.6 $x^2-\{4;0,5;0,8\}x-\{5;0,6;0,4\}=0$

$$X'_{L_1}=\frac{3,2+\sqrt{3,2^2+4\cdot 4,6}}{2}=4,276;$$

$$X'_{R_1}=\frac{4,5+\sqrt{4,5^2+4\cdot 5,6}}{2}=5,515$$

$$X'_{R_2}=\frac{3,2-\sqrt{4,5^2+4\cdot 5,6}}{2}=-1,665;$$

$$X'_{R_2}=\frac{4,5-\sqrt{3,2^2+4\cdot 4,6}}{2}=-0,426$$

$$\widetilde{p}=\{4;0,5;0,8\}=\{-4,5;-3,2\}$$

$$\widetilde{q}=-\{5;0,6;0,4\}=\{-5,6;-4,6\}$$

$$\widetilde{X}_1=\{4,27;5,515\};\widetilde{X}_2=\{-1,665;-0,426\}$$

$$x^2-4x-5=0;\quad x_1=5;x_2=-1$$

$$\widetilde{X}_1=\{5;0,724;0,515\};\ \widetilde{X}_2=\{-1;0,665;0,574\}$$

III. Полные квадратные уравнения L-типа

Рассмотрим полное нечеткое квадратное уравнение, коэффициенты которого есть нечеткие числа L-типа

$$\tilde{a}_L x^2 + \tilde{b}_L + \tilde{c}_L = 0 \tag{2.36}$$

где $\tilde{a}_L = \{a; a_L\}$; $\tilde{b} = \{b; b_L\}$ и $\tilde{c} = \{c; c_L\}$

при этом

(для a>0; b>0; c>0)

$$\begin{cases} X'_{L12} = \dfrac{-(b-b_L) \pm \sqrt{(b-b_L)^2 - 4(a-a_L)(c-c_L)}}{2(a-a_L)} \\ X'_{R12} = \dfrac{-(b+b_L) \pm \sqrt{(b+b_L)^2 - 4(a+a_L)(c+c_L)}}{2(a+a_L)} \end{cases}$$

(для a>0; b<0; c>0)

$$\begin{cases} X'_{R12} = \dfrac{-(b+b_L) \pm \sqrt{(b+b_L)^2 - 4(a+a_L)(c-c_L)}}{2(a+a_L)} \\ X'_{L_{12}} = \dfrac{-(b-b_L) \pm \sqrt{(b-b_L)^2 - 4(a-a_L)(c+c_L)}}{2(a-a_L)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X'_{L_{12}} = \dfrac{-(b+b_L) \pm \sqrt{(b+b_L)^2 - 4(a-a_L)(c-c_L)}}{2(a-a_L)} \\ X'_{R_{12}} = \dfrac{-(b-b_L) \pm \sqrt{(b-b_L)^2 - 4(a+a_L)(c+c_L)}}{2(a+a_L)} \end{cases} \tag{2.37}$$

(для a>0; b<0; c>0)

$$\begin{cases} X'_{L12} = \dfrac{-(b+b_L) \pm \sqrt{(b+b_L)^2 - 4(a-a_L)(c+c_L)}}{2(a-a_L)} \\ X'_{R_{12}} = \dfrac{-(b-b_L) \pm \sqrt{(b-b_L)^2 - 4(a+a_L)(c-c_L)}}{2(a+a_L)} \end{cases} \tag{2.38}$$

(для a>0; b<0; c<0)

$$\begin{cases} X'_{L12} = \dfrac{-(b-b_L) \pm \sqrt{(b-b_L)^2 - 4(a+a_L)(c-c_L)}}{2(a+a_L)} \\ X'_{L_{12}} = \dfrac{-(b+b_L) \pm \sqrt{(b+b_L)^2 - 4(a-a_L)(c+c_L)}}{2(a-a_L)} \end{cases}$$

(для a<0:b>0;c<0)

$$\begin{cases} X'_{L12} = \dfrac{-(b-b_L) \pm \sqrt{(b-b_L)^2 - 4(a+a_L)(c+c_L)}}{2(a+a_L)} \\ X'_{L_{12}} = \dfrac{-(b+b_L) \pm \sqrt{(b+b_L)^2 - 4(a-a_L)(c+c_L)}}{2(a-a_L)} \end{cases}.$$

(для a<0;b>0;c<0)

$$\begin{cases} X'_{L12} = \dfrac{-(b-b_L) \pm \sqrt{(b-b_L)^2 - 4(a+a_L)(c+c_L)}}{2(a+a_L)} \\ X'_{R_{12}} = \dfrac{-(b+b_L) \pm \sqrt{(b+b_L)^2 - 4(a-a_L)(c+c_L)}}{2(a-a_L)} \end{cases}.$$

(для a<0; b>0; c<0)

$$\begin{cases} X'_{L12} = \dfrac{-(b+b_L) \pm \sqrt{(b+b_L)^2 - 4(a+a_L)(c-c_L)}}{2(a+a_L)} \\ X'_{R_{12}} = \dfrac{-(b-b_L) \pm \sqrt{(b-b_L)^2 - 4(a-a_L)(c+c_L)}}{2(a-a_L)} \end{cases}.$$

(для a<0; b<0; c>0)

$$\begin{cases} X'_{L12} = \dfrac{-(b+b_L) \pm \sqrt{(b+b_L)^2 - 4(a+a_L)(c+c_L)}}{2(a+a_L)} \\ X'_{L_{12}} = \dfrac{-(b-b_L) \pm \sqrt{(b-b_L)^2 - 4(a-a_L)(c-c_L)}}{2(a-a_L)} \end{cases}.$$

(для a<0;b<0; c<0)

Пример 2.7

$$\tilde{2}x^2-\tilde{5}x-\tilde{3}=0;\tilde{2}=\{2;0,8\}:\tilde{5}=\{5;0,7\}\cdot\tilde{3}=\{3;0,9\}$$

$$2x^2-5,7x-3,9=0$$

$$x_1=5,36;$$

$$x_1=5,36;\ \ x_2=-0,61$$

$$2,8x^2-4,3x-21=0;\ \ x_1=1,93;x_2=-0,39$$

$$\tilde{x}_1=\{2,93;5,36\};\ \ \tilde{x}=\{-0,61;-0,39\}$$

Аналогичным образом, можно найти корни нечткого уравнения в случае, когда коэффициенты его есть нечеткие числа R-типа. Кроме того, учитывая (1.28) можно определить нечеткое решение (2.36) с четкостью α-уровня.

2.2.4 Система нечетких линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными

Решение системы линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases}\tilde{a}_1x+\tilde{b}_1y=\tilde{c}_1\\ \tilde{a}_2x+\tilde{b}_2y=\tilde{c}_2\end{cases} \tag{2.39}$$

где $\tilde{a}_i=\{a;a_L;a_R\}=\{a'_{Li};a'_{Ri}\};\ \ (i=1,2)$

$$\tilde{b}_i=\{b_i;b_{Li};b_{Ri}\}=\{b'_{Li};b_{Ri}\};\tilde{c}_i=\{c_i;c_{Li};c_{Ri}\}=\{c'_{Li};c'_{Ri}\}$$

$$\tilde{X}=\frac{\Delta_{\tilde{x}}}{\Delta}=\frac{\tilde{c}_1\tilde{b}_2-\tilde{c}_2\tilde{b}_1}{\tilde{a}_1\tilde{b}_2-\tilde{a}_2\tilde{b}_1};\qquad \tilde{y}=\frac{\Delta_{\tilde{y}}}{\Delta}=\frac{\tilde{a}_1\tilde{c}_2-\tilde{a}_2\tilde{c}_1}{\tilde{a}_1\tilde{b}_2-\tilde{a}_2\tilde{b}_1} \tag{2.40}$$

Уч итывая правила сложения, вычитания, умножения и деления нечетких чисел (LR)-типа имеем:

$$\tilde{a}_1\tilde{b}_2=\begin{cases}\{a'_{L1}\,b'_{L2};a'_{R1}\,b'_{R2}\} & (для\ a_1>0;b_2>)\\ \{a'_{L1}\,b'_{R2};a'_{R1}\,b'_{L2}\} & (для\ a_1<0;b_2>0)\\ \{a'_{R1}\,b'_{L2};a'_{L1}\,b'_{R2}\} & (для\ a_1>0;b_2<0)\\ \{a'_{R1}\,b'_{R2};a'_{L1}\,b'_{L2}\} & (для\ a_1<0;b_2<0)\end{cases}$$

$$\tilde{a}_2\tilde{b}_1 = \begin{cases} \{a'_{L2}\, b'_{L1}; a'_{R2}\, b'_{R1}\} & (для\ a_2 > 0; b1 >) \\ \{a'_{L2}\, b'_{R1}; a'_{R2}\, b'_{L1}\} & (для\ a_2 < 0; b_1 > 0) \\ \{a'_{R2}\, b'_{L1}; a'_{L2}\, b'_{R1}\} & (для\ a_2 > 0; b_1 < 0) \\ \{a'_{R2}\, b'_{R1}; a'_{L2}\, b'_{L1}\} & (для\ a_2 < 0; b_1 < 0) \end{cases}$$

$$\tilde{b}_2\tilde{c}_1 = \begin{cases} \{b'_{L2}\, c'_{L1}; b'_{R2}\, c_{R1}\} & (для\ b_2 > 0;\ c_1 > 0) \\ \{c'_{R1}\, b'_{L2}; b'_{R2}\, c'_{L1}\} & (для\ b_2 < 0; c_1 > 0) \\ \{b'_{R2}\, c'_{L1}; b'_{L2}\, c'_{R1}\} & (для\ b_2 > 0; c_1 < 0) \\ \{b'_{R2}\, c'_{R1}; b'_{L2}\, c'_{L1}\} & (для\ b_2 < 0; c_2 < 0) \end{cases}$$

$$\tilde{b}_1\tilde{c}_2 = \begin{cases} \{b'_{L1}\, c'_{L2}; b'_{R1}\, c_{R2}\} & (для\ b_1 > 0;\ c_2 > 0) \\ \{b'_{L1}\, b'_{R2}; b'_{R1}\, c'_{L2}\} & (для\ b_1 < 0; c_2 > 0) \\ \{b'_{R1}\, c'_{L2}; b'_{L1}\, c'_{R2}\} & (для\ b_1 > 0; c_2 < 0) \\ \{b'_{R1}\, c'_{R2}; b'_{L1}\, c'_{L2}\} & (для\ b_1 < 0; c_2 < 0) \end{cases} \tag{2.41}$$

$$\tilde{a}_1\tilde{c}_2 = \begin{cases} \{a'_{L1}\, c'_{L2}; a'_{R1}\, c_{R2}\} & (для\ a_1 > 0;\ c_2 > 0) \\ \{a'_{L1}\, c'_{R2}; a'_{R1}\, c'_{L2}\} & (для\ a_1 < 0; c_2 > 0) \\ \{a'_{R1}\, c'_{L2}; a'_{L1}\, c'_{R2}\} & (для\ a_1 > 0; c_2 < 0) \\ \{a'_{R1}\, c'_{R2}; a'_{L1}\, c'_{L2}\} & (для\ a_1 < 0; c_2 < 0) \end{cases}$$

$$\tilde{a}_2\tilde{c}_1 = \begin{cases} \{a'_{L2}\, c'_{L1}; a'_{R2}\, c_{R1}\} & (для\ a_2 > 0;\ c_1 > 0) \\ \{a'_{R2}\, c'_{L1}; a'_{L2}\, c'_{R1}\} & (для\ a_2 > 0; c_1 < 0) \\ \{a'_{L2}\, c'_{R1}; a'_{R2}\, c'_{L1}\} & (для\ a_1 < 0; c_1 > 0) \\ \{a'_{R2}\, c'_{R1}; a'_{L2}\, c'_{L1}\} & (для\ a_1 < 0; c_2 < 0) \end{cases}$$

При этом

$$\begin{aligned} &\Delta_L = (a'_1 b'_2)_L - (a'_2 b'_1)_R; \Delta_R = (a'_1 b'_2)_R - (a'_2 b'_2)_L \\ &\Delta x'_L = (b'_2 c'_1)_L - (b'_1 c'_2)_R; \Delta_{x'R} = (b'_2 c'_1)_R - (c'_2 b'_1)_L \\ &\Delta_{y'_L} = (a'_1 c'_2)_L - (a'_2 c'_1)_R; \Delta_{y'_R} = (a_1 c_2)_R - (a_2 c_1)_L \end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\left.\begin{array}{l} \{x'_L\,;x'_R\} = \left\{\dfrac{\Delta'_{x_L}}{\Delta_R};\dfrac{\Delta_{x'R}}{\Delta_L}\right\} \\[2ex] \{y'_L\,;y'_R\} = \left\{\dfrac{\Delta'_{y_L}}{\Delta_R};\dfrac{\Delta_{y'R}}{\Delta_L}\right\} \end{array}\right\} \text{(для } \Delta > 0; \Delta_x > 0; \Delta_y > 0\text{)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \{x'_L\,;x'_R\} = \left\{\dfrac{\Delta'_{x_R}}{\Delta_R};\dfrac{\Delta_{x'L}}{\Delta_L}\right\} \\[2ex] \{y'_L\,;y'_R\} = \left\{\dfrac{\Delta'_{y_R}}{\Delta_R};\dfrac{\Delta_{y'L}}{\Delta_L}\right\} \end{array}\right\} \text{(для } \Delta < 0; \Delta_x > 0; \Delta_y > 0\text{)} \quad (2.43)$$

$$\left.\begin{array}{l} \{x'_L\,;x'_R\} = \left\{\dfrac{\Delta'_{x_L}}{\Delta_L};\dfrac{\Delta_{xR}}{\Delta_R}\right\} \\[2ex] \{y'_L\,;y'_R\} = \left\{\dfrac{\Delta'_{y_L}}{\Delta_R};\dfrac{\Delta_{y_R}}{\Delta_L}\right\} \end{array}\right\} \text{(для } \Delta > 0; \Delta_x < 0; \Delta_y > 0\text{)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \{x'_L\,;x'_R\} = \left\{\dfrac{\Delta_{x_R}}{\Delta_L};\dfrac{\Delta_{xL}}{\Delta_R}\right\} \\[2ex] \{y'_L\,;y'_R\} = \left\{\dfrac{\Delta_{y_R}}{\Delta_R};\dfrac{\Delta_{y_L}}{\Delta_L}\right\} \end{array}\right\} \text{(для } \Delta < 0; \Delta_x < 0; \Delta_y > 0\text{)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \{x'_L\,;x'_R\} = \left\{\dfrac{\Delta_{x_L}}{\Delta_R};\dfrac{\Delta_{xR}}{\Delta_L}\right\} \\[2ex] \{y'_L\,;y'_R\} = \left\{\dfrac{\Delta_{y_L}}{\Delta_L};\dfrac{\Delta_{y_R}}{\Delta_R}\right\} \end{array}\right\} \text{(для } \Delta > 0; \Delta_x > 0; \Delta_y < 0\text{)}$$

$$\left.\begin{matrix} \{x'_L\,;x'_R\} = \left\{\dfrac{\Delta'_{x_R}}{\Delta_R};\dfrac{\Delta_{xL}}{\Delta_L}\right\} \\[2ex] \{y'_L\,;y'_R\} = \left\{\dfrac{\Delta_{y_R}}{\Delta_L};\dfrac{\Delta_{y_L}}{\Delta_R}\right\} \end{matrix}\right\} \text{(для } \Delta < 0; \Delta_x > 0; \Delta_y < 0\text{)}$$

$$\left.\begin{matrix} \{x'_L\,;x'_R\} = \left\{\dfrac{\Delta_{x_L}}{\Delta_L};\dfrac{\Delta_{xR}}{\Delta_R}\right\} \\[2ex] \{y'_L\,;y'_R\} = \left\{\dfrac{\Delta_{y_L}}{\Delta_L};\dfrac{\Delta_{y_R}}{\Delta_R}\right\} \end{matrix}\right\} \text{(для } \Delta > 0; \Delta_x < 0; \Delta_y < 0\text{)}$$

$$\left.\begin{matrix} \{x'_L\,;x'_R\} = \left\{\dfrac{\Delta_{x_R}}{\Delta_L};\dfrac{\Delta_{x'L}}{\Delta_R}\right\} \\[2ex] \{y'_L\,;y'_R\} = \left\{\dfrac{\Delta_{y_R}}{\Delta_L};\dfrac{\Delta_{y_L}}{\Delta_R}\right\} \end{matrix}\right\} \text{(для } \Delta < 0; \Delta_x < 0; \Delta_y < 0\text{)}$$

Для нахождения решения системы (2.39) в виде

$$\widetilde{x} = \{x; x_L; x_R\}; \widetilde{y} = \{y; y_L; y_R\}$$

следует найти решение системы (2.39) с четкими коэффициентами, т.е.

$$X = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1};\ y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1},$$

а затем найти

$$X_L = x - x'_L\,; x_R = x'_R - x$$

Пример 2.8 $\begin{cases} \widetilde{3}x + \widetilde{2}y = \widetilde{14} \\ \widetilde{6}x - \widetilde{2}y = \widetilde{4} \end{cases}$

где

$$\widetilde{3} = \{3;0,4;0,6\}; \quad \widetilde{2} = \{2;0,3;0,5\}; \quad \widetilde{14} = \{14;0,6;0,4\}$$
$$\widetilde{4} = \{4;0,5;0,4\}; \quad \widetilde{6} = \{6;0,7;0,6\}$$

Имеем:

$$-\tilde{2} = \{-2;0,5;0,3\} = \{-2,5;-17\}$$

$$\tilde{a}_1 = \{2,6;3,6\}; \quad \tilde{b}_1 = \{1,7;2,5\}; \tilde{c}_1 = \{13,4;14,4\}$$

$$\tilde{a}_2 = \{5,3;6,6\}; \quad \tilde{b}_2 = \{-2,5;-1,7\}; \quad \tilde{c}_2 = \{3,5;4,4\}$$

$$\Delta = \{\Delta_L : \Delta_R\} = \{a'_{R_1} b'_{L_2}; a'_{L_1} b'_{R_2}\} - \{a'_{L_2} b'_{L_1}; a'_{R_2} b'_{R_1}\} =$$

$$= \{3,6 \cdot (-2,5); 2,6 \cdot (-1,7)\} - \{5,3 \cdot 1,7; 6,6; 2,5\} = \{-2,5; -13,43\}$$

$$\Delta_x = \{\Delta'_{x_L}; \Delta'_R\} =$$

$$= \{14,4 \cdot (-2,5; 13,4 \cdot (-1,7))\} - \{1,7 \cdot 3,5; 2,5 \cdot 4,4\} =$$

$$= \{-4,7; -28,73\}$$

$$\Delta_y = \{\Delta_{y'_L}; \Delta_{y'_R}\} = \{2,6 \cdot 3,5; 3,6 \cdot 4,4\} - \{5,3 \cdot 13,4; 6,6 \cdot 14,4\} =$$

$$= \{-35,94; -55,62\}$$

$$\tilde{X} = \{X'_L; X'_R\} = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\{-4,7; -28,73\}}{\{-25,5; -13,43\}} = \{1,27; 3,5\}$$

$$\tilde{Y} = \{y'_L; y'_R\} = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\{-85,94; -55,62\}}{-25,5; -13,43} = \{2,19; 6,4\}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases} => x = 2; y = 4$$

$$\tilde{x}\{2; 0,73; 1,5\}; \quad \tilde{y} = \{4; 1,81; 2,4\}$$

Графический способ решения нечеткой системы уравнений показана на рисунке 2.1

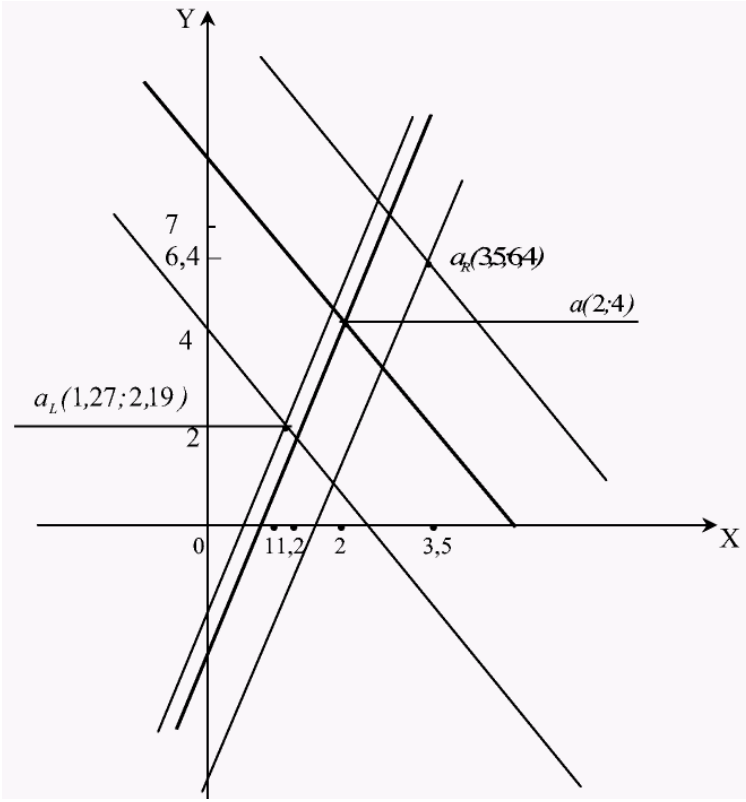


Рис. 2.1

II. Решение системы трех уравнений с тремя неизвестны миметодом Гаусса.

$$\begin{cases} \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \tilde{a}_{13}x_3 = \tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_{21}x_1 + \tilde{a}_{22}x_2 + \tilde{a}_{23}x_3 = \tilde{b}_2 \\ \tilde{a}_{31}x_1 + \tilde{a}_{32}x_2 + \tilde{a}_{33}x_3 = \tilde{b}_3 \end{cases} \qquad (2.44)$$

где $\tilde{a}_{ij} = \{a_{ij}; a_{L_{ij}}; a_{R_{ij}}\} = \{a'_{L_{ij}}; a'_{R_{ij}}\}$

$$\tilde{b}_i = \{b_i; b_{L_{ij}}; b_{R_{ij}}\} = \{b'_{L_i}; b'_{R_i}\}$$

Решение: Для определения решения системы (2.44) расширенная матрица имеет вид:

$$\tilde{B} = \{B_L; B_R\},$$

где

$$B_R = \left(\begin{array}{ccc|c} a'_{R11} & a'_{R12} & a'_{R13} & b_{R1} \\ a'_{R21} & a'_{R22} & a'_{R23} & b_{R2} \\ a'_{R31} & a'_{R32} & a'_{R33} & b_{R3} \end{array}\right); \; B_L = \left(\begin{array}{ccc|c} a'_{L11} & a'_{L12} & a_{L13} & b_{R1} \\ a'_{L21} & a'_{L22} & a_{L23} & b_{R2} \\ a'_{L31} & a'_{L32} & a_{L33} & b_{R3} \end{array}\right) \qquad (2.45)$$

Применив линейное преобразование, приводим B_L и B_R к виду

$$B'_R = \left(\begin{array}{ccc|c} a'_{R11} & a'_{R12} & a'_{R13} & b'_{R1} \\ 0 & \tilde{a}'_{R22} & \tilde{a}'_{R23} & \tilde{b}'_{R2} \\ 0 & 0 & \tilde{a}'_{R33} & \tilde{b}'_{R3} \end{array}\right); \; B_L = \left(\begin{array}{ccc|c} a'_{L11} & a'_{L12} & a'_{L13} & b'_{R1} \\ 0 & \tilde{a}'_{L22} & \tilde{a}'_{L23} & \tilde{b}'_{R2} \\ 0 & 0 & \tilde{a}'_{L33} & \tilde{b}'_{R3} \end{array}\right) \qquad (2.46)$$

Выписав систему уравнений соответствующей полученной матрицы и найдем:

$$\tilde{X}_j\{x'_{L_j}\; x'_{R_j}\} \qquad (j=1,2,3)$$

Пример 2.9

$$\begin{cases} \tilde{3}x + \tilde{2}y + \tilde{z} = \overset{\sim'}{10} \\ \tilde{2}x + \tilde{3}y + \tilde{2}z = \overset{\sim'}{14} \\ \tilde{4}x + y + \tilde{2}z = \overset{\sim'}{12} \end{cases}$$

$\tilde{2} = \{2'0,6;0,8\}$; $\tilde{3} = \{3;0,7;0,8\}$

где $\tilde{4} = \{4;0,4;0,3\}$; $\overset{\sim'}{10} = \{10;3,1;5,9\}$

$\overset{\sim'}{12} = \{12;3,7;5,9\}$ $\overset{\sim'}{14} = \{14;5,1\};9,1$

Решим систему нечетких уравнений двумя способ ами:

1) Метод Гаусса

$$B_R = \left(\begin{array}{ccc|c} 2,3 & 1,4 & 1 & 6,9 \\ 1,4 & 2,3 & 1,4 & 8,9 \\ 3,6 & 1 & 1,4 & 8,3 \end{array}\right); \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1,4 & 2,3 & 1,4 & 8,9 \\ 0 & 1,45 & 0,79 & 4,66 \\ 0 & 1,91 & 0,85 & 5,66 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1,4 & 2,3 & 1,4 & 8,9 \\ 0 & 1,45 & 0,79 & 4,66 \\ 0 & 0 & 0,14 & 0,36 \end{array}\right) \to \begin{cases} 1,4x + 2,3y + 1,4z = 8,9 \\ 1,45y + 0,79z = 4,66 \\ 0,14z = 0,36 \end{cases} \begin{cases} x_L = 0,84 \\ y_L = 1,8 \\ z_L = 2,64 \end{cases}$$

$$B_R = \left(\begin{array}{ccc|c} 3,8 & 2,8 & 1 & 15,9 \\ 2,8 & 3,8 & 2,8 & 22,9 \\ 4,3 & 1 & 2,8 & 17,8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2,8 & 3,8 & 2,8 & 22,9 \\ 0 & 1,74 & 2,06 & 11,18 \\ 0 & 3,15 & 2,98 & 11,31 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 2,8 & 3,8 & 2,8 & 22,9 \\ 2,8 & 1,74 & 2,06 & 11,18 \\ 4,3 & 0 & 1,52 & 4,93 \end{array}\right) \to \begin{cases} 2,8x + 3,8y + 2,8z = 22,9 \\ 1,74y + 2,06z = 11,18 \\ 1,52z = 4,93 \end{cases} \begin{cases} x_R = 1,43 \\ y_R = 2,58 \\ z_R = 3,24 \end{cases}$$

Следовательно

$$\tilde{x} = \{0,84;1,43\}; \tilde{y} = \{1,8;2,58\}; \tilde{z} = \{2,64;3,24\}$$

Для этой же системы уравнений с четкими коэффициентами имеем:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 2 & 14 \\ 4 & 1 & 2, & 12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 14 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & \frac{22}{3} \\ 0 & 2\frac{1}{2} & 1 & 8 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 14 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 4,3 & 0 & \frac{2}{3} & 2 \end{array}\right) \to \begin{cases} 2x + 3y + 2z = 14 \\ \frac{5}{3}y + \frac{4}{3}z = \frac{22}{3} \\ \frac{2}{3}z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Тогда в силу понятия растяжения нечеткого числа, решение нечеткой системы примет вид:

$$\tilde{x} = \{1;0,16;0,43\};\ \tilde{y} = \{2;0,2;0,58\};\ \tilde{z} = \{3;0,36;0,2\}$$

2) Метод Крамера

$$\Delta'_L = \begin{vmatrix} 2,3 & 1,4 & 1 \\ 1,4 & 2,3 & 1,4 \\ 3,6 & 1 & 1,4 \end{vmatrix} = 1,618;\ \Delta'_R = \begin{vmatrix} 3,8 & 2,8 & 1 \\ 2,8 & 3,8 & 2,8 \\ 4,3 & 1 & 2,8 \end{vmatrix} = 28,01$$

$$\Delta'_{x_L} = \begin{vmatrix} 6,9 & 1,4 & 1 \\ 8,9 & 2,3 & 1,4 \\ 8,3 & 1 & 1,4 \end{vmatrix} = 1,29;\ \Delta'_{x_R} = \begin{vmatrix} 15,9 & 2,8 & 1 \\ 22,9 & 3,8 & 2,8 \\ 17,8 & 1 & 2,8 \end{vmatrix} = 39,932$$

$$\Delta'_{y_L} = \begin{vmatrix} 2,3 & 6,9 & 1 \\ 1,4 & 8,9 & 1,4 \\ 3,6 & 8,3 & 1,4 \end{vmatrix} = 2,42;\ \Delta'_{y_R} = \begin{vmatrix} 3,8 & 15,9 & 1 \\ 2,8 & 22,9 & 2,8 \\ 4,3 & 17,8 & 2,8 \end{vmatrix} = 72,414$$

$$\Delta'_{z_L} = \begin{vmatrix} 2,3 & 1,4 & 6,9 \\ 1,4 & 2,3 & 8,9 \\ 3,6 & 1 & 8,32 \end{vmatrix} = 3,41;\ \Delta'_{z_R} = \begin{vmatrix} 3,8 & 2,8 & 15,9 \\ 2,8 & 3,8 & 22,9 \\ 4,3 & 1 & 17,8 \end{vmatrix} = 90,89$$

$$x_L = \frac{1,29}{1,68} = 0,84;\ x_R = \frac{39,932}{28,01} = 1,43;$$

$$y_L = \frac{2,42}{1,68} = 1,8;\ y_R = \frac{72,414}{28,01} = 2,58$$

$$z_L = \frac{3,41}{1,68} = 2,64;\ z_R = \frac{90,89}{28,01} = 3,24$$

$$\tilde{x} = \{0,84;1,43\} = \{1;0,16;0,43\};\ \tilde{y} = \{1,8;2,58\} = \{2,02;0,58\}$$

$$\tilde{z} = \{2,64;3,24\} = \{3;0,36;0,24\}$$

Следует отметить, что иллюстрируемые выше методы решения систем трех нечетких линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными аналогичным образом применимы и к системе n-го числа нечетких линейных алгебраических уравнений с "n"-неизвестными, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ji} x_i = \widetilde{c}_j; \qquad j = \overrightarrow{1,n} \tag{2.47}$$

III. Условие существования решения системы нечетких линейных алгебраических уравнений.

Из правила Крамера следует, что для того, чтобы система линейных алгебраических уравнений с четкими коэффициентами имела единственное решение необходимо и достаточно, чтобы главный определитель этой системы (определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных) был отличен от нуля. Поэтому для системы линейных алгебраических уравнений с нечеткими коэффициентами условием существования единственного решения должно быть выполнение условия отличия от нуля главного определителя $\widetilde{L}(\alpha)$, т.е.

$$\widetilde{\Delta}(\alpha) = \{\Delta'_L(\alpha); \Delta'_R(\alpha)\} = \{\Delta; \Delta_L(\alpha); \Delta_R(\alpha)\} = 0 \tag{2.48}$$

для любого $\alpha \in (0;1]$

Докажем, что условие (2.48) может быть выполнено тогда, когда $\Delta, \Delta'_L(\alpha)$ и $\Delta'_R(\alpha)$ будут одинакового знака для любого $\alpha \in [0;1]$

Пусть это не так, т.е. пусть

$$\Delta'_L(\alpha_1) < 0, \text{ а } \Delta = \Delta'_L(1) > 0, \text{ где } \alpha_1 \in (0;1) \tag{2.49}$$

В силу понятия нечеткого числа (LR)-типа множество з начений $\Delta'_L(\alpha)$ образует выпуклое множество значений таких, что $\Delta'_L(\alpha_1) < \Delta'_L(\alpha_2)$ при $\alpha_1 < \alpha_2$ для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in (0;1)$. С другой стороны, так как каждому значению $\alpha \in (0;1]$ соответствует единственное значение $\Delta'_L(\alpha)$, то $\Delta'_L(\alpha)$ является функцией от α причем непрерывной $\alpha \in (0;1]$. Поэтому, в силу теоремы о непрерывных функциях, если $\Delta'_L(\alpha)$ непрерывна на $(\alpha_1;1] \subset (0;1]$ и $\Delta'_L(\alpha_1) < 0;\ \Delta_L(1) = \Delta > 0$, то существует хотя бы одно значение $\alpha_2 \in (0;1]$ такое, что $\Delta'_L(\alpha_2) = 0$. Это противоречит выполнению условия (2.48). Аналогичным образом можно провести доказательство теоремы и для случая, когда $\Delta'_R(\alpha)$ для любого $\alpha \in (0;1]$ имеет противоположный знак с $\Delta'_R(1) = \Delta$.

Из результата доказанной теоремы следует следующее условие существования единственного решения системы линейных нечетких уравнений. Для того, чтобы система нечетких "n" линейных алгебраических уравнений имела единственное нечеткое решение необходимо и достаточно, чтобы главный определительэтой системы как с четкими коэффициентами, так и с нечеткими коэффициентами были отличны от нуля и для любой степени нечеткости $\alpha \in (0;1]$, $\Delta'_L(\alpha)$ и $\Delta'_R(\alpha)$ имели одинаковый знак с Δ, где $\Delta'_L(\alpha)$ и $\Delta'_R(\alpha)$ - соответственно главные определители заданной системы с нечеткими коэффициентами со значениями из левого и правого растяжения нечетких коэффициентов, а Δ -главный определитель данной системы с четкими коэффициентами.

Следует отметить, что если при вычислении главных определителей Δ, $\Delta'_L(\alpha)$ и $\Delta'_R(\alpha)$ для любого $\alpha \in (0;1]$ они окажутся отрицательными, то учитывая свойство определителей (с помощью одной транспозиции, что соответствует замене местами двух соседних уравнений системы) их можно обратить в положительные величины с теми же абсолютными величинами. Следует отметить, что при этом и вспомогательные определители меняют свои знаки на противоположные, что не влияет на значение нечетких решений данной нечеткой системы уравнений. Кроме того, если $\tilde{X}_i = \{X'_{L_i}; X'_{R_i}\} (i = 1; n)$ есть нечеткое решение системы нечетких линейных алгебраических уравнений (2.47), то для любого $(i = \overrightarrow{1, n})$ должно выплняться услови

$$X'_{L_i} < X_i < X'_{R_i} \quad (i = \overrightarrow{1, n}) \tag{2.50}$$

где $X_i (i = \overrightarrow{1, n})$-четкое решение з аданной системы уравнений.

Поэтому, если при решении системы уравнений (2.47) методом Крамера будут выполнены условия:

$$\Delta'_L < \Delta < \Delta'_R \, ; \Delta'_{X_{L_i}} < \Delta_{x_i} < \Delta_{R_i} \tag{2.51}$$

и при определении $X_i (i = \overrightarrow{1, n})$ в виде

$$\tilde{X}_i = \{X'_{L_i}; \Delta'_{X_{R_i}}; (i = \overrightarrow{1, n})\} = \left\{ \frac{\Delta_{X_{L_i}}}{\Delta'_{L_i}}; \frac{\Delta'_{X_{R_i}}}{\Delta'_{L_i}} \right\} \tag{2.52}$$

окажется, что хотя бы для одного значения $i \in (1; n)$ $X'_{L_i} > X'_{R_i}$, то $\tilde{X}_i$ следует искать в виде

$$\widetilde{X}_i = \{X'_{L_i}; \Delta'_{X_{R_i}}\} = \left\{\frac{\Delta_{X_{L_i}}}{\Delta'_{R_i}}; \frac{\Delta'_{R_i}}{\Delta_{L_i}}\right\} \qquad (2.53)$$

Если же при вычислении $\widetilde{X}_i$ по формулам (2.52) условия (2.50) выполняется, нет смысла применять формулу (2.53), така как при этом опять-таки будет выполнено условие (2.50) с той лишь разницей, что найденные нечеткие решения будут иметь различные носители, пересечение которых не пусто и представляет собой интервал, содержащий четкое решение з аданной системы уравнений.

Проиллюстрируем этот факт на данных примера 2.9

Така как

$$\Delta = 10; \quad \Delta'_L = 1{,}618; \quad \Delta'_R = 28{,}01;$$
$$\Delta_x = 10; \quad \Delta_{X_L} = 1{,}29; \quad \Delta'_{X_R} = 39{,}932;$$
$$\Delta_y = 20; \quad \Delta'_{y_L} = 2{,}42; \quad \Delta'_{yR} = 72{,}414$$
$$\Delta_z = 30; \quad \Delta'_{L_i} = 3{,}41; \quad \Delta'_{Z_R} = 90{,}89$$

На основании (2.52)

$$\widetilde{X}_1 = \{0{,}84; 1{,}43\}; \ \widetilde{y}_1 = \{1{,}8; 2{,}8\}; \ \widetilde{z}_1 = \{2{,}64; 3{,}24\}$$

На основании (2.53)

$$\widetilde{X}_2 = \left\{\frac{1{,}29}{28{,}01}; \frac{39{,}932}{1{,}618}\right\} = \{0{,}046; 24{,}68\}$$
$$\widetilde{Y}_2 = \left\{\frac{2{,}42}{28{,}01}; \frac{72{,}414}{1{,}618}\right\} = \{0{,}086; 44{,}755\}$$
$$\widetilde{Z}_2 = \left\{\frac{3{,}41}{28{,}01}; \frac{90{,}89}{1{,}618}\right\} = \{0{,}1218; 56{,}18\}$$

Отсюда следует, что $\widetilde{X}_1 \subset \widetilde{X}_2; \widetilde{y}_1 \subset \widetilde{y}_2$ и $\widetilde{z}_1 \subset \widetilde{z}_2$, т.е. носитель нечеткого решения $(\widetilde{x}_1; y_1; \widetilde{z}_1)$ входит в носитель решения $(\widetilde{x}_2; \widetilde{y}_2; z_2)$. Наряду с этим следует отметить, что с помощью (2.52) можно найти нечеткие решения линейных алгебраических уравнений с нечеткими коэффициентами L-типа, R-типа и (LR)-типа.

2.3. Нечеткая геометрия

Нечёткая геометрия, так же как и чёткая геометрия - это наука о свойствах геометрических фигур. Разница лишь в том, что здесь объектами изучения являются нечёткие геометрические фигуры.

2.3.1. Нечёткие точки

В геометрии (четкая) точка представляется как не имеющая ни длину, ни ширину, ни толщину. Как элемент множества, точка наделена некоторой структурой. Природа точки может быть самой разнообразной. Так под точкой n-мерного евклидова пространства понимается упорядоченное множество n-чисел.

Следуя этому классическому понятию четкой точки, введем следующее определение.

*Определение 3.*1.Упорядоченное множество n-чисел, хотя бы одно из которых есть нечеткое число, будем называть нечеткой точкой n-мерного евклидова пространства и обозначим:

$$\widetilde{N} = \left(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, ..., \widetilde{x}_n\right), \ \ \widetilde{N} \in E_n \qquad (3.1)$$

где E_n - n-мерное евклидово пространство, $\widetilde{x}_i$ - нечеткие числа (координаты точки $\widetilde{N}$), $(i = \overline{1, n})$.

Отметим, что нечеткие числа $\widetilde{x}_i$ могут иметь раз личные степени четкости. И если $\mu_{x_i} = \alpha_i, \, x_i \in X_i \quad \left(i = \overline{1, n}\right)$,а $\widetilde{N}$- нечеткая точка α-уровня, то

$$\alpha = min\{\alpha_i\} \qquad (3.2)$$

Учитывая определение носителя нечеткого числа и определения нечеткой точки в n-мерном пространстве, введем следующие понятия носителя нечеткой точки.

Определение 3.2. Носителем нечеткой точки $\widetilde{N}$ на прямой (0;x) б удем называть выпуклое подмножество (интервал) этой прямой, содержащую четкую точку и являющейся растяжение ее носителя.

На основании определения 3.1, можно ввести следующее.

Определение 3.3. Нечеткой точкой на прямой (0;x) будем называть точку $\widetilde{N}$, координата которой есть нечеткое число.

Из определений нечеткого числа и нечеткой точки следует, что на прямой (0;x) для одной функции принадлежности существуют две нечеткие точки четкости $\alpha \in (0;1)$ уровня $N_L(\alpha)$ и $N_R(\alpha)$. На рисунке 3.1 M - четкая точка, M_L и M_R нечеткие точки некоторого уровня слева и справа соответственно, m_L и m_R— соответственно, левое и правое растя жения носителя нечеткой точки,

$$S_M = \left(M - m_L; M + m_L\right)$$

носитель нечетких точек на оси $(0;x)$.

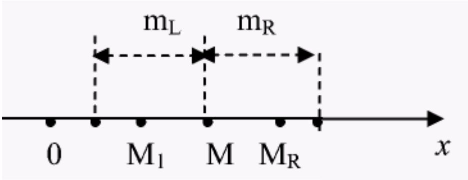


Рис.3.1

Определение 3.4. Носителем нечеткой точки на плоскости будем называть выпуклую односвязную область, этой плоскости, содержащую носитель четкой точки, расширением которой является эта область. Если $\widetilde{M} = \left(\widetilde{x}, \widetilde{y}\right)$, то

$$S_M = \left(S_x \times S_y\right) \tag{3.3}$$

где S_x и S_y - носители соответственно нечетких чисел $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$.

Знак умножения (×) означает декартово произведение.

Отметим, что каждое из нечетких чисел (как координата нечеткой точки) вообще говоря, может иметь различные растяжения носителей и функции принадлежности. И при этом еще каждая координата нечеткой точки (как нечеткое ч исло) может иметь свой уровень четкости.

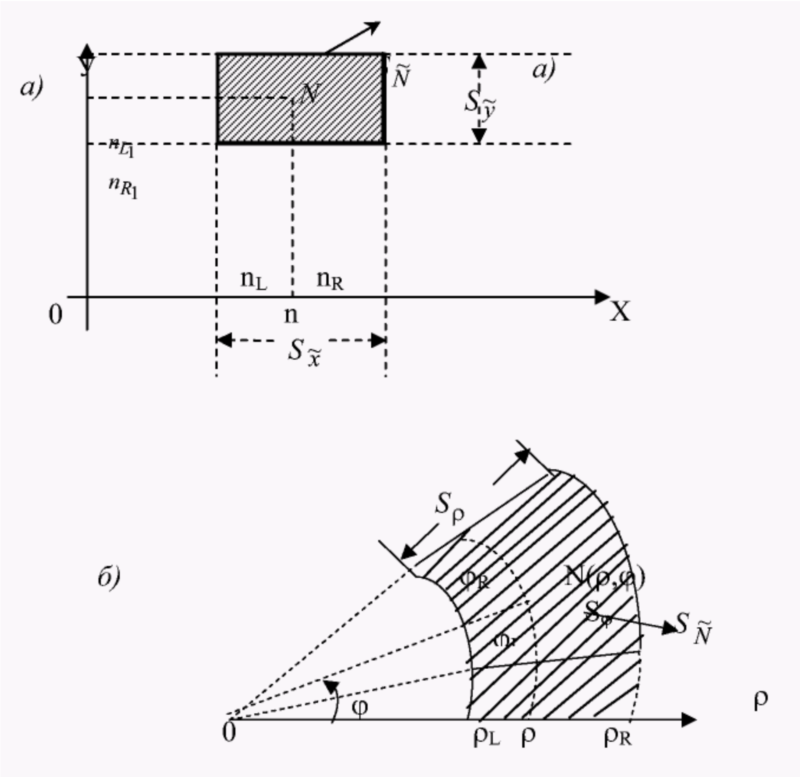


Рис. 3.2

На рис. 3.2а - заштрихованная область естьоситель нечеткой точки $\tilde{N}$, $S_{\tilde{x}}$ и $S_{\tilde{y}}$ - носители координат нечеткой точки в прямоугольной декардовой системе координат; n_L, n_R - левое и правое растяжения абсциссы, n_{L_1}, n_{R_1}- левое и правое растяжения ординаты, нечеткой точки $\tilde{N}$, $N(n; n_1)$ - четкая точка. На рис. 3.2,б - заштрихованная область есть носитель нечеткой точки $\tilde{N}$ в полярной системе координат; $N(\rho, \varphi)$- четкая точка; S_ρ и S_φ - носители координат нечеткой точки в полярной системе координат; φ_L, φ_R - левое и правое угловое растяжения, ρ_L, ρ_R - левое и правое растяжения по радиусу.

Пример 3.1. Найти координаты нечетких точек $\tilde{A}_1(3_L; 5_R)$ и

$\widetilde{A}_2(3_R;5_L)$ четкости α=0,9 с функциями принадлежности $\mu_x = \frac{1}{1+|x|^3}; \mu_y = \frac{1}{1+|y|^4}$, если растяжение по x-$\sigma_x=2;$ по y-$\sigma_x=3.$

Исходя из

$$\alpha = \mu_{\widetilde{A}}(x) = \left\{ \frac{1}{1+\left|\frac{a-x_L}{\sigma}\right|^k} \frac{1}{1+\left|\frac{x_R-a}{\sigma}\right|^k} \right\}$$

где σ - растяжение носителя нечеткого числа $\widetilde{A}$, *a* - четкое значение числа A, имеем:

1) для точки $\widetilde{A}$

$$\left.\begin{aligned} 0,9 &= \frac{1}{1+\left(\frac{3-3_L}{2}\right)^3} => 3_L(0,9) = 3 - 2\sqrt[3]{\frac{1}{9}} = 2,04 \\ 0,9 &= \frac{1}{1\cdot\left(\frac{5_R-5}{3}\right)^4} => 5_R(0,9) = 5 + 3\sqrt[4]{\frac{1}{9}} = 6,73 \end{aligned}\right\} \widetilde{A}_1(2,04;6,73)$$

2) для точки $\widetilde{A}_2$

$$\left.\begin{aligned} 0,9 &= \frac{1}{1+\left(\frac{3_R-3}{2}\right)^3} => 3_R(0,9) = 3 + 2\sqrt[3]{\frac{1}{9}} = 3,96 \\ 0,9 &= \frac{1}{1\cdot\left(\frac{5-5_L}{3}\right)^4} => 5_L(0,9) = 5 + 3\sqrt[4]{\frac{1}{9}} = 3,27 \end{aligned}\right\} \widetilde{A}_2(3,96;3,27)$$

Результаты приведены на рис.3.3

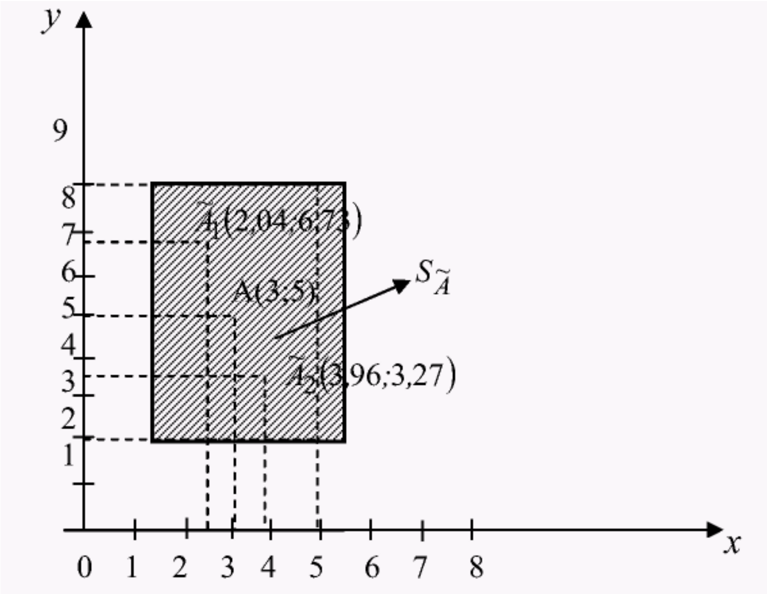


Рис.3.3

Определение 3.5. Носителем нечеткой точки в трехмерном пространстве будем называть правильную область трехмерного пространства, содержащую носитель четкой точки, расширением которой является эта область. Если $\tilde{M}(\tilde{x}; y; \tilde{z})$ - есть нечеткая точка, то

$$S_{\tilde{M}} = (S_x \times S_y \times S_z) \tag{3.4}$$

т.е. носитель нечеткой точки есть декартово произведение носителей ее координат.

В прямоугольной декартовой системе координат в трехмерном пространстве носителем нечеткой точки является прямая четырехмерная призма; в сферических координатах сектор полого шара; в цилиндрических координатах - сектор полого цилиндра.

Отметим, что если одна из координат нечеткой точки в трехмерном пространстве есть четкое число, то ее носитель обращается в плоскую область, принадлежащую плоскости, перпендикулярной той координатной оси, которая соответствует четкой координате нечеткой точки (в которой эта плоскость пересекается с координатной осью).

2.3.2. Нечёткие линии и нечёткие поверхности

Назвав линией след, сохраняемый за собой перемещаемым телом, становится ясно, что, как и след, она может быть чёткой и нечёткой.
В классической математике порядки различных линий и поверхностей определяются порядком уравнений, которыми они описываются.
Одним из основных понятий геометрии, косвенное определение которым даются через аксиомы, есть прямая и плоскость, которые также являются соответственно линией и поверхностью первого порядка.

I. Нечёткая прямая на плоскости

В классической математике вводится следующее понятие прямой на плоскости:
Определение 3.6. Прямой евклидовой плоскости будем называть геометриеское место точек плоскости, декартовые или афинные координаты которых удовлетворяют уравнению

$$ax+by+c=0 \qquad (3.5)$$

где a, b, c ч еткие ч исла и не равны нулю одновременно.
Сравнивая понятия четкой и нечеткой точек, примем следующее определение нечеткой прямой на плоскости.
Определение 3.7. Нечеткой прямой евклидовой плоскости называется геометрическое место нечетких точек, декартовые или афинные координаты которых удовлетворяют нечеткому уравнению:

$$\widetilde{a}x+\widetilde{b}y+\widetilde{c}=0 \qquad (3.6)$$

где $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ не равны нулю одновременно.
Так же, как и для четкой прямой, для нечеткой прямой справедливы свойства:
1. Какова бы ни была нечеткая прямая, существуют нечёткие точки, принадлежащие ей.
2. Через любые две нечёткие точки можно провести нечёткую прямую, и только одну.
3. Из трёх нечётких точек нечёткой прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

Учитывая определение носителя нечёткой точки и свойства 2, можно принять следующее определение носителя нечёткой прямой.
Определение 3.8. Носителем нечёткой прямой на плоскости будем называть выпуклую односвязную область этой плоскости, содержащую носитель чёткой прямой (саму чёткую прямую) и носитель всех

нечётких точек этой прямой. т.е., если нечёткая прямая $\widetilde{\ell}$ на плоскости *(XOY)* описывается уравнением (3.6), то

$$\sup por\ \widetilde{l} = S_{\widetilde{l}} = \left\{\left(S_x \times S_y\right); (x; y) / \widetilde{a}x + \widetilde{b}y + \widetilde{c} = 0\right\} \tag{3.7}$$

Следует отметить, что вид носителя нечёткой прямой зависит от вида нечёткого уравнения (3.6), т.е.

1) если $\widetilde{\ell}:\quad ax + by + \widetilde{c} = 0,$ (3.8)

то её носитель представляет собой полосу плоскости *(XOY)*, отсекающую на оси (*OY)* отрезок, равный носителю точки $\widetilde{M}\left(0; -\dfrac{\widetilde{c}}{b}\right)$

с углом наклона $\angle\varphi = arctg\left(-\dfrac{a}{b}\right)$ (рис. 3.4.а)

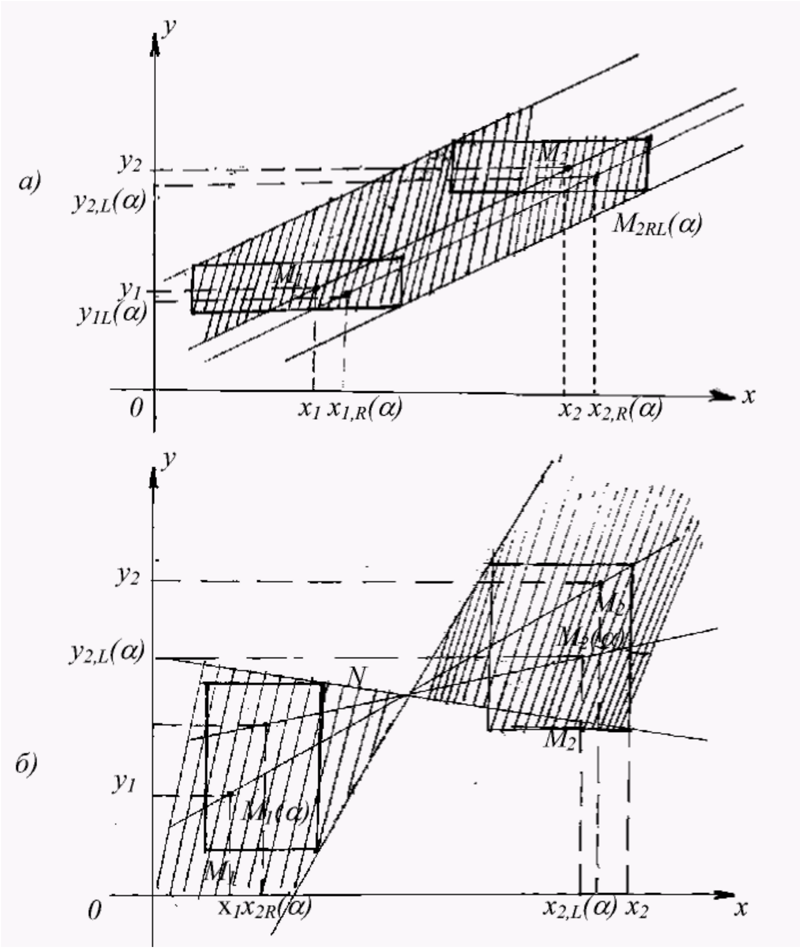


Рис. 3.4

2) если $\tilde{\ell}: \quad \tilde{a}x + \tilde{b}y + \tilde{c} = 0$, либо только один из коэффициентов *a* или *b* есть нечёткие числа, то носитель этой нечёткой прямой есть плоская область, принадлежащая*(XOY),* состоящая из двух секторов, образованных пересечением нечётких прямых $l_L(\alpha = 0)$ и $l_R(\alpha = 0)$.

Из определения нечёткой прямой свойства 2 следует следующее определение.

Определение 3.9. Нечёткой прямой α-уровня *L(R)*-типа на евклидовой плоскости называется прямая, проходящая через любые две нечёткие точки *L(R)*-типа чёткости α-уровня, аффинные или декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению (3.6).

Определение 3.10. Нечётким отрезком чёткой (нечёткой) прямой называется отрезок этой прямой, заключённый между двумя точками этой прямой, хотя бы одна из которых есть нечёткая точка.

Пример 3.2. Построить носитель нечёткой прямой

$$\tilde{3}x + 4\tilde{y} = \tilde{10},$$

если $\tilde{10} = \{10; 0{,}6; 0{,}8\} : \tilde{3} = \{3; 0{,}6; 0{,}8\}; \tilde{4} = \{4; 0{,}6; 0{,}8\}$

Имеем: $l: 3x+4y=10$

$$\begin{cases} \tilde{l}_R(0) : 3{,}8x + 4{,}8y = 10{,}8 \\ \tilde{l}_L(0) = 2{,}4x + 3{,}4y = 9{,}4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 7 \end{cases} \Rightarrow N$$

Таким образом, *N*(-6; *7)* есть точка пересечения прямых $l(1);\ l_L(0)$ и $l_R(0)$.

Для построения носителя заданной нечёткой прямой достаточно найти любые вторые точки этих прямых. Имеем:

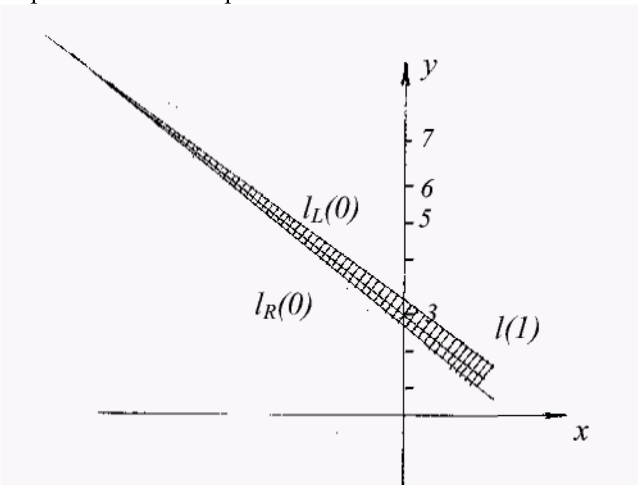


Рис.3.5

Пример 3.3. Построить носитель нечёткой прямой $2x - 4y = \tilde{9}$, где $\tilde{9} = \{9; 1{,}5; 2\}$

Имеем:

$$y = \frac{1}{2}x - 2,\tilde{2}5$$

$$l : y = \frac{1}{2}x - 2,\tilde{2}5$$

$$l_R(0) : y = \frac{1}{2}x - 1,875$$

$$l_l(0) : y = \frac{1}{2}x - 2,75$$

Носитель заданной нечёткой прямой есть полоса с углом наклона в $\pi/6$ и отсекающая на оси *(OY)* отрезок длиной 0,875

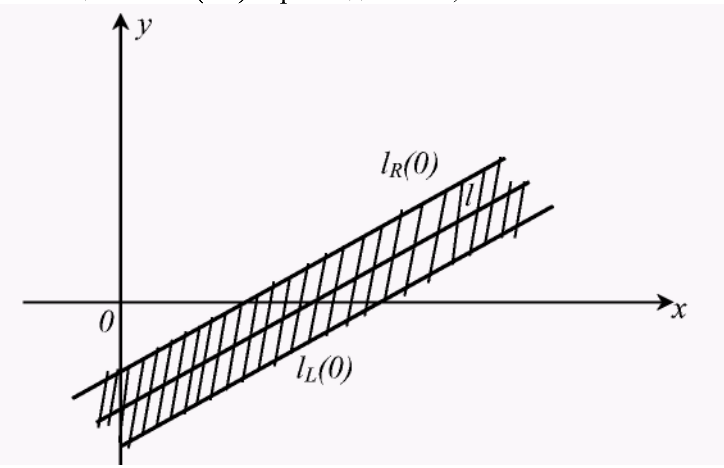


Рис.3.6

II. Нечёткие плоскости

Из курса аналитической геометрии известно, что плоскость (также, как и прямая линия) описывается линейным уравнением. В частности, общим уравнением плоскости в трёхмерном пространстве является уравнение вида

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (3.9)$$

где *A, B* и *C* одновременно не равны нулю. Аналогично приведённому определению нечёткой прямой на плоскости введём следующее понятие нечёткой плоскости.

Определение 3.11. Геометрическое место точек трёхмерного пространства, координаты которых удовлетворяют нечёткому линейному алгебраическому уравнению

$$\widetilde{A}x + \widetilde{B}y + \widetilde{C}z + \widetilde{D} = 0 \tag{3.10}$$

(где $\widetilde{A}, \widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ одновременно не равны нулю) будем называть нечёткой плоскостью.

Так же как и для нечётких прямых на плоскости можно рассмотреть различные частные случаи нечётких плоскостей в пространстве и построить их носители.

III. Нечёткие прямые в трёхмерном пространстве

Так же как и для случая нечётких прямых в пространстве, нечёткие прямые в трёхмерном пространстве могут быть определены:

а) как место пересечения двух плоскостей в пространстве (хотя бы одна из которых есть нечёткая плоскость);

б) проходящая через точку (чёткую либо нечёткую) в заданном направлении (которое определяется направляющим вектором чётким либо нечётким). Причём и точка, через которую проходит нечёткая прямая, и направляющий вектор не являются одновременно чёткими; с) проходящая через две точки, хотя бы одна из которых есть нечёткая точка. При этом уравнения этих нечётких прямых имеют вид:

$$a) \quad \begin{cases} \widetilde{A}_1 x + \widetilde{B}_1 y + \widetilde{C}_1 z + \widetilde{D}_1 = 0 \\ \widetilde{A}_2 x + \widetilde{B}_2 y + \widetilde{C}_2 z + \widetilde{D}_2 = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

$$b) \quad \frac{x - \widetilde{a}}{\widetilde{m}} = \frac{y - \widetilde{b}}{\widetilde{n}} = \frac{z - \widetilde{c}}{\widetilde{p}} \tag{3.12}$$

где $\widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c}, \widetilde{m}, \widetilde{n}$ и $\widetilde{p}$ одновременно не являются чёткими числами.

$$c) \quad \frac{x - \widetilde{x}_1}{\widetilde{x}_2 - \widetilde{x}_1} = \frac{y - \widetilde{y}_1}{\widetilde{y}_2 - \widetilde{y}_1} = \frac{z - \widetilde{z}_1}{\widetilde{z}_2 - \widetilde{z}_1} \tag{3.13}$$

где $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3$, $\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2$ и $\widetilde{y}_3$ одновременно не являются чёткими числами.

Учитывая понятие носителя нечёткой точки в трёхмерной декартовой, сферической и цилиндрической систем координат, легко показать (на конкретном примере), что:

- если все коэффициенты уравнений, описывающих нечёткую прямую в трёхмерном пространстве, есть нечёткие числа, то носитель нечёткой прямой:

а) в декартовой системе координат представляет собой неограниченную четырёхугольную призму;

б) в сферической системе координат - неограниченное круговое цилиндрическое тело, одно из сечений которого имеет вид области, показанной на рисунке (3.2, б .)

IV. Нечёткие линии второго порядка

Как из вестно к линиям второго порядка на плоскости относятся линии, описываемые уравнением:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (3.14)$$

где *A, B* и *C* одновременно не равны нулю. В зависимости от значений *A, B* и *C* уравнение (3.14) описывает одну из плоских линий: гиперболу, параболу, эллипс, либо пару параллельных прямых.

Определение 3.12. Нечёткой линией второго порядка на плоскости *(XOY)* будем называть геометрическое место точек этой плоскости, аффинные или декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению (3.14), хотя бы один из коэффициентов, либо свободный член которого есть нечёткие числа.

1. Нечёткий эллипс описывается уравнением вида:

$$\frac{x^2}{\tilde{a}^2}+\frac{y^2}{\tilde{b}^2}=1 \qquad (3.15)$$

Носителем нечёткого эллипса является кольцо эллиптической формы, длины большой и малой полуосей которой равны

$$\tilde{a}_L(0), \tilde{b}_L(0) \text{ и } \tilde{a}_R(0), \tilde{b}_R(0).$$

Пример 3.4. Построить носитель нечёткого эллипса, описываемого уравнением:

$$\frac{x^2}{\tilde{2S}}+\frac{y^2}{\tilde{9}}=1, \text{ если } \tilde{S}=\{5;1,5;1\} \text{ и } \tilde{3}=\{3,1;0,8\}$$

Имеем: а) чёткая линия описывается уравнением:

$$\frac{x^2}{2S}+\frac{y^2}{9}=1$$

б) в качестве растяжения R-типа берётся внешняя линия эллиптического кольца

$$\frac{x^2}{42{,}25}+\frac{y^2}{16}=1$$

в) в качестве растяжения L-типа берётся внутренняя линия эллиптического кольца

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4{,}84}=1$$

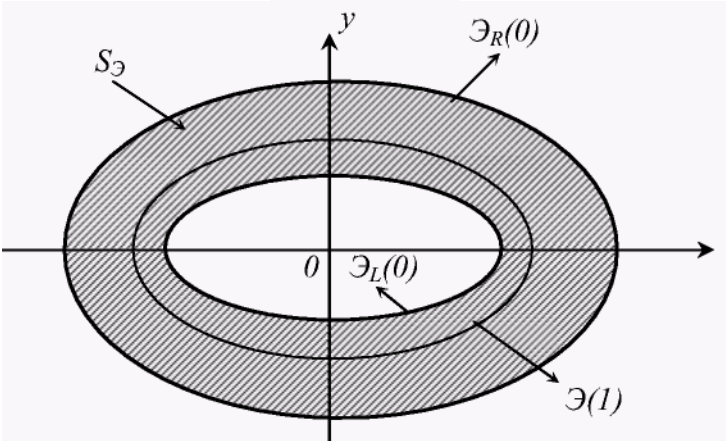


Рис. 3.7

Где *Э(1)*- линия чёткого эллипса;

ЭL(0)- граница внутреннего сжатия;

ЭR(0)- граница внешнего растяжения линии эллипса;

$S_э$-носитель нечёткого эллипса.

Следует отметить, что условия нечёткости могут быть таковы, что в (3.15) лишь одно из ч исел «а» либо «*b*» будут нечётким числом.

Пример 3.5. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{\widetilde{9}}=1$, где $\widetilde{3}=\{3;1;1{,}5\}$

Имеем: 1) чёткая линия: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{\widetilde{9}}=1$

2) растяжение R-типа берётся внешняя линия эллиптического сегмента, т.е.

$$Э_R(0):\ \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20{,}25}=1$$

3) в качестве растяжения L-типа берется внутренняя граница эллиптич еского сегмента:

$$Э_L(0):\ \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$$

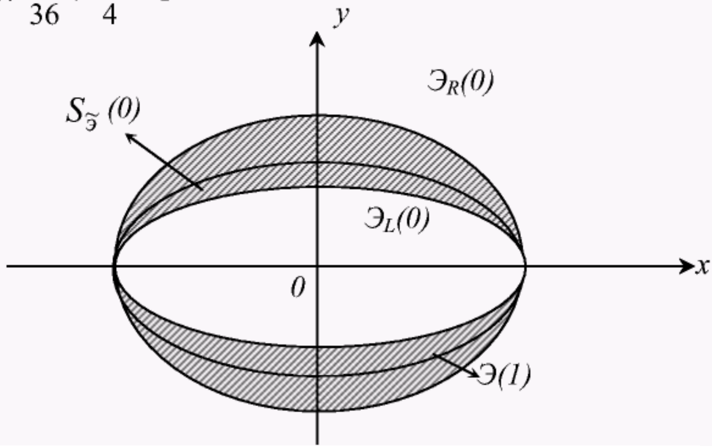


Рис.3.8

Нечеткая гипербола описывается уравнением:

$$\frac{x^2}{\tilde{9}}+\frac{y^2}{\tilde{4}}=1 \qquad (3.16)$$

Носителем нечеткой гиперболы являются гиперболические сегменты, внутри которых содержится нечеткая гипербола четкости любого α-уровня L и R - типа.

Пример 3.6. Построить носитель нечеткой параболы, описываемой уравнением:

$$\frac{x^2}{\tilde{9}}+\frac{y^2}{\tilde{4}}=1,\ \text{где}\ \tilde{3}=\{3;0{,}8;1\};\ \tilde{2}=\{2;0{,}6;0{,}8\}$$

Имеем: 1) четкая линия: $\frac{x^2}{\tilde{9}}+\frac{y^2}{\tilde{4}}=1\cdot$

2) нечеткое растяжение R – типа

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{7{,}84}=1$$

3) нечеткое растяжение L - типа

$$\frac{x^2}{4{,}84} - \frac{y^2}{1{,}96} = 1$$

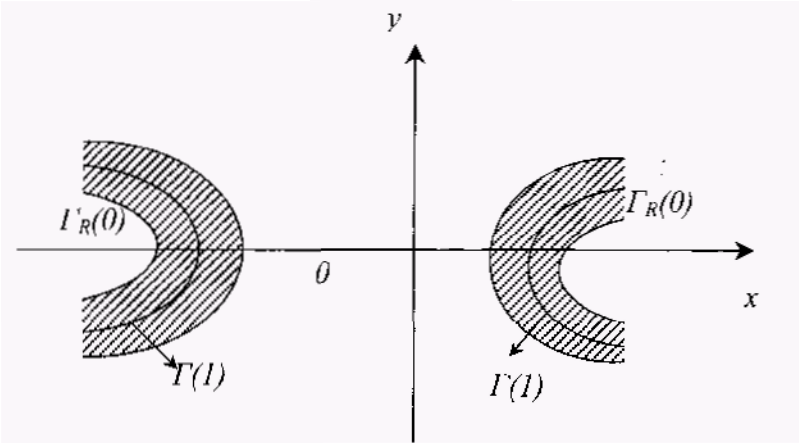


Рис.3.9

$$y^2 = 2\tilde{p}x \qquad (3.17)$$

либо

$$x^2 = 2\tilde{p}y \qquad (3.18)$$

В обоих случаях носителем нечеткой параболы являются плоские параболические сегменты, ветви которых симметричны относительно (OX) и (OY) соответственно.

Пример 3.7. Построить носитель нечеткой параболы, описываемой уравнением

$$y^2 = \tilde{4}x \text{, где } \tilde{2} = \{2;9{,}6;1\}$$

Имеем: 1) четкая парабола $\Pi(1): y^2 = 4x$

2) $\Pi_L(0): y^2 = 2{,}8x$ - левое растяжение

3) $\Pi_R(0): y^2 = 6x^2$ - правое растяжение

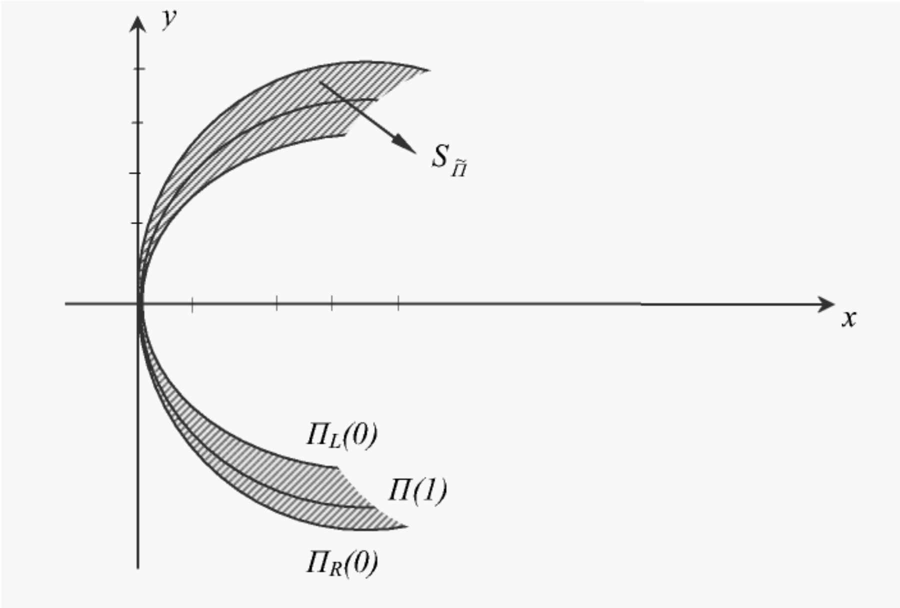


Рис.3.10

Следует отметить, что в трехмерном евклидовом пространстве:

а) нечеткая прямая определяются как место пересечения двух плоскостей, хотя бы одна из которых есть нечеткая плоскость, а носитель - как геометрическое произведение носителей этих плоскостей;

б) нечеткая линия второго порядка (эллипс, парабола и гипербола) определяются как место пересечения поверхностей (хотя бы одна из которых есть поверхность второго порядка), хотя бы одна из которых есть нечеткая поверхность, а носитель - как геометрическое произведение носителей этих поверхностей.

2.3.3. Нечеткие углы

Определение 3.13. Нечеткой полупрямой или нечетким лучом называется часть нечеткой прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих по одну сторону от данной ее четкой или нечеткой точки. Эта точка называется начальной точкой нечеткой полупрямой.

Определение 3.14. Геометрическая фигура, образованная двумя лучами, исходящими из одной четкой, либо нечеткой точки, хотя бы одна из которых является нечеткой, называется нечетким углом.

Определение 3.15. Нечетким углом α-уровня называется нечеткий угол, стороны которого являются лучами α-уровня.

Справедливо **утверждение 3.1**. Если нечеткие полупрямые имеют одинаковые функции принадлежности (а вместе с ними растяжения их носителей), то нечеткие углы любого α-уровня, образованных этими нечеткими полупрямыми равны между собой и равны четкому углу, сторонами которого являются их четкие полупрямые. В противном случае нечеткие углы различных уровней четкости, сторонами которых являются эти нечеткие лучи, не равны друг другу.

Доказательство. Пусть нечёткие полупрямые, образующие некоторый нечёткий угол $\widetilde{\varphi}$, заданы своими нечёткими уравнениями:

$$\widetilde{l}_1 : y = \widetilde{k}_1 x + \widetilde{b}_1 \quad \text{и} \quad \widetilde{l}_2 : y = \widetilde{k}_2 x + \widetilde{b}_2, \tag{3.19}$$

а соответствующие им чёткие полупрямые, образующие чёткий угол φ - заданы уравнениями:

$$\widetilde{l}_1 : y = k_1 x + b_1 \ \text{и} \ l_2 : y = k_2 x + b_2 \tag{3.20}$$

Обозначим через $\varphi_L(\alpha)$ - нечёткий угол, образованный нечёткими полупрямыми L-типа α-уровня, т.е. $l_{1,L}(\alpha)$ и $l_{2,L}(\alpha)$, а их угловые коэффициенты через $K_1(\alpha)$ и $K_2(\alpha)$. $\widetilde{l}_1$ и $\widetilde{l}_2$ имеют одинаковые растяжения $\left(S_{\widetilde{l}_1} = S_{\widetilde{l}_2}\right)$, то из рис.3.4 *б* следует, что

$$\left(l_1 \hat{l}_{1L}(\alpha)\right) = \left(l_1 \hat{l}_{1L}(\alpha)\right) = L\psi \tag{3.21}$$

Обозначим $tg\psi = K$. Тогда $L\varphi_{1,L}(\alpha) = L\varphi_1 - L\psi$, а $\angle\varphi_{2,L}(\alpha) = \angle\varphi_2 - \angle\psi_1$. Поэтому:

$$K_{l_{1,L}}(\alpha) = \frac{K_1 - K}{1 + K_1 K}; \ K_{l_{2,L}}(\alpha) = \frac{K_2 - K}{1 + K_2 K}$$

Докажем, что при этом $\angle\varphi_2(\alpha) = \angle\varphi$. Действительно:

$$tg\varphi_L(\alpha)=\frac{K_{2,L}(\alpha)-K_{1,L}}{1+K_{1,L}(\alpha)K_{2,L}(\alpha)}=\frac{\frac{K_2-K}{1+K_2K}-\frac{K_1-K}{1+K_1K}}{1+\frac{K_2-K}{1+K_2K}\cdot\frac{K_1-K}{1+K_1K}}=$$

$$=\frac{(K_2-K)(1+K_1K)-(K_1-K)(1+K_2K)}{(1+K_1K)(1+K_2K)+(K_2-K)(K_1-K)}= \qquad (3.22)$$

$$=\frac{(K_2-K_1)+(K_2-K_1)K^2}{\left(1+K_1K_2K^2+K^2+K_1K_2\right)}=\frac{K_2-K_1}{1+K_1K_2}=tg\varphi$$

Если условие (3.21) не выполняется, то обозначив

$$\left(l_1\hat{l}_{1L}(\alpha)\right)=\angle\psi_1;\left(l_2\hat{l}_{2L}(\alpha)\right)=\psi_2\ tg\psi_1=K_3;tg\psi_2=K_4.$$

Тогда $\angle\varphi_{1,L}(\alpha)=\varphi_1-\psi_1;\angle\varphi_{2,L}(\alpha)=\varphi_2-\psi_2$. Поэтому,

$$K_{l_{1,L}(\alpha)}=\frac{K_1-K_3}{1+K_1K_3}\text{, а }K_{l_{1,L}(\alpha)}=\frac{K_1-K_3}{1+K_1K_3}$$

Тогда, проведя подсчёты аналогично (3.22), получим

$$tg\varphi_L(\alpha)\neq tg\varphi \qquad (3.24)$$

соотношения (3.22) и (3.23) аналогично можно получить для $\angle\varphi_R(\alpha)$ и для любых других уровней чёткости.

Пример 3.8. Построить чёткий угол и нечёткие углы α= 0-уровня *L* и *R*-типа, образованных пересечением нечётких прямых $\tilde{l}_1$ и $\tilde{l}_2$ на плоскости *(XOY),* если: $\tilde{l}_1:y=2x+\tilde{1}$; $l_2:y=3x-\tilde{2}$, где $\tilde{1}=\{1;2;1{,}5\}$ $\tilde{2}=\{2;1{,}5;2\}$

Имеем: 1) чёткий угол - угол между чёткими прямыми

$$tg\varphi=\frac{K_2-K_1}{1+K_1K_2}=\frac{3-2}{1+3\cdot2}=\frac{1}{7}$$

2) Так как угловые коэффициенты нечётких прямых есть чёткие числа, то для нечётких углов любого уровня чёткости, в том числе и для α=0,8. Аналогич по примеру 3.3, построив носители прямых $\tilde{l}_1$ и $\tilde{l}_2$,

получим носитель нечеткого угла $\left(\tilde{l}_1\hat{\tilde{l}}_2\right)$ и нечёткий угол α-уровня чёткости.

Пример 3.9. Найти чёткий и нечёткие углы α=0-уровня, образованные нечёткими прямыми l2, $\widetilde{l}_1$ и $\widetilde{l}_2$, заданные своими нечёткими уравнениями:

$\widetilde{l}_1 : y = \widetilde{2}x + 1$ и $\widetilde{l}_2 : y = -\widetilde{3}x + 2$, где $\widetilde{2} = \{2;1;1\}$ и $\widetilde{3} = \{3;1,5;1,5\}$

Имеем:

1) чёткий угол - угол между двумя чёткими прямыми.

$$tg\varphi = \frac{K_2 - K_1}{1 + K_1 K_2} = \frac{-3-2}{1-3\cdot 2} = 1..., \quad \angle\varphi = \frac{\pi}{4}$$

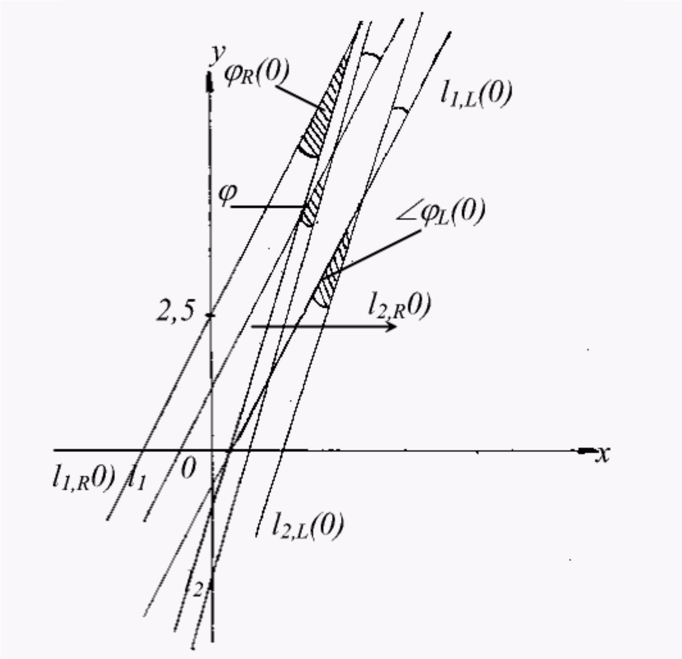


Рис.3.11

2) нечёткие углы $\varphi_L(0)$ и $\varphi_R(0)$ между прямыми $l_{1L}(0) l_{2L}(0)$ и $l_{1R}(0) l_{2R}(0)$

$$tg\varphi_L = \frac{K_{2,L}(0) - K_{1L}(0)}{1 + K_{1L}(0)K_{2L}(0)} = \frac{-4{,}5 - 1}{1 - 4{,}5 \cdot 1} = 1{,}57$$

$$tg\varphi_R(0) = \frac{K_{2,R}(0) - K_{1R}(0)}{1 + K_{1R}(0)K_{2R}(0)} = \frac{-1{,}5 - 3}{1 - 1{,}5 \cdot 3} = 1{,}29$$

Из подсчетов очевидно, чтоу глы, образованные между левым и правым границами носителей нечётких прямых, не равны между собой и не равны чёткому углу между чёткими прямыми. Аналогично можно показать, что нечёткие углы различных α-уровней чёткости не равны друг другу. Следует также отметить, что нечёткий угол, соответст-вующий прямому чёткому углу, может быть либо острым, либо тупым углом.

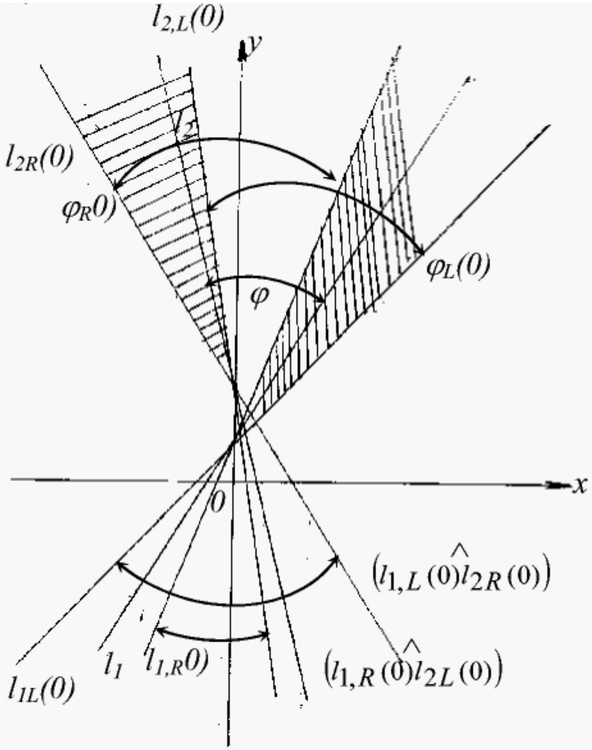


Рис.3.12

Определение 3.16. Носитель нечёткого угла между двумя нечёткими прямыми $\widetilde{l}_1$ и $\widetilde{l}_2$ будем называть совокупность всех углов, принимающих значения между углами, образованными пересечением правой границы носителя $\widetilde{l}_1$ с левой границей носителя нечёткой прямой $\widetilde{l}_2$ и углом, образованным пересечением левой границы носителя нечёткой прямой $\widetilde{l}_1$ с правой границей носителя нечёткой прямой $\widetilde{l}_2$, т.е.

$$\sup por\left(\widetilde{l}_1 \hat{\widetilde{l}}_2\right) = \left[\widetilde{l}_{1,R}(0)\hat{\widetilde{l}}_{2,L}(0); \widetilde{l}_{1,L}(0)\hat{\widetilde{l}}_{2,R}(0);\right] \quad (3.26)$$

Пример 3.10. Найти носитель нечётких углов, образованных пересечением нечётких прямых, описываемых уравнениями, приведёнными в примерах 3.8 и 3.9.

Решение.

1) из результатов примера 3.8 следует, что носитель нечёткого угла принимает единственное значение, равное чёткому углу между заданными прямыми.

2) Из данных примера 3.9 следует:

$$\left.\begin{array}{l} l_{1,R}(0): y = 3x+1 \\ l_{2,L}(0): y = -4{,}5x+2 \end{array}\right\}$$

$$tg\left(\widetilde{l}_{,L1}(0)\hat{\widetilde{l}}_{2,R}(0)\right) = \frac{K_{2,R}(0) - K_{1L}(0)}{1 + K_{1L}(0)K_{2R}(0)} = \frac{-1{,}5-1}{1-1{,}5\cdot 1} = 5$$

Таким об разом $\sup por\left(\widetilde{l}_1 \hat{\widetilde{l}}_2\right) = [0{,}55; 5\quad]$

Найденные углы показаны на рис.3.12.

Следует отметить, что для случая определения нечётких углов между нечёткими прямыми в трёхмерном пространстве следует воспользоваться нечёткими уравнениями, описывающими нечёткие прямые в трёхмерном пространстве и результатами определения углов между чёткими прямыми в трёхмерном пространстве.

2.3.4. Нечёткие многоугольники

Следуя понятию чёткого многоугольника, введём понятие нечёткого многоугольника.

Определение 3.17. Простая замкнутая ломаная линия называется нечётким многоугольником, если её соседние звенья, хотя бы одно из которых есть отрезок нечёткой прямой, не лежат на одной прямой.

Для конкретности в настоящем параграфе рассмотрены нечёткие треугольники.

Определение 3.18. Нечёткий многоугольник с наименьшим числом звеньев (стороны и вершины) будем называть нечётким треугольником.

Следует отметить, что ряд авторов понятие нечёткого треугольника вводят с помощью понятий нечётких полуплоскостей.

Определение 3.19. Пусть α, β, и γ - три различных направлений на плоскость и пусть *A, B* и *C* одновременно отличны от постоянной и содержат значение 0). Тогда $A \cap B \cap C$ называется нечётким треугольником (рис. 3.13).

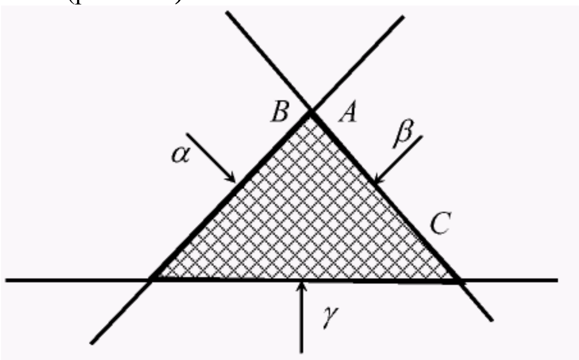


Рис.3.13

Из этого понятия треугольника следует:

1) под нечётким треугольником понимают не замкнутую нечёткую ломанную линию, а часть плоскости, ограниченной этой ломанной линией;

2) стороны нечёткого треугольника как нечёткие прямые являются нечёткими прямыми лишь одно *L* либо *R* - типа, причём нечёткий треугольник любого α-уровня подобен чёткому треугольнику, что не всегда обязательно на основании определения нечёткой прямой на плоскости (пример 3.2) Поэтому, в качестве понятия нечёткого

треугольника следует принять определения 3.17 либо эквивалентное ему

Определение 3.20. Нечётким треугольником называется фигура, состоящая из трех нечётких точек, не лежащих на одной прямой и трёх нечётких отрезков, попарно соединяющих эти точки.

Рассмотрим отдельные виды нечётких треугольников.

I. Нечёткий треугольник с одной нечёткой стороной

Пусть стороны нечёткого треугольника $\widetilde{\Delta} ABC$ на плоскости *(XOY)* описываются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} AB &: a_1x + b_1y = c_1 \\ BC &: a_2x + b_2y = c_2 \\ AC &: \tilde{a}_3x + \tilde{b}_3y = \tilde{c}_3 \end{aligned}\right\} \qquad (3.27)$$

В зависимости от коэффициентов уравнения, описывающего нечёткую сторону треугольника (см (3.6), либо (3.8)), носитель нечёткого треугольника меняет свой вид, сохранив при этом без изменений угол, противолежащий его нечёткой стороне.

Пример 3.11. Построить носители нечётких треугольников $\widetilde{\Delta} ABC$**,** где:

$$1)\ \left.\begin{aligned} AB &: 2x - b_1y = 1 \\ BC &: x - 3y = 3 \\ \widetilde{AC} &: 3x + y = \tilde{5} \end{aligned}\right\} \qquad 2)\ \left.\begin{aligned} AB &: 2x - y = 1 \\ BC &: x - 3y = 3 \\ \widetilde{AC} &: \tilde{3}x + y = 5 \end{aligned}\right\}$$

где $\tilde{3} = \{3;1;2\}$; $\tilde{5} = \{5;2;3\}$

Решение. Найти координаты вершин нечётких треугольников. Решив попарно уравнения, получим:

$$1)\ \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 3y = 3 \end{cases} => \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} => B(0;-1)\,.$$

Аналогично

$$\tilde{A}_L(0{,}8;0{,}6);\, A(1{,}2;1{,}4);\, \tilde{A}_R(1{,}8;2{,}6)$$

$$\tilde{C}_L(1{,}2;-0{,}6);\, C(1{,}8;-0{,}4);\, C_R(2{,}7;-0{,}1)$$

$$2)\ \tilde{A}_L\left(\frac{6}{7};\frac{5}{7}\right)\ A(1{,}2;1{,}4);\, \tilde{A}_R(1{,}5;2)$$

$$\tilde{C}_L\left(\frac{9}{8};-\frac{5}{8}\right)\ C(1{,}8;-0{,}4);\, \tilde{C}_R\left(2\frac{4}{7};-\frac{1}{7}\right)$$

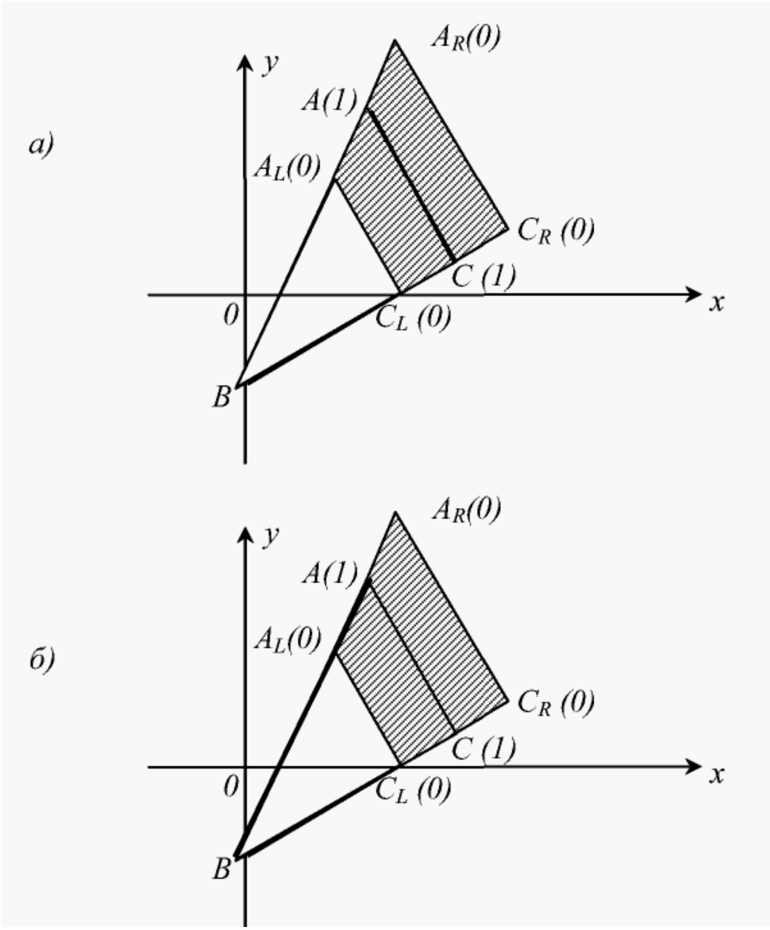


Рис.3.14

II. Неч ёткий треугольник с двумя нечёткими сторонами

Пусть сторона нечёткого треугольника на плоскости *(XOY)* описываются уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} AB &: y = k_1 x + b_1 \\ BC &: y = \widetilde{K}_2 x + \widetilde{b}_2 \\ AC &: y = \widetilde{K}_3 + \widetilde{b}_3 \end{aligned}\right\} \qquad (3.28)$$

Так же, как и при определении нечётких углов, в данном случае в зависимости от знач ений $\widetilde{K}_2, \widetilde{K}_3, \widetilde{b}_1$ и $\widetilde{b}_3$ можно рассмотреть три случая: *1)* K_2 и K_3 - чёткие, но b_1 и b_2 - нечёткие; 2) $К_2$ и K_3 - нечёткие, b_2 и b_3 - чёткие; 3) K_2 и b_3 - чёткие, а $К_3$ и b_2 -нечёткие и наоборот. Во всех этих трёх случаях носители нечётких треугольников резко отличаются друг от друга.

Пример 3.12. Построить носители нечётких треугольников:

$$1)\left.\begin{aligned} AB &: y = 2x - 2 \\ BC &: y = 4x + \tilde{3} \\ AC &: y = x + \tilde{5} \end{aligned}\right\}, \textit{ где } \tilde{3} = \{3;1,5;2\};\ 5 = \{5;2;3\}$$

Решив системы уравнений, находим координаты всех вершин чёткого треугольника и треугольников, образующие границу носителя нечёткого треугольника. Имеем:

1) для чёткого треугольника $ABC\ A(-2,5;\ -7);\ B(7;12);\ C\left(\frac{2}{3};5\frac{2}{3}\right);$

2) для треугольников с нечёткими сторонами:

$$A_R(0) = A(-1,75; -5,5);\ A_L(0) = A(-3,5;-9);\ B_L(0) = B(5;8)$$

$$B_R(0) = B(10;18);\ C_{LL}(0) = C\left(-\frac{2}{3};2\frac{1}{3}\right);\ C_{LR}(0) = C(0,5;3,5)$$

$$C_{RL}(0) = C(2,16;5,16);\ C_{RR}(0) = C(1;9)$$

На рис. 3.15 заштрихованная область является носителем нечёткого треугольника $\widetilde{\Delta} ABC$.

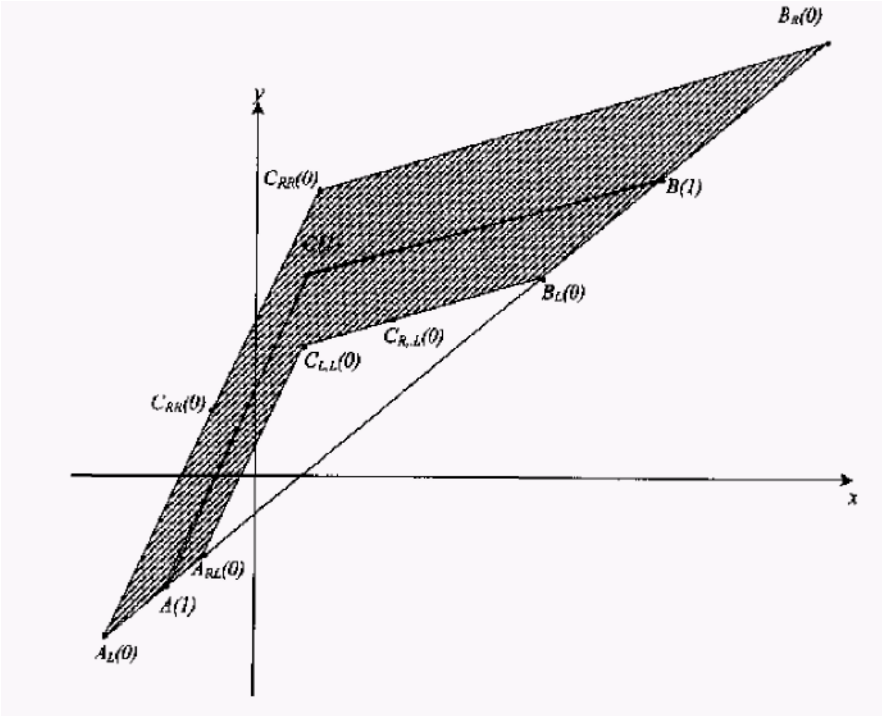


Рис. 3.15

$$2)\ \left.\begin{array}{l} AB: y = 2x - 6 \\ BC: y = -\tilde{2}x + 4 \\ AC: y = \tilde{5}x - 3 \end{array}\right\},\ \text{где}\ \begin{array}{l} \tilde{2} = \{2;1;3\} \\ \tilde{5} = \{5;2;1\} \end{array}$$

Решив систему уравнений, найдем координаты вершин $\tilde{\Delta} ABC$.

а) для чёткого треугольника:

$A(-1;-8);\ B(2{,}5;\ -1);\ C(1;2)$

б) для треугольников с нечёткими вершинами и сторонами, являющимися границами носителя нечёткого треугольника:

$$A_L(-3;-12);\ A_R\left(-\frac{3}{4};-7{,}5\right);\ B_L\left(\frac{10}{7};-3\frac{1}{7}\right) B_R(10;14);$$

$$C_{L,L}\left(\frac{7}{8};-\frac{3}{8}\right); C_{L,R}\left(\frac{7}{11};\frac{9}{11}\right); C_{R,L}\left(\frac{7}{6};\frac{1}{2}\right);\ C_{R,R}\left(\frac{7}{4};2\frac{1}{4}\right)$$

На рис. 3.16 заштрихованная область является носителем нечёткого $\widetilde{\Delta}ABC$.

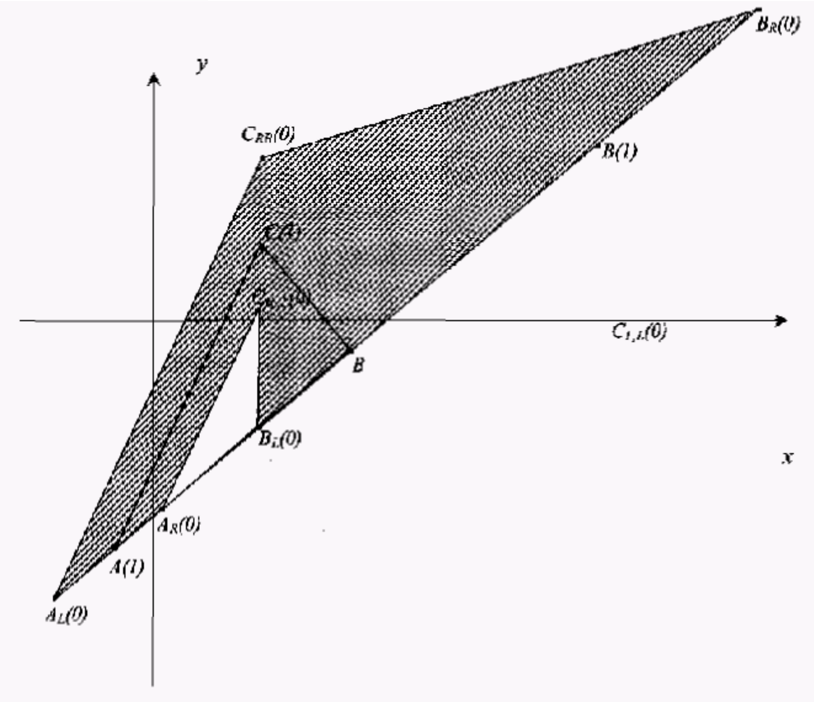


Рис.3.16

III. Нечёткий треугольник с тремя нечёткими сторонами

Пусть все стороны нечёткого треугольника есть отрезки нечётких прямых, описываемых уравнениями:

$$\begin{cases} AB: y = \widetilde{K}_1 x + \widetilde{b}_1 \\ BC: y = \widetilde{K}_2 x + \widetilde{b}_2 \\ \tilde{A}C: y = K_3 x - b_3 \end{cases} \tag{3.29}$$

Здесь следует рассмотреть три случая:

1) угловые коэффициенты сторон чёткие, а свободные члены $(\widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2$ и $\widetilde{b}_3)$ - нечёткие числа;

2) угловые коэффициенты - нечёткие, а свободные члены чёткие числа;
3) угловые коэффициенты и свободные члены уравнений нечётких сторон нечёткого треугольника - нечёткие числа. Для конкретности для каждого случая рассмотрим примеры:

Пример 3.14.

$$1)\ \begin{cases} AB: y = 0{,}4x + \tilde{3{,}8} & \tilde{3{,}8} = \{3{,}8; 0{,}8; 1{,}2\} \\ AC: y = -\dfrac{5}{6}x + \dfrac{\tilde{4}}{3}, \text{ где} & \dfrac{\tilde{4}}{3} = \left\{\dfrac{4}{3}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}\right\} \\ BC: y = -7x + \tilde{26} & \tilde{26} = \{26; 5; 2\} \end{cases}$$

Решение

а) Для четкого ΔABC имеем: *A(-2;3); B(3;5)* и *C(4;-2)*

б) для носителя нечёткого треугольника имеем:

$$A_{LL}(0) = A\left(-1\frac{23}{37}; 2\frac{13}{37}\right);\ A_{LR}(0) = A\left(-3\frac{9}{37}; 3\frac{26}{37}\right)$$

$$A_{RL}(0) = A\left(-1\frac{30}{37}; 2\frac{25}{37}\right);\ A_{RR}(0) = A\left(-2\frac{16}{37}; 3\frac{35}{37}\right)$$

$$A_{LL}(0) = B\left(2\frac{16}{37}; 3\frac{36}{37}\right);\ B_{LR}(0) = B\left(2\frac{6}{37}; 5\frac{32}{37}\right)$$

$$B_{RL}(0) = B\left(3\frac{14}{37}; 4\frac{13}{37}\right);\ B_{RR}(0) = B\left(3\frac{4}{37}; 6\frac{9}{37}\right)$$

$$C_{LL}(0) = C\left(3\frac{9}{37}; -1\frac{26}{37}\right);\ C_{LR}(0) = C\left(3\frac{3}{37}; -\frac{21}{37}\right)$$

$$C_{RL}(0) = C\left(4; -2\frac{24}{37}\right);\ C_{RR}(0) = C\left(3\frac{31}{37}; -1\frac{19}{37}\right)$$

На рис. 3.17 заштрихованная область есть носитель нечёткого $\tilde{\Delta} ABC$.

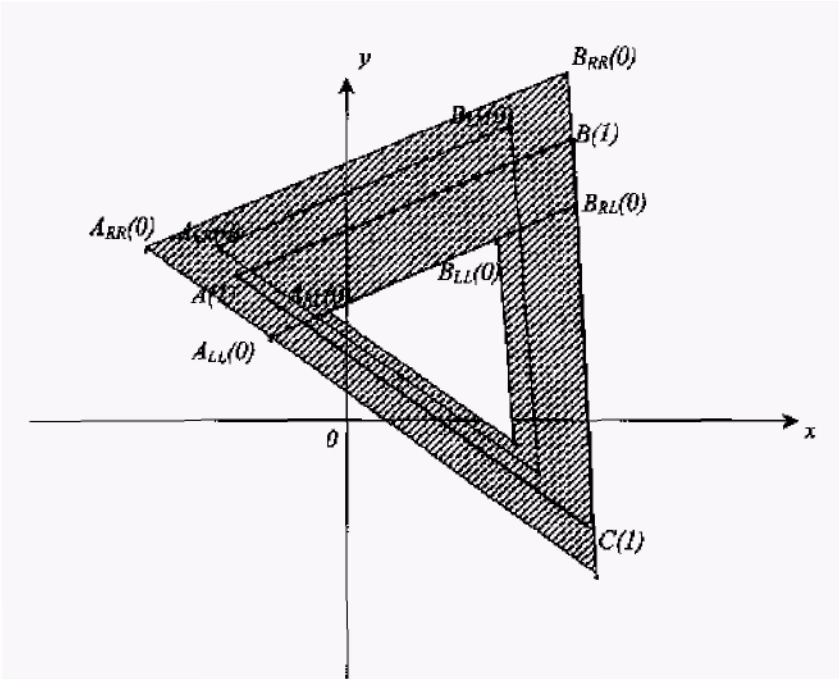


Рис.3.17

Пример 3.15.

2) Построить носитель нечёткого треугольника, стороны которого заданы уравнениями:

$$\begin{cases} AB: y = \dfrac{\tilde{3}}{4}x + 3{,}5 & \dfrac{\tilde{3}}{4} = \left\{\dfrac{3}{4}; \dfrac{7}{4}; \dfrac{5}{4}\right\} \\ BC: y = -\tilde{3}x + 1 \quad \text{, где} & \tilde{3} = \{3; 1; 2\} \\ AC: y = -\dfrac{\tilde{1}}{2}x + 1 & \dfrac{\tilde{1}}{2} = \left\{\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}; 1\right\} \end{cases}$$

Решение. Найдём координаты вершин чёткого треугольника и координаты точек пересечения границ носителей нечётких сторон $\tilde{\Delta}ABC$.

а) для чёткого треугольника: *A(-2;3); B(2;5)* и *C(4;-1).*

б) для границ носителя:

$$A_{LR}(0) = A(-5;-8); B_{LR}(0) = B(1{,}875;1{,}625); C_{LR}(0) = C\left(2\frac{6}{7};-3\frac{2}{7}\right)$$

$$A_{LL}(0) = A(-2{,}5;-1{,}5); B_{LL}(0) = B(1{,}875;7{,}25); C_{LL}(0) = C\left(3\frac{1}{3};4\frac{1}{3}\right)$$

$$A_{RR}(0) = A(1{,}25;2{,}25); B_{RR}(0) = B(7{,}5;-4); C_{RR}(0) = C\left(1\frac{2}{3};2\frac{2}{3}\right)$$

$$A_{R1}(0) = A\left(-\frac{5}{7};-2\frac{1}{14}\right); B_{RL}(0) = B(2{,}5;-1{,}5); C_{RL}(0) = C(20;-29)$$

Из рис.3.18 следует, что носитель нечёткого треугольника, стороны которого описываются уравнением с нечётким угловым коэффициентом, представляет собой многоугольник, содержащий чёткий треугольник и нечёткий треугольник чёткости любого α-уровня.

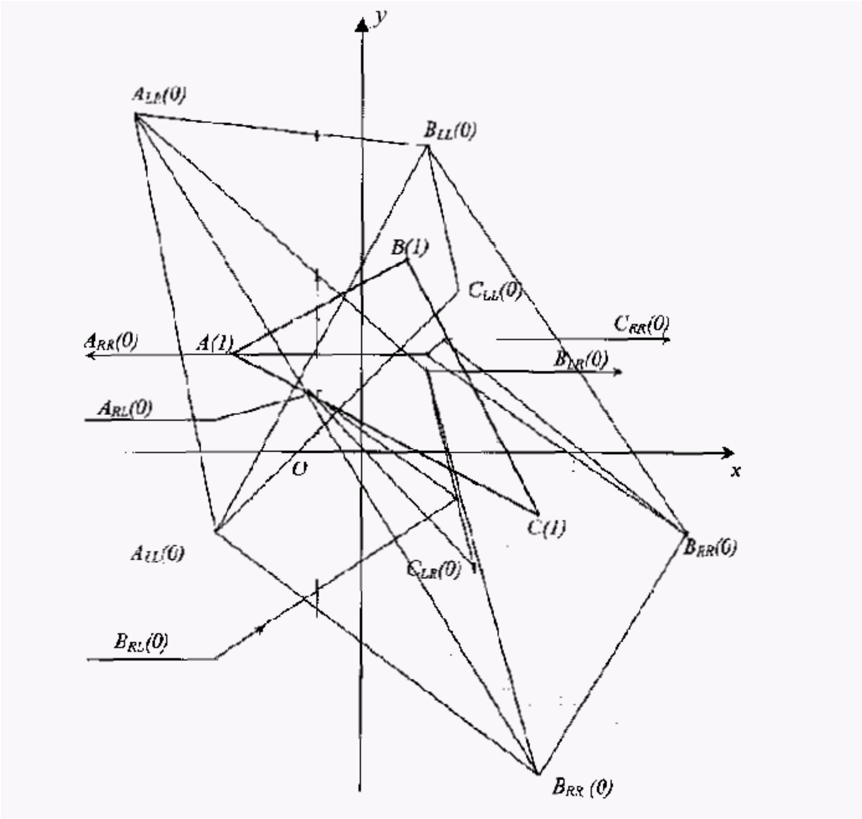


Рис.3.18

3) Из рис. 3.17 и 3.18 следует, что если все коэффициенты и свободные члены уравнений, описывающие стороны нечёткого треугольника нечёткие числа, то задачи определения носителя и нахождения нечёткого треугольника чёткости любого α-уровня усложняется.

Останавливаясь на площади нечёткого треугольника, следует отметить, что в работах эти понятия рассмотрены частично лишь для случая, когда стороны нечёткого треугольника заданы нечёткими уравнениями прямых с чёткими угловыми коэффициентами. Причём определения площади и периметра нечёткого треугольника очень расплывчаты. Поэтому приведём эти понятия.

Углы нечёткого треугольника определяются так же, как и углы между двумя прямыми, если заданы уравнения сторон нечёткого треугольника. Если же заданы координаты вершин нечёткого треугольника, то выписав уравнения нечётких сторон нечёткого треугольника (как уравнение прямой, проходящей через две заданные точки) определяется угол между двумя прямыми (смотри примеры 3.8; 3.9)

Следует отметить, что:

1) все свойства подобия чётких треугольников справедливы и для нечётких треугольников;

Утверждение 3.2. Два нечётких треугольника L(R) - типа любого α-уровня подобны тогда и только тогда, когда равны их носители и функции принадлежности.

Доказательство.

Так как носители $\tilde{\Delta} ABC$ и $\tilde{\Delta} A, B, C$ равны друг другу, то равны и носители соответствующих сторон. Тогда в силу утверждения 3.1. соответствующие углы этих треугольников равны друг другу. Поэтому, в силу теоремы о подобии чётких треугольников справедливо данное утверждение.

Утверждение 3.3. Два нечётких треугольника L(R) любого α-уровня равны друг другу, если равны их носители, функции принадлежности и по одной стороны *L(R)*-типа любого α-уровня чёткости.

Доказательство.

В силу утверждения 3.2. соответственные углы $\tilde{\Delta}_\alpha ABC$ и

$\tilde{\Delta}_\alpha A_1, B_1, C_1$ равны другу. Поэтому на основании теоремы о равенстве треугольников (по двум углам и прилежащей к ним стороне)

$$\tilde{\Delta}_\alpha ABC_L = \tilde{\Delta}_\alpha A_1, B_1, C_1 \text{ и } \tilde{\Delta}_\alpha ABC_R = \tilde{\Delta}_\alpha A_1, B_1, C_{1R}$$

Для определения периметра нечёткого треугольника введём понятие длины нечёткого отрезка прямой. На основании определения 3.10 имеем.

Определение 3.21. Длиной нечёткого отрезка $\tilde{AB}$ (расстоянием между двумя нечёткими точками $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$) будем называть наименьшее расстояние между носителями этих точек, т.е. если:

$$\sup por\tilde{A} = [A_L(0); A_R(0)]; \ \sup por\tilde{B} = [B_L(0); B_R(0)],$$

то

$$d_{\tilde{A}\tilde{B}} = \inf[A_R(0)B_L(0); A_L(0)B_R(0)] \tag{3.23}$$

Для нечётких точек любог α-уровня

$$d_{\tilde{A}\tilde{B}}(\alpha) = \inf[A_R(\alpha)B_L(\alpha); A_L(\alpha)B_R(\alpha)] \tag{3.24}$$

Пример 3.16. Найти длину $\tilde{AB}$ **,** если:

$\widetilde{A}(\widetilde{3};-\widetilde{4})$; $\widetilde{B}(-\widetilde{2};\widetilde{5})$; $\widetilde{3}=\{3;1;2\}$; $\widetilde{4}=\{4;1;1\}$

$\widetilde{2}=\{2;1;1\}$; $\widetilde{5}=\{5;2;1\}$

$$d_{\widetilde{AB}} = \inf\sqrt{(\widetilde{x}_2-\widetilde{x}_1)^2+(\widetilde{y}_2-\widetilde{y}_1)}\text{, где } \widetilde{A}(\widetilde{x}_1\widetilde{y}); \widetilde{B}(\widetilde{x}_2\widetilde{y}_2)$$

Имеем:

$-\widetilde{2}=\{-3;-1\}$; $-\widetilde{4}=\{-5;-3\}$

$$d_{AB}=\sqrt{(-2-3)^2+(5+4)^2}=\sqrt{106}$$

$$\sup r\,\widetilde{AB}=\sqrt{(-3-5)^2+(-5-6)^2}=\sqrt{185}$$

$$\inf\widetilde{AB}=\sqrt{(-1-2)^2+(-3-3)^2}=\sqrt{45}$$

Таким образом, $d_{\widetilde{AB}}=\sqrt{45}$

На рис. 3.19. заштрихованные участки есть носители $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$. Из рисунка видно, что

$$d_{\widetilde{A}\widetilde{B}}=d_{S_{\widetilde{B}}-S_{\widetilde{A}}}=d_{B_{LR}(0)A_{RL}(0)}=\sqrt{45}$$

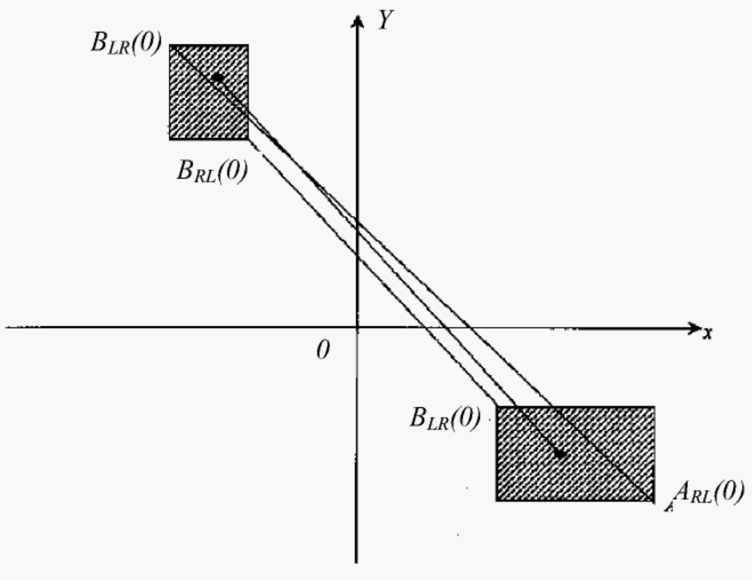


Рис.3.19

Теперь остановимся на понятиях периметра и площади нечетких треугольников.
Ряд авторов считает, что нечеткий треугольник полностью определен заданием носителей лишь двух ее сторон, так как эти прямые параллельны их четким сторонам. Они считают их как определение направлений сторон нечеткого треугольника. Поэтому они принимают следующие понятия площади и периметра нечеткого треугольника.
Пусть площади треугольников

$T_{\alpha_1}, T_{\alpha_2}, \ldots, T_{\alpha_n}$ б удут $S_{\alpha_1}, S_{\alpha_2}, \ldots, S_{\alpha_n}$

и периметры $T_{\alpha_1}, T_{\alpha_2}, \ldots, T_{\alpha_n}$ и пусть $\delta_i = (\alpha_i - \alpha_{i-1})$, где ($\alpha_0$=0). Тогда площадью *T* является

$$S = \sum_{i=1}^{n} \delta_i S_{\alpha_i} \tag{3.25}$$

Откуда следует, что эта сумма вычисляет площадь S_{α_1} для треугольника T_{α_1} четкости α_1 и S_{α_1} - как площадь каждого внутреннего треугольника T_{α_i} с четкостью $\alpha_i \ (i = \overrightarrow{1, н})$

При этом периметр *T* является

$$P = \sum_{i=1}^{n} \delta_i P_i \tag{3.26}$$

При этом, учитывая, что стороны $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha$ треугольников T_{α_i} перпендикулярны направлениям α, β и γ (определение 3.19), то длины их сторон можно определить как

$$a = \sum_{i=1}^{n} \delta_i a_i ; \ b = \sum_{i=1}^{n} \delta_i b_i ; c = \sum_{i=1}^{n} \delta_i c_i \tag{3.27}$$

И таким образом,

$$P = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i + c_i) \delta_i \tag{3.28}$$

Следует отметить, что (3.25)-(3.28) имеют смысл лишь в том случае, когда под знаком $\sum$ подразумевается операция объединения множеств (каждое из которых есть множество точек геометрических фигур), пересечением которых являются четкие геометрические фигуры.

Следует отметить, что если нечеткий треугольник любого α<1-уровня вложен в четкий треугольник, то в (3.25)-(3.28) знак объединения следует поменять на знак пересечения множеств.

Если же соответствующие стороны нечетких треугольников α_l-уровней не параллельны друг другу и не параллельны соответствующим сторонам четкого треугольника (примеры 3.12-3.15), то их площади и периметры невозможно определить по (3.25)-(3.28).

В этом случае и периметры и площади нечетких треугольников любого α-уровня следует определять через координаты их вершин (по тем же формулам, с помощью которых определяются площади и периметры четких треугольников), которые так же верны и для нечетких треугольников.

Пример 3.17. Найти периметры и площади четкого и соответствующих ему нечетких треугольников *(L, L) (L,R), (R,L)* и *(R,R)* типов уровня (α=0), стороны которых описываются уравнениями, заданными в примере 3.15.

Решение.

Пользуясь известными (из классической математики) формулами

$$P_{\Delta ABC}=|AB|+|BC|+|AC|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}+ \\ +\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}+\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2} \qquad (3.29)$$

$$S_{\Delta AbC}=\frac{1}{2}\left|(x_3-x_1)(y_3-y_2)-(x_3-x_2)(y_3-y_1)\right| \qquad (3.30)$$

получаем:

а) для четкого треугольника $A(-2;3);\ B(2;5)$ *и* $C(4;-1)$.

$$P_{\Delta ABC}=\sqrt{(2+2)^2+(5-3)^3}+\sqrt{(4-2)^2+(-1-5)^2}+ \\ +\sqrt{(4+2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{20}+\sqrt{40}+\sqrt{52}=18{,}01$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|(4+2)(-1-5)-(4-2)(-1-3)\right|=14$$

б) для границ носителя

$$P_{L,L}(0)=\sqrt{(1{,}875+2{,}5)^2+(7{,}25+1{,}5)^3}+$$

$$+\sqrt{\left(3\frac{1}{3}-1{,}875\right)^2+\left(4\frac{1}{3}-7{,}25\right)^2}+\sqrt{\left(3\frac{1}{3}+2{,}25\right)^2+\left(4\frac{1}{3}+1{,}5\right)^2}=21{,}19$$

$$S_{LL}(0)=\frac{1}{2}\left|\left(3\frac{1}{3}+2{,}5\right)\left(4\frac{1}{3}-7{,}25\right)-\left(3\frac{1}{3}-1{,}875\right)\left(4\frac{1}{3}+1{,}5\right)\right|=12{,}76$$

$$S_{LL}^{(0)}=\sqrt{(7{,}5-1{,}25)^2+(-4-2{,}25)^2}+\sqrt{\left(1\frac{2}{3}-7{,}5\right)^2+\left(2\frac{2}{3}+4\right)^2}+$$

$$+\sqrt{\left(1\frac{2}{3}-1{,}25\right)^2+\left(2\frac{2}{3}-2{,}25\right)^2}=17{,}29$$

$$S_{RR}^{(0)}=\frac{1}{2}\left|\left(1\frac{2}{3}-1{,}25\right)\left(2\frac{2}{3}+4\right)-\left(2\frac{2}{3}-2{,}25\right)\left(1\frac{2}{3}-7{,}5\right)\right|=2{,}61$$

$$P_{L,R}(0)=\sqrt{(1{,}875+5)^2+(1{,}625+8)^3}+$$

$$+\sqrt{\left(2\frac{6}{7}+5\right)^2+\left(-3\frac{2}{7}+8\right)^2}=21{,}96$$

$$S_{LR}(0)=\frac{1}{2}\left|\left(2\frac{6}{7}+5\right)\left(-3\frac{2}{7}-1{,}625\right)-\left(2\frac{6}{7}-1{,}875\right)\left(-3\frac{2}{7}+8\right)\right|=21{,}61$$

$$P_{R,L}(0)=\sqrt{\left(2{,}5+\frac{5}{7}\right)^2+\left(-1{,}5+2\frac{1}{14}\right)^2}+\sqrt{(20-2{,}5)^2+\left(-29\frac{2}{7}+1{,}5\right)^2}+$$

$$+\sqrt{\left(20+\frac{5}{7}\right)^2+\left(-29+2\frac{1}{4}\right)}=70{,}05$$

$$S_{RL}(0)=\frac{1}{2}\left|\left(20+\frac{5}{7}\right)(-29+1{,}5)-(20-2{,}5)\left(-29+2\frac{1}{4}\right)\right|=224{,}24$$

Смотри рис. 3.18

Как следует из результатов подсчетов, в данном случае значения периметра и площади нечетких треугольников нельзя вычислять по формулам (3.25) и (3.26).

Следует отметить, что для любых выше рассмотренных нечетких треугольников справедливы все теоремы, которые справедливы для четких треугольников (теорема синусов, теорема косинусов и т.д.).

В заключение отметим, что исходя из (определения 3.17) определения нечетких многоугольников, все результаты, справедливы для четких многоугольников легко перенести на нечеткие многоугольники любого уровня четкости.

2.4. Нечеткие множества

2.4.1. Понятие нечетких множеств

Наиболее четким и корректным определением нечеткого множества будем считать следующее.

Определение 4.1. Нечетким множеством *А* будем называть совокупность элементов $x \in X$, функция принадлежности которых множеству *А* принимает з начения из [0;1]. При этом множество *X* является универсальным множеством.

Определение 4.2. Множество *X* называется универсальным множеством нечеткого множестваА, если оно является областью определения функции принадлежности μ_A.

Отметим, что если X есть конечное множество $A \subset X$ примет вид:

$$A = \sum_{i=1}^{m} \mu_A(x_i)/x_i \tag{4.1}$$

Если же *X*- бесконечное множество, то

$$A = \bigcup_x \mu_A(x)/x, \tag{4.2}$$

где $\bigcup_x$ означает объединение элементов.

Пример 4.1. X={a, b, c, d, e, k, m}

A=[0,2/*a*+0,5/b+0,1/c+0,4/d+0,8/e+1/k++0,9/m]

есть нечеткое множество, а X- универсальное множество.

Определение 4.3. Носителем нечеткого множества А называется множество таких точек из X, для которых величина $\mu_A(x_i)$ положительна. $A = \{ x \in X;\ \mu_A(x) > 0 \}$.

Исходя из определения носителя нечеткого числа следует

Определение 4.4. Носителем нечеткого множества А будем называть объединение носителей всех четких и нечетких элементов множества А.

Исторически первым обобщением понятия нечеткого множества стали L- нечеткие множества: $\mu : X \to L$ (нечеткое множество L-типа), т.е.

функции, принимающие свои значения в конечной или бесконечной дистрибутивной решетке L (решетка - частично упорядоченное множество с точной нижней и точной верхней границами). Области принадлежности также моделируются полной решеточно упорядоченной полугруппой. В плане выражения качественных представлений и оценок человека в процессе решения задач важным является случай S-нечетких множеств, задаваемых парой (R, μ), где

$$\mu : R \to S \tag{4.3}$$

На S естественно налагаются условия конечности и полноты. Нечеткие множества классифицируются на нечеткие множества различных типов.

Определение 4.5. Нечеткое множество, функция принадлежности которого является обычная четкая функция, т.е. область ее значений является четкое множество, будем называть нечетким множеством 1-го типа; если же значения ее функции принадлежности образуют нечеткое множество, то само нечеткое множество называется нечеткое множеством 2-го типа.

$$\mu_A : x[0;1] \to [0;1] \tag{4.4}$$

Определение 4. 6. Нечетким множеством типа P называется множество из X, у которого значения функции принадлежности является нечетким множеством типа (P-1). В ряде работ рассмотрен другой тип нечетких множеств, у которых значения функции принадлежности является случайной переменной. В этом случае вероятностное множество A в X определяется характеристической функцией:

$$\mu_A : x\Omega(x,\omega) \to \mu_A(x,\omega) \in Q_c \tag{4.5}$$

где $\mu_A(x)$ является (B, B_c) измеренной функцией носителя каждого фиксированного $x \in X$.

Следует учесть, что понятие нечеткое множество связано с центральным понятием так называемой альтернативной теории множеств - понятием полумножества. Одновременно как множество предполагает наличие определенных границ принадлежности и непринадлежности. Но полумножество является более широким понятием, не имеющим максимальных и минимальных элементов, а следовательно и фиксированных значений принадлежности. В альтернативной теории множеств четко разграничиваются понятия множества и класса. Понятие класса является более общим, чем понятие множества. Свойство объектов $\mu(x)$ определяется классом $\{x, \mu(x)\}$. Полумножеством называется собственный класс (не множество), являющийся подклассом некоторого множества *X:*

$$A = \{x, \mu(x)\} \subset X .$$

Поскольку при определении полумножества не используется отношение принадлежности элементов множеству, этот математический объект является более общим, чем нечеткое множество. Но для практических применений полумножества следует ввести функциональные ограничения на принадлежность и аппроксимируемость полумножества нечеткими множествами. Способы приближения полумножества нечеткими множествами описаны в литературе.

Приведем наиболее важные понятия теории нечетких множеств.

Определение 4.7. Два нечетких множества равны, если равны их функции принадлежности:

$$\forall x \in R; \mu_A(x) = \mu_B(x) \leftrightarrow A = B \tag{4.6}$$

Одни нечеткие множества могут быть подмножествами других множеств.

Определение 4.8. Нечеткие множество А есть подмножество нечетких множествтогда и только тогда, когда $\mu_A(x) \le \mu_\beta(x)$ для любых $x \in X$

$$A \subset B \Leftrightarrow \mu_A(x) \le \mu_B(x), \quad \forall x \in X \tag{4.7}$$

Пример 4.2 $X = \{1,2,3,......10\}$**,** если

$$A = \{0,3/3; 0,2/4; 0,6/5; 0,6/7; 0,5/8\}$$
$$B = \{0,1/1; 0,4/3; 0,4/40; 0,6/5; 0,8/7; 0,9/8; 0,6/9\}, \text{то } A \subset B$$

Определение 4.9. Множество A_α будем называть нечетким множеством α-уровня, если оно образует совокупность таких элементов $x \in X$, степень принадлежности которых множеству *A* больше или равно $\alpha \in (0,1]$

$$\widetilde{A}_\alpha = \{x / \mu_A(x) \ge \alpha; \ \forall x \in X\} \tag{4.8}$$

Пример 4.3

$$\widetilde{A} = \{3/0,2 + 8/0,3 + 11/0,5 + 15/0,6 + 20/0,8\}$$
$$\widetilde{A}_{0,3} = \{8/0,3 + 11/0,5 + 15/0,6 + 20/0,8\}$$

Справедливо следующее свойство:

$$A_{\alpha_1} \subset A_{\alpha_2} \leftrightarrow \alpha_2 \ge \alpha_1$$

Справедлива теорема о декомпозиции.

Теорема. Всякое нечеткое множество $\widetilde{A}$ можно разложить на произведение подмножеств по коэффициентам α_i:

$$\widetilde{A} = \max_{\alpha_i}\left[\alpha_1 A_{\alpha_1}, \alpha_2 A_{\alpha_2}, \ldots, \alpha_n A_{\alpha_1}\right] \qquad (4.9)$$

$$0 < \alpha_i \leq 1,\ (i = 1,2,\ldots,n)$$

Доказательство следует непосредственно:

$$\mu_{A_{\alpha_i}}(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } \mu_A(x) \geq \alpha_i \\ 0, \text{ если } \mu_A(x) < \alpha_i \end{cases}$$

Таким образом, функцию принадлежности $\widetilde{A}$ можно записать в виде:

$$\mu_{\max\limits_{\alpha_i}[\alpha_i A_{\alpha_i}]}(x) = \max_{\alpha_i}[\alpha_i A_{\alpha_i}] = \max_{\alpha_i \leq \mu_A(x)}[\alpha_i] = \mu_A(x)$$

Разложение нечеткого множества в виде (4.9) называется декомпозицией нечеткого множества А.

Пример 4.4. Пусть $\mu_{\widetilde{A}}(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x^2};\ x \in R^+$

Рассматривая интервал $[\alpha;1]$, где $0 < \alpha \leq 1$, можно записать:

$$\mu_{\widetilde{A}_{\alpha_i}}(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } \mu_{\widetilde{A}}(x) \in [\alpha;1] \\ 0, \text{ если } \mu_{\widetilde{A}}(x) \notin [\alpha;1] \end{cases}$$

Таким образом, в данном примере

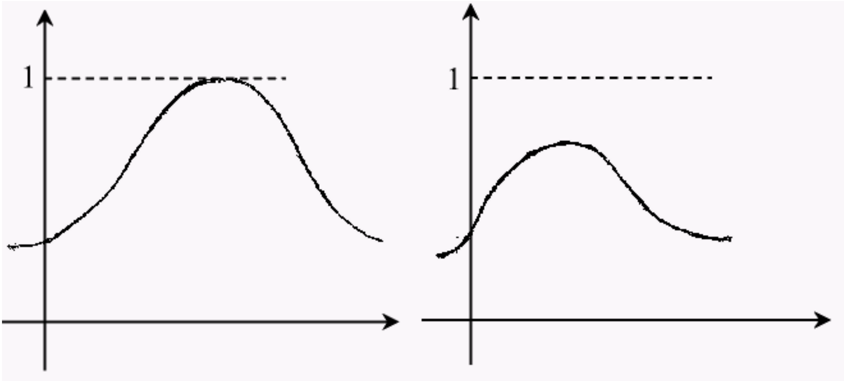
$$\mu_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \geq \sqrt{\dfrac{\alpha}{1-\alpha}} \\ 0, \text{ если } x < \sqrt{\dfrac{\alpha}{1-\alpha}} \end{cases}$$

Определение 4.10. Высотой нечеткого множества А будем называть верхнюю границу функции принадлежности элементов множества *A:*

$$hgt(A) = \underset{x \in X}{sub}\, \mu_A(x) \qquad (4.10)$$

Определение 4.11. Нечеткое множество А называется нормальным, если существует хотя бы один $x \in X$, для которого $\mu_A(x) = 1$, т.е. если $hgt(A)=1$, в противном случае $(hgt(A)<1)$ нечеткого множества наывается субнормальным.

Определение 4.12. Множество *A* называется пустым множеством, если для $\forall x \in X, \mu_A(x) = 0$ и обозначается $A = \varnothing$.



Нормальное нечеткое множество   Субнормальное нечеткое множество

Рис.4.1

Определение 4.13. Точкой перехода нечеткого множества *A* называется такой элемент. $x \in X$, для которого

$$\mu_A(x) = 0{,}5 \qquad (4.11)$$

Пример 4.5. Пусть X представляет собой интервал [1; 100] и переменная *x* принимает значения из этого интервала. Интерпретируя возраст как нечеткое подмножество множества *X,* обозначает термин «старость» можно определить функцию принадлежности в виде

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, \ \ npu 0 < x \le 50 \\ 1, \ \ npu \left(1 + \left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1} \ \ npu 50 < x \le 100 \end{cases}$$

В этом примере носителем нечеткого множества старость является интервал [50;100]. Высота множества старость близка к 1, а точкой перехода является возраст *x*=55.

Четкое множество, близкое к нечеткому множеству, определяется как:

$$\mu_{A^*}(x) = \begin{cases} 0, \ \text{если} \ \mu_A(x) < 0{,}5 \\ 1, \text{если} \ \mu_A(x) > 0{,}5 \\ 0 \ \text{или} \ 1, \ \text{если} \ \mu_A(x) = 0{,}5 \end{cases}$$

Определение 4.14. Нечеткое множество А в пространстве $X=R^n$ называется выпуклым нечетким множеством тогда и только тогда, когда его функция принадлежности выпукла, т.е. для каждой пары $x, y \in X$ и для всех $\lambda \in [0;1]$ удовлетворяет неравенство:

$$\mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq min(\mu_A(x), \mu(y)) \qquad (4.13)$$

Определение 4.15. Если *X* есть конечное универсальное множество и *A* - нечеткое множество, порожденное X, то мощность нечеткого множестваA определяется как:

$$|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x) \qquad (4.14)$$

Если X- бесконеч ное множество, то A не всегда существует. Однако, если *A* имеет конечный носитель, то мощность нечеткого множества A определяется как:

$$|A| = \sum_{x \in surrA} \mu_A(x) \qquad (4.15)$$

Определение 4.16. Точку *M* будем называть нечеткой точкой действительной R, если значение функции принадлежности ее прямой *R* принимает значение из (0;1), т.е. $\mu_R(M) < 1.$ В противном случае, если $\mu_R(M) = 1,$ то точка *M* называется четкой точкой действительной прямой R.

Например: $M_1 = 0{,}8/2$ - нечеткая точка, M2=1/4 - четкая точка.

Определение 4.17. Интервал (отрезок прямой, полуинтервал) действительной прямой будем называть нечетким интервалом (нечетким отрезком, нечетким полуинтервалом), если значения функции принадлежности всех точек действительной прямой, образующих его носитель, принимают з начения (≤ 1).

Пример 4.6.

(-2;3)=0,1/(-2;-1]+0б 4/(1;0)+0,6[0;1)+1/[1;2]+0,6/(2;3)

есть нечеткий интервал действительной прямой. Отдельные авторы вводят следующее определение нечеткого интервала.

Определение 4.18. Если граница интервала является нормальным выпуклым нечетким множеством, то оно называется нечетким интервалом.

Легко доказать, что это определение является частным случаем определения 4.17, т.е. из определения 4.17 следует определения 4.18.

Следует отметить, что нечеткие интервалы могут определяться либо с помощью выбора четкого интервала для формирования ядра, от которого функция принадлежности уменьшается до нуля, или посредством выбора двух нечетких чисел в качестве концов интервала. Вообще, можно построить нечеткий регион, окруженный нечеткой переходной зоной, в которой функция принадлежности уменьшается до нуля монотонно.

Альтернативный способ представления нечеткой области - это определение нечеткой гиперповерхности, формулирующий его границу. Такая граница гиперповерхности своего ядра, при удалении от которого значения функции принадлежности, монотонно убывает во всех направлениях.

Определение 4.19. Нечеткое множество, носитель которого состоит из одной точки, называется *синглтонной.*

Замечание. Близким к идеям альтернативной теории множеств является недоопределенное множество, описываемое четверкой

$$N = \{A^+, A^-, M_x, M_n\}$$

Здесь множества A^+ и A^- - суть конечного подмножества универсального множества X, причем A - есть множество элементов $x \in X$, которые точно принадлежат множеству A, а A—множество элементов $x \in X$, которые точно не принадлежат множеству A. Натуральные числа M_x и M_n - выражают соответственно верхнюю и нижнюю оценку мощности множества A. Это определение, моделирующее неполные сведения о конкретной совокупности A элементов некоторого универсума X, неявно задает трехзначную функцию принадлежности

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, \text{ для } A^+ \\ 0, \text{ для } A^- \\ ?, \text{для } X/\left(A^+ \cup A^-\right) \end{cases}$$

Естественным обобщением N является переход к паре

$$N = \left\{\mu_A, \left|\overline{\overline{\mu_A}}\right|\right\},$$

где μ_A - функция принадлежности $x \in X$ множеству A, а $\left|\overline{\overline{\mu_A}}\right|$ характеризует возможность для элементов натурального ряда быть значением мощности множества A.

2.4.2. Операции над нечеткими множествами

Определение 4.20. Дополнением нечеткого множества A будем называть нечеткое множество $\overline{A}$ (или же $\neg A$), определеное следующим образом:

$$\forall x \in X, \mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \qquad (4.16)$$

Пример 4.7. Если $X=\{1,2,3,...10\}$,

$$A=0{,}2/1+0{,}4/3+0{,}8/4+1/6+0{,}6+0{,}6/7, \text{ то}$$

$$\neg A = \overline{A} = 0{,}8/1+1/2+0{,}6/3+0{,}2/4+1/5+$$
$$+0{,}4/7+1/8+1/9+1/10$$

Следует отметить, что операция дополнения соответствует логиическому отрицанию.

Определение 4.21. Если А обычное четкое подмножество множества X, то пара $(A, \overline{A})$ называется разбиением множества X, если 1 $\neq \varnothing$, $A \neq X$

Определение 4.22. Если А - нечеткое подмножество множества X, причем $A \neq \varnothing$, то пара $(A, \overline{A})$ называется нечетким разбиением.

В примере 4.7. $X=(A, \overline{A})$ - есть нечеткое разбиение множества X.

Аналогично, если $A_1, A_2,...A_n$ таковы, что для $\forall x \in X, \quad \sum_{i=1}^{n} \mu_{A_i}(x) = 1,$ то эта система называется нечетким разбиением множества X.

Определение 4.23. Если $A_1, A_2,...A_n$ - нечеткие подмножества универсального множества X, а $\beta_1, \beta_2,...,\beta_n$ - неотрицательные вещественные коэффициенты $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$, то нечеткое множество А с функцией принадлежности $\mu_A(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mu_{A_i}(x)$ будем называть выпуклой комбинацией нечетких множеств $A_1, A_2,...A_n$.

Здесь подразумевается арифметическое суммирование.

Определение 4.24. Объединением нечетких множеств А и В будем называть такое множество С, функция принадлежности которого определяется следующим об разом:

$$\forall x \in X, \quad \mu_C = max(\mu_A(x), \mu_\beta(x)) = \mu_{A \cup B}(x) \qquad (4.17)$$

Объединение соответствует логической связи (ИЛИ). Так, если А и В названия нечетких множеств, то А или В следует понимать как нечеткое множество - Д, функция принадлежности которой определяется в виде:

$$\forall x \in X, \quad \mu_D = \mu_{A \cap B}(x) = min\big(\mu_A(x), \mu_\beta(x)\big) \qquad (4.18)$$

Операция пересечения соответствует логической связи (И) А и В= $A \cap B$

Пример 4.8. Если А=0,4/2+0,7/4+0,8/5+1/7+0,5/8, В=0,2/1+0,5/2+0,6/4+0,7/5+0,6/6+0,9/7+0,8/10, то

$$A \cup B = A + B = 0{,}2/1 + 0{,}5/2 + 0{,}7/4 + 0{,}8/5 +$$

$$+ 0{,}6/6 + 1/7 + 0{,}5/8 + 0{,}8/10$$

$$A \cap B = 0{,}4/2 + 0{,}6/4 + 0{,}7/5 + 0{,}9/7$$

Отметим, что операции $(\cup, \cap)$ над нечеткими множествами удовлетворяют следующим свойствам:

1) Нейтральность

$$min(1, \mu_A(x)) = \mu_A(x) => G \cap A = A$$

$$max(0, \mu_A(x)) = \mu_A(x) => \phi \cup A = A$$

2) коммутативность:

$$min(\mu_A(x), \mu_\beta(x)) = min(\mu_\beta(x), \mu_A(x)) => A \cap B = B \cap A$$

$$max(\mu_A(x), \mu_\beta(x)) = max(\mu_\beta(x), \mu_A(x)) => A \cup B = B \cup A$$

3) ассоциативность:

$$min(min(\mu_A(x), \mu_\beta(x), \mu_c(x)) =$$

$$= min(\mu_A(x), min(\mu_\beta(x), \mu_c(x)) =>$$

$$=> (A \cap B) = A \cap (B \cap C)$$

$$max(max(\mu_A(x), \mu_\beta(x), \mu_c(x)) =$$

$$= max(\mu_A(x), max(\mu_\beta(x), \mu_c(x)) =>$$

$$=> (A \cup B) = A \cup (B \cup C)$$

4) монотонность:

$$\mu_A(x) \le \mu_c(x) \wedge, \mu_{\beta c}(x) \le \mu_D(x) = min(\mu_A(x), \mu_{\beta c}(x)) \le$$

$$\le min) = \mu_c(x), \mu_D(x)) => A \subset C \cap B \subset D = A \cap B = C \cap D.$$

$$max(\mu_{AA}(x), \mu_{\beta c}(x) \le max(\mu_C(x) \mu_D(x) =>$$

$$A \subset C \cap B \subset D => A \cup B \subset C \cup D$$

5) идемпотентность:

$$min(\mu_A(x), \mu_A(x) = \mu_A(x) => A \cap A = A$$

$$max(\mu_A(x), \mu_A(x) = \mu_A(x) => A \cup A = A$$

6) дистрибутивность:

$$min\,\mu_A(x), max\,\mu_B(x), \mu_C(x) = max(min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

$$min(\mu_A(x), \mu_C(x)) => A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$$

$$max(\mu_A(x), \mu_C(x)) => A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$$

7) поглощение

$$min(\mu_A(x), max\,\mu_A(x), \mu_{BC}(x))) = \mu_A(x) => A \bigcap (A \bigcup B) = A$$

$$max(\mu_A(x), min(\mu_A(x), \mu_B(x))) = \mu_A(x) => A \bigcup (A \bigcap B) = A$$

8) Закон Деструкция Моргана:

$$1 - min(\mu_A(x), max\,\mu_B(x) =$$

$$= max(1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x) => \overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$$

$$1 - max(\mu_A(x), \mu_B(x)) =$$

$$= min(1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)) => \overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$$

9) двойное отрицание: $1 - (1 - \mu_A(x) = \mu_A(x) => \overline{\overline{A}} = A$

10) Отрицание основного и пустого множеств:

$$1\text{-}1=0 => G = \phi$$

$$1\text{-}0=1 => \phi = G$$

Для объединения и пересечения нечетких множеств можно пользоваться идругими операторами.

Определение 4.25. Алгебраическим произведением нечетких множеств А и В будем называть множество С, функция принадлежности которой определяется в виде:

$$\mu_c(x) = \mu_{AB}(x) = \mu_A(x), \mu_B(x)\, для \forall x \in X \tag{4.19}$$

Для нечетких множеств А и В примера 4.8 имеем:

$$AB=0{,}2/2+0{,}42/4+0{,}56/5+0{,}9/7$$

Алгебраическое произведение обозначается

$$AB = \sum_x \mu_A(x) \mu_B(x) / x \tag{4.20}$$

Из (4.20) следует, что для любого нечеткого множества А, где m - положительное число, A^m следует понимать так

$$A^m = \sum_x [\mu_A(x)]^m / x$$

Определение 4.26. Нечеткое множество, возникшее в результате возведения в степень (с помощью оператора концетрирования нечеткого множества)

$$con_m A = \{[\mu_A(x)]^m / x\}; \qquad \forall x \in X \tag{4.21}$$

будем называть концентрацией нечеткого множества А, а нечеткое множество, возникшее в результате извлечения из корня

$$dit_m A = \{\sqrt[m]{\mu_A(x)} / x, \quad \forall x \in X\} \tag{4.22}$$

будем называть расширением нечеткого множества А.

Пример 4.9. A={0,01/2;0,25/3;0,36/5;0,6/7} и m-2.Тогда

con_2A={0,0001/2;0,625/3;0,1296/5;0,36/7}

dit_2A={0,1/2;0,5/3;0,6/5;0,77/7}

Следствие 4.1. Так как соотношение $[\mu_A(x)]^m \leq \mu_A(x) \leq \sqrt[m]{\mu_A(x)}$ справедливо, то справедливо и соотношение $con_m A \subset A \subset dim\, A$

Следствие 4.2. Так как $A \subset B$ тогда и только тогда, когда $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ для $\forall x \in X$, то $\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x)$ для $\forall x \in B$, т.е. функция принадлежности множества В фактически не учавствует в определении $\mu_{A\cap B}(x)$

Определение 4.27. Алгебраической суммой нечетких множеств А и В будем называть множжество С, функция принадлежности которой оопределяется в виде:

$$\mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x), \ \forall x \in X \tag{4.23}$$

Пример 4.10. Если

A={0,1/1;0,4/3;0,63/4;0,82/5;1/7;0,9/8;0,7/9;0,5/10} и

B={0,35/3;0,5/4;0,25/5;0,7/6;0,8/7;0,2/8;0,15/9;0,1/10;0,005/11}, тогда

$$A \hat{+} B =$$
$$= \{0,1/1;0,61/3;0,825/4;0,87/5;0,7/6;1/7;0,92/8;$$
$$0,75/9;0,54/10;0,005/11\}$$

Определение 4.28. Ограниченной суммой нечетких множеств А и В будем называть множество A«+»B, функция принадлежности которой определяется в виде:

$$\mu_{A\oplus B}(x) = \min[1, \mu_A(x) + \mu_B(x)] \text{ для } \forall x \in X \tag{4.24}$$

Пример 4.11. Если

A={0,2/1;0,35/2;0,4/3;0,5/4;0,7/6;0,8/7;0,45/8;1/9;0,6/10} и
B={0,3/2;0,7/3;0,45/4;0,4/5;0,2/6;0,15/7;0,1/8;0,05/9}

Тогда

$A \oplus B$ ={0,2/1;0,6/2;1/3;0,95/4;0,4/5;0,9/6;0,95/7;1/8;1/9;0,6/10}

Определение 4.29. Ограниченным произведением нечетких множеств А и В будем называть нечеткое множество $A \otimes B$, если ее функция принадлежности определяется в виде:

$$\mu_{A\otimes B}(x) = max[0;\mu_A(x)+\mu_B(x)-1];\forall x \in X \qquad (4.25)$$

Пример 4.12. Для нечетких множеств А и В из примера 4.11

$$A \otimes B =$$
$$=\{0/1;0/2;0,1/3;0/4;0/5;0/6;0/7;0,05/8;0,05/9;0/10\}$$

Определение 4.30. Ограниченной разностью нечетких множеств А и В называется нечеткое множество $(A|-|B)$, функция принадлежности которой определяется в виде:

$$\mu_{A|-|B}(x) = max[0;(\mu_A(x)-\mu_B(x))], \ \forall x \in X \qquad (4.26)$$

Пример 4.13.

$A = (0,3a + 0,5b + 0,8c + 0,9d + m + 0,8n + 0,45k + 0,1p)$ и
$B = (0,4a + 0,3b + 0,5c + d + 0,8m + 0,6n + 0,3k + 0,2p + 0,1q)$

Определение 4.31. Симметрической раностью нечеткого множества А и В будем называть нечеткое множество $(A\nabla B)$, функция принадлежности которой определяется в виде:

$$\mu_{A\nabla B}(x) = |\mu_A(x)-\mu_B(x)| \quad , \ \forall x \in X \quad (4.27)$$

Пример 4.14.

A={0,08/1+0,25/2+0,45/3+0,7/4+0,85/5+0,9/5+0,9/7+1/8+0,92/9+0,8/10}

B={0,03/5+0,09/4+0,1/5+0,25/7+0,38/7+0,38/9+0,55/10+0,7/11+0,9/12}

$(A\nabla B)$={0,08/1+0,25/2+0,42/3+0,61/4+0,75/5+0,65/7+1/8+0,54/9+0,25/10+0,7/11++0,9/12}

Определение 4.32. Декартово произведение нечетких множеств $A_1, A_2, \ldots A_n$ б удем называть нечеткое множество $(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)$, являющееся нечетким помножеством множества $(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n)$, функция принадлежности которого определяется в виде:

$$\mu_{A_1 x \dots A_n}(x_1, \dots x_n) = \mu_{A_1}(x_1) \wedge \dots \wedge \mu_{A_n}(x_n) \qquad (4.28)$$

Поэтому

$$(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \bigcup_{x_1 \dots x_n} (\mu_{A_1}(x_1) \wedge \dots \wedge \mu_{A_n}(x_n)) / x_1 \dots . x_n$$

Пример 4.15. Если $X_1 = X_2 = \{2+4+6+8\}$

$A_1 = \{0,4/2+0,7/4+1/6+0,6/8\}$

$A_2 = \{0,5/4+0,8/6+1/8\}$, тогда

$$\begin{aligned}(A_1 \times A_2) = \{&0,4/2 \cdot 4) + 0,5/(4 \cdot 4) + 0,5/(6 \cdot 4) + \\ &+ 0,5/(8 \cdot 4) + 0,4/(2 \cdot 6) + 0,7/(4 \cdot 6) + \\ &+ 0,8/(6 \cdot 6) + 0,6/(8 \cdot 6) + 0,4/(2 \cdot 8) + \\ &+ 0,7/(4 \cdot 8) + 1/(6 \cdot 8) + 0,6/(8 \cdot 8)\}\end{aligned}$$

Определение 4.33. Опрератор F, преобразующий обычное (не нечеткое) множество в нечеткое множество, будем называть оператором увеличения нечеткости.

Из этого определения следут, что если оператор увеличения нечеткости F действует на нечеткое подмножество универсального множества X, то полученное множество F(A,K), где K - ядро оператора F, также есть нечеткое множество вида:

$$F(A,K) = \bigcup_x \mu_A(x) / K(x) \qquad (4.29)$$

То есть, рез ультатом действия оператора F на одноточеченое множество{1/x} есть

$$K(x) = F(1/x, K)$$

Пример 4.16.

X={1+2+3+4}; A={0,8/1+0,6/2}

K(1)=1/1+0,4/2; K(2)=1/2+0,4/1+0,4/3

Из определения 4.30 следует,что оператор увеличения нечеткости является оператором сжатия (сужения или концентрации) нечеткого множества.

Определение 4.34. Если $A_1,A_2,...A_n$ - нечеткое множество в $X_1,X_2,...,X_n$ соответственно, то *кортезитивным* произведением нечеткого множества в пространстве $(X_1,X_2,...,X_n)$, функция принадлежности которого определяется в виде:

$$\mu_{A,A_2 \dots A_n}(x_1, x_2, \dots x_n) = \mu_{A_1}(x_1), \dots . \mu_{A_n}(x_n)]$$

или же

$$\mu_{A,A_2...A_n}(x_1,x_2,...x_n)=\mu_{A_1}(x_1),\mu_{A_2}(x_2),....\mu_{A_n}(x_n) \qquad (4.30)$$

Пример 4.17.

A={20/0,1+21/0,3+22/0,4}

B={60/0,33+65/0,45+70/0,78}

$$R = A\times B = \left[(20\cdot 60)+(20\cdot 65)+(20\cdot 70)\right]/0{,}1+$$
$$+[(21\cdot 60)+(21\cdot 65)+(21\cdot 70)]/0{,}3+(22\cdot 60)0{,}33+$$
$$+(22\cdot 65)/0{,}45+(22\cdot 70)/0{,}4$$

Отметим, что определение операций дополнение, объединение, пересечение и т.д. для нечеткого множества типа 2 сопровождается с использованием принципа обобщения. Однако удобнее выполнить это в два этапа: сначала обобщить это определение для нечеткого множества типа 1 на нечеткие множества, значений функции принадлежности которых являются интервалы, а затем используя принцип обощения в форме множеств уровня перейти от интервалов к нечетким множествам. Проиллюстрируем этот метод на примере обощения понятия пересечения на нечеткое множество типа 2. Пусть A и B есть нечеткие подмножества типа 1 множества X. Тогда

$$\mu_{A\cap B}(x)=min[0;(\mu_A(x)\mu_B(x))],\ \ \forall x\in X$$

Если $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$ есть интервалы на [0;1], т.е.если для фиксированного *x* $\mu_A(x)=[a_1;b_1]$ и $\mu_B(x)=[a_2;b_2]$,

где a_1,a_2,b_1,b_2 зависят от *x*, то применяя принцип обощения к функции (min) получим:

$$min([a_1;b_1];[a_2;b_2])=[min(a_1;a_2),min(b_1;b_2)] \qquad (4.31)$$

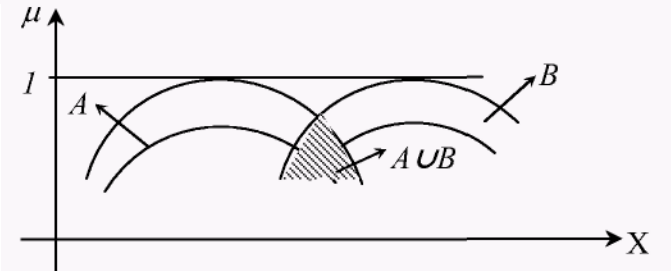


Рис.4.2

Таким образом, если значения функции принадлежности подмножеств A и B есть интервалы на [0;1], то пересечение этих множеств имеет функцию принадлежности, значения которой также являются интервалом.

Пусть теперь для каждого $x \in X$, $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$ есть нечеткие подмножества множества [0;1]. Для простоты предположим, что эти подмножества выпуклы, т.е. множество уровня есть интервалы. Иными словами, предположим, что для каждого $\alpha \in [0;1]$ множества *ОС* -уровня нечетких подмножеств А и В описываются функциями принадлежности $\mu_A^\alpha(x)$ и $\mu_A^\alpha(x)$, значениями которых являются интервалы.

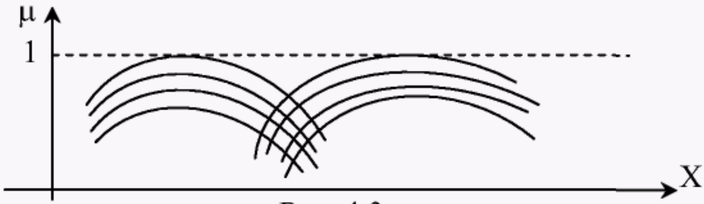


Рис. 4.3

Применяя принцип обощения в форме $A = \bigcup_{\alpha=0}^{\alpha=1} \alpha A_\alpha$ к множествам α -уровня нечетких подмножеств А и В называется множество, функция принадлежности которого $\mu_{A \cap B}$ определяется в виде:

$$\mu_{A \cap B}(x) = min(\mu_{A_\alpha}(x)\mu_{B_\alpha}(x)), \quad \forall x \in X \text{ и } \forall \alpha \in [0;1] \quad (4.32)$$

При этом $(A \cap B) = \bigcup_{\alpha=0}^{\alpha=1} \alpha(A_\alpha \cap B_\alpha)$

В заключение приведем перечень свойств множества нечетких подмножеств.

Если A, B, C - нечеткие подмножества универсального множества X, то справедливы следующие свойства

$$\left.\begin{matrix} A \cap B = B \cap A \\ A \cup B = B \cup A \end{matrix}\right\} \text{-коммутативность}$$

$$\left.\begin{matrix} (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \end{matrix}\right\} \text{ассоциативность}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \cap A = A \\ A \cup A = A \end{array}\right\}\text{идемпотентность}$$

$$\left.\begin{array}{l} (A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{array}\right\}\text{дистриб утивность}$$

$$A \cap \phi = \phi$$

где ϕ-обычное множество, такое, ч то

$$\forall x_i \in E,\ \mu_\phi(x_i) = 0,\ A \cup \phi = A,$$

$A \cap E = A$, где E - обычное множсетво, такое, что

$$\forall x_i \in E,\ \mu_E(x_i) = 1$$

$$A \cup E = E$$

$$(\overline{\overline{A}}) = A \text{-инволюция}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \end{array}\right\}$$ -теорема деструкция Моргана для нечетких множеств.

Отметим, что в отличии от обычных (четких множеств) для нечетких множеств не выполняются условия

$$A \cap \overline{A} = \phi \text{ и } \overline{A} \cup A = E$$

2.4.3 Принцип обобщения

Принцип обобщения как одна из основных идей теории нечетких множеств имеет эвристический характер и позволяет расширить область определения исходного отображения на класс нечетких множеств, а также обощить определения операций над нечетким множеством типа 2 и выше. Оно, в сущности, представляет собой основное равенство, позволяющее расширить область определения отображения или отношения, включив в нее наряду с точками произвольные нечеткие подмножества универсального множества X.

Пусть $\varphi : X \to Y$- заданное отображение, а A - нечеткое множество в *Y* с функцией принадлежности

$$\mu_B(y) = \underset{x \in \varphi^{-1}}{sur}\ \mu_A(x), \quad y \in Y$$

где $\varphi^{-1}(y) = \{x \in X \varphi(x) = y\}$. В случае нечеткого отображения $\varphi : X \to Y$ имеем:

$$\mu_B(y) = \underset{x \in X}{sur} \min\{\mu_A(x), \mu_\varphi(x, y)\qquad (4.33)$$

Конкретное, если $A \subset X$ подмножество вида: $A = \{\mu_1 / x + \mu_2 / x_2 + ... + \mu_n / x_n\}$, тогда принцип обобщения утверждает, что

$$\begin{aligned}\varphi(A) &= \{\mu_1 / x + \mu_2 / x_2 + ... + \mu_n / x_n\} = \\ &= \mu_1 \varphi(x_1) + \mu_2 \varphi(x_2) + ... + \mu_n \varphi(x_n)\end{aligned}\qquad (4.34)$$

Итак, образ множества А можно получить, зная образы элементов при этом отображении.

Пример 4.18. Пусть X={1+2+….+10}

φ - оператор возведения в куб ,

A={1/1+1/2+0,8/3+0,6/4+0,4/5}.

Тогда учитывая (4.34) имеем:

$\varphi(A) = \{1/1 + 1/8 + 0,8/27 + 0,6/64 + 0,4/125\}$

Если носитель нечеткого множества имеет мощность континиума, то

$$A = \underset{x}{\cup} \mu_A(x)/x \qquad x \in X \qquad (4.35)$$

При этом принцип обобщения означает следующее:

$$\varphi(A) = \varphi(\underset{x}{\cup} \mu_A(x)/x) = \underset{y}{\cup} \mu_A(x)/\varphi(x) \qquad (4.36)$$

При этом необходимо учесть, что φ(*x*) точки множества $y_{\alpha a} \mu_A(x)$ - степень принадлежности φ(*x*) - нечеткому подмножеству φ*(A)* множества *Y*.

В некоторых случаях принцип обобщения удобно использовать в другой форме, которая получается из (4.36) путем разложения А не на одноточечные нечеткие множества, а на соответствующие ему множества уровней:

$$A = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=1} \alpha A_\alpha$$

В этом случае принцип обобщения выражается в следующей форме:

$$\varphi(A)=\varphi(\mathop{\Sigma}_{\alpha=0}^{\alpha=1}\alpha A_\alpha)=\mathop{\Sigma}_{\alpha=0}^{\alpha=1}\alpha\varphi(A_\alpha) \quad (4.37)$$

Если носитель А имеет мощность континиума, то

$$\varphi(A)=\varphi\left(\mathop{\cup}_{\alpha=0}^{\alpha=1}\alpha A_\alpha\right)=\mathop{\cup}_{\alpha}\alpha\varphi(A_\alpha) \quad (4.38)$$

Замечание 4.3. Принцип обобщения в форме (4.41) позволяет расширить область определения отображения φ, включив в себя наряду с точками и произвольные нечеткие подмножества множества X. Принцип обобщения в форме (4.38) позволяет рассмотреть область определения отображения φ, включив в нее наряду с обычными (не нечеткими) подмножествами X произвольные нечеткие подмножества X.

Следует отметить, что (4.36) и (4.38) эквивалентны, поскольку (4.38) вытекает из (4.36), если перегруппировать члены в различные множества А.

Замечание 4.4. Принцип обобщения аналогичен принципу суперпозиции для линейных систем, согласно которому, если L-линейная система и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - входные сигналы, то откликом (изображением, образом) системы L на любую линейную комбинацию $x=\gamma_1 x_1+\gamma_2 x_2+\ldots+\gamma_n x_n$, где γ_i $(i=1,n)$ - постоянные коэффициенты, являются:

$$L(x)=L(\gamma_1 x_1+\gamma_2 x_2+\ldots+\gamma_n x_n)= \\ =\gamma_1 L(x_1)+\gamma_2 L(x_2)+\ldots+\gamma_n L(x_n) \quad (4.39)$$

Существенное различие между (4.39) и (4.34) состоит в том, что в (4.34) знак (+) означает объединение, а не арифметическую сумму и φ не ограничивается только линейным отображением.

Следует отметить, что во многих приложениях принципа обобщения возникает следующая проблема. Имеется функция *n*-переменных $f: x_1\times x_2\times\ldots\times x_n\rightarrow y_n$ нечеткое множество (отношение) А в $X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$, характеризующаяся функцией принадлежности $\mu_A(x_1,..x_n)$ $(x_i\in X_i,\ i=\overrightarrow{1,n})$.

Непосредственное применение принципа обобщения (4.36) в этом случае дает:

$$f(A)f\left(\bigcup_{(x_1...x_n)}\mu_A(x_1,...x_n)/x_1,...x_n\right)= \\ =\bigcup_y \mu_A(x_1,...,x_n)/f(x_1,...x_n) \qquad (4.40)$$

Однако во многих случаях нам бывает известно не само множество А, а его проекции $A_1, A_2,...A_n$ на $X_1, X_2,..., X_n$ соответственно. В связи с этим возникает вопрос: как выражение для μ_A следует использовать в (4.39)?

В этих случаях, если особенно не оговорено, будем предполагать, что функция принадлжености отноошения А имеет вид:

$$\mu_{A1}(x_1,...,x_n)=\mu_{A_1}(x_1)\wedge\mu_{A_2}(x_2)\wedge.....\wedge\mu_{A_n}(x_n)= \\ =min\,\mu_{A_i}(x_i) \qquad (4.41)$$

где μ_{A_i}-функции принадлежности отношения A_i. Т.е. А есть наибольшее множество, проекции которого на $X_1, X_2,..., X_n$ суть $A_1, A_2,...A_n$ соответственно.

Пример 4.19. Пусть $X_1 = X_2 = \{1+2+....+10\}$ и

$$A_1 = \{n\ римерно\ 2\} = \{0,6/1+1/2+0,6/3\}$$

$$A_2 = \{n\ римерно\ 6\} = \{0,8/5+1/6+0,7/7\}$$

f-операция возведения в квадрат.

$f(x_1, x_2) = x_1 \times x_2$ - арифметическое произведение.

Используя (4.41) и применяя принцип обобщения (4.41) имеем:

$$2\times 6 = \{0,6/1+1/2+0,6/3\}\times\{0,8/5+1/6+0,7/7\} = \\ =\{0,6/5+0,6/6+0,6/7+0,8/10+1/12+0,7/14+ \\ +0,6/15+0,6/18/0,6/21\}$$

2.4.4. Размытые нечеткие множества

В некоторых работах было предложено ввести в рассмотрение показатель неопределенности, который можно использовать для оценки классификации объектов, описываемых нечетким множеством. Там же были сформулированы основные свойства, которыми должен удовлетворять такой показатель, называемый показателем *размытости нечетких множеств*. В качестве этого покаателя был предложен функционал, аналогичный шенноновской энтропии в теории информации. В настоящее время существует большое количество работ, в которых рассматриваются различные подходы к определению показателя размытости нечетких множеств, об суждаются их способы и возможные приложения.

Можно выделить несколько аспектов, связанных с понятием показателя размытости нечетких множеств:

1) интерпретация показателя размытости как показателя внутренней неопределенности, двусмысленности, противоположности, об условленных неполной, частичной принадлежностью объектов множеству;

2) интерпретация показателя размытости, как мера отличия нечеткого множества от обычного множества;

3) существование нетривиального показателя размытости, удовлетворяющего определенным свойствам, которое тесно связанным со свойствами самой алгебры нечеткое множество и характеризующее как алгебраическую структуру.

Рассмотрим основные результаты, связанные с понятием показателя размытости нечеткого множества в соответствии этих трех аспектов.

I. Аксиоматический подход к определению показателей размытости нечеткого множества

Основные свойства, которым должны удовлетворятт показатели размытости нечеткого множества сформулированы в ряде работ. В этих работах приведены различные модификации и дополнения этих свойств, положенные в основу аксиоматического определения показателя размытости нечеткого множества.

Показатель размытости нечеткого множества можно определить как меру внутренней неопределенности, двусмысленности объектов множества X по отношению к некоторому свойству A, характеризующему эти объекты и определяющему в X нечеткое множество объектов A. Если некоторый объект $x \in X$ обладает свойством A, но лишь в частичной мере $0 < \mu_A(x) < 1$, то внутренняя неопределенность, двусмысленность объекта *x* по отношению к свойству A проявляется в том, что он, хотя и в разной степени принадлежит сразу двум противоположным классам: классу объектов, обладающих свойством "A" и классу объектов, не обладающих свойству "A". Эта двусмысленность объектах по отношению к свойству "A" максимальна, когда степень принадлежности объектах обеим классам "A" и "не A" равны, т.е.

$$\mu_A(x)=0{,}5;\ \mu_{неA}(x)=1-0{,}5\mu_A(x)=0{,}5.$$

И наоборот, двусмысленность объекта минимальна, когда объект принадлежит только к одному из этих классов, т.е. либо $\mu_A(x)=1\ \mu_{неA}(x)=0$, либо $\mu_A(x)=0;$ $\mu_{неA}(x)=1.$

Таким образом, глобальный показатель размытости нечеткого множества можно определить в виде функционала $F(x)\to R^+$, удовлетворяющего следующим условиям:

1. d(A)=0 тогда и только тогда, когда А - обычное множество;
2. d(A) принимает максимальное значение тогда и только тогда, когда $\mu_A(x)=0{,}5;\ \forall x\in X$
3. d(A)<d(B), если А является заостренем $B:\mu_A\le\mu_B$, т.е. $\mu_A(x)\le\mu_B(x)$ при $\mu_B(x)<0{,}5; \mu_A(x)\ge\mu_B(x)$ при $\mu_B(x)>0{,}5;$ и $\mu_B(x)$ любое при $\mu_B(x)=0{,}5;$
4. d(A)=d($\overline{A}$) (симметричность по отношению к 0,5);
5. $d(A\bigcup B)+d(A\bigcap B)=d(A)+d(B)$, т.е. d-является оценкой на решетке F(x). (где всюду d-нечеткий квантор - степень отличия нечеткости от четкости или же показатель размытости).

Условие 4 представляется достаточно естейственным, а условие 5 приводит к адитивности показателя размытости d.

Установлено, что условие 5 при конечном X выполняется для любой функции $d:F(x)\to R^+$ тогда и только тогда, когда d - допускает представление

$$d(A)=\sum_{i=1}^{N}T_i\big(\mu_A(x_i)\big) \tag{4.42}$$

где $T_i(y)$- вещественнозначные функции от $y\in[0;1]$и N - число элементов множества $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$. В ряде работ предлагается усилить условие и потребовать наряду с условиями 1 и 2 строгого возрастания *d*. В условии 3 $d(A)<d(B)$, если *A* является заостренем *B* и *A*≠*B*. Тогда услови 2 окажется лишним, так как оно следует из условия 3, а из условия 3 и 5 следует, что условие 1 можно заменить на более простое: $d(\varnothing)=0$, т.е. $(\varnothing)=0$ для всех $x\in X$. Условия 5 и 6 $d(\varnothing)=0$ эквивалентны условию q.7. $d(A\bigcup B)=d(A)+d(B)$, если $A\bigcap B=\varnothing.$

Итак, показатель размытости можно рассматривать как адаптивный (условие 7), симметричный условию 4 и строго возрастающий с увеличением размытости нечеткого множества (3) - функционал, определенный на *F(x)*. Можно показать, что определенный на F(x) вещественный функционал является показателем размытости на *F(x)* тогда и только тогда, клгда он допускает представление (4.42), где для всех $j \in \{1,2,...N\}\, T_i(y)$ вещественные функции от $y \in [0;1]$ такие, что $T_i(0) = 0; T_i(y) = T_i(1-y)$, $T_i(y)$ - строго возрастает на интервале [0;0,5].

Здесь предполагается, что $X = \{x_1, x_2, ..., x_N\}$. По аналгогии с шенноновской энтропией теории информации вводится логарифмическая энтропия нечеткого множества.

$$d(A) = K \sum_{j=1}^{N} S(\mu_A(x_i)) \qquad (4.43)$$

где S-функция Шеннона

$$S(y) = -y \ln y - (1-y)\ln(1-y) \qquad (4.44)$$

и К - положительная константа. В (4.44) полагают, что $S(0) = S(1) = 0$.

В ряде работ исследуются также свойства показателя раз мытости (4.42), в котором $T_i(y)$ имеет вид:

$$T_i(y) = h(y) + h(1-y) \qquad (4.45)$$

где $h(y)$ - непрерывные и строго вогнутые функции в интервале [0;1] такие, что $\lim\limits_{y \to 0} h(y) = \lim\limits_{y \to 1} h(y) = 0$. Этот показатель размытости связан с мощностью нечеткого множества $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{N} \mu_A(x_i)$ следующим образом $d(A) \le NT(P(A)/N)$

В (4.45) функции *h* могут быть записаны в виде $h(y) = yL(1/y)$, где L-непрерывная вогнутая функция в $(1;+\infty)$.

Выбор $L(y) = \ln(y)$ приводит к (4.43), а выбор $L(y) = 1 - 1/y$ приводит к функционалу

$$d(A) = \sum_{i=1}^{N} \mu_A(x_i)[1 - \mu_A(x_i)] \qquad (4\ .46)$$

Если моменты нечеткого множества определить в виде:

$$M_h(A)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left\{\mu_A^K(x_i)[1-\mu_A(x_i)]+[1-\mu_A(x_i)]^K\mu_A(x_i)\right\},$$
$$K=1,2,....,\infty,$$

то показатель размытости (4.46) будет моментом первого порядка, логарифмическая энтропия может может быть выражена через моменты следующим образом:

$$d(A)=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M_k(A)}{K} \qquad (4.47)$$

Если отказаться от условия адитивности 5, то показатель размытости может быть задан как монотонно возрастающая функция

$$d(A)=F\left[\sum_{k=1}^{\infty}T_i(\mu_A(x_i))\right] \qquad (4.48)$$

Выбор конкретного показателя размытости зависит от условий задачи. В ряде работ рассмотрена связь между показателями размытости нечеткого множества и неопределенностью, возникающей при принятии решения, к какому из двух классов "A" или "не A" отнести объекты множества X.

Пример 4.20. Определить показатель размытости нечеткого множества.

$$A=\{1/0,2+3/0,4+4/0,8+5/0,9+6/1+$$
$$+7/0,6+8/0,4+9/0,3+10/0,1\}$$

На основании (4.46) имеем:

$$d(A)=0,2\cdot0,8+0,4\cdot0,6+0,8\cdot0,2+0,9\cdot0,1+1\cdot0+$$
$$+0,6\cdot0,4+0,4\cdot0,6+0,3\cdot0,7+0,1\cdot0,9=1,35$$

В эвклидовом пространстве на основании (4.48) имеем:

$$d_A=$$
$$=\frac{2}{\sqrt{10}}\sqrt{0,2^2+0,4^2+0,2^2+0,1^2+0,4^2+0,4^2+0,3^2+0,1^2}=$$
$$=0,61$$

II. Метрический подход к определению показателя размытости нечеткого множества.

Показатель размытости нечеткого множества можно определить как меру отличия нечеткого множества от ближайшего к нему обычного неразмытого множества с помощью метрики, введенной в $\Im(x)$. Другой способ задания показателя размытости множества с помощью метрики - это определение его с помощью расстояния до максимального размытого множества $A_{0,5}; \mu_{A0,5}(x)=0,5, \quad \forall x \in X$ и расстояния между нечетким множествами его дополнением. Оказывается, эти подходы имеют много общего между собой и определяемый спомощью метрики показатель размытости обладает многими ранее сформулированными свойствами.

Оп ределение 4.35. Множество, ближайший к множеству $\widetilde{A}$ называется неразмытое множество А такое, что $\mu_A(x)=0$ при $\mu_A(x) \le 0,5 \quad \mu_A(x)=1$ при $\mu_{\widetilde{A}}(x) > 0,5$.При этом

Определение 4.36. Показатель размытости называется функционал

$$d(A)=\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\mu_{\widetilde{A}}(x_i)-\mu_A(x_i)\right|, \tag{4.49}$$

который может быть представлен в виде:

$$d(A)=\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}\mu_{A\cap\overline{A}}(x_i)$$

Если вместо расстояния Хемминга в (4.49) использовать евклидово расстояние, то:

$$d(A)=\frac{2}{\sqrt{N}}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\mu_A(x_i)-\mu_A(x_i)\right)^2} \tag{4.50}$$

Здесь А и $\overline{A}$ - соответственно четкие множества, ближайшие к нечеткому множеству слева и справа. Показатели (4.49) и (4.50) соответственно, вид (4.42) и (4.48) и удовлетворяют соответственно свойствам показателя размытости. В случае произвольной метрики $d(A)=\rho(A,\underline{A})$ удовлетворяет свойтсвам условия 1 и условия 3.

Показатель размытости можно задать с помощью расстояния между нечетким множеством и его дополнением.

$$d(A)=K[\rho(\phi,B)-\rho(A,\overline{A})]$$

где B(x)=1, $\forall x \in X$ и $\rho(A,\overline{A}')$ в случае метрики Хемминга имеет вид:

$$\rho(A,\overline{A})=\sum_{i=1}^{N}\left|\mu_A(x_i)-\mu_{\overline{A}}(x_i)\right|=\sum_{i=1}^{N}\left|2\mu_A(x_i)-1\right|$$

В общем случае такой показ атель размытости удовлетворяет свойствам условий 1-4.

Показатель размытости можно задать функционалом

$$d(A) = \frac{1}{2}\rho(\phi, B) - \rho(A, A_{0,5}),$$

который в общем случае удовлетворяет лишь свойствам 1, 2,3.

Следует отметить, что свойства 1 и 2 в зависимости от определения показателя размытости не выполняется для метрики.

$$\rho(A, B) = \sup_{x \in X}\left|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)\right|$$

Пример 4.21.

Для $A = \{x_1 / 0{,}3 + x_2 / 0{,}8 + x_3 / 1 + x_4 / 0{,}6\}$ и

$$B = \{x_1 / 0{,}8 + x_2 / 0{,}1 + x_3 / 0{,}1 + x_4 / 0\}$$

$$d(A, B) = |0{,}3 - 0{,}8| + |0{,}8 - 0{,}1| + |1 - 0{,}1| + |0{,}6 - 0| = 2{,}7$$

III. Другие подходы к определению показателей размытости

В ряде работ предложено обобщение понятия неопределенности на случай М-ортогональных свойств, т.е. таких $A^j\,(j = \overrightarrow{1, M})$, что $\sum_{j=1}^{M} \mu_{A^j}(x) = 1.$

Обычный показатель размытости получается при М=2. Этот обобщенный показатель неопределенности описывается для каждого $x \in X$ с помощью (4.45):

$$M(x) = \sum_{j=1}^{M} (\mu_{A^j}(x)) \tag{4.51}$$

Этот показатель может использоваться при анализе процессов принятия решений на основе описания объектов с помощью М-ортогональных свойств.

Интересный вариант аксиоматизации показателей размытости предложен в раде работ, где рассмотрен класс С, дополненнный в алгебре нечетких множеств, введено понятие равновесного значения *c(x) =x* и дана расширенная интерпритация условия 3.

Условие $3'.\ \mu_A \le \mu_B,$ если

$$\left|\mu_A(x) - C(\mu_A(x))\right| \geq \left|\mu_B(x) - C(\mu_A(x))\right|$$

Для случая L-нечетких множеств, когда L - векторная решетка, показатель размытости (4.42) может быть представлен в виде:

$$d(A) = \begin{bmatrix} d_1(A) \\ d_2(A) \\ \dots\dots\dots\dots \\ d_k(A) \end{bmatrix}$$

или его свертки $d(x) = \sum_{j=1}^{K} d_j(A)$, где $d(A_j)$

показатель размытости нечеткого множества $d(A_j)$ на случай произвольного множества X даются в ряде работ. Эти подходы основаны на понятиях сходящихся рядов, интеграла по мере и нечеткого интеграла. В отдельную группу следует выделить показатели неопределенности в ситуации принятия решения, основанные на понятии мощности подмножества OC -уровня нечеткого множества,

$$\left|A_\alpha\right| = \left|\{x \in X / \mu(x) \geq \alpha\}\right|$$

Примерами могут служить

$$T_\tau(\mu_A) = \int_0^{\alpha_{\max}} \frac{1}{\left|A_\alpha\right|} d\alpha$$

и двойственный ему показатель

$$A_n(\mu_A) = 1 - T_\tau(\mu_A),$$

а так же показатель неопределенности

$$W(\mu_A) = \int_0^1 \log_2 \left|A_\alpha\right| d\alpha$$

и связанная с ним мера прироста информации.

$$g(\mu_A, \mu_B) = W(\mu_B) - W(\mu_A) = \int_0^1 \log_2 \left|\frac{B_\alpha}{A_\alpha}\right| d\alpha,$$

где $A_\alpha = \{x \in X; \mu_A \geq \alpha\}$; $B_\alpha = \{x \in X;\ \mu_B \geq \alpha\}$

IV. Решетка нечеткого множества и связь показателя размытости с алгебраическими свойствами.

Определение 4.37. Пусть Е-универсальное множество. Предположим, что для каждой пары обычных подмножеств $\{x_i, x_j\}$ множества Е существует один и только один элемент Е-нижняя граница $\{x_i, x_j\}$ и существует один и только один элемент Е-верхняя граница $\{x_i, x_j\}$. В этом случае говорят, что Е-решетка или сетчатое множество. Если $x_i \Delta x_j$ и $x_i \nabla x_j$ - нижняя и верхняя границы $\{x_i, x_j\}$, то определение решетки можно записать:

$$(\forall X_i),(\forall X_j),(X_i \in E \text{ и } (X_j \in E)$$
$$\left.\begin{array}{l} \exists! X_k = X_i \Delta X_j \text{ и } X_k \in E \\ \exists! X_i = X_i \nabla X_j \text{ и } X_j \in E \end{array}\right\} \quad (4.52)$$

Решетка обладает следующими свойствами:

$$\left.\begin{array}{l} A\Delta B = B\Delta A \\ A\nabla B = B\nabla A \end{array}\right\} \text{коммутативность} \quad (4.53)$$

$$\left.\begin{array}{l} A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C \\ A\nabla(B\nabla C) = (A\nabla B)\nabla C \end{array}\right\} \text{ассоциативность} \quad (4.54)$$

$$\left.\begin{array}{l} A\Delta A = A \\ A\nabla A = A \end{array}\right\} \text{идемпотентность} \quad (4.55)$$

$$\left.\begin{array}{l} A\Delta(A\nabla B) = A \\ A\nabla(A\Delta B) = A \end{array}\right\} \text{поглощение} \quad (4.56)$$

Определение 4.38. Решетка Е называется молярной, если для трех произвольных элементов X_1, X_2 и $X_3 \in E$

$$(X_1 \underset{\sim}{<} X_3) \Rightarrow (X_1 \nabla (X_2 \Delta X_3)) = ((X_1 \nabla X_2)\Delta X_3) \quad (4.57)$$

где $\lesssim$ - означает отношение порядка на решетке.

Определение 4.39. Решетку E будем называть дистрибутивной, елси выполняются условия:

$$\begin{aligned}&\forall X_1, X_2, X_3 \in E\\&X_1\nabla(X_2\Delta X_3) = (X_1\nabla X_2)\Delta(X_1\nabla X_3)\\&X_1\Delta(X_2\nabla X_3) = (X_1\Delta X_2)\nabla(X_1\Delta X_3)\end{aligned} \qquad (4.58)$$

Например

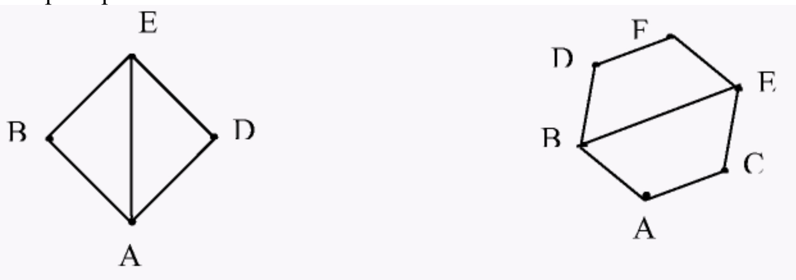


Рис.4.4

Решетка на рис.4.4 *A* модулярна. Проверим для AB и C.

Имеем $A \lesssim C$

$$A\nabla(B\Delta C) = A\nabla A = A; \quad (A\nabla B)\Delta C = B\Delta C = A$$

Можно проверить, что решетка на рис. 4.4.б дистрибутивна. *Определение 4.40.* Пусть V - нижняя граница решетки E, а элемент U - верхняя граница. Тогда элемент X_j называется дополнением элемента X_i, если:

$$X_i\Delta X_j = V \text{ и } X_i\Delta X_j = U \qquad (4.59)$$

Обозначим через $\overline{X}_i$ дополнительный элемент элемента X_i. Дополнение X_i (если оно существует) не обязательно единственно.

Определение 4.41. Решетка E называется решеткой с дополнением, если:

1) она обладает единственным элементом $0 = \inf(E)$ и единственным элементом $U = sur(E)$,

2) каждый $X_i \in E$ обладает по крайней мере одним дополнением E.

Определение 4.42. Решетка, которая дистрибутивна и с дополнением, называется булевой, т.е. удовлетворяет следующим свойствам булевой рештки:

1) для каждого элемента существует одно и только одно дополение;

2) для каждого X_i имеем $\left(\overline{\overline{X}_i}\right) = X_i$;

3) $\overline{X_i \Delta X_j} = \overline{X}_i \nabla \overline{X}_j; \quad \overline{X_i \nabla X_j} = \overline{X}_i \Delta \overline{X}_j;$ (4.60)

4) каждая конечная булева решетка изоморфна решетке множества всех подмножеств относительно включения и наоборот.

Определение 4.43. Пусть $A_1, A_2, ...A_n$ - множество, каждое из которых вполне упорядочено отношением <. Произведение множеств $A_1, A_2, ...A_n$ упорядочено и образует решетку, называемую векторной решеткой, а отношение порядка на ней является отношением доменирования (ν' доменирует ν, если $\nu' \underset{\sim}{>} \nu$) тогда и только тогда, когда

$$K_1' \geq K_1, \; K_2' \geq K_2, ...K_n' \geq K_n,$$

где

$$\nu = (K_1, K_2, ...K_n) \text{ и } \nu' = (K_1', K_2', ...K_n') \quad (4.61)$$

На рис. 4.5 изображена векторная решетка, образованная произведением множеств:

$$A = \{A_1 A_2\}, \; B = \{B_1, B_2, B_3\} \text{ и } C = \{C_1, C_2, C_3\}$$

132 означает $(A_1B_3C_2)$

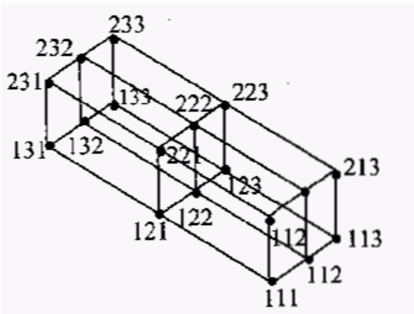


Рис. 4.5

Отметим, что каждая векторная решетка дистрибутивна, но не имеет дополнений.

Произведение двух решеток есть решетка, т.е., если E_1 - решетка, E_2-решетка, то $E_1 \times E_2$ -решетка.
Например,

$E_2 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ и
$F < E < B < A,\ F < E < C < A,\quad F < E < D < A,$

имеем $E_1 = \{A, B, C, D, E, F\}$,
$\varepsilon < \nu < \beta < \alpha, \varepsilon < \delta < \alpha$, **то**
$(F, \varepsilon) < (F\nu) < (FB) < (F\alpha);\ (F\varepsilon) < (E\varepsilon)$ и т.д.

Существование показателя размытости тесно связано со свойтсвами алгебры нечеткого множества Заде. Для алгебры обычных множеств показатель размытости со свойствами условий 3, 4, 7 выражается в тривиальный показатель, всюду равный нулю. Для более общих алгебр такой показатель просто не существует. Сначала установим соотношения, существующие между произвольными метриками и показателями размытости, а так же связь между свойствами показателя размытости и свойствами алгебры нечеткого множества.

Определение 4.44. Положительной оценкой на решетке нечеткого множества *F(x)* называется функция $\upsilon : F(x) \to R^+$, если она удовлетворяет свойству

$$\upsilon(A \bigcup B) + \upsilon(A \bigcap B) = \upsilon(A) + \upsilon(B) \qquad (4.62)$$

и условию:

$$\text{из } A \subset B \text{ следует } \upsilon(A) < \upsilon(B) \qquad (4.63)$$

Положительная оценка *v* определяет на *F(x)* метрику:

$$\rho(A, B) = (A \bigcup B) - \upsilon(A \bigcap B) \qquad (4.64)$$

Определение 4.45. Решетка F(x) с положительной оценкой *v* и метрической решеткой нечеткого множества.

Определение 4.46. Метрика называется симметричной, если она удовлетворяет условию

$$\rho(A, B) = \rho(\overline{A}, \overline{B}) \qquad (4.65)$$

Так как в алгебре нечетких множеств выполняются законы Деструкция Моргана

$$\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B};\quad \overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}; \qquad (4.66)$$

то из (4.62), (4.64) и (4.66) следует, что метрика является симметричной тогда и только тогда, когда она определяется симметричной оценкой, т.е. удовлетворяющей условию

$$\upsilon(A)+\upsilon(\overline{A})=\upsilon(\phi)+\upsilon(B) \qquad (4.67)$$

В ряде работ доказаны:

Теорема 4.1. В метрической решетке нечетких множеств функционалы

$$d(A)=2K[\upsilon(B)-\upsilon(A\bigcup\overline{A})] \qquad (4.68)$$

$$d(A)=2K[\upsilon(A\bigcap\overline{A})-\upsilon(\phi)] \qquad (4.69)$$

$$d(A)=K[\rho(\phi,B)-\rho(A,\overline{A})] \qquad (4.70)$$

удовлетворяют свойствам условий 3,4,7 и они попарно тождественны тогда и только тогда, когда положительная оценка *v* симметрична.

Теорема 4.2. Если ρ -симметричная метрика, то функционал

$$d(A)=K[\rho(0,B)-2\rho(A,\overline{A}_{0,5})] \qquad (4.71)$$

удовлетворяет свойствам условий q3, q4, q7 и тождественно функционалам (4.68)-(4.70), причем для любого показателя размытости, введенного в *F(x)* и удовлетворяющего свойствам условий q3, q4, q7 существет единственная согласованная с ним соотношением (4.51) симметричная метрика.

Примером симметричной оценки на решетке нечеткого множества может служить энергия нечеткого множества

$$E(A)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\mu_A(x_i),$$

которая определяет симметричную метрику

$$\rho(A,B)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\left|\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)\right| \qquad (4.72)$$

и согласованную с нею меру энтропии:

$$\begin{aligned} d(A) &= E(A \cap \overline{A}) = \\ &= 2\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \min\{\mu_A(x_i),\ 1-\mu_A(x_i)\} = \\ &= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i - 2\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \left|\mu_A(x_i) - 0{,}5\right| \end{aligned} \qquad (4.73)$$

Сформулируем условия, аналогичные условиям 3,4,7 для произвольных алгебр Деструкция Моргана $L_m, U, \cap, -)$. Условие 7 удобнее записать в виде условий 5 и 6

A.1. $d(\phi) = 0$

A.2. $d(a) = d(\overline{A})$

A.3. $d(A) < d(B)$, если $A \cap \overline{A} \subset B \cap \overline{B}$

A.4. $d(A \cup B) + d(A \cap B) = d(A) + d(B)$

Теорема 4.3. На метрической алгебре Деструкция Моргана L_m с положительной оценкой v может быть задана функция d, удовлетворяющая условиям А1-А4, тогда и только тогда, когда L_m является булевой алгеброй. Функции (4.68)-(4.70), определенные на L_m, удовлетворяют условиям А1-А4. Они попарно тождественны тогда и только тогда, когда оценка v симметрична. Однако v симметрична тогда и только тогда, когда определенная ею метрика симметрична.

Наконец, следует отметить, что показатель размытости так же принято называть индексом нечеткости.

Причем, кроме (4.49)и (4.50) относительно расстояний Хемминга пользуются и квадратичным индексом нечеткости, обозначая их

$$\nu(\widetilde{A}) = \frac{2}{n} d(\widetilde{A}, A) \quad (4.74) \qquad \eta(\widetilde{A}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \ell(\widetilde{A}, A) \quad (4.75)$$

Число 2 появилось в числителе для того, чтобы получить

$0 \le \nu(A) \le 1$ и $0 \le \eta(A) \le 1$, так как

$$0 \le d(\widetilde{A}, A) \le \frac{1}{2} \text{ и } 0 \le \ell(\widetilde{A}, A) \le \frac{1}{2}$$

Например, по формуле (4.74) имеем:

$\nu(\widetilde{A}) = \dfrac{2}{b-a}\int\limits_a^b \left|\mu_{\widetilde{A}}(x) - \mu_A(x)\right| dx,$ а ближайшее обычное множество изображено на рис.4.6

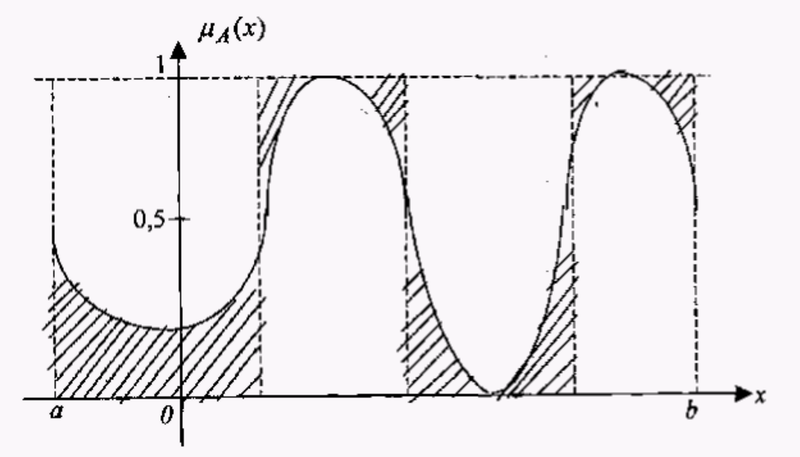


Рис.4.6

Пример 4.21

$$\overline{A} = \{x_1 / 0{,}6; x_2 / 0{,}2; x_3 / 0{,}5; x_4 / 1; x_5 / 0{,}7\}$$
$$A \cap \overline{A} = \{x_1 / 0{,}4; x_2 / 0{,}8; x_3 / 0{,}5; x_4 / 0; x_5 / 0{,}3\}$$

Нечеткое подмножество с функцией принадлежности $2\mu_{A\cap\overline{A}}(x)$ иногда называют векторным индиктаором нечеткости. Таким образом, для

$$A = \{x_1 / 0{,}4; x_2 / 0{,}8; x_3 / 0{,}5; x_4 / 0; x_5 / 0{,}3\}$$

имеем векторный индекс нечеткости

$\{x_1 / 0{,}8; x_2 / 0{,}4; x_3 / 1; x_4 / 0; x_5 / 0{,}6\}$ и $\nu(A) = 0{,}56$

V. Оценка нечеткости через энтропию.

Как из вестно, энтропия системы измеряет степень беспорядка компонентов системы отностительно вероятностей состояния. Рассмотрим конечное универсальное множество. Рассмотрим N состояний $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_N$ системы, с которыми связаны вероятности P_1, P_2,...., P_N. Тогда энтропия системы определяется выражением

$$H\ (P_1, P_2, \ldots, P_N) = -\sum_{i=1}^{N} P \ln P \quad (4.76)$$

Легко показать, что

$$H_{\min} = 0 \text{ при } P_\tau = 1 \ \ (\tau = \overrightarrow{1, N}) \quad (4.77)$$

и $P_i = 0,\ i \neq \tau$.

при

$$P_1 = P_2 = \ldots = P_N = 1/N, \qquad H_{\max} = \ln N \quad (4.78)$$

Если воспользоваться формулой

$$H\ (P_1, P_2, \ldots, P_N) = -\frac{1}{\ln N}\sum_{i=1}^{N} P_i \ln P_i \quad (4.79)$$

то энтропия будет величиной, изменяющейся между 0 и 1.

$$H_{\min} = 0; H_{\max} = 1 \quad (4.80)$$

Рассмотрим на примере, как использовать это понятие для оценки нечеткости подмножества.

Пусть $A = \{x_1/0{,}6; x_2/0{,}8; x_3/0{,}1; x_4/0{,}5; x_5/1\}$

Пусть

$$\pi_A(x_i) = \frac{\mu_A(x_i)}{\sum\limits_{i=1}^{5}\mu_A(x_i)} \quad (4.81)$$

Тогда

$$\pi_A(x_1) = \frac{1}{5}; \pi_A(x_2) = \frac{4}{15}; \pi_A(x_3) = \frac{1}{30};$$

$$\pi_A(x_4) = \frac{1}{6}; \pi_A(x_5) = \frac{1}{3};$$

При этом

$$H(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5) = \\ = \frac{-1}{\ln 5}\left(\ln\frac{1}{5} + \frac{4}{15}\ln\frac{4}{15} + \frac{1}{30}\ln\frac{1}{30} + \frac{1}{6}\ln\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\ln\frac{1}{3}\right)$$

Таким образом, общую формулу, позволяющую подсчитать энтропию по нечеткости, можно записать в виде:

$$H(\pi_A(x_1),...\pi_A(x_N)) =$$
$$= -\frac{1}{\ln N}\sum_{i=1}^{N}\pi_A(x_i)\ln\pi_A(x_i) =$$
$$= \frac{1}{\ln N\sum_{i=1}^{N}\mu_A(x_i)}\left[\sum_{i=1}^{N}\mu_A(x_i)\cdot\left(\ln\sum_{i=1}^{N}\mu_A(x_i)\right) - \right. \quad (4.82)$$
$$\left. - \sum_{i=12}^{N}\mu_A(x_i)\ln\mu_A(x_i)\right]$$

Заметим, что метод подсчета нечеткости через энтропию зависит не непосредственно от функции принадлежности, а от их относительных значений.

Отметим, что все обычные подмножества с единственным ненулевым элементом имеют энтропию 0, пустое же подмножество всегда имеет энтропию, равную 1.

2.5. Нечеткие отношения и нечеткие графы

2.5.1. Понятие нечетких отношений и операции над ними

Нечеткие отношения (НО) играют фундаментальную роль в теории нечетких (размытых) систем.

Понятие нечёткое отношение - это обобщение чётких отношений в теории нечеткого множества. Оно может моделировать ситуацию, где взаимодействия между элементами являются более или менее сильными. Различают множество типов отношений (или соответствий): эквивалентности, порядка, превосходства и т.д.

Обычное неразмытое n-арное отношение R определяется как подмножество декартова произведения n-множеств $(X_1 \times X_2 \times ... X_n)$.

$$R \subseteq X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$$

Поэтому по аналогии:

Определение 5.1. Если $(X_1 \times X_2 \times ... X_n)$ есть n универсумов, то

n-арным нечетким отношением (НО) в $X_1 \times X_2 \times ... X_n$ будем называть всякое подмножество $R \subset X_1 \times ... \times X_n$, заданного с помощью его функции принадлежности

$$\mu_R(x_1, x_2, ..., x_n) : (X_1 \times X_2 \times ... \times X_n) \to [0;1] \quad (5.1)$$

Сравнивая понятия четких и нечетких отношений очевидно, что обычное (четкое) отношение является частным случаем нечетких отношений. Кроме того, носителем нечеткого отношения R на множестве X называется подмножество декартова произведения $X \times Y$ вида

$$surrR = \{(x / y) / x \in X,\ y \in Y,\ \mu_R(x, y) > 0\} \quad (5.2)$$

Отметим, что в приложениях теории нечеткого отношения часто оказывается удобным в качестве [0;1] брать какую-либо более общую структуру, чем [0,1] (например - множество вещественных чисел, множестволингвистических переменных, множество m-мерных векторов и т.д.). Такой подход к определению нечеткого отношения дает возможность, во-первых, строить интересные обобщения, понятия и отношения. Во-вторых, он позволяет применить интерпретацию различных функций как нечеткое отношение для анализа свойств этих функций. В-третьих, этот подход дает возможность связать и рассматривать с единой точки зрения многие понятия и методы, применяющиеся при анализе эмпирических данных, в частности, в классическом анализе.

Кроме того, следует отметить, что в качестве частных случаев можно рассмотреть тенарное отношение - множество из упорядоченных троек и бинарное нечеткое отношение - множество из упорядоченных пар. Ограничимся рассмотрением лишь бинарных нечетких отношений.

Определение 5.2. Бинарным нечетким отношением (БНО) R между множествами X и Y будем называть всякое его подмножество $R \subset (X \times Y)$, заданное с помощью его функции принадлежности

$$\mu_R(x, y) : (X \times Y) \to [0,1] \quad (5.3)$$

Носителем БНО является:

$$surrR = \{(x, y) / \forall x \in X,\ y \in Y,\ \mu(x, y) > 0\} \quad (5.4)$$

Домен БНО R и его ранг определяются соответственно:

$$\mu_{dom(R)} = \underset{x}{sur}\, \mu_R(x, y),\ \forall x \in X \quad (5.5)$$

$$\mu_{ran(R)} = \underset{x}{sur}\, \mu_R(x, y),\ \forall y \in Y \quad (5.6)$$

Отметим, что когда множество X и Y совпадают, то НБО $R : X \times Y \to [0,1]$ называется НБО на множестве X. Такому отношению можно поставить в соответствии вещественный граф.

Пример 5.1. Если множества X и Y конечны, то нечеткое отношение *R* между ними можно представить с помощью его матрицы отношения

Таблица 5.1

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_1	0	1	0,6	0,7	0,7	0,9
x_2	1	1	0,8	0,9	0,6	0,8
x_3	0,6	0,8	0,8	0,6	0,4	0,9
x_4	0,7	0,9	0,6	0,8	1	0,3

Элементы *R(x,y)* помещены в таблице 5.1 на пересечении строк и столбцов.

Пример 5.2. Пусть $E_1 = E_2 = X$, где $X=(-\infty;\infty)$, т.е. *X* -множество всех действительных чисел. Тогда отношение $y \le x$, где $x \in X,\ y \in Y$ есть нечеткое отношение на *(XY).*

Отношение *y* < *x* можно задать следующим образ ом:

$$\mu_{XY}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y > x \\ \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{(x-y)^2}}, & \text{если } y \le x \end{cases}$$

Следует также отметить, что при решении многих задач отдельных отраслей науки и техники нечеткое отношение рассматривается как нечеткое ограничение, композиция, нечеткое отношение ЕСЛИ-ТО и нечеткий граф.

Определение 5.4. Пусть $z = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - есть переменная на $Z = x_1 \times \ldots \times x_n$. Нечетким ограничением *R(z)* будем называть нечеткое отношение R, которое действует как гибкое ограничение на значение переменной Z.

Определение 5.3. Проекцией нечеткого отношения *R* на $X_{i_1}, \ldots X_{i_k}$ (где $i_1, \ldots i_k$ - подпоследовательность 1,2, ...*n*) является отношение $X_{i_1}, \ldots X_{i_k}$, определенное как

$$proj(X, X_{i_1}, ..., X_{i_k}) = \bigcup_{x_{i_1} \times ... \times x_{i_k}} x_j \quad sur_{x_{j_k}} x_{j_k} \mu_R(x_1, ... x_n) / (x_1 ... x_{x_n}) \tag{5.7}$$

где $(j_1,..j_k)$-подпоследовательности, дополняющиеся до $(i_1,...i_k)$ в $(1,2,...,n)$.

Первую проекцию R определяет функция принадлежности

$$\mu_R^{(1)}(x) = \vee_y \mu_R(x, y) \tag{5.8}$$

аналогично вторую проекцию определяет

$$\mu_R^{(2)}(y) = \vee_x \mu_R(x, y) \tag{5.9}$$

Вторая проекция первой проекции (или наоборот) будет называться глобальной проекцией нечеткого бинарного отношения и обозначается:

$$h(R) = \vee_x \vee_y \mu_R(x, y) = \vee_x \vee_y \mu_R(x, y) \tag{5.10}$$

При этом, если $h(R)$=1, то нечеткое отношение называют нормальным, если же $h(R) < 1$, то - субнормальным.

Пример 5.3.

Таблица 5.2

а)

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
x_1	0,1	0,2	0,4	1	0,6	0,5	0,8
x_2	0,6	0,4	0	0,8	0,3	0,2	0,9
x_3	0,2	0,3	0,1	0	0	1	0,3
x_4	0,5	0,4	0,9	1	0,1	0,9	1

Первая проекция

б)

1
0,9
1
1

Вторая проекция

в)

0,6	0,4	0,9	1	0,6	1	1

г)

1

Глоб альная проекция

$$\mu_R^{(1)}(x_1) = \vee_y (x_1, y) = \max[0{,}1; 0{,}2; 0{,}4; 1; 0{,}6; 0{,}5; 0{,}8] = 1$$

$$\mu_R^{(2)}(y_1) = \vee_x (x, y_1) = \max[0{,}1; 0{,}6; 0{,}2; 0{,}5] = 0{,}6 \text{ и т.д.}$$

Пример 5.4. Рассмотрим отношение *xRy*, где

$$x \in R^+; y \in R^+ \text{ и } \mu_R(x,y) = l^{-K(x-y)^2}$$

В этом случае для фиксированного значения x_0

$$\mu_R^{(1)}(x_{01}) = \underset{y}{\vee}\,\mu_R(x_0, y) = \underset{y}{\vee}\, l^{-K(x-y)^2} = l^{-k(x_0-y)^2} = 1$$

Поскольку

$$\mu^{(2)}(y_0)_{\underset{R}{=}} 1 \text{, то } h(R) = 1$$

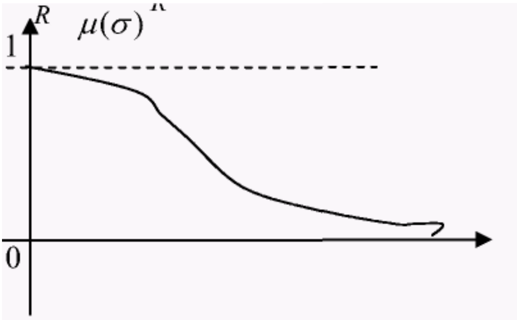


Рис.5.1

Для простоты изложения все понятия, связанные с нечетким отношением приведем для бинарного нечеткого отношения.

Определение 5.4. Носителем нечеткого бинарного отношения R называется обычное (четкое) множество упорядоченных пар (x,y), для которых функция принадлежности положительна.

$$S(R) = \{(x,y) / \mu_R(x,y) > 0\} \qquad (5.11)$$

Пример 5.5. Рассмотрим отношение *xRy,* где $x \in R^+, y \in R^+$

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} l^{-(y-x)^3} & |y-x| \le 0{,}46 \\ 0 & |y-x| > 0{,}46 \end{cases}$$

Тогда $S(R) = \{(x,y) / 0 \le |y-x| \le 0{,}46\}$

Определение 5.5. Пусть R и Q два нечетких отношения, такие, что

$$\forall (x,y) \in X_1 \times X_2;\ \mu_R(x,y) \le \mu_Q(x,y) \qquad (5.12)$$

тогда будем говорить, что Q содержит R или R содержится в Q.

Пример 5.6. Легко показать, что R содержит Q, если:

Таблица 5.3

R	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0,4	0	1
x_2	0,5	0,6	0,4	0,9
x_3	0,8	0,3	0,1	0,7

Q	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,2	0,3	0	0,9
x_2	0,4	0,5	0,4	0,8
x_3	0,6	0,3	0	0,6

Определение 5.6. Объединением двухнечетких отношений *R* и *Q* называется нечеткое отношение, обозначенное через $R\bigcup Q$ или $R+Q$ и определенное выражением:

$$\mu_{R\bigcup Q}(x,y) = \mu_R(x,y) \vee \mu_Q(x,y) = \max\lfloor \mu_R(x,y)\mu_Q(x,y) \rfloor \quad (5.13)$$

Если же $R_1, R_2,\dots,R_n$ - нечеткие отношения, то

$$\mu_{R_1\bigcup R_2\bigcup\dots\bigcup R_n}(x,y) = \underset{R_i}{\vee}\, \mu_{R_i}(x,y) \quad (5.14)$$

Результат объединения обозначим:

$$R = \bigcup_i R_i \ \text{или} \ R = \sum_{i=1}^{n} R_i \quad (5.15)$$

Пример 5.7. Для нечетких отношений *R* и *Q* из примера 4.6. имеем: $R\bigcup Q = R$

Таблица 5.4

$R\bigcup Q$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0,4	0	1
x_2	0,5	0,6	0,4	0,9
x_3	0,8	0,3	0,1	0,7

Определение 5.7. Пересечением двух нечетких отношений *R* и *Q* называется нечеткое отношение, обозначенное $R\bigcap Q$ и определенное выражением:

$$\mu_{R\bigcap Q}(x,y) = \mu_R(x,y) \wedge \mu_Q(x,y) = \min\lfloor \mu_R(x,y)\mu_Q(x,y) \rfloor \quad (5.16)$$

Если же $R_1, R_2,\dots,R_n$ - нечеткие отношения, то

$$\mu_{R_1\bigcap R_2\bigcap\dots\bigcap R_n}(x,y) = \underset{R_i}{\wedge}\, \mu_{R_i}(x,y) \quad (5.17)$$

Пример 5.8. Для нечетких отношений *R* и *Q* из примера 5.6. имеем: $R\bigcap Q = Q$

Определение 5.8. Алгебраическим произведением двух нечетких отношений R и Q называется нечеткое отношение, обозначенное Q и определенное выражением:

$$\mu_{R \cdot Q}(x,y) = \mu_R(x,y) \cdot \mu_Q(x,y) \qquad (5.18)$$

Пример 5.9.

Таблица 5.5

R	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,4	0,1	0,5	0
x_2	1	0,6	0,1	0,8
x_3	0,2	0,1	0,3	0,9

Таблица 5.6

Q	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0,2	0,6	1
x_2	0,8	1	0,3	0,4
x_3	0,5	0,2	0	0,8

Если $P = R \cdot Q$,то $\mu_P(x,y) = \mu_R(x,y) - \mu_Q(x,y)$

Таблица 5.7

P	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,12	0,02	0,3	0
x_2	0,8	0,6	0,03	0,32
x_3	0,1	0,02	0	0,72

Определение 5.9. Алгебраической суммой двухнечетких отношений R и Q называется нечеткое отношение, обозначенное $R \hat{+} Q$ и определенное выражением

$$\mu_{R \hat{+} Q}(x,y) = \mu_R(x,y) + \mu_Q(x,y) - \mu_R(x,y) \cdot \mu_Q(x,y)$$

Пример 5.10. Для нечетких отношений R и Q из примера 5.9 имеем:

Если $Q = R \hat{+} Q$, то на основании (5.19)

$$\mu_G(x_1,y_1) = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}58 \text{ и т.д.}$$

G	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,58	0,28	0,8	1
x_2	1	1	0,37	0,88
x_3	0,6	0,28	0,3	0,98

Определение 5.10. Дополнением нечеткого отношения R есть такое нечеткое отношение $\overline{R}$,что $\forall (x,y) \in X \times Y$

$$\mu_{\overline{R}}(x,y) = 1 - \mu_R(x,y) \qquad (5.20)$$

Пример 5.11. Для нечеткого отношения R из примера 4.9 имеем:

Таблица 5.8

$\overline{R}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,6	0,9	0,5	1
x_2	0	0,4	0,9	0,2
x_3	0,8	0,9	0,7	0,1

Определение 5.11. Дизъюнктивной суммой двух нечетких отношений R и Q называется нечеткое отношение $R \oplus Q$ и определенная выражением

$$R \oplus Q = \left(R \cap \overline{Q}\right) \cup \left(\overline{R} \cap Q\right) \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned}\mu_{R\oplus Q}(x,y) &= \left[\mu_R(x,y) \wedge \left(1-\mu_Q(x,y)\right)\right] \vee \left[\left(1-\mu_Q(x,y)\right) \wedge \mu_Q(x,y)\right] = \\ &= \max\left\{\left[\min \mu_R(x,y), \left(1-\mu_Q(x,y)\right)\right], \left[\min\left(1-\mu_R(x,y), \mu_Q(x,y)\right)\right]\right\}\end{aligned} \tag{5.22}$$

Пример 5.12. Пусть

Таблица 5.9

R	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,6	0,9	0	0,4
x_2	0,3	0,5	0,8	1
x_3	0,1	0,8	0,3	0,7

Таблица 5.10

Q	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,9	0,4	0,2	1
x_2	0,3	0,7	0	0,6
x_3	0,5	0,1	0,4	0,8

Тогда

Таблица 5.11

$R \cap \overline{Q}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,1	0,6	0	0
x_2	0,3	0,3	0,8	0,4
x_3	0,1	0,9	0,3	0,2

Таблица 5.12

Q	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,4	0,1	0,2	0,6
x_2	0,3	0,5	0	0
x_3	0,2	0,1	0,4	0,3

Откуда

Таблица 5.13

$R \oplus Q$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,4	0,6	0,2	0,6
x_2	0,3	0,5	0,8	0,4
x_3	0,2	0,9	0,4	0,3

Определение 5.12. Пусть $\widetilde{R}$ - нечеткое отношение. Обычным (четким) отношением, близким к $\widetilde{R}$ будем называть четкое отношение R, которое определяется выражением:

$$\mu_R(x,y)=\begin{cases}0,\ если\quad \mu_{\widetilde{R}}(x,y)<0{,}5\\ 1,\ если\ \mu_{\widetilde{R}}(x,y)>0{,}5\\ 0\ или\ 1,\ если\ \ \mu_{\widetilde{R}}(x,y)=0{,}5\end{cases} \tag{5.23}$$

Это определение пригодно для любых универсальных множеств X и Y, образующих XY и независимо от того, конечным или нет.

Пример 5.13. По договоренности принимают

$\mu_{\widetilde{R}}(x,y)=0{,}5 \Rightarrow \mu_{\widetilde{R}}(x,y)=0$. Поэтому

Таблица 5.14

$\widetilde{R}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,4	0,7	0,6	0,2
x_2	0,9	0,5	0,7	0,9
x_3	0,2	0,1	0,8	0

Таблица 5.15

Q	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	1	1	0
x_2	1	0	1	1
x_3	0	0	1	0

Отметим, что для случая нечеткого множества аналогично определяются неразмытые (четкие) множества, ближайшие к размытым нечетким множествам.

2.5.2. Нечеткие графы

Понятие графа так же, как соответствия и отношения играют важную роль в приближениях математики. Их можно обобщить на случай нечетких подмножеств. При этом обнаруживаются их новые интересные свойства. Прежде чем ввести понятие нечеткого графа, выясним что же собой представляет граф? Любой граф состоит из двух групп элементов: точек и стрелок, соединяющих эти точки. Точки могут изображаться на плоскости, хотя могут и не иметь такой определенной «физической» связки. В частности, стрелки могут изображаться линиями,соединяющими пары точек. Например, для графа, изображенного линиями, соединяющими пары точек. Например, для графа, изображенного на рис. 5.1, точки помечены буквами *a,b, c,d,* а стрелки буквамиа $\beta,\ \gamma,\ \nu,\ \varphi,\ \delta.$

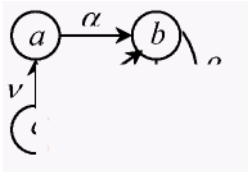


Рис. 5.1

Отметим, что имеются две стрелки α и β, которые идут из точки b в точку d, т.е. имеет нач лом точку b и концом точку d.
Тот же самый граф можно было бы задать не рисунком, а просто пересечением стрелок

$$\alpha=(a,b),\beta=(b,d),\gamma=(b,d);\varphi=(c,d);\delta=(c,b);\gamma=(c,a),$$

представленных упорядоченными парами точек, где первая точка пары определяет начало соответствующей стрелки, а вторая ее конец. Придерживаясь стандартной терминологии точки графа будем называть *вершинами,* а стрелки графа - *дугами.*
Дадим формальное определение графа.
Определение 5.13. Граф - это совокупность множества X, элементы которого называются вершинами и множество *A* упорядоченных пар вершин, элементы которого называются дугамии, обозначается как *(X,A).*
Предполагается, что множество *X* и множество *A* -содержат конечное число элементов.
В случае, когда две вершины соединяются двумя дугами (как на рис.5.1) можно обозначить

$$\beta=(b,d)_1;\gamma=(b,d)_2.$$

Кроме того:
1) Дуга, начальная и конечная вершина которой совпадает, называется *петлей*
2) Две вершины будем называть *соседними,* если есть их соединяющая дуга;
3) Любая последовательность дуг $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, концевыми точками которых являются соседние вершины (для дуги α_i концевые вершины $x_i x_{i+1}$) называется *цепью*.
4) *Длиной цепи* называется число дуг, входящих в нее;
5) *Циклом* называется цепь, у которой начальная и конечная вершины совпадают;
6) *Контуром* называется путь, у которого начальная и конечная вершины совпадают;

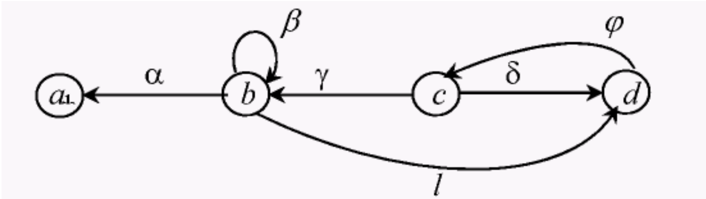


Рис.5.3

6) *Контуром* называется путь, у которого начальная и конечная вершины совпадают.

На рис. 5.3 β - является петлей; *b* и *c* - соседние вершины; последовательность $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi$- образует цепь длиной 5; дуги γ, ℓ, φ - образуют контур длины 3.

Наконец, 7) будем говорить, что две дуги инцидентны друг другу, если обе они инцидентны одной и той же вершине;

8) Вершина и дуга инцидентны друг другу, если вершина для этой дуги является концевой или начальной точкой;

9) Цепь, путь, цикл или контур называется простым, если ни одна вершина не инцидентна более чем двум входящим в нее дугам (т.е. если цепь, путь, цикл или контур не содержат внутри себя циклов). На рисунке 5.3. цепь (α,γ) - простая, а цепь вершина (α,β,γ) - не является простым, а цикл $(\alpha,\beta,\ell,\delta)$ - не является простым циклом. *Определение 5.14.* Граф называется связанным, если в нем для каждой пары вершин найдется соединяющая их цепь. Графы 5.2 и 5.3 являются связанными. Кроме того, любой граф можно рассматривать как некоторую совокупность связанных графов. Пусть *X* есть некоторое подмножество множества *X,* содержащее вершины графа *G(X,A)*. Граф, множество вершин которого совпадают с *X'*, а множество дуг включают все дуги множества А с концевыми вершинами в *X'* называется подграфом графа G, порожденным *X'*. Например, для графа на рис.5.3. имеем:

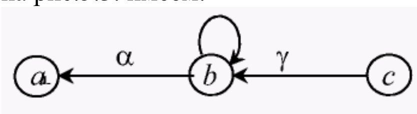


Рис.5.4 Подграф, порожденный вершинами *(a,b,c)*

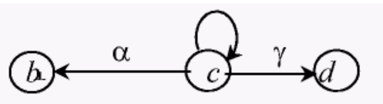


Рис.5.5 Подграф порожденный подмножеством дуг γ, δ, φ

Определение 5.15. Совокупность дуг называется деревом, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) порождает связный подграф;

2) не содержит циклов.

В графе на рис.5.2 совокупности

$$\{\alpha, \gamma, \ell\}; \{\alpha,\gamma,\varphi\}; \{\alpha, \ell, \delta\}; \{\varphi,\gamma\}; \{\alpha,\gamma\}; \{\ell\}; \{\gamma\} \quad (5.24)$$

образуют дерево.

Следует отметить, что дерево, состоящее из *(n-1)* дуги должно включать *n* вершин.

Определение 5.16. Любая совокупность дуг, не содержащая циклов, называется лесом.

Определение 5.17. Любое дерево, образованное совокупностью его дуг, включающих все вершины графа, называется *покрывающим деревом графа* В графе 5.2 $\{\alpha, \ell, \varphi\}$ образует покрывающее дерево.

Пусть *G* - произвольный граф без петель, состоящий из «*m*» строк, каждая из которых соответствует определенной вершине и «*n*» - столбцов, каждая из которых соответствует определенной дуге. Обозначим через g_{ij} элементы матрицы G, $\underline{G}$, которая определяется следующим образом.

$$g_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{– если, вершина которой соответствует} \\ & i\text{ - я строка, является началом для дуги,} \\ & \text{соответствующий } j\text{ - му столбцу.} \\ -1 & \text{– если, вершина которой соответствует} \\ & i\text{ - я строка, является конечной для дуги,} \\ & \text{соответствующий } j\text{ - му столбцу.} \\ 0 & \text{– во всех других случаях.} \end{cases} \quad (5.25)$$

При этом матрица $\underline{G}$ называется матрицей графа G.

Матрица графа, изображенного на рис.5.2 имеет следующий вид:

Таблица 5.16

$\underline{G}$	α	β	γ	ν	δ	φ
a	1	0	0	-1	0	0
b	-1	1	1	0	0	0
c	0	0	0	1	-1	-1
d	0	-1	-1	0	0	1

Теперь, обобщая понятие графа в терминах определения 5.14, можно принять следующее понятие нечеткого графа.

Определение 5.18. Нечеткий граф - это совокупность нечеткого множества X универсального множества под *E,* элементы которого называются вершинами и *H* множества *A* упорядоченных пар вершин, элементы которого называются дугами (пунктирными линиями).

Нечеткий граф также можно обозначить как *(X,A).* При этом нечеткость элементов множества *A* означает нечеткую связь между элементами множества X. Это означает, что если множество *X* даже будет четким множеством, а связь между его элементами (дуги связи, образующие пары вершин) будет нечеткой, то *G(X,A)* также называется нечетким графом.

Следует отметить, что понятие нечеткого графа вплотную связано с понятием нечеткого отношения, поэтому аналогично понятию бинарного нечеткого отношения, если *E* - обычное (четкое) множество узлов, то нечеткий граф определяется как

$$G(x_i, x_j) = \{(x_i, x_j),\ \mu_G(x_i, x_j) > 0, (x_i, x_j) \in \times E\} \quad (5.26)$$

Если же *E* - нечеткое множество, то нечеткий граф определяется аналогично нечетким отношением.

Пример 5.14. $E = \{x_1 x_2 x_3 x_4\}$. Тогда нечеткий граф может быть определен как

$$G(x_i, x_j) = \{(x_1 x_2)/0{,}4; (x_1, x_3)/0{,}6; (x_1, x_4)/1; (x_2, x_1)/0{,}9; \\ (x_3, x_1)/0{,}2; (x_3, x_2)/0{,}7; (x_4 x_3)/0{,}8\}$$

Таким образом, сравнивая понятия четкого и нечеткого графов, можно прийти к следующему выводу:

1) если в (5.26) $\mu_G(x_i x_j) = 1$, то G - четкий граф

2) если в (5.26) $0 < \mu_G(x_i x_j) < 1$, то G - нечеткий граф

При этом в терминах определений 5.14 и 5.19 для четких графов A={0;1}, а для нечетких графов $A=[0;1]$

Поэтому все выше приведенные понятия для четких графов применимы (справедливы) и для нечетких графов.

Говоря о связи между отношением и графом (будь обе четкие или нечеткие), следует отметить, что оба они представляют собой совокупность множества элементов (точек) и множества отдельных совокупностей (связей) этих элементов. Однако отличие графа отношения (четкого, либо нечеткого) заключается в том, что для отношения не играет роль направление связи между элементами, образующие их совокупности, тогда как для графа она играет важную роль.

Пример 5.15. Пусть $E = \{x_1 x_2 x_3 x_4\}$ и пусть нечеткое отношение

$$R(x_i x_j) = \{(x_1 x_2)/0{,}6; (x_1 x_3)/0{,}4; (x_1 x_4)/1; (x_2 x_1)/0{,}9; (x_3 x_2)/0{,}2; (x_3 x_1)/0{,}7; (x_4 x_3)/0{,}8\}$$

и

$$G(x_i x_j) = \{(x_1 x_2)/0{,}6; (x_1 x_3)/0{,}4; (x_1 x_4)/1; (x_2 x_1)/0{,}9; (x_3 x_1)/0{,}7; (x_4 x_3)/0{,}8;\}$$

Построим их матрицы. Учитывая (5.24), имеем:

Таблица 5.17

а)

R	x_1	x_2	x_3	x_4
1	0	0,6	0,4	1
x_2	0,9	0	0	0
x_3	0,7	0,2	0	0
x_4	0	0	0,6	0

б)

R	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	0,6	0,4	1
x_2	-0,9	0	0	0
x_3	-0,7	-0,2	0	0
x_4	0	0	0,8	0

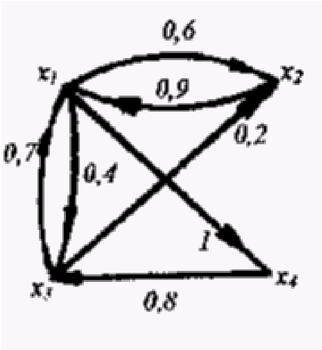


Рис. 5.6

По аналогии с нечеткими отношениями определяется множество уровней нечеткого графа, т.е.

$$G_\alpha(x_i x_j) = \{x_i x_j\},\ \mu(x_i x_j) \geq \alpha\ \ (x_i x_j) \in E \times E \tag{5.27}$$

Пример 5.16. Для нечеткого графа примера 5.15.

Нечеткий подграф уровня a = 0,6 будет:

R	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	0,6	0	1
x_2	-0,9	0	0	0
x_3	-0,7	0,2	0	0
x_4	0	0	-0,8	0

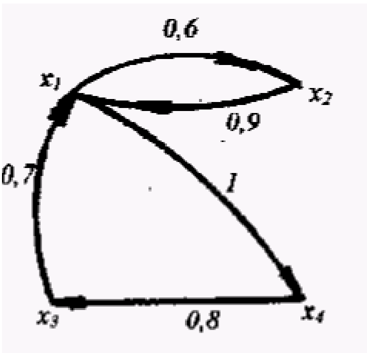


Рис.5.7

Учитывая, что понятие прямого произведения двух множеств $E_1 \times E_2$ можно обобщить для произ ведения множеств $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ имеем:

Определение 5.19. Нечетким графом называется нечеткое подмножество $G \subset E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ такое, что

$$\forall (x_1, x_2, \ldots x_n) \in E_1 \times E_2 \times \ldots E_n, \ \mu_G(x_1, x_2, \ldots x_n) \in (0,1] \qquad (5.28)$$

Пример 5.17. $E_1 = \{x_1, x_2\}; \ E_2 = \{y_1, y_2\}; E_3 = \{z_1, z_2\};$
$G = \{(x_1, y_1, z_1)/0{,}4; \ (x_1, y_1, z_2)/0{,}3 (x_1 y_2 z_1)/0{,}9; (x_1, y_2, z_2)/1;$
$(x_2 y_1 z_2)/0{,}2; (x_2 y_2 z_1)/0{,}7\}$ есть граф в $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_3$ *A* - есть множество ограниченных гиперповерхностей (*n*-1)-го порядка.

Из данного примера следует, что если пользоваться понятием (определением 5.13 или 5.18) графа, то для графа (четкого либо нечеткого) в $E_1 \times E_2 \times E_3$ *A* - есть множество ограниченных гиперповерхностей (*n*-1)-го порядка.

Таким образом, проведя резюме, можно принять следующее определение графа.

Определение 5.20. Граф - это геометрическое (графическое) представление отношений. При этом нечеткий граф - это графическое представление нечетких отношений.

Поэтому все свойства нечетких отношений справедливы и для нечетких графов.

2.5.3. Композиция двух нечетких отношений

Определение 5.21 Если $R_1 \subset X \times Y$ и $R_2 \subset Y \times X$ нечеткие отношения, то композицией (max-min) отношений R_1 и R_2 будем называть отношение, определяемое выражением:

$$\begin{aligned} \mu_{R_2 \circ R_1}(x,z) &= \bigvee_y [\mu_{R_1}(x,y) \wedge \mu_{R_2}(y,z)] = \\ &= \max_y \left[\min \left(\mu_{R_1}(x,y)\, \mu_{R_1}(x,y)\right)\right] \end{aligned} \qquad (5.29)$$

и обозначенной $R_2 \circ R_1$, где $x \in X; \ y \in Y;; \ z \in Z.$

Пример 5. 18. Рассмотрим два нечетких отношения R_1 и R_2, где $x, y, z \in R^+$.

Пусть

$$\mu_{R_1}(x,y)=\ell^{-K(x-y)^2}\; k\geq 1$$
$$\mu_{R_2}(y,z)=\ell^{-K(y-z)^2}\; k\geq 1 \qquad (5.30)$$

Определим $\mu_{R_2\circ R_1}(x,y)$

Рассмотрим два значения *x=a, y=b*. Функции принадлежности непрерывны на $[0;\infty]$. В соответствии с (5.30) имеем:

$$\mu_{R_2\circ R_1}(a,b)=\underset{y}{V}\left[\mu_{R_1}(a,y)\wedge\mu_{R_2}(y,b)\right]=\underset{y}{V}\left[\ell^{-k(a-y)^2}\wedge\ell^{-(y-b)^3}\right]$$

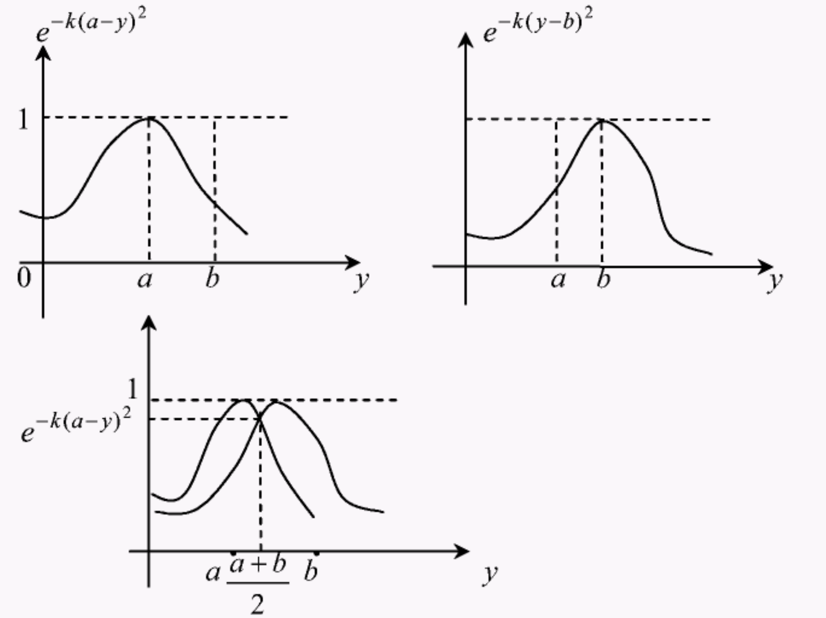


Рис. 5.8

Композиция R_1 и R_2 посредством (max-min) оператора представлена на рис.5.8. Легко видеть, что

$$\mu_{R_2\circ R_1}(a,b)=e^{-k\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2}=e^{-k\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2}$$

и для произвольных значений *x* и z имеем:

$$\mu_{R_2 \circ R_1}(a,b) = e^{-ka - \frac{(x-z)^2}{4}}$$

Пример 5.19.
Если ринять $X=\{x_1, x_2, x_3\}$; $Y=\{y_1, y_2, y_3, y_5\}$ и $Z=\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ и матрицы R_1 и R_2 имеют вид:

Таблица 5.18

R_1

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0,2	0,3	1	0	0,6
x_2	0,4	0,6	0	0,8	0,5
x_3	0,7	0,2	0	0	0,7

а)

R_2

	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,8	0	0,4	0,8
y_2	0,3	1	0,6	0
y_3	0,7	0,9	0,4	0
y_4	0,1	0,9	1	0,4

б)

Тогда

Таблица 5.19

$R_1 \circ R_2$ R_1

	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0,7	0,9	0,6	0,4
x_2	0,4	0,6	0,6	0,4
x_3	0,7	0,7	0,7	0,8

в)

Отметим, что существует $(\max\_*)$ композиции, среди которых наиболее важное внимание заслуживает $(\max\_*)$, где * -есть умножение и она обозначается знаком •; тогда

$$\mu_{R_1 \cdot R_2}(x,z) = \bigvee_y \left[\mu_{R_1}(x,y) \cdot \mu_{R_2}(y,z)\right] \qquad (5.30)$$

Пример 5.20. Для данных примера 5.19 имеем:

Таблица 5.13

$R_1 \cdot R_2$	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0,7	0,9	0,6	0,24
x_2	0,32	0,6	0,5	0,32
x_3	0,72	0,63	0,7	0,72

Определение 5.22. Обычным подмножеством α-уровня нечеткого отношения $R \subset X \times X$ будем называть обычное подмножество

$$G_\alpha = \{(x,y) / \mu_R(x,y) \geq \alpha\} \qquad (5.31)$$

где G_α - нечеткий граф α-уровня.

Пример 5.21. Рассмотрим нечеткое отношение, определенное формулой

$$\mu_R(x,y) = 1 - \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

Подмножество уровня 0,6 определяется условием

$$1 - \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \geq 0,6$$

или же

$$x^2 + y^2 \geq 1,5$$

Это подмножество есть внешность круга *r*=1,5 с центром вначале координат.

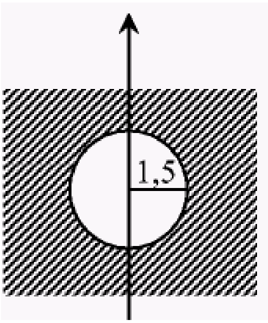


Рис. 5.9

Пример 5.22. Пусть

Таблица 5.20

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0,4	0,6	0,9	1	0
x_2	1	0,3	0,6	0,2	0,1
x_3	0,3	0,4	0,5	0,8	0,7
x_4	0,6	0,2	0,1	0,6	0,9

Тогда

$$G_{0,6} = \{(x_1y_2);\ (x_1y_3),\ (x_1y_4),\ (x_2y_1);(x_2y_3),(x_3y_4),\ (x_3y_5);(x_4y_1),(x_4y_1),(x_4y_4),(x_4y_5)\}$$

Обыч ное подмножество G_α можно определить другим способом с помощью обычного отношени R_α, такого,что

$$\left.\begin{array}{l} \mu_{R_\alpha}(x,y) = 1,\ \text{если}\ \mu_R(x,y) \ge \alpha \\ \mu_{R_\alpha}(x,y) = 0,\ \text{если}\ \mu_R(x,y) < \alpha \end{array}\right\} \qquad (5.32)$$

Применяя данные примера 5.22, имеем:

Таблица 5.21

$R_{0,6}=$

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0	1	1	1	0
x_2	1	0	1	0	0
x_3	0	0	0	1	1
x_4	1	0	0	1	1

Так же как и для нечетких множеств справедливо свойство:
$\alpha_1 \le \alpha_2 => G_{\alpha_2} \subset G_{\alpha_1}$ или, что то же самое

$$R_{\alpha_2} \subset R_{\alpha_2} \qquad (5.33)$$

Теорема декомпозиции. Любое нечеткое отношение R можно представить в виде:

$$R = \underset{\alpha}{V}\, \alpha R_{\alpha},\ 0 < \alpha \le 1, \tag{5.34}$$

где

$$\mu_{R_\alpha}(x,y) = \begin{cases} 1, \text{если } \mu_R(x,y) \ge \alpha \\ 0, \text{если } \mu_R(x,y) < \alpha \end{cases} \tag{5.35}$$

Здесь запись αR_{α}. - означает, что все элементы обычного отношения умножаются на *x*.

Доказательство. Функцию принадлежности для отношения R, определенного в (5.34) можно записать в виде:

$$\mu_{\underset{\alpha}{V}\alpha R_\alpha}(x,y) = \underset{\alpha}{V}\, \alpha \mu_{R_\alpha}(x,y) = \underset{\alpha \le \mu_{R_\alpha}}{V} \alpha = \mu_R(x,y) \tag{5.36}$$

Пример 5.23

Таблица 5.22

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0,4 & 0,7 & 0 & 1 \\ \hline 0,5 & 1 & 0,6 & 0,9 \\ \hline 0,8 & 0,7 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} = V \left(0,4 \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad :0.6 \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad :0.8 \quad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad :1 \quad \left. \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \right)$$

Справедливо утверждение: R_i обычные отношения,ближайшие нечетким отношением $R_i(i=\overrightarrow{1,n})$, то (в частности) где *R* обоз начает (max-min) композицию

Пример 5.24.

Таблица 5.23

а) R_1

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0,1	0,2	0	1	0,7
x_2	0,3	0,5	0	0,2	1
x_3	0,8	0	1	0,4	0,3

б) R_2

	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,9	0	0,3	0,4
y_2	0,2	1	0,8	0
y_3	0,8	0	0,7	1
y_4	0,4	0,2	0,3	0,8
y_5	0	1	0	

в) R

	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0	1	0	1
x_2	0	1	0	1
x_3	1	0	1	1

г) R_1

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0	0	0	1	1
x_2	0	0	0	0	1
x_3	1	0	1	0	0

д) R_2

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0	0	0	1	1
x_2	0	0	0	0	1
x_3	1	0	1	0	0

2.5.4. Свойства нечетких отношений

Различные типы нечетких отношений определяются с помощью свойств аналогичных свойствам обычных отношений. В качестве основных свойств нечетких отношений рассмотрим свойства, имеющие такую же алгебраическую запись, что и обычные отношения.

1. Нечеткое отношение R называется симметричным, если

$$R=R^{-1}, R(x,y)=R(y,x),\ \forall\, x,y\in X,\ x\neq y \tag{5.38}$$

Пример 5.25. Если *R* - бинарное нечеткое отношение, заданное в виде:

Таблица 5.24

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0,2	0,4	0,1	0,7	0,3
x_2	0,4	0,9	0,5	1	0
x_3	0,1	0,5	0,6	0,4	0,9
x_4	0,7	1	0,4	1	0,6
x_5	0,3	0	0,9	0,6	0,1

то оно сисмметрично.

2. Нечеткое отношение R называется антисимметричным, если

$$R\bigcap R^{-1}\subset E,\ R(x,y)\wedge R(x,y)=0,\ \forall x,y\in X \tag{5.39}$$

или же

$$\mu_R(x,y)\neq\mu_R(y,x) \text{ или } \mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)=0$$

Пример 5.26. Нечеткое бинарное отношение R, заданное в виде:

Таблица 5.25

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0,3	0	0	0,8	1
x_2	0,8	0,1	0	0,7	0,8
x_3	0,6	0,4	0,2	0,5	0,9
x_4	0,1	0,4	0,6	0	1
x_5	0	0,4	0,6	0	0,4

то оно антисимметрично.

3. Совершенная антисимметрия Л.А.Заде определяет антисимметрию иным способом, которую будем называть совершенной антисимметрией.

Совершенно антисиммметричным отношением называется такое отношение, ч то

$$\forall(x,y)\in E\times E \text{ и } x\neq y \text{ и } \mu_R(x,y)>0 \;\; \mu_R(y,x)=0 \quad (5.40)$$

Л.А.Задедает другое определение: $\mu_R(x,y)>0$ и

$$\mu_R(y,x)>0 \Rightarrow \mu_R(y,x)=0.$$

Справедливо устверждение. Любое совершенное антисимметричное отношение является антисимметричным отношением.

4. Нечеткое отношение R называется антисимметричным, если

$$R\bigcap R^{-1}=\varnothing;\; R(x,y)\wedge R(y,x)=0,\forall x,y\in X \quad (5.41)$$

Пример 5.27. Нечеткое отношение R - антисимметрично.

Таблица 5.26

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0	0,8	0	0,3	0
x_2	0	0	0,4	0	0
x_3	0,6	0	0	0,2	0,9
x_4	0	0,8	0	0	0,7
x_5	0,9	0,1	0	0	0

5. Нечеткое отношение R- рефлексивно, если

$$\forall x\in X;\; \mu_R(x,x)=1 \quad (5.42)$$

Пример 5.28. Нечеткое бинарное отношение R - рефлексивно, если оно задано в виде:

Таблица 5.27

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	1	0	0,4	0,2	0
x_2	0	1	0,5	0,7	0,8
x_3	0,4	0,5	1	0,6	0,9
x_4	0,6	0	0,2	1	1
x_5	1	0,4	0,8	0,9	1

6. Нечеткое отношение R - слабо рефлексивно, если

$$R(x,y)\leq R(x,x), \quad \forall x\in X \quad (5.43)$$

Это равносильно тому, что

$$\mu_R(x,y) \le \mu_R(x,x), \quad \forall x \in X \tag{5.44}$$

Пример 5.29.

Таблица 5.28

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	1	0,4	0,8	0,2	0,3
x_2	0,5	1	0,6	0,4	0,8
x_3	0,8	0,5	1	0,6	0,7
x_4	0,4	0,1	0,5	0,8	0,1
x_5	0	0,9	0,7	0,1	1

Нечеткое отношение R - слабо рефлексивно.

7. Нечеткое отношение R называется сильно рефлексивной, если

$$\mu_R(x,x) = 1,\ \mu_R(x,y) < 1,\ \forall x \in X \tag{5.45}$$

Пример 5.30.

Таблица 5.29

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	1	0,7	0,4	0,1	0,7
x_2	0,8	1	0,6	0,3	0,5
x_3	0,6	0,8	1	0	0,9
x_4	0	0,2	0,3	1	0,1
x_5	0,7	0,6	0,4	0,1	1

Нечеткое отношение R - сильно рефлексивно.

8. Нечеткое отношение R - антирефлексивно, если

$$\mu_R(x,x) = 0, \quad \forall x \in X \tag{5.46}$$

Пример 5.31.

Таблица 5.30

R	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1	0,9	0,5	0,2
x_2	0,8	0	0	1
x_3	0,6	1	0	0,9
x_4	0,7	0,8	0,4	0

Нечеткое отношение R - антирефлексивно.

9. Нечеткое отношение R - слабо антирефлексивно, если

$$\mu_R(x,x) \le \mu_R(x,y),\ \forall x \in X \tag{5.47}$$

10. Нечеткое отношение R - сильно антирефлексивно, если

$$R(x,x) = 0; 0 < R(x,y),\ \forall x,y \in X \tag{5.48}$$

Пример 5.32.

Таблица 5.31

R

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0,4	0,6	0
x_2	0,2	0	0,7	1
x_3	0,1	0,5	0,1	0,9
x_4	0,3	0,1	0,8	0

а)
R – слаб о рефлексивно

R

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1	0	0	0
x_2	0	1	1	0
x_3	1	0	1	1
x_4	0	0	0	0

б)
R – сильно рефлексивно

11. Нечеткое отношение R удовлетворяет условию транзитивности, если для

$$\forall x,y,z \in X$$

$$\mu_R(x,z) \ge \max\left[\min\left(\mu_R(x,y), \mu_R(y,z)\right)\right] \tag{5.49}$$

Это отношение можно записать в виде:

$$\mu_R(x,z) \ge \overset{T}{\underset{y}{V}}\left[\mu_R(x,y) \wedge \mu_R(y,z)\right] \tag{5.50}$$

где $\vee$ -максимальное из значений, а $\wedge$ - минимальное из значений.

Пример 5.33.

Таблица 5.32

R

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,2	1	0,4	0,4
x_2	0	0,6	0,3	0
x_3	0	1	0,3	0
x_4	0,1	1	1	0,1

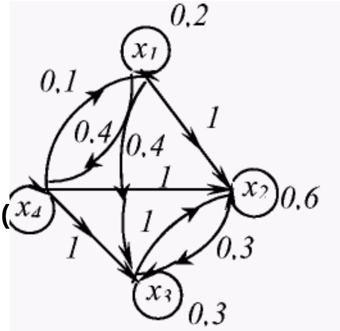


Рис. 5.10

Это нечеткое отношение транзитивно. Проведем полную проверку:

Дуга *(x_1x_2)*

$$\mu(x_1x_1)\wedge\mu(x_1x_1)=0{,}2\wedge 0{,}2=0{,}2$$

$$\mu(x_1x_2)\wedge\mu(x_2x_1)=1\wedge 0=0$$

$$\mu(x_1x_3)\wedge\mu(x_3x_1)=0{,}4\wedge 0=0$$

$$\mu(x_1x_4)\wedge\mu(x_4x_1)=0{,}4\wedge 0{,}1=0{,}1$$

$$\max[0{,}2;0;0{,}1]=0{,}2;\ \mu(x_1,x_1)=0{,}2\geq 0{,}2$$

Дуга *(x_1x_2)*

$$\mu(x_1x_1)\wedge\mu(x_1x_1)=0{,}2\wedge 1=0{,}2$$

$$\mu(x_1x_2)\wedge\mu(x_2x_2)=1\wedge 0{,}6=0{,}6$$

$$\mu(x_1x_3)\wedge\mu(x_3x_2)=0{,}4\wedge 1=0{,}4$$

$$\mu(x_1x_4)\wedge\mu(x_4x_2)=0{,}4\wedge 1=0{,}4$$

$$\max[0{,}2;0{,}6;0{,}4;0{,}4]=0{,}6;\ \ \mu(x_1,x_2)=1\geq 0{,}6$$

Дуга *(x_1x_3)*

$$\mu(x_1x_1)\wedge\mu(x_1x_3)=0{,}2\wedge 0{,}4=0{,}2$$

$$\mu(x_1x_2)\wedge\mu(x_2x_3)=1\wedge 0{,}3=0{,}3$$

$$\mu(x_1x_3)\wedge\mu(x_3x_3)=0{,}4\wedge 0{,}3=0{,}3$$

$$\mu(x_1x_4)\wedge\mu(x_4x_3)=0{,}4\wedge 1=0{,}4$$

$$\max[0{,}2;0{,}3;0{,}3;0{,}4]=0{,}4;\ \ \mu(x_1,x_3)=0{,}4\geq 0{,}4$$

Дуга (x_1x_4)

$$\mu(x_1x_1)\wedge\mu(x_1x_4)=0{,}2\wedge 0{,}4=0{,}2$$
$$\mu(x_1x_2)\wedge\mu(x_2x_{34})=1\wedge 0=0$$
$$\mu(x_1x_3)\wedge\mu(x_3x_4)=0{,}4\wedge 0=0$$
$$\mu(x_1x_4)\wedge\mu(x_4x_4)=0{,}4\wedge 0{,}1=0{,}1$$

$$\max[0{,}2;0;0{,}1]=0{,}2;\ \mu(x_1,x_4)=0{,}4\geq 0{,}2$$

Дуга *(x_2x_1)*

$$\mu(x_2x_1)\wedge\mu(x_1x_1)=0\wedge 0{,}2=0$$
$$\mu(x_2x_2)\wedge\mu(x_2x_1)=0{,}6\wedge 0=0$$
$$\mu(x_2x_3)\wedge\mu(x_3x_1)=0{,}3\wedge 0=0$$
$$\mu(x_2x_4)\wedge\mu(x_4x_1)=0\wedge 0{,}1=0$$
$$\max[0;0;0;0]=0;\ \mu(x_2,x_1)=0\geq 0$$

Проведя аналогичным образом подсчеты для дуг

$$(x_2x_2);(x_2x_3);(x_2x_4);\ (x_3x_1);\ (x_3x_2);$$
$$(x_3x_4);(x_4x_1);\ (x_4x_2);\ (x_4x_3)\ \text{и}\ (x_4x_4),$$

легко доказать, что взятое нечеткое отношение R удовлетворяет (5.47) и (5.48), т.е. оно транзитивно.

12. Нечеткое отношение R удовлетворяет условию слабой транзитивности, если из $R(x,y)>0;\ R(y,z)>0$ следует $R(x,z)>0$

13. Нечеткое отношение R удовлетворяет условию сильной транзитивности, если из

$R(x,y)>0;\ R(y,z)>0$ следует, что

$R(x,y)\geq 0;\ R(x,y)\vee R(y,z)$

14. Нечеткое отношение R удовлетворяет условию сверхсильной транзитивности, если совместно с ( ) выполнено условие:

$$R(x,y)>0;\ R(y,z)>0 => R(x,z)>R(x,y)\vee R(y,z)$$

15. Нечеткое отношение R удовлетворяет условию ультраметрической транзитивности, если *R(x,y)* > 0;

$$R(y,z)>=>0;\ R(x,y)\vee R(y,z)\geq R(x,z)\geq R(x,y)\wedge R(y,z)$$

16. Нечеткое отношение R удовлетворяет условию линейной транзитивности, если из

$$R(x,y)>0;\ R(y,z)>0 => R(x,z)=R(x,y)+R(x,z)$$

17. Нечеткое отношение R удовлетворяет условию метрической транзитивности, если из

$$R(x,y)>0;\ R(y,z)>0 => R(x,y)+$$
$$+R(y,z)\geq R(x,z)\geq R(x,y)\vee R(y,z)$$

18. Нечеткое отношение R удовлетворяет условию отрицательной транзитивности, если из

$$R(x,y)\geq 0;\ R(y,z)\geq 0 => R(x,y)\geq 0$$

19. Нечеткое отношение R удовлетворяет условию квазисерийности, если из

$$R(x,y)\geq 0;\ R(y,z)\geq 0 => R(x,z)\vee R(y,z)$$

20. Нечеткое отношение R ациклическое, если

$\forall x_0, x_1, ..., x_n \in X$;

из

$R(x_0, x_1)>0;\ R(x_1,x_2)>0, ..., R(x_{n-1}, x_n)>0$

следует, что

$R(x_0, x_n)\geq 0$

Другие формулировки свойств нечеткого отношения можно найти в литературе.

В заключение введем понятие транзитивности замыкания нечеткого отношения.

Определение 5.23. Транзитивным замыканием нечеткого отношения

$$\hat{R} = R^1 \cup R^2 \cup ... \cup R^k \cup ... \qquad (5.51)$$

где нечеткое отношение R^k определяется как $R^{k-1} \cup R$, *(k=1,2,…)*

Теорема 5.1. Транзитивное нечеткое замыкание *R* любого нечеткого отношения R ранзитивн оим является наименьшим транзитивным отношением, включающим R, т.е. $R \subset \hat{R}$ и для любого нечеткого транзитивного отношения T такого, что $R \subset T$, следует $\hat{R} \subset T$.

Из этой теоремы следует, что R транзитивно тогда и только тогда, когда $R = \hat{R}$.

Если множество X состоит из *n* элементов, то

$$\hat{R} = R \cup R^2 \cup ... \cup R^n \qquad (5.52)$$

В случае, когда R рефлексивно, то

$$R \subset R^2 \subset ... \subset R^{n-1} = R^n = R^{n+1}$$

Откуда следует, что $\hat{R} = R^{n-1}$.

Весьма полезным фактом является то, что α-уровень транзитивности замыкания соответствующего α-уровня:

$$\left(\hat{R}\right)_{\alpha} = \left(\hat{R}_{\alpha}\right) \text{ для всех } \alpha \in [0;1] \qquad (5.53)$$

Свойства операции транзитивного замыкания подробно рассматриваются в литературе.

Пример 5.34. Рассмотрим нечеткое отношение, представленное в виде

Таблица 5.33

R	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,6	0,4	1	0,2
x_2	0,1	0,7	0,3	0,8
x_3	0	1	0,4	0,1
x_4	0,6	0,3	0	0,9

тогда

R	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,6	1	0,6	0,4
x_2	0,6	0,7	0,3	0,8
x_3	0,1	0,7	0,4	0,8
x_4	0,6	0,4	0,6	0,9

а)

б)

Далее имеем:

Таблица 5.34

R^3	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,6	0,7	0,6	0,8
x_2	0,6	0,7	0,6	0,8
x_3	0,6	0,7	0,4	0,8
x_4	0,6	0,6	0,6	0,9

и

R^4	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,6	0,7	0,6	0,4
x_2	0,6	0,7	0,3	0,8
x_3	0,6	0,7	0,4	0,8
x_4	0,6	0,6	0,6	0,9

а) б)

Мы видим, что $R^4 = R^3$ и поэтому вычисления можно прекратить. При этом

Таблица 5.35

R

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,6	0,4	0,1	0,2
x_2	0,1	0,7	0,3	0,8
x_3	0	1	0,4	0,1
x_4	0,6	0,3	0	0,9

а)

$\cup$

R

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,6	0,7	0,6	0,8
x_2	0,6	0,7	0,6	0,8
x_3	0,6	0,6	0,4	0,8
x_4	0,6	0,6	0,6	0,9

б)

R

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,6	0,7	0,6	0,2
x_2	0,6	0,7	0,6	0,8
x_3	0,6	1	0,4	0,8
x_4	0,6	0,3	0,6	0,9

Поскольку $R^3 \supset R$, то это нечеткое отношение не транзитивно.

Пример 5.35. Проведя аналогичные подсчеты легко показать, что нечеткое отношение R, заданное в виде

Таблица 5.36

R

	y_1	y_2	y_3
x_1	0,6	0,7	0,6
x_2	0,6	0,7	0,6
x_3	0,6	1	0,4

является транзитивным нечетким отношением

Пример 5.36. Пусть заданы два нечетких отношения

Таблица 5.27

а) R

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,5	0,9	0	0,5
x_2	0	0,7	0	0
x_3	0	1	0,1	0
x_4	0	1	0,4	0
x_5	0,7	0.9	0	0,5

б) R

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,7	0	0	0
x_2	0,8	1	0,6	1
x_3	0	0	0,5	0
x_4	0	0	0,2	0
x_5	0,8	1	0,6	1

Легко доказать, что $R_1^2 \subset R_1$ и $R_2^2 \subset R_2$, т.е. R_1 и R_2 - транзитивные нечеткие отношения. Подсчитав $R_2 \circ R_1$ и $(R_2 \circ R_1)^2$ легко убедиться, что $(R_2 \circ R_1)^2 \subset (R_1 \circ R_2)$ не выполняется и следовательно $(R_1 \circ R_2)$ - не транзитивно.

Отсюда следует, что композиция двух транзитивных отношений не всегда транзитивное отношение.

2.5.5. Классификация нечетких отношений

Все типы нечетких отношений в зависимости от свойств, которыми они обладают, могут быть разделены на три класса:
1) симметричные отношения, которые обычно характеризуют сходство или различие между объектами множества X и представляются с помощью взвешенного графа с неориентированными дугами;
2) антисимметричные отношения, которые задаются на множестве отношение упорядоченности, доминирование подчиненности. Им соответствуют ориентированные взвешенные графы с односторонней ориентацией дуг;
3) класс отношений состоит из всех остальных отношений, которым соответствуют взвешенные графы с двухсторонней ориентацией дуг, причем веса противоположно направленных дуг в общем случае могут не совпадать.

Отношения каждого из классов, в зависимости от выполнения условий рефлексивности или антирефлексивности, могут быть разделены на подклассы.

Рассмотрим конкретные нечеткие отношения.

1. Нечеткое отношение предпорядка.

Определение 5.24. Нечеткое отношение предпорядка называется бинарное нечеткое отношение, обладающее свойством транзитивности и рефлексивности. Сначала рассмотрим важную теорему.

Теорема 5.2. Если R - транзитивно и рефлексивно (т.е. предпорядок), то

$$R^k = R \qquad k=1,2,\ldots \tag{5.51}$$

Доказательство. Из определения транзитивности (5.49), если $\mu_R(x,x)=1$ и посколькуто $R^2 = R \circ R$, согласно (5.29) имеем:

$$\mu_{R^2}(x,z) = \bigvee_{y}\left[\mu_R(x,y) \wedge \mu_R(y,z)\right] \tag{5.52}$$

Правая часть содержит два равных члена

$$\mu_R(x,x) \wedge \mu_R(x,z) = \mu_R(x,z) \wedge \mu_R(z,z) = \mu_R(x,z) \tag{5.53}$$

Поскольку в силу рефлексивности

$$\mu_R(x,x) = \mu_R(z,z) = 1$$

Напомним, что R-транзитивное отношение, т.е.

$$\mu_R(x,z) \geq \bigvee_{y}\left[\mu_R(x,y) \wedge \mu_R(y,z)\right]$$

и поэтому $\mu_R(x,z)$ не меньше, чем $\mu_R(x,y) \wedge \mu_R(y,z)$. Следовательно, $\mu_R(x,z)$-значение правой части (5.52) и поэтому

$$R^2 = R \tag{5.54}$$

Теорема 5.3. Если R-предпорядок, то $R^2 = R = \ldots = R^k = R$

Доказательство. Это следует из теоремы 5.2, формул (5.48) и (5.54).

Пример 5.37. Рассмотрим предпорядок $E = \{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5\}$

Таблица 5.38

R

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	1	0,7	0,8	0,5	0,5
x_2	0	1	0,3	0	0,2
x_3	0	0,7	1	0	0,2
x_4	0,6	1	0,9	1	0,6
x_5	0	0	0	0	1

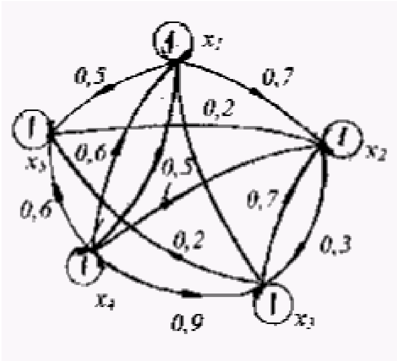


Рис.5.11

Так как $R(x,x)=1$, то R-рефлексивно. Докажем, что $R^2 = R$. В силу (5.52) имеем:

Дуга $(x_1 x_1)$

$$\mu(x_1x_1)\wedge\mu(x_1x_1)=1\wedge 1=1$$
$$\mu(x_1x_2)\wedge\mu(x_2x_1)=0{,}7\wedge 0=0$$
$$\mu(x_1x_3)\wedge\mu(x_3x_1)=0{,}8\wedge 0=0$$
$$\mu(x_1x_4)\wedge\mu(x_4x_1)=0{,}5\wedge 0{,}6=0{,}5$$
$$\mu(x_1x_5)\wedge\mu(x_5x_1)=0{,}5\wedge 0=0$$
$$\max[1;0;0;0;0{,}5;0]=1;\ \ \mu(x_1,x_1)=1$$

Дуга $(x_1 x_2)$

$$\mu(x_1x_1)\wedge\mu(x_1x_2)=1\wedge 0{,}7=0{,}7$$
$$\mu(x_1x_2)\wedge\mu(x_2x_2)=0{,}7\wedge 1=0{,}7$$
$$\mu(x_1x_3)\wedge\mu(x_3x_2)=0{,}8\wedge 0{,}7=0{,}7$$
$$\mu(x_1x_4)\wedge\mu(x_4x_2)=0{,}5\wedge 1=0{,}5$$
$$\mu(x_1x_5)\wedge\mu(x_5x_2)=0{,}5\wedge 0=0$$
$$\max[0{,}7;0{,}7;0{,}7;0{,}5;0]=0{,}7;$$

Дуга $(x_1 x_3)$

$$\mu(x_1x_1)\wedge\mu(x_1x_3)=1\wedge 0{,}8=0{,}8$$
$$\mu(x_1x_2)\wedge\mu(x_2x_3)=0{,}7\wedge 0{,}3=0{,}3$$
$$\mu(x_1x_3)\wedge\mu(x_3x_{13})=0{,}8\wedge 1=0{,}8$$
$$\mu(x_1x_4)\wedge\mu(x_4x_3)=0{,}5\wedge 0{,}9=0{,}5$$
$$\mu(x_1x_5)\wedge\mu(x_5x_3)=0{,}5\wedge 0=0$$
$$\max[0{,}8;0{,}3;0{,}8;0{,}5;0]=0{,}8;\ \mu(x_1,x_3)=0{,}8$$

Дуга (x_1x_4)

$$\mu(x_1x_1)\wedge\mu(x_1x_4)=1\wedge 0{,}5=0{,}5$$
$$\mu(x_1x_2)\wedge\mu(x_2x_4)=0{,}7\wedge 0=0$$
$$\mu(x_1x_3)\wedge\mu(x_3x_4)=0{,}8\wedge 0=0$$
$$\mu(x_1x_4)\wedge\mu(x_4x_4)=0{,}5\wedge 1=0{,}5$$
$$\mu(x_1x_5)\wedge\mu(x_5x_4)=0{,}5\wedge 0=0$$
$$\max[0{,}5;0;0;0{,}5;0]=0{,}5;\ \mu(x_1,x_4)=0{,}5$$

Дуга (x_1 x_5)

$$\mu(x_1x_1)\wedge\mu(x_1x_5)=1\wedge 0{,}5=0{,}5$$
$$\mu(x_1x_2)\wedge\mu(x_2x_5)=0{,}7\wedge 0{,}2=0{,}2$$
$$\mu(x_1x_3)\wedge\mu(x_3x_5)=0{,}8\wedge 0{,}2=0{,}2$$
$$\mu(x_1x_4)\wedge\mu(x_4x_5)=0{,}5\wedge 0{,}6=0{,}5$$
$$\mu(x_1x_5)\wedge\mu(x_5x_5)=0{,}5\wedge 1=0{,}5$$
$$\max[0{,}5;0{,}2;0{,}2;0{,}5;0{,}5]=0{,}5;\ \mu(x_1,x_5)=0{,}5$$

Дуга (x_2x_1)

$$\mu(x_2x_1)\wedge\mu(x_1x_1)=0\wedge 1=0$$
$$\mu(x_2x_2)\wedge\mu(x_2x_1)=1\wedge 0=0$$
$$\mu(x_2x_3)\wedge\mu(x_3x_1)=0{,}3\wedge 0=0$$
$$\mu(x_2x_4)\wedge\mu(x_4x_1)=0\wedge 0{,}6=0$$
$$\mu(x_2x_5)\wedge\mu(x_5x_1)=0{,}2\wedge 0=0$$
$$\max[0;0;0;0;0]=0;\ \mu(x_2,x_1)=1$$

Дуга (x_2x_2)

$$\mu(x_2x_1) \wedge \mu(x_1x_2) = 0 \wedge 0{,}7 = 0$$
$$\mu(x_2x_2) \wedge \mu(x_2x_2) = 1 \wedge 1 = 1$$
$$\mu(x_2x_3) \wedge \mu(x_3x_2) = 0{,}3 \wedge 0{,}7 = 0{,}3$$
$$\mu(x_2x_4) \wedge \mu(x_4x_2) = 0 \wedge 1 = 0$$
$$\mu(x_2x_5) \wedge \mu(x_5x_2) = 0{,}2 \wedge 0 = 0$$
$$\max\left[0;1;0{,}3;0;0\right] = 1;\ \mu(x_2, x_2) = 1$$

Продолжая подсчеты получаем, что $R^2 = R$

II. Нечеткое отношение подобия

Определение 5.25. Отношение подобия или нечеткое отношение эквивалентности называется нечеткое бинарное отношение, обладающее свойствами: транзитивности, рефлексивности и симметричности. Очевидно, что это симметричный предпорядок.

Пример 5.38.

Таблица 5.39

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	1	0,9	0,7	0,8	0,9
x_2	0,9	1	0,7	0,8	1
x_3	0,7	0,7	1	0,7	0,7
x_4	0,8	0,8	0,7	1	0,8
x_5	0,9	1	0,7	0,8	1

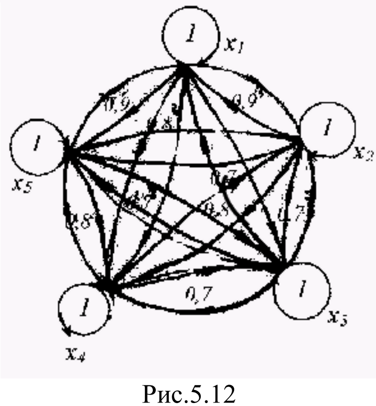


Рис.5.12

Из рисунка 5.12. видно, что нечеткое отношение R симметрич но, главная диагональ состоит из единиц, поэтому R-рефлексивно и применяя (5.52) легко доказать, что $R^2 = R$, т.е. R - транзитивно.
Справедлива теорема 5.4. Пусть $R \subset E_1 \times E_2$ есть отношение подобия. Пусть также $x, y, z \in E$. Положим

$$\begin{aligned} &\mu_R(x,y) = \mu_R(y,x) = a;\ \mu_R(x,z) = \mu_R(z,x) = c, \\ &\mu_R(y,z) = \mu_R(z,y) = b \end{aligned} \tag{5.55}$$

Тогда

$$c \geq a;\ \text{или}\ a \geq c;\ \text{или}\ a \geq c = a \tag{5.56}$$

Иными словами из величин *a, b, c* по крайней мере две величины равны друг другу, а третья больше двух других.
Теорема 5.5. (теорема декомпозиция для отношений подобия). Пусть R - отношение подобия $E \times E$. Тогда R можно разложить так:

$$R = \underset{\alpha}{V}\, \alpha R_\alpha,\ 0 < \alpha < 1 \text{ при } \alpha_1 > \alpha_2 => R_{\alpha_2} \supset R_{\alpha_1}$$

Приведем декомпозицию отношения R примера 5.38. Имеем:

Таблица 5.40

R

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	0,9	0,7	0,8	0,9
x_2	0,9	1	0,7	0,8	1
x_3	0.7	0,7	1	0,7	0,7
x_4	0,8	0,8	0,7	1	0,8
x_5	0,9	1	0,7	0,8	1

а)

$R_{0,7}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	1	1	1
x_2	1	1	1	1	1
x_3	1	1	1	1	1
x_4	1	1	1	1	1
x_5	1	1	1	1	1

б)

$R_{0,8}$ $R_{0,9}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	0	1	1
x_2	1	1	0	1	1
x_3	0	0	1	0	0
x_4	1	1	0	1	1
x_5	1	1	0	1	1

в)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	0	0	1
x_2	1	1	0	0	1
x_3	0	0	1	0	0
x_4	0	0	0	1	0
x_5	1	1	0	0	1

г)

R_1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	0	0	0	0
x_2	0	1	0	0	1
x_3	0	0	1	0	0
x_4	0	0	0	1	0
x_5	0	1	0	0	1

д)

III. Нечеткое отношение порядка.

Определение 5.26. Нечетким отношением порядка называется бинарное отношение, которое: 1) рефлексивно (согласно (5.43)), 2) транзитивно (согласно (5.50)), 3) антисимметрично (согласно (5.42)).

Можно также дать следующее определение: антисимметричное нечеткое отношение предпорядка называется нечетким отношением порядка.

Пример 5.39. Легко проверить, что нечеткое отношение R рефлексивно, транзитивно и антисимметрично.

R_1

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0,7	0	0
x_2	0,3	1	0	0
x_3	0,4	0,5	1	0,2
x_4	0	0	0	1

Теорема 5.6. Каждое нечеткое отношение порядка индуцирует порядок (в смысле теории множеств) на своем универсуме посредством отношения.

$$\mu_R(x,y) \geq \mu_R(y,x) \qquad (5.57)$$

Этот порядок будем обозначать $y \geq x$.

Доказательство.

Достаточно рассмотреть обычный антисимметричный граф, связанный с данным нечетким отношением порядка.

Определение 5.27. Нечеткое отношение называется полным порядком (или полностью упорядоченным нечетким отношением), если соответствующий ему обычный граф представляет полный порядок. Кроме того, (по Л.Заде) оно называется отношением линейного порядка, если этот порядок совершенный.

Линейный порядок можно определить с помощью более строгого условия антисимметричности.

Пример 5.40.

Таблица 5.41

R_1

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	1	0,8
x_2	0	1	0	1
x_3	0	0,8	1	1
x_4	0	0	0	1

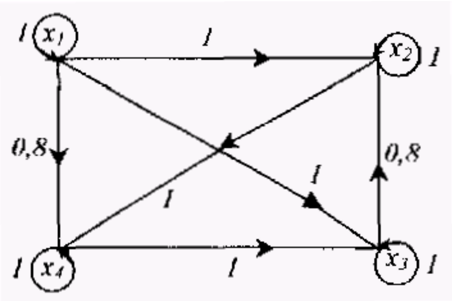


Рис.5.13

Используя обозначение $y \underset{\sim}{>} x$, если

$$\mu_R(x,y) > \mu_R(y,x)$$

имеем $x_4 > x_2 \underset{\sim}{>} x_3 > x_1$

Отметим, что различаются также нечеткое отношение строгого и нестрогого порядка. При этом: транзитивное, антирефлексивное и антисимметричное нечеткое отношение называется нечеткое отношение строгого порядка, а транзитивное, рефлексивное и антисимметричное нечеткое отношение называется нечеткое отношение нестрогого порядка.

Пример 5.41. Рассмотрим *xRy* , где $x, y \in R$

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ если } \; y < x \\ \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{(y-x)^2}}, \text{ если } \; y \geq x \end{cases}$$

Это отношение представляет собой строгий и совершенный порядок и при $x=y; \;\; \mu_R(x,y) = 0$.

IV. Отношение различия

Определение 5.28. Нечеткое бинарное отношение, удовлетворяющее свойствам транзитивности, антирефлексивности и симметричности называется нечетким отношением различия, т. е. $\overline{R}$ - есть нечеткое отношение различия, если:

$$1) \; \forall (x,y),(y,z),(x,z) \in E \times E \qquad (5.58)$$

$$\mu_{\overline{R}}(x,z) \leq \underset{y}{\wedge}\left[\mu_{\overline{R}}(x,y) \vee \mu_{\overline{R}}(y,z)\right] \text{-(min-max)}$$

$$2)\ \forall(x,y)\in E\times E;\ \mu_{\overline{R}}(x,x)=0 \qquad (5.59)$$

$$3)\ \forall(x,y)\in E\times E;\ \mu_{\overline{R}}(x,x)=\mu_{\overline{R}}(y,x) \qquad (5.60)$$

Сравнивая свойства отношения подобия со свойствами отношения различия, убеждаемся, что справедливое для нечеткого отношения подобие условия транзитивности (max-min), а условие рефлексивности на условие антирефлексивности. Это означает, что нечеткое отношение различия является дополнением по отношению к нечеткому отношению подобия. В терминах теории вероятностей это следует понимать как два противоположных события.

Пример 5.41. Пусть $\overline{R}$ задано в виде

Таблица 5.42

$\overline{R}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	0,1	0,3	0,2	0,1
x_2	0,1	0	0,3	0,2	0
x_3	0,3	0.3	0	0,3	0,3
x_4	0,2	0,2	0,3	0	0,2
x_5	0,1	0	0,3	0,2	0

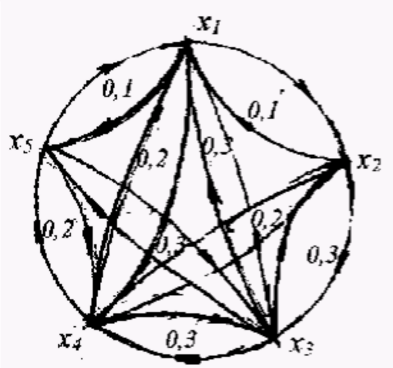


Рис.5.14

Отметим, что приведенное нечеткое отношение $\overline{R}$ совпадает с отношением подобия R в примере 5.38.

В качестве упражнения проверим (5.58) для нескольких пар элементов.

Дуга (x_1x_2)

$$\mu(x_1x_1)\vee\mu(x_1,x_2)=0\vee 0{,}1=0{,}1$$
$$\mu(x_1x_2)\vee\mu(x_2,x_2)=0{,}1\vee 0=0{,}1$$
$$\mu(x_1x_3)\vee\mu(x_3,x_2)=0{,}3\vee 0{,}3=0{,}3$$
$$\mu(x_1x_4)\vee\mu(x_4,x_2)=0{,}2\vee 0{,}2=0{,}2$$
$$\mu(x_1x_1)\vee\mu(x_5,x_2)=0{,}1\vee 0{,}1=0{,}1$$
$$\min[0{,}1;0{,}1;0{,}3;0{,}2;0{,}1]=0{,}1;\ \mu_{\overline{R}}(x_1x_2)=0{,}1$$

Дуга (x_1x_3)

$$\mu(x_1x_1)\vee\mu(x_1,x_3)=0\vee 0{,}3=0{,}3$$
$$\mu(x_1x_2)\vee\mu(x_2,x_3)=0{,}1\vee 0{,}3=0{,}3$$
$$\mu(x_1x_3)\vee\mu(x_3,x_3)=0{,}3\vee 0=0{,}3$$
$$\mu(x_1x_4)\vee\mu(x_4,x_3)=0{,}2\vee 0{,}3=0{,}3$$
$$\mu(x_1x_5)\vee\mu(x_5,x_3)=0{,}1\vee 0{,}3=0{,}3$$
$$\min[0{,}3;0{,}3;0{,}3;0{,}3;0{,}3]=0{,}3;\ \ \mu_{\overline{R}}(x_1x_3)=0{,}3$$

и т.д.

V. Отношение сходства

Определение 5.29. Рефлексивное и симметричное нечеткое отношение называется нечеткое отношение сходства, т.е. если R - есть нечеткое отношение сходства, то

$$\forall(x,y)\in E\times E;\quad \mu_R(x,x)=1 \text{ и } \mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$$

Пример 5.42. Нечеткое отношение R является отношением сходства, так как оно рефлексивно и симметрично. Легко показать, что оно не транзитивно.

Таблица 5.43

$\overline{R}$	x1	x2	x3	x4	x5
x_1	1	0,1	0,8	0,2	0.3
x_2	0,1	1	0	0,3	1
x_3	0,8	0	1	0,7	0
x_4	0.2	0,3	0,7	1	0,6
x_5	0,3	1	0	0,6	1

Отметим, что

1) (min-max) - расстояние на отношении сходства.

Если R есть отношение сходства, то его транзитивное замыкание $\hat{R}$ есть отношение подобия. В таком случае понятие (min-max) - расстояние, порожденного R можно определить через расстояние, порожденного $\hat{R}$

$$d_R(x,y) = 1 - \mu_{\hat{R}}(x,y) \tag{5.61}$$

Пример 5.43. Рассмотрим нечеткое отношение R из примера 5.42. С помощью композиционной формулы (5.29) можно подсчитать транзитивное замыкание $\hat{R}$. При этом получим:

Таблица 5.44

R^2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	0,6	0,8	0,7	0,6
x_2	0,6	1	0,6	0,6	1
x_3	0,8	0,6	1	0,7	0,6
x_4	0,7	0,6	0,7	1	0,6
x_5	0,6	1	0,6	0,6	1

а)

R^3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	0,4	0,2	0,3	0,4
x_2	0,4	1	0,4	0,4	0
x_3	0,2	0,4	0	0,3	0,4
x_4	0,3	0,4	0,3	0	0,4
x_5	0,4	0	0,4	0,4	0

б)

Далее определяем $\overline{\hat{R}}$, так, ч то

$$\mu_{\overline{\hat{R}}}(x,y) = 1 - \mu_{\hat{R}}(x,y) \tag{5.62}$$

Наконец, имеем:

$d_{\overline{\hat{R}}}(x_1,x_2) = 0{,}4$; $d_{\overline{\hat{R}}}(x_1,x_3) = 0{,}2$,

$d_{\overline{\hat{R}}}(x_1,x_4) = 0{,}3\ldots\ldots$, $d_{\overline{\hat{R}}}(x_3,x_4) = 0{,}3,\ldots\ldots$ и т.д.

2) (max-.)–транзитивное замыкание для отношения сходства

Пусть R - отношение сходства. В некоторых случаях предпочтительнее измерить расстояние между элементами с помощью (max-.)

$$\mu_{R^2}(x,z) = \vee_y[\mu_R(x,y)\cdot\mu_R(y,z)] \tag{5.63}$$

(max-.) - транзитивное замыкание отношения определяется как

$$\dot{\hat{R}} = R \cup \overset{x\cdot}{R^2} \cup \overset{x\cdot}{R^3} \cup \ldots \tag{5.64}$$

где $R^{\dot{k}} = \underbrace{R \cdot R \ldots R}_{\text{к-раз}}$ (к=1,2,3,...)

Здесь точка над $\dot{\wedge}$ и $\dot{K}$ напоминает нам, что мы имеем дело с (max-.) композицией.

Пример 5.44. Рассмотрим отношение сходства R из примера 5.42. Для этого нечеткого отношения имеем:

Таблица 5.45

R^2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	0,3	0,8	0,56	0,3
x_2	0,3	1	0,21	0,6	1
x_3	0,8	0,21	1	0,7	0,42
x_4	0,56	0,6	0,7	1	0,6
x_5	0,3	1	0,42	0,6	1

а)

R^3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	0,3	0,8	0,56	0,336
x_2	0,3	1	0,42	0,6	1
x_3	0,8	0,42	1	0,7	0,42
x_4	0,56	0,6	0,7	1	0,6
x_5	0,336	1	0,42	0,6	1

б)

Продолжая подсчеты легко доказать, что

$$\dot{\hat{R}} = R_1 \cup R^{\dot{2}} \cup R^{\dot{3}} \cup R^{\dot{4}} \cup R^{\dot{5}}$$

3) (min-sum)-расстояние на отношении сходства

Определение 5.30. (min-sum)-расстоянием будем называть величину

$$\nu_R(x,y) = \mu_{\dot{\hat{R}}}(x,y) \qquad (5.65)$$

Докажем, что эта функция удовлетворяет аксиомам расстояния

1) $\nu_R(x,y) > 0$, так как $\mu_{\hat{R}}(x,y) \in [0,1]$

2) $\nu_R(x,y) = \nu_R(y,x)$, поскольку нечеткое отношение $\hat{R}$ симметрично.

3) $\nu_R(x,x) = 0$, поскольку нечеткое отношение $\dot{\hat{R}}$ рефлексивно, откуда следует, что $\mu_{\dot{\hat{R}}}(x,x) = 0$.

4) Докажем справедливость условия:

$$\nu_R(x,y) * \nu_R(y,z) \geq \nu_R(x,z)$$

Имеем:

$$\mu_{\dot{\hat{R}}}(x,z) > \nu\left[\mu_{\dot{\hat{R}}}(x,y) \cdot \mu_{\dot{\hat{R}}}(y,z)\right]$$

Откуда следует:

$$1-\mu_{\bar{\dot{R}}}(x,z) \geq \underset{y}{V}\left[1-\mu_{\bar{\dot{R}}}(x,y)\right]\cdot\left[1-\mu_{\bar{\dot{R}}}(y,z)\right] \geq$$

$$\underset{y}{V}\left[1-\mu_{\bar{\dot{R}}}(x,y)-\mu_{\bar{\dot{R}}}(y,z)+\mu_{\bar{\dot{R}}}(x,y)\cdot\mu_{\bar{\dot{R}}}(y,z)\right]$$

Это дает

$$\mu_{\bar{\dot{R}}}(x,z) \leq \underset{y}{\wedge}\left[\mu_{\bar{\dot{R}}}(x,y)+\mu_{\bar{\dot{R}}}(y,z)\right]$$

Откуда на основании (5.65) следует справедливость (5.66).

Пример 5.45. Рассмотрим опять пример 5.42. В примере 5.44 подсчитано (max-) , т.е. $\dot{R}$. Теперь (min-sum) -расстояние будет задаваться нечеткое отношение $\bar{\dot{R}}$,для которого

$$\nu_R(x,y)=\mu_{\bar{\dot{R}}}(x,y)=1-\mu_{\dot{R}}(x,y) \qquad (5.66)$$

Учитывая, что

Таблица 5.46

$\bar{\dot{R}}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	0,664	0,2	0,44	0,664
x_2	0,664	0	0,58	0,4	0
x_3	0,2	0,58	0	0,3	0,58
x_4	0,44	0,4	0,3	0	0,4
x_5	0,664	0	0,58	0,4	0

Так как (x_3x_5)=0,58 (x_4,x_2)=0,4и. т.д.

Теорема 5.7. Пусть R - нечеткое отношение сходства. Тогда всегда справедливо включение

$$\bar{R} \subset \bar{\dot{R}} \qquad (5.67)$$

т.е.

$$\forall x,y;\ \ d(x,y) \leq \nu(x,y) \qquad (5.68)$$

Доказательство. По условию (max-min) - транзитивности имеем:

$$\mu_R(x,z) \geq \underset{y}{\vee}\left[\mu_R(x,y)\wedge\mu_R(y,z)\right]$$

По условию (max-) транзитивности имеем:

$$\mu_R(x,x) \geq \vee_y \left[\mu_R(x,y) \cdot \mu_R(y,z)\right]$$

но согласно условию $a \cdot b \leq a \wedge b$, если $a, b \in [0,1]$.

$$\mu_R(x,y) \wedge \mu_R(y,z) \geq \mu_R(x,y) \cdot \mu_R(y,z)$$

Откуда следует:

$$\vee_y \left[\mu_R(x,y) \underset{\max-\min}{\wedge} \mu_R(y,z)\right] \geq \vee_y \left[\mu_R(x,y) \cdot \mu_R(y,z)\right] \quad (5.69)$$

т.е. $R \bullet R \subset R \circ R$,

где $\bullet$- означает (max) - композиция, а $\circ$- означает (max-min) – композиция. Отсюда $\dot{\hat{R}} \subset \hat{R}$ и следовательно

$$\overline{\hat{R}} \subset \overline{\dot{\hat{R}}}.$$

VI. Отношение несходства

Определение 5.31. Антирефлексивное симметричное отношение называется отношением несходства, т.е. если R - отношение несходства, то

$$1) \; \forall (x,x) \in E \times E \quad \mu_R(x,x) = 0$$
$$2) \; \forall (x,y) \in E \times E \quad \mu_R(x,y) = \mu_R(y,x)$$

Справедливо свойство: Если R - отношение сходства, то $\overline{R}$ - отношение несходства и наоборот.

Теорема 5.8. Если $\hat{R}$ есть (max-min) – транзитивное замыкание отношения сходства R, то $\overline{\hat{R}}$ есть (min -max) -транзитивное замыкание соответствующего отношения несходства.

Доказательство. (max-min) транзитивное замыкание выражается непосредством (5.29) и (5.21).

Поэтому $\hat{R} = R \bigcup R^2 \bigcup R^3 \bigcup \ldots$ и

$$\mu_{R^\circ R}(x,y) = \wedge_y \left[\mu_R(x,y) \wedge \mu_R(y,z)\right] \quad (5.70)$$

Тогда транзитивное замыкание (min-max) записывается в виде:

$$\check{R} = R \bigcap (R * R) \bigcap (R * R * R) \bigcap \ldots \quad (5.71)$$

Пусть R - отношение сходства, $\hat{R}$- отношение подобия, $\overline{R}$- отношение несходства и $\check{\overline{R}}$- отношение различия. Тогда

$$\overline{\hat{R}} = \overset{\vee}{\overline{R}} \qquad (5.72)$$

Действительно, ранее установлено, что если R - (max-min) транзитивность, то $\overline{R}$— (min— max) - транзитивность. Покажем теперь, что

$$\underset{(\max-\min)}{\overline{R \circ R}} = \underset{(\min-\max)}{\overline{R} * \overline{R}} \qquad (5.73)$$

Имеем:

$$\mu_{R\circ R}(x,z) = \underset{y}{\vee}\left[\mu_R(x,y) \wedge \mu_R(y,z)\right]$$

$$\mu_{\overline{R\circ R}}(x,z) = 1 - \mu_{R\circ R}(x,z) = 1 - \underset{R}{\vee}\left[\mu_R(x,y) \wedge \mu_R(y,z)\right] =$$

$$= \underset{y}{\wedge}\left[\mu_R(x,y) \vee \mu_R(y,z)\right] = \mu_{\overline{R}\circ\overline{R}}(x,z)$$

т.е. справедливо (5.73) Теперь

$$\overline{\hat{R}} = \overline{R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots} = \overline{R \cup (R\circ R) \cup (R\circ R\circ R) \cup \ldots} =$$

$$= \overline{R} \cap (\overline{R\circ R}) \cap (\overline{R\circ R\circ R}) \cap \ldots = \overset{\vee}{\overline{R}}$$

(согласно (5.73)).

Пример 5.46. Отношение несходства *R*

Таблица 5.47

R	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	0,7	0,4	0,9	0,1
x_2	0,7	0	0,6	0,2	0,1
x_3	0,4	0,6	0	0,4	0,3
x_4	0,9	0,2	0,4	0	0,5
x_5	0,1	0,3	1	0,5	0

VII. Нечеткое отношение ЕСЛИ-ТО

Пусть *A* и *B* нечеткие подмножества на универсумах *X* и *Y*. Для связи нечетких подмножеств A и *B* зададим наразличных областях рассуждений и *Y* вводится понятие нечеткого условного утверждения (лингвистической импликации), т.е. $A ==>$ при «ЕСЛИ *A* ТО *B*».

Полученное импликацией отношение R выражается в терминах кортезитивного произведения подмножеств А и B, обозначенное как $R = A \times B$ с функцией принадлежности

$$\mu_R(x,y) = \mu_{A\times B}(x,y) = \min[\mu_A(x)\mu_B(y)],\ x \in X;\ y \in Y \quad (5.74)$$

(смотри определение 4.35, пример 4.16)
Может также встретиться вложение нечеткого отношения. В этом случае имеем нечеткое отношение «ЕСЛИ А, ТО ЕСЛИ В, ТО С». При этом нечеткое отношение

$$R = A \times (B \times C) = A \times B \times C \quad (5.75)$$

Нечеткая импликация может состоять из двух (или n-го - конечного числа) импликаций; соединяющихся с помощью соединений «ИЛИ (ИНАЧЕ)», «И» и т.д.

Пример 5.47. Пусть даны импликации ЕСЛИ A_i, ТО $B_i\ (i = \overrightarrow{1,n})$, где A_i, - нечеткие подмножества из Y.
Результат нечеткого отношения R вычисляется как объединение отдельных нечетких отношений
$R_i\ (i = \overrightarrow{1,n})$.

$$R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \times B_i \quad (5.76)$$

причем

$$\mu_R(x,y) = \max_i \{[\min \mu_{A_i}(x), \mu_{B_i}(y)]\} \quad (5.77)$$

2.5.6. Путь в конечном нечетком графе

Рассмотрим в конечном графе $G \subset E \times E$ упорядоченный набор из r-элементов с повторениями или без повторения

$$C = (x_1, x_2, ..., x_r), \quad (5.78)$$

где $x_k \in E\ \ (k = \overrightarrow{1,r})$, при условии

$$\forall (x_{i_k}, x_{i_{k+1}}) : \mu_R(x_{i_k} x_{i_{k+1}}) > 0\ (k = \overrightarrow{1,(r-1)}) \quad (5.79)$$

Упорядоченную ломанную (5.79) будем называть путем из x_1 в x_r в графе G (или в отношении R).

С каждым видом пути $(x_1, x_2, ..., x_r)$ будем связывать величину, определенную выражением

$$l(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_r}) = \mu_R(x_{i_1, x_{i_2}}) \wedge \mu_R(x_{i_2}, x_{i_3}) \wedge \wedge ... \wedge \mu_R(x_{i_{r-1}} x_{i_R}) \qquad (5.80)$$

Теперь рассмотрим все всевозможные пути, существующие между двумя произвольными элементами

$$x_i x_j \in E .$$

Пусть $C(x_i x_j)$- множество таких путей. Определим сильнейший путь $C^*(x_i x_j)$ как

$$l^*(x_i, x_j) = \underset{x_i x_j}{\vee} l(x_{i_1} = x_i, x_{i_2} x_{i_r} = x_j) \qquad (5.81)$$

При этом длиной пути $\left| l(x_i x_j) \right|$ будем называть число на единицу меньше числа элементов, определяющих путь.

Рассмотрим несколько теорем.

Теорема 5.9. Если $R \subset E \times E$, то

$$\forall (x, y) \in E \times E;\ \mu_R(x, y) = l_k^*(x, y) \qquad (5.82)$$

где $l_k(x, y)$ - сильнейший путь длиной *«К»,* существующий между *x* и *y*.

Доказательство. Достаточно рассмотреть (5.80) и (5.81), с одной стороны, и композицию $R \circ R \circ .... \circ R$ - с другой стороны, то получим справедливость (5.82). Фактически речь идет об одной и той же *(max-min)* - операции, представленной двумя различными способами.

Теорема 5.10. Пусть $\hat{R}$- транзитивное замыкание R, тогда

$$\forall (x, y) \in E \times E; \mu_{\hat{R}}(x, y) = l(x, y) \qquad (5.83)$$

Доказательство. Справедливо (5.83) следует из определений $\hat{R}$ и $l^*(x, y)$.

Теорема 5.11. Пусть $n = card\ E.$ Если *К*-длина пути из x_i в x_j и $к > n$, то некоторые элементы пути входят в него более одного раза, причем в это мпути имеется, по крайней мере, один контур (замкнутый путь). Если этот (или эти) контур(ы) удалить, то полученный путь будет меньше или равен *n;* можно также установить, что

$$l_k^*(x, y) = l_i^* \le n(x, y) \qquad (5.84)$$

Теорема 5.12. Если $R \subset E \times E$ и $n = card\ E,$ тогда

$$\hat{R} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n \qquad (5.85)$$

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы (5.10).

Пример 5.48. Рассмотрим отношение *R*.

Таблица 5.48

R	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	0,9	0,4	1	0
x_2	0	1	0	0,5	0
x_3	0,6	0	0	0	0,7
x_4	0	0,8	0	1	0
x_5	0,4	0	0,8	0	0

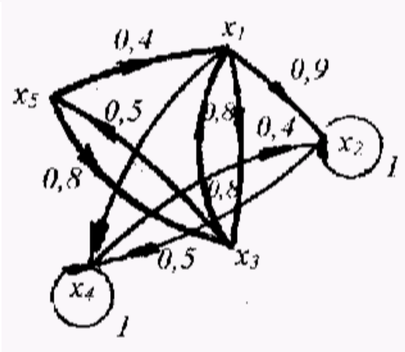


Рис.5.15

Определим сильный путь между различными элементами нечеткого множества $E = \{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5\}$.

Приведем результаты подсчетов на основании теоремы (5.10).

Таблица 5.49

$R \cup R^2$

R^2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0,4	0,9	0	1	0,4
x_2	0	1	0	0,5	0
x_3	0,4	0,6	0,7	0,6	0
x_4	0	0,8	0	1	0
x_5	0,6	0,4	0,4	0,4	0,7

а)

$R \cup R^2$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0,4	0,9	0,4	1	0,4
x_2	0	1	0	0,5	0
x_3	0,6	0,6	0,7	0,6	0,7
x_4	0	0,8	0	1	0
x_5	0,6	0,4	0,8	0,4	0,7

б)

R^3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0,4	0,9	0,4	1	0
x_2	0	1	0	0,5	0
x_3	0,6	0,6	0,4	0,6	0,7
x_4	0	0,8	0	1	0
x_5	0,4	0,6	0,7	0,6	0,4

в)

$R \cup R^2 \cup R^3$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0,4	0,9	0,4	1	0,4
x_2	0	1	0	0,5	0
x_3	0,6	0,6	0,7	0,6	0,7
x_4	0	0,8	0	1	0
x_5	0,6	0,6	0,8	0,6	0,7

г)

R^4

0,4	0,9	0,4	1	0,4
0	1	0	0,5	0
0,4	0,6	0,7	0,6	0,4
0	0,8	0	1	0
0,6	0,6	0,4	0,6	0,7

д)

$R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4$

0,4	0,9	0,4	1	0,4
0	1	0	0,5	0
0,6	0,6	0,7	0,6	0,7
0	0,8	0	1	0
0,6	0,6	0,8	0,6	0,7

е)

R^5

0,4	0,9	0,4	1	0,4
0	1	0	0,5	0
0,4	0,6	0,7	0,6	0,4
0	0,8	0	1	0
0,6	0,6	0,4	0,6	0,7

ж)

$\hat{R}$

0,4	0,9	0,4	1	0,4
0	1	0	0,5	0
0,6	0,6	0,7	0,6	0,7
0	0,8	0	1	0
0,6	0,6	0,8	0,6	0,7

$\hat{R} = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup R^5$

з)

Проведем подробный подсчет величины пути
$l_1(x_3, x_4)$

$$1)\ l_1(x_3,x_4) = l(x_3,x_1) \wedge l(x_1,x_4) = 0{,}6 \wedge 1 = 0{,}6$$

$$2)\ l_2(x_3,x_4) = l(x_3,x_5) \wedge l(x_5,x) \wedge l(x_1x_1) = 0{,}7 \wedge 0{,}4 \wedge 1 = 0{,}4$$

$$3)\ l_3(x_3,x_4) = l(x_3,x_1) \wedge l(x_1,x_2) \wedge l(x_2x_4) = 0{,}6 \wedge 0{,}9 \wedge 0{,}5 = 0{,}5$$

$$4)\ l_4(x_3,x_4) = l(x_3,x_5) \wedge l(x_5,x_1) \wedge l(x_1x_2) \wedge l_2(x_2x_4) = \\ =0{,}7 \wedge 0{,}4 \wedge 0{,}9 \wedge 0{,}5 = 0{,}4$$

Таким образом,

$$l^*(x_3,x_4) = l_1(x_3,x_4) \vee l_2(x_3,x_4) \wedge l_3(x_3x_4) \vee l_4(x_3x_4) = \\ 0{,}6 \vee 0{,}4 \vee 0{,}5 \vee 0{,}4 = 0{,}6$$

С другой стороны ранее подсчитано, что $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_3,x_4) = 0{,}6.$

Отсюда следует подтверждение справедливости теоремы (5.10). Отметим, что з десь отброшены замкнутые контуры

$$l(x_3,x_1,x_3); l(x_4,x_4) \text{ и } l(x_2x_2) \text{ и } l(x_4,x_2,x_4)\ .$$

Легко проверить, что и при учете этих замкнутых контуров

$$l^*(x_3,x_4) = 0{,}6$$

2.5.7.Разложение на максимальные подотношения подобия

Проблема разложения отношения сходства на максимальные подотношения подобия, когда отношение сходства (или соответствующее понятие расстояния) не позволяют получить классы подобия для расстояний меньших или равных заданному, связана с проблемой получения обыкновенных максимальных плоских подграфов соответствующих обычному графа.

Рассмотрим алгоритмы получения максимальных полных подматриц или главных подматриц.

I. Алгоритм Мальгранжа. Описание этого алгоритма требует введения некоторых понятий.

Определение 5.32. Полной подматрицей будем называть подматрицу, все элементы которой равные единице.

Определение 5.33. Основной подматрицей или же максимальной полной подматрицей будем называть полную подматрицу, которая не содержит другую полную подматрицу.

Определение 5.34. Покрытием булевой матрицы будем называть множество полных подматриц, которые покрывают все единичные значения этой матрицы.

Пример 5.49. Для матрицы [*M*] имеем следующие основные подмножества:

Таблица 5.50

$[M]=$

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
x_1	0	1	0	1	1	1	0	1
x_2	0	0	1	0	0	1	0	0
x_3	1	0	0	0	1	0	0	1
x_4	0	1	0	0	0	0	0	0
x_5	1	0	0	0	0	1	1	1
x_6	1	1	0	1	1	1	0	0

	y_2	y_4	y_5	y_6	y_8
x_1	1	1	1	1	1

	y_1	y_2	y_4	y_5	y_6
x_6	1	1	1	1	1

	y_2	y_4	y_5	y_6
x_1	1	1	1	1
x_6	1	1	1	1

	y_6
x_1	1
x_2	1
x_5	1
x_6	-1

	y_8
x_1	1
x_3	1
x_5	1

	y_1	y_6	y_7	y_8
x_5	1	1	1	1

	y_1
x_3	1
x_5	1
x_6	1

	y_3	y_6
x_2	1	1

	y_1	y_5	y_8
x_3	1	1	1

	y_2
x_3	1
x_4	1
x_6	1

Пусть *K* - множество строк, *j*-множество столбцов булевой матрицы. Каждая полная подматрица определяется упорядоченной парой обычных подмножеств $(K_p J_q)$, где $K_p \subset K_j J_q \subset J$. Можно

показать, что операции $\dot{\cup}$ и $\underset{\bullet}{\cap}$, которые двум полным подмножествам булевой матрицы [*M*],
скажем $[M_1]$ определяется посредством $(K_1 J_1)$

$[M_1]$ $[\cancel{M_2}]$ $(K_2 J_2)$

$[M_1] \dot{\cup} [M_2] = [M']$ определенный упорядоченной парой $(K_1 \cup K_2, J_1 \cap J_2)$

$[M_1] \cap [M_2] = [M']$ -определенный упорядоченной парой $(K_1 \cap K_2, J_1 \cap J_2)$ - есть внутренние операции на множестве *M* полных подмножеств матрицы [*M*].

Для формирования всех полных матриц покрытия

$$C = \{[M_1], [M_2], \ldots, [M_p]\} \qquad (5.87)$$

следует придерживаться следующих правил

1. Вычеркиваются все матрицы $[M_r]$, содержащиеся в других матрицах покрытия *C*.
2. К покрытию *C* добавляются подматрицы, полученные применением операций $\dot{\cup}$ и $\underset{\bullet}{\cap}$, ко всем парам матриц $[M_r]$ и $[M_j]$, входящих в покрытие (кроме полных подматриц, которые уже содержатся в подматрицах покрытия С, что исключает бесконечный процесс).

Пример 5.50. Найти основные подматрицы булевой матрицы таблицы 5.42.

Этап 1. Выберем покрытие

$$[M_1] = \begin{array}{c|ccccc} & y_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_8 \\ \hline x_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array};$$

$$[M_2] = \begin{array}{c|cc} & y_3 & y_6 \\ \hline x_2 & 1 & 1 \end{array};$$

$$[M_3] = \begin{array}{c|ccc} & y_1 & y_5 & y_6 \\ \hline x_3 & 1 & 1 & 1 \end{array};$$

$$[M_4] = \begin{array}{c|c} & y_2 \\ \hline x_4 & 1 \end{array};$$

$$[M_5] = \begin{array}{c|cccc} & y_1 & y_6 & y_7 & y_8 \\ \hline x_5 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array};$$

$$[M_6] = \begin{array}{c|ccccc} & y_1 & y_2 & y_4 & y_5 & y_6 \\ \hline x_6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array};$$

Этап 2 (второе правило). Подсчитаем объединения и пересечения:

$$K_1 \cup K_2 = \{x_1; x_2\};\ J_1 \cap J_2 = \{y_6\}$$
$$K_1 \cup K_3 = \{x_1; x_3\};\ J_1 \cap J_3 = \{y_5, y_8\}$$
$$K_1 \cup K_4 = \{x_1; x_4\};\ J_1 \cap J_4 = \{y_2\}$$
$$K_1 \cup K_5 = \{x_1; x_5\};\ J_1 \cap J_5 = \{y_6, y_8\}$$
$$K_1 \cup K_6 = \{x_1; x_6\};\ J_1 \cap J_6 = \{y_2, y_4, y_5, y_6\}$$

$$[M_7] = \begin{array}{c|c} & y_6 \\ \hline x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{array};\ [M_8] = \begin{array}{c|cc} & y_5 & y_8 \\ \hline x_2 & 1 & 1 \\ x_3 & 1 & 1 \end{array};$$

$$[M_9] = \begin{array}{c|c|} & y_2 \\ \hline x_1 & 1 \\ \hline x_4 & 1 \\ \hline \end{array}; \quad [M_{10}] = \begin{array}{c|c|c|} & y_6 & y_8 \\ \hline x_1 & 1 & 1 \\ \hline x_5 & 1 & 1 \\ \hline \end{array};$$

$$[M_{11}] = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & y_2 & y_4 & y_5 & y_6 \\ \hline x_1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline x_6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array};$$

$$K_2 \cup K_3 = \{x_2; x_3\}; \; J_2 \cap J_3 = \varnothing$$

$$K_2 \cup K_4 = \{x_2; x_4\}; \; J_2 \cap J_4 = \varnothing$$

$$K_{21} \cup K_5 = \{x_2; x_5\}; \; J_2 \cap J_5 = \{y_6\} \qquad [M_{12}] = \begin{array}{c|c|} & y_6 \\ \hline x_2 & 1 \\ \end{array}$$

$$K_2 \cup K_6 = \{x_2; x_6\}; \; J_2 \cap J_6 = \{y_6\} \qquad [M_{13}] = \begin{array}{c|c|} & y_6 \\ \hline x_2 & 1 \\ \hline x_6 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$K_3 \cup K_4 = \{x_3; x_4\}; \; J_3 \cap J_4 = \varnothing$$

$$K_3 \cup K_5 = \{x_3; x_5\}; \; J_3 \cap J_5 = \{y_1; y_8\} \qquad [M_{14}] = \begin{array}{c|c|c|} & y_1 & y_8 \\ \hline x_3 & 1 & 1 \\ \hline x_5 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$K_3 \cup K_6 = \{x_3; x_6\}; \; J_3 \cap J_6 = \{y_1; y_5\} \qquad [M_{15}] = \begin{array}{c|c|c|} & y_1 & y_5 \\ \hline x_3 & 1 & 1 \\ \hline x_6 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$K_4 \cup K_5 = \{x_4; x_5\}; \; J_4 \cap J_5 = \varnothing$$

$$K_4 \cup K_6 = \{x_4; x_6\}; \; J_4 \cap J_6 = \{y_2\} \qquad [M_{16}] = \begin{array}{c|c|} & y_2 \\ \hline x_1 & 1 \\ \hline x_6 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$K_5 \cup K_6 = \{x_5; x_6\}; \; J_5 \cap J_6 = \{y_1; y_6\} \qquad [M_{17}] = \begin{array}{c|c|c|} & y_1 & y_6 \\ \hline x_{15} & 1 & 1 \\ \hline x_0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Этап 3 (первое правило). Выпишем новое покрытие

$$C=\{[M_1],[M_2],[M_3],[M_5],[M_6],[M_7],[M_8],[M_9],[M_{10}],$$
$$[M_{11}],[M_{12}],[M_{13}],[M_{14}],[M_{15}],[M_{16}],[M_{17}]\} \quad (5.86)$$

$[M_4]$ содержится в $[M_7]$

Этап 4. (Второе правило). Подсчитаем объединения и пересечения.

$$K_1 \cup K_{12} = \{x_1;x_2,x_5\} = J_1 \cap J_{12} = \{y_6\} \to [M_{18}]$$
$$K_1 \cup K_{13} = \{x_1;x_2,x_6\} = J_1 \cap J_{13} = \{y_6\} \to [M_{19}]$$

$$K_1 \cup K_{14} = \{x_1;x_3,x_5\} = J_1 \cap J_{14} = \{y_8\} \to [M_{20}]$$
$$K_1 \cup K_{15} = \{x_1;x_3,x_6\} = J_1 \cap J_{15} = \{y_5\} \to [M_{21}]$$
$$K_1 \cup K_{16} = \{x_1;x_4,x_6\} = J_1 \cap J_{16} = \{y_2\} \to [M_{22}]$$
$$K_1 \cup K_{17} = \{x_1;x_5,x_6\} = J_1 \cap J_{17} = \{y_6\} \to [M_{23}]$$

Этап 5. (Первое правило)

Выпишем все покрытия

$$C''=\{[M_1],[M_2],[M_3],[M_5],[M_6],[M_8],[M_{10}],[M_{11}],[M_{14}],$$
$$[M_{15}],[M_{17}],[M_{18}],[M_{19}],[M_{20}],[M_{21}],[M_{22}],[M_{23}]\}$$

Этап 6. (Втрое правило). Подсчитаем объединения и пересечения

$$K_{18} \cup K_{13} = \{x_1;x_2,x_5;x_6\} = J_{18} \cap J_{19} = \{y_6\} \to [M_{24}]$$
$$K_{18} \cup K_{20} = \{x_1;x_2,x_3;x_5;x_6\} = J_{18} \cap J_{20} = \varnothing$$
$$K_{18} \cup K_{21} = \{x_1;x_2,x_3;x_5;x_6\} = J_{18} \cap J_{21} = \varnothing$$
$$K_{18} \cup K_{22} = \{x_1;x_2,x_4;x_5;x_6\} = J_{18} \cap J_{22} = \varnothing$$
$$K_{18} \cup K_{23} = \{x_1;x_2,x_5;x_6\} = J_{18} \cap J_{23} = \{y_6\} \to [M_{25}]$$
$$[M_{24}] = [M_{25}]$$

Поэтому

Этап 7. (Первое правило). Выпишем все покрытия

$$C''=\{[M_1],[M_2],[M_3],[M_5],[M_6],[M_8],[M_{10}],[M_{11}],[M_{14}],$$
$$[M_{15}],[M_{17}],[M_{19}],[M_{20}],[M_{22}],[M_{24}]\} \quad (5.87)$$

Перейдем теперь к нахождению максимального подотношения подобия с помощью алгоритма Мальгранжа.

В качестве примера рассмотрим обычный симметричный граф на рис. 5.12.

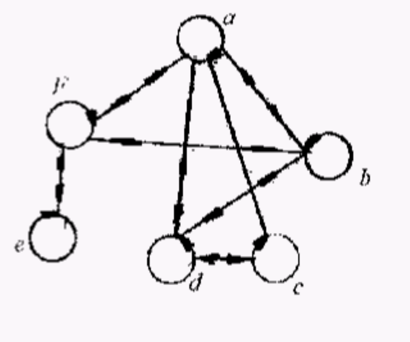
Таблица 5.51

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	1	1	1	0	1	5
x_2	1	1	0	1	0	1	4
x_3	1	0	1	1	0	0	3
x_4	1	1	1	1	0	1	5
x_5	0	0	0	0	1	1	2
x_6	1	1	0	1	1	1	5

a)

	x_1	x_4	x_6	x_2	x_3	x_5	
x_1	1	1	1	1	1	0	5
x_4	1	1	1	1	1	0	5
x_6	1	1	1	1	0	1	5
x_2	1	1	1	1	0	0	4
x_3	1	1	0	0	1	0	3
x_5	0	0	1	0	0	1	2

b)



в)

Рис.5.16

Найдем основные подматрицы соответствующей булевой матрицы (рис.5.14), которые составят ее покрытие.

Повторяя рассуждения, проведенные в примере 5.50, получим:

$$C'' = \{[M_1],[M_6],[M_7],[M_8],[M_9],[M_{10}],[M_{11}] \qquad (5.88)$$

При получении (5.88) исключены подматрицы $[M_2]$, $[M_3],[M_7]$ и $[M_5]$ как содержащиеся в других подпокрытиях этого покрытия.

2.5.8. Обратная задача для нечетких отношений

При моделировании нечетких систем часто возникает необходимость определения входных лингвистических переменных по заданным выходным при наличии нечетких рассуждений. К таким задачам относится ряд задач диагностики нечетких систем, задачи оптимального управления нечеткой системой при заданном нечетком целевом множестве, характеризующем критерий качества системы и т.д.

Рассмотрим два подхода к решению задач для нечетких отношений с применением α и β - композиции и с применением ω и ϖ - композиции.

В п.2.5.3 приведено понятие композиции нечетких отношений. По аналогии приведем понятие α -композиции.

Определение 4.35. Если $R_1 \subset X \times Y \quad R_2 \subset Y \times Z$ - нечеткие отношения, то α - композицией отношений R_1 и R_2 будем называть отношение, определенное с помощью функции принадлежности

$$\mu_{R_1 \alpha R_2}(x,z) = \bigwedge_{y \in Y} \mu_{R_1}(x,y) Z \mu_{R_2}(y,z) \tag{5.89}$$

где $\forall a,b \in [0,1]$, операция α определяется как

$$c = a\alpha b = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad a \le b \\ b, & \text{если} \quad a > b \end{cases} \tag{5.90}$$

Отметим, что если $\forall a,b \in [0,1]$, $c = a\alpha b$ является наибольшим элементом в [0,1] таким, что $a \wedge c \le b$, то справедливо неравенство $a \wedge (a\alpha b) \le b$. Если $a,b,d \in [0,1]$, то легко проверить, что $a\alpha(a \wedge b) \ge a\alpha d$ и $a\alpha(b \vee d) \ge a\alpha b$, а также $a\alpha(a \wedge u) \ge b$.

Используя данные соотношения, можно доказать следующие свойства нечетких отношений:

$$R_1 \subseteq R_2^{-1} \alpha (R_1 \circ R_2) \tag{5.91}$$

$$R_2 \subseteq \left(R_1\, \alpha (R_1 \circ R_2)^{-1}\right)^{-1} \tag{5.92}$$

$$\left(R_2^{-1} \alpha (R_1 \circ R_2)\right) \circ R_2 \subseteq (R_1 \circ R_2) \tag{5.93}$$

$$\left(\left(R_1 \circ (R\alpha(R_1 \circ R_2)\right)^{-1}\right)^{-1} \subseteq (R_1 \circ R_2) \qquad (5.94)$$

В ряде работ показано, что обратное решение задач и для нечетких отношений баз ируется на двух теоремах.

Теорема 5.13. Пусть $R_1 \subseteq (X \times Y), R_1 \circ R_2 \subseteq (X, z)$ нечеткие отношения, то если $\Im \subset (Y \times Z)$- множество нечетких отношений $R_2 \in \Im$,то$\Im \neq \varnothing$, тогда и только тогда, когда $\overline{R}_2 R_1^{-1}\alpha(R_1 \circ R_2) \in \Im$ является наибольшим элементом $\Im$.

Теорема 5.14. Пусть $R_1 \circ R_2 \subseteq (X, Z)$ и $R_2 \in (Y \times Z)$ нечеткие отношения: тогда, если $\Im \subset (X, Y)$- множество нечетких отношений, то $\Im \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\overline{R}_2 = \left(R_1\alpha(R_1 \circ R_2)^{-1}\right)^{-1} \in \Im$; R_2 - является наибольшим элементом $\Im$.

Если композиция нечетких отношений определяется через минимакс, то рассмотренные теоремы могут быть заменены двойственными.

Определение 5.36. Если $R_1 \subset (X \times Y); R_2 \subset (Y \times Z)$ нечеткие отношения, то γ -композицией двойственной α-композицией будем называть нечеткое отношение $Q = R_1 \gamma R_2,\ Q \in \Im(X \times Z)$, нечетких отношений R_1 и R_2, которое определяется с помощью функции принадлежности

$$\mu_Q(x, z) = \underset{y \in Y}{\vee} \mu_{R_1}(x, y)\gamma\mu_{R_2}(y, z), \quad (5.95)$$

где $\forall a, b \in [0,1]$ операция γ определяется как

$$c = a\gamma b = \begin{cases} b, \text{ если } a < b \\ 0, \text{ если } a \geq b \end{cases}$$

Двойственные теоремы для γ - композиции можно сформулировать следующим образом.

Теорема 5.15. Пусть R_1 и Q - нечеткие отношения, тогда если $F \subset \Im(Y \times Z)$- множество нечетких отношений $R_2 \in F$ таких, что $R_1 \circ R_2 = Q$, то $F \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\hat{R}_2 = \left(R_2 \gamma Q^{-1}\right)^{-1}$; $R_2 \in F$ является наименьшим элементом F.

Теорема 5.16. Пусть $Q \in \Im(X \times Z)$ и $R_2 \in \Im(Y \times Z)$

нечеткие отношения, тогда, если $F \subset \Im(X \times Y)$- множество нечетких отношений, таких что $R_1 \gamma R_2 = Q$, то $F \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\hat{R}_2 = \left(R_1 \gamma Q^{-1}\right)^{-1} \in F$, $\hat{Q}$ является наименьшим значением $\Im$.

Из теорем 5.13, 5.14 видно, что α-композиция позволяет определить верхнюю грань подмножества решений обратной задачи для нечеткого отношения. Нижняя граница решений определяется с помощью γ-композиции.

Определение 5.37. Если $R_1 \in \Im(X \times Y), R_2 \in \Im(Y \times Z)$ нечеткие отношения, то β –композицией $Q = R_1 \beta R_2, Q \in \Im(X \times Z)$ нечетких отношений R_1 и R_2 определяется через функции принадлежности

$$\mu_Q(x,z) = \underset{y \in Y}{\vee} \mu_{R_1}(x,y) \beta \mu_{R_2}(y,z), \tag{5.96}$$

где $\forall a, b \in [0,1]$ операция β определяется как

$$c = a \beta b = \begin{cases} 0, \text{ если } a < b \\ \beta, \text{ если } a \geq b \end{cases}$$

Нижняя грань $\Im(X \times Z)$ может быть найдена из условия

$$\hat{R}_1 \approx R\beta\left(R_2^{-1} \beta Q\right) \tag{5.97}$$

Рассмотрим второй подход к решению обратной задач и для нечетких отношений. Пусть $X = \{x_i (i = \overrightarrow{1,m})\}$; $Y = y_j (j = \overrightarrow{1,n})$ - счетные множества, a_{ij}, b_j и r_{ij}- степени принадлежности элементов нечеткого множества *A,B* и нечеткого отношения *R*-соответственно. Композиционное правило вывода имеет вид:

$$A \circ R = B \tag{5.98}$$

Введем понятия ω и ϖ- композиций.

Пусть $P, q \in [0,1]$, тогда ω-композицию определим соотношением:

$$p \omega q = \begin{cases} q, \text{если } p > q \\ (q,1], \text{если } p = q \\ \varnothing \quad \text{если } p < q \end{cases},$$

а ϖ-композицию из условия

$$p \varpi q = \begin{cases} [0;q), \text{ если } p > q \\ [q,1], \text{если } p \leq q \end{cases}$$

Пусть

$$U_{ij} = r_{ij} \omega b_j ; \upsilon_{ij} = r_{ij} \tilde{\omega} b_j ,$$

а

$$\omega_{ij}^k = \begin{cases} U_{ij}, \text{если} \exists i \in \{i / U_{ij} \neq \varnothing \;\} \\ \upsilon_\omega, \text{ если } \forall i \in \{i / U_{ij} = \varnothing \;\} \end{cases}$$

Тогда функция принадлежности нечеткого подмножества $\tilde{a}_i$ будет лежать в интервалеа $\tilde{a}$, который определяется из условия:

$$\tilde{a} = \bigcup_{k \in K} \tilde{a}^k ,$$

где

$$\tilde{a}^k = \left(\bigcap_{i \in j} \omega_{ij}^k, ..., \bigcap_{i \in J} \omega_{nj}^k \right); K = \left\{ k / \forall i, \bigcap_{i \in j} \omega_{ij}^k \neq \varnothing \right\}$$

Нетрудно показать, что $\forall i \in (\overrightarrow{1,n});\ a_i \in \tilde{a}_i$

Кроме того, верхняя и нижняя грани $\tilde{a}$ совпадают с верхней и нижней гранями $\tilde{a}$ и $\hat{a}$ вычисленных с помощьюс α и β- композиций

$$\hat{a}\ \beta(R\beta B) \subset \tilde{a} \subset \hat{a} = R \alpha B$$

Применение ω и $\tilde{\omega}$ -композиций удобно в случае, когда нечеткое отношение R имеет малую размерность. В схеме нечетких рассуждений удобно принять α и β -композиции, позволяющие определить не нечеткими матрицами, а векторными значениями функций принадлежности.

Пример 5.52. Пусть задана система нечетких рассуждений:

Если $a_{11}, a_{12}, ..., a_{1m}$, то b_1 инач е

$a_{21}, a_{22}, ..., a_{2m}$, то b_2 инач е

....

$a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nm}$,то b_n инач е,

где $a_{ij} \in h_j$- значения контролируемых Л.П. $\mu_i \in W$ значения исправляемых Л.П., b_i- значения выходных Л.П.

Пусть также определено множество управляемых значений Л.П. на базовом множестве Z.

Значениям Л.П. a_{ij}, b_i, u_i соответствуют нечеткие подмножества

$$\mu_{A_{ij}} \in \Im(X_j),\ \mu_{B_i} \in \Im(Y), \mu_{u_i} \in \Im(Z), \mu_{u_i} : \Im(Z) \to [0,1]$$

Приведенная схема нечетких рассуждений может соответствовать, например, описанию процесса лечения больного. Здесь U_i - нечеткие подмножества, элементами которых являются виды терапии. A_{ij}-параметры, характеризующие состояние больного; B_i –нечеткие интегральные оценки состояния больного - критерий качества болезни. В качестве таких критериев могут использоваться типы оценок самочувствия. Пусть требуется перевести больного в новое состояние B' - желаемое значение нечеткого критерия. При этом необходимо определить, к какому виду терапии наиболее чувствителен больной. В данном случае степень нечувствительности больного будет оцениваться разницей между верхней $\tilde{u}$ и нижней $\tilde{u}$ границами множества нечетких подмножеств $F \subset \Im(Z)$, являющейся решением обратной задач и в соответствии с нечеткой информацией, содержащейся в схеме нечетких рассуждений Л.П. Следует отметить, что на управляемые Л.П. можно положить нечеткое ограничение $\varphi \in \Im(Z)$. Композиционное правило в данном случае примет вид:

$$B' = \bigcup_{i \in j} \left(\bigcap_{j=j} \left(C_j \circ \left(A_{ij} \times B_i \right) \right) \cap \left(\left(\varphi \cap U' \right) \circ \left(U_i \times B_i \right) \right) \right) \quad (5.99)$$

где $U' \in \Im(Z), C_j \in \Im(X_j)$- нечеткие подмножества, соответствующие новым значениям Л.П., $u' \in W, c_j \in h_j$.

Используя основные свойства нечеткого множества можно показать, что

$$B' = U \circ R \quad (5.100)$$

где

$$R = \bigcup_{i=j} (\varphi \cap U_i) \times B_i^{\eta}, \ \eta_i = \bigwedge_{i \in j} Poss\left(A_{ij} \middle| C_j\right)$$

$$B_i^{\eta} = \left\{ \left(y, \mu_{B_i}^{\eta} \right) \middle| \mu_{B_i}^{\eta} = \mu_{B_i} \wedge \eta_i \right\}$$

В данном случае нечеткие подмножества $\overset{\vee}{\tilde{u}}$ и $\tilde{u}$ можно определить с помощью ω и ϖ- композ иций, но для этого необходимо определить нечеткое отношение R.

Рассмотрим метод вычисления $\overset{\vee}{\tilde{u}}$ и $\tilde{u}$ с помощью α и β-композиций из теоремы 5.14 имеем:

$$\overset{\vee}{\tilde{u}} = R\alpha B' = \left(\bigcup_{i=I}(\varphi \cap U_i) \times B_i^{\eta}\right)\alpha B' = \\ = \bigcap_{i=I}\left((\varphi \cap U_i)\alpha(\beta_i \alpha B')\right) \tag{5.101}$$

и поскольку

$$R\beta B = \left(\bigcup_{i\in I}(\varphi \cap U_i) \times B_i^{\eta}\right)\beta B' = \bigcup_{i\in I}\left((\varphi \cap U_i)\alpha\left(B_i^{\eta}\beta B'\right)\right),$$

то

$$\tilde{u} \approx \overset{\vee}{\tilde{u}}\, \beta\left(\bigcup_{i\in I}\left((\varphi \cap U_i)\beta\left(B_i^{\eta}\beta B'\right)\right) \subset \tilde{u} \subset \overset{\vee}{\tilde{u}}\right) \tag{5.102}$$

Если $\forall i \in I;\ B_i \nu$ являются детерминированными значениями или одноэлементными множествами, имеющими функцию принадлежности, равную 1, то

$$\forall i \in I; B_i^{\eta}\beta B' = B_i \alpha B' = B_i^{\eta} \circ B'$$

Рассмотренные методы решений обратной задач и с помощью α и β-композиций могут применяться при анализе чувствительности логико-лингвистических моделей.

2.6. Нечеткая логика

Логика - есть представление механизмов мышления, которая всегда строга и может быть формальной, но не нечеткой. Математики, исследовавшие эти механизмы мышления, установили, что существует не одна логика (например, Булева), а столько, сколько мы пожелаем, так как всё определяется выбором соответствующей системы аксиом. При этом все утверждения, построенные на этой основе, должны строго, без противоречия быть увязаны друг с другом согласно правилам, утвержденные в этой системе аксиом.

Следует отметить, что если булева алгебра связана с булевой теорией на четких множествах, то нечеткая логика связана с теорией нечетких множеств. Поэтому, если в качестве элементов (переменных) четкого множества, на котором при помощи четких операций (в частности, операций сложения, умножения и отрицания) строится четкая логика (в частности, четкая алгебра Буля), берутся произвольные четкие высказывания, то в качестве элементов (переменных) нечеткого множества, на котором при помощи (также) четких операций строится нечеткая логика можно взять значения функций принадлежности (характеристических функций) элементов нечетких множеств. При этом, если высказывания принимают одно из двух значений И (истина) и Л (ложь) (которым в математической логике сопоставляются численные значения «1» или «0»), то характеристические функции нечетких множеств могут принимать значения [0,1]. Поэтому в отличии от четкой логики, в нечеткой логике значения характеристических функций нечетких множеств можно рассматривать как высказывания, принимающие значения (нечеткой истины) НИ и (нечеткой лжи) НЛ, которым в нечеткой математической логике сопоставляются значения из [0;0,5) для НЛ и [0,5; 1] для НИ. Эти понятия будут более конкретизированы, если в качестве нечетких множеств рассматривать нечеткие множества конкретного α-уровня $(\alpha \in [0,1])$. При этом эстетике α-уровня сопоставляются з начения из [α;1], а лжи α-уровня сопоставляется значение из [0; α).

2.6.1. Равносильность формул алгебры характеристик нечеткого множества

Пусть *x* - элемент универсального множества Е и *A, B,* ... - нечеткие подмножества этого универсального множества и пусть

$$\tilde{a} = \underset{A}{\mu}(x),\ \ \tilde{b} = \underset{B}{\mu}(x),...;\ \tilde{a}, \tilde{b},... \in [0,1] \qquad (6.1)$$

При этом величины $\tilde{a}, \tilde{b},...$ во всей главе будем называть характеристиками нечеткого множества. В соответствии с главой 2.3 определяются операций (логические операции) на величине $\tilde{a}, \tilde{b},...$

$$\tilde{a} \wedge \tilde{b} = \min(\tilde{a}, \tilde{b}) \qquad (6.2)$$

$$\tilde{a} \vee \tilde{b} = \max(\tilde{a}, \tilde{b}) \qquad (6.3)$$

$$\overline{\tilde{a}} = 1 - \tilde{a} \qquad (6.4)$$

$$\tilde{a} \oplus \tilde{b} = (\overline{\tilde{a}} \wedge \tilde{b}) \vee (\tilde{a} \wedge \overline{\tilde{b}}) \qquad (6.5)$$

Определение 6.1. Всякую характеристику нечеткого множества, состоящую из некоторых исходных характеристик нечеткого множества посредством применения логических операций (6.2)-(6.5) будем называть формулой алгебры характеристикнечеткого множества.

Исходными характеристиками нечеткого множества могут быть значения функций принадлежности элементов нечетких подмножеств заданного универсального множества.

Используя свойства множества нечетких подмножеств можно записать следующие равносильности:

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{a}\wedge\tilde{b}=\tilde{a}\wedge\tilde{b} \qquad (6.6)\\ &\tilde{a}\vee\tilde{b}=\tilde{a}\vee\tilde{b} \qquad (6.7)\end{aligned}\right\}\ \text{коммуникативность}$$

$$\left.\begin{aligned} &(\tilde{a}\vee\tilde{b})\wedge\tilde{c}=\tilde{a}\wedge(\tilde{b}\vee\tilde{c} \qquad (6.8)\\ &(\tilde{a}\vee\tilde{b})\vee\tilde{c}=\tilde{a}\vee(\tilde{b}\vee\tilde{c}) \qquad (6.9)\end{aligned}\right\}\ \text{ассоциативность}$$

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{a}\wedge\tilde{a}=\tilde{a} \qquad (6.10)\\ &\tilde{a}\vee\tilde{a}=a \qquad (6.11)\end{aligned}\right\}\ \text{иденпотентность}$$

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{a}\wedge(\tilde{b}\vee\tilde{c})=(\tilde{a}\wedge\tilde{b})\vee(\tilde{a}\wedge\tilde{c} \qquad (6.12)\\ &\tilde{a}\vee(\tilde{b}\wedge\tilde{c})=(\tilde{a}\vee\tilde{b})\wedge(\tilde{a}\vee\tilde{c}) \qquad (6.13)\end{aligned}\right\}\ \text{дистриб утивность}$$

$$\tilde{a}\wedge 0=0 \qquad (6.14)$$

$$\tilde{a}\vee 0=0 \qquad (6.15)$$

$$\tilde{a}\wedge 1=\tilde{a} \qquad (6.16)$$

$$\tilde{a}\vee 1=1 \qquad (6.17)$$

$$\left(\overline{\overline{\tilde{a}}}\right)=\tilde{a} \qquad (6.18)$$

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\tilde{a}\wedge\tilde{b}}=\overline{\tilde{a}}\vee\overline{\tilde{b}} \qquad (6.19)\\ &\overline{\tilde{a}\vee\tilde{b}}=\overline{\tilde{a}}\wedge\overline{\tilde{b}} \qquad (6.20)\end{aligned}\right\}\ \text{теоремы де Моргана}$$

Доказательства всех этих формул тривиальны, за исключением формул (6.12), (6.13), (6.19) и (6.20).

Докажем (6.12). Предположим, что значения величин $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ и $\tilde{c}$ могут находиться в отношениях, определяемых следующими тремя различными порядками:

$$1)\ 0\le\tilde{a}\le\tilde{b}\le\tilde{c}\le 1;\ 2)\ 0\le\tilde{b}\le\tilde{c}\le\tilde{a}\le 1 \text{ и}$$

$$3)\ 0\le\tilde{c}\le\tilde{a}\le\tilde{b}\le 1 \qquad (6.21)$$

Имеем:

$$1)\ \tilde{a} \wedge (\tilde{b} \vee \tilde{c}) = \min[\tilde{a}, \max(\tilde{b}, \tilde{c})] = \min(\tilde{a}, \tilde{c}) = \tilde{a} \quad (6.22)$$

$$(\tilde{a} \wedge \tilde{b}) \vee (\tilde{a} \wedge \tilde{c}) = \max[\min(\tilde{a}, \tilde{b}), \min(\tilde{a}, \tilde{c}) = \max(\tilde{a}, \tilde{a}) = \tilde{a} \quad (6.23)$$

$$2)\ \tilde{a} \wedge (\tilde{b} \vee \tilde{c}) = \min[\tilde{a}, \max(\tilde{b}, \tilde{c})] = \min(\tilde{a}, \tilde{c}) = \tilde{c} \quad (6.24)$$

$$(\tilde{a} \wedge \tilde{b}) \vee (\tilde{a} \wedge \tilde{c}) = \max[\min(\tilde{a}, \tilde{b}), \min(\tilde{a}, \tilde{c}) = \max(\tilde{b}, \tilde{c}) = \tilde{c} \quad (6.25)$$

$$3)\ \tilde{a}(\tilde{b} \vee \tilde{c}) = \min[\tilde{a}, \max(\tilde{b}, \tilde{c})] = \min(\tilde{a}, \tilde{b}) = \tilde{a} \quad (6.26)$$

$$(\tilde{a} \wedge \tilde{b}) \vee (\tilde{a} \wedge \tilde{c}) = \max[\min(\tilde{a}, \tilde{c}), \min(\tilde{a}, \tilde{c}) = \max(\tilde{a}, \tilde{c}) = \tilde{a} \quad (6.27)$$

Аналогично, можно доказать справедливость формулы (6.13).
Докажем теорему де Моргана (6.19).
Пусть

$$\max[(1-\tilde{a}), (1-\tilde{b})] = 1-\tilde{a} \quad (6.28)$$

$$\min[\tilde{a}, \tilde{b}] = \tilde{a} \quad (6.29)$$

$$\max[(1-\tilde{a}), (1-\tilde{b})] + \min[\tilde{a}, \tilde{b}] = 1-\tilde{a}+\tilde{a} = 1 \quad (6.30)$$

Тогда

$$\max[(1-\tilde{a}), (1-\tilde{b})] = 1-\min[\tilde{a}, \tilde{b}] \quad (6.31)$$

или

$$\tilde{a} \vee \tilde{b} = \overline{\tilde{a} \wedge \tilde{b}} \quad (6.32)$$

Замечание 6.1. За исключением двух свойств

$$\tilde{a} \cdot \overline{\tilde{a}} = 0 \qquad \text{и} \qquad \tilde{a} + \overline{\tilde{a}} = 1, \quad (6.33)$$

для которых, кроме случая $\tilde{a} = 0$ или $\tilde{a} = 1$, соответствующие соотношения для нечеткого множества не выполняются, т.е., кроме свойства (6.6)-(6.20) $\tilde{a} \wedge \overline{\tilde{a}} = 0$ и $\tilde{a} \vee \overline{\tilde{a}} \neq 1$ составляют все свойства бинарной булевой алгебры. Из-за этих исключений структура, определяемая на множестве переменных $\tilde{a}, \tilde{b}, \ldots$ операциями «$\wedge, \vee$ и -» не может рассматриваться как алгебра в том смысле, в каком этот термин употребляется в современной математике. Поэтому, следует отдавать себе отчет в том, что слова «алгебра» как и многие другие математические термины не всегда употребляются в одном и том же смысле. Отметим также законы двойственности.

Определение 6.2. Операции $\wedge$ и $\vee$ будем называть двойственными друг от друга.

Определение 6.3. Формулы m и m*, будем называть двойственными, если одна получается из другой заменой каждой операции на двойственную.

2.6.2. Характеристическая функция характеристик нечеткого множества и ее полиномиальные формы

Определение 6.4. Функцию $f(\tilde{a},\tilde{b},...)$, зависящую от характеристик нечеткого множества, будем называть характеристической функцией характеристических переменных, если областью значений является отрезок [0;1], т.е., если

$$0 \le f(\tilde{a},\tilde{b},...) \le 1 \tag{6.34}$$

Теорема 6.1. Если $f(\tilde{a},\tilde{b},...)$ зависит от характеристик нечеткого множества, связанных между собой операциями «$\wedge, \vee$ или $\bar{\ }$», то она удовлетворяет условию (6.34).

Доказательство. Утверждение теоремы очевидно, так как в силу справедливости соотношений (6.6)-(5.20) применение к $\tilde{a},\tilde{b},... \in [0,1]$ операций «$\wedge, \vee$ или $\bar{\ }$» не может дать результат, выходящий из [0,1].

В отличии от булевых функций, для систематического анализа характеристических функций от характеристик нечеткого множества нельзя воспользоваться методом сопоставления таблиц истинности. Они не поддаются упрощению так легко, как булевы функции, поскольку не обладают свойствами (6.33). По этой же причине эти функции нельзя представить в нормальной дизъюнктивной форме (с помощью минитермов) или в нормальной конъюнктивной форме (с помощью минитермов). Но иногда с помощью свойств (6.6)-(6.20) можно провести определенное число упрощений характеристической функции характеристик нечеткого множества.

Рассмотрим несколько примеров таких упрощений:

$$1)\ f(\tilde{a},\tilde{b}) = \tilde{a} \vee (\tilde{a} \wedge \tilde{b}) = \tilde{a} \wedge (1,\tilde{b}) = \tilde{a} \wedge 1 = \tilde{a} \tag{6.35}$$

согласно (6.12) и (6.16). Итак $\tilde{a} \vee (\tilde{a} \wedge \tilde{b}) = \tilde{a}$- это так называемое свойство поглощения.

Аналогично можно показать, что $\tilde{a} \wedge (\tilde{a} \vee \tilde{b}) = \tilde{a}$-это двойственная форма свойства поглощения.

$$2)\ f(\tilde a,\tilde b,\tilde c)=(\tilde a\wedge\tilde b\wedge\tilde c)\vee[\bar{\tilde a}\wedge(\bar{\bar{\tilde b}}\vee\tilde c)]\vee\bar{\tilde a}\vee(\tilde b\wedge\bar{\tilde c})=$$

$$=(\tilde a\wedge\tilde b\wedge\bar{\tilde c})\vee(\bar{\tilde a}\wedge\bar{\bar{\tilde b}})\vee(\bar{\tilde a}\wedge\tilde c)\vee\bar{\tilde a}\vee(\tilde b\wedge\bar{\tilde c})=$$

$$=(\tilde b\wedge\bar{\tilde c})=(\tilde b\wedge\bar{\tilde c})\vee\bar{\tilde a} \qquad (6.36)$$

согласно свойству поглощения для (1) и (5) и для (2) - (4). Заметим, что различных булевых функций при различных переменных равно $2^{(2n)}$. В случае *n*-го числа характеристик нечеткого множества, число характеристических функций, составленных произвольным образом из этих переменных операций «$\wedge,\vee$ и $\bar{\ }$» также конечно.

Замечание 6.2. Операцию $\vee$ можно выразить через операцию $\wedge$ и операцию $\bar{\ }$ и наоборот. Действительно:

$$\tilde a\wedge\tilde b=\min(\tilde a,\tilde b)=1-\max(\bar{\tilde a}\,\bar{\tilde b})=\overline{\bar{\tilde a}\vee\bar{\tilde b}} \qquad (6.37)$$

Это другой способ представления закона (6.19). То же можно сделать для второго закона де Моргана (6.20). Таким образом, достаточно использовать операторы «$\wedge$ и $\bar{\ }$» или операторы «$\vee$ и $\bar{\ }$», чтобы представить любую характеристическую функцию характеристик нечеткого множества, содержащую символы «$\wedge,\vee$ и $\bar{\ }$», хотя выражения становятся очень громоздкими.

Следует отметить, что в булевой алгебре для того, чтобы представить произвольную булеву функцию, достаточно одного оператора. Рассмотрим оператор Шеффера:

$$a|b=\overline{a\cdot b}=\bar a+\bar b \qquad (6.38)$$

Поскольку

$$a+b=\bar a|\bar b=(a|a)|b|b \qquad (6.39)$$

$$a\cdot a=\overline{\bar a|b}=(a|b)|(a|b) \qquad (6.40)$$

$$\bar a=(a|a) \qquad (6.41)$$

Оператор Пирса:

$$a\downarrow b=\overline{a\dotplus b}=\bar a+\bar b \qquad (6.42)$$

$$a\dotplus b=\overline{a\downarrow b}=(a\downarrow b)\downarrow(a\downarrow b) \qquad (6.43)$$

$$a\cdot b=\bar a\downarrow\bar b=(a\downarrow a)\downarrow(b\downarrow b) \qquad (6.44)$$

$$\bar a=a\downarrow a$$

От булевых функций, использующих оператор Пирса, можно перейти к выражениям, содержащим оператор Шеффера и наоборот:

$$a \downarrow b = \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{\bar{a} | \bar{b}} = \overline{(a|a)|(b|b)} = \big((a|a)|(b|b)\big)\big|\big((a|a)|(b|b)\big) \qquad (6.45)$$

$$a|b = \bar{a} \dotplus \bar{b} = \overline{\bar{a} \downarrow \bar{b}} = \overline{(a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b)} =$$

$$= \big((a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b)\big) \downarrow (a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b) \qquad (6.46)$$

Для характеристик нечеткого множества определяем также операторы:

$$\text{Шеффера:} \qquad \tilde{a} \downarrow \tilde{b} = \overline{\tilde{a} \wedge \tilde{b}} = \bar{\tilde{a}} \vee \bar{\tilde{b}} \qquad (6.47)$$

$$\text{Пирса:} \qquad \tilde{a} \downarrow \tilde{b} = \overline{\tilde{a} \vee \tilde{b}} = \bar{\tilde{a}} \wedge \bar{\tilde{b}}$$

Любую характеристическую функцию характеристик нечеткого множества можно записать с помощью только одного из этих операторов. Имеем:

$$1) \ \tilde{a} \vee \tilde{b} = \bar{\tilde{a}} \big| \bar{\tilde{b}} = (\tilde{a}|\tilde{a})\big|(\tilde{b}|\tilde{b}) \qquad (6.48)$$

$$\tilde{a} \wedge \tilde{b} = \overline{\tilde{a}|\tilde{b}} = (\tilde{a}|\tilde{b})\big|(\tilde{a}|\tilde{b}) \qquad (6.49)$$

$$\bar{\tilde{a}} = \tilde{a}|\tilde{a} \qquad (6.50)$$

$$2) \ \tilde{a} \vee \tilde{b} = \overline{\tilde{a} \downarrow \tilde{b}} = (\tilde{a} \downarrow \tilde{b}) \downarrow (\tilde{a} \downarrow \tilde{b}) \qquad (6.51)$$

$$\tilde{a} \wedge \tilde{b} = \bar{\tilde{a}} \downarrow \bar{\tilde{b}} = (\tilde{a} \downarrow \tilde{a}) \downarrow (\tilde{b} \downarrow \tilde{b}) \qquad (6.52)$$

$$\bar{\tilde{a}} = \tilde{a} \downarrow \tilde{a} \qquad (6.53)$$

Используя формулы (6.45) и (6.46) можно перейти от оператора Пирса к оператору Шеффера и наоборот. В качестве примера рассмотрим, как записать не слишком сложную характеристическую функцию нечеткого множества, используя, оператор Шеффера:

$$f(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}) = \bar{\tilde{a}} \wedge (\tilde{b} \vee \tilde{c}) = (\tilde{a}|\tilde{a}) \wedge \big((\tilde{b}|\tilde{b})\big|(\tilde{c}|\tilde{c})\big) =$$

$$(\tilde{a}|\tilde{a}) \wedge \Big((\tilde{b}|\tilde{b})\Big|\big((\tilde{c}|\tilde{c})\big|(\tilde{c}|\tilde{c})\big)\Big) = \Big((\tilde{a}|\tilde{a})\Big|\big((\tilde{b}|\tilde{b})\big|(\tilde{c}|\tilde{c})\big|(\tilde{c}|\tilde{c})\big)\Big) = \qquad (6.54)$$

$$= \Big|\Big((\tilde{a}|\tilde{a})\Big|\Big((\tilde{b}|\tilde{b})\Big|\big((\tilde{c}|\tilde{c})\big|(\tilde{c}|\tilde{c})\big)\Big)\Big)$$

Это очень сложное выражение для такой простой функции как $\overline{\tilde{a}}\left(\tilde{b} \vee \overline{\tilde{c}}\right)$

Для из учения булевых бинарных функций можно использовать так называемую таблицу истинности, в которой бинарным переменным придаются всевозможные значения и выписываются соответствующие значения функции. Чтобы изучить характеристическую функцию, зависящую от одной характеристикинечеткого множестваа $\tilde{a}$, рассмотрим ее значение в следующих двух случаях:

$$\tilde{a} \le \overline{\tilde{a}},\ \overline{\tilde{a}} \le \tilde{a} \tag{6.55}$$

Для изучения характеристической функции двух переменных $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ рассмотрим ее значение в следующих восьми случаях:

$$\begin{gathered}
\tilde{a} \le \tilde{b} \le \overline{\tilde{b}} \le \overline{\tilde{a}};\ \tilde{a} \le \overline{\tilde{b}} \le \tilde{b} \le \overline{\tilde{a}}; \overline{\tilde{a}} \le \tilde{b} \le \overline{\tilde{b}} \le \tilde{a}; \\
\overline{\tilde{a}} \le \overline{\tilde{b}} \le \tilde{b} \le \tilde{a}; \tilde{b} \le \tilde{a} \le \overline{\tilde{a}} \le \overline{\tilde{b}}; \tilde{b} \le \overline{\tilde{a}} \le \tilde{a} \le \overline{\tilde{b}}; \\
\overline{\tilde{b}} \le \tilde{a} \le \overline{\tilde{a}} \le \tilde{b}; \overline{\tilde{b}} \le \overline{\tilde{a}} \le \tilde{a} \le \tilde{b}
\end{gathered} \tag{6.56}$$

Для изучения характеристической функции, зависящей от трех характеристик $\tilde{a}$,$\tilde{b}$ и $\tilde{c}$ рассматривается 48 случаев, выписанных для экономии места без знака ≤ и символа ~.

Наконец, для изучения функции переменных рассматривается $P_n \cdot 2^n$ случ аев, где $P_n = n!$

Рассматривая соотношения (6.55), (6.56) можно установить эффект аксимметриии, возникающей из -за того, что, если $\tilde{x} \le \tilde{y}$, то $\overline{\tilde{y}} \le \overline{\tilde{x}}$

Пример 6.1. Перечислим значения функции

$$f\left(\tilde{a}, \tilde{b}\right) = \left(\tilde{a} \vee \overline{\tilde{a}}\right) \wedge \left(\overline{\tilde{a}} \vee \tilde{b} \vee \overline{\tilde{b}}\right)$$

Представим результаты в таблице 6.1

$\leq$				$\tilde{a} \vee \overline{\tilde{a}}$	$\tilde{a} \vee \tilde{b} \vee \overline{\tilde{b}}$	$\left(\tilde{a} \vee \overline{\tilde{a}}\right) \wedge \left(\overline{\tilde{a}} \vee \tilde{b} \vee \overline{\tilde{b}}\right)$
$\tilde{a}$	$\tilde{b}$	$\overline{\tilde{b}}$	$\overline{\tilde{a}}$	$\overline{\tilde{a}}$	$\overline{\tilde{a}}$	$\overline{\tilde{a}}$
$\tilde{a}$	$\overline{\tilde{b}}$	$\tilde{b}$	$\overline{\tilde{a}}$	$\overline{\tilde{a}}$	$\overline{\tilde{a}}$	$\overline{\tilde{a}}$
$\overline{\tilde{a}}$	$\tilde{b}$	$\overline{\tilde{b}}$	$\tilde{a}$	$\tilde{a}$	$\tilde{a}$	$\tilde{a}$
$\overline{\tilde{a}}$	$\overline{\tilde{b}}$	$\tilde{b}$	$\tilde{a}$	$\tilde{a}$	$\tilde{a}$	$\tilde{a}$
$\tilde{b}$	$\tilde{a}$	$\overline{\tilde{a}}$	$\overline{\tilde{b}}$	$\overline{\tilde{b}}$	$\overline{\tilde{b}}$	$\overline{\tilde{b}}$
$\tilde{b}$	$\overline{\tilde{a}}$	$\tilde{a}$	$\overline{\tilde{b}}$	$\overline{\tilde{b}}$	$\overline{\tilde{b}}$	$\overline{\tilde{b}}$
$\overline{\tilde{b}}$	$\tilde{a}$	$\overline{\tilde{a}}$	$\tilde{b}$	$\tilde{b}$	$\tilde{b}$	$\tilde{b}$
$\overline{\tilde{b}}$	$\overline{\tilde{a}}$	$\tilde{a}$	$\tilde{b}$	$\tilde{b}$	$\tilde{b}$	$\tilde{b}$

Определение 6.5. Функции f_1 и f_2 от характеристик нечеткого множества будем называть равносильными (тождественными), если они имеют одну и ту же таблицу значений, включающие всевозможные случаи.

Определение 6.6. Операции, проводимые над характеристиками нечеткого множества от $«\wedge, \vee$ и $\bar{\ }»$ будем называть смешанными операциями. В число таких операций входят:

Умножение:

$$a \cdot b, \tag{6.57}$$

для которого легко проверить, справедливость свойства:

если

$$\tilde{a} \in [0,1],\ \tilde{b} \in [0,1]\text{, то } a \cdot b \in [0,1] \tag{6.58}$$

и суммирование

$$\tilde{a} \,\text{€}\, \tilde{b} = \tilde{a} + \tilde{b} - \tilde{a} \cdot \tilde{b} \tag{6.59}$$

Здесь тоже сохранятся свойства (5.60).

Определение 6.7. Характеристическую функцию от характеристик нечеткого множества, полученную в результате подтверждения характеристик нечеткого множества смешанным операциям будем называть смешанной функцией характеристик нечеткого множества. Например:

$$f\left(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}\right) = \left(\tilde{a} \,\text{€}\, \tilde{b}\right) \wedge \left(\tilde{a} \,\text{€}\, \tilde{c}\right) \wedge \left(\tilde{b} \,\text{€}\, \tilde{c}\right) \tag{6.60}$$

есть смешанная характеристическая функция характеристик нечеткого множества.

Замечание 6.3. С помощью таблицы перечисления для n переменных можно определить

$$N = (2n)^{\left(n!\cdot 2^{n}\right)} \qquad (6.61)$$

различных характеристических функций от характеристик нечеткого множества. Таким образом, при

$$n = 1;\quad N = (2\cdot 1)^{2} = 2^{2} = 4$$

$$n = 2;\ N = (2\cdot 2)^{\left(2!\cdot 2^{2}\right)} = 4^{8} = 65536$$

$$n = 3;\ N = (2\cdot 3)^{\left(3!\cdot 2^{3}\right)} = 6^{48}$$

$$n = 4;\ N = (2\cdot 4)^{\left(4!\cdot 2^{4}\right)} = 8^{384}$$

Только незначительная часть всех этих функций составляет характеристические функции характеристик нечеткого множества, представленные с помощью операций $\wedge$ и $\vee$ на переменных $\tilde{a}, \tilde{b},\ldots,\overline{\tilde{a}}, \overline{\tilde{b}},\ldots$

Определение 6.8. Характеристическую функцию характеристик нечеткого множества будем называть аналитической, если ее можно выразить, используя лишь операции $\wedge$ и $\vee$, а переменные $\left(\tilde{a}, \overline{\tilde{b}},\ldots\right)$ и обозначим $f\left(\tilde{a}, \tilde{b},\ldots\right)$

С помощью двойственных законов дистрибутивности (6.12), (6.13) любую характеристическую функцию характеристик нечеткого множества $f\left(\tilde{a}, \tilde{b},\ldots\right)$ можно представить в полиномиальной форме относительно операций $\wedge$ и $\vee$.

Пример 6.2. Пусть

$$f\left(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}\right) = \left(\overline{\tilde{a}} \wedge \overline{\tilde{b}}\right) \vee \left(\tilde{a} \wedge \tilde{b} \wedge \overline{\tilde{c}}\right) \qquad (6.62)$$

Эта функция записана в полиномиальной форме относительно $\vee$.

Используя закон (6.13), функцию (6.62) можно преобразовать в полиномиальную форму относительно $\wedge$.

$$f\left(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}\right) = \left(\overline{\tilde{a}} \vee \tilde{a}\right) \wedge \left(\overline{\tilde{a}} \vee \tilde{b}\right) \wedge \left(\overline{\tilde{a}} \vee \overline{\tilde{c}}\right) \wedge \left(\overline{\tilde{b}} \vee \tilde{a}\right) \wedge \left(\overline{\tilde{b}} \vee \tilde{b}\right) \wedge \left(\overline{\tilde{b}} \vee \overline{\tilde{c}}\right) \qquad (6.63)$$

Пример 6.3.

$$f\left(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}\right) = \left(\tilde{a} \vee \tilde{b}\right) \wedge \tilde{c} \wedge \left(\overline{\tilde{a}} \vee \tilde{b} \vee \tilde{c}\right) = \left(\tilde{a} \vee \tilde{b}\right) \wedge \tilde{c}$$

Поскольку третий член поглощается вторым, используя закон (6.12), получим выражение:

$$f\left(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\right)=\left(\bar{\tilde{a}}\wedge\tilde{c}\right)\vee\left(\bar{\tilde{b}}\wedge\tilde{c}\right),$$

которое дает полиномиальную форму относительно $\vee$.

Определение 6.9. Пусть характеристическая функция от характеристик нечеткого множества $f\left(\tilde{a},\tilde{b},...\right)$ выражается в полиномиальной форме относительно $\wedge$. Одночлен такой полиномиальной формы называют максимальным (собственным), если он не поглощается никаким другим одночленом этой полиномиальной формы. Аналогичное определение дается относительно $\vee$.

Определение 6.10. Всякая полиномиальная форма относительно $\vee$, состоящая только из максимальных одночленов по $\wedge$, называется приведенной полиномиальной формой относительно $\vee$.

Замена в примере (6.2) $\vee$ на $\wedge$ и в примере 6.3. , наоборот, приводит к определению приведенной полиномиальной формы относительно $\wedge$.

Аналитические функции $f(\tilde{a},\tilde{b},...)$ могут соответствовать нескольким приведенным полиномиальным формам.

Например, следующие две полиномиальные формы:

$$\underset{\sim}{f}(\tilde{a},b)=\left(\tilde{a}\wedge\bar{\tilde{a}}\right)\vee\left(\tilde{a}\wedge\tilde{b}\right)\vee\left(\tilde{a}\wedge\bar{\tilde{b}}\right) \tag{6.64}$$

и

$$\underset{\sim}{f}(\tilde{a},b)=\left(\tilde{a}\wedge\tilde{b}\right)\vee\left(\tilde{a}\vee\tilde{b}\right) \tag{6.65}$$

соответствуют одной и той же аналитической функции, что можно проверить на примере 6.1. Для любой аналитической функции характеристик нечеткого множества существует по крайней мере одна приведенная полиномиальная форма относительно $\wedge$ и по крайней мере одна приведенная форма полиномиальная форма относительно $\vee$.

Пример 6.4

$$\underset{\sim}{f}(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c})=\left(\tilde{a}\vee\tilde{b}\right)\vee\left(\bar{\tilde{a}}\vee\tilde{c}\right)\wedge\left(\tilde{b}\wedge\bar{\tilde{b}}\right)\wedge\left(\tilde{b}\vee\tilde{c}\right)\wedge\left(\tilde{c}\vee\bar{\tilde{c}}\right)\wedge\left(\bar{\tilde{b}}\vee\bar{\tilde{c}}\right)$$

$$\underset{\sim}{f}(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c})=\left(\bar{\tilde{a}}\vee\tilde{b}\right)\vee\left(\bar{\tilde{b}}\wedge\tilde{c}\right)$$

Характеристические функции характеристик нечеткого множества могут быть тождественны. Достаточное условие тождественности двух характеристических функций является возможность приведения их к приведенной полиномиальной форме относительно $\vee$ или $\wedge$. Необходимое и достаточное условие состоит в том, чтобы у этих функций была одна и таже таблица значений.

Теорема 6.2. Число различных приведенных полиномиальных форм относительно *n* переменных конечно и равно верхней грани числа различных аналитических характеристических функций *n* характеристик нечеткого множества.

Эти приведенные полиномиальные формы представлены как элементы свободной дистрибутивной решетки с *2n* образующими. С этим понятием можно ознакомится в ряде работ.

Перечисление всех приведенных форм *n*-го числа характеристик нечеткого множества - нелегкая проблема. Для одной переменной это тривиально. Имеем:

$$\tilde{a}, \overline{\tilde{a}}, \tilde{a} \wedge \overline{\tilde{a}}; \tilde{a} \vee \overline{\tilde{a}} \tag{6.66}$$

т.е. четыре приведенных форм. Заметим, что $\tilde{a} \wedge \overline{\tilde{a}}$ нужно отметить, например, от $\tilde{a}$, поскольку

$$\tilde{a} \wedge \overline{\tilde{a}} = \tilde{a}\text{, если } \tilde{a} \le \overline{\tilde{a}} \text{ и } \tilde{a} \wedge \overline{\tilde{a}} = \overline{\tilde{a}}\text{, если } \overline{\tilde{a}} \le \tilde{a}\,.$$

Для двух переменных сделать это уже очень сложно. Рассмотрим перечень всех возможных различных приведенных полиномиальных форм $\underset{\sim}{f}(\tilde{a}, \tilde{b})$ относительно $\vee$: (для удобства обозначим $\tilde{a} = a,\quad \tilde{b} = b$ и т.д.).

1. Формы $\underset{\sim}{f}(\tilde{a}, \tilde{b})$, содержащие один одночлен:

1	$a(1)\quad 1\wedge 2$	$a \wedge \bar{a}(5)\quad 1\wedge 2\wedge 3$	$a \wedge \bar{a} \wedge b\quad (11)$
2	$\bar{a}\ (2)\quad 1\wedge 3$	$a \wedge b(6)\quad 1\wedge 2\wedge 4$	$a \wedge \bar{a} \wedge \bar{b}\quad (12)$
3	$b(3)\quad 1\wedge 4$	$a \wedge \bar{b}(7)\quad 1\wedge 3\wedge 4$	$a \wedge b \wedge \bar{b}\quad (13)$
4	$\bar{b}\ (4)\quad 2\wedge 3$	$\bar{a} \wedge b(8)\quad 2\wedge 3\wedge 4$	$\bar{a} \wedge b \wedge \bar{b}\quad (14)$
	$2\wedge 4$	$\bar{a} \wedge \bar{b}(9)$	
	$3\wedge 4$	$b \wedge \bar{b}(10)$	
		$1\wedge 2\wedge 3\wedge 4$	$a \wedge \bar{a} \wedge b \wedge \bar{b}\ (15)$

Здесь имеется 15 приведенных форм, состоящих из одного одночлена.

2. Аналогичным образом легко подсчитать, что число форм $\underset{\sim}{f}(\tilde{a}, b)$, содержащих два одночлена (где ни один из этих одночленов не

поглощает другой) равно 55; для форм, содержащих по три одночлена и по четыре одночлена эти числа соответственно равны: 64 и 25.

3. Формы $f(\tilde{a}, \tilde{b})$, содержащих по пять одночленов:

$(1\wedge2)\vee(1\wedge3)$ $\vee(1\wedge4)$ $\vee(2\wedge3)$ $\vee(2\wedge4)$	$(a\wedge\bar{a})\vee(a\wedge b)\vee(a\wedge\bar{b})\vee(\bar{a}\wedge b)\vee(\bar{a}\wedge b)$
$(1\wedge2)\vee(1\wedge3)$ $\vee(1\wedge4)$ $\vee(2\wedge3)$ $\vee(3\wedge4)$	$(a\wedge\bar{a})\vee(a\wedge b)\vee(a\wedge\bar{b})\vee(\bar{a}\wedge b)\vee(b\wedge\bar{b})$
$(1\wedge2)\vee(1\wedge3)$ $\vee(1\wedge4)$ $\vee(2\wedge4)$ $\vee(3\wedge4)$	$(a\wedge\bar{a})\vee(a\wedge b)\vee(a\wedge\bar{b})\vee(\bar{a}\wedge\bar{b})\vee(b\wedge\bar{b})$
$(1\wedge2)\vee(1\wedge3)$ $\vee(2\wedge3)$ $\vee(2\wedge4)$ $\vee(3\wedge4)$	$(a\wedge\bar{a})\vee(a\wedge b)\vee(\bar{a}\wedge b)\vee(\bar{a}\wedge\bar{b})\vee(b\wedge\bar{b})$
$(1\wedge2)\vee(1\wedge4)$ $\vee(2\wedge3)$ $\vee(2\wedge4)$ $\vee(3\wedge4)$	$(a\wedge\bar{a})\vee(a\wedge\bar{b})\vee(\bar{a}\wedge b)\vee(\bar{a}\wedge\bar{b})\vee(b\wedge\bar{b})$
$(1\wedge3)\vee$ $(1\wedge4)\vee(2\wedge3)$ $\vee(2\wedge4)$ $\vee(3\wedge4)$	$(a\wedge b)\vee(a\wedge\bar{b})\vee(\bar{a}\wedge b)\vee(\bar{a}\wedge\bar{b})\vee(b\wedge\bar{b})$

Существует шесть приведенных форм, содержащих пять одночленов.

4. Имеется одна форма, содержащая шесть одночленов.

$(1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 3)$ $\vee (1 \wedge 4) \vee (2 \wedge 3)$ $\vee (2 \wedge 4) \vee (3 \wedge 4)$	$(a \wedge \overline{a}) \vee (a \wedge b) \vee$ $\vee (a \wedge \overline{b}) \vee (\overline{a} \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b}) \vee (b \wedge \overline{b})$

Всего имеется 166 приведенных форм.

2.6.3. Анализ, логическая структура и синтез характеристических функций характеристик нечеткого множества

Разобьем [0;1] на *m* попарно граничащих интервалов, замкнутых слева и открытых справа, кроме последнего:

$$[0;1] = [0;d_1) \bigcup [\alpha_1;\alpha_2) \bigcup \ldots \bigcup [\alpha_{m-1}\alpha_m = 1] \quad (6.67)$$

Найдем условия, при которых характеристическая функция от *n* характеристик

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n),\ a_i \in [0,1],\ i = 1,2,\ldots,n \quad (6.68)$$

будет принадлежать интервалу $[\alpha_{k-1}\alpha_k)(k = \overline{1,n})$.

Для достижения поставленной цели рассмотрим отдельные конкретные формы характеристической функции, зависящей от трех характеристик нечеткого множества (конкретнее, характеристик трех нечетких подмножеств универсального множества).

I. Пусть

$$\underset{\sim}{f}(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}) = (\overline{\tilde{a}} \wedge \overline{\tilde{b}}) \vee (\tilde{a} \wedge \tilde{b} \wedge \tilde{c}) \quad (6.69)$$

Найдем условия, при которых

$$\alpha_{k-1} \le \underset{\sim}{f}(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}) < a_k \quad (6.70)$$

Так как правая часть (6.74) состоит из двух элементов, то следует брать наибольший из них.

Гипотеза 1:

$$(\overline{a} \wedge \overline{\tilde{b}}) \ge \tilde{a} \wedge \tilde{b} \wedge \overline{\tilde{c}} \quad (6.71)$$

Из нее следует:

$$\alpha_{k-1} \le \overline{\tilde{a}} \wedge \overline{\tilde{b}} < \alpha_k \quad (6.72)$$

или же

$$\alpha_{k-1} \le \min(\overline{\widetilde{a}};\overline{\widetilde{b}}) < \alpha_k \qquad (6.73)$$

и

$$\alpha_{k-1} \le \min(1-\widetilde{a};1-\widetilde{b}) < \alpha_k \qquad (6.74)$$

Поскольку $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ нельзя располагать произвольно относительно друг друга, то необходимо, чтобы

$$1-\widetilde{a} \ge \alpha_{k-1} \text{ и } 1-b \ge \alpha_{k-1} \qquad (6.75)$$

и

$$1-\widetilde{a} < \alpha_k \text{ и } 1-b < \alpha_k \qquad (6.76)$$

Это можно переписать в виде:

$$\widetilde{a} \le 1-\alpha_{k-1} \text{ и } b \le 1-\alpha_{k-1} \qquad (6.77)$$

$$\widetilde{a} > 1-\alpha_k \text{ или/и } \widetilde{b} > 1-\alpha_k \qquad (6.78)$$

Гипотеза 2:

$$\overline{\widetilde{a}} \wedge \overline{\widetilde{b}} < \widetilde{a} \wedge \widetilde{b} \wedge \overline{\widetilde{c}} \qquad (6.79)$$

Отсюда следует:

$$\alpha_{k-1} \le \widetilde{a} \wedge \widetilde{b} \wedge \overline{\widetilde{c}} < \alpha_k$$

или же

$$\alpha_{k-1} \le \min(\widetilde{a},\widetilde{b},\overline{\widetilde{c}}) < \alpha_k \qquad (6.80)$$

или

$$\alpha_{k-1} \le \min(\widetilde{a},\widetilde{b},1)\overline{\widetilde{c}} < \alpha_k \qquad (6.81)$$

Поскольку $\widetilde{a},\widetilde{b}$ и $\widetilde{c}$ нельзя рассматривать произвольно относительно друг друга, то прежде всего необходимо, чтобы

$$\left.\begin{array}{l} \widetilde{a} \ge \alpha_{k-1} \text{ и } \widetilde{b} \ge \alpha_{k-1} \text{ и } 1\text{-}\widetilde{c} \ge \alpha_{k-1} \\ \widetilde{a} < \alpha_k; \text{ и } \widetilde{b} < \alpha_k \text{ и } 1\text{-}\widetilde{c} < \alpha_k \end{array}\right\} \qquad (6.82)$$

Это можно переписать в виде:

$$\left.\begin{array}{l} \widetilde{a} \ge \alpha_{k-1} \text{ и } \widetilde{b} \ge \alpha_{k-1} \text{ и } \widetilde{c} \le 1-\alpha_{k-1} \\ \widetilde{a} < \alpha_k; \text{ или/и } \widetilde{b} < \alpha_k \text{ или/и } \widetilde{c} > 1-\alpha_k \end{array}\right\} \qquad (6.83)$$

Наконец, эти результаты можно сгруппировать следующим образом:

Условие P_1:

$$\left[(\tilde{a} \le 1-\alpha_{k-1}) \text{ и } (\tilde{b} \le \alpha_{k-1})\right] \text{или/и}$$
$$\left[(\tilde{a} \ge \alpha_{k-1} \text{ и } (\tilde{b} \ge \alpha_{k-1}) \text{ и } (\tilde{c} \le 1-\alpha_{k-1})\right] \qquad (6.84)$$

Условие $P_{2:}$

$$\left[(\tilde{a} > 1-\alpha_k) \text{ или/и } (\tilde{b} > \alpha_k)\right] \text{и}$$
$$\left[(\tilde{a} < \alpha_k \text{ или/и } (\tilde{b} < \alpha_k) \text{ или/и } (\tilde{c} > 1-\alpha_k)\right] \qquad (6.85)$$

Таким образом, для выполнения (6.69) необходимо и достаточно выполнение условий P_1 и P_2.

Пример 6.4. Пусть: $\tilde{a}$ =0,55; $\tilde{b}$ =0,65; $\tilde{c}$ =0,83.

Тогда имеем:

$$\underset{\sim}{f}(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}) = f(0{,}56;0{,}65;0{,}83) = (\bar{\tilde{a}} \wedge \bar{\tilde{b}}) \vee (\tilde{a} \wedge \tilde{b} \wedge \bar{\tilde{c}}) =$$
$$= (0{,}44 \wedge 0{,}35) \vee (0{,}56 \wedge 0{,}65 \wedge 0{,}17) = 0{,}35 \vee 0{,}17 = 0{,}35$$

II. Пусть

$$\underset{\sim}{f}(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}) = (\tilde{a} \wedge \bar{\tilde{b}}) \vee (\bar{\tilde{a}} \wedge \tilde{c}) \wedge \tilde{c} \qquad (6.86)$$

Предположим, что интервал [0,1] разбит на три интервала [0;0,2), [0,2; 0,4); [0,4; 1].

Сначала рассмотрим [0;0,2).

Гипотеза 1.

$$\tilde{a} \wedge \tilde{b} > \bar{\tilde{a}} \wedge \tilde{c}; \tilde{a} \wedge \bar{\tilde{b}} > \bar{\tilde{c}}$$

Тогда

$$\left.\begin{array}{c} 0 \le \tilde{a} \wedge \bar{\tilde{b}} < 0{,}2, \qquad т.е. \\ 0 \le \tilde{a} \wedge 0 \le \min(\tilde{a}, 1-\tilde{b}) < 0{,}2 \\ \tilde{a} \ge 0 \text{ и } \tilde{b} > 0{,}8 \end{array}\right\}$$

и

$$\tilde{a} < 0{,}2 \text{ или } \tilde{b} > 0{,}8$$

Гипотеза 2.

$$\bar{\tilde{a}} \wedge \tilde{c} > \tilde{a} \wedge \tilde{b}; \bar{\tilde{a}} \wedge \tilde{c} > \bar{\tilde{c}}$$

Тогда имеем: $0 \le \bar{\tilde{a}} \wedge \tilde{c} < 0{,}2$

$$\left.\begin{array}{lr} & 0 \le \min\left(1-\tilde{a},\tilde{c}\right) < 0{,}2 \\ & \tilde{a} \le 1 \text{ и } \tilde{c} > 0 \\ \text{и} & \tilde{a} > 0{,}8 \text{ или/и } \tilde{c} < 0{,}2 \end{array}\right\}$$

Гипотеза 3.

$$\bar{\tilde{c}} > \tilde{a} \wedge \bar{\tilde{b}}, \bar{\tilde{c}} > \bar{\tilde{a}} \wedge \tilde{c}$$

Тогда имеем: $0 \le \bar{\tilde{c}} < 0{,}2$

Таким образом:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le 1-\tilde{c} < 0{,}2 \\ 0{,}8 < c \le 1 \end{array}\right\}$$

(Рассмотрим [0,2; 0,4)

Гипотеза 1.

$$\tilde{a} \wedge \tilde{b} > \bar{\tilde{a}} \wedge \tilde{c};\ \tilde{a} \wedge \bar{\tilde{b}} > \bar{\tilde{c}}$$

$$\left.\begin{array}{lr} & 0{,}2 \le \tilde{a} \wedge \bar{\tilde{b}} < 0{,}4 \\ & \tilde{a} \ge 0{,}2 \text{ и } \tilde{b} \le 0{,}8 \\ \text{и} & \tilde{a} < 0{,}4 \text{ или/и } \tilde{b} > 0{,}6 \end{array}\right\}$$

Гипотеза 2.

$$\bar{\tilde{a}} \wedge \tilde{c} > \tilde{a} \wedge \bar{\tilde{b}};\quad \bar{\tilde{a}} \wedge c > \bar{\tilde{c}}$$

$$\left.\begin{array}{lr} & 0{,}2 \le \bar{\tilde{a}} \wedge \tilde{c} < 0{,}3 \\ & \tilde{a} \le 0{,}8 \text{ и } \tilde{c} \ge 0{,}2 \\ \text{и} & \tilde{a} > 0{,}6 \text{ и } \tilde{c} < 0{,}4 \end{array}\right\}$$

Гипотеза 3.

$$\bar{\tilde{c}} \wedge \tilde{a} \wedge \bar{\tilde{b}};\quad \bar{\tilde{a}} > \bar{\tilde{a}} \wedge \tilde{c}$$

$$\left.\begin{array}{lr} & 0{,}2 \le \bar{\tilde{c}} < 0{,}4 \\ \text{и} & \tilde{c} \le 0{,}8;\ \text{ и } c \ge 0{,}6 \end{array}\right\}$$

Наконец, рассмотрим интервал [0,4; 1].

Гипотеза 1.

$$\begin{gathered}\tilde{a}\wedge\bar{\bar{\tilde{b}}}>\bar{\bar{\tilde{a}}}\wedge c;\ \tilde{a}\wedge\bar{\bar{\tilde{b}}}>\bar{\bar{\tilde{c}}}\\ \left.\begin{array}{ll} & 0,4\le\tilde{a}\wedge\bar{\bar{\tilde{b}}}\le 1\\ & \tilde{a}\ge 0,4 \quad\text{и}\quad \tilde{b}\le 0,6\\ \text{и} & a\le 1 \ \text{или/и}\ \ b\ge 0\end{array}\right\}\end{gathered}$$

Гипотеза 2.

$$\begin{gathered}\bar{\bar{\tilde{a}}}\wedge\tilde{c}>\tilde{a}\wedge\bar{\bar{\tilde{b}}},\ \bar{\bar{\tilde{a}}}\wedge\tilde{c}>\bar{\bar{\tilde{c}}}\\ \left.\begin{array}{ll} & 0,4\le\bar{\bar{\tilde{a}}}\wedge\tilde{c}<1\\ & \tilde{a}\le 0,6;\ \tilde{c}\ge 0,4\\ \text{и} & \tilde{a}\ge 0\ \text{или/и}\quad \tilde{c}\le 1\end{array}\right\}\end{gathered}$$

Гипотеза 3.

$$\begin{gathered}\bar{\bar{\tilde{c}}}>\tilde{a}\wedge\bar{\bar{\tilde{b}}};\ c>\bar{\bar{\tilde{a}}}\wedge c\\ \left.\begin{array}{l}0,4\le\bar{\bar{\tilde{c}}}\le 1\\ \tilde{c}\le 0,6\ \text{ и }\ \tilde{c}\ge 0\end{array}\right\}\end{gathered}$$

Результаты этого примера можно перегруппировать следующим образом:

а) $0\le f(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c})<0,2$ выполняется, если

Условие $P_1(a)$

$$\left[(\tilde{a}\ge 0)\ \text{и}\ \ \tilde{b}\le 1\right]\quad\text{или/и}\ \left[(\tilde{a}\le 1)\ \text{и}\ (c\ge 0)\right]\text{или/и}(c\le 1) \tag{6.87}$$

Условие $P_2(a)$

$$\left.\begin{array}{l}\left[(\tilde{a}<0,2)\ \text{или/и}\ \left(\tilde{b}>0,8\right)\right]\ \text{и}\\ \left[(\tilde{a}>0,8)\ \text{или/и}\ (\tilde{c}<0,2)\ \text{и}\ (\tilde{c}>0,8)\right]\end{array}\right\} \tag{6.88}$$

б)$0,2\le f(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c})<0,4$ выполняется, если

Условие

$$\left.\begin{array}{l}P_1(\delta)\left[(\tilde{a}\ge 0,2)\ \text{и}\left(\tilde{\text{b}}\le 0,8\right)\right]\ \text{или/и}\\ \left[(\tilde{a}\le 0,8)\ \text{ и }\ (\tilde{\text{c}}\ge 2)\right]\ \text{или/и}\ \ (\tilde{\text{c}}\le 0,8)\end{array}\right\} \tag{6.89}$$

Условие

$$\left.\begin{array}{l} P_2(\delta)\left[(\tilde{a}<0{,}4)\text{или/и}\,(b>0{,}6)\right]\ \text{и} \\ \left[(\tilde{a}>0{,}6)\ \text{или/и}\ (\tilde{\mathrm{c}}<0{,}4)\right]\text{и}\,(\mathrm{c}>0{,}6) \end{array}\right\} \qquad (6.90)$$

выполнены

в) $0{,}4 \le f(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}) \le 1$ выполняется, если

Условие $P_1(в)$

$$\left.\begin{array}{l} \left[(\tilde{a}\ge 0{,}4)\ \text{и}\ \left(\tilde{b}\le 0{,}6\right)\right]\ \text{или/и} \\ \left[(\tilde{a}\le 0{,}6)\ \text{и}\ (\tilde{c}\le 0{,}4)\right]\text{или/и}\left(\tilde{c}\le 0{,}6\right) \end{array}\right\} \qquad (6.91)$$

Условие $P_2(в)$

$$\left.\begin{array}{l} \left[(\tilde{a}\le 1)\ \ \text{или/и}\ \left(\tilde{b}\ge 0\right)\right]\ \ \text{и} \\ \left[(\tilde{a}\ge 0)\ \ \text{или/и}\ \ (\tilde{c}\le 1)\right]\text{и}\left(\tilde{c}\ge 0\right) \end{array}\right\} \qquad (6.92)$$

выполнены.

Замечание 6.4. Можно заметить, что условия P_1 (6.84) и P_2 (6.89) двойственны по отношению друг другу, т.е. одно из них можно получить из другого заменой символов:

(<) на (≥); (≤) на (>); (>) на (≤); (≥) на (<),(и) на (или/и), (или/и) на (и).

Это свойство отнюдь не случайно: это общее свойство для всех приведенных полиномиальных формул относительно $\vee$ или $\wedge$.

III. Пусть $f(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}) = (\tilde{a}\vee\tilde{b})\wedge(\bar{\tilde{b}}\vee\tilde{c})$

Гипотеза $\tilde{1}\tilde{a}\vee\tilde{b} < \bar{\tilde{b}}\vee\tilde{c}$,отсюда

$$\left.\begin{array}{ll} & \alpha_{k-1}\le\tilde{a}\vee\tilde{b}<\alpha_k \\ \text{или} & \\ & \alpha_{k-1}\le\max(\tilde{a},\tilde{b})<\alpha_k \end{array}\right\} \qquad (6.93)$$

Поскольку $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ нельзя располагать произвольно относительно друг друга, то необходимо, чтобы

$$\left.\begin{array}{ll} & \tilde{a}\ge\alpha_{k-1}\quad\text{или/и}\quad\tilde{b}\ge\alpha_{k-1} \\ \text{и} & \\ & \tilde{a}<\alpha_k\quad\text{и}\quad\tilde{b}<\alpha_k \end{array}\right\} \qquad (6.94)$$

Гипотеза 2

$$\bar{\tilde{b}}\vee\tilde{c}>\tilde{a}\vee\tilde{b} \qquad (6.95)$$

Отсюда $\alpha_{k-1} \le \overline{\overline{\widetilde{b}}} \vee \widetilde{c} < \alpha_k$ или

$$\alpha_{k-1} \le \max(1-\widetilde{b}, \widetilde{c}) < \alpha_k$$

Таким образом

$$\text{и} \quad \begin{matrix} \widetilde{b} \le 1-\alpha_{k-1} \ \text{или/и} \quad \widetilde{c} \ge \alpha_{k-1} \\ \widetilde{b} > 1-\alpha_k \ \text{и} \quad \widetilde{c} < \alpha_k \end{matrix} \qquad (6.96)$$

Перегруппировав полученные рез ультаты, имеем

Условие $P_1(в)$

$$\left.\begin{matrix} \left[(\widetilde{a} \ge \alpha_{k-1}) \ \text{ или/и } \left(\widetilde{b} \ge \alpha_{k-1}\right)\right] \ \text{ и} \\ \left[(b \le 1-\alpha_{k-1}) \ \text{ или/и } \ (c \ge \alpha_{k-1})\right] \end{matrix}\right\} \qquad (6.97)$$

Условие $P_2(в)$

$$\left.\begin{matrix} \left[(\widetilde{a} < \alpha_k) \ \text{ и } \left(\widetilde{b} < \alpha_k\right)\right] \ \text{ или/и} \\ \left[\left(\widetilde{b} > 1-\alpha_k\right) \ \text{ и } (\widetilde{c} < \alpha_k)\right] \end{matrix}\right\} \qquad (6.98)$$

Чтобы выполнялось (6.75), необходимо и достаточно выполнение (6.119) и (6.120).

Отметим, что здесь опять проявляется свойство двойственности (или/и).

В заключение отметим, что если x-элемент универсального множества E и A_α, B_α, ... - нечеткие подмножества α-уровня, то величины $\widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c}, ...$ способны принимать одно из двух значений {0;1}. В этом случае характеристики нечеткого множества α-уровня можно рассматривать как высказывания в четкой математической логике. При этом анализ характеристических функций характеристик нечеткого множества следует проводить по законам математической логики, где

$$\widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c}, ... = \begin{cases} 1, \ \textit{если} \ \widetilde{a} \ge \alpha; \ \ \widetilde{b} \ge \alpha; \widetilde{c} \ge \alpha, ... \\ 0, \ \textit{если} \ \ \widetilde{a} < \alpha; \ \widetilde{b} < \alpha; \widetilde{c} < \alpha, ... \end{cases} \qquad (6.99)$$

Напомним, что в пропозиционной алгеб репропозиционные связки

«И» об оз нач ается ч ерез $\triangle$
«ИЛИ/И» об оз нач ается ч ерез ∇
«дополнение» об оз нач ается ч ерез – (6.100)

и утверждения с этими связками строятся в точности по тем же правилам, что и соответствующие им в булевой алгебре. Причем Δ соответствует $\cap$, ∇ соответствует $\cup$, ~ соответствует $\bar{}$. Для представления логической структуры отношений (строгих или нестрогих неравенств), которая появляется у функций нечеткой логики, рассматриваемой на интервале $[\alpha_{к-1}$, $[\alpha_к]$, будем использовать следующие символы.

Пусть $f(\widetilde{a},\widetilde{b},...)$ - характеристическая функция характеристик $(\widetilde{a},\widetilde{b},...)$. Будем использовать следующие символы:

$$\left.\begin{aligned} Q_a &= \left(\widetilde{a}\middle|\widetilde{a} \geq \alpha_{k-1}\right) \\ Q_{\bar{a}} &= \left(\widetilde{a}\middle|\widetilde{a} \leq 1-\alpha_{k-1}\right) \\ \overline{Q}_a &= \left(\widetilde{a}\middle|\widetilde{a} < \alpha_k\right) \\ \overline{Q}_{\bar{a}} &= \left(\widetilde{a}\middle|\widetilde{a} > 1-\alpha_k\right) \end{aligned}\right\} \tag{6.101}$$

Пусть $\underset{\sim}{f}(\widetilde{a},\widetilde{b},...)$ можно представить в приведенной полиномиальной форме относительно $\vee$. Для получения логической структуры в интервале $[\alpha_{k-1},\alpha_k]$ поступим следующим образом:

1) Выражение вида: $\widetilde{a} \wedge \widetilde{b}$ заменим выражением $Q_a \Delta Q_b$. Например: $\widetilde{a} \wedge \widetilde{b} \wedge \widetilde{\bar{c}}$ заменяется на $Q_{\bar{a}} \Delta Q_b \Delta Q_{\bar{c}}$.

2) Одночлены $\underset{\sim}{f}$ функции, объединенные символом $\vee$, заменяются одночленами Q и объединяются символом ∇. Например: $\left(\widetilde{\bar{a}} \wedge \widetilde{b} \wedge \widetilde{\bar{c}}\right) \vee \left(\widetilde{\bar{b}} \wedge \widetilde{c}\right)$ заменяют $(Q_{\bar{a}} \Delta Q_b \Delta Q_{\bar{c}}) \nabla (Q_{\bar{b}} \Delta Q_c)$;

3) Составляем логические выражения, двойственные полученным в 2), заменяя Q_a на $Q_{\overline{a}}$, $Q_{\overline{a}}$ - на $\overline{Q}_{\overline{a}}$, Δ- на ∇, ∇ на Δ. Например,

$$(Q_{\bar{a}} \Delta Q_b \Delta Q_{\bar{c}}) \nabla (Q_{\bar{b}} \Delta Q_c) \text{ принимает вид}$$
$$(\overline{Q}_{\bar{a}} \nabla \overline{Q}_b \nabla \overline{Q}_{\bar{c}}) \Delta (\overline{Q}_{\bar{b}} \Delta \overline{Q}_c);$$

4) рез ультаты, полученные в 2) и 3), об ъединяют символом Δ.

Это дает логическое выражение $\underset{\sim}{f}$ на интервале $[\alpha_{k-1},\alpha_k]$.

Так для

$$\underset{\sim}{f}(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c})=\left(\bar{\tilde{a}}\wedge\tilde{b}\wedge\bar{\tilde{c}}\right)\vee\left(\bar{\tilde{b}}\wedge\tilde{c}\right)$$

логическое выражение имеет вид

$$Q=\left[\left(Q_{\bar{a}}\Delta Q_{b}\Delta Q_{\bar{c}}\right)\nabla\left(Q_{\bar{b}}\Delta Q_{c}\right)\right]\Delta\left[\left(\bar{Q}_{\bar{a}}\nabla\bar{Q}_{b}\nabla\bar{Q}_{\bar{c}}\right)\Delta\left(\bar{Q}_{\bar{b}}\nabla\bar{Q}_{c}\right)\right] \quad (6.102)$$

Если функция $\underset{\sim}{f}(\tilde{a},\tilde{b},...)$ представлена в полиномиальной форме относительно $\wedge$, то правила 1)-4) модифицируются следующим образом:

1) каждое выражение вида $\tilde{a}\vee\tilde{b}$ заменяется выражением $Q_a\nabla Q_b$;

2) Одночлены функции $\underset{\sim}{f}$, объединенные символом $\wedge$, заменяется соответственно одночленом в *Q*, объединенными символом Δ;

3) Составляются выражения, двойственные тем, которые были получены в 2);

4) Объединяются результаты шагов 2) и 3) символом Δ.

Пример 6.5. Пусть

$$\underset{\sim}{f}(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c},\tilde{d})=\left(\tilde{a}\vee\vec{\bar{\tilde{b}}}\right)\wedge\left(\tilde{b}\wedge\bar{\bar{\tilde{d}}}\right)\wedge\left(\bar{\tilde{c}}\vee\tilde{d}\right) \quad (6.103)$$

Имеем:

$$Q=\left[\left(Q_a\nabla Q_b\right)\Delta\left(Q_b\nabla Q_d\right)\right]\Delta\left[\left(Q_c\nabla Q_d\right)\right]\Delta\left[\left(\bar{Q}_a\Delta\bar{Q}_b\right)\nabla\left(\bar{Q}_b\Delta\bar{Q}_d\right)\nabla\left(\bar{Q}_c\Delta\bar{Q}_d\right)\right] \quad (6.104)$$

Проиллюстрируем это на числах. Пусть

$$\left[\alpha_{k-1},\alpha_k\right]=[0,4;0,7) \quad (6.105)$$

Тогда (6.105) можно записать так:

$$\left[\left(\text{или/и}\frac{\tilde{a}\geq 0,4}{\tilde{b}\leq 0,6}\right)\text{ и }\left(\text{или/и}\frac{\tilde{b}\geq 0,4}{\tilde{d}\leq 0,6}\right)\text{ и }\left(\text{или/и}\frac{\tilde{c}\leq 0,6}{\tilde{d}\geq 0,4}\right)\right]$$
$$\text{и}\left[\begin{pmatrix}\tilde{a}<0m7\\ \text{и }\tilde{b}>0,3\end{pmatrix}\text{или/и}\begin{pmatrix}\mathrm{b}<0,7\\ \text{и }\tilde{d}>0,3\end{pmatrix}\text{или/и}\begin{pmatrix}\tilde{c}>0,3\\ \text{и}\,\tilde{d}<0,7\end{pmatrix}\right] \quad (6.106)$$

Интересно рассмотреть логические высказывания, по $Q_a,Q_{\bar{a}},\bar{Q}_a$ и $\bar{Q}_{\bar{a}}$, которые дают достаточные условия для каждого

одночлена в разложении относительно ∇. Покажем это на примере.
Пример 6.6. Рассмотрим (6.102). Предположим, что

$$\left[\alpha_{k-1};\alpha_k\right]=\left[0{,}4;0{,}9\right] \tag{6.107}$$

Уже установлено выражение *Q* в (6.125)
Продолжим разложение (6. 102), чтобы преобразовывать это выражение в полином относительно ∇. Для сокращения примем $Q_a \Delta Q_b = Q_a\, Q_b$ Имеем:

$$\begin{aligned}
&Q=\left(Q_{\bar a}\, Q_b Q_{\bar c} \nabla Q_{\bar b} Q_c\right)\left(\bar Q_{\bar a}\, \nabla \bar Q_b \nabla \bar Q_{\bar c}\right)\left(\bar Q_{\bar b} \nabla Q_c\right)=\\
&\left(Q_{\bar a}\, Q_b Q_{\bar c} \nabla Q_{\bar b} Q_c\right)\left(\bar Q_{\bar a}\, \bar Q_b \nabla \bar Q_{\bar a} \bar Q_c \nabla \bar Q_b \bar Q_{\bar b} \nabla \bar Q_b \bar Q_c \nabla \bar Q_{\bar b} \bar Q_{\bar c} \nabla \bar Q_c \bar Q_{\bar c}\right)=\\
&=Q_{\bar a}\bar Q_{\bar a} Q_b \bar Q_{\bar b} Q_{\bar c} \nabla Q_{\bar a}\bar Q_{\bar a} Q_b Q_{\bar c} \nabla Q_{\bar a}\bar Q_b \bar Q_{\bar b} Q_{\bar c} \nabla Q_{\bar a} Q_b \bar Q_b Q_{\bar c} Q_c \nabla\\
&\nabla Q_{\bar a} Q_b \bar Q_{\bar b} Q_{\bar c} \bar Q_{\bar c} \nabla Q_{\bar a} Q_b Q_{\bar c} \bar Q_c \bar Q_{\bar c} \nabla \bar Q_{\bar a} Q_{\bar b} \bar Q_{\bar b} Q_c \nabla \bar Q_{\bar a} Q_b Q_c \bar Q_{\bar c} \nabla\\
&\nabla Q_{\bar b} \bar Q_b Q_b Q_c \nabla Q_{\bar b} \bar Q_b Q_c \bar Q_c \nabla Q_{\bar b} \bar Q_{\bar b} Q_c \bar Q_{\bar c} \nabla Q_{\bar b} Q_c \bar Q_c \bar Q_{\bar c}
\end{aligned} \tag{6.108}$$

Каждый из этих членов достаточен. Поэтому имеем:

$$0{,}4 \le \left(\bar{\tilde a} \wedge \tilde b \wedge \bar{\tilde c}\right) \vee \left(\bar{\tilde b} \wedge \tilde c\right) < 0{,}9 \tag{6.109}$$

Проверим это на примере для
1) $Q_{\bar a}\bar Q_{\bar a} Q_b Q_{\bar c} \bar Q_c$ (второй одночлен)
Применяя определение (6.123), получим:
$Q_{\bar a} : a \le (1-0{,}4)$, следовательно, $a \le 0{,}6$
$\bar Q_{\bar a} : a > 0{,}1$
$Q_b : b \ge 0{,}4$
$\bar Q_{\bar c} : c \le 0{,}6$
$\bar Q_c : c < 0{,}9$
Таким образом $0{,}1 < a \le 0{,}6; b \ge 0{,}4; c \le 0{,}6$.
2) $Q_{\bar a} Q_b \bar Q_{\bar c} \bar Q_c \bar Q_{\bar c}$ (шестой одночлен):

$Q_{\bar a} : a \le 0{,}6$	$Q_{\bar c} : c \le 0{,}6$	$\bar Q_{\bar c} : c < 0{,}1$
$Q_b : b \ge 0{,}4$	$\bar Q_c : c < 0{,}9$	

Таким образом $0{,}1 < a \le 0{,}6$; $b \ge 0{,}4$; $c \le 0{,}6$;
Проверяя все одночлены (а число их равно 12), получим достаточные условия для выполнения (6.109).

Так же представляет интерес провести двойственное разложение относительно Δ.

Обратимся к (6.102) и разложим полином относительно $\wedge$. Имеем:

$$f(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c})=\left(\overline{\tilde{a}}\vee\overline{\tilde{b}}\right)\wedge\left(\overline{\tilde{a}}\vee\tilde{c}\right)\wedge\left(\tilde{b}\vee\overline{\tilde{b}}\right)\wedge\left(\tilde{b}\vee\tilde{c}\right)\wedge\left(\tilde{c}\vee\overline{\tilde{c}}\right)\wedge\left(\overline{\tilde{b}}\vee\overline{\tilde{c}}\right) \qquad (6.110)$$

Опуская значок Δ, получим:

$$\begin{aligned}Q=&\left(Q_{\bar a}\nabla Q_{\bar b}\right)\left(Q_{\bar a}\nabla Q_c\right)\left(Q_b\nabla Q_{\bar b}\right)\left(Q_b\nabla Q_c\right)\left(Q_c\nabla Q_{\bar c}\right)\times\\ &\times\left(Q_{\bar b}\nabla Q_{\bar c}\right)\left(\overline{Q}_{\bar a}\overline{Q}_{\bar b}\nabla\overline{Q}_{\bar a}\overline{Q}_c\nabla\overline{Q}_b\overline{Q}_{\bar b}\nabla\overline{Q}_b\overline{Q}_c\nabla\overline{Q}_c\overline{Q}_{\bar c}\nabla\overline{Q}_{\bar b}\overline{Q}_{\bar c}\right)\end{aligned} \qquad (6.111)$$

Если теперь произвести разложение ∇, то снова придем к соотношению (6.108).

Замечание 6.3. Если характеристика нечеткого множества $\tilde{a}$ принимает свое значение из интервала

$D_{\tilde{a}}=[\alpha_1;\alpha_2)\subset[0;1]$,

то $\overline{\tilde{a}}=1-\tilde{a}$ принимает значение на интервале

$D_{\overline{\tilde{a}}}=[1-\alpha_2;1-\alpha_1)\subset[0;1)$

Если $\tilde{a}$ принимает значение из $D_{\tilde{a}}=[0;\alpha_1)\bigcup[\alpha_2;1\ .\ ]$ Теперь попытаемся ответить на вопрос, как для заданных характеристик нечеткого множества построить характеристическую функцию, принимающую значения из $[\alpha_{k-1};\alpha_k)$?

Рассмотрим случай двух характеристик нечеткого множества. Как видно из таблицы 6.3, ответ на поставленный вопрос не единственный. Для представления $\underset{\sim}{f}(\tilde{a},\tilde{b})$, принимающей значения на интервал $[\alpha_{k-1};\alpha_k)$ можно, например, взять функцию вида $\tilde{a}\wedge\tilde{b}$.

Следует отметить, что какое бы представление мы не выбрали, должна удовлетворяться соответствующая выбранному представлению полиномиальная форма относительно Δ или ∇ и выполняться соответствующее условие типа Q.

Рассмотрим представление характеристической функции относительно Δ (хотя можно рассмотреть и другие).

$$(Q_a)\Delta(Q_b)\Delta\left(\overline{Q}_a\nabla\overline{Q}_b\right) \qquad (6.112)$$

т.е. с учетом обозначений (6.101)

$$\left\{\begin{matrix} & \tilde{a} \geq \alpha_{k-1} \\ \text{и} & \\ & \tilde{b} \geq \alpha_{k-1} \end{matrix}\right\} \text{ и } \left\{\begin{matrix} & \tilde{a} < \alpha_{k-1} \\ \text{или/и} & \\ & \tilde{b} < \alpha_{k} \end{matrix}\right\} \qquad (6.113)$$

Решение можно представить с помощью любой другой функции, например, $\overline{\tilde{a}} \wedge \overline{\tilde{b}}$

$$(Q_{\bar{a}})\Delta(Q_{\bar{b}})\Delta(\overline{Q}_{\bar{a}}\nabla\overline{Q}_{\bar{b}})$$

Таблица 6.2

Логическая структура основных характеристических функций двух характеристик нечеткого множества для интервала $[\alpha_{k-1};\alpha_k)$

$f(\tilde{a},\tilde{b})$	Полиномиальная форма	
	Относительно ∇	Относительно Δ
$\tilde{a} \wedge \tilde{b}$	$(Q_a\Delta\overline{Q}_{\bar{a}}\Delta Q_b)\nabla(Q_a\Delta Q_b\Delta\overline{Q}_b)$	$(Q_a)\Delta(Q_b)\Delta(\overline{Q}_a\nabla\overline{Q}_b)$ (6.135)
$\overline{\tilde{a}} \wedge \tilde{b}$	$(Q_{\bar{a}}\Delta\overline{Q}_{\bar{a}}\Delta Q_b)\nabla(Q_{\bar{a}}\Delta Q_b\Delta\overline{Q}_b)$	$(Q_{\bar{a}})\Delta(Q_b)\Delta(\overline{Q}_{\bar{a}}\nabla\overline{Q}_b)$ (6.136)
$\overline{\tilde{a}} \wedge \overline{\tilde{b}}$	$(Q_{\bar{a}}\Delta\overline{Q}_{\bar{a}}\Delta Q_b)\nabla(Q_{\bar{a}}\Delta Q_{\bar{b}}\Delta\overline{Q}_b)$	$(Q_{\bar{a}})\Delta(Q_{\bar{b}})\Delta(\overline{Q}_{\bar{a}}\nabla\overline{Q}_{\bar{b}})$ (6.137)
$\tilde{a} \vee \tilde{b}$	$(Q_a\Delta\overline{Q}_{\bar{a}}\Delta\overline{Q}_b)\nabla(\overline{Q}_a\Delta Q_b\Delta\overline{Q}_b)$	$(\overline{Q}_a)\Delta(Q_b)\Delta(Q_a\nabla Q_b)$ (6.138)
$\overline{\tilde{a}} \vee \tilde{b}$	$(Q_{\bar{a}}\Delta\overline{Q}_{\bar{a}}\Delta\overline{Q}_b)\nabla(Q_{\bar{a}}\Delta Q_b\Delta\overline{Q}_b)$	$(\overline{Q}_{\bar{a}})\Delta(\overline{Q}_b)\Delta(Q_{\bar{a}}\nabla Q_b)$ (6.139)
$\overline{\tilde{a}} \vee \overline{\tilde{b}}$	$(Q_{\bar{a}}\Delta\overline{Q}_{\bar{a}}\Delta\overline{Q}_{\bar{b}})\nabla(Q_{\bar{a}}\Delta Q_{\bar{b}}\Delta\overline{Q}_{\bar{b}})$	$(\overline{Q}_{\bar{a}})\Delta(\overline{Q}_{\bar{b}})\Delta(Q_{\bar{a}}\nabla Q_{\bar{b}})$ (6.140)
$(\tilde{a} \wedge \overline{\tilde{b}}) \vee (\overline{\tilde{a}} \wedge \tilde{b})$	$(\overline{Q}_{\bar{a}}\Delta\overline{Q}_a\Delta\overline{Q}_{\bar{a}}\Delta Q_{\bar{b}})\nabla(Q_a\Delta\overline{Q}_a\Delta\overline{Q}_b\Delta Q_{\bar{b}})$ $\nabla(Q_a\Delta\overline{Q}_{\bar{a}}\Delta Q_{\bar{b}}\Delta\overline{Q}_{\bar{b}})\nabla(Q_a\Delta\overline{Q}_b\Delta Q_{\bar{b}}\Delta\overline{Q}_{\bar{b}})$ $\nabla(\overline{Q}_a\Delta Q_{\bar{a}}\Delta\overline{Q}_{\bar{a}}\Delta Q_b)\nabla(Q_a\Delta Q_{\bar{a}}\Delta Q_b\Delta\overline{Q}_b)$ $(Q_{\bar{a}}\Delta\overline{Q}_{\bar{a}}\Delta Q_b\Delta\overline{Q}_{\bar{b}})\nabla(Q_{\bar{a}}\Delta Q_b\Delta\overline{Q}_b\Delta\overline{Q}_{\bar{b}})$	$(Q_a\nabla Q_{\bar{a}})\Delta(Q_a\nabla Q_b)\Delta$ $\Delta(Q_{\bar{a}}\nabla Q_{\bar{b}})\Delta(Q_b\nabla Q_{\bar{b}})\Delta$ (6.141) $\Delta(\overline{Q}_a\nabla\overline{Q}_{\bar{b}})\Delta(\overline{Q}_{\bar{a}}\nabla\overline{Q}_b)$
$(\tilde{a} \vee \overline{\tilde{b}}) \wedge (\overline{\tilde{a}} \vee \tilde{b})$	$(Q_a\Delta\overline{Q}_a\Delta Q_b\Delta\overline{Q}_{\bar{b}})\nabla(Q_a\Delta\overline{Q}_{\bar{a}}\Delta Q_b\Delta\overline{Q}_{\bar{b}})$ $\nabla(Q_a\Delta Q_{\bar{a}}\Delta\overline{Q}_a\Delta\overline{Q}_b)\nabla(Q_a\Delta Q_{\bar{a}}\Delta\overline{Q}_{\bar{a}}\Delta\overline{Q}_b)$ $\nabla(\overline{Q}_a\Delta Q_b\Delta Q_b\Delta\overline{Q}_{\bar{b}})\nabla(\overline{Q}_{\bar{a}}\Delta Q_b\Delta Q_{\bar{b}}\Delta\overline{Q}_b)\nabla$ $\nabla(Q_{\bar{a}}\Delta\overline{Q}_a\Delta Q_{\bar{b}}\Delta\overline{Q}_{\bar{b}})\nabla(Q_{\bar{a}}\Delta\overline{Q}_{\bar{a}}\Delta Q_{\bar{b}}\Delta\overline{Q}_b)$	$(Q_a\nabla Q_{\bar{b}})\Delta(Q_b\nabla Q_{\bar{a}})\Delta$ $\Delta(\overline{Q}_a\nabla\overline{Q}_b)\Delta(\overline{Q}_a\nabla\overline{Q}_{\bar{a}})\Delta$ (6.142) $\Delta(\overline{Q}_b\nabla\overline{Q}_{\bar{b}})\Delta(\overline{Q}_{\bar{a}}$

и таким об разом

$$\left\{\begin{matrix} & \widetilde{a} \le 1-\alpha_{k-1} \\ \text{и} & \\ & \widetilde{b} \le 1-\alpha_{k-1} \end{matrix}\right\} \text{ и } \left\{\begin{matrix} & \widetilde{a} > 1-\alpha_{k} \\ \text{или/и} & \\ & \widetilde{b} > 1-\alpha_{k} \end{matrix}\right\}$$

Вернемся к (6.102). Пусть заданы верхние и нижние пределы для $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$.

$$\left\{\begin{matrix} & \widetilde{a} \ge \beta_1 \\ \text{и} & \\ & \widetilde{b} \ge \beta_2 \end{matrix}\right\} \text{ и } \left\{\begin{matrix} & \widetilde{a} < \beta_3 \\ \text{или/и} & \\ & \widetilde{b} < \beta_4 \end{matrix}\right\} \qquad (6.114)$$

Введем коэффициенты согласования λ_{ij}

$$\lambda_{11}\beta_1 = \alpha_{k-1};\ \lambda_{12}\beta_2 = \alpha_{k-1};\ \lambda_{21}\beta_3 = \alpha_k;\lambda_{22}\beta_4 = \alpha_k; \qquad (6.115)$$

Чтобы технически реализовать функцию $f(\widetilde{a},\widetilde{b})$, которая принимает значения из интервала $[\alpha_{k-1};\alpha_k)$, когда $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ изменяются соответственно в интервалах $[\beta_1;\beta_3)$ и $[\beta_2;\beta_4)$, можно построить схему, аналогичную изображенной на рис.6.1.

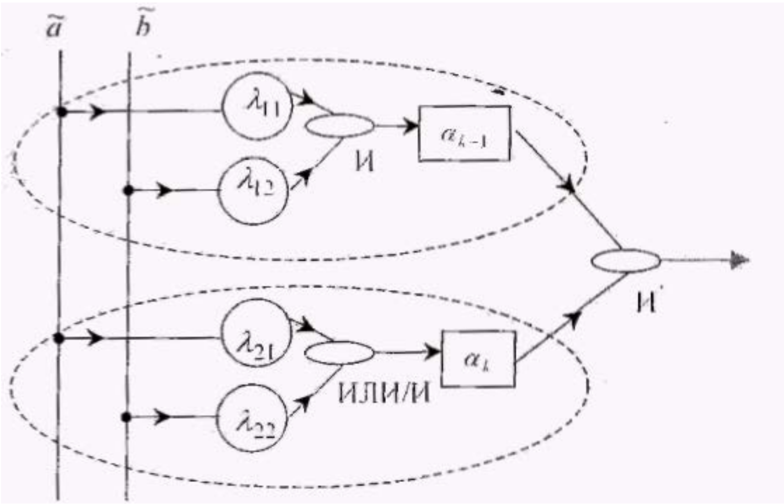


Рис. 6.1.

Для элементов этого типа будем использовать следующие символы:
λ_{ij} -устройство параметрического согласования для восстановления α_{k-1} и α_k;
И - логический элемент реализации *и*;
ИЛИ/И - логический элемент, реализующий *или/и*;
НЕ - логический элемент, реализующий отрицание;
α_{k-1} - устройство, задающее нижний предел;

α_k - устройство, задающее верхний предел.

α_k Блок сравнения $\alpha_{k-1} \le f(\tilde{a},\tilde{b})$

Блок сравнения $f(\tilde{a},\tilde{b}) < \alpha_k$

Пример 6.7. Осуществим синтез схемы при условии

$$\alpha_{k-1} \le f(\tilde{a},\tilde{b}) < \alpha_k \qquad (6.116)$$

используя для этого представление функции

$$f(\tilde{a},\tilde{b}) = \left(\tilde{a} \wedge \overline{\overline{\tilde{b}}}\right) \vee \left(\overline{\overline{\tilde{a}}} \wedge \tilde{b}\right) \qquad (6.117)$$

$$Q = \left[\left(Q_a \Delta Q_{\overline{b}}\right) \nabla \left(Q_{\overline{a}} \Delta Q_b\right)\right] \Delta \left[\left(\overline{Q}_a \nabla \overline{Q}_{\overline{b}}\right) \Delta \left(\overline{Q}_{\overline{a}} \nabla \overline{Q}_{\overline{b}}\right)\right] \qquad (6.118)$$

Это можно представить в виде:

$$\begin{pmatrix} & \tilde{a} \ge \alpha_{k-1} \\ \text{и} & \tilde{b} \le 1-\alpha_{k-1} \end{pmatrix} \text{или/и} \begin{pmatrix} & \tilde{a} \le 1-\alpha_{k-1} \\ \text{и} & \tilde{b} \ge \alpha_{k-1} \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} & \tilde{a} < \alpha_{k} \\ \text{или/и} & \tilde{b} > 1-\alpha_{k} \end{pmatrix} \text{и} \begin{pmatrix} & \tilde{a} > 1-\alpha_{k} \\ \text{или/и} & \tilde{b} < \alpha_{k} \end{pmatrix}$$

Если пределы таковы, что

$$\begin{pmatrix} & \tilde{a} \ge \beta_1 \\ \text{и} & \tilde{b} \le \beta_2 \end{pmatrix} \text{или/и} \begin{pmatrix} & \tilde{a} \le \beta_3 \\ \text{и} & \tilde{b} \ge \beta_4 \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} & \tilde{a} < \beta_5 \\ \text{или} & \tilde{b} > \beta_6 \end{pmatrix} \text{и} \begin{pmatrix} & \tilde{a} > \beta_7 \\ \text{или/и} & \tilde{b} < \beta_8 \end{pmatrix},$$

то можно видеть, что

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_{11}=\dfrac{\alpha_{k-1}}{\beta_1};\quad \lambda_{12}=\dfrac{1-\alpha_{k-1}}{\beta_2};\ \lambda_{13}=\dfrac{1-\alpha_{k-1}}{\beta_3};\ \lambda_{14}=\dfrac{\alpha_{k-1}}{\beta_4};\\ \lambda_{31}=\dfrac{\alpha_k}{\beta_5};\quad \lambda_{22}=\dfrac{1-\alpha_k}{\beta_6};\quad \lambda_{23}=\dfrac{1-\alpha_k}{\beta_7};\ \lambda_{24}=\dfrac{\alpha_k}{\beta_8};\end{array}\right\}\quad(6.119)$$

Следовательно, получим схему на рис. 6.2.

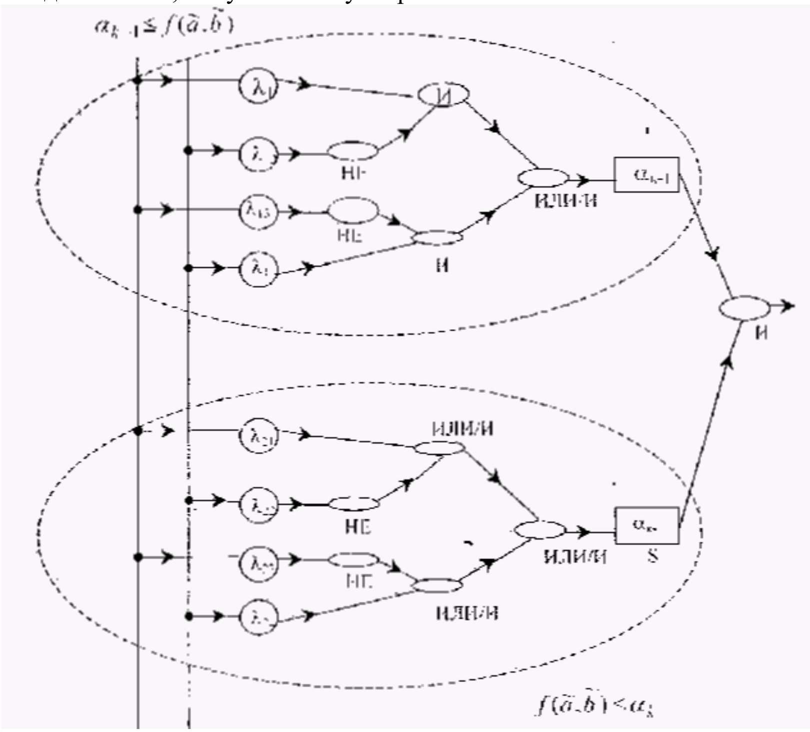


Рис. 6.2.

Аналогичным способом можно осуществить синтез схемы при выполнении условия (6.116) для характеристической функции, зависящей от трех и более (конечного) числа характеристик нечеткого множества.

Замечание 6.4. Если любую функцию $f(\widetilde{a},\widetilde{b},...)$ можно взять за основу разложения Q в полиномиальную форму относительно ∇, в которой каждый одночлен содержит только элементы Q_x *или/и* $Q_{\bar{x}}$, *или/и* $\overline{Q}_x$ *или/и* $\overline{Q}_{\bar{x}}$, связанные Δ, то реализацию функции можно обеспечить технологической схемой, которая содержит только *И* и *НЕ*. Но по теореме де Моргана можно написать:

$$\overline{Q\Delta\overline{\overline{Q}}} = Q\nabla\overline{\overline{Q}} \tag{6.120}$$

$$\overline{Q\nabla\overline{\overline{Q}}} = \overline{Q}\nabla\overline{\overline{Q}} \tag{6.121}$$

Поэтому, используя условия типа *Q*, можно провести разложение, идентичное тому,которое дает полиномиальную форму по ∇, при этом *Q* з аменяется на $\overline{Q}$, ∇ на Δ и Δ на ∇. Следовательно, можно получить *ИЛИ/И* и *НЕ*. В действительности можно использовать разнообразные комбинации операторов, как это принято у разработчиков ЭВМ.
Точно так же можно использовать только один оператор, например, Шеффера или Пирса, т.е.

$$Q_1 | Q_1 = \overline{Q}\nabla\overline{Q}_2 \tag{6.122}$$

или

$$Q_1 \downarrow Q_2 = \overline{Q}_1\Delta\overline{Q} \tag{6.123}$$

Так как в техническом отношении это часто оказывается неудобным, поэтому представляет интерес в техническом отношении анализ смешанных схем. Называемая примарными условиями типа:

$$\alpha_{k-1} \le f(\tilde{a},\tilde{b},...) \tag{6.124}$$

и дуальными условия типа:

$$f(\tilde{a},\tilde{b},...) < \alpha_k \tag{6.125}$$

можно оперировать сразу смешанными схемами, для которых

$$\alpha_{k-1} \le f_1(\tilde{a},\tilde{b},...) \text{ и } f_2(\tilde{a},\tilde{b},...) < \alpha_k \tag{6.126}$$

Для сборки такой схемы достаточно использовать оператор *И*.
Пример 6.8. Реализуем

$$\alpha_{k-1} \le f_1(\tilde{a},\tilde{b},...) = \tilde{a} \wedge \tilde{b} \tag{6.127}$$

и

$$f_2(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}) = (\tilde{a} \wedge \tilde{b}) \vee (\overline{\tilde{b}} \wedge \tilde{c}) < \alpha_k \tag{6.128}$$

Для f_1 примарные условия имеют вид:

$$Q_{\bar{a}}\Delta Q_b \tag{6.129}$$

т.е.

$$\begin{pmatrix} & \tilde{a} \le 1-\alpha_{k-1} \\ \text{и} & \tilde{b} \ge \alpha_{k-1} \end{pmatrix}$$

Для f_2 дуальные условия имеют вид:

$$\left(\overline{Q}_a \nabla \overline{Q}_b\right)\Delta\left(\overline{Q}_{\bar{b}} \nabla \overline{Q}_c\right)$$

т.е.

$$\begin{pmatrix} & \tilde{a} < \alpha_k \\ \text{или/и} & \tilde{b} < \alpha_k \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} & b > 1-\alpha_k \\ \text{или/и} & \tilde{c} > \alpha_k \end{pmatrix} \qquad (6.130)$$

Соединяя (6.129) и (6.130) конъюктивной связкой *И*, окончательно приходим к синтезированной схеме, изображенной на рис.6.3.

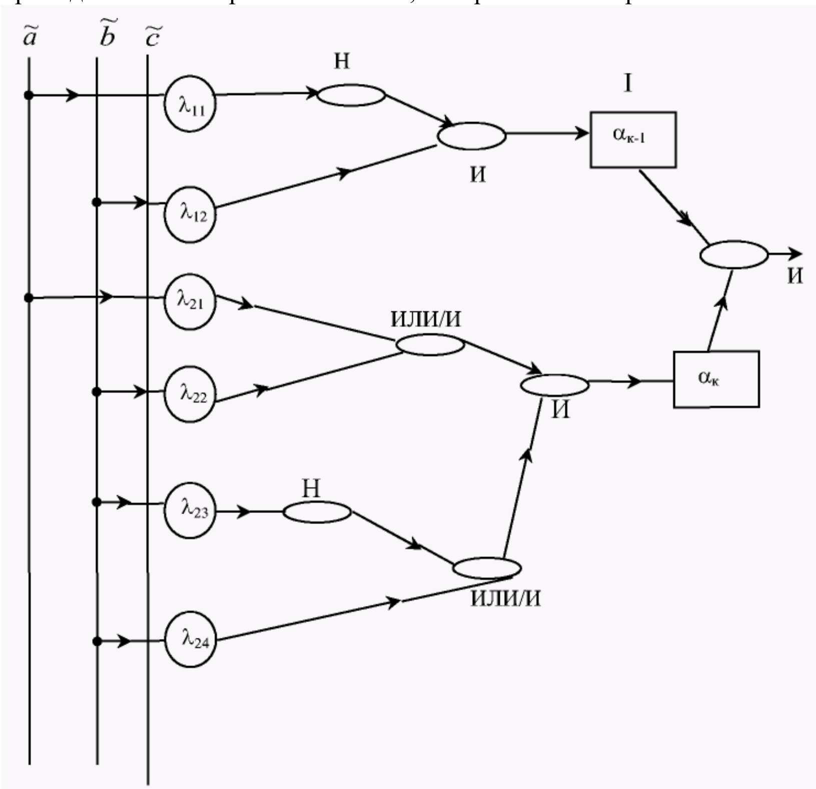


Рис.6.3.

Таким образом, схема на рис.6.3 обеспечивает одновременно выполнение условий

$$\alpha_{k-1} \le \tilde{\bar{a}} \wedge \tilde{b} \text{ и} \left(\tilde{a} \wedge \tilde{b}\right) \vee \left(\tilde{\bar{b}} \wedge \tilde{c}\right) < \alpha_k \tag{5.131}$$

при подходящем выборе коэффициентов λ_{ij}. Эти результаты допускают различные обобщения.

2.6.4. Композиция интервалов

Пусть

$$\tilde{a} \in D_a = [a_1, a_2] \text{ и } \tilde{b} \in D_b = [b_1, b_2) \tag{6.132}$$

Тогда легко видеть, что $\tilde{a} \wedge \tilde{b} \in D_{a \wedge b} = [a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2]$ и

$$\tilde{a} \vee \tilde{b} \in D_{a \vee b} = [a_1 \vee b_1; a_2 \vee b_2) \tag{6.133}$$

Пример 6.9. Пусть $D_a = [0,5;0,8)$ и $D_b = [0,3;0,7)$

Очевидно, что $D_{a \wedge b} = [0,5 \wedge 0,3;\ 0,8 \wedge 0,7) = [0,3;0,7)$

$D_{a \vee b} = [0,5 \vee 0,3; 0,8 \vee 0,7) = [0,5 \vee 0,8)$.

В случае свойств (6.8) и (6.9) аналогично можно показать, что если:

$$\tilde{a} \in D_a = [a_1; a_2);\ \tilde{b} \in D_b = [b_1; b_2) \text{ и } \tilde{c} \in D_c = [c_1; c_2), \tag{6.134}$$

то

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{a} \wedge \tilde{b} \wedge \tilde{c} \in D_{a \wedge b \wedge c} = [a_1 \wedge b_1 \wedge c_1;\ a_2 \wedge b_2 \wedge c_2) \\ \text{и} \\ \tilde{a} \vee \tilde{b} \vee \tilde{c} \in D_{a \vee b \vee c} = [a_1 \vee b_1 \vee c_1;\ a_2 \vee b_2 \vee c_2) \end{array}\right\} \tag{6.135}$$

Интересно рассмотреть случай, когда нечёткие переменные принимают свои значения в дополнении к интервалу.

Если

$$\overline{D}_a = [0; a_1) \bigcup [a_2; 1] \text{ и } \overline{D}_b = [0; b_1) \bigcup [b_2; 1] \tag{6.136}$$

то получим следующие результаты: для

$$f(\tilde{a}; \tilde{b}) = \tilde{a} \wedge \tilde{b}; \tilde{a} \in \overline{D}_a; \tilde{b} \in \overline{D}_b$$

имеем:

$$D_{a \wedge b} = [0, a_1 \wedge b_2) \bigcup [a_2 \wedge b_1; b_2)$$

для

$$f(\widetilde{a},\widetilde{b}) = \widetilde{a} \wedge \widetilde{b}; \widetilde{a} \in \widetilde{D}_a; \widetilde{b} \in \overline{D}_b$$

имеем:

$$D_{a \wedge b} = [0; a_1 \wedge b_2) \bigcup [a_2 \wedge b_1; b_2)$$

В таблице 6.2 приведены основные случаи, когда

$$D_a = [a_1; a_2) \text{ и } D_b = [b_1; b_2)$$

Конечно, нет основания путать $\overline{D}_a$ с $D_{\overline{a}}$, где

$$\overline{D}_a = [0; a_1) \bigcup [a_1; 1], \text{ а } D_{\overline{a}} = (1 - a_2; 1 - a_1] \quad (6.137)$$

и, наконец,

$$\overline{D}_{\overline{a}} = [0, 1 - a_2] \bigcup [1 - a_1; 1].$$

Пример 6.10. Найти область определения $f(\widetilde{a},\widetilde{b}) = \overline{\widetilde{a}} \wedge \widetilde{b}$, зная, что $D_a = [a_1; a_2)$ и $D_b = [b_1; b_2)$

Из (6.135) и (6.136), используя (6.137), имеем:

Таблица 6.3

Восемь основных случаев $D_a = [a_1; a_2)$ и $D_b = [b_1; b_2)$

$f(\widetilde{a},\widetilde{b})$	Об ласть определения $\widetilde{a}$	Об ласть определения $\widetilde{b}$	Об ласть определения $f(\widetilde{a},\widetilde{b})$
$\widetilde{a} \wedge \widetilde{b}$	D_a	D_b	$[a_1 \wedge b_1; a_2 \wedge b_2)$ (6.169)
	$\overline{D}_a$	D_b	$[0; a_1 \wedge b_2) \bigcup [a_2 \wedge b_1; b_2)$ (6.170)
	D_a	$\overline{D}_b$	$[0; b_1 \wedge b_2) \bigcup [b_2 \wedge a_1; a_2)$ (6.171)
	$\overline{D}_a$	$\overline{D}_b$	$[0; a_1 \vee b_1) \bigcup [a_2 \wedge b_1; 1]$ (6.172)
$\widetilde{a} \vee \widetilde{b}$	D_a	D_b	$[a_1 \vee b_1; a_2 \vee b_2)$ (6.173)
	$\overline{D}_a$	D_b	$[b_1, a_1 \vee b_2) \bigcup [a_2 \vee b_1; 1]$ (6.174)
	D_a	$\overline{D}_b$	$[a_1, b_1 \vee a_2) \bigcup [b_2 \vee a_1; 1]$ (6.175)
	$\overline{D}_a$	$\overline{D}_b$	$[0; a_1 \vee b_1) \bigcup [a_2 \wedge b_2; 1]$ (6.176)

$$D_{\overline{a}\wedge b}=\begin{cases}((1-a_2)\wedge b_1;(1-a_1)\wedge b_2] & 1-a_2\le b_1 \text{ и } 1-a_1\le b_2\\ [(1-a_2)\wedge b_1;\,(1-a_1)\wedge b_2] & 1-a_2>b_1 \text{ и } 1-a_1\le b_2\\ ((1-a_2)\wedge b_1;\,(1-a_1)\wedge b_2) & 1-a_2\le b_1 \text{ и } 1-a_1>b_2\\ [(1-a_2\wedge b_1;(1-a_1)\wedge b_2) & 1-a_2>b_1 \text{ и } 1-a_1>b_1\end{cases}$$

Таким образом,

$$D_{\overline{a}\wedge b}=\begin{cases}((1-a_2);(1-a_1), \text{ если } 1-a_2\le b_1 \text{ и } 1-a_1\le b_2\\ [b_1;1-a_1), \text{ если } (1-a_2)>b_1 \text{ и } 1-a_1\le b_2\\ ((1-a_2;b_2), \text{ если } 1-a_1\le b_1 \text{ и } 1-a_1>b_2\\ [b_1;b_2), \text{ если } 1-a_2>b_1 \text{ и } 1-a_1>b_2\end{cases}$$

Наконец, рассмотрим случай дискретной функции принадлежности. Предположим, что [0;1] разбит на 10 равных частей, определяющих 11 дискретных значений.

$$M=\{0;0,1;0,2;0,3;0,4;0,5;0,6;0,7;0,8;0,9;1\}$$

В этом случае для функций, подлежащих рассмотрению, удобно составить таблицы, которые в теории нечёткой логики для характеристических функций характеристик нечёткого множества играют роль, аналогичную роли таблиц истинности при изучении функций булевых переменных. Но теперь вместо двух значений переменной из булевой алгебры приходится иметь дело с большим числом з начений - от 0 до 1 и с законами (5.6)-(5.20). Посмотрим, как применяются эти таблицы.

Пример 6.11. Пусть $f(\widetilde{a},\widetilde{b})=\overline{\widetilde{a}}\wedge\widetilde{b}$, где

$$\widetilde{a}\in\{0,3;0,4;0,5;0,6\};\widetilde{b}\in\{0,1;0,2\}\cup\{0,7;0,8;0,9\}$$

Изучение заштрихованной части таблицы 6.4 показывает, что $\overline{\widetilde{a}}\wedge\widetilde{b}\in\{0,1;0,2\}\cup\{0,7;0,8;0,9\}$

Таблица 6.4

$\tilde{\tilde{a}} \wedge \tilde{b}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9
2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	8
3	0	1	2	3	4	5	6	7	7	7	7
4	0	1	2	3	4	5	6	6	6	6	6
5	0	1	2	3	4	5	5	5	5	5	5
6	0	1	2	3	4	5	5	4	4	4	4
7	0	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3
8	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
9	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Изучение заштрихованной части таблицы 6.4 показывает,

$$\tilde{a} \wedge \tilde{b} \in \{0,1;0,2\} \cup \{0,4;0,5;0,6;0,7\}$$

Пример 6.12. Пусть $f(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}) = (\tilde{a} \wedge \overline{\tilde{b}} \wedge \tilde{c}) \vee \overline{\tilde{c}}$, где

$$\tilde{a} \in \{0,3;0,4;0,5\}\ \tilde{b} \in \{0,1;0,2\} \cup \{0,6\} \text{ и}$$
$$\tilde{c} \in \{0;0,1\} \cup \{0,7;0,8;0,9;1\}$$

Сначала предположим $\tilde{d} = \tilde{a} \wedge \overline{\tilde{b}}$ и рассчитаем область определения $\tilde{d}$ с помощью таблицы на рис.6.5 (которая представляет собой транспортированную таблицу на рис.6.4) Найдем

$$\tilde{d} = \tilde{a} \wedge \overline{\tilde{b}} \in \{0,3;0,4;0,5\}$$

Затем найдем об ласть определения

$$\tilde{\ell} = \tilde{d} \wedge \tilde{c} = \tilde{a} \wedge \overline{\tilde{b}} \wedge \tilde{c}$$

Таблица 6.5

$\widetilde{d} = \widetilde{a} \wedge \overline{\widetilde{b}}$	0	1 2	3 4 5	6	7 8 9	1
0	0	0	0 0 0	0	0 0 0	0
1	1	1 1	1 1 1	1	1 1 1	0
2	2	2 2	2 2 2	2	2 2 1	0
3	3	3 3	3 3 3	3	3 2 1	0
4	4	1 2	4 4 4	4	3 2 1	0
5	5	5 5	5 5 5	4	3 2 1	0
6	6	6 6	6 6 5	4	3 2 1	0
7	7	7 7	7 6 5	4	3 2 1	0
8	8	8 8	7 6 5	4	3 2 1	0
9	9	9 8	7 6 5	4	3 2 1	0
1	1	9 8	7 6 5	4	3 2 1	0

С помощью таблицы на рис.6.6 находим

$$\widetilde{\ell} = \widetilde{d} \wedge \widetilde{c} = \widetilde{a} \wedge \overline{\widetilde{b}} \wedge \widetilde{c} \in \{0;0,1\} \cup \{0,3;0,4;0,5\}$$

Наконец, с помощью таблицы на рис.6.7 найдем область определения $f\{\widetilde{a},\widetilde{b},\widetilde{c}\}$

$$f\{\widetilde{a},\widetilde{b},\widetilde{c}\} \in \{0;0,1;0,2;0,3;0,4;0,5\} \cup \{0,9;1\}$$

$$\widetilde{d} = \widetilde{a} \wedge \overline{\widetilde{b}}$$

Таблица 6.6

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	0	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3
4	0	1	2	3	4	4	4	4	4	4	4
5	0	1	2	3	4	5	5	5	5	5	5
6	0	1	2	3	4	5	6	6	6	6	6
7	0	1	2	3	4	5	6	7	7	7	7
8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	8	8
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1

Таблица 6.7

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1	1	2	3	4	4	4	4	4	4	4
5	0	1	2	3	4	5	5	5	5	5	5
6	1	1	2	3	4	5	6	6	6	6	6
7	1	1	2	3	4	5	6	7	7	7	7
8	1	1	2	3	4	5	6	7	8	8	8
9	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1

2.6.5. Нечёткие утверждения и их функциональное представление

В отличии от формальной логики нечёткая логика опирается не натаблицы истинности, а на операции, производимые на нечётких подмножествах.

Высказывания нечёткой логики, как и высказывания формальной логики, явно или неявно связаны с теорией нечётких и соответственно формальных множеств.

Операциям $\cap, \cup$ и $\bar{\ }$ (пересечение, объединение и дополнение) в формальной логике соответствуют связки Δ, ∇ и $\rceil$ (коньюнкция «И», дизьюнкция (или/и), отрицание «не»).

Переход к нечётким связкам Δ, ∇ и $\rceil$ соответствующей нечёткой логики не представляет каких-либо трудностей, поскольку мы определили соответствующее множество операций ранее.

Однако необходимо уделить внимание другим связкам: импликации, метаимпликации, логической эквивалентности.

Перейдем к обзору этих понятий, сначала в формальной, а затем в нечёткой логике.

Рассмотрим два формальных утверждения, Q и $\Im$. Составному утверждению Q ведёт $\Im''$ (соответствует $Q > \Im$) соответствует таблица 6.8.

Таблица 6.8

Q	$\Im$	$Q > \Im$
ложно	ложно	истинно
ложно	истинно	истинно
истинно	ложно	ложно
истинно	истинно	истинно

Если утверждению Q поставить в соответствие множество *A,* а утверждению $\Im$- множество *B,* то составному утверждению *Q* влечет $\Im''$ ставится в соответствие множество $\overline{A} \cup B$

Теперь рассмотрим составное утверждение *«Q»* метаимплицирует $\Im''$ обозначается *Q* $=> \Im$.

Этой метаимпликации придаётся следующий смысл: когда *Q* истинно, $\Im$ всегда истинно (здесь сохраняется правило силлогизма), но ничего нельзя утверждать, когда *Q* ложно; в этом случае $\Im$ может быть как истинно, так и ложно. Таким образом, высказывание вроде «если море станет сладким сиропом, я превращусь в сироп» - корректно, поскольку море, увы, непригодно для питья и, конечно, не станет сладким сиропом. Поэтому связка $=>$ сводится к следующему: если $Q => \Im$ и утверждение *Q* истинно, то $\Im$ есть необходимо истинное утверждение.

Поэтому следует остерегаться смешения $Q > \Im$ и $Q => \Im$

Первое есть операция логики:

$$Q > \Im = \overline{Q} \nabla \Im \text{ (в одних обозначениях),}$$

$$Q > \Im = (\neg Q) \nabla (\Im) \text{ (в других обозначениях)} \quad (6.138)$$

Второе - металогическая операция, которая может не сводиться к (6.138). Однако привычно метаимпликацию называть импликацией путает оба термина. Составное утверждение $Q > \Im$ не является отношением причины и следствия и не доказывает справедливость $\Im$ по отношению *Q,* но именно так трактуется метаимпликация $Q => \Im$

Можно привести ложный парадокс, связанный с введённым нами понятием импликации, который мы сформируем следующим образом: поскольку проанализировать утверждения *Q* и $\Im$ можно лишь тогда, когда известно их содержание, о котором у нас не имеется никаких сведений, и единственно доступные нам данные - это логические значения этих высказываний, то импликация $Q > \Im$ не может быть отношением причины и следствия. Однако, если апприории из вестно, что $Q > \Im$ истинно, то можно заключить, что $\Im$ - истинно.

Приведем пример. Пусть Q и $\Im$ есть следующие утверждения, которые будем рассматривать, используя таблицу 6.4.

Q - Наполеон умер на острове Святая Елена (истино);
$\Im$ - Версингеторикс носил усы (никто не уверен);
$Q > \Im$ - истино, если $\Im$ истино;
Q - два плюс два равно пять (ложно);
$\Im$ - 12-простое число (ложно);
$Q > \Im$ - истино;
$Q > \Im$ - Луна сделана из швейцарского сыра (ложно);
$Z - 17$ - простое число (истино);
$Q > \Im$ - истино;
$Q - 17$ - простое число (истино);
$\Im$-16 - простое число (ложно)
$Q > \Im$ - истино

Таблица 6.9

Q	$\Im$	$Q > \Im$
ложно	ложно	истино
ложно	истино	истино
истино	ложно	ложно
истино	истино	истино

Логическая эквивалентность менее двусмысленна. Определим её, используя таблицу истинности 6.10. Подобно импликации, логическая эквивалентность не учитывает содержания двух утверждений в причинном отношении.

Составленному высказыванию для подмножества А, связанного с *Q* и подмножества *B,* связанного с $\Im$ соответствует множественная операция $(A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)$

Таблица 6.10

Q	$\Im$	$Q = \Im$
ложно	ложно	истино
ложно	истино	ложно
истино	ложно	ложно
истино	истино	истино

Вместо метаэквивалентности обычно просто об эквивалетности - это значит, что Q метаимплицирует $\mathfrak{I}$ имплицирет *Q*. Такая симметрия определения приводит к таблице истинности, идентичной таблицы истинности для логической связи «эквивалентно» $Q = \mathfrak{I}$. Поэтому можно отождествлять эти понятия, не опасаясь возникновения двусмысленности.

Нечёткие утверждения типа нечёткой импликации и нечёткой эквивалентности определяют относительно операций $\overline{\widetilde{A}} \cup \widetilde{B}$ и $(\widetilde{A} \cup \overline{\widetilde{B}}) \cap (\overline{\widetilde{A}} \cup \widetilde{B})$ соответственно.

Для определения метаимпликации в нечёткой логике используем понятие бинарного отношения. На рис. 6.4: Если $x=x_1$, то $y=y_3$ и т.д.

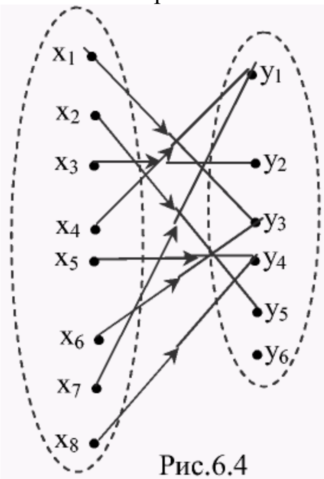


Рис.6.4

Таблица 6.11

E_2 / E_1	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_1	0	0	1	0	0	0
x_2	0	0	0	0	1	0
x_3	0	1	0	0	0	0
x_4	1	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	1	0	0
x_6	0	0	1	0	0	0
x_7	1	0	0	0	0	0
x_8	0	0	0	1	0	0

В таблице 6.12 элементу множества E_1 соответствует нечёткое подмножество E_2.
Если $x=x_1$, то

$$\widetilde{B} = \{y_1/0{,}7; y_2/0{,}4; y_3/1; y_4/0{,}3; y_5/1; y_6/0{,}8\}$$

если $x=x_5$, то

$$\widetilde{B} = \{y_1/0{,}1; y_2/0{,}4; y_3/0{,}7; y_4/0{,}9; y_5/0{,}3; y_6/0{,}6\}$$

Таблица 6.12

E_2 / E_1	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_1	0,7	0,4	1	0,3	0,9	0,8
x_2	0,3	0,8	0,6	0,5	1	0,9
x_3	0,4	0,9	0,3	1	0,1	0,3
x_4	0,9	1	0,8	0,2	0,6	1
x_5	0,1	0,4	0,7	0,9	0,3	0,6
x_6	1	0,2	0,4	1	0,7	0,8

Рассмотрим теперь пример построения нечёткого подмножества $\widetilde{B}$, соответствующего нечёткому подмножеству $\overline{A}$, определённого как:

$$\mu_{\widetilde{\beta}} = \max\min(\mu_{\widetilde{\beta}}(y//x),\ \mu_A(x)) \tag{6.139}$$

Пример 6.13. Пусть

$$A = \{x_1/0{,}4, x_2/0{,}3;\ x_3/0{,}6; x_4/0{,}8;\ x_5/0{,}8; x_6/0{,}1\},$$

используя нечёткое отношение 6.9 найдем нечеткое подмножество $\widetilde{B} \subset E_2$. Последовательно имеем:

$$\mu_{\widetilde{\beta}}(y_1) = \max[\min(0{,}7;0{,}4), \min(0{,}3;0{,}3), \min(0{,}4;0{,}6),$$
$$\min(0{,}9;0{,}8), \min(0{,}1;0{,}8), \min(1;0{,}1)] = \max(0{,}4;0{,}3;0{,}4;0{,}8;0{,}1;0{,}1) = 0{,}8$$
$$\mu_{\beta}(y_2) = \max[\min(0{,}4;0{,}4), \min(0{,}8;0{,}3), \min(0{,}9;0{,}6),$$
$$\min(1;0{,}8); \min(0{,}4;0{,}8); \min(0{,}2;0{,}1)] = \max[0{,}4;0{,}3;0{,}6;0{,}8;0{,}4;0{,}1) = 0{,}8$$
$$\max[0{,}4;0{,}3;0{,}3;0{,}8;0{,}7;0{,}1] = 0{,}8 = \mu_{\widetilde{\beta}}(y_3)$$
$$\max[0{,}3;0{,}3;0{,}6;0{,}2;0{,}8;0{,}1] = 0{,}8 = \mu_{\widetilde{\beta}}(y_4)$$
$$\max[0{,}4;0{,}3;0{,}1;0{,}6;0{,}3;0{,}1] = 0{,}6 = \mu_{\widetilde{\beta}}(y_5)$$
$$\mu_{\widetilde{\beta}}(y_6) = \max[0{,}4;0{,}3;0{,}3;0{,}8;0{,}6;0{,}6] = 0{,}8$$

Таким образом, имеем:

$$\widetilde{B} = \{y_1/0{,}8; y_2/0{,}8; y_3/0{,}8; y_4/0{,}8; y_5/0{,}6; y_6/0{,}8\}$$

Если (*) соответствует (max-min), то имеем:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0,4	0,3	0,6	0,8	0,8	0,1

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_1	0,7	0,4	1	0,3	0,9	0,8
x_2	0,3	0,8	0.6	0,5	1	0,9
x_3	0,4	0,9	0,3	1	0,1	0,3
x_4	0,9	1	0,8	0,2	0,6	1
x_5	0,1	0,4	0,7	0,9	0,3	0,6
x_6	1	0,2	0,4	1	0,7	0,8

=

=

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0,4	0,3	0,6	0,8	0,8	0,1

Итак, мы показали, что рассматриваемое утверждение «если-то» хорошо соответствует тому, что используется при формальных отношениях. Обращаясь к рис.6.8, имеем: если

$$\widetilde{A} = \{x_1/0; x_2/0; x_3/1; x_4/0; x_5/0; x_6/0; x_7/0; x_8/0\}$$

т.е.

$$A = \{x_3\},$$

то

$$\widetilde{B} = \{y_1/0; y_2/1; y_3/0; y_4/0; y_5/0; y_6/0\},$$

т.е.

$$\widetilde{B} = \{y_2\}.$$

Это можно записать в виде: если $\widetilde{A} = \{x_3\}$, то $\widetilde{B} = \{y_2\}$, или же, если x=x_3, то y=y_2.

Сделаем сводку всех утверждений, установленных до сих пор: нечёткая коньюнкция (нечёткое *и*) определяется как $\widetilde{A} \cup \widetilde{B}$, нечёткая дизьюнкция (нечёткое *или*) определяется как $\widetilde{A} \cup \widetilde{B}$, нечёткое отрицание (нечёткое *не*) определяется как $\overline{\widetilde{A}}$, нечёткая импликация определяется как $\overline{\widetilde{A}} \cup \widetilde{B}$, нечёткая эквивалентность определяется как: $\left(\widetilde{A} \cup \overline{\widetilde{B}}\right) \cap \left(\overline{\widetilde{A}} \cup \widetilde{B}\right)$, нечёткая, если, то определяется как:

$\mu_{\widetilde{B}}(y) = \max\limits_{x} \min\left(\mu_{\widetilde{B}}(y//x), \mu_{\widetilde{A}}(x)\right)$ (нечёткая импликация).

Это последнее утверждение, скорее всего, относится не к нечёткой логике, а к нечёткой металогике.

2.6.6. Многозначная и нечёткозначная логики

В зависимости от способов введения операций объединения и пересечения нечёткого множества существуют три основных теории неч ёткких множеств. Если $\Im(E)$ - множество нечётких подмножеств E с обычными максимальными операциями объединения $(\bigcup)$ и пересечения $(\bigcap)$, то множество $\Im(A)$, как множество отображений из E в [0,1], является дистрибутивной решёткой с псевдодополнением $\left(\Im(E),\bigcup,\bigcap,^{-}\right)$. В качестве объединения и пересечения можно взять вероятностные операторы (алгеб-раические операции в таблице 6.13).

Таблица 6.13

Наз вание связ ки	Об оз нач е-ние связ ки	Неч ёткая логика с максимальны-ми операциями	Неч ёткая логи-ка с ограни-ч енными опе-рациями	Вероятностная неч ёткая логика
тавтология	$\widetilde{A}$	*max (a, 1-a)*	*1*	*1-a(1-a)*
противореч ие	$\overline{A}$	*min(a,1-a)*	*0*	*a(1-a)*
отрицание	$\rceil\widetilde{A}$	*1-a*	*1-a*	*1-a*
диз ьюнкция	$\widetilde{A}\vee\widetilde{B}$	*max (a, b)*	*min(1,a+b)*	*a+b-ab*
коньюнкция	$\widetilde{A}\wedge\widetilde{B}$	*min(a, b)*	*max(0,a+b-1)*	*a,b*
импликация	$\widetilde{A}\to\widetilde{B}$	*max(1-a;b)*	*min(1,1-(a+b))*	*(1-a+ab)*
эквивалентность	$\widetilde{A}\leftrightarrow\widetilde{B}$	*min[max(1-a,b); max(a,1-b)]*	$1-\lvert a-b\rvert$	*(1-a+ab)(1-b+ab)*
Штрих Шеффера	$\widetilde{A}\vert\widetilde{B}$	*max(1-a;1-b)*	*min(1,1-a+1-b)*	*1-ab*
Исключ ающее «ИЛИ»	$\widetilde{A}ex\widetilde{B}$	*max[min(1-a-b), min(a,1-b)]*	$\lvert a-b\rvert$	*1-(1-a+ab)(1-b+ab)*
Стрелка Пирса	$\widetilde{A}\downarrow\widetilde{B}$	*min[(1-a,(1-b)]*	*max(01-a-b)*	*(1-a)(1-b)*

Наконец, используя операторы ограниченной суммы $(\dot{\bigcup})$ и произведения $\underset{\cdot}{\bigcap}$ и обычное псевдодополнение, получаем недистрибутивную решётку с дополнением

$$\left(\Im,\dot{\bigcup},\underset{\cdot}{\bigcap},^{-}\right).$$

Отметим, что $\forall\widetilde{A},\widetilde{B}\subset\Im(E);\ \widetilde{A}\bigcap\widetilde{B}\subset\widetilde{A}\cdot\widetilde{B}\subset\widetilde{A}\bigcap\widetilde{B};$ и $\widetilde{A}\bigcup\widetilde{B}\subset\widetilde{A}€\widetilde{B}\subset\widetilde{A}\dot{\bigcup}\widetilde{B}.$

Каждой из этих теорий соответствует многозначная логика, связки для которой приведены в таблице 6.6, где

$$\mu_A(x)=a;\ \mu_B(x)=b.$$

Следует отметить, что резльтаты, приведённые в таблице 6.13, кроме так называемой вероятностной нечёткой логики полностью освещены в предыдущем п.2.6.5.

В логике, связанной с $\left(\Im(E), \text{€}, \cdot, ^{-}\right)$, которую часто называют вероятностной нечёткой логикой операции

$$\begin{aligned}&\mu_{\tilde{A}\vee\tilde{B}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}(x)}-\mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x),\\&\mu_{\tilde{A}\wedge\tilde{B}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x)\cdot\mu_{\tilde{B}}(x)\end{aligned}, \tag{6.140}$$

являются коммутативным, ассоциативными, но не идемпотентными и не дистрибутивными относительно друг друга, т.е., учитывая (6.1), тмеем:

$$\left.\begin{aligned}a\cdot b&=ba\\a\,\text{€}\,b&=b\,\text{€}\,a\end{aligned}\right\}\quad\text{коммутативность}$$

$$\left.\begin{aligned}a\cdot(b\cdot c)&=(a\cdot b)c\\a\,\text{€}\,(b\,\text{€}\,a)&=(a\,\text{€}\,b)\,\text{€}\,c\end{aligned}\right\}\quad\text{ассоциативность}$$

$$\left.\begin{aligned}a\cdot a&\neq a\\a\,\text{€}\,a&=a\end{aligned}\right\}\quad\text{не импотентность}$$

$$\left.\begin{aligned}a(b\,\text{€}\,c)&=ab+ac\\a+b\cdot c&\neq(a+b)(a+c)\end{aligned}\right\}\quad\text{не дистриб утивно}$$

Следует также отметить, что связки «$ex,$ $|$, $\downarrow$»всегда выражаются как отрицания $\leftrightarrow$, $\wedge$ **и** $\vee$ соответственно; тавтология и противоречия определены как

$$\dot{\tilde{A}}=\tilde{A}\vee\overline{\tilde{A}};\dot{\tilde{A}}=\tilde{A}\wedge\overline{\tilde{A}}.$$

В более общем виде

$$\begin{aligned}\tilde{A}\tilde{B}&=(\tilde{A}\vee\overline{\tilde{A}})\vee(\tilde{B}\vee\overline{\tilde{B}})\\\overrightarrow{\tilde{A}\tilde{B}}&=(\tilde{A}\vee\overline{\tilde{A}})\vee(\tilde{B}\wedge\overline{\tilde{B}})\end{aligned}$$

Альтернативный подход к описанию нечётких логик предложен в ряде работ.

В ряде работ введено понятие лингвистической переменной, которая характеризуется набором $X, T(X), \bigcup, G, M$, в котором X - название переменной, T(X) - терм-множество переменной X, т.е. множество лингвистических з начений переменной, причём каждое из таких значений является нечёткой переменной X со значениями из универсального множества U с базовой переменной и, *G* - синтаксическое правило (имеющее обычно форму грамматики), порождающее названия X значений переменной X, а *M* - семантическое правило, которое ставит в соответствие каждой нечёткой переменной её смысл *M(X),* т.е. нечёткое подмножество универсального множества U. Конкретнее название X, порожденное синтаксическим правилом *G* называется термом.

Трактовка истинности, как лингвистической переменной, приводит к нечёткой логике со значениями «истинный», «очень истинный», «совершенно истинный», «более или менее истинный», «не очень истинный», «ложный» и т.д., т.е. к нечёткозначной логике, на которой основана теория приближённых рассуждений. В таблице 6.12 приведён пример лингвистических значений истинности: «истино» с функцией приандлежности

$$\mu_u = S(\alpha, \alpha+1)/2{,}1,$$
$$\alpha \in [0{,}1],\ \text{«ложно»}=ant,$$

(«истинно») и «сомнительно» с $\mu_c = S\left(\beta, (\beta - 0{,}5)/2{,}0{,}5\right)$ на [0;0,5] и $\mu_c = aut(S(\beta, (\beta + 0{,}5)/2; 0{,}5))$ на$[0{,}5;1]$, $\beta \in [0;0{,}5]$.

Вообще говоря, можно рассмотреть логическую систему $Z = \{P, L, T)$, где *P* - множество высказываний, L - решётка и T - отображение

$$T : P \to L,$$

которое присваивает каждому $P \in P$ его значение истинности $T(P) \in L$. Истинностное отображение должно удовлетворять следующим свойствам:

$$\left.\begin{array}{l} a)\ \ T(p \vee q) = T(p) \vee T(q) \\ б)\ T(p \wedge q) = T(p) \wedge T(q), \\ \text{а также} \\ в)\ T(\overline{P}) = \overline{T}(P) \end{array}\right\} \qquad (6.141)$$

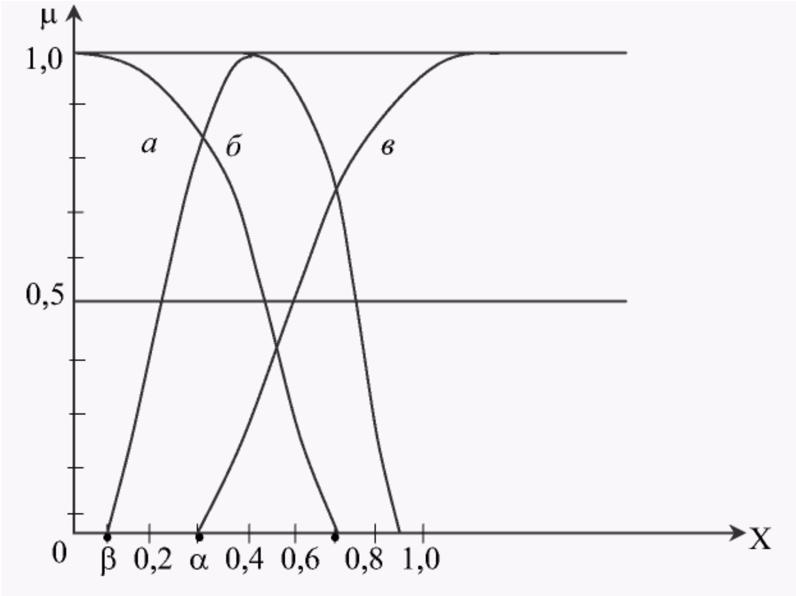


Рис. 6.10
Функция принадлежности лингвистических значений истинности: *а*- «ложно»; *б* - «сомнительно»; *в*- «истинно».

Для лингвистической переменной использована $L = \Im([0,1]) = \{f : [0,1] \to [0,1]\}$ в качестве множества истинности. Поэтому, истинозначное отображение записывается в виде:
$T : P \to \Im([0,1])$ и аксиомы *а), б)* и *в) б* удут выполнены.
Нечёткозначная логика описывается теорией нечётких множеств типа 2, з начения функций принадлежности которых являются нечёткие числа). Семантические правила для вычисления функций истинности для отрицания, коньюнкции и дизьюнкции з аписываются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} T_2(\overline{P}) &= 1\ominus T_2(P) = ant\,(T_2(P)) \\ T_2(P \wedge Q) &= \widetilde{\min}(T_2(P), T_2(Q)) \\ T_2(P \vee Q) &= \widetilde{\max}(T_2(P), T_2(Q)) \end{aligned}\right\} \qquad (6.142)$$

где $T_2(P)$- нечёткое число на[0;1], $\ominus$, $\tilde{\max}, \tilde{\min}$ - расширенные операции отрицания, максимума и минимума соответственно.

Через функции принадлежности определения для $\widetilde{\max}, \widetilde{\min}$, имеем:

$$\mu_{\underset{PQ}{\max}}(z) = \underset{z=\max(x,y)}{sur} \min\left(\mu_P(x), \mu_Q(y)\right)$$
$$\mu_{\underset{(P,Q)}{\min}}(z) = \underset{z=\min(x,y)}{sur} \min\left(\mu_P(x), \mu_Q(y)\right) \qquad (6.143)$$

Аналогично с помощью принципа обобщения получаются семантические правила для других логических связок (см. табл.6.13). Так для связок логики $\Im(x), \bigcup, \bigcap, ^{-})$ имеет место следующие формулы:

а) для импликации $T_2(P \to Q) = \widetilde{\max}(1 \ominus T_2(P), T_2(Q))$

б) для эквивалентности

$$T_2(P \to Q) = \widetilde{\min}[\widetilde{\max}(1 \ominus T_2(P), T_2(Q)), \widetilde{\max}(1 \ominus T_2(Q), T_2(P))$$

в) для исключающего «ИЛИ»

$$T_2(PexQ) = \widetilde{\max}(\widetilde{\min}(1 \ominus T_2(P), T_2(Q)), \min(1 \ominus T_2(Q), T_2(P))]$$

г) для тавтологии:

$$T_2(\dot{P}) = \widetilde{\max}(T_2(P), 1 \ominus T_2(P));$$

д) для противоречия:

$$T_2(\overline{P}) = \widetilde{\min}(T_2(P), 1 \ominus T_2(P));$$

Пример 6.14. Если *P* «сомнительно», а *Q* «истинно», то $T_2(P \to Q) = \max$ *(out* («сомнительно»), «(истинно) $\tilde{=}$ «истинно»;

$T_2(P \to Q) = \widetilde{\max}$ *(aut* «истинно», «сомнительно» $\tilde{=}$ «сомнительно»,

$T_2(P \leftrightarrow Q) =$ «сомнительно».

Для расширенных операций $\widetilde{\max}$ и $\widetilde{\min}$ выполняются свойства коммутативности, ассоциативности, иденпотентности, взаимной дистрибутивности, а также законы поглощения и Де Моргана.

2.6.7 Теория нечётких подмножеств и теория вероятностей

При первичном знакомстве с понятием нечётких множеств, многие спрашивают: «Что интересного в теории нечётких подмножеств? Ведь всему этому хорошо служит теория вероятностей.» У этих теорий действительно есть несколько общих аспектов, но существуют доводы, что эти теории следует различать. Поэтому выясним, чем отличаются эти теории друг от друга.

Приведём сначала теоретическое определение вероятности.

Пусть X - конечное универсальное множество $\Im(X)$ множество всех его подмножеств. D –подмножество $\Im(X)$ обязательно содержащее X.

Определение 6.11. Подмножество (или семейство) D будем называть вероятностным семейством подмножеств множества X, если выполняются следующие два условия:

$$\left.\begin{array}{l} а)\ \forall A \in D : \overline{A} \in D \\ б)\ \forall A \in D \text{ и } \forall B \in D;\ A \bigcup B \in D; \end{array}\right\} \quad (6.144)$$

Например, пусть

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \text{ и}$$

$$D = \{\varnothing, x_2, x_3, (x_2, x_3), (x_1, x_4), (x_1 x_2 x_4), (x_1 x_3 x_4), X\} \quad (6.145)$$

Легко доказать, что для всех элементов семейства (6.145) удовлетворяют условиям (6.144).

Свойства (6.144) влекут за собой выполнение следующих свойств:

$$\left.\begin{array}{l} в)\ \varnothing \in D \\ г) \forall A \text{ и } \forall B : A\text{-}B = A \bigcap \overline{B} \in D \end{array}\right\} \quad (6.146)$$

Отметим, что вероятностное семейство «D» образует кольцо относительно (дизьюнктивности суммы) $\oplus$ взятия симметрической разности от двух множеств, которая рассматривается как адитивная операция кольца и мультипликативной операции ∩ - пересечения двух множеств.

$$(A \oplus B)C = A \oplus (B \oplus C)$$
$$A \oplus \varnothing = \varnothing + A$$

$A \oplus A = \varnothing$ существование противоположного элемента
$A \oplus B = B \oplus A$ - коммутативность

$$(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)$$
$$(A \oplus B) \bigcap C = (A \bigcap C) \oplus (B \bigcap C)$$
$$C \bigcap (A \oplus B) = (C \bigcap A) \oplus (C \bigcap B)$$

Следовательно, $(D, \oplus, \bigcap)$ - кольцо.

Определение 6.12. Подмножество $\Im \subset \Im(X)$ называется вероятностно-базисным семейством множества X, если используя операции дополнения и объединения (6.144), из него можно получить любое подмножество вероятностного семейства $D \subset \Im(X)$.

При этом говорят, что *F* порождает *D* или *F* - генератор *D.*

Легко видеть, что $F=\{x_1,x_4\},x_2,x_3\}$ - есть генератор 6.145.

Отметим также, что для бесконечного универсального множества (счётного или несчётного) условия (6.144) заменяется условием:

$$\left.\begin{array}{l} a)\ \forall A \in D: \overline{A} \in D \\ e)\ \forall\{A_1, A_2, ..., A_n, ...\} \in D => A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \cup ... D \end{array}\right\} \quad (6.147)$$

Определение 6.13. Пусть дано вероятностное семейство $D \subset \Im(X)$. Вероятностью называется однозначное отображение D в R^+, обладающее следующими свойствами:

$$\begin{array}{l} ж)\ \forall A \in D: \Pr(A) \geq 0 \\ з)\ \forall A \in D: \forall B \in D: A \cap B = \varnothing => \\ => Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B) \\ и)\ Pr\ (X)=1 \end{array}$$

где *Pr(Z)* - образ элемента $Z \in D$ в R^+

Аксиомы (6.144) и (6.146) или (6.145) и (6.146) каждому элементу из семейства $D \subset \Im(X)$ ставят в соответствие неотрицательное число меньше или равно 1.

Исходя из аксиом (6.144) и (6.146) легко доказать следующие свойства вероятностей:

$$\left.\begin{array}{l} Pr\ (\varnothing)=0 \\ Pr(\overline{A})=1-Pr(A) \\ Pr(A)+Pr(B)=Pr(A \cup B)+Pr(A \cap B) \\ B \subset A => pr(B) \leq Pr(A) \end{array}\right\} \quad (6.148)$$

Обращаясь к понятию нечёткого подмножества следует подчеркнуть следующий важный момент: «недостаточно с каждым подмножеством связать число $P \in [0;1]$ и называть Р - вероятностью, необходимо, чтобы подмножество и *P* удовлетворяли аксиомам (6.144) и (6.146)».

Установим теперь различие между вероятностной концепцией для нечётких и для чётких подмножеств.

Рассмотрим простой пример.

Пример 6.15. Пусть $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

Определим нечёткое подмножество, приписывая каждому элементу значение функции принадлежности:

$$\widetilde{A} = \{(x_1 / 0{,}3); (x_2 / 0{,}7); (x_3 / 1)\}$$

В теории вероятности число $P \in [0;1]$ приписываются обычным подмножествам, составляющим вероятностное свойство. Если в качестве «D» выбрать (6.145), то можно, например, записать

$Pr(\varnothing)=0$; $pr(x_2)=0{,}2$; $pr(x_3)=0{,}3$;
$pr(x_1,x_4)=0{,}5$; $pr(x_1x_2x_4)=0{,}7$;
$pr(x_1x_3x_4)=0{,}8$, $pr(x_4x_3)=0{,}5$; $pr(X)=1$

Очевидно, что все эти вероятности удовлетворяют (6.188).

Как видно, эти два подхода совершенно различны.

Можно представить себе, что вероятности приписаны нечётким подмножествам некоторого универсального множества, элементы которого, в свою очередь, есть нечёткие подмножества другого универсального множества.

Можно представить себе и теорию вероятностей нечётких событий.

Очевидно, что надо проводить различие между двумя теориями: теорией нечётких подмножеств и теорией вероятностей обычных подмножеств.

Наряду с этим следует отметить, что

а) сходство теории вероятностей и теории нечётких множеств заключается в том, что и значения вероятностей принадлежности элемента *x* некоторому множеству *A* и значения функции принадлежности элементах нечёткому множеству $\widetilde{A}$ из меняются на [0;1].

Кроме того, все аксиомы вероятностей множества случайных событий (случайных величин) справедливы и для функции принадлежности нечётких множеств, если противоположному случайному событию в теории вероятностей в теории нечёткого множества соответствует дополнение нечёткого множества;

б) различие этих теорий заключается в основном том, что функция принадлежности $\mu_A(x)$ определяет степень принадлежности элемента *x* множеству *A* и если $0 < \mu_A(x) < 1$, то при любом таком значении $\mu_A(x)$ элемент *x* принадлежит множеству *A* (т.е. говоря в терминах случайных событий оно есть достоверное событие), если же вероятность того, что *x* принадлежит множеству *A* принимает значение $0 < P_A(x) < 1$, то событие, что $x \in A$ есть случайное событие и поэтому несмотря на то, что $0 < P_A(x) < 1$ возможно, что *x* и не примет з начение из *A*, т.е. $x \notin A$.

Кроме того, следует отметить, что с точки зрения теории меры вероятностная трактовка нечеткого множества является несправедливым, поскольку понятие вероятностной меры является сужением понятия нечёткой меры.

С точки зрения теории отображений $P:\beta \rightarrow [0,1]$ и $\mu(x): X \rightarrow [0,1]$ - совершенно разные объекты. Вероятность *P* определяется в σ-алгебре β и является функцией множества, а $\mu(x)$- есть обычная функция, областью определения которой является множество *X*. Поэтому понятия вероятности нечёткого множества не имеет смысла сравнивать на одном уровне абстрагирования.

Если *X* - конечное множество, очевидно, можно сравнивать $P(\{x\})$ с $\mu_A(x)$:

$$\sum_{x\in X} P(\{x\}) = 1 \text{ и } \sum_{x\in X} \mu_A(x) \neq 1$$

В случае, когда $X \subset R$, приходится сталкиваться со следующими трудностями.

Для $(a,b] \subset R$, $P((a,b]) = \int_a^b P(x)dx$

где *P(x)* - плотность вероятности.

При этом очевидно, что $\forall x \in R : P(\{x\}) \neq 0$, когда $P(x) \neq 0$.

Нетрудно увидеть, что понятие плотности вероятности и функция принадлежности сравнимы. В то время, как вероятностная мера является шкалой для из мерения неопределённости типа случайности, а нечёткой множество являются субъективными шкалами для нечёткости.

2.6.8. Законы нечёткой композиции

Пусть *E* - универсальное множество. Также как и в п.2.6.7, обозначим через $\Im(E)$ множество нечётких подмножеств множества *E.* В раде работ установлено, что если *n=cardE* и *m=cardM* - конечны, то $\Im(E)$ - конечно, где *M=[0,1]*

Тереръ можно определить законы композиции.

Определение 6.14. Отображение из $\Im(E) \times \Im(E)$ в $\Im(E)$, т.е. каждой упорядоченной паре $(\widetilde{A}, \widetilde{B}), (\widetilde{A} \subset E, \widetilde{B} \subset E)$ поставить в соответствие единственное нечёткое подмножество $\widetilde{C} \subset E$, будем называть законом нечёткой внутренней композиции на $\Im(E)$

Определение 6.15. Пусть E_1, E_2 и E_3 - три универсальных множества. Если каждой упорядоченной паре (A_1, A_2), $A_1 \subset E_1$, $A_2 \subset E_2$ можно поставить в соответствие одно и только одно подмножество $A_3 \subset E_3$, то это соответствие называется законом внешней нечёткой композиции при условии, что $E_3 \neq E_1$ или (и) $E_3 \neq E_2$.
Если же $E_1 = E_2 = E_3$, то имеем закон внутренней композиции.
Если m и n конечные, то посредством этих условий описывают конечній группоид (и бесконечный) группоид, если m или(и) n - не конечно.

Пример 6.16. Пусть $E=\{A,B\}$ и $M=\{0,\frac{1}{2},1\}$

$$\Im(E)=\{(A/0;B/0)\},\left\{(A/0),\left(B/\frac{1}{2}\right)\right\},\left\{\left(A/\frac{1}{2}\right),(B/0)\right\},$$

$$\left\{\left(A/\frac{1}{2}\right),\left(B/\frac{1}{2}\right)\right\},\ldots\{(A/1),(B/1)\}$$

Для упрощения записи для $\tilde{X} \subset E$ вместо $\{(A/\mu_{\tilde{x}}(A)),(B/\mu_{\tilde{x}}(B))\}$ будем писать $\{\mu_{\tilde{x}}(A),\mu_{\tilde{x}}(B)\}$. Таким образом, получим следующий группоид:

Таблица 6.14

$\mathfrak{I}(E) \backslash \mathfrak{I}(E)$	$0;0$	$0;\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2};0$	$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$	$0;1$	$\frac{1}{2};1$	$\frac{1}{2};1$	$1;\ \frac{1}{2}$	$1;1$
$(0;0)$	$0;1$	$\frac{1}{2};0$	$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$	$1;\ \frac{1}{2}$	$0;1$	$0;1$	$1;\ \frac{1}{2}$	$1;1$	$1;\ \frac{1}{2}$
$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$1,0$	$0;\ \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2};0$	$\frac{1}{2};1$	$0;0$	$1;0$	$0;1$	$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2};1$
$\left(\frac{1}{2};0\right)$	$0;0$	$1;\ \frac{1}{2}$	$0;\ \frac{1}{2}$	$0;1$	$1;\ \frac{1}{2}$	$1;1$	$1;1$	$1;1$	$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$
$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	$1;1$	$0;0$	$1;1$	$\frac{1}{2};1$	$1;0$	$1;0$	$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$	$0;\frac{1}{2}$	$0;0$
$0;1$	$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$	$0;\frac{1}{2}$	$0;\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2};0$	$\frac{1}{2};0$	$1;0$	$\frac{1}{2};0$	$1;\ \frac{1}{2}$	$1;\ \frac{1}{2}$
$1;0$	$\frac{1}{2};0$	$0;0$	$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$	$0;1$	$1;0$	$0;1$	$1;1$	$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2};1$	$0;0$	$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$	$0;1$	$0;\frac{1}{2}$	$1;0$	$1;0$	$\frac{1}{2};1$	$1;\ \frac{1}{2}$	$1:1$
$1;\ \frac{1}{2}$	$0:0$	$\frac{1}{2};1$	$0;\frac{1}{2}$	$0;0$	$1;\ \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2};1$	$0:0$	$0;\ \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2};0$
$1;1$	$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$	$0;1$	$0;1$	$1;1$	$1;0$	$1;0$	$\frac{1}{2};1$	$0;\ \frac{1}{2}$	$1;\ \frac{1}{2}$

Для построения нечёткого группоида достаточно задать универсальное множество *E*. Конечное или нет, образовать $\mathfrak{I}(E)$ явно или нет и определить закон, который каждой упорядоченной паре нечётких подмножеств $(\widetilde{A}\widetilde{B})$ ставит в соответствие одно и только одно нечёткое подмножество $\widetilde{c}(\widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{C} \subset E)$.

Пример 6.17.

$\widetilde{A} * \widetilde{B} = \widetilde{A} \bigcap \widetilde{B}$, т.е.

$$\mu_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}} \min\left(\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(x)\right) = \mu_{\widetilde{A}}(x) \wedge \mu_{\widetilde{B}}(x) \qquad (6.149)$$

Рассмотрим пример нечёткой внешней композиции.

Пример 6.18. Пусть $E_1\{A;B;C\};\ cordE_1=3$

$$M_1=\left\{0;\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{3}{4};1\right\}\quad cardM_1=5$$

$$E_2=\{a;b;c;d\}\qquad cardE_2=4$$

$$M_2=\left\{0;\frac{1}{2};1\right\}\qquad cardM_2=3$$

$$E_3=\{\alpha;\beta\}\qquad cardE_3=2$$

$$M_3=\left\{0;\frac{1}{3};\frac{2}{3};1\right\}\qquad cardM_3=4$$

Пусть $\widetilde{A}_1\subset E_1$ и $\widetilde{A}_2\subset E_2$ каждой упорядоченной паре $(\widetilde{A}_1\widetilde{A}_2)$ поставим в соответствие одно и только одно подмножество $A_3\subset E_3$ с помощью таблицы. А именно, пусть

$$\left.\begin{array}{l}\widetilde{A}_1=\left\{\left(A/\frac{1}{4}\right),\left(B/\frac{1}{2}\right),(c/1)\right\}\text{ , об оз нач ается }\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};1\right)\\ \widetilde{A}_2=\left\{(a/0),\left(B/\frac{1}{2}\right),(c/0),(d/1)\right\}\text{ об оз нач ается }\left(0;\frac{1}{2};0;1\right)\end{array}\right\}\qquad(6.150)$$

Предположим, что таблица этим двум подмножествам ставит в соответствие третье подмножество

$$\widetilde{A}_3=\left\{\left(\alpha/\frac{1}{3}\right);(\beta/1)\right\}\text{ об оз нач ается }(1/3;1)$$

таблица будет содержать $5^3\times3^4$=125×81 случаев. На рис. 6.12 приведён небольшой фрагмент этой таблицы.

$\Im(E_2)$ \ $\Im(E_1)$	…….	$\left(0;\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$	$\left(0;\frac{1}{2};0;1\right)$	$\left(0;\frac{1}{2};1;0\right)$	……..
$\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};0\right)$	…..	$\left(0;\frac{1}{3};\right)$	$\left(1;\frac{1}{3};\right)$	$\left(1;\frac{1}{3};\right)$	……
$\left(\frac{1}{4};1;\frac{1}{2};\right)$	….	$\left(\frac{2}{3};1\right)$	$\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3};1\right)$	…..
$\left(\frac{1}{4};1;1\right)$	….	$\left(0;\frac{2}{3}\right)$	$(0;0)$	$\left(1;\frac{1}{3}\right)$	……
………	….	………	………	………	…….

Рис. 6.15

Пример 6.19. Рассмотрим предыдущий пример для закона

$$\left.\begin{aligned}\mu_{\tilde{A}_3}(\alpha) &= \underset{x}{\wedge}\underset{y}{\wedge}\left[\mu_{\tilde{A}_1}(x) \vee \mu_{\tilde{A}_2}(y)\right] \\ \mu_{\tilde{A}_3}(\beta) &= \underset{x}{\vee}\underset{y}{\vee}\left[\mu_{\tilde{A}_1}(x) \wedge \mu_{\tilde{A}_2}(y)\right]\end{aligned}\right\} \qquad (6.151)$$

Получим другую композиционную таблицу, на основе которой вычислим элемент $\tilde{\Im}(E_1) \times \tilde{\Im}(E_2)$. Пусть $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ заданы (6.150) Имеем:

$$\mu_{\tilde{A}_3}(\alpha) = \underset{x}{\wedge}\left[\underset{y}{\wedge}\left(\frac{1}{4} \vee 0\right);\left(\frac{1}{4} \vee \frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{4} \vee 0\right);\left(\frac{1}{4} \vee 1\right)\right], \wedge$$

$$\left[\left(\frac{1}{2} \vee 0\right),\left(\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{2} \vee 0\right),\left(\frac{1}{2} \vee 1\right)\right], \wedge\left[(1 \vee 0);\left(1 \vee \frac{1}{2}\right);(1 \vee 0);(1 \vee 1)\right] =$$

$$= \underset{x}{\wedge}\left[\underset{y}{\wedge}\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{1}{4};1\right)\underset{y}{\wedge}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)\underset{y}{\wedge}(1;1;1;1)\right] = \underset{x}{\wedge}\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};1\right) = \frac{1}{4}$$

$$\mu_{\tilde{A}_3}(\beta) = \underset{x}{\vee}\underset{y}{\vee}\left[\left(\frac{1}{4} \wedge 0\right);\left(\frac{1}{4} \wedge \frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{4} \wedge 0\right);\left(\frac{1}{4} \wedge 1\right)\right]\underset{y}{\vee}$$

$$\underset{y}{\vee}\left[\left(\frac{1}{2} \wedge 0\right);\left(\frac{1}{2} \wedge \frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{2} \wedge 0\right);\left(\frac{1}{2} \wedge 1\right)\right]\underset{y}{\vee}\left[(1 \wedge 0),\left(1 \wedge \frac{1}{2}\right),(1 \wedge 0);(1 \wedge 1)\right] =$$

$$= \underset{x}{\vee}\left[\underset{y}{\vee}\left(0;\frac{1}{4};0;\frac{1}{4}\right)\underset{y}{\vee}\left(0;\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)\right]\underset{y}{\vee}\left(0;\frac{1}{2};0;1\right) = \underset{x}{\vee}\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};1\right) = 1$$

Таким об раз ом $\mu_{A_3}(\alpha) = \frac{1}{4}; \mu_{A_3}(\beta) = 1$

Подмножествам $\tilde{A}_1 = \left\{\left(A/\frac{1}{4}\right),\left(B/\frac{1}{2}\right),(C/1)\right\}$ и

$$\tilde{A}_2 = \left\{(a/0),\left(b/\frac{1}{2}\right),(C/0),(d/1)\right\}$$

соответствует $\tilde{A}_3 = \left\{\left(\alpha/\frac{1}{4}\right),(\beta/1)\right\}$

Замечание. Пусть в общем случае M_1 связано с E_1; M_2 связано с E_3. Если $\tilde{\mathfrak{I}}(E_3)$ формируется из $\tilde{\mathfrak{I}}(E_1)$ и $\tilde{\mathfrak{I}}(E_2)$ посредством формулы композиции (6.152). Так для примера (6.19) очевидно, что

$$\mu_{\tilde{A}_3}(x,y) = \mu_{\tilde{A}_1}(x) \odot \mu_{\tilde{A}_2}(y) \qquad (6.152)$$

то M_3 будет выведено из M_1 и M_2 посредством формулы композиции (6.152). Так для примера (5.19) очевидно, что

$$M_3 = M_1 \cup M_2 = M_1 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$$

Раз умеется (6.152) не может рассматриваться как общая формула.
В п.2.6.6 показано, как компонуются интервалы для операций $\wedge$ и $\vee$. Аналогичные процедуры можно применить для других случаев.

Пример 6.20. Построим нечёткий граф, вершины которого - нечёткие подмножества, этим будет определён закон внешней композиции.

Пусть $\tilde{A} \subset E,\ \tilde{B} \subset E$

Каждой упорядоченной паре $(\tilde{A}, \tilde{B}) \in \tilde{\mathfrak{I}}(E) \times \tilde{\mathfrak{I}}(E)$ будет поставлен в соответствие элемент, обозначенный

$$\tilde{A} * \tilde{B} = (\tilde{A}, \tilde{B})$$

Элемент C принимает свои значения во множестве F, определенной операцией *.

Предположим, например, что $E=\{a,b\}$ и $M = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ и, что

$$C(\tilde{A}, \tilde{B}) = [\mu_{\tilde{A}}(a) \wedge \mu_{\tilde{B}}(a)] \vee [\mu_{\tilde{A}}(b) \wedge \mu_{\tilde{B}}(b)] \qquad (6.153)$$

Эта функция определяет значение «С» в

$$F = M = \left[0; \frac{1}{2}; 1\right]$$

Полученный нечёткий граф представлен на рис.6.13. Таким способом можно строить нечёткие графы, которые обладают специфическими свойствами, обусловленными их построением.

Таблица 6.16

	$(0;0)$	$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$(0;1)$	$\left(\frac{1}{2};0\right)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$	$(1;0);$	$\left(1;\frac{1}{2}\right)$	$(1;1)$
$(0;0)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$(0;1)$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1
$\left(\frac{1}{2};0\right)$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\left(\frac{1}{2};1\right)$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$(1,0)$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1
$\left(1;\frac{1}{2}\right)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1
$(1;1)$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1	1

Достоинство представления внешнего закона нечёткой композиции в виде нечёткого графа состоит в том, что элементы (вершины графа) - нечёткие подмножества одного и того же универсального множества.

Возвращаясь к группоидам, рассмотрим основные свойства нечётких группоидов.

Пусть * есть закон внутренней композиции нечёткого группоида, обозначим группоид через $(\Im(E),*)$

1) Если для всех упорядоченных пар $\left(\widetilde{A},\widetilde{B}\right)\in\mathfrak{I}(E)\times\widetilde{\mathfrak{I}}(E)$ выполняется условие

$$\widetilde{A}*\widetilde{B}=\widetilde{B}*\widetilde{A}\ , \tag{6.154}$$

то говорят, что закон внутренней нечёткой композиции коммутативен, а также говорят, что группоид коммутативен. Например, группоид на рис.6.13 коммутативен, в то же время на рис. 6.11 - не коммутативен. Исходя из понятия коммутативности закона для нечётких подмножеств, можно заключить, что если

$$\mu_{\widetilde{A}*\widetilde{B}}(x)=\mu_{\widetilde{A}}(x)\odot\mu_{\widetilde{B}}(x)$$

то из коммутативности $\odot$ следует коммутативность для * и наоборот.

2) Если $\forall\widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{C}\subset E:\left(\widetilde{A}*\widetilde{B}\right)*\widetilde{C}=\widetilde{A}*\left(\widetilde{B}*\widetilde{C}\right),$ то говорят, что закон ассоциативный, а также группоид ассоциативен.

3) Нечёткий группоид имеет единичный элемент.

Определение 6.16. Будем говорить, что нечёткий группоид с законом коммутации * обладает левой единицей $\widetilde{1}$, если

$$\forall\widetilde{A}\subset E:\widetilde{1}*\widetilde{A}=\widetilde{A},$$

правой единицей, если

$$\forall\widetilde{A}\subset E:\widetilde{A}*\widetilde{1}=\widetilde{A} \tag{6.155}$$

и имеет единицу, если

$$\forall\widetilde{A}\subset E:\widetilde{1}*\widetilde{A}=\widetilde{A}*\widetilde{1}=\widetilde{A}$$

Например.

Для $\forall x\in\left\{0;\frac{1}{2};1\right\}$ и $\forall y\in\left\{0;\frac{1}{2};1\right\}$ $(1;1)\wedge(1;1)=(x,y)$

Поэтому (1:1) одновременно является левой и правой единицей, т.е. просто единицей группоида примера (6.16).

4) Рассмотрим закон, для которого существует единичный элемент l и пусть $\widetilde{a}$ и $\widetilde{\widetilde{a}}\in E.$

Если $\overline{a}*a=l$, то говорят, что элемент $\overline{a}$ есть левый обратный элемент для «*a*», если $a*\overline{a}'=l$, то говорят, что $\overline{a}'$ есть правый обратный элемент для *a.* Наконец, если $\overline{a}'=\overline{a}$, то $\overline{a}*a*\overline{a}'=l$ и говорят, что $\overline{a}$ есть обратный элемент для *a.* Очевидно, что имеется только один элемент, который в композиции с самим собой даёт (1,1).

Это элемент (1,1). Для всех остальных элементов, таких, что $(a,b) \prec (1;1)$ и $(a',b') \prec (1;1)$ имеем

$$(a,b) \wedge (a',b') \prec (1;1)$$

Следовательно, в группоиде не каждый элемент имеет обратный.
В более общем случае,когда в качестве закона * используется $\bigcup$ или $\bigcap$, обратный элемент не существует.

5) Пусть $*$ и $*'$ представляет собой два закона внутренней композиций, определённых на одном и том же множестве *E*. Если

$$\forall \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C} \subset E : A * \left(\widetilde{B} *' \widetilde{C}\right) = \left(\widetilde{A} * \widetilde{B}\right) * \left(\widetilde{A} * \widetilde{C}\right),$$

то говорят, что закон * дистрибутивен слева относительно закона $*'$. Аналогично, вводится понятие дистрибутивности справа. Если закон * дистрибутивен относительно другого закона $*'$ и слева и справа, то говорят, что он дистрибутивен относительно *. Тогда

$$\left(\widetilde{A} *' \widetilde{B}\right) * \left(\widetilde{C} *' \widetilde{D}\right) = \left(\widetilde{A} * \widetilde{C}\right) *' \left(\widetilde{A} * \widetilde{D}\right) * \left(\widetilde{B} * \widetilde{C}\right) * \left(\widetilde{B} * \widetilde{D}\right)$$

Например, закон $\bigcap$ дистрибутивен относительно $\bigcup$ и наоборот, закон $\bigcup$ дистрибутивен относительно $\bigcap$. Для закона $\oplus$

$$\widetilde{A} \oplus \widetilde{B} = \left(\widetilde{A} \cap \overline{\widetilde{B}}\right) \bigcup \left(\overline{\widetilde{A}} \cap \widetilde{B}\right)$$

относительно $\bigcap$ или $\bigcup$ свойство дистрибутивности не имеет место.

6) Пусть $D \subset \Im(E)$, причем $\Im(E)$ наделено законом *. Если для каждой упорядоченной пары $\left(\widetilde{A}, \widetilde{B}\right) \in D \times D$, $\widetilde{A} * \widetilde{B} \in D$, то говорят, что D относительно *. Например, подмножество $D_1 = \left\{(0,0), \left(0; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right), (1,0)\right\}$, замкнуто относительно $\bigcap$. Это можно видеть на рис.6.11.

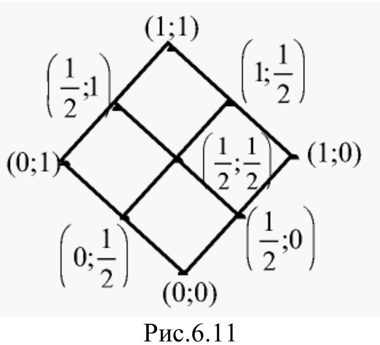


Рис.6.11

С другой стороны, подмножество

$$D_2=\left\{\left(0;\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2};0\right),\left(\frac{1}{2};1\right),\left(1;\frac{1}{2}\right)\right\}$$

не замкнуто относительно $\bigcap$. Такое же правило применимо и для операции $\bigcup$, но только следует рассмотреть верхние границы. Например, подмножество D_1 не замкнуто относительно $\bigcup$, а подмножество D_2 – замкнуто.

Определение 6.17. Любое подмножество $D \subset \widetilde{\Im}(E)$, замкнутое относительно закона * будем называть *подгруппоидом* группоида *(E,* *) и обозначать $D(\subset E, *)$. Например, D_1 - подгруппоид группоида (рис.5.17) относительно закона $\bigcap$, а D_2 - подгруппоид относительно закона $\bigcup$.

Определение 6.18. Ассоциативный нечёткий группоид, имеющий единицу, будем называть *нечётким моноидом.* Если моноид обладает свойством коммутативности, то его будем называть *коммутативным мономидом.* Все следующие нечёткие группоиды, определённые с помощью их функцией принадлежности, являются моноидами.

1. $\left(\widetilde{\Im}(E),\bigcap\right)$, где $\mu_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}}(x)=\mu_{\widetilde{B}}(x)\wedge\mu_{\widetilde{B}}(x),\ \widetilde{A},\widetilde{B}\subset E$

Ассоциативность группоида очевидна. Единицей служит множество *E.*

2. $\left(\widetilde{\Im}(E)\bigcup\right)$, где $\mu_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}(x)=\mu_{\widetilde{A}}(x)\vee\mu_{\widetilde{B}}(x),\ \widetilde{A},\widetilde{B}\subset E$

Ассоциативность группоида $\left(\widetilde{\Im}(E)\bigcup\right)$ очевидна. Единицей служит множество $\varnothing$.

3. $\left(\widetilde{\Im}(E),\bullet\right)$, где $\mu_{\widetilde{A}\bullet\widetilde{B}}(x)=\mu_{\widetilde{A}}(x)\bullet\mu_{\widetilde{B}}(x),\ \widetilde{A},\widetilde{B}\subset E$, ассоциативен с единицей *E.*

4. $\left(\widetilde{\Im}(E),€\right)$, где

$\mu_{\widetilde{A}€\widetilde{B}}(x)=\mu_{\widetilde{A}}(x)+\mu_{\widetilde{A}}(x)-\mu_{\widetilde{A}}(x)\bullet\mu_{\widetilde{B}}(x),\ \widetilde{A},\widetilde{B}\subset E$

5. $\left(\widetilde{\Im}(E),\oplus\right)$, где $\mu_{\widetilde{A}\oplus\widetilde{B}}(x)=\left[\mu_{\widetilde{A}}(x)\wedge\left(1-\mu_{\widetilde{B}}(x)\right)\right]$ $\vee\left[\mu_{\widetilde{B}}(x)\wedge\left(1-\mu_{\widetilde{A}}(x)\right)\right],\ \widetilde{A},\widetilde{B}\subset E$ ассоциативно с единицей $\varnothing$.

Рассмотрим пример нечёткого группоида, который не является моноидом.

Пример 6.21. Пусть $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ определяется соотношением

$\mu_{\widetilde{A}*\widetilde{B}}(x)=\left|\mu_{\widetilde{A}}(x)-\mu_{\widetilde{B}}(x)\right|$

Положим $a=\mu_{\widetilde{A}}(x),\quad b=\mu_{\widetilde{B}}(x)$ и $c=\mu_{\widetilde{C}}(x)$ и обозначим

$a \cdot b = |a-b|$. Легко показать, что $(a \odot b) \odot c \neq a \odot (b \odot c)$,
т.е. $\|a-b|-c| \neq |a-|b-c\|$

В частности, если a=0,4,b=0,7,c=0,8, то

$$\|a-b|-c| \neq \|0{,}4-0{,}7|-0{,}8| = |0{,}3-0{,}8| = 0{,}5$$

$$|0{,}4-|0{,}7-0{,}8\| = |0{,}4-0{,}1| = 0{,}3$$

Этот коммутативный группоид не моноид, поскольку не обладает свойством ассоциативности.

Определение 6.19. Пусть $\left(\tilde{\mathfrak{I}}(E),*\right)$- нечёткий моноид и $D \subset \tilde{\mathfrak{I}}(E)$ - замкнуто относительно закона *, тогда D будем называть *нечётким подмоноидом* моноида и обозначим (D, *).

Пример 6.22. Рассмотрим моноид $\left(\tilde{\mathfrak{I}}(E),\cup\right)$ на рис. 6.12 (а)

Таб лица 6.17

$\cup$	$(0;0)$	$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};0\right)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$
$(0;0)$	$(0;0)$	$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};0\right)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$
$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$
$\left(\frac{1}{2};0\right)$	$\frac{1}{2};0$	$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};0\right)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$
$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{1}{2};1\right)$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$

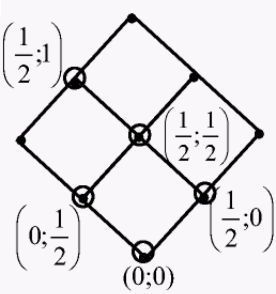


Рис. 6.12

Подмоноиды этого моноида представлены на рис.6.13 и 6.14. Причем

$$D_1 = \left\{(0{,}0),\left(\frac{1}{2};1\right)\right\};\ D_2 = \left\{(0;0),\left(0;\frac{1}{2}\right),\left(1;\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$\cup$	$(0;0)$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$
$(0;0)$	$(0;0)$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$
$\left(\frac{1}{2};1\right)$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$

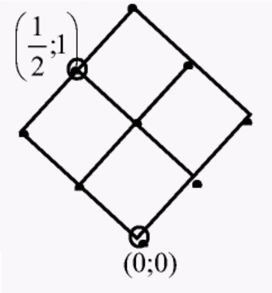


Рис.6.13

$\cup$	$(0;0)$	$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$\left(1;\frac{1}{2}\right)$
$(0;0)$	$(0;0)$	$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$\left(1;\frac{1}{2}\right)$
$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$\left(1;\frac{1}{2}\right)$
$\left(1;\frac{1}{2}\right)$	$\left(1;\frac{1}{2}\right)$	$\left(1;\frac{1}{2}\right)$	$\left(1;\frac{1}{2}\right)$

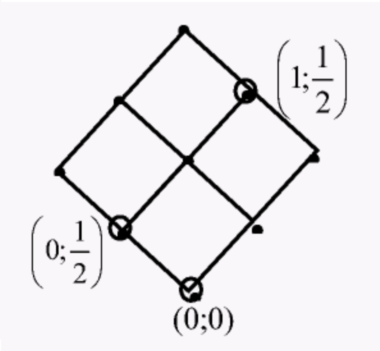


Рис.6.14

Известно, что группа представляет собой моноид, в котором для каждого элемента существует и притом единственный обратный элемент. Можно задать следующий вопрос: существуют ли реально группы, которые являются нечёткими, если рассматривать операции $\cap, \cup, \bullet$, €, $\oplus$?

Рассмотрим операции $\wedge$ (минимум), $\vee$ (максимум), $\bullet$ (произведение), € (алгебраическая сумма), $\oplus$ (дизъюктивная сумма). Каждая из этих операций ассоциативна и для каждого существует единица, роль которой в зависимости от случая играет 0 и 1; однако почти одинаково для каждой из этих операций не существует обратный элемент. Рассмотрим операцию $\wedge$. Пусть $(a,b) \in M \times M$, где $M = [0;1], 0 < a < b < 1$. Единицей для операции $\wedge$ служит 1.

Существует ли такое *a* или *b*, что $a \wedge b = 1$? Нет, не существует, поскольку, $a \wedge b = a < 1$.

С другой стороны, если взять $M=\{0;1\}$, то групповая структура воз можна.

$\wedge$

	0	1
0	0	0
1	0	1

Это не группа. Единич ный элемент 1, но 0 не имеет об - ратного элемента.

$\vee$

	0	1
0	0	1
1	1	1

Это не группа. Единич ный элемент 0, но 1 не имеет об - ратного.

$\oplus$

	0	1
0	0	1
1	1	0

Это группа. Единич ный элемент 0. 0 есть об ратный элемент 0, 1- об ратный эле- мент для 1.

$\overline{\oplus}$

	0	1
0	1	0
1	0	1

Это группа. Единич ный элемент 1, 0 – об ратный элемент 0, 1 имеет об - ратный элемент 1.

2.7. Нечеткий анализ

2.7.1. Нечеткая функция

Всвязи с тем, что в классической математике функцию следует рассматривать как зависимую переменную, прежде чем перейти к нечеткой функции, введем понятие нечеткой переменной. Следуя Л.Заде имеем следующее.

Определение 7.1. Нечеткой переменной будем называть переменную, которая характеризуется тройкой (X,E, $R(x, \chi)$), где X - название переменной, E - универсальное множество (конечное или бесконечное, χ - общее название элементов множества E, $R(x, \chi)$ - нечеткое ограничение назначения переменной χ , обусловленное x.

Как и в случае обычных нечетких переменных вместо $R(x,\chi)$ будем, как правило, писать сокращенно $R(x)$, где x - общее название значений переменной

Уравнение назначения длях имеет вид:

$$X=x:R(x) \tag{7.1}$$

или, что эквивалентно $x= \chi,\ \chi \in R(x)$ и отражает то, что элементу x назначается значение χ с учетом ограничения $R(x)$.

Определение 7.2. Степень, с которой удовлетворяется равенство (7.1) будем называть совместимостью значения χ с $R(x)$ и обозначать

$$C(\chi) \underset{R(x)}{=} \mu(x), \quad \chi \in E \tag{7.2}$$

Замечание. Важно отметить, что совместимость значения χ не есть вероятность значения χ. Совместимость χ с *R(x)* - это лишь мера того, насколько значение χ удовлетворяет ограничению *R(x).* Она не имеет никакого отношения к тому, насколько вероятно или не вероятно это значение.

Пример 7.1. Рассмотрим нечеткую переменную, именуемую бюджет. Пусть $E=[0,\infty)$, $R(x)$ определяется следующим образом:

$$R(\text{б юджет})=\bigcup_{0}^{1000} 1/x + \bigcup_{1000}^{\infty}\left(1+\left(\frac{\chi-1000}{200}\right)^{2}\right)^{-1} \Big/ \chi$$

Тогда в уравнении назначения бюджет=1100:R (бюджет). Совместимость значения 1100 с ограничением R (бюджет) равна

$$C(1100) \underset{R(\text{бюджет})}{=} \mu(1100) = 0{,}8$$

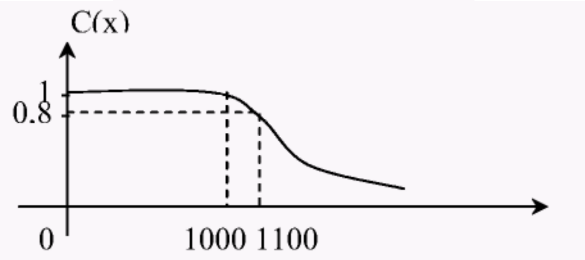


Рис.7.1. Функция совместимости нечеткой переменной (бюджет).

С другой стороны, исходя из понятия области изменения обычной (четкой) переменной можно ввести (и придерживаться) следующее понятие нечеткой переменной.

Определение 7.3. Независимую переменную, область изменения которой есть нечеткое множество, будем называть <u>нечеткой переменной</u>

При этом, если учесть определение нечеткого множества (4.3), то легко установить эквивалентность определений (7.1) и (7.3).

Действительно: если $\tilde{x}$ - нечткое множество и в то же время является областью изменения нечеткой переменной *x*, то это означает, что *x* принимает нечеткое значение

$$\widetilde{x} = \{x, \mu_{\widetilde{x}}(x) > 0, x \in X\}.$$

Теперь, если в качестве нечеткого ограничения на значение переменной x взять $\mu_{\widetilde{x}}(x) > 0,$ то из определения 7.3 получаем определение (7.1). Проведя обратное рассуждение, из определения (7.1) получим определение (7.3).

Перейдем теперь к введению понятия нечеткой функции.

Следует отметить, что различными авторами монографий по нечетким множествам приводится различные понятия нечеткой функции. Но при ознакомлении с этими понятиями убеждаемся, что во всех случаях приведенные определения нечеткой функции расплывчатые, т.е. эти определения либо неоднозначно характеризуют сущность нечеткой функции, либо почти совпадают с понятием четкой функции. Это связано с тем, что при введении понятия нечеткой функции следует придерживаться сущности термина функции и не путать его с понятием области определения функции. Как известно, функция - это соответствие $f{:}X \to Y,$ которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет единственный элемент $y \in Y$. При этом X - область определения функции $y=f(x)$, Y - область значений этой функции.

Приведенное определение функции одной переменной не характеризует степень ее четкости. Поэтому возникает необходимость привести четкие определения как четкой, так и нечеткой функции.

Определение 7.4. Функцию $y=f(x)$ будем называть четкой если каждому четкому элементу $x \in X$ сопоставляется единственный четкий элемент $y \in Y$

Определение 7.5. Функцию $\widetilde{y} = \widetilde{f}(x),$ будем называть <u>нечеткой функцией</u>, если каждому четкому $x \in X$ сопоставляется <u>нечеткий</u> элемент $\widetilde{y} \in \widetilde{Y}$. Где $\widetilde{Y}$ - нечеткое подмножество некоторого универсального множества *Y*. Из этого определения следует, что нечеткая функция отличается от четкой тем, что при действии четкой функции на элемент з аданного множества, он отображается на элемент той же четкости другого множества, а при действии нечеткой функции четкость отображения из меняется, т.е. если f и $\widetilde{f}$ соответственно четкая и нечеткая функции, отображающие $A \subset X$ в $B \subset Y$ и $\widetilde{B} \subset Y$ соответственно, то $\mu_{\widetilde{B}}(y) < \mu_{B}(y)$. Подмножества *B* и $\widetilde{B}$ состоят из элементов $y \subset Y,$ которые входят в *B* с разными значениями функции принадлежности. Следует различать два вида нечетких функций:

1) нечеткая функция с четким аргументом $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$

2) нечеткая функция с нечетким аргументом $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$, области определения которых есть соответственно четкое и нечеткое множества.

Следует отметить, что каждая из указанных типов нечетких функций (также как и четкое функция) может быть действительной функцией действительной переменной, комплексной функцией с действительной и комплексной переменной, а также однозначной и многозначной.

Также как и четкая функция, нечеткая функция может быть задана тремя способами: аналитическим, табличным и графическим способами.

I. Аналитическим называется способ, когда функция задается в виде аналитического выражения.

Определение 7.6. Аналитическим выражением называется символическое обозначение совокупности известных математических операций, которые производятся в определенной последовательности над числами и буквами, обозначающими постоянные переменные величины.

Из определения аналитического выражения следует, что если функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ - нечеткая функция, то известные математические операции (в определенной последовательности) производятся над нечеткими постоянными и переменными величинами. При этом каждое число и каждая буквенная величина может иметь различные значения функции принадлежности (могут входить в выражение функции с различной степенью четкости), что может соответствовать выполнению нечетких математических действий. Поэтому, если нечеткая функция *f* (как действие на ее аргумент) есть сложная функция, т.е. состоит из элементарных функций (элементарных действий) $\{\varphi_n\}$ с функциями принадлежности $\mu(\varphi_n)$, то

$$\alpha = \mu(f) = \min_{n \in N} \mu(\varphi_n) \qquad (7.3)$$

где α - степень четкости *f*; *N* - количество элементарных математических действий, из которых состоит действие функции *f* на ее аргумент. Наряду с этим, следует иметь ввиду, что если нечеткая функция действительной переменной является сложной нечеткой функцией, промежуточный аргумент которой есть нечеткая функция, то промежуточный аргумент рассматривается как нечеткая функция четкого аргумента, а основная функция - как нечеткая функция нечеткого аргумента.

II. Табличный способ задания нечеткой функции заключается в том, что двустрочная (двухстолбцовая) таблица. На первой из которых задаются значения аргумента вместе со значениями их степени четкости (т.е. со значениями функций принадлежности значений функций принадлежности значений аргумента их области определения нечеткой функции), а на второй - соответствующие значения нечеткой функции вместе с их степенями четкости (т.е. со значениями функции принадлежности этих значений области изменения нечеткой функции).

III. Графический способ задания нечеткой функции одной переменной заключается в том, что на координатной плоскости задаются два однопараметрических семейства линий, зависящих от одного и того же параметра α (где α-уровень или степень четкости нечеткой функции).

Причем линии обеих семейств, соответствующих одному и тому значению α расположены относительно линии (описываемой четкой функцией той же структуры, что и нечеткая функция) соответствующей значению параметра α=1.

Наряду с этим из представления нечеткого числа следует, что при каждом значении аргумента нечеткой функции, значение, принимаемое ею, принадлежит интервалу, центр которого соответствует значению четкой функции той же структуры, что и данная нечеткая функция при том же значении аргумента, а радиус интервала равен длине левого (правого) растяжения нечеткого числа. По-этому график нечеткой функции одной переменной представляет собой линию, целиком лежащую внутри полосы, осью симметрии которой есть линия, описываемая четкой функцией той же структуры, что и сама нечткая функция. Но так как функция, описывающая на плоскости некоторую плоскую полосу есть ничто иное как интервальная функция, зависящая от непрерывного параметра, то нечеткую функцию L-R-типа можно рассматривать как интервальную функцию непрерывного параметра при его фиксированном значении. При этом фиксированное значение параметра равно значению степени четкости нечеткой функции: $\alpha = \underset{y}{\mu}(f)$.

Как из вестно из интервального анализа интервальнозначная функция представляется тремя способами:

1) с помощью математических операций над нечеткими числами и переменными (аналогично классическим представлением четких функций);

2) с помощью двух функций, зависящих от параметра «α» и четкого аргумента, образующую левый и правый пределы интервала изменения значений нечеткой функции при фиксированном значении «α».

$$\begin{aligned}&[f_L(\alpha,x); f_R(\alpha,x); \quad x\in X,\ \alpha\in(0,1)]\\&[f_L(\alpha,x); f_R(\alpha,x)]\subset[f_L(0;x); f_R(0,x)]\\&f_L(1,x)=f_R(1,x)=f(x)\end{aligned} \quad (7.4)$$

где *f(x)* - четкая функция той же структуры, что и представляемая нечеткая функция;

3) с помощью четкой функции той же структуры, что и представляемая нечеткая функция и функций отклонения от нечеткой функции, т.е.

$$\tilde{f}(\alpha,x)=\{f(x), m_L(\alpha,x), m_R(\alpha,x)\} \quad (7.5)$$

где

$$m_L(\alpha,x)=f(x)-f_L(\alpha,x);\ m_R(\alpha,x)=f_R(\alpha,x)-f(x) \quad (7.6)$$

Отметим, что задача о представлении нечеткой функции с двумя граничными вещественными (четкими) функциями состоит в нахождении представления

$$\tilde{f}(\alpha,x)=\{f_L(\alpha,x);\ f_R(\alpha,x)\} \quad (7.7)$$

В ряде работ доказывается, что всякую однозначную интервальную функцию $\tilde{f}(\alpha,x)$ единственным образом можно представить через граничные вещественные функций $f_L(\alpha,x)$ и $f_R(\alpha,x)$.

Поэтому из интервальнозначности нечетких функций следует, что всякую нечеткую функцию можно представить через граничные вещественные функции, которыми являются функции $f_L(\alpha,x)$ и $f_R(\alpha,x)$.

Проиллюстрируем представление нечеткой функции четкого аргумента на рациональной функции в виде квадратного трехчлена.

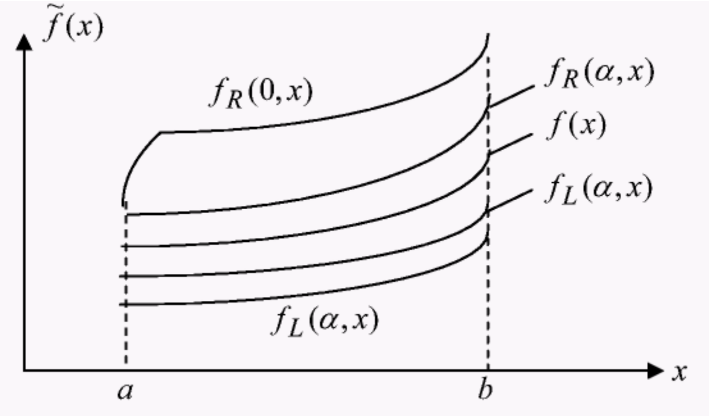


Рис.7.2 Интервальная нечеткая функция

$$\widetilde{f}(x) = X^2 + \widetilde{a}_1 x + \widetilde{a}_2; \quad \widetilde{a}_1 = (a_{L_1}; a_{R_1}); \ \widetilde{a}_2 = \{a_{L_2}; a_{R_2}\}$$

на отрезке $[\widetilde{a}; \widetilde{b}\ ]$, где $\widetilde{a} = \{a_L; a_R\}; \widetilde{b} = \{b_L; b_R\}$.

Тогда, учитывая, что для любого из чисел

$$a_L(\alpha) = \alpha a - (1-\alpha)a_L; \ a_R(\alpha) = \alpha a + (1-\alpha)a_R$$

имеем:

$$\widetilde{f}(\alpha, x) = x^2 + \widetilde{a}_1(\alpha)x + \widetilde{a}_2(\alpha) = \{x^2 + a_{L_1}(\alpha)x + a_{L_2}(\alpha)\};$$

$$x^2 + a_{R_1}^{(\alpha)} + a_{R_2}^{(\alpha)} =$$

$$= \{x^2 + (a_1 - (1-\alpha)a_{L_1})x + (a_2 - (1+\alpha)a_{L_2});$$

$$x^2 + (xa_1 + (1-\alpha)a_{R_1})x + (a_2 + (1-\alpha)a_{R_2})\}$$

т.е.

$$\left.\begin{aligned} f_L(\alpha, x) &= X^2 + (a_1 + (1-\alpha)a_{L_1})x + (a_2 + (1-\alpha)a_{L_2}) \\ f_R(\alpha, x) &= X^2 + (\alpha a_1 + (1-\alpha)a_{R_1})x + (\alpha a_2 + (1-\alpha)a_{R_2}) \end{aligned}\right\} \quad (7.8)$$

Отметим, что так как любое значение из левого расширения нечеткого числа меньше любого значения из его правого расширения, то в зависимости от знака коэффициентов в $\widetilde{a}_1(\alpha)$ и $\widetilde{a}_2(\alpha)$ выражения (7.8) должны быть таковы для любого $x \in [\widetilde{a}, \widetilde{b}\,]$ и любых $\alpha \in [0,1]$

$$f_L(\alpha, x) \le f_R(\alpha, x) \quad (7.9)$$

Следует отметить, что если степень четкости функции $\tilde{f}$ есть $\alpha = \underset{\tilde{B}}{\mu}(f)$, а $\underset{A}{\mu}(x_1) = \beta$,то степень четкости элемента $y_1 = f(x_1)$ есть

$$\underset{\tilde{B}}{\mu}(y_1) = \alpha \cdot \beta \tag{7.10}$$

где $\tilde{B}$ - нечеткое подмножество универсального множества *Y*. Поэтому, для любых $\alpha,\beta \in [0,1]$ и $x \in \tilde{A} \subset X$ для монотонно возрастающей нечеткой функции

$$f_L(\alpha, x_L(\beta)) < f_L(\alpha, x) < f(x) < f(x) < f_R(\alpha, x) < f_R(\alpha, x_R(\beta))$$

Из соотношения (7.9) следует, что график функции $f_L(\alpha, x)$ лежит ниже графика функции $f_R(\alpha, x)$ для $\forall \alpha \in (0,1)$, а при $\alpha=1$ графики этих функций совпадают и образуют график четкой функции той же структуры, т.е. график функции $y=f(x)$.

Представим теперь нечеткую функцию $\tilde{f}(\alpha, x)$ третьим способом.

Из (7.8) имеем:

$$f_L = (1, x) = f_R(1, x) = f(x) = x^2 + a_1 x + a_2 \tag{7.11}$$

$$m_L(\alpha, x) = f(x) - f_L(\alpha, x) = (1-\alpha)(a_L x + a_{L_2}) \tag{7.12}$$

$$m_R(\alpha, x) = f_R(\alpha, x) - f(x) = (1-\alpha)(a_{R_1} x + a_{R_2}) \tag{7.13}$$

При этом

$$\tilde{f}(\alpha, x) = \{f(x);\, m_L(\alpha, x),\, m_R(\alpha, x)\} \tag{7.14}$$

Следует отметить, что

1) если $m_L(x) = m_R(x)$,то

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[f_L(x) + f_R(x)\right] \tag{7.15}$$

2) если $m_L(x) \neq m_R(x)$, то следует взять

$$f(x) = \frac{f_L(x) \cdot m_R(x) + f_R(x) m_L(x)}{m_L(x) + m_R(x)} \tag{7.16}$$

Пример 7.2. Рассмотрим нечеткую функцию четкого аргумента.

$$\tilde{f}(x) = X^3 - [1;4]X^2 + [3;5]x - [6;9] \text{ на } [a, b] = [0;5]$$

Представим $\tilde{f}(x)$ вторым и третьим способами и построим ее схематический график.

Имеем, пусть коэффициент заданной нечеткой функции есть нечеткие числа, которые имеют одинаковые левые и правые растяжения. Тогда, на основании (7.15)

$$f(x) = x^3 - 2{,}5x^2 + 4x - 7{,}5$$

$$f_L(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 9$$

$$f_R(x) = x^3 - x^2 + 5x - 6$$

Тогда

$$\tilde{f}(x) = \{x^3 - 4x^2 + 3x - 9;\ x^3 - x^2 + 5x - 6\}$$

$$m_L(x) = 1{,}5x^2 + x + 1{,}5$$

$$m_R(x) = 1{,}5x^2 + x + 1{,}5$$

Поэтому,

$$\tilde{f}(x) = \{x^3 - 2{,}5x^2 + 4x - 7{,}5;\ 1{,}5x^2 + x + 1{,}5\}$$

Для люб ых $\alpha \in [0,1]$

$$f_L(\alpha, x) = x^3 - (2{,}5 + (1-\alpha)1{,}5)x^2 + (4 - (1-\alpha))x - (7{,}5 + (1-\alpha)1{,}5)$$

$$f_R(\alpha, x) = x^3 - (2{,}5 - (1-\alpha)1{,}5)x^2 + (4 + (1-\alpha))x - (7{,}5 - (1-\alpha)1{,}5)$$

$$m_L(\alpha, x) = f(x) - f_L(\alpha, x) = (1-\alpha)1{,}5x^2 + (1-\alpha)x + (1-\alpha)1{,}5$$

$$m_R(\alpha, x) = (1-\alpha)1{,}5x^2 + (1-\alpha)x + (1-\alpha)1{,}5$$

$$m_L(\alpha, x) = m_R(\alpha, x)$$

Приведем геометрическую интерпретацию $\tilde{f}(x)$ на [0;5].

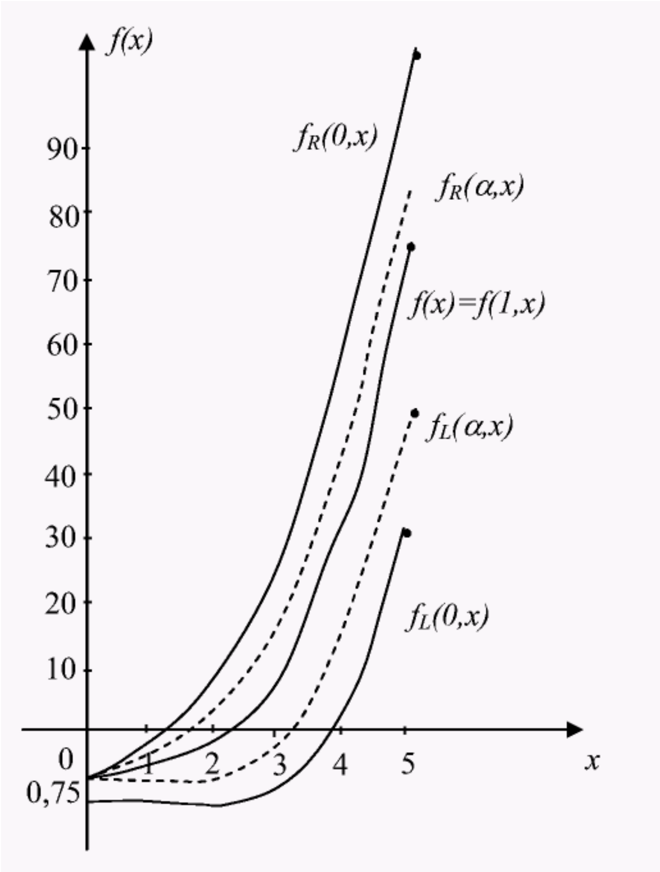


Рис.7.3

Из рис. 7.3 очевидно, что значение $\alpha=\mu(f)$ монотонно уменьшается с увеличением расстояния от графика четкой функции 9 являющейся ядром нечеткой функции.

В ряде работ введены понятия интервального расширения четкой функции и сужения интервальной функции.

Для нечеткой функции аналогичным образом можно ввести понятия сужения и расширения нечеткой функции, т.е.

1) Сужение нечеткой функции

$$\underset{\substack{\tilde{\alpha}\to\alpha \\ \tilde{x}\to x}}{Rs}\ \tilde{f}(\alpha,\tilde{x})=f(\alpha,x) \qquad (7.17)$$

2) интервальное расширение неч еткой функции

$$\underset{\substack{\alpha\to\tilde{\alpha}\\ x\to\tilde{x}}}{Dif}\ (\alpha,x)=\tilde{f}(\tilde{\alpha},\tilde{x}) \qquad (7.18)$$

где $f(\alpha,x)$ - наиболее четкое значение нечеткой функции.

Пример 7.3. Найдем сужение нечеткой функции (приведенной в примере 7.2) до уровня $\alpha=0,1$ Имеем:

$$\underset{\alpha\to0,9}{Rs}\ f_L(\alpha,x)=\underset{\alpha\to0,9}{Rs}\{x^3-(2,5+(1-\alpha)1,5)x^2+$$
$$+(4-(1-\alpha))x-(7,5+(1-\alpha)1,5)\}=$$
$$=x^3-2,65x^2+3,9x-7,65$$

$$\underset{\alpha\to0,9}{Rs}\ f_R(\alpha,x)=\underset{\alpha\to0,9}{Rs}\{x^3-(2,5+(1-\alpha)1,5)x^2+$$
$$+(4+(1-\alpha))x-(7,5-(1-\alpha)1,5)\}=$$
$$=x^3-2,35x^2+4,1x-7,35$$

Следовательно,

$$\tilde{f}(0,9;x)=\{x^3-2,65x^2+3,9x-7,65;x^3-2,35x^2+4,1x-7,35\}$$

$$\underset{\alpha\to0,1}{Di}\ f_L(\alpha,x)=\underset{\alpha\to0,1}{Di}\{x^3-(2,5+(1-\alpha)1,5)x^2+$$
$$+(4-(1-\alpha))x-(7,5+(1-\alpha)1,5)\}=x^3-3,85x^2+3,1x-8,85$$

$$\underset{\alpha\to0,1}{Di}\ f_R(\alpha,x)=\underset{\alpha\to0,1}{Di}\{x^2-(2,5-(1-\alpha)1,5)x^2+$$
$$+(4+(1-\alpha))x-(7,5-(1-\alpha)1,5)\}=x^3-1,15x^2+4,9x-6,15$$

Следовательно,

$$\tilde{f}(0,1;x)=\{x^3-3,85x^2+3,1x-8,85;\ x^3-1,15x^3+4,9x-6,15\}$$

Аналогично рассматриваются примеры сужения и расширения нечеткой функции нечеткого аргумента.

2.7.2. Предел и непрерывность нечеткой функции

Рассмотрим изменение нечеткой функции при стремлении ее аргумента к конечному значению, либо к бесконечности.

Так как на множестве нечетких функций, определяемых на одном и том же множестве (в одном и том же интервале), каждая из нечетких функций отличается от других нечетких функций значением степени нечеткости (уровень нечеткости), то говоря о понятиях предела и непрерывности нечеткой функции, следует конкретизировать для каких нечетких функций вводятся эти понятия.

Определение 7.7. Пусть нечеткая функция $\widetilde{f}(\alpha,x)$ определена в некоторой окрестности точки *a* или в некоторых точках этой окрестности. Нечеткую величину $\widetilde{A}(\alpha)$ будем называть пределом функции $\widetilde{f}(\alpha,x)$ четкости α в точке =*a,* если для любого ε>0, как бы оно мало ни было, можно указать такое положительное число δ, что для всех *x*, отличных от *a* и удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$ имеет место неравенство

$$|f(\alpha,x)-A(\alpha)|<\varepsilon \tag{7.19}$$

и обозначим $\lim\limits_{x-a}\widetilde{f}(\alpha,x)=\widetilde{A}(\alpha)$

Учитывая, что для любого нечеткого числа (нечеткой величины) его любое значение из левого расширения меньше любого значения из его правого расширения, говоря о пределе нечеткой функции, следует иметь ввиду, что речь конкретно идет о выполнении соотношений

$$\lim_{x\to a}\widetilde{f}_L(\alpha,x)=\widetilde{A}_L(\alpha) \tag{7.20}$$

или

$$\lim_{x\to a}\widetilde{f}_R(\alpha,x)=\widetilde{A}_R(\alpha) \tag{7.21}$$

Замечание. Также как и для четких функций для нечетких функций $\widetilde{f}_L(\alpha,x)$ и $\widetilde{f}_R(\alpha,x)$ и любого $\alpha\in[0,1]$ справедлива теорема существования пределов нечетких. Т.е. справедлива

Теорема 7.1. Если существует равные друг другу пределы слева и справа для нечеткой функции $\widetilde{f}_L(\alpha,x)$ $\widetilde{f}_R(\alpha,x)$ при $x\to a$, то существует предел (7.20) (7.21) и обратно (7.20) (7.21), то существуют равные друг другу пределы слева и справа для нечетких функций $\widetilde{f}_L(\alpha,x)$ $\widetilde{f}_R(\alpha,x)$.

Определение 7.8. Если $\widetilde{f}\ (\alpha,x)$ стремится к пределу $\widetilde{A}_1(\alpha)$ при $x \to a$ и $x<a,$ то $\widetilde{A}_1(\alpha)$ называется пределом нечеткой функции $\widetilde{f}(\alpha,x)$ слева в точке *a*.

Если же $\widetilde{f}(\alpha,x)$ стремится к пределу $\widetilde{A}_2(\alpha)$ при $x \to a$ и $x<a$, то $\widetilde{A}_2(\alpha)$ называется пределом $\widetilde{f}(\alpha,x)$ в точке *x*=*a* справа.

Эти пределы обозначаются соответственно:

$$\lim_{x \to a-0} \widetilde{f}(\alpha,x) = \widetilde{A}_1(\alpha)$$

и

$$\lim_{x \to a+0} \widetilde{f}(\alpha,x) = \widetilde{A}_2(\alpha) \qquad (7.22)$$

Эти понятия вводятся для любых $\alpha \in [0,1]$.

Следует отметить, что все приведенные понятия можно ввести и для случая, когда $x \to \infty$, т.е.

Определение 7.9. Нечеткая функция $\widetilde{f}(\alpha,x),\quad \alpha \in [0,1]$ стремится к пределу $\widetilde{A}(\alpha)$ при $x \to \infty$, если для каждого произвольно малого ε>0 и любого достаточно большого положительного *N* существуют значения *x*, такие, что при

$$|x| > N, \left|\widetilde{f}(\alpha,x) - \widetilde{A}(\alpha) < \varepsilon\right|$$

и обозначается:

$$\lim_{x \to \infty} \widetilde{f}(\alpha,x) = \widetilde{A}(\alpha).$$

Кроме того, так как результат предельного значения не зависит от способа перехода к пределу, то независимо от того, является ли область определения нечеткой функции четким или нечетким множеством (что соответствует тому, что взятая нечеткая функция четкого или нечеткого аргумента) приведенные выше понятия пределов нечеткой функции сохраняются без из менения. Отметим, что

1) если нечеткая функция (также, как и нечеткое число) является нечеткой функцией L-R - типа, т.е.

$$\widetilde{f}(\alpha,x) = \{f_L(\alpha,x);\ f_R(\alpha,x)\} \qquad (7.23)$$

причем выполняются (7.22), то

$$\lim_{x\to a}\tilde f(\alpha,x)=\left\{\lim_{x\to a} f_L(\alpha,x);\lim_{x\to a} f_R(\alpha,x)\right\}= \\ =\{A_L(\alpha);\ A_R(\alpha)\}=\tilde A(\alpha) \qquad (7.24)$$

$$\tilde f(\alpha,x)=\{f(x);\ m_L(\alpha,x);\ m_R(\alpha,x)\}$$

2) если

$$\tilde f(\alpha,x)=\{f(x);\ m_L(\alpha,x);\ m_R(\alpha,x)\} \qquad (7.25)$$

где *f(x)* - четкая функция той же структуры, что и $\tilde f(\alpha,x);\ m_L(\alpha,x)$ и $m_R(\alpha,x)$ - функции отклонения $\tilde f(\alpha,x)$ от *f(x),* то

$$\lim_{x\to a}\tilde f(\alpha,x)=\{\lim_{x\to a} f(x);\lim_{x\to a} m_L(\alpha,x);\ \lim_{x\to a} m_R(\alpha,x)\}=\{A,m_L\ m_R\} \qquad (7.26)$$

Отсюда следует утверждение. Для того, чтобы нечеткая функция имела ограниченный предел необходимо, чтобы четкая функция той же структуры имела конечеый предел. Следует также отметить, что все основные теоремы о пределах четких функций справедливы и для пределов нечетких функций, т.е.

1. $\lim_{x\to a}\sum_{i=1}^{n}\tilde f_i(\alpha,x)=\sum_{i=1}^{n}\lim_{x\to a}\tilde f_i(\alpha,x)$

2. $\lim_{x\to a}\tilde f_1(\alpha,x)\cdot\tilde f_2(\alpha,x)=\lim_{x\to a}\tilde f_1(\alpha,x)\cdot\lim_{x\to a}\tilde f_2(\alpha,x)$

Следствие 7.1. $\lim_{x\to a} C\ \tilde f(\alpha,x)=C\,l\lim_{x\to a}\tilde f(\alpha,x)$

3. $\lim_{x\to a}\dfrac{\tilde f(\alpha,x)}{\tilde g(\alpha,x)}=\dfrac{\lim_{x\to a}\tilde f(\alpha,x)}{\lim_{x\to a}\tilde g(\alpha,x)}$ если всюду $\tilde g(\alpha,x)$

4. Если на множестве, содержащей точку *x=a* $\tilde f(\alpha,x)>\tilde g(\alpha,x)$, то

$$\lim_{x\to a}\tilde f(\alpha,x)\ge\lim_{x\to a}\tilde g(\alpha,x)$$

для любых $\alpha\in[0;1]$.

Следствие 7.2. Для любых $\alpha\in[0;1]$

$$\lim_{x\to a}\tilde f_L(\alpha,x)<\lim_{x\to a}\tilde f_R(\alpha,x)$$

Следствие 7.3. Для любых $\alpha_1<\alpha_2;\ \alpha_1,\ \alpha_2\in[0;1]$

$$\lim_{x\to a}\tilde{f}_L(\alpha_1,x)<\lim_{x\to a}\tilde{f}_L(\alpha_2,x)$$

и

$$\lim_{x\to a}\tilde{f}_R(\alpha_1,x)>\lim_{x\to a}\tilde{f}_R(\alpha_2,x)$$

Пример 7.4.

$$\lim_{x\to -1}\{x^3-[1;4]x^2+[3;5]x-[6;9]\}=$$
$$=\lim_{x\to -1}\{x^3=(2,5+(1-\alpha)1,5)x+[4-(1-\alpha)]x-$$
$$-[7,5+(1-\alpha)1,5];x^3-[2,5-(1-\alpha)1,5]x^2+$$
$$+\_[4+(1-\alpha)]x-[7,5-(1-\alpha)1,5]=$$
$$\{-17+2\alpha;-13-2\alpha\}=\tilde{A}(\alpha)$$
$$\lim_{x\to -1}\tilde{f}(\alpha;x)=\lim_{\alpha\to 0,6}\tilde{A}(\alpha)=\lim_{\alpha\to 0,6}\{-17+2\alpha;\ -13-2\alpha\}=$$
$$=\{-15,8;-14,2\}=\tilde{A}(0;6);$$

Кроме того

$$\lim_{x\to -1}\tilde{f}(\alpha;x)=\lim_{\alpha\to 1}\{-17+2\alpha;-13-2\alpha\}=\{-15;\ -15;\}=A(1)=-15;$$

Если

$$\tilde{A}(0,6)\ \tilde{A}(0,2)$$

представить в виде $\tilde{A}=\{A;m_L;\ m_R\}$, то

$$\tilde{A}(0,6)=\{-15;\ 0,8;0,8\}$$

Найдем теперь . Имеем:

$$\lim_{x\to 0,2}\tilde{A}(\alpha)=\lim_{\alpha\to 0,2}\{-17+2\alpha;\ -13-2\alpha\}=\{-16,6;-13,4\};$$

Таким образом:

$$A_L(0,2)<A_L(0,6)<A_R(0,6)<A_R(0,2)$$

Пусть нечеткая функция $\tilde{f}(\alpha,x)$ (четкости $\alpha\in[0;1]$) определена при некотором значении x_0 и в некоторой ее окрестности и $\tilde{y}_0=\tilde{f}(\alpha,x_0)$

Если аргументу *x* (*x* - четкая, либо нечеткая переменная) дать приращение (положительное или отрицательное) Δx, то и функция $\tilde{y}$ получит приращение $\Delta\tilde{y}$, которое выражается формулой:

$$\Delta\tilde{y} = \tilde{f}(\alpha, x_0 + \Delta x) - \tilde{f}(x, x_0)$$

Определение 7.10. Нечеткая функция $\tilde{f}(\alpha, x_0)$ называется непрерывной в точке $x = x_0$, если она определена в точке $x=x_0$ и некоторой ее окрестности.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta\tilde{y} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\tilde{f}(\alpha, x_0 + \Delta x) - \tilde{f}(\alpha, x_0)\right] = 0 \qquad (7.27)$$

для любых $\alpha \in [0;1]$

Или же

$$\lim_{x \to x_0} \tilde{f}(\alpha, x) = \tilde{f}(\alpha, x_0) \qquad (7.28)$$

Учитывая представление нечеткой функции в виде (7.4) и (7.5), имеем:

Определение 7.11. Нечеткую функцию $\{f_L(\alpha, x); f_R(\alpha, x)\}$ будем называть непрерывной в точке $x = x_0$ для любого $\alpha \in [0;1]$, если

$$\lim_{x \to x_0} \{f_L(\alpha, x); f_R(\alpha, x)\} = \{f_L(\alpha, x_0); f_R(\alpha, x_0)\} \qquad (7.29)$$

Определение 7.12. Нечеткую функцию $\{f(x), m_L(\alpha, x), m_R(\alpha, x)\}$ будем называть непрерывной в точке $x = x_0$ для любого $\alpha \in [0;1]$, если

$$\lim_{x \to x_0} \{f(x); m_L(\alpha, x), m_R(\alpha, x)\} = \{f(x_0), m_L(\alpha, x_0); m_R(\alpha, x_0)\} \qquad (7.30)$$

Из (7.30) следует. Для того, чтобы нечеткая функция была непрерывной в точке $x = X_0$, необходимо, чтобы четкая функция той же структуры была непрерывна в этой точке. С точки з рения левого и правого пределов функции имеем.

Утверждение 7.1 Нечеткая функция $\tilde{f}(\alpha, x)$ непрерывна в некоторой точке (взятой из области определения нечеткой функции) x_0, если в этой точке ее левый и правый пределы совпадают. Также как и четкая функция, нечеткая функция $\tilde{f}(\alpha, x)$ называется непрерывной на некотором множестве, если она непрерывна во всех точках этого множества. Кроме того, все свойства четких непрерывных функций справедливы для непрерывных нечетких функций.

Пример 7.5. Доказать непрерывность нечеткой функции $\tilde{f}(0{,}4; x) = [1;3]x^2 - [2;5]x + [3;7]$ в точке $x=1$.

Имеем:

$$f_L(0{,}4,x) = x^2 - 5x + 3$$
$$f_R(0{,}4;x) = 3x^2 - 2x + 7$$

Если $m_L(\alpha,x) = m_R(\alpha,x)$ для любых $\alpha\in[0;1]$, то

$$f(x) = 2x^2 - 3{,}5x + 5$$

При этом $m_L(0{,}4;x) = x^2 + 15x + 2 = m_R(0{,}4;x)$

Для точки $x=1$ имеем:

$$\lim_{\substack{x\to 1-\varepsilon \\ \varepsilon\to 0}} (2x^2 - 3{,}5x + 5) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2(1-\varepsilon)^2 - 3{,}5(1-\varepsilon) + 5\right) = 3{,}5$$

$$\lim_{\substack{x\to 1+\varepsilon \\ \varepsilon\to 0}} (2x^2 - 3{,}5x + 5) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2(1+\varepsilon)^2 - 3{,}5(1+\varepsilon) + 5\right) = 3{,}5$$

Аналогично легко доказать, что

$$\lim_{x\to 1-0} m_L(0{,}4;x) = \lim_{x\to 1+0} m_L(0{,}4;x) = 4{,}5$$

т.е. $\widetilde{f}(0{,}4;x)$ непрерывна в точке $x=1$.

Так же, как и четкие функции, нечеткие функции могут иметь точки разрыва первого и второго рода, которые определяют аналогично, что и точки разрыва первого и второго рода, которые определяют аналогично, что и точки разрыва для нечетких непрерывных функций справедливы следующие теоремы:

1) Если $\widetilde{f}_1(\alpha,x)$ и $\widetilde{f}_2(\alpha,x)$ есть непрерывные в точке $x=x_0$ нечеткие функции четкости $\alpha\in[0;1]$, то $\varphi(\alpha,x) = f_1(\alpha,x) + f_2(\alpha,x)$ есть непрерывная функция в точке.

2) Произведение непрерывных двух нечетких функций есть непрерывная нечеткая функция.

3) Частное двух непрерывных нечетких функций есть непрерывная, если знаменатели в рассматриваемой точке не обращаются в нуль.

4) Если $\widetilde{u} = \widetilde{\varphi}(\alpha,x)$ непрерывна при $x= x_0$ и $\widetilde{f}(\alpha,u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi_0(\alpha,x)$, то функция $\widetilde{f}[\widetilde{\varphi}(x)]$ непрерывна в точке $x= x_0$.

При этом:

1) если

$$\widetilde{f}_1 : A \to \widetilde{B}_1; f_2 \div A \to \widetilde{B}_2,\ \widetilde{B}_1;\widetilde{B}_2 \subset Y,\ \mu(\widetilde{f}_1) = \mu(f_2) = \alpha,$$

то

$$\mu(\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2) = \alpha;\ \mu(\tilde{f}_1 \tilde{f}_2) = \alpha,\ \mu\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = \alpha;\ \mu(f(\varphi)) = \alpha^2,$$

если $\mu(\varphi) = \alpha$ (7.31)

2) если $\mu(f_1) = \alpha;\quad \mu(f_2) = \beta;\quad \mu(\varphi) = \gamma,$

то

$$\left.\begin{aligned} &\mu(f_1 + f_2) = \max[\mu(f_1); \mu(f_2)] = \alpha \vee \beta \\ &\mu(f_1 \cdot f_2) = \min[\mu(f_1); \mu(f_2)] = \alpha \wedge \beta \\ &\mu(f_1 / f_2) = \min[\mu(f_1); \mu(f_2)] = \alpha \wedge \beta \\ &\mu[f(\varphi)] = \mu(f) \cdot \mu(\varphi) = \alpha \cdot \beta \end{aligned}\right\} \quad (7.32)$$

2.7.3. Дифференцирование нечеткой функции

Из физического смысла производной обычной (четкой) функции следует, что если некоторый физический процесс описывается некоторой четкой функцией, то скорость изменения этого физического процесса так же описывается четкой функцией, являющейся производной от исходной четкой функции. Это означает, что степень четкости производной от нечеткой функции с любой степенью четкости совпадает со степенью четкости самой функции. Справедливость этого утверждения устанавливается так же тем, что сама операция дифференцирования является четкой операцией, т.е. если операцию дифференцирования рассматривать как функцию $\varphi(x)$, то $\mu(\varphi) = 1$.

Учитывая, что для нечеткой функции

$$\tilde{f}(\alpha, x),\ \mu(\tilde{f}) = \alpha \in [0;1]$$

и

$$\mu(\tilde{f}_*) = \min\lfloor \mu(\varphi) \cdot \mu(\tilde{f}) \rfloor,$$

то получим, что

$$\mu(\tilde{f}_*) = \min(1; \alpha) = \alpha = \mu(\tilde{f}) \quad (7.33)$$

Поэтому, при введении понятия производной нечеткой функции следует учесть лишь значение степени четкости самой функции.

Определение 7.13. Предел отношения приращения нечеткой функции (четкости $\alpha \in [0;1]$ $\Delta\tilde{f}(\alpha, x)$) к приращению аргумента Δx при стремлении последней к нулю, будем называть производной нечеткой функции $\Delta\tilde{f}(\alpha,x)$ и обозначим:

$$f'(\alpha,x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\tilde{f}(\alpha,x+\Delta x)-f(\alpha,x)}{\Delta x} \tag{7.34}$$

Учитывая представления (7.4) и (7.5) нечеткой функции, имеем:

Определение 7.14. Если нечеткая функция четкого аргумента задана в виде (7.34), тогда для $\forall\alpha\in[0;1]$

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\alpha,x)&=\{f_L'(\alpha,x);\quad f_R'(\alpha,x)\}=\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\alpha,x+\Delta x)-\tilde{f}(\varepsilon,x)}{\Delta x}=\\&=\left\{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_L(\alpha,x+\Delta x)-f_L(\alpha,x)}{\Delta x};\right.\\&\left.\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_R(\alpha,x+\Delta x)-f_R(\alpha,x)}{\Delta x};\right\}\end{aligned} \tag{7.35}$$

Определение 7.15. Если нечеткая функция четкого аргумента задана в виде (7.35), тогда для $\forall\alpha\in(0;1)$

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\alpha,x)&=\{f'(x);\ m_L'(\alpha,x);\ m_R'(\alpha,x)\}=\\&=\left\{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x};\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{m_L(\alpha,x+\Delta x)-m_L(\alpha,x)}{\Delta x};\right.\\&\left.\lim_{\Delta x\to 0}\frac{m_R(\alpha,x+\Delta x)-m_R(\alpha,x)}{\Delta x}\right\}\end{aligned} \tag{7.36}$$

С геометрической точки зрения производная нечеткой функции $\Delta\tilde{f}(\alpha,x)$ в любой точке (четкой, либо нечеткой) $x=x_0$ равна угловому коэффициенту касательной к линии, описываемой этой функцией в данной точке.

Пример 7.6. $\tilde{f}(x)=x^{\tilde{a}};\ \tilde{a}=\{2;4\}$.

Найдем $\tilde{f}(0{,}8;\ 3)$.

Имеем: $\tilde{y}'=\tilde{f}'(x)=\tilde{a}x^{\tilde{a}-1}$, т.е.

$\tilde{y}'=\{2;\ 4\}x^{\{1;3\}}$

Для $x>1;\ y_L(0;\ x)=x^2;\ y_R(0;x)=x^4$

$y'_L(0;x) = 2x;\ y'_R(0;x) = 4x^3$

Для простоты предположим, что левое и правое растяжения числа [2;4] - одинаковы, тогда

$$\tilde{a} = \{a_L; a_R\} = \{2;4\},\ \tilde{a} = \{a; m_L; m_R\} = \{3;1;1\} /$$

Следовательно, $y = f_L(1;x) = f_R(1;x) = x^3$

$$y' = f(x) = 3x^2$$

$$y'_L(\alpha;x) = \left[3-(1-\alpha)\right]x^{[2-(1-\alpha)]}$$

$$y'_R(\alpha;x) = \left[3+(1-\alpha)\right]x^{[2+(1-\alpha)]}$$

$$m_L(\alpha,x) = 3x^2 - [3-(1-\alpha)]x^{[2-(1-\alpha)]}$$

$$m_R(\alpha,x) = [3+(1-\alpha)]x^{[2+(1-\alpha)]} - 3x^2$$

$$f'_L(0{,}8x) = 2{,}8x^{1{,}8};\ f'_R(0{,}8;x) = 3{,}2x^{2{,}2}$$

$$m_L(0{,}8x) = 3x^2 - 2{,}8x^{1{,}8};\ m_R(0{,}8;x) = 3{,}2x^{2{,}2} - 3x^2$$

$$f'(0{,}8;3) = \{20{,}7; 34{,}4\};\ f'_L(1;3) = f'_R(1;3) = f(3) = 27$$

или

$$\tilde{f}(0{,}8;3) = \{27; 6{,}3; 7{,}4\}$$

Схематический график $\tilde{f}(\alpha,x)$ на [1,5; 4] построен на рис.7.4

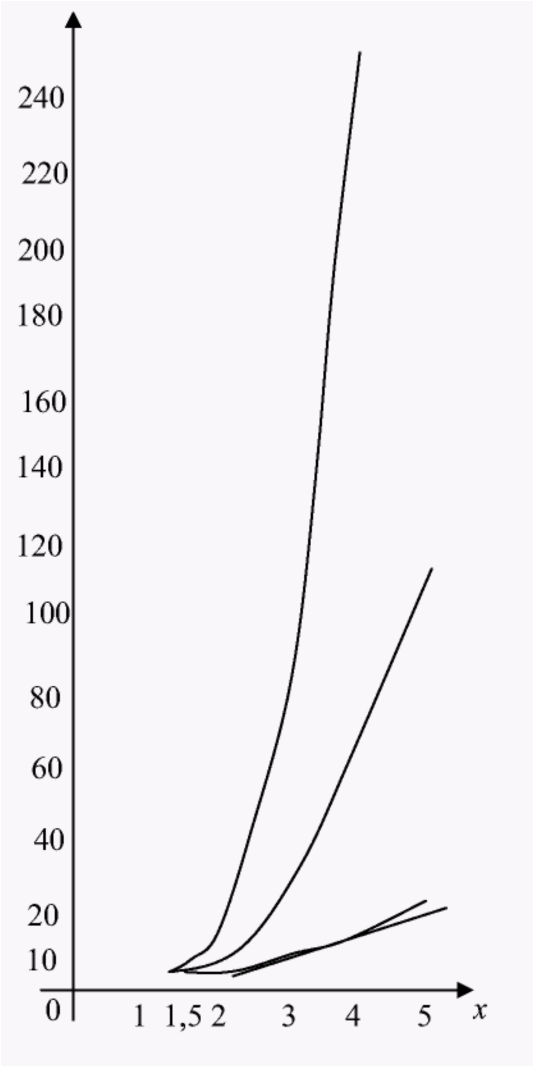


Рис. 7.4

Отметим, что все действия надпроизводными четких функций справедливы и для производных от нечетких функций.

$$1)\ \left(\tilde{f}(x)+\tilde{g}(x)\right)'_x = \tilde{f}'(x)+\tilde{g}(x)$$

$$2)\ \left(\tilde{f}(x)\tilde{g}(x)\right)' = \tilde{f}'(x)\tilde{g}(x)+\tilde{f}'(x)\tilde{g}'(x)$$

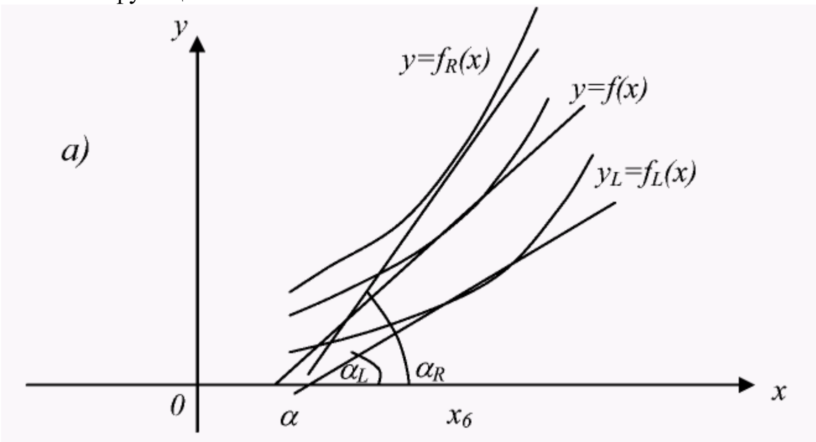
$$3)\left(\frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}\right)' = \frac{\tilde{f}'(x)\tilde{g}(x)-\tilde{g}'(x)\tilde{f}(x)}{[\tilde{g}(x)]^2}$$

если всюду $\tilde{g}(x) \neq 0$

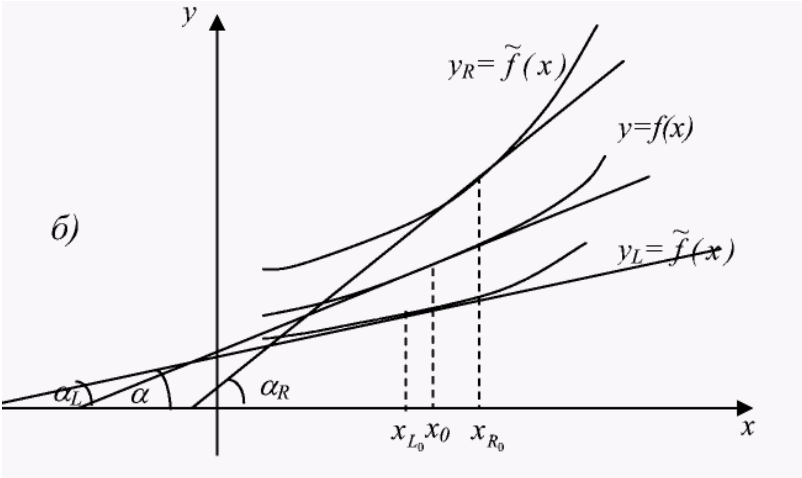
4) Если $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{u}), \tilde{u} = \tilde{\varphi}(x)$, то $\tilde{f}'_x = \tilde{f}'_{\tilde{u}} \cdot \tilde{U}_x$ соотношение 1)-4) справедливы для любых $\alpha \in (0;1)$.

При этом следует учесть, что четкость производной (от алгебраической суммы, частного и произведения) совпадает с четкостью результатов, соответствующих операций над самими нечеткими функциями, а четкость производной сложной функции равна четкости самой нечеткой сложной функции.

На рис. 7.5. приведена геометрическая интерпретация производной нечеткой функции.



Производная нечеткой функции с нечетким аргументом



Производная нечеткой функции с четким аргументом

Рис.7.5.

Наряду с этим, легко доказать, что как понятия дифференцируемости также и все теоремы о дифференцируемых четких функциях справедливы и для нечетких функций, как с четким так же и с нечетким аргументом.

Аналогично понятию дифференциала четкой функции можно ввести понятие дифференциала нечеткой функции как четкого, так же и нечеткого аргумента.

Определение 7.15. Рассмотрим приращение нечеткой функции $\widetilde{f}(\alpha, x),\ \alpha \in [0;1]$, соответствующее приращению аргумента Δx.

При этом: 1) если $\widetilde{f}(\alpha, x) = \{f_L(\alpha, x); f_R(\alpha, x)\}$, то

$$\begin{aligned}&\Delta f(\alpha, \Delta x) = \\ &= \{\Delta f_L(\alpha, x);\ \Delta f_R(\alpha, x)\} = \\ &= \{f(\alpha, x + \Delta x) - f_L(\alpha, x), f_R(\alpha, x + \Delta x) - f_R(\alpha, x)\}\end{aligned} \qquad (7.37)$$

2) если $\widetilde{f}(\alpha, x) = \{f(x), m_L(\alpha, x), m_R(\alpha, x)\}$, то

$$\begin{aligned}&\Delta f(\alpha,\Delta x)=\\&=\{\Delta f(x);\Delta m_L(\alpha,x);\ \Delta m_R(\alpha,x)\}=\\&=\{f(x+\Delta x)-f(x),m_L(\alpha,x+\Delta x)-\\&m_L(\alpha,x);\ m_R(\alpha,x+\Delta x)-m_R(\alpha,x)\}\end{aligned} \qquad (7.38)$$

В силу определения производной нечеткой функции представления переменной величины в виде суммы ее предельного значения и бесконечно малой величины из (7.37) и (7.38) имеем:

$$\Delta\tilde{f}(\alpha,x)=\{\Delta f_L'(\alpha,x);\ \Delta x+\gamma_L\Delta x;\ \ f_R'(\alpha,x)\Delta x+\gamma_R\Delta x\} \qquad (7.39)$$

$$\begin{aligned}&\Delta\tilde{f}(\alpha,x)=\{f'(x)\Delta x+\gamma_{\Delta x};\ m_L'(\alpha,x)\Delta x+\gamma_L\Delta x;\\&m_R'(\alpha,x)\Delta x+\gamma_R\Delta x\}\end{aligned} \qquad (7.40)$$

При этом линейную часть приращения нечеткой функции относительно приращения ее аргумента (четкого, либо нечеткого) будем называть главной частью приращения, либо дифференциалом нечеткой функции. Для вычисления дифференциала нечеткой функции имеем:

$$d\tilde{f}(\alpha,x)=f_x'(\alpha,x)dx=\{f_L'(\alpha,x)dx;\ \ f_R'(\alpha,x)dx\} \qquad (7.41)$$

либо

$$d\tilde{f}(\alpha,x)=f_x'(\alpha,x)dx=\{f_L'(\alpha,x)dx;\ \ f_R'(\alpha,x)dx\} \qquad (7.42)$$

Так же как и для четких функций с геометрической точки зрения, дифференциал нечеткой функции $\tilde{f}(\alpha,x)$ для любых $\alpha\in[0;1]$, соответствующее приращению аргумента *(*Δx*)* равен приращению по касательной к кривой (описываемой этой функцией) в точке касания, соответствующее приращению аргумента.

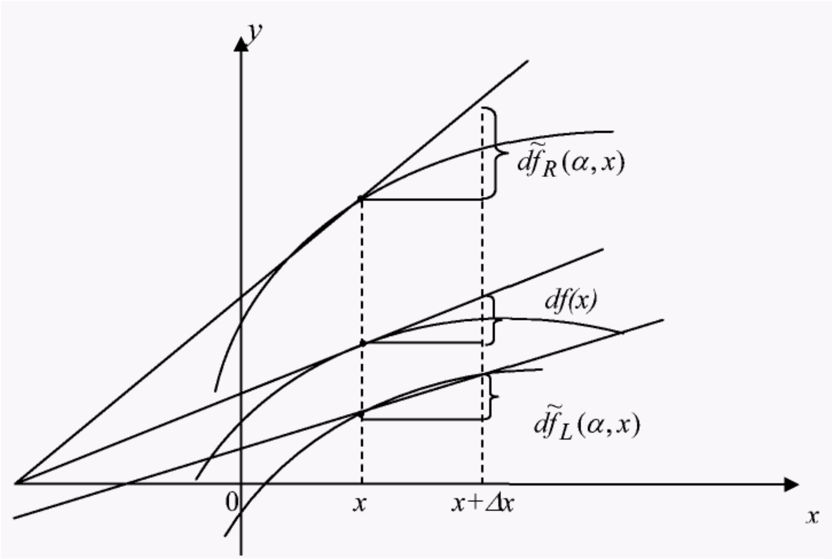


Рис. 7.6

2.7.4. Экстремум нечеткой функции

Следует иметь в виду, что:

1) нечеткий максимум, т.е. максимум нечеткой функции $\tilde{f}(x)$ определяется как

$$\tilde{f}_{\max}(x) = \max_{x \in X} \tilde{f}(x) = \left\{ \underset{\alpha \in [0;1]}{sur} \cdot \max_{x \in X} \tilde{f}(\alpha, x) \right\} \tag{7.43}$$

2) нечеткий минимум, т.е. минимум нечеткой функции $\tilde{f}(x)$ определяется как

$$\tilde{f}_{\min}(x) = \min_{x \in X} \tilde{f}(x) = \left\{ \inf_{\alpha \in [0;1]} \min_{x \in X} \tilde{f}(\alpha, x) \right\} \tag{7.44}$$

Поэтому, учитывая, что для любого уровня четкости нечеткой функции $\tilde{f}(x)$

$$\tilde{f}_L(\alpha, x) < \tilde{f}_R(\alpha, x) \tag{7.45}$$

можно принять следующие определения экстремума (максимума и минимума) нечеткой функции.

Определение 7.16. Нечеткая функция $\tilde{f}(\alpha, x),\ \alpha\in[0;1]$ в точке $x_0 \in X$ имеет максимум, если значение функции $\tilde{f}_R(\alpha, x)$ в точке $x = x_0$ больше, чем ее значение во всех точках множества X. В терминах приращения аргумента нечеткая функция $\tilde{f}(\alpha, x)$ в точке $x = x_0$ имеет максимум, если для любых Δx в этой точке

$$\tilde{f}_R(\alpha, x_0 + \Delta x) < \tilde{f}_R(\alpha, x_0) \qquad (7.46)$$

Определение 7.17. Нечеткая функция $\tilde{f}(\alpha, x),\ \alpha\in[0;1]$ в точке $x_1 \in X$ принимает значение минимума, если значения функции $\tilde{f}_L(\alpha, x)$ в точке $x=x_1$ меньше, чем ее значения во всех оставшихся точках множества X.

В терминах приращения аргумента, нечеткая функция $\tilde{f}(\alpha, x)$ в точке $x=x_1$, имеет минимум, если для любых Δx в точке $x=x_1$

$$f_L(\alpha, x_1 + \Delta x) > f_L(\alpha, x_1) \qquad (7.47)$$

Из приведенных понятий экстремума нечеткой функции следует, что при сужении нечеткой функции эти определении совпадают с определениями соответствующих понятий для четких функций той же структуры, что и данная нечеткая функция.

Поэтому теоремы о необходимом и достаточном условиях экстремума четкой функции справедливы и для нечеткой функций. Кроме того, при нахождении стационарных точек нечеткой функции в силу теоремы о необходимом условии экстремума функции одной переменной следует найти корни нечеткого уравнения

$$\tilde{f}(\alpha, x) = 0 \qquad (7.48)$$

Ввиду того, что корнями уравнения (7.48) будут нечеткие величины (в частности, нечеткие числа), то казалось бы, что при применении теоремы о достаточном условии экстремума следует определять значения $\tilde{f}_L(\alpha, x)$ и $\tilde{f}_R(\alpha, x)$, найденных из (7.48), нечетких значениях. Но это не так. Дело в том, что если (в частности) в точке

$$\tilde{x}_0(\alpha) = \{x_0; m_{L_0}(\alpha); m_{R_0}(\alpha)\}$$

функция принимает значение максимума, то мы должны будем сравнить значения

$$f_R(x_0 - m_{L_0}(\alpha)),\ f_R(x_0)$$

и

$$f_R\left(x_0 + m_{R_0}(\alpha)\right)$$

и взять величину

$$\max_{x \in X} \widetilde{f}(\alpha; x) = sur\left\{f_R(x_0); f_R\left(x_0 - m_{L_0}(\alpha)\right), f_R\left(x_0 + m_{R_0}(\alpha)\right)\right\} \quad (7.49)$$

С другой стороны, так как для любого фиксированного значения $\alpha \in [0;1]$ (любого уровня четкости) каждая из функций $f_L(\alpha, x)$ и $f_R(\alpha, x)$ описывает конкретные линии на координатной плоскости, то (очевидно, что) стационарные точки для каждой из функций $f_L(\alpha, x)$ и $f_R(\alpha, x)$ будут различны. Поэтому:

1) если $f(\alpha, x) = \{f_L(\alpha, x); f_R(\alpha, x)\}$, то для определения стационарных точек нечеткой функции следует решить уравнения:

$$f_L(\alpha, x) = 0 \text{ и } f_R(\alpha, x) = 0 \quad (7.50)$$

и взять

$$\max_{x \in X} \widetilde{f}(\alpha, x) = \max f_R(\alpha, x) = 0 \quad (7.51)$$

$$\min_{x \in X} \widetilde{f}(\alpha, x) = \min f_L(\alpha, x) = 0 \quad (7.52)$$

2) если $\widetilde{f}(\alpha, x) = \{f(x); m_L(\alpha, x); m_R(\alpha)\}$, то для определения стационарных точек нечетких функций следует решить уравнения:

$$f(x) = 0; \; m_L(\alpha, x) = 0 \text{ и } m_R(\alpha, x) = 0 \quad (7.53)$$

и взять

$$\max_{x \in X} \widetilde{f}(\alpha, x) = \max\left[f(x) + m_R(\alpha, x)\right] \quad (7.54)$$

$$\min_{x \in X} \widetilde{f}(\alpha, x) = \min_{x \in X}\left[f(x) - m_L(\alpha, x)\right] \quad (7.55)$$

Геометрический смысл экстремума нечеткой функции $\widetilde{f}(\alpha, x)$ иллюстрируется на рис. 7.7.

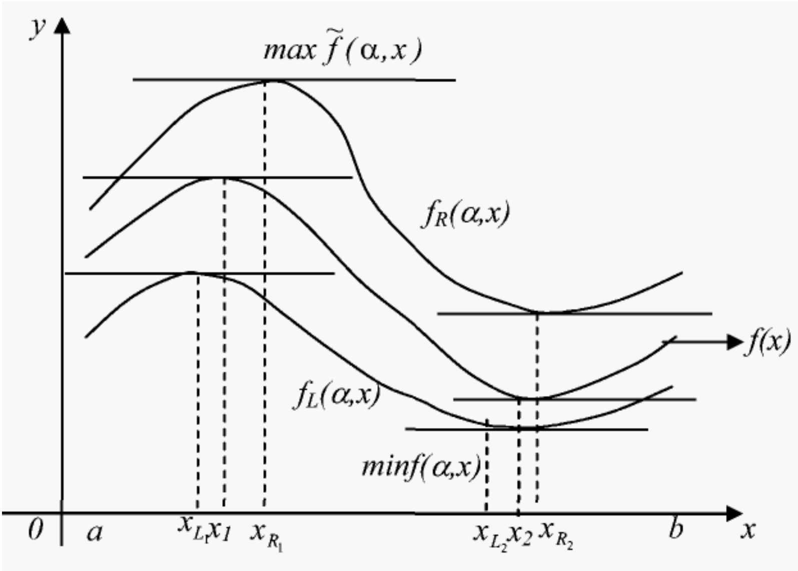


Рис.7.7

Пример 7.7. Найти максимум и минимум нечеткой функции с четкостью α=0,6, заданной в виде:

$$\tilde{f}(x) = [1;3]x^3 - [3;5]x^2 + [-3;7]$$

Имеем: $f_L(0;x) = x^3 - 5x^2 - 3$

$f_R(0;x) = 3x^3 - 3x^2 + 7$

Если нечеткие коэффициенты и свободный член есть нечеткие числа, имеющие одинаковые растяжения, то

$$f_L(1;x) = f_R(1;x) = f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2$$

Тогда

$$f_L(\alpha,x) = [2-(1-\alpha)]x^3 + [-4-(1-\alpha)]x^2 + [2-(1-\alpha)5]$$
$$f_R(\alpha,x) = [2+(1-\alpha)]x^3 + [-4+(1-\alpha)]x^2 + [2-(1-\alpha)]$$

Отсюда

$f_L(0{,}6;x) = 16x^3 + 4{,}4x^2$

$f_R(0{,}6;x) = 2{,}4x^3 - 3{,}6x^2 + 4$

Используя необходимое и достаточное условие экстремума для $f_L(0{,}6;x)$, $f_R(0{,}6;x)$ и $f(1;x)$, получим:

$$1)\ f_L'(0{,}6,x) = 4{,}8x^2 - 8{,}8x = 0 \quad x_1 = 0;\ x_2 = \frac{11}{6}$$

$$f_L''(0{,}6;x) = 9{,}6x - 8{,}8 \qquad f_L''(0{,}6;0) = -8{,}8 < 0;\ f_L''\left(0{,}6;\frac{11}{6}\right) = 8{,}8 > 0$$

$$\max_{x\in X} f_L(0{,}6;x) = f_L(0{,}6;0) = 0;$$

$$\min_{x\in X} f_L(0{,}6;x) = f_L\left(0{,}6;\frac{11}{6}\right) = -4{,}92$$

$$2)\ f_R'(0{,}6;x) = 7{,}2x^2 - 7{,}2x = 0;\ x_1 = 0;\ x_2 = 1$$

$$f_R''(0{,}6;x) = 14{,}4x - 7{,}2 \qquad f_{LR}''(0{,}6;0) = -7{,}2 < 0;\ f_R''(0{,}6;1) = 7{,}2 > 0$$

$$\max_{x\in X} f_R(0{,}6;x) = f_R(0{,}6;0) = 4$$

$$\min_{x\in X} f_R(0{,}6;x) = f_R(0{,}6;1) = 2{,}8$$

Таким об раз ом,

$$\max_{x\in X} \widetilde{f}(0{,}6;x) = 4;\ \min_{x\in X} \widetilde{f}(0{,}6;x) = -4{,}92$$

$$3) \qquad f'(x) = 6x^2 - 8x = 0;\ x_1 = 0;\ x_2 = \frac{4}{3}$$

$$f''(x) = 12x - 8;\ f''(0) = -8 < 0;\ f''\left(\frac{4}{3}\right) = 8 > 0$$

$$\max_{x\in X} f(x) = f(0) = 2;\ \min_{x\in X} f(x) = -0{,}37$$

Из вычислений видно, что для каждой из линий $f_L(\alpha,x),\ f_R(\alpha,x)$ и $f(x)$ - стационарные точки, вообще говоря, различны.

Аналогичным способом, легко показать, что если $\widetilde{f}(x) = \{f(x), m_L(x), m_R(x)\}$, то критические точки для $m_L(x)$ и $m_R(x)$ будут различны и будут отличаться от критических точек функций *f*(x). Поэтому для нахождения экстремальных з начений $\widetilde{f}(\alpha;x)$ для $\forall\alpha \in (0;1)$ необходимо сначала функцию $\widetilde{f}(\alpha;x)$ привести к виду $\widetilde{f}(\alpha;x) = \{f_L(\alpha,x); f_R(\alpha,x)\}$ для конкретного (желаемого) значения $\alpha \in (0;1)$, а затем на основании (7.31) и (7.32) найти экстремальные значения нечеткой функции.

2.7.5. Интегрирование нечетких функций

Из понятия неопределенного интеграла для четких функций следует, что операция интегрирования является обратной операцией операции дифференцирования, т.е. операции вычисления производной. Но, так как операция дифференцирования является четкой операцией, то и операция интегрирования есть четкая операция. Поэтому, первообразная нечеткой функции имеет ту же степень четкости, что и сама нечеткая функция. И если учесть, что определенный интеграл вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница, на основании которого определенный интеграл по [a, b] от четкой функции равен приращению первообразной на этом отрезке прямой, то степень четкости нечеткой величины, равной значению определенного интеграла нечеткой функции по четкому [a, b], равна степени четкости интегрируемой нечеткой функции. Если же нечеткая функция интегрируется по нечеткому интервалу, то степень четкости результата интегрирования будет (вообще говоря) меньше степени четкости интегрируемой функции.

Рассмотрим нечеткую функцию $\widetilde{f}(\alpha, x), \alpha \in (0,1)$, четкого аргумента, непрерывного на [a, b].

Определение 7.18. Предел, к которому стремится интегральная сумма

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \widetilde{f}(\alpha, \overline{x}_i)\Delta x_i \text{ , при } \max \Delta x_i \to 0$$

$$(\text{где } \Delta x_i = x_{i+1} - x_i, a = x_0, x_1, ..., x_n = b; \ \overline{x}_i \in [x_i; x_{i+1}]),$$

(если этот предел конечен для $\forall \alpha \in [0;1]$) будем называть определенным интегралом нечеткой функции $f(\alpha, x)$ по [a, b] и обозначим

$$J(\alpha) = \int_a^b \widetilde{f}(\alpha, x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \widetilde{f}(\alpha, \overline{x}_i)\Delta x_i \qquad (7.56)$$

Если: 1) $\widetilde{f}(\alpha, x) = \{f_L(\alpha, x); f_R(\alpha, x)\}$, где $f_L(\alpha, x)$ и $f_R(\alpha, x)$, интегрируемые на [a, b] четкие функции, то

$$\int_a^b \widetilde{f}(\alpha, x)dx = \left\{ \int_a^b f_L(\alpha, x)dx; \ \int_a^b f_R(\alpha, x)dx \right\} \qquad (7.57)$$

2) $\widetilde{f}(\alpha,x)=\{f(x),\ m_L(\alpha,x);\ m_R(\alpha,x)\}$, где *f*(*x*), $m_L(\alpha;x)$ и $m_R(\alpha;x)$ интегрируемые на [a, b] четкие функции, то

$$\int_a^b \widetilde{f}(\alpha,x)dx=\left\{\int_a^b f(\alpha,x)dx;\ \int_a^b m_L(\alpha,x)dx;\int_a^b m_R(\alpha,x)dx\right\} \quad (7.58)$$

Также, как и для четких функций, для определенных интегралов от нечетких функций справедливы следующие свойства:

1) $\int_a^b \widetilde{c}\widetilde{f}(\alpha,x)dx=\widetilde{c}\int_a^b \widetilde{f}(\alpha,x)dx$, для $\forall\alpha\in(0;1)$

2) $\int_a^b \left[\widetilde{f}_1(\alpha,x)\pm\widetilde{f}_2(\alpha,x)\right]dx=\int_a^b f_1(\alpha,x)\pm=\int_a^b \widetilde{f}_2(\alpha,x)dx$

3) $\int_a^b \widetilde{f}(\alpha,x)dx=-\int_b^a \widetilde{f}(\alpha,x)dx$

4) $\int_a^b \widetilde{f}(\alpha,x)dx=0$

5) Если на [a,b], (где *a*>*b*) нечеткие функции $\widetilde{f}(\alpha,x)$ и $\widetilde{g}(\alpha,x)$ для $\forall\alpha\in(0,1)$ удовлетворяют условию

$$\widetilde{f}(\alpha,x)\le\widetilde{g}(\alpha,x),\ \text{то}\ \int_a^b \widetilde{f}(\alpha,x)dx\le\int_a^b \widetilde{g}(\alpha,x)dx$$

6) Если $m(\alpha)$ и $M(\alpha)$ - наименьшее и наибольшее значения функции $\widetilde{f}(\alpha,x)$ на [a,b] и *a*<*b*, то

$$m(\alpha)(b-a)\le\int_a^b \widetilde{f}(\alpha,x)dx\le M(\alpha)(b-a)$$

7) Если нечеткая функция $\widetilde{f}(\alpha,x),\alpha\in(0;1)$ непрерывна на отрезке [0,1], то на этом отрезке найдется такая точка *x*=χ, что справедливо равенство:

$$\int_a^b \widetilde{f}(\alpha,x)dx=\widetilde{f}(\alpha,\xi)\cdot(b-a) \quad (7.59)$$

Кроме этого, для вычисления определенного интеграла нечеткой функции справедлива формула Ньютона-Лейбница: для любого $\alpha \in (0;1)$

$$\int_a^b \tilde{f}(\alpha, x)dx = \tilde{F}(\alpha, x)\Big|_a^b = \tilde{F}(\alpha, b) - \tilde{F}(\alpha, a) \qquad (7.60)$$

При этом, если нечеткая функция задается в виде (7.4) или (7.5), то

$$\int_a^b \tilde{f}(\alpha, x)dx = \left\{ \int_a^b f_L(\alpha, x)dx;\ \int_a^b f_R(\alpha, x)dx \right\} = \qquad (7.61)$$
$$= \{F_L(\alpha, b) - F_L(\alpha, a)\}$$

$$\int_a^b \tilde{f}(\alpha, x)dx = \left\{ \int_a^b f(x)dx, \int_a^b m_L(\alpha, x)dx; \int_a^b m_R(\alpha, x)dx \right\} = \qquad (7.62)$$
$$= \{F(b) - F(a); M_L(\alpha, b) - M_L(\alpha, a); M_R(\alpha, b) - M_R(\alpha, a)\}$$

Следует отметить, что если $\tilde{f}(\alpha, x)$ интегрируется по отрезку $[\tilde{a}(\beta); \tilde{b}(\beta)]$ (где $\tilde{a}(\beta)$ и $\tilde{b}(\beta)$ - нечеткие числа четкости $\beta \in (01)$), то значение $\tilde{J} = \int_{a(\beta)}^{b} \tilde{f}(\alpha, x)dx$ представляет собой величину (нечеткое число) четкости $\mu(\tilde{J}) = \alpha \cdot \beta$. С геометрической точки зрения это означает: определенный интеграл от нечеткой функции $\tilde{f}(\alpha, x) > 0$, четкости $\alpha \in (0,1)$ по отрезку $[a(\beta); b(\beta)]$ численно равен площади криволинейной трапеции с основаниями $\tilde{x} = \tilde{a}(\beta); \tilde{x} = \tilde{b}(\beta)$ высотой, равной длине отрезка $[\tilde{a}(\beta); \tilde{b}(\beta)]$ и боковой стороной, описываемой нечеткой функцией $\tilde{y} = \tilde{f}(\alpha, x)$

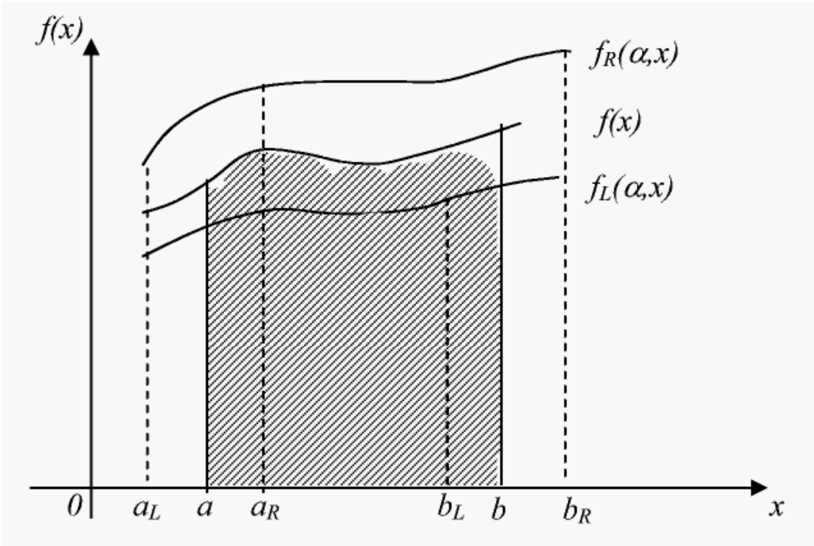


Рис.7.8

Пример 7.8.

$$\int_{\tilde{a}(\beta)}^{\tilde{b}(\beta)} \tilde{f}(\alpha, x)dx \text{ , где } \alpha=0{,}8;\ \beta=0{,}6$$

$$[a; b] = [-1;2];\ \tilde{f}(x) = [-2;1]x^2 - [3;5]$$

Имеем: $f_L(0; x) = -2x^2 - 5; \quad f_R(0; x) = x^2 - 3$

$$f_L(1; x) = f_R(1; x) = f(x) = -0{,}5x^2 - 4$$

$$f_L(\alpha; x) = [-0{,}5 - (1-\alpha)1{,}5]x^2 + [-4 - (1-\alpha)]$$

$$f_R(\alpha, x) = [-0{,}5 + (1-\alpha)1{,}5]x^2 + [-4 + (1-\alpha)]$$

Тогда

$$f_L(0{,}8; x) = -0{,}8x^2 - 4{,}2$$

$$f_R(0{,}8; x) = -0{,}2x^2 - 3{,}8$$

$$J_L(0{,}8) = \int_{-1}^{2} f_L(0{,}8; x)dx = \int_{-1}^{2}(-0{,}8x^2 - 4{,}2)dx = \left(-\frac{0{,}8}{3}x^3 - 4{,}2x\right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(-\frac{6{,}4}{3} - 8{,}4\right) - \left(\frac{0{,}8}{3} + 4{,}2\right) = -1{,}5$$

$$J_R(0{,}8) = \int_{-1}^{2} f_R(0{,}8;x)dx = \int_{-1}^{2}(-0{,}2x^2 - 3{,}8)dx =$$
$$= \left(-\frac{0{,}2}{3}x^3 - 3{,}8x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = -1{,}2$$

$$J = J_L(1) = J_R(1) = \int_{-1}^{2}(-0{,}5x^2 - 4)dx = \left(-\frac{1}{6}x^3 - 4x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = -13{,}5$$

Таким об раз ом,

$$\tilde{J} = \int_{-1}^{2}\tilde{f}(0{,}8x)dx = \{-1{,}5;-12\} = \{-13{,}5;1{,}5;1{,}5\}$$

Далее имеем:

$$\tilde{a}(\beta) = \tilde{a}(0{,}6) = -\tilde{1}(0{,}6) = \{-1{,}4;-0{,}6\}$$

$\tilde{b}(\beta) = \tilde{b}(0{,}6) = \tilde{2}(0{,}6) = \{1{,}6;2{,}4\}$. Тогда

$$J_L(a_L;b_L) = \int_{-1{,}4}^{1{,}6}(-0{,}8x^2 - 4{,}2)dx = \left(-\frac{0{,}8}{3}x^3 - 4{,}2x\right)\Bigg|_{-1{,}4}^{1{,}6} = -13{,}34$$

$$J_L(a_R b_R) = \int_{-0{,}6}^{2{,}4}(-0{,}8x^2 - 42)dx = \left(-\frac{0{,}8}{3}x^3 - 4{,}2x\right)\Bigg|_{-0{,}6}^{24} = -16{,}35$$

$$J_R(a_L, b_L) = \int_{-1{,}4}^{1{,}6}(-0{,}2x^2 - 38)dx = \left(-\frac{0{,}2}{3}x^3 - 3{,}8x\right)\Bigg|_{-1{,}4}^{1{,}6} = -11{,}86$$

$$J_R(a_R b_R) = \int_{-0{,}6}^{2{,}4}(-0{,}2x^2 - 3{,}8)dx = \left(-\frac{0{,}2}{3}x^3 - 3{,}8x\right)\Bigg|_{-0{,}6}^{2{,}4} = -12{,}4$$

Таким образом,

$$\tilde{J}(0{,}8;0.6) = \tilde{J}\left(f_{0,8},[-1/0{,}6;2/0{,}6]\right) =$$
$$= \{-16{,}35;-11{,}86\} = \{-13{,}5;2{,}85;1{,}64\}$$

Из рисунка 7.8. следует, что для более точного выисления определенного интеграла отнечеткой функции $\tilde{f}(\alpha, x)$ по нечеткому интервалу $[\tilde{a}(\beta);\tilde{b}(b)]$ необходимо (если $\tilde{a}(\beta) < \tilde{b}(\beta)$) вычислить

$J_L(a_R b_L)$ и $J_R(a_L b_R)$

Имеем:

$$J_L(a_R; b_L) = \int_{-0,6}^{1,6} \left(-0,8x^2 - 4,2\right) dx = \left(-\frac{4}{15}x^3 - 4,2x\right)\Bigg|_{-0,6}^{1,6} = -9,671$$

$$J_R(a_L; b_R) = \int_{-1,4}^{2,4} \left(-0,2x^2 - 3,8\right) dx = \left(-\frac{1}{15}x^3 - 3,8x\right)\Bigg|_{-1,4}^{2,4} = -15,611$$

Таким образом, ввиду того, что полученные результаты отрицательны, получаем:

$$\tilde{J}(0,8; 0,6) = \tilde{J}(f_{0,8}; -1/0,6; 2/0,6) = \{-15,611; -9,671\} = \\ = \{-13,5; 2,111; 3,829\}$$

2.7.6. Нечёткие меры и нечёткие интегралы

Пусть X - произвольное множество, β - поле борелевских множеств (множества покрытий) (σ-алгебра) для X.

Определение 7.19. Функция $g(\cdot)$, определённая в виде $g : \beta \to [0;1]$ называется нечёткой мерой, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 1)\ g(\varnothing)=0 \\ 2)\ g(X)=1 \end{array}\right\} \text{(ограниченность)} \\ 3)\ \text{если } A,\ B \in \beta \text{ и } A \subset B, \text{ то } g(A) \le g(B) \text{(монотонность)} \\ 4)\ \text{Если } A_n \in \beta \text{ является монотонной последовательностью,} \\ \text{то } \lim_{n\to\infty} g(A_n) = g(\lim_{n\to\infty} A_n) \text{ (непрерывность)} \end{array}\right\} (7.63)$$

Но по сути дела чёткая функция множества $g(\cdot)$ определяет неаддитивную чёткую меру (квазимеру) на обычном множестве X. Если сравнить определение 7.19 с определением меры в других источниках, то заметим, что эти определения различаются тем, что числовая функция $g(\cdot) : \beta \to [0;1]$ заменена на числовую функцию $g(\cdot) : \beta \to R$, где *R* - действительное числовое множество. Если X - конечное множество, очевидно, можно сравнивать $P(\{x\})$ с $\mu_A(x)$:

$$\sum_{x\in X} P(\{x\}) = 1 \text{ и } \sum_{x\in X} \mu_A(x) \ne 1.$$

В случае, когда $X \subset R$, приходится сталкиваться со следующими трудностями.

Для $(a,b] \subset R$, $P(a \le x < b) = \int_a^b P(x)dx$,

где $P(x)$ - плотность вероятности. При этом, очевидно, что $\forall x \in R : P(\{x\}) \neq 0$, когда $P(x) \neq 0$.

Нетрудно увидеть, что понятие плотности вероятности и функция принадлежности сравнимы. В то время, как вероятностная мера является шкалой для из мерения неопределенности типа случайности, а нечеткое множество являются субъективными шкалами для нечеткости.

С другой стороны, если учесть, что мерой (обыч ной чёткой мерой) отрезка на прямой равна его длине (является мера множества Лебега), то для нечёткого интервала (нечёткого отрез капрямой) - его длина является нечёткой величиной (нечётким числом).

Всвязи с выше из ложенным под понятием нечёткой меры, в общем случае, следует придерживаться следующего понятия:

Определение 7.20. Нечёткозначная числовая функция $g : A \to R$ (где *R* - нечёткое подмножество числового множества *R)* называется *нечёткой мерой,* если:

1° $g(A) \ge 0$ для люб ого $A \in A$, $g(\varnothing) = 0$;

2° $g\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} g(A_n)$, где $A_n \in A$, $(n=1,2,...,)$

3° если $A_i, A_j \in A$ и $A_i \subset A_j$, то $g(A_i) \le g(A_j)$ (монотонность);

4° если $A_n \in A$ является монотонной последовательностью, то $\lim_{n\to\infty} g(A_n) = g(\lim_{n\to\infty} A_n)$ (непрерывность).

Из введенного определения нечёткой меры следует, что если *A* есть нечёткое множество, то $g(\cdot)$, вообще говоря, есть чёткая функция, в противном случае $g(\cdot)$ нечёткая функция. С другой стороны, учитывая, что любые два нечётких подмножества, содержащие одни и те же элементы одного и того же универсального множества X с различ ными степенями чёткости, отличаются друг от друга степенью (уровнем) нечёткости, то мера неч ёткого множества зависит от значений уровня нечёткости данного нечёткого множества.

Кроме того, сравнивая (3°, 7.20) и (3, 7.63) убеждаемся в том, что нечёткая мера (мера нечёткого множества) является однопараметрическим расширением обычной чёткой меры (меры чёткого множества).

Всвязи с изложенным, при определении нечёткой меры следует конкретизировать с какой степенью чёткости определяется нечёткая мера.

Определение 7.21. Нечёткозначная числовая функция $g_\alpha : A_\alpha \to R$ называется нечёткой мерой α-уровня (где $\alpha \in (0;1)$), если:

$$\left.\begin{array}{l} 1'.\ g_\alpha(A) \ge 0 \text{ для любого } A \in A_\alpha;\ g_\alpha(\varnothing) = 0; \\ 2'.\ g_\alpha\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} g_\alpha(A_n), \text{ где } A_n \in A_\alpha,\ (n=1,2,..), \\ A_i \bigcap A_j = \varnothing, \text{ при } i \ne j; \\ 3'.\ \text{Если } A_i, A_j \in A_\alpha \text{ и } A_i \subset A_j, \text{ то } g_\alpha(A) \le g_\alpha(A_j) \\ \text{монотонность.} \\ 4'.\ \text{Если } \{A_n\} \in A_n \text{ - монотонная} \\ \text{последовательность, то } \lim\limits_{n\to\infty} g_\alpha(A_n) = g_\alpha\left(\lim\limits_{n\to\infty} A_n\right) \end{array}\right\} \quad (7.65)$$

В силу (3.7) и 3' следует, что

$$g_{\alpha_1}(A) \le g_{\alpha_2}(A) \text{ для } \forall \alpha_1, \alpha_2 \in (0;1] \text{ при } \alpha_1 \le \alpha_2 \quad (7.66)$$

Следует отметить, что в общем случае как для чёткой, так и для нечёткой меры условие аддитивности не выполняется, т.е.: $g_\alpha(A \bigcup B) \ne g_\alpha(A) + g_\alpha(B)$ для $\forall \alpha \in (0;1]$ влечёт за собой

$$\left.\begin{array}{l} \forall A, \beta \in A_\alpha : g_\alpha(A \bigcup \beta) \ge \max(g_\alpha(A), g_\alpha(\beta)) \\ \forall A, \beta \in A_\alpha : g_\alpha(A \bigcap \beta) \le \min(g_\alpha(A), g_\alpha(\beta)) \end{array}\right\} \quad (7.67)$$

При решении практических задач моделирования с использ ованием аппарата теории нечётких мер, для управления выч ислительных алгоритмов на ЭВМ, удобно аппроксимировать нечёткие меры. Для этой цели, в частности,

$$g_\alpha([a,b]) = \begin{cases} b_L(\alpha) - a_L(\alpha) \\ b_R(\alpha) - a_R(\alpha) \end{cases} \quad (7.68)$$

Если при этом $\alpha=1$, то нечёткая мера (7.48) совпадает с чёткой мерой по Лебегу.

Основные свойства нечётких мер рассмотрим на примере метрики Сугено (7.43). Для построения нечётких мер в литературе используются следующие λ-правила. Пусть *A,*

$$B \in \beta;\ A \cap B = \varnothing.$$

Тогда

$$g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B) + \lambda g_\lambda(A) g_\lambda(B) \quad (7.69)$$

В случае $A \cup B = X$ условие (7.69) будем называть условием нормировки для g_λ мер. Очевидно, что если

$$\overline{A} = X^\lambda \setminus A,\ A \in \beta,$$

то из (7.69) следует

$$g_\lambda(\overline{A}) = \frac{1 - g_\lambda(A)}{1 + \lambda g_\lambda(A)} \quad (7.70)$$

Формула (7.70) определяет класс λ-дополнений Сугено. При $\lambda > 0$ имеем класс супераддитивных мер, а при $-1 < \lambda < 0$ получаем класс субаддитивных мер. В общем случае, когда *A* и *B* - произвольные непересекающиеся подмножества множества *X,* т.е. $A, B \in \beta,\ A \cap B = \varnothing$ выражение (7.69) принимает вид.

$$g_\lambda(A \cup B) = \frac{g_\lambda(A) + g_\lambda(B) - g_\lambda(A \cap B) + \lambda g_\lambda(A) g_\lambda(B)}{1 + \lambda g_\lambda(A \cap B)} \quad (7.71)$$

Если $X = \beta$, то g_λ-меру можно построить непрерывной функции *h(x),* удовлетворяющее следующим свойствам:

1. если $x \le y$, то $h(x) \le h(y),\ \forall x, y \in \beta$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0;\ \lim\limits_{x \to \infty} h(x) = 1$

Функция *h* - называется нечёткой функцией распределения. Таким образ ом, нечёткую меру на *(R*β*)* можно построить в виде:

$$g_\lambda([a; b]) = \frac{h(b) - h(a)}{1 + \lambda h(a)} \quad (7.72)$$

Следует отметить, что выражение $g(A)$ представляет собой меру, характеризующую степень нечёткости А, т.е. оценку нечёткости суждений «X∈A».

Все нечёткие меры можно разделить на два класса: супераддитивные и субаддитивные.

I. Супераддитивные меры

1) Функция доверия.

Определение 7.22. Мера, удовлетворяющая следующим условиям, называется функцией доверия:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ b(\varnothing)=0;\ b(x)=1;\ \forall A\in\beta;\ 0\le b(A)\le 1 \\ 2.\ \forall A_1,\dots,A_n\in\beta: b\left(A_1\cup\ldots\cup A_n\right)\ge\sum\limits_{i=1}^{n}b(A_i)- \\ \quad -\sum\limits_{i<j}b\left(A_i\cap A_j\right)+(-1)^{n+1}b\left(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n\right) \end{array}\right\} \tag{7.73}$$

Следует отметить, что при $|\beta|=2$, имеем:

$$\forall A,B\in\beta: b\left(A\cup B\right)\ge b(A)+b(B)-b(A\cap B)$$

Существуют другие определения этой меры.

2) Согласованная функция доверия.

Понятие согласованной функции доверия базируется на определении ядра $C=\{B\subset X|m(B)>0\}$ полностью упорядоченного по вложенности. Поэтому любая функция носителя является согласованной функцией доверия. Согласованная функция доверия определяется с помощью следующих аксиом:

$$\begin{array}{l} 1)\ b(\varnothing)=0;\ b(X)=1 \\ 2)\ b\left(A\cap B\right)=\min\left(b(A),b(B)\right);\ \forall A\in\beta \end{array}$$

При этом

$$\min\left(b(A),B(\overline{A})\right)=0;\ \forall b,\exists B;\ b\left(A\cup B\right)>\max\left(b(A),b(B)\right)$$

II. Субаддитивные меры. К ним относятся мера правдоподобя, мера возможности, мера вероятности и другие.

Определение 7.23. Если $b(\cdot)$ есть функция уверенности, то мера правдоподобия множества А из *X* определяется как

$$DI(A)=1-b(\overline{A}) \tag{7.74}$$

Мера правдоподобия удовлетворяет следующим аксиомам:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ PI(\ \ ) = 0;\ PI(X) = 1 \\ &2)\ \forall A_1, ..., A_n \in X;\ PI\left(A_1 \cap ... \cap A_n\right) \\ &\quad \le \sum_{i=1}^{n} PI\left(A_i\right) - \sum_{i<j} PI(A_i \cup A_j) + ... + \\ &\quad + (-1)^{n+1} PI\left(A_1 \cup ... \cup A_n\right) \end{aligned}\right\} \quad (7.75)$$

В литературе приведён иной способ определения функции правдоподобия.

Определение 7.24. Если $m(\cdot)$ есть нечёткая мера, удовлетворяющая свойствам:

$m(\varnothing) = 0;\ \sum_{A \in \beta} m(A) = 1$ (полное доверие), тогда

$$\forall A \in \beta : PI(A) = \sum_{B \cap A \ne \varnothing} m(B) \quad (7.76)$$

является мерой правдоподобия.

Меры правдоподобия называют также верхними вероятностями.

Очевидно, что эти два определения эквивалентны.

Справедливо утверждение: если $g_1(\cdot)$ и $g_2(\cdot)$ две меры такие, что $\forall A \in \beta : g_1(A) + g_2(\overline{A}) = 1,$ то g_1 является функцией доверия тогда и только тогда, когда g_2 – есть мера правдоподобия.

Определение 7.25. Мерой возможности называется функция $\Pi{:}\beta \to [0,1],$ удовлетворяющая следующим условиям:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \Pi(\varnothing)=0;\ \Pi(X)=1 \\ &2)\ \forall i \in N, A_i \subset X, \prod\left(\bigcup_{i \in N} A_i\right) = \underset{i \in N}{sub} \prod\left(A_i\right) \end{aligned}\right\} \quad (7.77)$$

N - множество натуральных чисел.

Мера возможности может быть построена с помощью распределения возможности $\pi(x),$ являющейся функцией $\pi{:}[0;1]$ такой, что $\underset{x \in X}{sur}\, \pi(x) = 1$. Нетрудно увидеть, что

$$\forall A \in \beta : \prod(A) = \underset{x \in A}{sur}\,\pi(x)\ .$$

Очевидно, что для счётного множества $\pi(x) = \prod(x)$.

Любая мера возможности является нечёткой мерой тогда и только тогда, когда существует функция распределения *f* такая, что $\underset{x \in X}{sur}\, f(x) = 1$

Если $g_1(A) + g_2(\overline{A}) = 1$ и $g_1(\cdot)$ - согласованная функция доверия, то $g_2(\cdot)$ - есть мера возможности.

Определение 7.26. Нечёткая мера *g=P* называется вероятностной мерой, если:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \forall A \in \beta;\ P(A) \in [0;1];\ P(\varnothing) = 0; P(X) = 1 \\ 2)\ \forall i \in N; A_i \in \beta \text{ и } \forall i \neq j : A_i \cap A_j = \varnothing, \text{то} \\ \qquad\qquad P\left(\bigcup\limits_{i \in N} A_i\right) = \sum\limits_{i \in N} P(A_i) \end{array}\right\} \quad (7.78)$$

Вероятностная мера является частным случаем меры правдоподобия λ=0).

Определение 7.27. Нечёткая мера *g* называется g_γ-мерой, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ g_\nu(X) = 1;\ g_\nu(\varnothing) = 0 \\ 2)\ \forall i \in N;\ A \in \beta \text{ и } \forall i \neq j;\ A_i \cap A_j = \varnothing \\ g_\nu\left(\bigcup\limits_{i \in N} A_i\right) = (1-\nu)\bigvee\limits_{i \in N} g_\nu(A_i) + \nu \sum\limits_{i \in N} g_\nu(A_i) \\ \\ \text{где } \nu > 0; \\ 3)\ \forall A, B \in \beta \text{ и } A \subseteq B,\ g_\nu(A) \leq g_\nu(B) \end{array}\right\} \quad (7.79)$$

Отметим, что g_ν - мера является расширением меры Цукамото, для которой $\nu \in [0,1]$. Очевидно, что при ν=0 g_ν-мера становится мерой возможности, а при ν=1 - вероятностной мерой. Если ν> 1, то g_ν-мера описывает неопределённость, отличающуюся по своим свойствам от вероятности или возможности.

В случае счётного множества X условие нормировки для g_v-меры имеет вид:

$$g_\nu(X) = (1-\nu)\bigvee_{i\in N} g_\nu + \nu\sum_{i\in N} g_i = 1 \quad (7.80)$$

где $g_i = g_\nu(\{x_i\})$ для $\forall x \in X$, $\forall i \in N$.

Решение многих задач нахождения значений g_v-меры для случая множества действительных чисел намного упрощается, если применить аппроксимации с помощью функций *(S-L)* типа.

Определение 7.28. Функция *SL(•)* называется функцией *(S-L)*-типа, тогда и только тогда, когда

$$\forall x \in R^+ : SL(-x) = SL(x);\ SL(0) = S,\ S \in [0;1],$$

причём $SL(\cdot)$ - монотонно убывает на R^+. Например, $SL(x) = S\max\left(0; 1-|x|^P\right)$;

$SL(x) = Sep\left(-|x|^P\right)$, $P \geq 1$

Определение 7.29. Нечёткой плотностью *SL*-типа называется неч ёткая плотность $g' : X \to [0;1]$ такая, что

$$g'(x) = \begin{cases} SL'\left(\dfrac{a'-x}{m_L}\right) \text{ при } x \leq a';\ m_L \geq 0 \\ SL''\left(\dfrac{x-a''}{m_R}\right) \text{ при } x > a'';\ m_R \geq 0 \\ S, \qquad \text{если } x \in [a'; a''] \subset \Re \end{cases} \quad (7.81)$$

где $m_R,\ m_L$ - правое и левое растяжения, L', L'' функции (L-R)-типа. Очевидно, что если $L' = L'' = L$, то

$$g'(x) = SL\left(\frac{a'-x}{m_L} \vee \frac{x-a''}{m_R} \vee 0\right) = L(a(x))$$

Можно показать, что $\forall [a,b] \subset X \subset \Re$

$$g_\nu([a;b]) = \underset{x\in[a,b]}{sur}\, g'(x)(1-\nu) + \nu\int_a^b g'(x)dx =$$
$$S\left((1-\nu)L\left(\inf_{x\in[a,b]}\left(\frac{a'-x}{m_L}\vee\frac{x-a''}{m_R}\vee 0\right)\right)+\nu\widetilde{L}_a^b\right)$$

где

$$\widetilde{L}_a^b = \int_a^b L\left(\left(a'-x\right)/m_L \vee \left(x-a''\right)/m_R \vee 0\right)dx$$

Нетрудно увидеть, что

$$\inf\left(\frac{a'-x}{m_L}\vee\frac{x-a''}{m_R}\vee 0\right) = \begin{cases} 0,\text{если } [a',a'']\cap[a,b]\neq\varnothing \\ \dfrac{a'-b}{m_L},\text{если } b\le a' \\ \dfrac{a-a''}{m_R},\text{если } a\ge a'' \end{cases} \qquad (7.82)$$

Параметр нормировки g_γ-меры ν может быть найден из условия (7.82) по формуле:

$$\nu = \left(1-\bigvee_{i=1}^{n} g_i'\right)\Bigg/\left(\sum_{i=1}^{n} g_i' - \bigvee_{i=1}^{n} g_i'\right) \qquad (7.83)$$

Параметр S определяется как:

$$S = \arg\underset{x\in X}{sur}\, g_\nu'(\{x\}) \qquad (7.84)$$

При этом, если предположить, что нечёткая мера на элементарном подмножестве равна значению нечёткой плотности в точке, принадлежащей этому подмножеству, т.е. $g_\nu(\Delta_i)\approx g_\nu'(\{x\})$, где $g_\nu(\Delta_i)$ - нечёткая мера, в случае *(S-L)*- аппроксимации получим:

$$g_\nu(\Delta_i) = S\left((1-\nu)\underset{x\in X}{sur}\, L(a(x)) + \nu\int_{\Delta i} L(a(x_i))dx\right) \qquad (7.85)$$

В простейшем случае оценивание параметров *(S-L)*-функции следует производить, используя функционал вида:

$$h = \left(\sum_{x_i \in X} \left(SL(a(x_i)) - g_i'(\{x_i\}) \right)^2 \right)^{1/2} \tag{7.86}$$

Рассмотренные методы аппроксимации позволяют упростить процедуры вычисления нечётких мер при определении значений нечётких интегралов в различных алгоритмах.

Определение 7.30. Нечётким интегралом от функции $h : X \to [0;1]$ на множестве $A \subset X$ по нечёткой мере g будем называть

$$\int_A h(x) \circ g = \underset{\alpha \in [0;1]}{sur} \left(\alpha \wedge g\left(A \cap H_\alpha\right) \right) \tag{7.87}$$

где $H_\alpha = \{x / h(x) \geq \alpha\}$.

Если $\Im(X)$ - множество нечётких подмножеств универсального множества *X,* а понятие нечёткого подмножества включает в себя понятие чёткого подмножества, то $\Im(X)$ является нечётким расширением

$$\beta;\ \Im(X) \supset \beta .$$

*Определение 7.31.*Функция множества $\tilde{g}$, определяется в виде:

$$\tilde{g}(A) = \int_A \mu_A \circ g \tag{7.88}$$

для $A = \{(x, \mu_A(x))\},\ \mu_A \in \Im(X)$ называется расширением на $\Im(X)$.

Определение 7.32. Нечётким интегралом от функции $h : X \to [0;1]$ на нечётком множестве $\mu_A \in \Im(X)$ по нечёткой мере g будем называть:

$$\int_A h(x) \circ g = \int_A \left(\mu_A(x) h(x) \right) \circ g \tag{7.89}$$

Отметим, что для описания различных видов неопределённостей в теории нечётких мер используется общее понятие «степень нечёткости», которое включает в себя «степень важности», «степень уверенности» и «степень принадлежности» в теории нечёткого множества. Если степень принадлежности $x_0 \in E$ равна $g(x_0, E)$, а вместо *E* взято нечёткое подмножество $\mu_A \in \Im(X)$, то

$$g(x_0, A) = \int_X \mu_A(x) \circ g(x_0, \bullet) = \mu_A(x_0)$$

Отметим основные свойства нечётких интегралов. Пусть $\alpha \in [0;1], (E, F) \subseteq X$. Тогда, если $h : X \to [0;1]$, то

$$\int_E (\alpha \vee h) \circ g = \alpha \vee \int_E h \circ g$$

$$\int_E (\alpha \wedge h) \circ g = \alpha \wedge \int_E h \circ g$$

$$\int_E (h_1 \wedge h_2) \circ g \leq \int_E h_1 \circ g \int_E h_2 \circ g$$

$$\int_E (h_1 \vee h_2) \circ g \geq \int_E h_1 \circ g \bigvee \int_E h_2 \circ g$$

$$\int_{E \bigcup F} h \circ g \geq \int_E h \circ g \bigvee \int_F h \circ g$$

$$\int_{E \bigcap F} h \circ g \leq \int_E h \circ g \bigwedge \int_F h \circ g$$

Кроме того,

$$\int_A h \circ g = M$$

тогда и только тогда, когда $g(A \cap F_M) \geq M \geq g(A \cap F_{M+0})$, где $F_M = \{x / h \geq M\}$ и $F_{M+0} = \{x / h > M\}$

Легко показать, что понятие нечёткого интеграла сходно с понятием интеграла Лебега. Для этого рассмотрим разбиение множества X на непересекающиеся подмножества $E_{i:}$

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \varnothing E_i \cap E_j \neq \quad , i \neq j .$$

Пусть $h(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_{E_i}(x)$, где $\alpha \in [0;1], E_i \in \beta$, аf_{E_i}

характеристическая функция множества E_i:

Пусть l - есть мера Лебега. Интеграл Лебега то функции *h* по множеству *A* определяется как

$$\int_A hdl = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l(A \cap E_i) \tag{7.91}$$

где $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$. Пусть $F_i = E_i \cup E_{i+1} \cup \ldots \cup E_n$

Тогда определяя $h(x) = \max\limits_{i=1,n} \min\left(\alpha_i, f_{F_i}(x)\right)$, получим следующее выражение для нечёткого множества:

$$\int_A h(x) g(\cdot) = \max_{i=1,n} \min\left(\alpha_i g\left(A \cap F_i\right)\right) \qquad (7.92)$$

В заключение приведём экспериментальное определение нечёткой меры. Пусть существует «m» объектов и пусть $h_j : K \to [0;1]$- оценка j-го объекта, а l_j- общая оценка, получаемая из (5.8), (5.9), либо аналогичных операций над нечёткими числами. Предъявляя индивиду объекты и их частные оценки, можно получить его субъективные оценки «d_i» из [0;1] для всех объектов. Обозначим $\bar{l} = \max\{l_j\}; \underline{l} = \min\{l_j\}$ и аналогично $\bar{d}$ и $\underline{d}$.

Проводя нормализацию $l_j \forall j \in \left(\overline{1,m}\right)$, имеем:

$$W_j = \frac{\bar{d} - \underline{d}}{\bar{l} - \underline{l}} l_j + \frac{\underline{d}\bar{l} - \bar{d}\underline{l}}{\bar{l} - \underline{l}}$$

Субъективная нечёткая мера может быть получена при условии минимума критерия

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left(d_j - w_j\right)^2} \qquad (7.94)$$

2.8. Нечеткие дифференциальные уравнения

2.8.1. Нечеткие линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 8.1. Нечетким дифференциальным уравнением будем называть дифференциальное уравнение, хотя бы один из коэффициентов которого есть нечеткая функция, либо нечеткое число.

Так как понятие нечеткого диффреенциального уравнения не связано ни с его порядком, ни с его линейностью и ни с его однородностью, то все основные понятия (различных видов решений дифференциальных уравнений с четкими коэффициентами) справделивы для дифференциальных уравнений с нечеткими коэффициентами. При этом их решения являются нечеткими функциями, либо семейством нечетких функций.

Следует отметить, что так как решение нечеткого уравнения есть нечеткая функция, то и начальные условия, при которых ищется частное решение, являются нечеткими величинами.

Для конкретности приведем все основные понятия для нечеткого дифференциального уравнения первого порядка.

Определение 7.2. Диффреницальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \tilde{f}(x, y) \qquad (8.2)$$

будем называть нечетким дифференциальным уравеннием первого порядка, если $\tilde{f}(x,y)$ есть нечеткая функция.

Определение 8.3. Нечеткую функцию $\tilde{\varphi}(x,y)$, зависящую от переменной дифференцирования и произвольной постоянной $\tilde{C}$ (четкой либо нечеткой) будем называть общим решением уравнения (8.1), если:

1) если она удовлетворяет данному уравнениею при любых значениях $\tilde{c}$;

2) Каково бы ни было начальное условие

$$\tilde{y}|_{x=x_0} = \tilde{y}_0$$

всегда можно найти такое значение $\tilde{c} = \tilde{c}_0$, что функция $\tilde{y} = \tilde{\varphi}(x, \tilde{c}_0)$ удовлетворяло начальному условию.

Определение 8.4. Частным нечетким решением уравнения (8.1), удовлетворяющего начальному условию (8.2) будем называть нечеткую функцию $\tilde{y} = \tilde{\varphi}(x)$ которая удовлетворяет уравнению (8.1) и входит в семейство общего решения этого уравнения, т.е. существует такое нечеткое значение нечеткой постоянной,что

$$\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(x, \tilde{c}_0)$$

Аналогично можно ввести поянтие особого нечеткого решения уравенния (8.1).

Как и в случае четких линейных дифференциальных уравнений, нечеткие линейные дифференциальные уравнения *n*-го порядка можно выразить в виде:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^{n-k}}{dX^{n-k}} = \tilde{f}(x) \qquad (8.3)$$

где a_k могут быть как постоянные (нечеткие числа), так и переменные (нечеткие величины);

$\tilde{f}(x)$ - может быть как четкой, так и нечеткой функцией.

Отметим, что все методы решения различных типов обыкновенных дифференциальных уравнений с четкими коэффициентами справедливы и для аналогичных дифференциальных уравнений с нечеткими коэффициентами.

Для применения известных методов решения дифференицальных уравнений с четкими коэффициентами к решению уравнений с нечеткими коэффициентами той же структуры наиболее удобным (так же и при решении нечетких алгебраических уравнений) является сведение этих уравнений к интервальным дифференциальным уравнениям.

Проиллюстрируем решение нечетких линейных дифференциальных уравнений первого и второго порядкы на конкретных примерах. **Пример** 8.1

$$\frac{dy}{dx} = \tilde{2}y + \tilde{6};\ \tilde{y}|_{x=0} = \{4; 0{,}2; 0{,}1\}$$
$$\tilde{2} = \{2; 0{,}1; 0{,}2\}\tilde{6} = \{6; 0{,}2; 0{,}1\}$$

Пусть $\tilde{y} = \{y_L; y_R\}$. Тогда на основания правила деления нечетких чисел (1.46) имеем:

$$\frac{\tilde{6}}{\tilde{2}} = \frac{\{6; 0{,}2; 0{,}1\}}{\{2; 0{,}1; 0{,}2\}} = \{3; 0{,}227; 0{,}053\}.$$

Тогда имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_L}{dx} = 1{,}9(y_L + 2{,}773) y_L|_{x=0} = 3{,}8 \\ \begin{cases}\dfrac{dy_R}{dx} = 2{,}2(y_{RL} + 3{,}053) y_R|_{x=0} = 4{,}1\end{cases} \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} y_L = C_L e^{1{,}9x} - 2{,}773 \\ C_L = 6{,}573 \end{cases},$$

тогда

$$\begin{cases} y_R = C_R e^{2{,}2x} - 3{,}053 \\ C_R = 7{,}153 \end{cases}$$

Следовательно,

$$\tilde{y} = \begin{cases} y_L = 6{,}573e^{1{,}9x} - 2{,}773 \\ y_R = 7{,}153e^{2{,}2x} - 3{,}053 \end{cases}$$

Легкопо казать, что для $\forall\alpha\in[0{,}1], y_L \le y_R$

Для случая задачи Коши для уравнения с четкими коэффициентами и четким начальным условием:

$$\frac{dy}{dx} = 2y + 6; y|_{x=0} = 4$$
$$y = Ce^{2x} - 3; c = 7; y = 7e^{2x} - 3$$

При этомдля любого α-уровня имеем:

$$\tilde{y}(\alpha, x) = \{y_L(\alpha, x); y_R(\alpha, x),\} =$$
$$= \{[7 - (1-\alpha),427]e^{[2-(1-\alpha),1]x} -$$
$$-[3 - (1-\alpha),227]; [7 + (1-\alpha)153]e^{[2+(1-\alpha),0,2]x} -$$
$$-[3 + 1 - \alpha)0{,}053\}$$

Докажем, что для $\forall\alpha\in[0{,}1], y_L(\alpha, x) < y_R(\alpha, x)$ имеем:

$$\frac{dy_L(\alpha,x)}{dx} =$$
$$= [7 - (1-\alpha)0{,}427][2 - (1-\alpha)0{,}1]e^{[2-(1-\alpha)0{,}1]x} > 0$$
$$= [7 - (1-\alpha)0{,}427][2 - (1-\alpha)0{,}1]e^{[2-(1-\alpha)0{,}1]x} > 0$$
$$\frac{dy_R(\alpha,x)}{dx} =$$
$$= [7 + (1-\alpha)0{,}1][2 + (1-\alpha)0{,}2]e^{[2-(1-\alpha)0{,}1]x} > 0$$

для любых $x\in(-\infty;\infty)$ и $[0{,}1]$.Поэтому

$y_L(\alpha, x)$ *и* $y_R(\alpha, x)$, возрастающие функции. Но так как

$\frac{dy_L(\alpha,x)}{dx} < \frac{dy_R(\alpha,x)}{dx}$ и $y_L(\alpha, x) < y_R(\alpha, 0)$ для, $\forall[0{,}1]$, то

$y_L(\alpha, x) < y_R(\alpha, 0)$ на [0,1] и лишь $y_L(1, x) = y_R(1, x)/$ В частности, для α=0,8, имеем:

$$\tilde{y}(0{,}8; x) = \{6{,}914\, e^{1{,}98x} - 2{,}956; 7{,}031e^{2{,}04} - 3{,}011\}$$

Отметим, что учитывая теорему о возрастании и убывании функций одной переменной, легко доказать, что относительно параметра $\alpha\in[0{,}1]$функция $y_L[\alpha, x]$ монотонно убывает. Кроме этого, если *y(x)* – возрастающая функция, то и функции $y_L(\alpha, x)$ и $y_R[\alpha, x]$ для любого $\alpha\in[0,1]$ - возрастающие функции и наоборот.

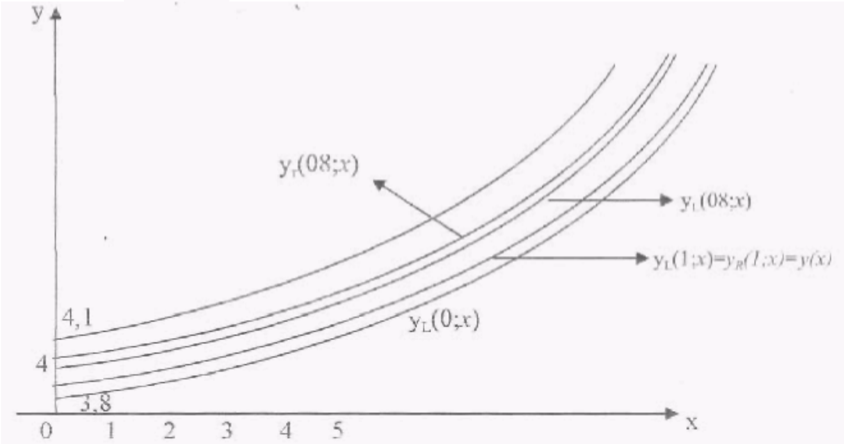


Рис.8.1

Наконец, для любого конечного *n*

$$\frac{d^n\tilde{y}(\alpha,x)}{dx^n}=\frac{d^n}{dx^n}\{y_L(\alpha,x);y_R(\alpha,x)\}=$$

$$=\left\{\frac{d^n y_L(\alpha,x)}{dx^n};\frac{d^n y_R(\alpha,x)}{dx^n}\right\}$$, если $\frac{d^n y}{dx^n}>0$,

$$=\left\{\frac{d^n y_R(\alpha,x)}{dx^n};\frac{d^n y_L(\alpha,x)}{dx^n}\right\}$$, если $\frac{d^n y}{dx^n}<0$

Таким образом, для решения нечетких линейных дифференциальных управлений можно воспользоваться одним из следующих способов:

I. Составить и решить четкое дифференциальное уравнение, соответствующее данному нечеткому дифференциальному уравнению.

II. Представить нечеткое дифференциальное уравнение и нечеткие начальные условия в интервальной форме и решив полученую задачу найти решение поставленной задачи в виде функций (L-R)-типа для любого $\alpha\in[0,1]$.

III. Решить соответсвующее четкое дифференциальное уравнение с четкими начальными условиями:

IV) Подставить в найденную четкую функцию (решение четкой задачи) вместо четких коэффициентов $\{a_n\}$ заданные соответствующие нечеткие коэффициенты$\{\tilde{a}_n\}$ и получить нечеткую функцию, являющуюся решением заданонгo нечеткого уравнения с нечеткими начальными условиями для любых $\alpha\in[0,1]$. При этом при необходимости полученное нечеткое решение можно представить в интервальной форме.

Пример 7.2

$$y''-\{5;0,2;0,3\}y'-\{6;0,2;0,1\}y=\{2;0,2;0,1\}x-\{3;0,2;0,3\}$$
$$\tilde{y}\big|_{x=0}=\{2;0,2;0,1\}\tilde{y}\big|_{x=0}=0$$

Решение:

1.1. Решим четкую задачу Коши.

$$y''-5y'-6y=2x-3;\quad y\big|_{x=0}=2;\ y'\big|_{x=0}=0$$
$$k^2-5k-6=0;\ k_1=6;\ k_2=-1$$
$$\bar{y}=c_1e^{6x}+c_2e^{-x};\ y^*=Ax+B$$

Проведя элементарные подсчеты и учитывая начальные условия, получаем:

$$y=0,22e^{6x}+1,01e^{-x}-0,33x+0,77$$

Представим нечеткую задачу Коши в интервальной форме и найдем ее решение

$$\begin{cases}y''-5,2y'-6,2y=18x-3,3 & y\big|_{x=0}=2,1;\quad y'\big|_{x=0}=0\\ y''-4,7y'-5,9y=2,1x-28 & y\big|_{x=0}=1,8;\quad y'\big|_{x=0}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}k^2-5,2k-6,2=0\\ k^2-4,7k-5,9=0\end{cases}=>\begin{cases}k_1=6,37;\ k_2=0,97\\ k_1=5,73;\ k_2=1,03\end{cases}$$

Учитывая начальные условия, находим решение задачи в интервальной форме:

$$\tilde{y}=\begin{cases}y_R=0,37e^{6,37}+1,1e^{-0,89x}-0,29x+0,775\\ y_R=0,13e^{5,73x}+1,08e^{-1,03x}-0,356x+0,589\end{cases}$$

II. $y''-5y'-6y=2x-3;\quad y\big|_{x=0}=2;\ y'\big|_{x=0}=0$

$$y=0,22e^{6x}+1,01e^{-x}-0,33x+0,77$$

Учитывая правило действий над нечеткими числами, имеем:

$$\tilde{7} = \tilde{6} + \tilde{1} = \{7; 0{,}5; 0{,}4\}$$
$$\tilde{9} = \tilde{3} \cdot \tilde{3} = \{9; 1{,}71; 1{,}71\}$$
$$\widetilde{0{,}77} = \tilde{7} : \tilde{9} = \{0{,}77; 0.234\}$$
$$\widetilde{0{,}22} = \left(\widetilde{0{,}77} - \widetilde{0{,}33}\right) : 2 = \{0{,}22; 1{,}004; 0{,}972\}$$

Следовательно,

$$\tilde{y} = \begin{cases} y_R = 1{,}192e^{6,2} + 1{,}84e^{-0,98x} - 0{,}324x + 7{,}4 \\ y_L = 0{,}76e^{5,9x} + 0{,}68e^{-1,03x} - 0{,}339x + 6{,}4 \end{cases}$$

Из примера следует, что при решении нечетких дифференциальных уравнений наиболее эффективным является способ применения интервальных дифференциальных уравнений.

2.8.2.Система нечетких дифференциальных уравнением первого порядка

Определение 8.5 Систему дифференциальных, содержащую хотябы одно нечеткое дифференциальное уравнение, будем называть нечеткой системой дифференциальных уравенний и обозначим:

$$\frac{dy_i}{dx} = \tilde{f}_i(x, y_1, y_2, \dots y_n), (i = \overline{1, n}) \qquad (8.5)$$

Для случая нечетких линейных дифференциальных уравнений первого порядка имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \sum\limits_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} y_i + \tilde{f}_1(x) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = \sum\limits_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} y_i + \tilde{f}_2(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = \sum\limits_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} y_i + \tilde{f}_n(x) \end{cases} \qquad (8.6)$$

Следует отметить, что:

1)$\tilde{f}_i(x)$ 1)могут быть и четким и нечетким функциями;

2) понятие решений системы нечетких дифференциальных уравнений определяются аналогично, что и решения аналогичных систем с четкими дифференциальными уравнениями.

В частности, решение системы (8.6) следует искать следующим образом:

1) привести заданную систему нечетких уравнений к системе интервальных уравнений;

2) В зависимости от типа полученных систем четких дифференциальных уравнений применяем тот или иной способ решения системы дифференциальных уравнений.

Пример 8.3.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \tilde{2}x + y & X\big|_{t=0} = \tilde{4} \\ \dfrac{dx}{dt} = \tilde{3}x + \tilde{4}y & y\big|_{t=0} = \tilde{1} \end{cases}$$

где $\tilde{1} = \{1; 0,2; 0,3\}; \tilde{2} = \{2; 0,2; 0,1\};$
$\tilde{3} = \{3; 0,1; 0,3\}; \tilde{4} = \{4; 0,2; 0,3\};$

Решение. Пусть $\tilde{X} = \{X_L; X_R\}; \tilde{y} = \{y_L; y_R\}$

Выпишем нечеткую задачу Коши в интервальной форме и решим ее. Имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{dX_R}{dt} = 2,1X_R + 1,3y_R & X_R\big|_{t=0} = 4,3 \\ \dfrac{dy_R}{dt} = 3,3X_R + 4,3y_R & y_R\big|_{t=0} = 1,3 \end{cases}$$

$$y_R = \frac{1}{1,3}\left(X_R' - 2,1X_R\right)$$

$$X_R'' - 6,4X_R' + 5,6X_R = 0$$

$$\begin{cases} X_R = C_{R_1}e^{5,46t} + C_{R_2}e^{1,05t} \\ y_R = 3,26C_{R_1}e^{5,46t} - 1,02C_{R_2}e^{1,05t} \end{cases}$$

Аналогично,

$$\begin{cases} \dfrac{dX_L}{dt} = 1,8X_L + 0,8y_L & X_L\big|_{t=0} = 3,8 \\ \dfrac{dy_L}{dt} = 2,9X_L + 3,8y_L & y_L\big|_{t=0} = 0,8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_L = C_{L_1} e^{4,62t} + C_{L_2} e^{0,98t} \\ y_L = 3,53 C_{L_1} e^{4,62t} - 1,1 C_{L_2} e^{0,98t} \end{cases}$$

Учитывая начальные условия, имеем:

$$\begin{cases} X_L = 1,08e^{4,62t} - 2,7e^{0,98t} \\ y_L = 3,64e^{4,62t} - 2,8e^{0,98t} \end{cases}$$

Таким образом, решение нечеткой задачи Коши в интервальной форме будет:

$$\begin{cases} \tilde{X} = \{1,08e^{4,62t} + 2,7e^{0,98t}; 1,33e^{5,46t} + 2,97e^{1,05t}\} \\ \tilde{y} = \{3,04e^{4,62t} - 2,84e^{0,98t}; 4,34e^{5,46t} - 3,042,97e^{1,05t}\} \end{cases}$$

Для сведения решения нечеткой задачи Коши к виду

$$\{\tilde{X}; \tilde{y}\} = \{\{X; m_{X_L}; m_{X_R}\}, \{y; m_{y_L}; m_{y_R}\}\}$$

Следует выписать четкую задачу Коши.

Имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \qquad X\big|_{t=0} = 4 \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y \qquad y\big|_{t=0} = 1 \end{cases}$$

Откуда:

$$\begin{cases} x = 1,25e^{5t} + 2,75e^{t} \\ y = 3,75e^{5t} - 2,75e^{t} \end{cases}$$

Сравнивая полученные результаты, убеждаемся, что $X(t) \in \tilde{X}(t)$ и $y(t) \in \tilde{y}(t)$.

Учитывая свойство выпуклости нечетких величин, для любого $\alpha \in [0;1]$ имеем:

$$\tilde{X}(\alpha, t) = \begin{Bmatrix} X_L(\alpha, t) \\ X_R(\alpha, t) \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{cases} [1,25 - (1-\alpha)0,17]e^{[5-(1-\alpha)0,38]t} + [2,75 - (1-\alpha)0,03]e^{[1-(1-\alpha)0,02]t} \\ 1,25 + (1-\alpha)0,08e^{[5+(1-\alpha)0,46]t} + [2,75 + (1-\alpha)0,22]e^{[1+(1-\alpha)0,02]t} \end{cases}$$

$$\widetilde{y}(\alpha,t)=\begin{Bmatrix} y_L(\alpha,t) \\ y_R(\alpha,t) \end{Bmatrix}=$$

$$=\begin{cases}[3{,}75-(1-\alpha)0{,}22]e^{[5-(1-\alpha)0{,}38]t}-[2{,}75-(1-\alpha)0{,}02]e^{[1-(1-\alpha 00{,}02]t} \\ [3{,}75+(1-\alpha)0{,}59]e^{[5+(1-\alpha)0{,}46]t}-[2{,}75+(1-\alpha)0{,}29]e^{[1+(1-\alpha)90{,}05]t}\end{cases}$$

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\tilde{A}$ - нечеткое множество

$\mathcal{F}$ - множество нечетких подмножеств X

G - нечеткая грамматика

g- нечеткая мера

N - множество натуральных чисел

P - отношение порядка

$\mathfrak{J}$ - множество обычных подмножеств множества X

$\mathcal{R}$- множество действительных чисел

$\mathcal{R}^{+}$ - множество неотрицательных действительньк чисел

$\tilde{R}$ - транзитивное замыкание отношения

R - отношение

T - функция истинности

U - универсальное множество

A_a - множество уровня a нечеткого множества А

μ_b - функдия принадлежности; нечеткое множество

ρ - метрика

$\times$ - Декартово произведение

$\subset$ - строгое включение

$\subseteq$ - включение

$\bigcap$ - пересечение

$\bigcup$ - объединение

$\setminus$ - разность множеств

$\overline{A}$ - дополнение множества A

$\varnothing$ - пустое множество

$\circ$ - композиция отображений; композиция отношений

$\dot{U}$ - ограниченное объединение

$\underset{\bullet}{U}$ - ограниченное пересечение

$\int\cdot$ - знак объединения

$\xrightarrow{H}$ - нечеткое отображение

$\longrightarrow$ - отображение;импликация

$\approx$ - приближенное равенство

$\eqsim$ - равенство, приближенное снизу

$\simeq$ - равенство, приближенное сверху

f - нечеткий интеграл

$\succ$ - символ предпочтения

$*$ - б инарная операция

$\vee$ - операция max, конъюнкция

$\wedge$ - операция min; дизъюнкция

$\oplus$ - расширенная сумма

$\odot$ - расширенное умножение

$\ominus$ - расширенная разность

$\oslash$ - расширенное деление

$\circledast$ - расширенная бинарная операция

$\widetilde{\max}$ - расширенный максимум

$\widetilde{\min}$ - расширенный минимум

$\tilde{\vee}$ -расширенная дизъюнкция

$\tilde{\wedge}$ - расширенная конъюнкция

$\tilde{+}$ - алгеб раическая сумма

$\cdot$ - алгебраическое произведение

$\dot{\vee}$ - ограниченная сумма

$\underset{\bullet}{\wedge}$ - ограниченное произведение

$=>$ - если..., то; семантическое следствие; композиция отношений, определяемая импликацией

$\Leftrightarrow$ -тогда и только тогда, когда...; семантическая эквивалентность

$\leftrightarrow$ - эквивалентность

$\downarrow$ - стрелка Пирса

$|$ - стрелка Шеффера

$\neg$ - отрицание

$\rceil$ - отрицание *A*

Литература

1. Горбатов В. А. Основы дискретной математики. – М.: Высшая школа, 1986.
2. Коршунов Ю. М. Математические основы кибернетики. – М.: Энергия, 1980.
3. Кузнецов О. П., Адельсон-Вельский Г. М. Дискретная математика для инженера. – М.: Энергия, 1980.
4. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. – М.: Наука, 1990.
5. Сигорский В. П. Математический аппарат инженера. – К.: Техніка, 1977.
6. Кузичев А. С. Диаграммы Венна. – М.: Наука, 1968.
7. Кононюк А. Ю. Вища математика. У 2 ч. Ч.1,2 – К: Кольори, 2007.
8. Аверкин А. Н., Батыршин И.З. и др. Нечеткие множества в моделях управления и икусственного интелекта. – М.: Наука, 1986.
9. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. – М.: Радио и связь, 1982.
10. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику. – М.: Наука, 1975.
11. Згуровский М. З. Интегрированные системы оптимального управления и проектирования. – К: Вища школа, 1990.
13. Минский М. Фреймы для представления знаний. –М.: Энергия, 1979.
14. Вильсон А. Дж. Энтропийные методы моделирования сложных систем. – М.: Наука, 1978.
15. Юрков В. Ю., Лукина О. В. /Прикладная геометрия, вып. 8, N 18 (2006), стр. 9-36
16. Ибрагимов В.А. Элементы нечеткой математики. – Баку, 2010.

□□
□