Парадигма развития науки

Методологическое обеспечение

А.Е. Кононюк

ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНАЯ МАТЕМАТИКА

Книга 3

Отношения

Часть 2

Нечеткие

Киев
«Освіта України»
2013


Структурная схема развивающейся панмедийной системы наук
I. Группа междисциплинарных наук
ПН Теория понятий
ЛГ Теория лингвистики
ПЗ Теория познания
СЗ Теория созидания
ПТ Общая теория понятоведения
II. Группа наук познания (фундаментальных наук)
ИН Теория информации
СТ Теория систем
РС Теория распознавания
КС Теория консалтинга (консультирования)
ПР Теория принятия решения
РР Теория реализации принятых решений
III. Группа наук созидания (прикладных наук)
СС Теория социальных систем
ЖО Теория жизнеобеспечения
КМ Теория коммуникаций и транспортирования
ОБ Теория образования (обучения)
СР Теория сохранения (защиты и охраны)
РЗ Теория развития
IV. Группа общедисциплинарных наук (обеспечивающих наук)
ДМ Теория дискретно-непрерывной математики (четкая и нечеткая)
НИ Теория научных исследований
ММ Теория моделей и моделирования
ОМ Теория оптимизации

УДК 51 (075.8)
ББК В161.я7
К65

Рецензенты:

В.В.Довгай - к-т физ.-мат. наук, доц. (Национальный технический университет „КПІ”);

В.В.Гавриленко - д-р физ.-мат. наук, проф., *О.П.Будя* - к-т техн. наук, доц. (Киевский университет экономики, туризма и права);

Н.К.Печурин - д-р техн. наук, проф. (Национальный авиационный университет).

Кононюк А. Е.

К213 Дискретно-непрерывная математика. (Отношения (нечеткие)). — В 12-и кн. Кн 3, ч.2.— К.:Освіта України. 2013. —456с.

ISBN 978-966-373-693-8 (многотомное издание)
ISBN 978-966-373-694-5 (книга 3, часть 2)

Многотомная работа содержит систематическое изложение математических дисциплин, исспользуемых при моделировании и исследованиях математических моделей систем и сетей.

В работе излагаются основы теории множеств, отношений, поверхностей, пространств, алгебраических систем, матриц, графов, математической логики, теории формальных грамматик и автоматов, теории алгоритмов, которые в совокупности образуют единную методолгически взамосвязанную математическую систему «Дискретно-непрерывная математика».

Для бакалавров, специалистов, магистров, аспирантов, докторантов всех специальностей.

УДК 51 (075.8)
ББК В161.я7

ISBN 978-966-373-693-8 (многотомное издание)
ISBN 978-966-373-694-5 (книга 3, часть2)

Оглавление

1. Введение в нечеткие отношения

1.1. Определения и операции над нечеткими отношениями

Нечеткие отношения играют фундаментальную роль в теории нечетких (размытых) систем. Аппарат теории нечетких отношений используется при построении теории нечетких автоматов, при моделировании структуры сложных систем, при анализе процессов принятия решений, в задачах управления технологическими процессами и т.д.

Теория нечетких отношений находит также применение в задачах, в которых традиционно применяется теория обычных (неразмытых, четких) отношений. Как правило, аппарат теории четких отношений используется при качественном анализе взаимосвязей между объектами исследуемой системы, когда взаимосвязи носят дихотомический характер и могут быть проинтерпретированы в терминах «связь присутствует», «связь отсутствует», либо когда методы количественного анализа взаимосвязей по каким-либо причинам не могут быть применены, и взаимосвязи искусственно приводятся к дихотомическому виду. Например, когда величина связи между объектами принимает значения из ранговой шкалы, выбор порога на силу связи позволяет преобразовать связь к требуемому виду. Однако подобный подход, проводить качественный анализ систем, приводит к потере информации о силе связей между объектами, либо требует проведения вычислений при разных порогах на силу связей. Этого недостатка, как нам кажется, лишены методы анализа данных, которые основаны на теории нечетких отношений, позволяющие проводить качественный анализ систем с учетом различия в силе связей между объектами системы.

Обычное четкое n-арное отношение R определяется как подмножество декартового произведения n множеств

$$R \subseteq X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n.$$

(Это определение совпадает с формальным определением абстрактоной системы).

Подобно нечеткому множеству, нечеткое отношение можно задать с помощью его функции принадлежности

$$\mu_{\tilde{R}} : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to L,$$

где L — это отрезок [0, 1] вещественной прямой. Однако в теории нечетких отношений часто оказывается удобным в качестве L брать какую-либо более общую структуру, чем отрезок [0, 1], а под нечетким отношением $\tilde{R}$ понимать саму функцию

$$\tilde{R} : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to L,$$

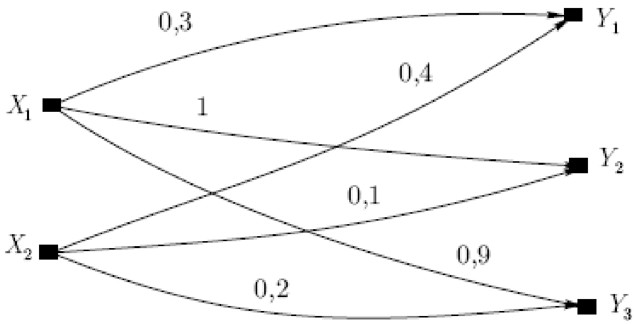
которая отображает декартово произведение множеств $X_1, \ldots, X_n$ в L. В качестве L может быть взято, например, множество вещественных чисел, множество лингвистических переменных, множество m-мерных векторов, цепь, псевдобулева алгебра, полные дистрибутивные решетки и т.п. Такой подход к определению понятия нечеткое отношение дает возможность, во-первых, строить интересные обобщения понятия отношения, которые могут использоваться, например, в теории моделей. Во-вторых, он позволяет в результате интерпретации различных функций со значениями из L как нечеткое отношение, применять для анализа свойств этих функций хорошо развитый аппарат теории отношений. В-третьих, этот подход дает возможность связать и рассматривать с единой точки зрения многие понятия и методы, которые применяются при анализе эмпирических данных, в частности, в кластерном анализе. Мы ограничимся рассмотрением лишь бинарных нечетких отношений.

Нечетким отношением $\tilde{R}$ между множествами X и Y будет называться функция

$$\tilde{R} : X \times Y \to L, \qquad (1)$$

где в общем случае будет предполагаться, что L — это полная дистрибутивная решетка. Таким образом, L — это частично упорядоченное множество, в котором любое непустое подмножество имеет наибольшую нижнюю и наименьшую верхнюю грани, и операции пересечения $\wedge$ и объединение $\vee$ в L удовлетворяют законам дистрибутивности.

Пример. Пусть $X=x_1$, x_2 и $Y=y_1$, y_2, y_3, тогда нечеткий граф, изображенный на рисунке задает некоторое нечеткое отношение $R \subset X \times Y$.



Все операции над нечетким отношением определяются с помощью этих операций из *L*. Например, если в качестве *L* взять ограниченное множество вещественных чисел, то операциями взятия наибольшей нижней и наименьшей верхней грани в *L* будут, соответственно, операции inf и sup, операциями пересечения $\wedge$ и объединения $\vee$ будут операции min и max, и эти операции будут определять и операции над нечетким отношением. Введение в *L* дополнительных операций, например, операций сложения и умножения, позволяет ввести и соответствующие дополнительные операции над нечетким отношением. В том случае, когда *L* является отрезком вещественной прямой [0, 1], функция (1) будет записываться также в виде функции принадлежности

$$\mu_{\tilde{R}} : X \times Y \to [0, 1], \qquad (2)$$

и во всех соотношениях, используемых ниже, наравне с записью $\tilde{R}(x, y)$ будет применяться запись $\mu_{\tilde{R}}(x, y)$. Если множества *X* и *Y* конечны, нечеткое отношение $\tilde{R}$ между *X* и *Y* можно представить с помощью его *матрицы отношения,* строкам и столбцам которой ставяться в соответствие элементы множеств *X* и *Y,* а на пересечении строки *x* и столбца *y* помещается элемент $\tilde{R}(x, y)$ (см. табл. 1).

Таблица 1

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0	1	0,4	0,8	0,7
x_2	1	1	1	0	0,9
x_3	0,4	1	0	0,5	0,3
x_4	0,8	0	0,5	0,6	0,6
x_5	0,7	0,9	0,3	0,6	0,2

В случае, когда множества X и Y совпадают, нечеткое отношение $\tilde{R}: X\times X\to L$ называется *нечетким отношением на множестве X.*

Пусть P — прямое произведение n множеств и M — его множество принадлежностей; нечеткое n-арное отношения определяется как нечеткое подмножество $\tilde{P}$, которое принимает свои значения в M.

Пример 1. Пусть

$$X = \{x_1, x_2, x_3\},$$
$$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\},$$
$$M = [0,\ 1].$$

Таблица на рис. 1 изображает нечеткое 2-арное отношение (которое можно называть бинарным, если не возникает путаница с другими возможными интерпретациями слова «бинарный»).

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0	0	0,1	0,3	1
x_2	0	0,8	0	0	1
x_3	0,4	0,4	0,5	0	0,2

Рис. 1.

Пример 2. Пусть

$$X = Y = \mathrm{R},$$

где R = (— ∞, ∞), т.е. R — множество всех действительных чисел. Тогда отношение $y \ll x$, где $x \in \mathrm{R}$, $y \in \mathrm{R}$, есть нечеткое отношение в R^2.

Например, субъективное выражение (зависящее от субъективного оценивания) отношение $y \ll x$ можно задать так:

$$\mu_{R^2}(x,y)=\begin{cases}0, & \text{если } y \geq x,\\ \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{(x-y)^2}}, & \text{если } y < x\end{cases}.$$

Обозначение. Нечеткое отношение в $X \times Y$ запишется как

$$x \in X,\ y \in Y_2{:}\,x\,\tilde{R}\,y.$$

Символы для обозначения экстремума. Дальше будем использовать символы:

$\bigvee\limits_x$ — для обозначения максимума относительно элемента или переменной *x*,

$\bigwedge\limits_x$ — для обозначения минимума относительно элемента или переменной *x*.

Так, запись

$$\mu_1(x)=\bigvee_y \mu(x,y)$$

эквивалентна

$$\mu_1(x)=\underset{y}{MAX}\ \mu(x,y)$$

Аналогично запись

$$\mu_2(x)=\bigwedge_y \mu(x,y)$$

эквивалентна

$$\mu_2(x)=\underset{y}{MIN}\ \mu(x,y).$$

Проекция нечеткого отношения. Первую проекцию $\tilde{R}$ определяет функция принадлежности

$$\mu_{\tilde{R}}^{(1)}(x)=\bigvee_y \mu_{\tilde{R}}(x,y).$$

Аналогично вторую проекцию $\tilde{R}$ определяет функция принадлежности

$$\mu_{\tilde{R}}^{(2)}(y)=\bigvee_x \mu_{\tilde{R}}(x,y).$$

Вторая проекция первой проекции (или наоборот) будет называться *глобальной проекцией* нечеткого отношения и обозначаться $h(\tilde{R})$. Таким образом,

$$h(\tilde{R}) = \bigvee_x \bigvee_y \mu_{\tilde{R}}(x,y) = \bigvee_y \bigvee_x \mu_{\tilde{R}}(x,y).$$

Если $h(\tilde{R})=1$, то говорят, что отношение *нормально*. Если $h(\tilde{R})<1$, то отношение *субнормально*.

Пример 1. (рис. 2).

$\tilde{R}$	y_1	y_2	y_3	y_4	1-а проекция
x_1	0,1	0,2	1	0,3	1
x_2	0,6	0,8	0	0,1	0,8
x_3	0	1	0,3	0,6	1
x_4	0,8	0,1	1	0	1
x_5	0,9	0,7	0	0,5	0,9
x_6	0,9	0	0,3	0,7	0,9
2-а проекция	0,9	1	1	0,7	1 (глобальная проекция)

Рис. 2.

Вычислим первую проекцию

$$\mu_{\tilde{R}}^{(1)}(x) = \bigvee_y \mu_{\tilde{R}}(x,y).$$

$$\mu_{\tilde{R}}^{(1)}(x_1) = \bigvee_y \mu_{\tilde{R}}(x_1,y) = \text{MAX}\ [0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3]=1$$

$$\mu_{\tilde{R}}^{(1)}(x_2) = \bigvee_y \mu_{\tilde{R}}(x_2,y) = \text{MAX}\ [0{,}6;\ 0{,}8;\ 0;\ 0{,}1] = 0{,}8,$$

…………………………………………………………………......

$$\mu_{\tilde{R}}^{(1)}(x_6) = \bigvee_y \mu_{\tilde{R}}(x_6,y) = \text{MAX}\ [0{,}9;\ 0;\ 0{,}3;\ 0{,}7] = 0{,}9.$$

Аналогично можно вычислить и вторую проекцию. Результаты расчетов приведены на рис. 2. Мы видим, что отношение нормально.

Пример 2. Рассмотрим отношение $x\,\tilde{R}\,y$, где $x\in$ R$^+$, $y\in$ R$^+$ и

$$\mu_{\tilde{R}}\ (x,y) = \mathrm{e}^{-k(y-x)^2}\ ,\ k>1$$

(рис. 3), которое можно интерпретировать такой нечеткой фразой: x и y — очень близкие друг к другу числа (для достаточно больших значений k).

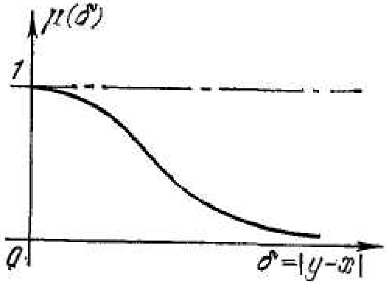


Рис. 3

В этом случае мы видим, что для фиксированного значения x_0

$$\mu_{\tilde{R}}^{(1)}(x_0)= \bigvee_y \mu_{\tilde{R}}\ (x_0,y)= \bigvee_y \mathrm{e}^{-k(y-x_0)^2} = \mathrm{e}^{-k(y-x_0)^2} = 1 \text{ для } y=x_0.$$

Поскольку значение $\mu_{\tilde{R}}^{(2)}(y_0)$ также равно единице, то $h(\tilde{R}) = 1$.

Носитель нечеткого отношения. Носителем нечеткого отношения $\tilde{R}$ называется обычное множество упорядоченных пар (x, y), для которых функция принадлежности положительна:

$$S(\tilde{R}) = \{(x,y)|\ \mu_{\tilde{R}}\ \{x,y)>0\}. \qquad (3)$$

Пример 1 (рис. 4).

$S(\tilde{R}) = \{(x_1, y_1), (x_1, y_3), (x_2, y_1), (x_2, y_4), (x_3, y_1), (x_3, y_2), (x_3, y_3), (x_3, y_4)\}$.

$\tilde{R}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,1	0	0,2	0
x_2	0,3	0	0	0,9
x_3	0,4	0,7	1	1

Рис. 4.

Пример 2 (рис. 5). Рассмотрим отношение $x\tilde{R}y$, где $x\in$ R$^+$, $y\in$ R$^+$ и

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y)=\begin{cases} e^{-(y-x)^2}, & |y-x|\le 0{,}46,\\ 0, & |y-x|>0{,}46 \end{cases}$$

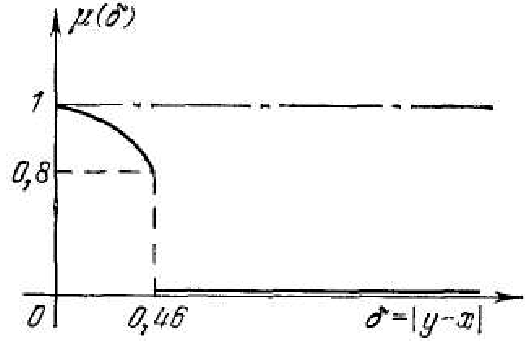


Рис. 5.

Тогда имеем

$$S(\tilde{R}) = \{(x, y)|0 \le |y - x| \le 0{,}46\}$$

Нечеткое отношение, содержащее или содержащееся в данном нечетком отношении. Пусть $\tilde{R}$ и $\tilde{L}$ — два нечетких отношения, такие, что

$$\forall\ (x, y)\in X\times Y:\ \mu_{\tilde{R}}(x, y) \le \mu_{\tilde{L}}(x, y);$$

тогда говорят, что $\tilde{L}$ *содержит* $\tilde{R}$ или $\tilde{R}$ содержится в $\tilde{L}$.

Заметим, что $\tilde{R}\subset\tilde{L}$, если $\tilde{L}$ содержит $\tilde{R}$.

Пример 3 (рис. 6). Легко проверить, что $\tilde{L}$ *содержит* $\tilde{R}$.

$\tilde{R}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0,4	0,2	0
x_2	0,5	0	1	0,9
x_3	0,4	0	0,1	0,8

(1)

$\tilde{L}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,4	0,4	0,2	0,1
x_2	0,5	0	1	1
x_3	0,5	0,1	0,2	0,9

(2)

Рис. 6.

Пример 4. Рассмотрим нечеткое отношение $x\,\tilde{R}_1\,y$, где $x \in \mathrm{R}^+$, $y \in \mathrm{R}^+$, такое, что $y \gg x$, т.е. «y много больше x», и пусть функция принадлежности этого отношения определяется выражением

$$\mu_{\tilde{R}_1}(x,y)=\begin{cases}0, & y-x<0,\\ 1-e^{-k_1(y-x)^2}, & y-x\ge 0.\end{cases}$$

Пусть теперь $k_2>k_1$; тогда отношение $\tilde{R}_2$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{R}_2}(x,y)=\begin{cases}0, & y-x<0,\\ 1-e^{-k_2(y-x)^2}, & y-x\ge 0.\end{cases}$$

содержит $\tilde{R}_1$ (рис. 7).

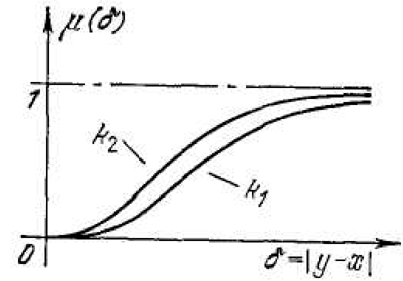


Рис. 7.

Объединение двух отношений. *Объединение* двух отношений $\tilde{R}$ и $\tilde{L}$ обозначается $\tilde{R}\;\Box\,\tilde{L}$ или $\tilde{R}+\tilde{L}$ и определяется выражением

$$\mu_{\tilde{R}\cup\tilde{L}}(x, y)=\mu_{\tilde{R}}(x, y)\vee\mu_{\tilde{L}}(x, y)=\mathrm{MAX}\,[\mu_{\tilde{R}}(x, y), \mu_{\tilde{L}}(x, y)]$$

Если $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \ldots, \tilde{R}_n$ — отношения, то

$$\mu_{\tilde{R}_1\cup\tilde{R}_2\cup\ldots\cup\tilde{R}_n}(x, y)=\bigvee_{\tilde{R}_i}\mu_{\tilde{R}_i}(x, y).$$

Результат объединения обозначим

$$\tilde{R}\bigcup_i\tilde{R}_i \text{ или } \sum_i \tilde{R}_i.$$

Пример 1 (рис. 8).

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0,2	1	0
x_2	0,8	1	0	0,2
x_3	0,5	0	0,4	0

(1)

$\underset{\sim}{\mathcal{Q}}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0	0,7	0
x_2	0,1	0,8	1	1
x_3	0,6	0,9	0,3	0,2

(2)

$\underset{\sim}{\mathcal{R}} \cup \underset{\sim}{\mathcal{Q}}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0,2	1	0
x_2	0,8	1	1	1
x_3	0,6	0,9	0,4	0,2

(3)

Рис. 8.

Пример 2. На рис. 9, *а* изображено нечеткое отношение $x\,\tilde{R}_1\,y$, где $x \in R^+$, $y \in R^+$, содержательно означающее, что «числа x и y очень близкие».

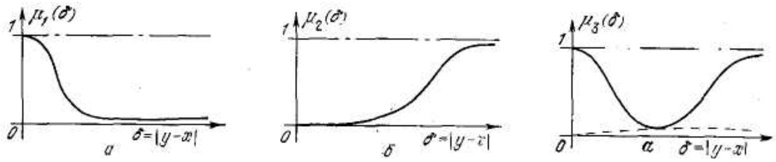


Рис. 9.

На рис. 9, *б* изображено нечеткое отношение $x\,\tilde{R}_2\,y$, где $x \in R^+$, $y \in R^+$, содержательно означающее, что «числа x и y очень различные».

Отношение $x\,\tilde{R}_3\,y$, содержательно означающее, что «числа x и y очень близкие или/и очень различные», определяется кривой $\mu_3\,(x, y)$:

$$\mu_{\tilde{R}_3}(x,y) = \begin{cases} 0, & |y-x| < 0, \\ \mu_{\tilde{R}_1}(x,y), & 0 \le |y-x| \le \alpha, \\ \mu_{\tilde{R}_2}(x,y), & \alpha \le |y-x|, \end{cases}$$

где α — такое значение $|y — x|$, при котором

$$\mu_{\tilde{R}_1}(x,y) = \mu_{\tilde{R}_2}(x,y).$$

В логике, которая основана на теории обычных множеств, такое высказывание как *«x* и *y* очень близкие или(и) очень различные» должено быть сокращено до *«x* и *y* очень близкие или очень различные» с разделительным «или». Однако в теории нечетких подмножеств первое предложение вполне логично; она выражает тот факт, что связка «и» интерпретуема при очень малых значениях функций принадлежности, когда об x и y нельзя сказать ни что они очень близки, ни что они очень отличаются друг от друга.

Этот пример хорошо иллюстрирует гибкость высказываний, присущую настоящей теории.

Пересечение двух отношений. Пересечение двух отношений $\tilde{R}$ и $\tilde{L}$ обозначается $\tilde{R} \cap \tilde{L}$ и определяется выражением

$$\mu_{\tilde{R} \cap \tilde{L}}(x, y) = \mu_{\tilde{R}}(x, y) \wedge \mu_{\tilde{L}}(x, y) = \mathrm{MIN}\,[\mu_{\tilde{R}}(x, y), \mu_{\tilde{L}}(x, y)]$$

Если $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, ..., \tilde{R}_n$ — отношения, то

$$\mu_{\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2 \cap ... \cap \tilde{R}_n}(x, y) = \bigwedge_{\tilde{R}_i} \mu_{\tilde{R}_i}(x, y).$$

$$\tilde{R} \bigcup_i \tilde{R}_i \text{ или } \sum_i \tilde{R}_i.$$

Результат обозначим

$$\tilde{R} \bigcap_i \tilde{R}_i.$$

Пример 1 (рис. 10). Рассмотрим снова данные, представленные на рис. 8.

$\tilde{R} \cap \tilde{L}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0	0,7	0
x_2	0,1	0,8	0	0,2
x_3	0,5	0	0,3	0

Рис. 10.

Пример 2. На рис. 11, *а* изображено нечеткое отношение $x\tilde{R}_2 y$, где $x \in R^+$, $y \in R^+$, означающее, что «модуль разностей $|y - x|$ очень близок к α». На рис. 11, *б* представлено аналогичное отношение «$|y - x|$ очень близко к β» (β> α).

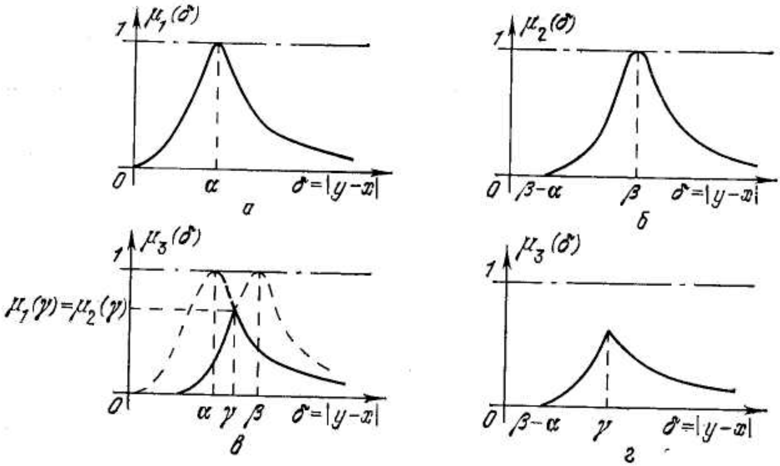


Рис. 11.

На рис. 11, *в* показано, как получить

$$\tilde{R}_3 = \tilde{R}_1 \square \tilde{R}_2$$

Имеем

$$\mu_{\tilde{R}_3}(x,y) = \begin{cases} 0, & |y-x| < \beta-\alpha, \\ \mu_{\tilde{R}_1}(x,y), & \beta-\alpha \le |y-x| \le \gamma, \\ \mu_{\tilde{R}_2}(x,y), & \gamma \le |y-x|, \end{cases}$$

где γ- такое значение $|y - x|$, что

$$\mu_{\tilde{R}1}(x, y) = \mu_{\tilde{R}2}(x, y).$$

Пересечение отношений $\tilde{R}_1$ и $\tilde{R}_2$ представлено на рис. 11, *г*.

Отношение включения $\tilde{R}_1 \subseteq \tilde{R}_2$ для нечеткого отношения определяется по помощи отношения частичного порядка в L:

$$\tilde{R}_1 \subseteq \tilde{R}_2 \Leftrightarrow \tilde{R}_1(x,y) \le \tilde{R}_2(x,y) \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y.$$

Множество $P(X\times Y)$ всех нечетких отношений между X и Y образует дистрибутивную решетку по отношению к операциям объединения и пересечение и удовлетворяет следующим тождествам:

$\tilde{R}_1 \mathrm{I}\ \tilde{R}_1 = \tilde{R}_1$, $\quad \tilde{R}_1 \mathrm{U}\ \tilde{R}_1 = \tilde{R}_1$ (идемпотентность),

$\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2 = \tilde{R}_2 \cap \tilde{R}_1$, $\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2 = \tilde{R}_2 \cup \tilde{R}_1$ (коммутативность),

$\tilde{R}_1 \cap (\tilde{R}_2 \cup \tilde{R}_3) = (\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2) \cup \tilde{R}_3$ (ассоциативность)

$\tilde{R}_1 \cup (\tilde{R}_2 \cup \tilde{R}_3) = (\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2) \cup \tilde{R}_3$ (ассоциативность)

$\tilde{R}_1 \cap (\tilde{R}_2 \cup \tilde{R}_1) = \tilde{R}_1$, $\tilde{R}_1 \cup (\tilde{R}_2 \cap \tilde{R}_1) = \tilde{R}_1$ (поглощение)

$\tilde{R}_1 \cap (\tilde{R}_2 \cup \tilde{R}_3) = (\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2) \cup (\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_3)$ (дистрибутивность)

$\tilde{R}_1 \cup (\tilde{R}_2 \cap \tilde{R}_3) = (\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2) \cap (\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_3)$ (дистрибутивность)

Выполнение этих тождеств для $P(X\times Y)$ следует из выполнения соответствующих тождеств для решетки L. В $P(X\times Y)$ выполняется также следующее соотношение

из $\tilde{R}_2 \subseteq \tilde{R}_3$ следует $\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2 = \tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_3$, $\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2 = \tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_3$.

Из полноты решетки L следует, что она обладает наименьшим **0** и наибольшим **I** элементами, такими, что $\mathbf{0} \le a$, $a \le \mathbf{I}$ $a \in L$. Эти элементы определяют, соответственно, *наименьший* $\varnothing$ и *наибольший* U элементы решетки всех нечетких отношений $P(X\times Y)$:

$$\varnothing(x,y) = \mathbf{0} \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y \tag{3}$$

$$U(x,y) = \mathbf{I} \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y \tag{4}$$

Отношения (3) и (4) называют соответственно *пустым* и *универсальным* отношениями. Эти отношения удовлетворяют в $P(X\times Y)$ следующим тождествам:

$$\tilde{R}_1 \cap \varnothing = \tilde{R}_1, \quad \tilde{R}_1 \cup \varnothing = \tilde{R}_1,$$

$$\tilde{R}_1 \cup U = \tilde{R}_1, \quad \tilde{R}_1 \cup U = U.$$

Заметим, что если L является интервалом вещественных чисел $[a, b]$, то наименьший **0** и наибольший **I** элементы будут равны, соответственно, a и b. В частном случае, когда $L = [0, 1]$, получим, соответственно, нуль и единицу интервала [0, 1].

Алгебраическое произведение двух отношений.

Алгебраическое произведение $\tilde{R}\cdot\tilde{L}$ двух отношений $\tilde{R}$ и $\tilde{L}$ определяется выражением

$$\mu_{\tilde{R}\cdot\tilde{L}}(x, y) = \mu_{\tilde{R}}(x, y) \cdot \mu_{\tilde{L}}(x, y).$$

Знак · в правой части этого выражения обозначает числовое произведение (обычное умножение).

Пример 1 (рис. 12). Рассмотрим еще раз данные на рис. 8.

$\tilde{R}\cdot\tilde{Q}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,09	0	0,7	0
x_2	0,08	0,8	0	0,2
x_3	0,3	0	0,72	0

Рис. 12

Пример 2. Вернемся к примеру, который рассматривался на рис. 11, *а,б.* Пусть

$$\tilde{R}_3 = \tilde{R}_1 \cdot \tilde{R}_2$$

тогда имеем

$$\mu_{\tilde{R}_3}(x,y) = \begin{cases} 0, & |y-x| < \beta - \alpha, \\ \mu_{\tilde{R}_1}(x,y) \cdot \mu_{\tilde{R}_2}(x,y), & \beta - \alpha \leq |y-x|. \end{cases}$$

См. рис. 13, *а-в.*

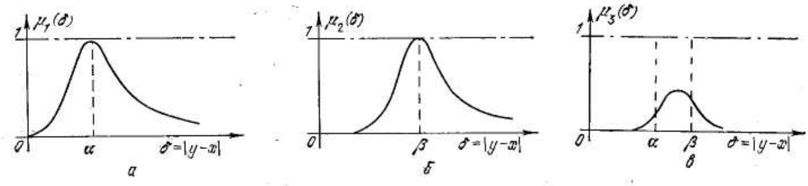


Рис. 13

Дистрибутивность. Выпишем свойства дистрибутивности для операций □ и •

$$\tilde{R}_1 \mathrm{I} \ (\tilde{R}_2 \ \mathrm{U} \ \tilde{R}_3) = (\tilde{R}_1 \mathrm{I} \ \tilde{R}_2) \ \mathrm{U} (\tilde{R}_1 \mathrm{I} \ \tilde{R}_3)$$

$$\tilde{R}_1 \mathrm{U} \ (\tilde{R}_2 \ \mathrm{I} \ \tilde{R}_3) = (\tilde{R}_1 \mathrm{U} \ \tilde{R}_2) \ \mathrm{I} \ (\tilde{R}_1 \mathrm{U} \ \tilde{R}_3)$$

$$\tilde{R}_1 \bullet (\tilde{R}_2 \ \mathrm{U} \ \tilde{R}_3) = (\tilde{R}_1 \bullet \tilde{R}_2) \ \mathrm{U} (\tilde{R}_1 \bullet \tilde{R}_3)$$

$$\tilde{R}_1 \bullet (\tilde{R}_2 \ \mathrm{I} \ \tilde{R}_3) = (\tilde{R}_1 \bullet \tilde{R}_2) \ \mathrm{I} \ (\tilde{R}_1 \bullet \tilde{R}_3)$$

Алгебраическая сумма двух отношений. Алгебраическая сумма двух отношений $\tilde{R}$ и $\tilde{L}$ обозначается $\tilde{R} \hat{+} \tilde{L}$ и определяется выражением

$$\mu_{\tilde{R}\hat{+}\tilde{L}}(x, y) = \mu_{\tilde{R}}(x, y) + \mu_{\tilde{L}}(x, y) - \mu_{\tilde{R}}(x, y) \cdot \mu_{\tilde{L}}(x, y).$$

Знак • обозначает обычное умножение, знак + обычное сложение.

Пример (рис. 14). Возвратимся снова к примеру на рис. 8.

$\tilde{R}\,\hat{+}\,\tilde{Q}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,51	0,20	1	0
x_2	0,82	1	1	1
x_3	0,80	0,90	0,58	0,20

Рис. 14.

Отметим два свойства дистрибутивности для операции $\hat{+}$:

$$\tilde{R}_1 \,\hat{+}\, (\tilde{R}_2 \cup \tilde{R}_3) = (\tilde{R}_1 \,\hat{+}\, \tilde{R}_2) \cup (\tilde{R}_1 \,\hat{+}\, \tilde{R}_3)$$

$$\tilde{R}_1 \,\hat{+}\, (\tilde{R}_2 \cap \tilde{R}_3) = (\tilde{R}_1 \,\hat{+}\, \tilde{R}_2) \cap (\tilde{R}_1 \,\hat{+}\, \tilde{R}_3)$$

Дополнение отношения. Дополнение отношения $\tilde{R}$ (обозначается $\overline{\tilde{R}}$ *)*, есть такое отношение, которое

$$\forall\, (x,y) \in X \times Y:\ \mu_{\overline{\tilde{R}}}(x, y) = 1 - \mu_{\tilde{R}}(x, y).$$

Пример 1 (рис. 15).

$\tilde{R}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0,4	0,2	0
x_2	0,5	0	1	0,9
x_3	0,4	0	0,1	0,8

1

$\overline{\tilde{R}}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,7	0,6	0,8	1
x_2	0,5	1	0	0,1
x_3	0,6	1	0,9	0,2

2

Рис. 15.

Пример 2. На рис. 16, *а* представленна функция принадлежности $\mu_{\tilde{R}_1}(x, y)$ отношения $x\ \tilde{R}_1\ y$ означающего «x и y очень близки друг к другу», $x \in R^+$, $y \in R^+$,

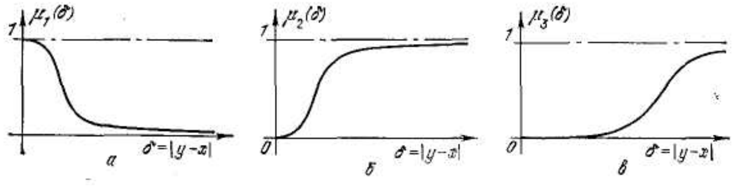


Рис. 16.

На рис. 16,*б* представлена функция принадлежности

$$\mu_{\tilde{R}_2}(x, y) = 1 - \mu_{\tilde{R}_1}(x, y),$$

которая может быть связана с отношением «*x* и *y* очень близки». Тогда функция принадлежности $\mu_{\tilde{R}_3}(x, y)$ на рис. 16, *в* может представлять отношение *«x* и *y* очень отличаются друг от друга» Заметим, что два высказывания *«x* и *y* не очень близки» и «*x* и *y* очень разные» в общем случае не идентичны, за исключением случая, когда выбираются такие функции принадлежности, которые представляют оба высказывания довольно грубо.

Дизъюнктивная сумма двух отношений. Дизъюнктивная сумма обозначается $\tilde{R} \oplus \tilde{L}$ и определяется выражением

$$\tilde{R} \oplus \tilde{L} = (\tilde{R} \square \overline{\tilde{L}}) \mathrm{U} (\overline{\tilde{R}}\ \mathrm{I}\ \tilde{L})$$

Пример 1 (рис. 17).

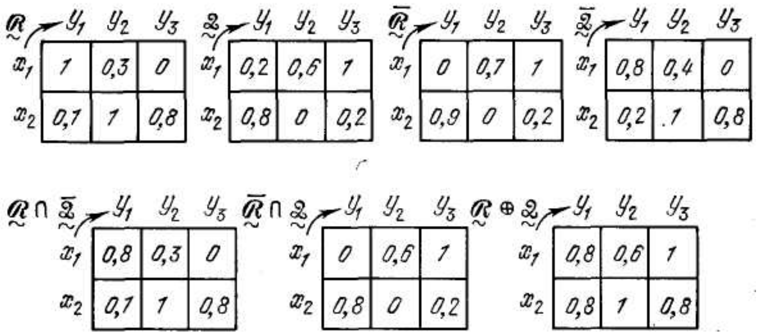


Рис. 17.

Пример 2. Рассмотрим пример, приведенный на рис. 11, *а* и *б;* пусть $\tilde{R}$ и $\tilde{L}$ — отношение с функциями принадлежности, изображенными на рис. 11, *а* и *б* соответственно. На рис. 18**,** *а-к* можно видеть, как получить функцию принадлежности отношения $\tilde{R} \oplus \tilde{L}$.

Сравнивая рис. 11, *г* и 18, *и*, мы видим, что *дизъюнктивное* ИЛИ (рис. 18, *и)* дает результат, который значительно отличается от результата И, равно как и от результата ИЛИ/И (рис. 18, *к).*

Аналогично определяется оператор дополнения дизъюнктивной суммы

$$\overline{\widetilde{R}} \oplus \widetilde{L} = \overline{\widetilde{R} \oplus \widetilde{L}} = (\widetilde{R} \,\square\, \overline{\widetilde{L}}\,)\,\mathrm{I}\overline{\ }\,(\overline{\widetilde{R}} \cup \widetilde{L}\,)$$

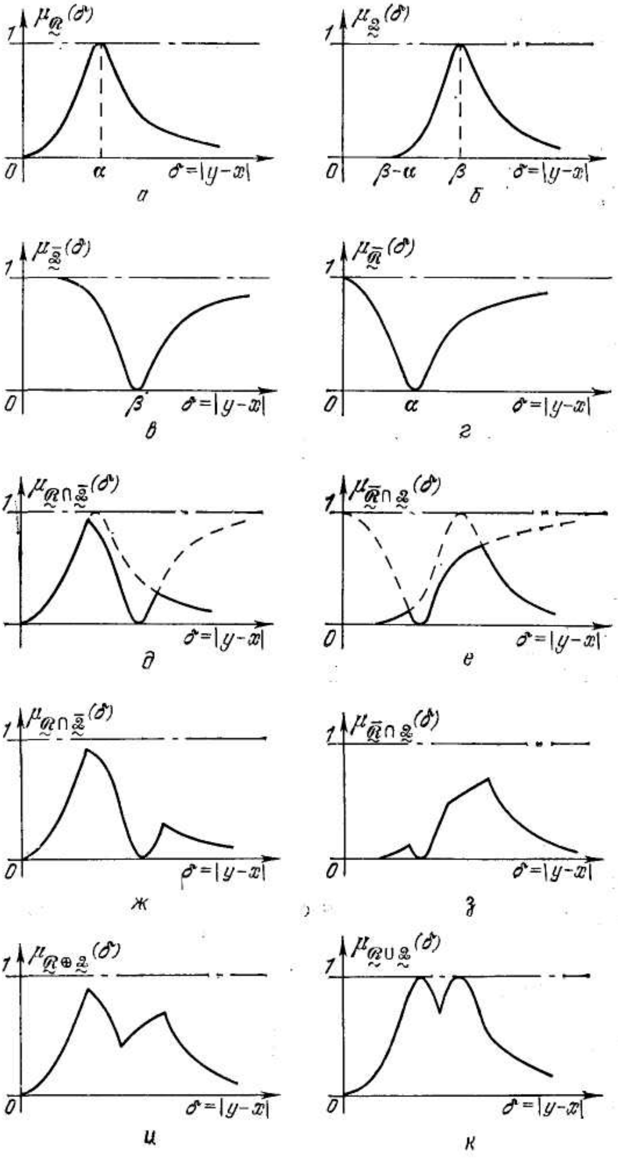


Рис. 18.

Рассмотрим предыдущий пример на рис. 19 и 20. Рис. 20 получено с учетом рис. 18, *к*.

$\underset{\sim}{R} \overline{\oplus} \underset{\sim}{S}$	y_1	y_2	y_3
x_1	0,2	0,4	0
x_2	0,2	0	0,2

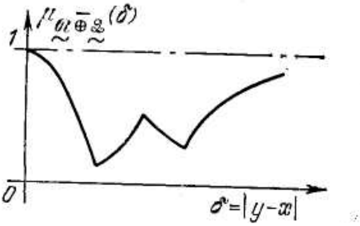


Рис. 19. Рис. 20.

Обычное отношение, ближайшее к нечеткому. Пусть $\widetilde{R}$ — нечеткое отношение; обычное отношение, ближайшее к $\widetilde{R}$, определяется выражением

$$\mu_{\overline{\widetilde{R}}}(x,y)=\begin{cases}0, & если \quad \mu_{\widetilde{R}}(x,y)<0,5,\\ 1, & если \quad \mu_{\widetilde{R}}(x,y)>0,5,\\ 0\ або\ 1, & если\ \mu_{\widetilde{R}}(x,y)=0,5\end{cases}$$

Это определение пригодно для любых универсальных множеств X и Y, которые образуют $X\times Y$, где $x\in X$, $y\in Y$ и независимо от того, конечны или нет универсальные множества.

По договоренности принимают

$$\mu_{\widetilde{R}}(x,y)=0,5 \Rightarrow \mu_{\overline{\widetilde{R}}}(x,y)=0.$$

Пример. На рис. 1.21 и 1.22 видно, как перейти от $\widetilde{R}$ к $\overline{\widetilde{R}}$.

$\underset{\sim}{R}$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_1	0,7	0,3	0,2	1	0	0,8
x_2	0,5	0,4	0	0,6	0,9	0,1
x_3	0,6	1	0,8	0	0	0,7

Рис. 21.

$\underset{\approx}{R}$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_1	1	0	0	1	0	1
x_2	0	0	0	1	1	0
x_3	1	1	1	0	0	1

Рис. 22.

Наличие элемента, равного 1/2 и соответствующего (x_2, y_1), показывает, что $\overline{\widetilde{R}}$ не единствнно. Существуют два отношения, которые являются ближайшими к $\widetilde{R}$, для одного из которых

$\mu_{\tilde{\tilde{R}}}(x_2, y_1)=1$, а для другого $\mu_{\tilde{\tilde{R}}}(x_2, y_1)=0$. По принятой договоренности будем полагать $\mu_{\tilde{\tilde{R}}}(x_2, y_1)= 0$.

1.2. Композиция двух нечетких отношений

Следующее соотношение определяет *композицию* $\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$ нечеткого отношение $\tilde{R}_1$ между X и Y и нечеткого отношения $\tilde{R}_2$ между Y и Z:

$$\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2 (x, z) = \bigvee_{y \in Y} (\tilde{R}_1 (x,y) \wedge \tilde{R}_2 (y, z)) \quad \forall\ x \in X \ \forall\ z \in Z. \qquad (4\text{-}1)$$

Здесь $\bigvee_{y \in Y}$ означает наименьшую верхнюю грань множества элементов $(\tilde{R}_1 (x,y) \wedge \tilde{R}_2 (y, z))$, где y пробегает все значения из Y. В силу полноты L эта операция всегда определена. Как нетрудно увидеть из (4-1), отношение $\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$ будет отношением между X и Z.

Кроме операции композиции (4-1), которая определяется с помощью основных операций решетки L, существуют и другие варианты операции композиции, которые определяются с помощью дополнительных операций, которые вводятся в L. В зависимости от того, является ли L множеством векторов, множеством лингвистических переменных или множеством чисел, эти дополнительные операции будут иметь и соответствующий вид.

Например, если L является множеством вещественных чисел, то операция $\wedge$ в (4-1) может быть заменена на операцию взятия среднего арифметического, что даст другое определение операции композиции:

$$\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2 (x, z) = \bigvee_{y \in Y} (0{,}5(\tilde{R}_1 (x,y)+ \tilde{R}_2 (y, z)) \quad \forall\ x \in X \ \forall\ z \in Z.$$

В случае L = [0, 1] соотношение (1.4-1) записывается в виде

$$\mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2} (x, z) = \bigvee_{y \in Y} (\mu_{\tilde{R}_1} (x,y) \wedge \mu_{\tilde{R}_2} (y, z)) \ \forall\ x \in X \ \forall\ z \in Z. \ (5)$$

Замена в (5) операции $\wedge$ на операцию умножения • дает следующее определение операции композиции:

$$\mu_{\tilde{R}_1 \mathrm{o} \tilde{R}_2} (x, z) = \bigvee_{y \in Y} (\mu_{\tilde{R}_1} (x,y) \bullet \mu_{\tilde{R}_2} (y, z)) \quad \forall\ x \in X \ \forall\ z \in Z.$$

Мы здесь ограничимся рассмотрением свойств основной операции композиции (4-1). Свойства других операций композиции рассмотрим ниже. В дальнейшем будет предполагаться также, что $X=Y$ и $\widetilde{R}_1$ является нечетким отношением на множестве X.

Нечеткое отношение $\widetilde{E}$ такое, что

$$\widetilde{E}(x, y) = \begin{cases} I, & \text{если } x = y, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

играет относительно операции композиции (4-1) роль единицы: $\widetilde{E} \circ \widetilde{R}_1 = \widetilde{R}_1 \circ \widetilde{E} = \widetilde{R}_1$. В теории обычных отношений отношения $\widetilde{E}$ называется отношением равенства. Для любого нечеткого отношения $\widetilde{R}_1$ определяется также *обратное* ему отношение $\widetilde{R}_1^{-1}$:

$$\widetilde{R}_1^{-1}(x, y) = \widetilde{R}_1(y, x) \quad \forall\, x, y \in X.$$

(Max — min)-композиция. Пусть $\widetilde{R}_1 \subset X \times Y$ и $\widetilde{R}_2 = Y \times Z$; (max—min)-*композиция* отношений $\widetilde{R}_1$ и $\widetilde{R}_2$ обозначается $\widetilde{R}_2 \circ \widetilde{R}_1$ и определяется выражением

$$\mu_{\widetilde{R}_2 \circ \widetilde{R}_1}(x, z) = \bigvee_{y \in Y} (\mu_{\widetilde{R}_1}(x,y) \wedge \mu_{\widetilde{R}_2}(y, z)) =$$

$$= \underset{y}{MAX} \,[\,\mathrm{MIN}\,(\mu_{\widetilde{R}_1}(x,y), \mu_{\widetilde{R}_2}(y, z))], \tag{6}$$

где $x \in X,\ y \in Y,\ z \in Z$.

Пример 1. Рассмотрим два нечетких отношения $\widetilde{R}_1$ и $\widetilde{R}_2$, где $x, y, z \in \mathrm{R}^+$. Предположим, что

$$\mu_{\widetilde{R}_1}(x,y) = \mathrm{e}^{-k(x-y)^2}, \quad k>1, \tag{7}$$

$$\mu_{\widetilde{R}_2}(y, z) = \mathrm{e}^{-k(y-z)^2}, \quad k>1. \tag{8}$$

Определим $\mu_{\widetilde{R}_2 \circ \widetilde{R}_1}(x, z)$. Рассмотрим два значения $x=a$ и $z=b$ переменных x и z. Функции принадлежности (7) и (8) непрерывны на интервале $[0, \infty]$. В ссответствии с (6) можно записать

$$\mu_{\widetilde{R}_2 \circ \widetilde{R}_1}(a, b) = \bigvee_{y \in Y} [\mu_{\widetilde{R}_1}(a,y) \wedge \mu_{\widetilde{R}_2}(y, b)] = \bigvee_{y \in Y} [\mathrm{e}^{-k(a-y)^2} \wedge$$
$$\wedge\, \mathrm{e}^{-k(y-b)^2}].$$

Композиция $\widetilde{R}_1$ и $\widetilde{R}_2$ с помощью (max—min)-оператора представлена на рис. 23.

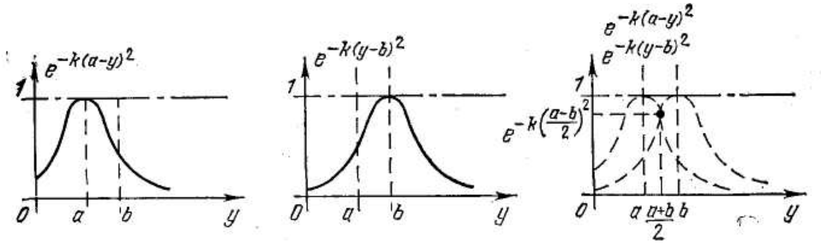


Рис. 23.

Легко увидеть, что

$$\mu_{\tilde{R}_2 \circ \tilde{R}_1}(a,\, b) = e^{-k\left(a\frac{a+b}{2}\right)^2} = e^{-k\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$$

И для произвольных значений x и z имеем

$$\mu_{\tilde{R}_2 \mathrm{o} \tilde{R}_1}(x,\, b) = e^{-k\frac{(x-z)^2}{4}}$$

Для простоты мы рассмотрели две идентичные функции $\mu_{\tilde{R}_1}(x,y)$ и $\mu_{\tilde{R}_2}(y,z)$. Но ход рассуждений не меняется и при двух различных функциях: накладываем графики $\mu_{\tilde{R}_1}(a,y)$ и $\mu_{\tilde{R}_2}(y,\, b)$ друг на друга и определяем кривую

$$\mu_{\tilde{R}_1}(a,y) \wedge \mu_{\tilde{R}_2}(y,\, b)$$

как функцию от y; потом находим точку на этой кривой, которая отвечает максимальному значению y.

Проблема усложняется, если абсцисса максимума не единственная. Это заставляет нас провести более сложные исследования.

Рассмотрим другой пример для функции принадлежности, которая определена на конечном универсальном множестве.

Пример 2 (рис. 24).

$\tilde{R}_1$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0,1	0,2	0	1	0,7
x_2	0,3	0,5	0	0,2	1
x_3	0,8	0	1	0,4	0,3

а

$\tilde{R}_2$	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,9	0	0,3	0,4
y_2	0,2	1	0,8	0
y_3	0,8	0	0,7	1
y_4	0,4	0,2	0,3	0
y_5	0	1	0	0,8

б

$\tilde{R}_2 \circ \tilde{R}_2$	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0,4	0,7	0,3	0,7
x_2	0,3	1	0,5	0,8
x_3	0,8	0,3	0,7	1

в

Рис. 24.

Пусть $(x, z) = (x_1, z_1)$,

MIN ($\mu_{\tilde{R}_1}$ (x_1,y_1), $\mu_{\tilde{R}_2}$ (y_1,z_1)) = MIN (0,1; 0,9) = 0,1;

MIN ($\mu_{\tilde{R}_1}$ (x_1,y_2), $\mu_{\tilde{R}_2}$ (y_2,z_1)) = MIN (0,2; 0,2) = 0,2;

MIN ($\mu_{\tilde{R}_1}$ (x_1,y_3), $\mu_{\tilde{R}_2}$ (y_3,z_1)) = MIN (0; 0,8) = 0;

MIN ($\mu_{\tilde{R}_1}$ (x_1,y_4), $\mu_{\tilde{R}_2}$ (y_4,z_1)) = MIN (1; 0,4) = 0,4;

MIN ($\mu_{\tilde{R}_1}$ (x_1,y_5), $\mu_{\tilde{R}_2}$ (y_5,z_1)) = MIN (0,7; 0) = 0.

$\underset{y_i}{MAX}$ [MIN($\mu_{\tilde{R}_1}$ (x_1,y_i), $\mu_{\tilde{R}_2}$ (y_i,z_1))]=MAX (0,1; 0,2; 0; 0,4; 0) = 0,4.

Пусть теперь $(x, z) = (x_1, z_2)$, тогда

MIN ($\mu_{\tilde{R}_1}$ (x_1,y_1), $\mu_{\tilde{R}_2}$ (y_1,z_2)) = MIN (0,1; 0) = 0;

MIN ($\mu_{\tilde{R}_1}$ (x_1,y_2), $\mu_{\tilde{R}_2}$ (y_2,z_2)) = MIN (0,2; 1) = 0,2; ...

и т.д. Результат представлен на рис. 24.

Сравним композицию нечетких отношений с композицией обычных отношений.

Для композиции обычных отношений R_1 и R_2 имеем

$$\mu_{\tilde{R}_2 \circ \tilde{R}_1}(x, z) = \underset{y}{MAX}\ [\mathrm{MIN}(\mu_{R_1}(x,y),\ \mu_{R_2}(y,z))], \quad (9)$$

где $\mu_{R_1}(x, y) \in \{0,1\}$, $\mu_{R_2}(y, z) \in \{0,1\}$.

Тогда выражение (1.9) можно записать в виде

$$\mu_{\tilde{R}_2 \mathrm{o} \tilde{R}_1}(x, z) = \dot{\sum_{y}}\ (\mu_{R_1}(x,y) \cdot \mu_{R_2}(y,z))], \qquad (10)$$

где $\cdot$ обозначает булево умножение и $\dot{\sum\limits_{y}}$ — булеву сумму полученных произведений.

На рис. 25 приведен пример, рассчитанный по формуле (9) или, что то же самое, — по (10).

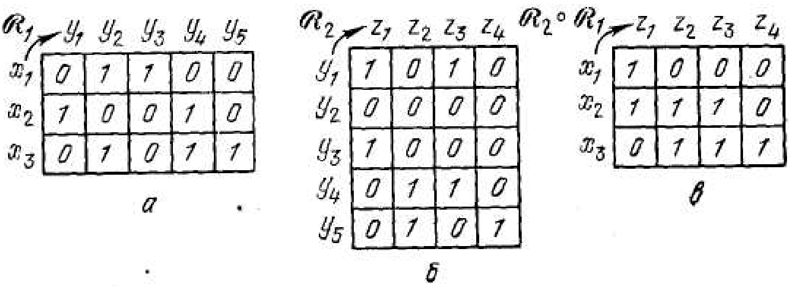


Рис. 25.

Пример 3. На рис. 26 рассматривается пример композиции трех отношений.

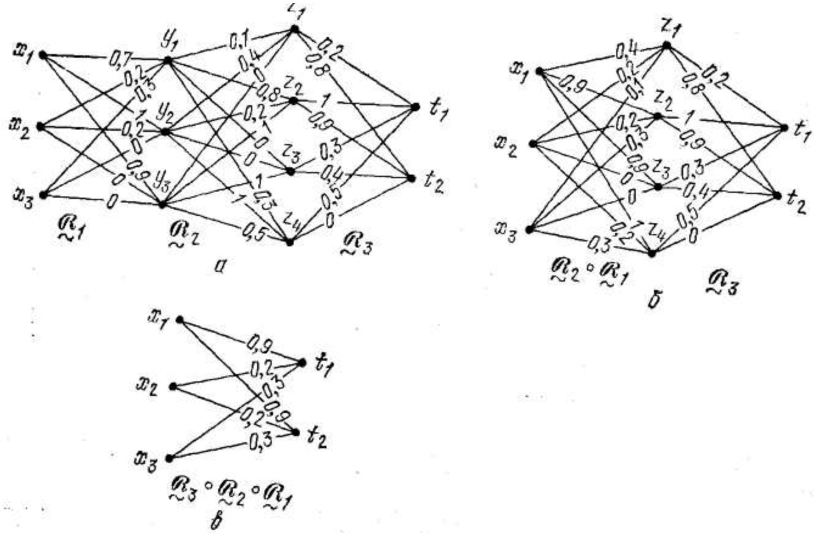


Рис. 26.

Операция (max—min)-композиции ассоциативна

$$(\tilde R_3 \circ \tilde R_2) \circ \tilde R_1 = \tilde R_3 \circ (\tilde R_2 \circ \tilde R_1).$$

С другой стороны, если отношение $\tilde R$ определено на $X\times X$, т.е. $\tilde R \subset X\times X$, то можно записать

$$\tilde R \circ \tilde R = \tilde R^2$$

отсюда

$$\tilde R \circ \tilde R^2 = \tilde R^2 \circ \tilde R = \tilde R^3$$

и в общем случае

$$\underbrace{\tilde R \circ \tilde R \circ \ldots \circ \tilde R}_{k\ раз} = \tilde R^k .$$

Заметим, что (max—min)-композиция дистрибутивна относительно объединения, но недистрибутивна относительно пересечения:

$$\tilde R \circ (\tilde L_1 \cup \tilde L_2) = (\tilde R \circ \tilde L_1) \cup (\tilde R \circ \tilde L_2) \qquad (11)$$

$$\tilde R \circ (\tilde L_1 \cap \tilde L_2) \neq (\tilde R \circ \tilde L_1) \cap (\tilde R \circ \tilde L_2) \qquad (12)$$

Приведем доказательства выражений (11) и (12).

Раньше мы не всегда выполняли доказательства некоторых операций на предмет «максимальный из ...» или «минимальный из ...». Это было связано с тем, что такие доказательства можно получить как непосредственные следствия из свойств верхней или/и нижней границы решетки.

Пусть Δ – операция взятия нижней границы, а ∇ – верхней границы двух элементов (X_i,X_j) решетки. В решетке выполняется четыре двойственных свойств этих операций:

$$\left.\begin{aligned} X_i \Delta X_j &= X_j \Delta X_i \\ X_i \nabla X_j &= X_j \nabla X_i \end{aligned}\right\} \text{ коммутативность} \qquad (13)$$

$$\left.\begin{aligned} X_i \Delta(X_j \Delta X_k) &= (X_i \Delta X_j) \Delta X_k \\ X_i \nabla(X_j \nabla X_k) &= (X_i \nabla X_j) \nabla X_k \end{aligned}\right\} \text{ассоциативность} \qquad (14)$$

$$\left.\begin{aligned} X_i \Delta X_i &= X_i \\ X_i \nabla X_i &= X_i \end{aligned}\right\} \text{ идемпотентность} \qquad (15)$$

$$\left.\begin{aligned} X_i \Delta(X_i \nabla X_j) &= X_i \\ X_i \nabla(X_i \Delta X_j) &= X_i \end{aligned}\right\} \text{ поглощение} \qquad (16)$$

Кроме того, если решетка дистрибутивна, то справедливо и свойство

$$\left.\begin{aligned} X_i \nabla(X_j \Delta X_k) &= (X_i \nabla X_j) \Delta(X_i \nabla X_k) \\ X_i \Delta(X_j \nabla X_k) &= (X_i \Delta X_j) \nabla(X_i \Delta X_k) \end{aligned}\right\} \text{дистрибутивность} \quad (17)$$

Если решетка с дополнениями, то справедливо и свойство

$$\left.\begin{aligned} X_i \Delta \overline{X}_i &= 0 \\ X_i \nabla \overline{X}_i &= U \end{aligned}\right\} \text{ дополнения} \qquad (18)$$

Рассмотрим несколько примеров систематического доказательства различных формул.

Случай L = [0, 1] охватывает все нечеткие подмножества в смысле Заде.

Целиком упорядоченное множество [0, 1] представляет собой дистрибутивную решетку, но без дополнений. Следовательно, все свойства (13-17) удовлетворяются и Δ можно обозначить через $\wedge$, а ∇ — через $\vee$; нижнюю границу можно называть минимумом, а верхнюю границу — максимумом.

Пусть мы хотим доказать равенство

$$A \square (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \qquad (*)$$

Для этого необходимо проверить, что для $\forall\, x_i, x_j, x_k \in X$

$\mu_{\tilde{A}}(x_i) \wedge [\mu_{\tilde{B}}(x_i)] \vee \mu_{\tilde{C}}(x_i)]=[\mu_{\tilde{A}}(x_i) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x_i)] \vee [\mu_{\tilde{A}}(x_i) \wedge \mu_{\tilde{C}}(x_i)]$.

А так как L — дистрибутивная решетка, то это равенство справедливо.

Рассмотрим более сложный случай и докажем свойство дистрибутивности (1.11):

$$\tilde{R} \sqcup (\tilde{L}_1 \cup \tilde{L}_2)=(\tilde{R} \circ \tilde{L}_1) \cup (\tilde{R} \circ \tilde{L}_2)$$

Это равенство справедливо, если для

$$\forall x_i \in X, \ \forall y_j \in Y, \ \forall z_k \in Z$$

и отношений

$$x_i \tilde{R} \ y_j, y_j \tilde{L}_1 \ z_k \cdot y_j \tilde{L}_2 \ z_k .$$

выполняется

$$\mu_{\tilde{R} \circ (\tilde{L}_1 \cup \tilde{L}_2)}(x_i, z_k)= \mu_{\tilde{R} \circ \tilde{L}_1}(x_i, z_k) \vee \mu_{\tilde{R} \circ \tilde{L}_2}(y_i, z_k) \qquad (19)$$

Распишем члены уравнения (19):

$$\mu_{\tilde{R} \circ (\tilde{L}_1 \cup \tilde{L}_2)}(x_i, z_k)= [\mu_{\tilde{R}}(x_i, y_1) \wedge \mu_{\tilde{L}_1}(y_1, z_k) \vee \mu_{\tilde{L}_2}(y_1, z_k))] \vee$$
$$\vee [\mu_{\tilde{R}}(x_i, y_2) \wedge \mu_{\tilde{L}_1}(y_2, z_k) \vee \mu_{\tilde{L}_2}(y_2, z_k))] \vee \ldots$$
$$\vee [\mu_{\tilde{R}}(x_i, y_n) \wedge \mu_{\tilde{L}_1}(y_n, z_k) \vee \mu_{\tilde{L}_2}(y_n, z_k))], \qquad (20)$$

$$\mu_{\tilde{R} \circ \tilde{L}_1}(x_i, z_k)= [\mu_{\tilde{R}}(x_i, y_1) \wedge \mu_{\tilde{L}_1}(y_1, z_k)] \vee$$
$$\vee [\mu_{\tilde{R}}(x_i, y_2) \wedge \mu_{\tilde{L}_1}(y_2, z_k)] \vee \ldots$$
$$\vee [\mu_{\tilde{R}}(x_i, y_n) \wedge \mu_{\tilde{L}_1}(y_n, z_k)], \qquad (21)$$

$$\mu_{\tilde{R} \circ \tilde{L}_2}(x_i, z_k)= [\mu_{\tilde{R}}(x_i, y_1) \wedge \mu_{\tilde{L}_2}(y_1, z_k)] \vee$$
$$\vee [\mu_{\tilde{R}}(x_i, y_2) \wedge \mu_{\tilde{L}_2}(y_2, z_k)] \vee \ldots$$
$$\vee [\mu_{\tilde{R}}(x_i, y_n) \wedge \mu_{\tilde{L}_2}(y_n, z_k)], \qquad (22)$$

Для упрощения записи положим

$$a_\alpha= \mu_{\tilde{R}}(x_i, y_\alpha), b_\beta= \mu_{\tilde{L}_1}(y_\beta, z_k), c_\gamma= \mu_{\tilde{L}_2}(y_\gamma, z_k) \qquad (23)$$
$$\alpha, \beta, \gamma= 1, 2, 3, \ \ , n.$$

Тогда отношения (20)—(22) можно записать в виде

$$\mu_{\tilde{R} \circ (\tilde{L}_1 \cup \tilde{L}_2)}(x_i, z_k)= [a_1 \wedge (b_1 \vee c_1)] \vee [a_2 \wedge (b_2 \vee c_2)] \vee \ldots$$
$$\vee [a_n \wedge (b_n \vee c_n)], \qquad (24)$$
$$\mu_{\tilde{R} \circ \tilde{L}_1}(x_i, z_k)=(a_1 \wedge b_1) \vee (a_2 \wedge b_2) \vee \ldots \vee (a_n \wedge b_n), \qquad (25)$$

$$\mu_{\tilde R \circ \tilde L_2}(x_i, z_k)=(a_1 \wedge c_1) \vee (a_2 \wedge c_2) \vee \ldots \vee (a_n \wedge c_n) \ldots \tag{26}$$

Теперь в силу ассоциативности операции $\vee$ имеем

$$\mu_{\tilde R \circ \tilde L_1} \vee \mu_{\tilde R \circ \tilde L_2} = [(a_1 \wedge b_1) \vee (a_2 \wedge b_2) \vee \ldots \vee (a_n \wedge b_n)] \vee$$

$$\vee [(a_1 \wedge c_1) \vee (a_2 \wedge c_2) \vee \ldots \vee (a_n \wedge c_n)] = [(a_1 \wedge b_1) \vee (a_1 \wedge c_1)] \vee$$

$$\vee [(a_2 \wedge b_2) \vee (a_2 \wedge c_2)] \vee \ldots \vee [(a_n \wedge b_n) \vee (a_n \wedge c_n)] \tag{27}$$

Сравнивая соотношение (24) и (27) и используя свойство дистрибутивности

$$a_\alpha \wedge (b_\alpha \vee c_\alpha) = (a_\alpha \wedge b_\alpha) \vee (a_\alpha \wedge c_\alpha), \qquad \alpha = 1,2,..., n,$$

действительно имеем

$$\mu_{\tilde R \circ (\tilde L_1 \cup \tilde L_2)}(x_i, z_k) = \mu_{\tilde R \circ \tilde L_1}(x_i, z_k) \vee \mu_{\tilde R \circ \tilde L_2}(x_i, z_k) = \mu_{\tilde R \circ \tilde L_1} \cup \mu_{\tilde R \circ \tilde L_2}(x_i, z_k),$$

что и доказывает справедливость равенства (*).

Выполним доказательство (12), т.е. докажаем, что закон $\circ$ относительно операции пересечения не является дистрибутивным:

$$\tilde R \circ (\tilde L_1 \cap \tilde L_2) \neq (\tilde R \circ \tilde L_1) \cap (\tilde R \circ \tilde L_2) \tag{28}$$

Воспользуемся теми же обозначениями, которые и в (*). Поскольку необходимо доказать, что для некоторых *A, B* и *C* свойство дистрибутивности не выполняется, то мы ограничимся универсальным множеством, в котором α, β, γ = 1, 2 в (28). Имеем

$$\mu_{\tilde R \circ (\tilde L_1 \cap \tilde L_2)}(x_i, z_k) = [a_1 \wedge (b_1 \wedge c_1)] \vee [a_2 \wedge (b_2 \wedge c_2)] =$$

$$= (a_1 \wedge b_1 \wedge c_1) \vee (a_2 \wedge b_2 \wedge c_2), \tag{29}$$

$$\mu_{\tilde R \circ \tilde L_1}(x_i, z_k) \wedge \mu_{\tilde R \circ \tilde L_2}(x_i, z_k) = [(a_1 \wedge b_1) \vee (a_2 \wedge b_2)] \vee [(a_1 \wedge c_1) \vee$$

$$\vee (a_2 \wedge c_2)]. \tag{30}$$

Необходимо доказать, что (29) и (30) — это разные величины; для этого запишем

$$\mu_{\tilde R \circ (\tilde L_1 \cap \tilde L_2)}(x_i, z_k) = (a_1 \vee a_2) \wedge (a_1 \vee b_2) \wedge (a_1 \vee c_2) \wedge (a_2 \vee b_1) \wedge$$

$$\wedge (b_1 \vee b_2) \wedge (b_1 \vee c_2) \wedge (a_2 \vee c_1) \wedge (b_2 \vee c_1) \wedge (c_1 \vee c_2),$$

$$\mu_{\tilde R \circ \tilde L_1}(x_i, z_k) \wedge \mu_{\tilde R \circ \tilde L_2}(x_i, z_k) = (a_1 \vee a_2) \wedge (a_1 \vee b_2) \wedge (a_2 \vee b_1) \wedge$$

$$\wedge (b_1 \vee b_2) \wedge (a_1 \vee a_2) \wedge (a_1 \vee c_2) \wedge (a_2 \vee c_1) \wedge (c_1 \vee c_2).$$

Теперь справедливость неравенства устанавливается в результате сокращений, так как

$$a_1 \vee a_2 \neq (b_1 \vee c_2) \wedge (b_2 \vee c_1).$$

Равенство доказано

Легко доказать, что выполняется следующее важное свойство:

$\tilde L \subset \tilde B \Rightarrow \tilde R \circ \tilde L \subset \tilde R \circ \tilde B$ (представляем читателю сделать это).

(Max—*)-композиция. В (6) операцию $\wedge$ можно произвольно заменить любой другой, для которой выполняются те же ограничения, что и для $\wedge$: она ассоциативна и монотонно не убывает по каждому аргументу. Тогда можно записать

$$\mu_{\tilde{L}*\tilde{R}}(x, z) = \vee_y [\mu_{\tilde{R}}(x, z) * \mu_{\tilde{L}}(x, z). \qquad (31)$$

(Max—•)-композиция. Среди (max-•)-композиций, которые можно было бы представить себе, особого внимания заслуживает (max—*)-композиция. В этом случае операция * — это умножение, и она обозначается знаком •; формула (31) принимает вид

$$\mu_{\tilde{L}\cdot\tilde{R}}(x, z) = \vee_y [\mu_{\tilde{R}}(x, z) \bullet \mu_{\tilde{L}}(x, z).$$

Позднее нам представится случай поговорить о (max—•)-композиции и указать некоторые практические приложения ее.

Обычное подмножество α-уровня нечеткого отношения.

Пусть α $\in[0, 1]$. Обычным подмножеством α-уровня нечеткого отношения $\tilde{R} \subset X \times X$ будем называть обычное подмножество

$$G_\alpha=\{(x, y)| \ \mu_{\tilde{R}}(x,y) \geq a\}.$$

Пример 1 (рис. 27).

$$G_{0,8} = \{(x_1, y_2), (x_1, y_3), (x_2, y_2), (x_2, y_4), (x_3, y_1)\}$$

$\tilde{R}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0,8	1	0
x_2	0,5	1	0,3	0,9
x_3	1	0,2	0,6	0,7

Рис. 27.

Пример 2. Рассмотрим нечеткое отношение, которое определено формулой

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y) = 1 - \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \qquad (32)$$

Подмножество уровня 0,3 будет определяться условием

$$1 - \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \geq 0{,}3$$

или

$$x^2 + y^2 \geq 3/7.$$

Это подмножество — внешность круга радиуса $r = \sqrt{3/7}$, включая его границу — окружность (см. рис. 28.).

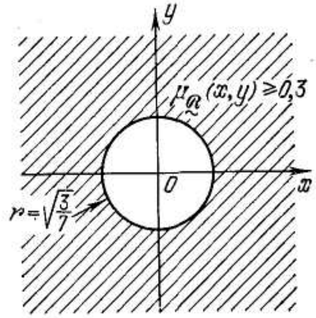


Рис. 28.

Обычное подмножество G_α можно определить другим способом, с помощью обычного отношения R_α, такого, что

$$\left.\begin{array}{l} \mu_{R_\alpha}(x,y), \quad \text{если } \mu_R(x,y) \geq \alpha, \\ \mu_{R_\alpha}(x,y), \quad \text{если } \mu_R(x,y) < \alpha, \end{array}\right\} \qquad (33)$$

Вернувшись к примеру на рис. 27, можно записать

$$R_{0,4} = \begin{array}{c|cccc|} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \qquad R_{0,7} = \begin{array}{c|cccc|} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}.$$

Для примера на рис. 28 очевидно, что условия

$$\mu_{\tilde{R}_{0,2}}(x,y) = 0 \quad \text{при } x^2 + y^2 < 3/7,$$

$$\mu_{\tilde{R}_{0,3}}(x,y) = 1 \text{ при } x^2 + y \geq 3/7,$$

определяют обычное отношение $R_{0,3}$.

Мы установили очевидное свойство

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \Rightarrow G_{\alpha_1} \subset G_{\alpha_2}$$

или, что то же самое,

$$R_{\alpha_1} \subset R_{\alpha_2}$$

Докажем теорему.

Теорема декомпозиции (Слово «декомпозиция» здесь употребляется в смысле, отличном от смысла этого слова при рассмотрении (max-min) или других композиций отношений).

Любое нечеткое отношение $\tilde{R}$ можно представить в форме

$$\tilde{R} = \bigvee_{\alpha} \alpha \cdot R_{\alpha}, \qquad 0<\alpha\leq 1, \qquad (34)$$

где

$$\mu_{R_\alpha}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu_{\tilde{R}}(x,y) \geq \alpha, \\ 0, & \text{если } \mu_{\tilde{R}}(x,y) < \alpha. \end{cases}$$

Здесь запись $\alpha \cdot R_\alpha$ обозначает, что все элементы обычного отношения R_α увеличиваются на α.

Доказательство. Функцию принадлежности для отношения $\tilde{R}$, определенного в (34), можно записать в виде

$$\mu_{\bigvee_\alpha \alpha R_\alpha}(x,y) = \bigvee_{\alpha} \alpha\, \mu_{R_\alpha}(x,y) = \bigvee_{\alpha \leq \mu_{\tilde{R}}(x,y)} \alpha = \mu_{\tilde{R}}(x,y)$$

Пример 1.

$$\begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}8 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}3 & 0{,}9 \\ 1 & 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}7 \end{bmatrix} = \bigvee \left(0{,}2 . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ 0{,}3 . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \right.$$

$$0{,}5 . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ 0{,}6 . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ 0{,}7 . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\left. 0{,}8 . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ 0{,}9 . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ 1 . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

Пример 2. Согласно (33) декомпозиция остается справедливой и в случае, когда *X* или/и *Y* имеют мощность континуума. Но тогда операция $\vee$ (max) должна считаться выполненной (если необходимо) для континуального множества значений в рассмотренном интервале.

Рассмотрев пример (32) (см. рис. 28), можем записать

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y) = \bigvee_{\alpha} \alpha R_\alpha,$$

где

$$\mu_{R_\alpha}(x,y) = \begin{cases} 1, & если\ (x,y) \in D(\alpha), \\ 0, & если\ (x,y) \notin D(\alpha). \end{cases}$$

и $D(\alpha) \subset X \times Y$ — такая область, которая

$$1 - \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \geq \alpha$$

Композиция ближайших обычных отношений.

Напомним, что $\tilde{\tilde{R}}$ обозначает обычное отношение, ближайшее к нечеткому отношению $\tilde{R}$. Легко доказать, что

$$\tilde{R}_2 \llcorner \tilde{R}_1 = \tilde{R} \Rightarrow \tilde{\tilde{R}}_2 \circ \tilde{\tilde{R}}_1 = \tilde{\tilde{R}}\ ,$$

где $\tilde{R}$ обозначает (max—min)-композицию.

Пример.

$\tilde{R}_1$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0,1	0,2	0	1	0,7
x_2	0,3	0,5	0	0,2	1
x_3	0,8	0	1	0,4	0,3

$\circ$

$\tilde{R}_2$	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,9	0	0,3	0,4
y_2	0,2	1	0,8	0
y_3	0,8	0	0,7	1
y_4	0,4	0,2	0,3	0
y_5	0	1	0	0,8

$=$

$\tilde{R}$	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0,4	0,7	0,3	0,7
x_2	0,3	1	0,5	0,8
x_3	0,8	0,3	0,7	1

$\tilde{\tilde{R}}_1$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0	0	0	1	1
x_2	0	0	0	0	1
x_3	1	0	1	0	0

$\circ$

$\tilde{\tilde{R}}_2$	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	1	0	0	0
y_2	0	1	1	0
y_3	1	0	1	1
y_4	0	0	0	0
y_5	0	1	0	1

$=$

$\tilde{\tilde{R}}$	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0	1	0	1
x_2	0	1	0	1
x_3	1	0	1	1

1.3. Нечеткое подмножество, индуцированное отображением

Рассмотрим отображение Г множества X в множество Y, обозначенное

$$X \underset{\Gamma}{\sim\!\!\longrightarrow} Y$$

где $x \in X$ и $y \in Y$.

$$y \in \Gamma\{x\}.$$

Пусть $\mu_{\tilde{A}}(x)$ — функция принадлежности нечеткого подмножества $\tilde{A} \subset X$, тогда отображение Г индуцирует в Y нечеткое подмножество $\tilde{B} \subset Y$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{B}}(y)=\begin{cases} \underset{x\in\Gamma^{-1}(y)}{MAX}[\mu_{\tilde{A}}(x)], & если\ \Gamma^{-1}\{y\} \neq \varnothing \\ 0, & если\ \Gamma^{-1}\{y\} = \varnothing \end{cases}$$

Пример 1 (рис. 29). Пусть

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$,

$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$.

Рассмотрим отображение, такое, что

$\Gamma\{x_1\}=\{y_3\}$, $\Gamma\{x_2\} = \{y_1, y_4\}$,

$\Gamma\{x_3\} = \{y_1\}$, $\Gamma\{x_4\} = \{y_3\}$,

$\Gamma\{x_5\} = \{y_1\}$, $\Gamma\{x_6\}= \{y_2\}$,

$\Gamma\{x_7\} = \{y_4\}$.

Рассмотрим также отображение Γ^{-1}, обратное Г:

$\Gamma^{-1}\{y_1\}= \{x_2, x_3, x_5\}$,

$\Gamma^{-1}\{y_2\} = \{x_1, x_6\}$,

$\Gamma^{-1}\{y_3\}= \{x_4\}$, $\Gamma^{-1}\{y_4\}= \{x_2,x_7\}$.

И, наконец, рассмотрим нечеткое подмножество $\tilde{A} \subset X$:

$\tilde{A} = \{(x_1| 0{,}3), (x_2| 0{,}7), (x_3| 1), (x_4| 0), (x_5| 0{,}2), (x_6|0{,}9), (x_7|0{,}8)\}$.

Тогда имеем

$$\left.\begin{aligned} \mu_{\tilde{B}}(y_1) &= \underset{\{x_2,x_3,x_5\}}{MAX}(0{,}7;1;0{,}2)=1, \\ \mu_{\tilde{B}}(y_2) &= \underset{\{x_1,x_6\}}{MAX}(0{,}3;0{,}9)=0{,}9, \\ \mu_{\tilde{B}}(y_3) &= \underset{\{x_4\}}{MAX}(0)=0, \\ \mu_{\tilde{B}}(y_4) &= \underset{\{x_2,x_7\}}{MAX}(0{,}7;0{,}8)=0{,}8. \end{aligned}\right\}$$

Эти результаты изображены на рис. 29.

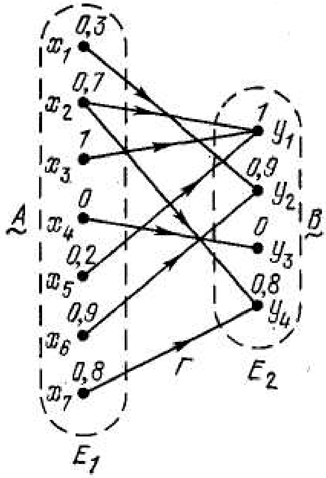


Рис. 29.

Интересно сравнить это понятие с соответствующим понятием для обычных подмножеств. Рассмотрим рис. 30

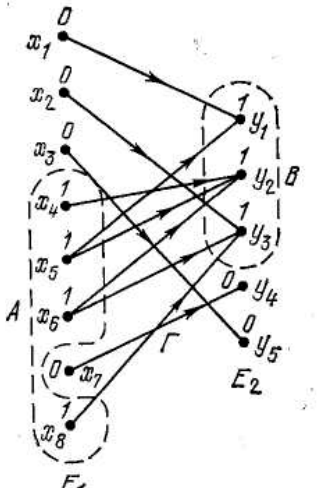


Рис. 30.

Пусть

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\},$$
$$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}.$$

Имеем

$$Г\ \{x_4, x_5, x_6, x_8\} = \{y_1, y_2, y_3\}.$$

Отображение Г подмножеству $A = \{x_4, x_5, x_5, x_8\}$ ставит в соответствие подмножество $B = \{y_1, y_2, y_3\}$.

Пример 2. Пусть $x \in$ R, $y \in$ R, где R — множество действительных чисел. Рассмотрим нечеткое подмножество $\tilde{A}$, которое определено содержательно как «x, ближайшее к $(4k + 1)\,\pi/2$, $k = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...$». Рассмотрим также функцию

$$y = f(x) = \sin x.$$

Тогда нечеткое подмножество $\tilde{B}$, индуцированное $f(x)$, будет иметь вид

$$\tilde{B} = \{y \mid y \leq 1 \text{ и значение } y \text{ близкое к } 1\}$$

(рис. 31).

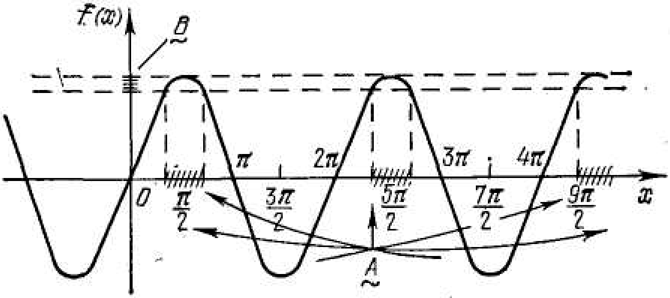


Рис. 31.

1.4. Условные нечеткие подмножества

Нечеткое подмножество $\tilde{B}(x) \subset Y$ будет называться *условным* на X, если его функция принадлежности зависит от $x \in X$ как от параметра.

Для записи условной функции принадлежности используют обозначение

$$\mu_{\tilde{B}}(y \| x), \quad \text{где } x \in X \text{ и } y \in Y.$$

Эта функция определяет отображение X в множество нечетких подмножеств, определенных на Y.

Таким образом, нечеткое подмножество $\tilde{A} \subset X$ будет индуцировать нечеткое подмножество $\tilde{B} \subset Y$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \underset{x \in X}{MAX}\,(\text{MIN}\,[\mu_{\tilde{B}}(y||x),\ \mu_{\tilde{A}}(x)]). \qquad (35)$$

Пример. Рассмотрим нечеткое отношение между

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$$
$$Y = \{y_1, y_2, y_3\},$$

определенное следующей таблицей:

$\tilde{R}$	y_1	y_2	y_3
x_1	0,3	0,7	0
x_2	0,2	0,5	0
x_3	1	0	0,8
x_4	0	1	0,5
x_5	0,3	1	0,4
x_6	0,8	0	0

Отношение $\tilde{R}$ выражает условную функцию принадлежности

$$\mu_{\tilde{B}}(y||x).$$

Например,

$$\mu_{\tilde{B}}(y_3||x_5) = 0{,}4.$$

Предположим, что в X имеется нечеткое подмножество $\tilde{A}$, определенное как

$$\tilde{A} = \{(x_1|0{,}5), (x_2|0{,}2), (x_3|0{,}8), (x_4|1), (x_5|0{,}7), (x_6|0)\}.$$

Этому нечеткому подмножеству $\tilde{A} \subset X$ соответствует нечеткое подмножество в Y, скажем $\tilde{B} \subset Y$, которое будет определяться формулой (1.35). Проведем вычисление. Сначала подсчитаем $\mu_{\tilde{B}}(y_1)$. Имеем

MIN [$\mu_{\tilde{B}}(y_1||x_1)$, $\mu_{\tilde{A}}(x_1)$] = MIN [0,3; 0,5] = 0,3,

MIN [$\mu_{\tilde{B}}(y_1||x_2)$, $\mu_{\tilde{A}}(x_2)$] = MIN [0,2; 0,2] = 0,2,

MIN [$\mu_{\tilde{B}}(y_1||x_3)$, $\mu_{\tilde{A}}(x_3)$] = MIN [1; 0,81 = 0,8,

MIN [$\mu_{\tilde{B}}(y_1||x_4)$, $\mu_{\tilde{A}}(x_4)$] = MIN [0; 1] = 0, MIN [$\mu_{\tilde{B}}$ $(y_1||x_5)$, $\mu_{\tilde{A}}$ (x_5)] = MIN [0,3; 0,7] = 0,3,

MIN [$\mu_{\tilde{B}}$ $(y_1||x_6)$, $\mu_{\tilde{A}}$ (x_6)] = MIN [0,8; 0] = 0,

$\underset{x_i}{MAX}$ MIN [$\mu_{\tilde{B}}$ $(y_1||x_i)$, $\mu_{\tilde{A}}$ (x_i)] = MAX [0,3; 0,2; 0,8; 0; 0,3; 0] = 0,8.

Аналогичные подсчеты нужно провести для y_2 и y_3. Тогда получим

$$\mu_{\tilde{B}}(y_1) = 0,8,\ \mu_{\tilde{B}}(y_2)=l,\ \mu_{\tilde{B}}(y_3) = 0,8.$$

Таким образом,

$$\tilde{B} = \{(\ y_2|0,8),\ (y_2|1),\ (y_3|0,8)\}.$$

Другое представление условного нечеткого подмножества. Как мы увидим ниже, для нечетких подмножеств выражение (35) играет ту же самую роль, что и понятие функции для элементов формальных множеств. Понятие функции для этих элементов можно выразить такой фразой: «если *x=a,* то в соответствии с определением функции *f y =b»,* которую можно записать в виде

$$x \sim\underset{f}{\rightarrow} y$$

или в виде

$$y = f(x).$$

Понятие условного нечеткого подмножества играет в точности ту же роль, но вместо того, чтобы рассматривать элементы $x\in X$, $y\in Y$ и отношение f, являющееся функцией, введем следующее определение.

Пусть $\tilde{X} \subset X$ и $\tilde{Y} \subset Y$; рассмотрим нечеткое отношение $\tilde{R}$ между X и Y. Теперь определим: если $\tilde{X} = \tilde{A}$, то в соответствии с отношения $\tilde{R}$ имеем $\tilde{Y} = \tilde{B}$; это можно записать в виде

$$\tilde{A} \sim\underset{\tilde{R}}{\rightarrow} \tilde{B}\ .$$

Если $\mu_{\tilde{R}}(x,\ y)$ — функция принадлежности нечеткого отношения $\tilde{R}$, $\mu_{\tilde{A}}(x)$- отношение $\tilde{A}$ и $\mu_{\tilde{B}}(x)$ — отношение $\tilde{B}$, то

$$\mu_{\tilde{B}}(y)= \underset{x\in X}{MAX}\ \text{MIN}[\ \mu_{\tilde{A}}\ (x),\ \mu_{\tilde{R}}(x,y)]= \underset{x}{\vee}\ [\ \mu_{\tilde{A}}\ (x) \wedge \mu_{\tilde{R}}\ (x,y)] \quad (36)$$

Это выражение устанавливает другое представление условных нечетких подмножеств. Дальше мы убедимся в важности этого понятия.

Рассмотрим пример использования этого представления.

Пример 1

$X =\{\ x_1,\ x_2,\ x_3),$

$\tilde{A}$ = {(x_1|0,3), (x_2|0,7), (x_3|1)}, (37)

Y = {y_1. y_2, y_3, y_4, y_5}

$\tilde{R}$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0,8	1	0	0,3	0,7
x_2	0,8	0,3	0,8	0,4	0,7
x_3	0,2	0,3	0	0,2	1

(38)

Перепишем (37) в виде

$$\tilde{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{c|c|c} 0,3 & 0,7 & 1 \end{array}} \end{array}. \tag{39}$$

Теперь проведем операцию взятия MIN для всех элементов строки (39) и столбца y_1 (38); это даст

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0,3 & 0,7 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \wedge \begin{array}{c} y_1 \\ \begin{array}{|c|} \hline 0,8 \\ \hline 0,8 \\ \hline 0,2 \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} y_1 \\ \begin{array}{|c|} \hline 0,3 \wedge 0,8 \\ \hline 0,7 \wedge 0,8 \\ \hline 1 \wedge 0,2 \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} y_1 \\ \begin{array}{|c|} \hline 0,3 \\ \hline 0,7 \\ \hline 0,2 \\ \hline \end{array} \end{array}.$$

После выполнения операции MAX на элементах полученного столбца имеем

$$0,3 \vee 0,7 \vee 0,2 = 0,7.$$

Таким образом,

$$\mu_{\tilde{B}}(y_1) = 0,7.$$

Выполнив то же самое между элементами (39) и другими столбцами (38), получим

$$\mu_{\tilde{B}}(y_2) = 0,3,\ \mu_{\tilde{B}}(y_3) = 0,7,\ \mu_{\tilde{B}}(y_4) = 0,4,\ \mu_{\tilde{B}}(y_5) = 1.$$

И окончательно

$$\tilde{B} = \{(y_1|0,7), (y_2|0,3), (y_3|0,7), (y_4|0,4), (y_5|1)\},$$

или, что то же самое,

$$\tilde{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0,7 & 0,3 & 0,7 & 0,4 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Пример 2. Очевидно, что формула (36) или (35) также применяется в случае, когда подмножества — обычные, а отношение R — булево (т.е. формальное). В этом случае формулы принимают вид

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \dot{\sum_{x}} \mu_A(x) \cdot \mu_R(x,y), \qquad (40)$$

где $\dot{\sum_{x}}$ - булева сумма.

Пусть

$X = \{x_1, x_2, x_3\}$,

$A = \{(x_1|1), (x_2|0), (x_3|1)\}$,

$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$,

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	1	0	0	1	0
x_2	0	1	1	1	0
x_3	1	0	0	0	1

(41)

Тогда, выполняя булевы операции, которые указаны в (40), для подмножества

	x_1	x_2	x_3
$A =$	1	0	1

и отношения (41), находим

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
$B =$	1	0	0	1	1

Пример 3. Рассмотрим теперь случай, когда универсальное множество непрерывно.

Пусть

$X = \mathrm{R}^+$,

$\tilde{A} = \{x | \mu_{\tilde{A}}(x) = e^{-k_1 x}\}, \quad k_1 \in \mathrm{R}^+$,

$\tilde{R} = \{(x, y) | \mu_{\tilde{R}}(x, y) = e^{-k_2|x-y|}\}, \quad k_2 \in \mathrm{R}^+$

при $k_2 > k_1$.

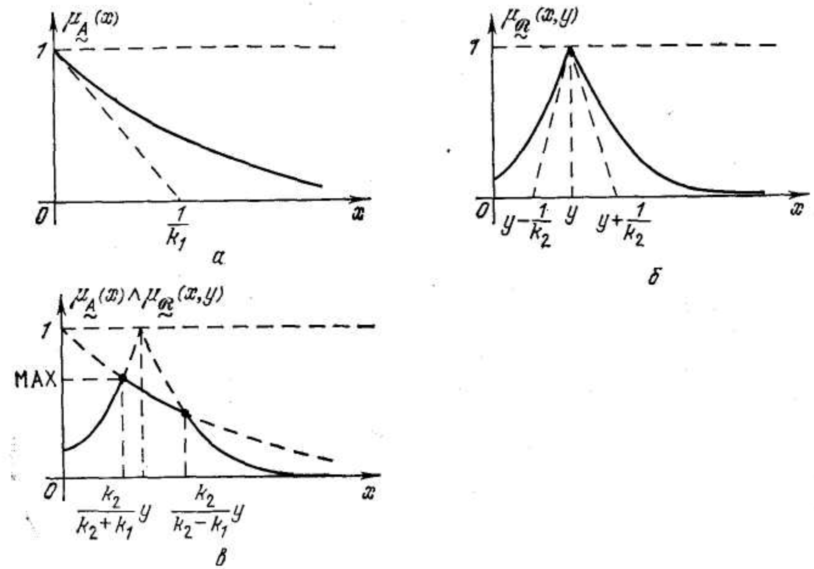


Рис. 32.

Теперь определим минимум по x для $\mu_{\tilde{A}}$ (x) (рис. 32, *а*) и $\mu_{\tilde{R}}$ (x,y) (рис. 32, *б*). Эти две кривые пересекаются в двух точках:

условие $0 \le x \le y$, $e^{-k_1 x} = e^{-k_2|y-x|}$

дает точку $x = \dfrac{k_2}{k_2+k_1}\, y$,

условие $y \le x$, $e^{-k_1 x} = e^{-k_2|x-y|}$

дает точку $x = \dfrac{k_2}{k_2-k_1}\, y$.

На рис. 32, *в* выделена кривая

$$\mu(x,y) = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{R}}(x,y),$$

максимум которой достигается при

$$x = \frac{k_2}{k_2+k_1}\, y$$

Таким образом,

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \mathrm{e}^{-k_1\left(\frac{k_2}{k_1+k_2}\right)y} = \mathrm{e}^{-\frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}y}$$

Общее замечание. Очевидно, можно задать следующий вопрос. Если при $\tilde{X}=\tilde{A}$ в соответствии с отношением $\tilde{R}$ имеем $\tilde{Y}=\tilde{B}$, то можно ли отсюда заключить, что из $\tilde{Y}=\tilde{B}$ в соответствии с обратным нечетким отношением $\tilde{R}'$ получим $\tilde{X}=\tilde{A}$, где $\tilde{R}'$ — нечеткое отношение, обратное к $\tilde{R}$? (Под обратным здесь понимается отношение, которое получается из данного, если в таблице отношения заменить столбцы строками. Это отношение лучше было бы назвать транспонированным, поскольку в следующей фразе под обратным к $\tilde{R}$ подразумевается такое отношение $\tilde{R}'$, которое $\forall A$: $A\tilde{R}\,\tilde{R}'=A$, когда $\tilde{R}\,\tilde{R}'$ - тождественное отношение на *X*). За исключением частных случаев, обратный переход от $\tilde{B}$ посредством $\tilde{R}'$ к $\tilde{A}$ невозможен: и в этом смысле отношение $\tilde{R}'$ не будет отношением, обратным к отношению $\tilde{R}$.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим пример (37)—(39) и формулу (40): нечеткое подмножество

$\tilde{A}$ =

x_1	x_2	x_3
0,3	0,7	1

и отношение

$\tilde{R}$ =

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0,8	1	0	0,3	0,7
x_2	0,8	0,3	0,8	0,4	0,7
x_3	0,2	0,3	0	0,2	1

дают нечеткое подмножество

$\tilde{B}$ =

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
0,7	0,3	0,7	0,4	1

Тогда как $\tilde{B}$ и

$$\tilde{R}' = \begin{array}{c|c|c|c|} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline y_1 & 0{,}8 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ \hline y_2 & 1 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ \hline y_3 & 0 & 0{,}8 & 0 \\ \hline y_4 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ \hline y_5 & 0{,}7 & 0{,}7 & 1 \\ \hline \end{array}$$

дали бы

$$\tilde{A}' = \begin{array}{|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{x_1} & \multicolumn{1}{c}{x_2} & \multicolumn{1}{c}{x_3} \\ \hline 0{,}7 & 0{,}7 & 1 \\ \hline \end{array}$$

(таким образом, здесь ситуация та же, что и при матричном исчислении в линейном векторном пространстве, где [M]$\{x\}=y$ и [M]'$\{y\}\neq\{x\}$. Если матрица [M] квадратная и невырожденная, то [M] имеет обратную матрицу $[M]^{-1}$, такую, что $[M]\cdot[M]^{-1}=[1]$ и $[M]\cdot\{x\}=\{y\}$ и $\{x\} = [M]^{-1}\cdot\{y\}$, где $\{x\}$ и $\{y\}$ - векторы-столбцы).

Нечеткие подмножества, последовательно обусловливающие друг друга.

Если $\tilde{A}_1$ индуцирует $\tilde{A}_2$ с помощью $\tilde{R}_1$, $\tilde{A}_2$ индуцирует $\tilde{A}_3$ с помощью $\tilde{R}_2$, ... и $\tilde{A}_{n-1}$ индуцирует $\tilde{A}_n$ с помощью $\tilde{R}_{n-1}$, то $\tilde{A}_1$ индуцирует $\tilde{A}_n$ с помощью $\tilde{R}_{n-1}\circ\tilde{R}_{n-2}\circ\ldots\circ\tilde{R}_1$.

Пример.

$$X = \{x_1, x_2\},$$

$$\tilde{A} = \{(x_1|0{,}8), (x_2|0{,}3),$$

$$Y = \{y_1, y_2, y_3\},$$

$$\tilde{R}_1 = \begin{array}{c|c|c|c|} & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline x_1 & 0{,}3 & 1 & 0 \\ \hline x_2 & 0{,}8 & 0 & 0{,}7 \\ \hline \end{array},$$

$$Z = \{z_1; z_2, z_3\},$$

Ближайшие обычные подмножества, обусловливающие друг друга.

$$\underset{\sim}{R}_2 = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0{,}7 & 0{,}4 & 1 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}9 \end{array}\right] \end{array} .$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} 0{,}8 & 0{,}3 \end{array}\right] \end{array} \circ \underset{\sim}{R}_1 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0{,}3 & 1 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0{,}7 \end{array}\right] \end{array} \circ \underset{\sim}{R}_2 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0{,}7 & 0{,}4 & 1 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}9 \end{array}\right] \end{array} =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}3 \end{array}\right] \end{array} \circ \underset{\sim}{R}_2 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0{,}7 & 0{,}4 & 1 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}9 \end{array}\right] \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}8 \end{array}\right] \end{array} \subset E_3$$

Легко показать (достаточно сослаться на выражение $\tilde{R}_2 \llcorner \tilde{R}_1 = \tilde{R} \Rightarrow \overline{\tilde{R}}_2 \circ \overline{\tilde{R}}_1 = \overline{\tilde{R}}$), что

$$\tilde{A} \underset{\tilde{R}}{\sim\!\to} \tilde{B} \Rightarrow \overline{\tilde{A}} \underset{\overline{\tilde{R}}}{\sim\!\to} \overline{\tilde{B}} .$$

Пример.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0{,}3 & 0{,}7 & 1 \end{array}\right] \end{array} \circ \underset{\sim}{R} \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0{,}8 & 1 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}7 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0 & 0{,}2 & 1 \end{array}\right] \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0{,}4 & 1 \end{array}\right] \end{array} ,$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \circ \underset{\approx}{R} \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} .$$

Это свойство остается справедливым, какой бы ни была природа универсальных множеств X и Y, где $x_i \in X$ и $y_i \in Y$, и не зависит от того, конечны или нет множества X и Y.

2. Свойства нечетких отношений

2.1. Свойства нечетких бинарных отношений

Различные типы нечетких отношений определяются с помощью свойств, аналогичных свойствам обычных отношений, причем для нечетких отношений можно указать различные способы обобщения этих свойств. В качестве основных свойств здесь будут рассматриваться свойства, имеющие такую же алгебраическую запись, что и для обычных отношений. Справа от алгебраической записи указывается ее поточечная формулировка. Для ряда свойств их алгебраическая запись отсутствует.

Рассмотрим случай, когда

$X = Y = P$

M = [0, 1],

и займемся исследованием некоторых свойств нечетких бинарных отношений в $P \times P$.

Пример 1. Пусть

P = {A, B, C, D, E},

M = [0, 1].

Таблица или матрица на рис. 33 представляет нечеткое отношение в $P \times P$.

$\tilde{R}$	A	B	C	D	E
A	0,1	0	0	1	0,8
B	0,8	0,3	0	0,7	1
C	0,8	0,3	0,2	0	0,9
D	0,6	0	1	0,5	0
E	0,2	0,5	1	0,6	0,4

Рис. 33.

Пример 2. Пусть R — множество вещественных чисел и $x \in$ R, $y \in$ R, тогда

$$|y|\,»\,|x| \qquad (42)$$

есть нечеткое бинарное отношение $\tilde{R}$, которое задано в R×R, с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{R}}(x,\ y)$, которая определяется (42) для всех *(x, y)*.

Перейдем к изучению основных свойств нечетких отношений. При представлении функции принадлежности, которая определяет нечеткое отношение, мы не будем различать обозначения $\mu_{\tilde{R}}(x, y)$ или

$\mu_{\tilde{G}}(x,\ y)$, поскольку нечеткое отношение можно рассматривать как нечеткий граф.

Симметрия. Нечеткое бинарное отношение называется *симметричным,* если выполняется условие

$$\forall\,(x, y) \in P \times P\colon (\ \mu_{\tilde{R}}\ (x, y) = \mu\ ) \Rightarrow (\ \mu_{\tilde{R}}\ (y, x) = \mu$$

Пример 3. (См. рис. 34).

$\tilde{R}$	A	B	C	D	E
A	0	0,1	0	0,1	0,9
B	0,1	1	0,2	0,3	0,4
C	0	0,2	0,8	0,8	1
D	0,1	0,3	0,8	0,7	1
E	0,9	0,4	1	1	0

Рис. 34.

Пример 4. Пусть R — множество вещественных чисел и $x \in$ R, $y \in$ R. Тогда отношение «*y* близкое к *x»* интуитивно воспринимается как нечеткое симметричное отношение в R×R.

Общее обозначение симметричности выглядит так:

$$\tilde{R} = \tilde{R}^{-1},\quad \tilde{R}\,(x,y) = \tilde{R}\ (y,x)\ \ \forall\, x, y \in X\,.$$

Антисимметричность:

$$\tilde{R}\ \square\,\tilde{R}^{-1} \subseteq \tilde{E}\,,\quad \tilde{R}\,(x,y) \wedge \tilde{R}\ (y,x) = \mathbf{0}\ \ \forall\, x, y \in X\,,\ x \neq y.$$

Асимметричность:

$$\tilde{R}\ \mathrm{I}\ \ \tilde{R}^{-1} = \varnothing\,,\quad \tilde{R}\,(x,y) \wedge \tilde{R}\ (y,x) = \mathbf{0}\quad \forall\, x, y \in X.$$

Полнота сильная:

$$\tilde{R}\ \square\ \tilde{R}^{-1}=\mathrm{U},\quad \tilde{R}\,(x,y)\vee\ \tilde{R}\,(y,x)=\mathbf{I}\quad \forall\, x,\, y\in X.$$

Полнота слабая:

$$\tilde{R}\,(x,y)\vee\ \tilde{R}\,(y,x)>\mathbf{0}\quad \forall\, x,\, y\in X.$$

Последние условия называют также линейностью и связностью .

Рефлексивность. Это свойство определяется условием

$$\forall\, x,\, y\in P:\ \mu_{\tilde{R}}\ (x,\, y)=1.$$

Пример 5. (См. рис. 35).

$\tilde{R}$	A	B	C	D
A	1	0	0,2	0,3
B	0	1	0,1	1
C	0,2	0,7	1	0,4
D	0	1	0,4	1

$\tilde{R}$	A	B	C	D
A	0,2	1	0,4	0,4
B	0	0,6	0,3	0
C	0	1	0,3	0
D	0,1	1	1	0,1

Рис. 35.

Пример 6. Отношение «*y* близкое к *x*» в примере на симметричность является рефлексивным отношением.

Возможно и такое определение *рефлексивности:*

$$\tilde{E}\subseteq\tilde{R},\quad \tilde{R}\ (x,x)=\mathbf{I}\quad \forall\, x\in X.\quad (*)$$

Слабая рефлексивность:

$$\tilde{R}\ (x,y)<\tilde{R}\ (x,x)\quad \forall\, x,\, y\in X.$$

Условие

$$\tilde{R}\ (x,y)=\mathbf{I}\quad \forall\, x,\, y\in X\,,\ x\neq y.$$

вместе с условием (*) будем называть *сильной рефлексивностью.*

Антирефлексивность:

$$\tilde{R}\ \mathrm{I}\ \ \tilde{E}=\varnothing\ ,\ \ \tilde{R}\,(x,x)=\mathbf{0}\quad \forall\, x\in X. \qquad (**)$$

Слабая антирефлексивность:

$$\tilde{R}\ (x,x)\le\tilde{R}\ (x,y)\quad \forall\, x,\, y\in X.$$

Сильная антирефлексивность — это условие (**) совместно с условием $\mathbf{0}<\tilde{R}\ (x,y)\quad \forall\, x,\, y\in X\,,\ x\neq y.$

Транзитивность. Пусть $x,\, y,\, z\in P$, тогда

$$\forall\ (x,\, y),\ (y,\, z),\ (x,\, z)\in P\times P:$$

$$\mu_{\tilde{R}}\ (x,\, z)\ge \underset{y}{MAX}\ [\mathrm{MIN}\ (\mu_{\tilde{R}}\ (x,\, y),\ \mu_{\tilde{R}}\,(y,z))]. \qquad (43)$$

Выписанное соотношение определяет свойство транзитивности нечеткого отношения. Это соотношение можно записать в виде

$$\mu_{\tilde{R}}(x, z) \geq \bigvee_{y} [\ \mu_{\tilde{R}}(x, y),\ \mu_{\tilde{R}}(y,z)]. \qquad (44)$$

Напомним, что символ $\vee$ означает «максимальное из значений...», а символ $\wedge$ — «минимальное из значений ...».

Возможно и такое определение транзитивности:

$$\tilde{R} \supseteq \tilde{R} \circ \tilde{R}, \quad \tilde{R}(x,z) \geq \tilde{R}\ (x,y)\ \wedge\ \tilde{R}\ (y,z) \quad \forall\, x,y,z \in X.$$

Возможны и другие определения условия транзитивности нечеткого отношения. Другой подход к определению условия транзитивности нечетких порядков будет рассмотрен ниже.

Прежде чем привести некоторые примеры, следует удостовериться в том, что определением (44) на самом деле обобщается понятие транзитивности формальных отношений.

Операция $\wedge$ (min) соответствует «и» в пропозиционной логике, а операция $\bigvee_{y}$ (max по всем *y)* соответствует результату, который можно получить посредством импликации $\Rightarrow$.

Рассмотрим несколько примеров применения формулы (43) (или, что то же самое, (44)).

Пример 7. Следующие нечеткие отношения транзитивны:

Y много больше *X*,

А чище, чем *В*,

X — дальний родственник *Y*,

в противоположность отношению *X* похож на *Y*, которое нетранзитивно. Ведь может случиться так, что *X* похож на *Y* и *Y* похож на *Z*, но *X* не обязательно похож на *Z;* все, однако, зависит от характера функции $\mu_{\tilde{R}}(x,\ y)$, которая оценивает сходство. Это приведет нас позднее к тому, чтобы с большей точностью определить, что в настоящей теории подразусевается под «сходством».

Пример 8. Рассмотрим отношение $x\tilde{R}y$, где $x,\ y \in\ N$, задаваемое функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{R}}(x,\ y) = \mathrm{e}^{-k(x-y)^2} \qquad (45)$$

при значениях k>1 и достаточно больших для того, чтобы эта функция принадлежности выражала отношение *«х* и *у* очень близки друг к другу». Покажем, что нечеткое отношение, определяемое (45), нетранзитивно.

На рис. 36 выписанная матрица отношения (45).

$\mu_{\underset{\sim}{R}}$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	1	e^{-k}	e^{-4k}	e^{-9k}	e^{-16k}	e^{-25k}	e^{-36k}	e^{-49k}	...
1	e^{-k}	1	e^{-k}	e^{-4k}	e^{-9k}	e^{-16k}	e^{-25k}	e^{-36k}	...
2	e^{-4k}	e^{-k}	1	e^{-k}	e^{-4k}	e^{-9k}	e^{-16k}	e^{-25k}	...
3	e^{-9k}	e^{-4k}	e^{-k}	1	e^{-k}	e^{-4k}	e^{-9k}	e^{-16k}	...
4	e^{-16k}	e^{-9k}	e^{-4k}	e^{-k}	1	e^{-k}	e^{-4k}	e^{-9k}	...
5	e^{-25k}	e^{-16k}	e^{-9k}	e^{-4k}	e^{-k}	1	e^{-k}	e^{-4k}	...
6	e^{-36k}	e^{-25k}	e^{-16k}	e^{-9k}	e^{-4k}	e^{-k}	1	e^{-k}	...
7	e^{-49k}	e^{-36k}	e^{-25k}	e^{-16k}	e^{-9k}	e^{-4k}	e^{-k}	1	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋱

Рис. 36.

На рис. 37 выполненны вычисления правой части условия транзитивности (44).

$\mu_{\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{R}}$ y	0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	1	1	1	1	1	1	1	1	...
1	0	e^{-1}	e^{-1}	e^{-1}	e^{-1}	e^{-1}	e^{-1}	e^{-1}	...
2	0	0	e^{-2}	e^{-2}	e^{-2}	e^{-2}	e^{-2}	e^{-2}	...
3	0	0	0	e^{-3}	e^{-3}	e^{-3}	e^{-3}	e^{-3}	...
4	0	0	0	0	e^{-4}	e^{-4}	e^{-4}	e^{-4}	...
5	0	0	0	0	0	e^{-5}	e^{-5}	e^{-5}	...
6	0	0	0	0	0	0	e^{-6}	e^{-6}	...
7	0	0	0	0	0	0	0	e^{-7}	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Рис. 37.

Можно убедиться, что (44) выполняется не для всех пар. Следовательно, отношение, определенное (45), нетранзитивно.

Позднее мы вернемся к детальному рассмотрению случая, когда *P* — бесконечное множество. Транзитивность в этом случае заслуживает особого внимания.

Теперь рассмотрим случай, когда отношение транзитивно, а множество *P* счетно.

Пример 9. Рассмотрим отношение $x\widetilde{R}y$, где $x,\ y \in M$, которое определяется функцией принадлежности

$$\mu_{\widetilde{R}}(x, y) = 0 \qquad x=y,$$

$$\mu_{\widetilde{R}}(x, y) = \mathrm{e}^{-x} \qquad x \geq y.$$

Матрица этого отношения представлена на рис. 38. На рис. 39 приведенные результаты вычислений правой части (44).

$\widetilde{R}$ $x \backslash y$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	1	1	1	1	1	1	1	1	...
1	0	e^{-1}	e^{-1}	e^{-1}	e^{-1}	e^{-1}	e^{-1}	e^{-1}	...
2	0	0	e^{-2}	e^{-2}	e^{-2}	e^{-2}	e^{-2}	e^{-2}	...
3	0	0	0	e^{-3}	e^{-3}	e^{-3}	e^{-3}	e^{-3}	...
4	0	0	0	0	e^{-4}	e^{-4}	e^{-4}	e^{-4}	...
5	0	0	0	0	0	e^{-5}	e^{-5}	e^{-5}	...
6	0	0	0	0	0	0	e^{-6}	e^{-6}	...
7	0	0	0	0	0	0	0	e^{-7}	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Рис. 38.

$\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{R}$ y	0	1	2	3	4	5	6	7	…
0	1	1	1	1	1	1	1	1	…
1	0	e^{-1}	e^{-1}	e^{-1}	e^{-1}	e^{-1}	e^{-1}	e^{-1}	…
2	0	0	e^{-2}	e^{-2}	e^{-2}	e^{-2}	e^{-2}	e^{-2}	…
3	0	0	0	e^{-3}	e^{-3}	e^{-3}	e^{-3}	e^{-3}	…
4	0	0	0	0	e^{-4}	e^{-4}	e^{-4}	e^{-4}	…
5	0	0	0	0	0	e^{-5}	e^{-5}	e^{-5}	…
6	0	0	0	0	0	0	e^{-6}	e^{-6}	…
7	0	0	0	0	0	0	0	e^{-7}	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Рис. 39.

Сравнивая эти два рисунка, можно убедиться, что (44) удовлетворяется для всех пар. Это отношение транзитивно.

Можно также проверить, что этот вывод остается в силе, если $x, y \in R^{+}$. Это отношение можно интерпретировать как «величина x меньше y и не зависит от y».

Замечание о конечных отношениях. Операция, определяемая посредством (34) или (35), проводится над строками и столбцами так же, как это делается в матричных вычислениях по правилу «строка на столбец». На рис. 40 показано, как производить вычисления, чтобы получить

$$\vee\,[(x_{i1} \wedge x_{1j}), (x_{i2} \wedge x_{2j}), \ldots, (x_{in-1} \wedge x_{n-1j})(x_{in} \wedge x_{nj})]\ldots$$

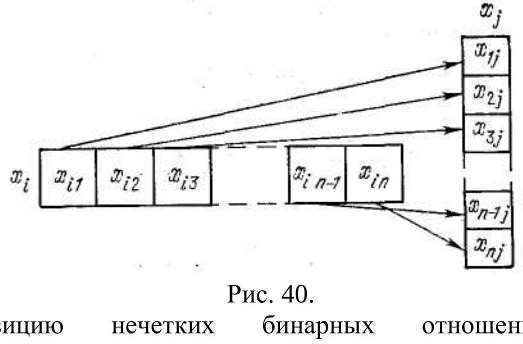


Рис. 40.

Композицию нечетких бинарных отношений можно рассматривать как разновидность матричного исчисления или как метод вычислений в теории графов, хотя они и отличаются от классических методов. Более того, теория композиции бинарных отношений — частный случай общей теории моноидов.

2.2. Декомпозиция нечетких отношений

Одно из важнейших свойств нечетких отношений заключается в том, что они могут быть представлены в виде совокупности обычных отношений, причем эти отношения могут быть упорядочены по включению, представляя собой иерархическую совокупность отношений. Разложение нечетких отношений на совокупность обычных отношений основаны на понятии α-уровня нечеткого отношения. Здесь для простоты будет предполагаться, что L линейно упорядочено.

α-уровнем нечеткого отношения $\tilde{R}$ называется обычное отношение R_α, определяемое для всех $\alpha > 0$ следующим образом:

$$R_\alpha = \{(x,y) \in X \times X \mid R(x,y) \geq \alpha\}. \tag{46}$$

Если обычное отношение R_α подобно нечеткому отношению отождествлять с его характеристической функцией $R_\alpha\colon X \times X \to \{0,\ 1),$ то соотношение (1.46) можно переписать в виде

$$R_\alpha\ \{(x,y) = \begin{cases} 1, & \textit{если } \tilde{R}(x,y) \geq \alpha, \\ 0 & \textit{в противном случае} \end{cases} \tag{47}$$

Нетрудно увидеть, что α-уровни нечетких отношений удовлетворяют соотношению:

из $\alpha \leq \beta$ следует $R_\alpha \supseteq R_\beta$,

представляя собой совокупность вложенных друг в друга отношений.

Теорема. Нечеткое отношение $\tilde{R}$ обладает каким-либо из свойств рефлексивностей, симетричностей, полнот, транзитивностей, тогда и только тогда, когда этим свойством обладают все его α-уровни, т.е. $\tilde{R}$ рефлексивно тогда и только тогда, когда при всех $\mathbf{0} < \alpha < \mathbf{I}$ R_α также рефлексивно; $\tilde{R}$ транзитивно тогда и только тогда, когда транзитивны все R_α, и т.д.

Эта теорема играет важную роль в теории нечетких отношений.

Во-первых, эта теорема показывает, что основные типы обычных отношений и их свойства могут быть обобщенны и на случай нечетких отношений, и становится ясным способ такого обобщения. Во-вторых, оказывается, что основные типы нечетких отношений могут быть представленны как совокупность, иерархия обычных отношений того же типа. И если решением практической задачи является получение на множестве X некоторого отношения заданного типа, например, эквивалентности или порядка, то построение на X соответствующего нечеткого отношения позволяет получать сразу ансамбль необходимых обычных отношений, что дает возможность учитывать неоднозначность решений, присущих практическим ситуациям, и предоставляет лицу, принимающему решение, некоторую свободу выбора. В-третьих, теория нечетких множеств, позволяя учитывать эту неоднозначность возможных решений, ограничений, целей, дает возможность оперировать сразу всей совокупностью таких объектов как единым целым.

Согласно теореме декомпозиции нечеткое отношение может быть представлено в следующем виде:

$$\tilde{R} = \underset{\alpha}{\square}\, \alpha R_{\alpha},$$

где отношение αR_{α} определются следующим образом:

$$\alpha R_{\alpha}(x,y) = \begin{cases} \alpha, & если\ R_{\alpha}(x,y) = 1, \\ 0 & в\ противном\ случае \end{cases} \tag{48}$$

Кроме свойств рефлексивностей, симметричностей, полнот, транзитивностей, которые выполняются для всех α-уровней, могут быть определены аналогичные свойства, которые выполняются только для одного или нескольких α-уровней.

Приведем примеры таких α-свойств, предполагая, что элемент α фиксированный:

α-симметричность

$$\tilde{R}\ (x, y) \geq \alpha \Rightarrow \tilde{R}\ (y,x) \geq \alpha \quad \forall\ x,y \in X;$$

α -транзитивность

$$\tilde{R}\ (x, y) \geq \alpha\ , \quad \tilde{R}\ (y,z) \geq \alpha \Rightarrow \tilde{R}\ (x, z) \geq \alpha \quad \forall\ x,y,z \in X;$$

α-транзитивность можно определить также следующим образом

$$\tilde{R}\ (x, y) \geq \alpha, \quad \tilde{R}\ (y, z) \geq \alpha \Rightarrow \tilde{R}\ (x, z) \geq \tilde{R}\ \{x, y) \wedge \tilde{R}\ (y, z) \quad \forall\ x,y,z \in X.$$

Аналогично могут быть определены и другие α-свойства. Подобные α-свойства могут рассматриваться в задачах, в которых вводится порог α на силу отношения $\tilde{R}$, или ищется такое α, при котором R_a имеет требуемое свойство. Например, α-свойства нечетких отношений рассматриваются при моделировании структуры сложных систем.

2.3. Транзитивное замыкание нечетких отношений

Большое значение в приложениях теории нечетких отношений играют транзитивные отношения. Такие отношения обладают многими удобными свойствами и определяют некоторую правильную структуру множества *X*. Например, если отношение $\widetilde{R}$ в *X* характеризует сходство между объектами, то транзитивность такого отношения обеспечивает возможность разбиения множества *X* на непересекающиеся классы сходств. Если же отношению в *X* придается смысл «предпочтения», «доминирования», «подчиненности», то транзитивность такого отношения обеспечивает возможность естественного упорядочения объектов множества *X,* существования «наилучших», «недоминируемых» объектов и т.п. Поэтому представляет большой интерес возможность преобразования исходного нетранзитивного отношения в транзитивное. Такое преобразование обеспечивает операция транзитивного замыкания нечеткого отношения.

Пусть $\widetilde{R}$ — нечеткое отношение в $P\times P$. Определим

$$\widetilde{R}^2 = \widetilde{R} \sqcup \widetilde{R}$$

функцией принадлежности

$$\mu_{\widetilde{R}^2}(x, z) = \underset{y}{MAX}\ [\mathrm{MIN}\ (\mu_{\widetilde{R}}\ (x, y),\ \mu_{\widetilde{R}}\ (y, z))], \quad (49)$$

где $x, y, z \in P$. Выражение (49) можно переписать в виде

$$\mu_{\widetilde{R}^2}(x, z) = \underset{y}{\vee} [\mu_{\widetilde{R}}\ (x, y) \wedge \mu_{\widetilde{R}}\ (y, z)].$$

Свойство (43) или (44), определяющее транзитивность, можно также представить следующим образом:

$$\widetilde{R} \circ \widetilde{R} \subset \widetilde{R}.$$

Предположим, что

$$\widetilde{R}^2 \subset \widetilde{R},$$

и

$$\widetilde{R}^{k+1} \subset \widetilde{R}^k, \quad k = 1,2,3,.....,$$

Тогда очевидно, что $\widetilde{R}^k \subset \widetilde{R}$, k =1,2,3,...

Транзитивным замыканием нечеткого бинарного отношения будем называть отношение

$$\hat{\widetilde{R}} = \widetilde{R} \cup \widetilde{R}^2 \cup \widetilde{R}^3 \cup ... \quad (50)$$

Теорема 1. Транзитивное замыкание любого бинарного отношения есть транзитивное бинарное отношение.

Доказательство. Согласно (50) можно записать

$$\hat{\tilde{R}}^2 = \hat{\tilde{R}} \sqcup \hat{\tilde{R}} = \tilde{R}^2 \cup \tilde{R}^3 \cup \tilde{R}^4 \cup \ldots \qquad (51)$$

Тогда, сравнивая (50) и (51), можно записать $\hat{\tilde{R}}^2 \subset \hat{\tilde{R}}$, что и доказывает транзитивность $\tilde{R}$.

Подводя итоги, получаем следующие свойства:

$(\tilde{R} \supset \tilde{R}^2) \Leftrightarrow (\tilde{R} = \hat{\tilde{R}}) \Leftrightarrow (\tilde{R}$ транзитивно),

$(\tilde{R} = \tilde{R}^2) \Rightarrow (\tilde{R} = \hat{\tilde{R}}) \Leftrightarrow (\tilde{R}$ транзитивно).

Замечание. Теорема 1 позволяет строить транзитивное отношение для любого отношения.

Как следствие из теоремы 1 получаем, что $\tilde{R}$ транзитивно тогда и только тогда, когда $\tilde{R} = \hat{\tilde{R}}$.

В случае, когда $\tilde{R}$ рефлексивно, имеем также:

$$\tilde{R} \subseteq \tilde{R}^2 \subseteq \ldots \subseteq \tilde{R}^{n-1} = \tilde{R}^n = \tilde{R}^{n+1} = \ldots$$

откуда следует $\hat{\tilde{R}} = \tilde{R}^{n-1}$.

Теорема 2. Пусть $\tilde{R}$ — некоторое нечеткое бинарное отношение. Если для некоторых *k* имеем

$$\tilde{R}^{k+1} = \tilde{R}^k , \qquad (52)$$

то

$$\hat{\tilde{R}} = \tilde{R} \cup \tilde{R}^2 \cup \ldots \cup \tilde{R}^k . \qquad (53)$$

Заметим, что обратное утверждение неверно.

Доказательство. Имеем

$$\hat{\tilde{R}} = \tilde{R} \cup \tilde{R}^2 \cup \ldots \cup \tilde{R}^k \cup \tilde{R}^{k+1} \cup \tilde{R}^{k+2} \cup \ldots =$$

$$= \tilde{R} \cup \tilde{R}^2 \cup \ldots \cup \tilde{R}^k \cup \tilde{R}^k \cup \tilde{R}^k \cup \ldots = \tilde{R} \cup \tilde{R}^2 \cup \ldots \cup \tilde{R}^k . \qquad (54)$$

Ниже мы докажем, что если $\tilde{R} \subset P \times P$, где P — конечное универсальное множество и card $(P) = n$, то

$$\hat{\tilde{R}} = \tilde{R} \cup \tilde{R}^2 \cup \ldots \cup \tilde{R}^n \qquad (55)$$

и существует *k*, определяемое (53), такое, что $k \leq r$.

Весьма полезным фактом является то, что α-уровень транзитивного замыкания нечеткого отношения $\tilde{R}$ совпадает с транзитивным замыканием соответствующего α-уровня:

$$(\hat{\tilde{R}})_\alpha = (\hat{\tilde{R}}_\alpha) \quad \text{для всех} \quad \alpha \in L, \quad \alpha \in 0. \qquad (56)$$

В (56) для простоты предполагается, что L линейно упорядочено, т.е. для любых $x, y \in L$ выполняется либо $x \le y$, либо $y \le x$.

Заметим, что при транзитивном замыкании нечеткого отношения в общем случае сохраняются лишь некоторые из свойств рефлексивностей, симметричностей, полнот, транзитивностей. Такими свойствами есть рефлексивность, симметричность, полнота и транзитивность.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Рассмотрим отношение $\tilde{R}$, которое представлено на рис. 41, *а*. Можно рассчитать сначала $\tilde{R}^2$ (рис. 41, *б)*, потом $\tilde{R}^3$ (рис. 41, *в)*. Мы видим, что $\tilde{R}^3 = \tilde{R}^2$, и вычисления можно здесь прекратить. Транзитивное замыкание $\hat{\tilde{R}}$ представлено на рис. 41, *г*.

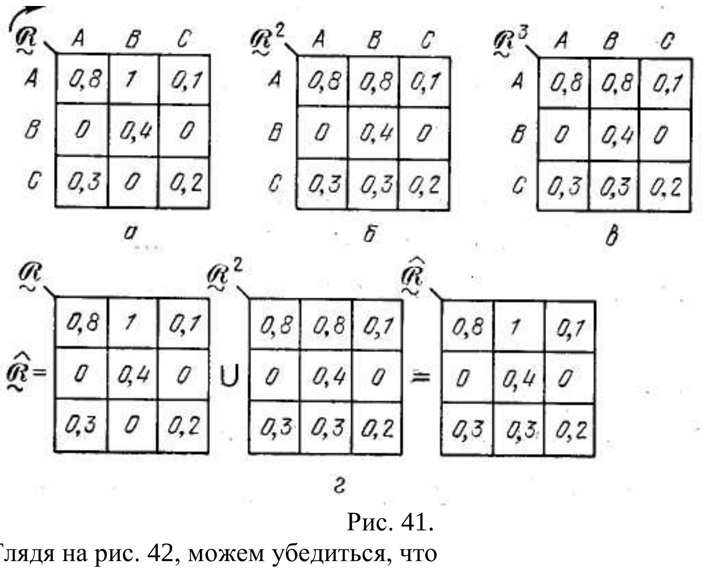


Рис. 41.

Глядя на рис. 42, можем убедиться, что

$$\hat{\tilde{R}}^2 \subset \hat{\tilde{R}}.$$

$$\hat{\tilde{R}}^2 = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0{,}8 & 1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

Рис. 42.

Пример 2. На рис. 43 представленно транзитивное отношение $\tilde{R}$.

$$\tilde{R}: \begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline A & 0{,}2 & 1 & 0{,}4 \\ B & 0 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ C & 0 & 1 & 0{,}3 \end{array} \qquad \tilde{R}^2: \begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline A & 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ B & 0 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ C & 0 & 0{,}6 & 0{,}3 \end{array} \qquad \tilde{R}^3: \begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline A & 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ B & 0 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ C & 0 & 0{,}6 & 0{,}3 \end{array}$$

а б в

$$\hat{\tilde{R}} = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 1 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0 & 1 & 0{,}3 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 1 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0 & 1 & 0{,}3 \end{bmatrix}$$

г

Рис. 43.

Производя вычисления, аналогичные только что проделанным, мы видим, что

$$\hat{\tilde{R}} = \tilde{R}.$$

Пример 3. Рассмотрим отношение $x\,\tilde{R}\,y$, где $x, y \in \mathrm{N}$ и

$$\mu_{\tilde{R}}\ (x,y) = e^{-kxy}$$

при значениях $k>1$ и достаточно больших для того, чтобы эта функция принадлежности выражала отношение «обе величины, как x, так и y, довольно маленькие неотрицательные целые числа» (иначе можно сказать, что по крайней мере один из двух элементов упорядоченной пары (x, y) достаточно мал). В качестве матричного представления этого отношения имеем

$$\underset{\sim}{R} = \begin{array}{c|ccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & e^{-k} & e^{-2k} & e^{-3k} & e^{-4k} & e^{-5k} & \cdots \\ 2 & 1 & e^{-2k} & e^{-4k} & e^{-6k} & e^{-8k} & e^{-10k} & \cdots \\ 3 & 1 & e^{-3k} & e^{-6k} & e^{-9k} & e^{-12k} & e^{-15k} & \cdots \\ 4 & 1 & e^{-4k} & e^{-8k} & e^{-12k} & e^{-16k} & e^{-20k} & \cdots \\ 5 & 1 & e^{-5k} & e^{-10k} & e^{-15k} & e^{-20k} & e^{-25k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Вычисления $\tilde{R}^2$ дают матрицу

$$\tilde{R}^2 = \begin{array}{c|ccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Следовательно, поскольку вместо $\tilde{R}^2 \subset \tilde{R}$ мы получили $\tilde{R}^2 \supset \tilde{R}$, то это нечеткое отношение нетранзитивно.

Аналогично легко показать, что этот вывод остается в силе, если $x, y \in R^{+}$, а не только N.

Как говорилось в предыдущем пункте, мы вернемся к этому вопросу позже, где рассмотрим случай, когда P не является конечным.

Пример 4. Вернемся к случаю, когда отношение $\tilde{R} \subset P \times P$ и P — конечное множество, чтобы уяснить, что не всегда выполняется выражение (52).

На рис. 44 представлено отношения $\tilde{R}$ и последовательное вычисленные $\tilde{R}^2$, $\tilde{R}^3$...

$\tilde{\mathcal{R}}$	A	B	C
A	0,3	0,6	0,2
B	1	0,2	0,7
C	0	0,8	0,1

$\tilde{\mathcal{R}}^2$	A	B	C
A	0,6	0,3	0,6
B	0,3	0,7	0,2
C	0,8	0,2	0,7

$\tilde{\mathcal{R}}^3$	A	B	C
A	0,3	0,6	0,3
B	0,7	0,3	0,7
C	0,3	0,7	0,2

$\tilde{\mathcal{R}}^4$	A	B	C
A	0,6	0,3	0,6
B	0,3	0,7	0,3
C	0,7	0,3	0,7

$\tilde{\mathcal{R}}^5$	A	B	C
A	0,3	0,6	0,3
B	0,7	0,3	0,7
C	0,3	0,7	0,3

$\tilde{\mathcal{R}}^6$	A	B	C
A	0,6	0,3	0,6
B	0,3	0,7	0,3
C	0,7	0,3	0,7

$\tilde{\mathcal{R}}^7$	A	B	C
A	0,3	0,6	0,3
B	0,7	0,3	0,7
C	0,3	0,7	0,3

$\tilde{\mathcal{R}}^8$	A	B	C
A	0,6	0,3	0,6
B	0,3	0,7	0,3
C	0,7	0,3	0,7

$\tilde{\mathcal{R}}^9$	A	B	C
A	0,3	0,6	0,3
B	0,7	0,3	0,7
C	0,3	0,7	0,3

$\tilde{\mathcal{R}}^{10}$	A	B	C
A	0,6	0,3	0,6
B	0,3	0,7	0,3
C	0,7	0,3	0,7

....

$\hat{\tilde{\mathcal{R}}}$	A	B	C
A	0,6	0,6	0,6
B	1	0,7	0,7
C	0,8	0,8	0,7

Рис. 44.

Заметим, что последовательность вычислений не сходится: не существует фиксированного k, после которого $\tilde{R}^{k+1} = \tilde{R}^{k}$.

Согласно (55) мы знаем, что можно остановиться при k = 3. А уже после этого $\hat{\tilde{R}}$ получить легко.

Однако если внимательно рассмотреть все полученные отношения, то видно, что при $k > 3$ мы имеем

$$\tilde{R}^4 = \tilde{R}^6 = \ldots = \tilde{R}^{2\nu} = \tilde{R}^{2\nu+2} = \ldots = \tilde{R}_p ,$$

$$\tilde{R}^5 = \tilde{R}^7 = \ldots = \tilde{R}^{2\nu+1} = \tilde{R}^{2\nu+3} = \ldots = \tilde{R}_i .$$

Таким образом, здесь появляется поле для изучения циклических нечетких отношений. Изучение «циклических нечетких отношений» ограничим замечанием, и рекомендуем исследовать их тем читателям, которые заинтересуются ими.

Замечание. Возникает следующий вопрос: всегда ли композиция $\tilde{R}_1 \llcorner \tilde{R}_2$ и(или) $\tilde{R}_2 \circ \tilde{R}_1$ двух транзитивных отношений $\tilde{R}_1$ и $\tilde{R}_2$ дает транзитивное отношение. Как показывают следующие примеры, это не всегда так.

Пример 5. Пусть $\tilde{R}_1$ — отношения, которое приведено в (57). Проверяя свойство $\tilde{R}_1^{\,2} \subset \tilde{R}_1$ можно убедиться, что это отношение действительное транзитивно:

$$\begin{array}{c|ccccc} \underset{\sim}{R}_1 & A & B & C & D & E \\ \hline A & 0{,}5 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ B & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0 \\ D & 0 & 1 & 0{,}4 & 1 & 0 \\ E & 0{,}7 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0{,}5 \end{array} \circ \begin{array}{c|ccccc} \underset{\sim}{R}_1 & A & B & C & D & E \\ \hline A & 0{,}5 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ B & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0 \\ D & 0 & 1 & 0{,}4 & 1 & 0 \\ E & 0{,}7 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0{,}5 \end{array} = \begin{array}{c|ccccc} \underset{\sim}{R}_1^2 & A & B & C & D & E \\ \hline A & 0{,}5 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ B & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0 \\ D & 0 & 1 & 0{,}4 & 1 & 0 \\ E & 0{,}5 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0{,}5 \end{array} \qquad (57)$$

Пусть $\tilde{R}_2$ — отношение, которое задано (58). Проверяя свойство $\tilde{R}_2^{\,2} \subset \tilde{R}_2$, убеждаемся, что это отношение также транзитивно:

$$\begin{array}{c|ccccc} \underset{\sim}{R}_2 & A & B & C & D & E \\ \hline A & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & 0{,}8 & 1 & 0{,}6 & 0{,}6 & 1 \\ C & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ D & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0 \\ E & 0{,}8 & 1 & 0{,}6 & 0{,}6 & 1 \end{array} \circ \begin{array}{c|ccccc} \underset{\sim}{R}_2 & A & B & C & D & E \\ \hline A & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & 0{,}8 & 1 & 0{,}6 & 0{,}6 & 1 \\ C & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ D & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0 \\ E & 0{,}8 & 1 & 0{,}6 & 0{,}6 & 1 \end{array} = \begin{array}{c|ccccc} \underset{\sim}{R}_2^2 & A & B & C & D & E \\ \hline A & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & 0{,}8 & 1 & 0{,}6 & 0{,}6 & 1 \\ C & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ D & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0 \\ E & 0{,}8 & 1 & 0{,}6 & 0{,}6 & 1 \end{array} \qquad (58)$$

Теперь подсчитаем $\tilde{R}_2 \circ \tilde{R}_1$

$\underset{\sim}{R}_1$

	A	B	C	D	E
A	0,5	0,9	0	0	0,5
B	0	0,7	0	0	0
C	0	1	0,1	0,1	0
D	0	1	0,4	1	0
E	0,7	0,9	0	0	0,5

$\circ$ $\underset{\sim}{R}_2$

	A	B	C	D	E
A	0,7	0	0	0	0
B	0,8	1	0,5	0,6	1
C	0	0	0,5	0,5	0
D	0	0	0,2	0,4	0
E	0,8	1	0,6	0,6	1

$=$ $\underset{\sim}{R}_2 \circ \underset{\sim}{R}_1$

	A	B	C	D	E
A	0,8	0,9	0,6	0,6	0,9
B	0,7	0,7	0,6	0,6	0,7
C	0,8	1	0,6	0,6	1
D	0,8	1	0,6	0,6	1
E	0,8	0,9	0,6	0,6	0,9

и $(\tilde{R}_2 \llcorner \tilde{R}_1)^2$

$\underset{\sim}{R}_2 \circ \underset{\sim}{R}_1$

	A	B	C	D	E
A	0,8	0,9	0,6	0,6	0,9
B	0,7	0,7	0,6	0,6	0,7
C	0,8	1	0,6	0,6	1
D	0,8	1	0,6	0,6	1
E	0,8	0,9	0,6	0,6	0,9

$\circ$ $\underset{\sim}{R}_2 \circ \underset{\sim}{R}_1$

	A	B	C	D	E
A	0,8	0,9	0,6	0,6	0,9
B	0,7	0,7	0,6	0,6	0,7
C	0,8	1	0,6	0,6	1
D	0,8	1	0,6	0,6	1
E	0,8	0,9	0,6	0,6	0,9

$=$ $(\underset{\sim}{R}_2 \circ \underset{\sim}{R}_1)^2$

	A	B	C	D	E
A	0,8	0,9	0,6	0,6	0,9
B	0,7	0,7	0,6	0,6	0,7
C	0,8	0,9	0,6	0,6	0,8
D	0,8	0,9	0,6	0,6	0,9
E	0,8	0,9	0,6	0,6	0,9

Включение $(\tilde{R}_2 \circ \tilde{R}_1)^2 \subset \tilde{R}_2 \circ \tilde{R}_1$ очевидно, удовлетворяется.

Теперь подсчитаем $\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$

$\underset{\sim}{R}_2$

	A	B	C	D	E
A	0,7	0	0	0	0
B	0,8	1	0,6	0,6	1
C	0	0	0,5	0,5	0
D	0	0	0,2	0,4	0
E	0,8	1	0,6	0,6	1

$\circ$ $\underset{\sim}{R}_1$

	A	B	C	D	E
A	0,5	0,9	0	0	0,5
B	0	0,7	0	0	0
C	0	1	0,1	0,1	0
D	0	1	0,4	1	0
E	0,7	0,9	0	0	0,5

$=$ $\underset{\sim}{R}_1 \circ \underset{\sim}{R}_2$

	A	B	C	D	E
A	0,5	0,7	0	0	0,5
B	0,7	0,9	0,4	0,6	0,5
C	0	0,5	0,4	0,5	0
D	0	0,4	0,4	0,4	0
E	0,7	0,9	0,4	0,6	0,5

и $(\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2)^2$

$\underset{\sim}{R}_1 \circ \underset{\sim}{R}_2$

	A	B	C	D	E
A	0,5	0,7	0	0	0,5
B	0,7	0,9	0,4	0,6	0,5
C	0	0,5	0,4	0,5	0
D	0	0,4	0,4	0,4	0
E	0,7	0,9	0,4	0,6	0,5

$\circ$ $\underset{\sim}{R}_1 \circ \underset{\sim}{R}_2$

	A	B	C	D	E
A	0,5	0,7	0	0	0,5
B	0,7	0,9	0,4	0,6	0,5
C	0	0,5	0,4	0,5	0
D	0	0,4	0,4	0,4	0
E	0,7	0,9	0,4	0,6	0,5

$=$ $(\underset{\sim}{R}_1 \circ \underset{\sim}{R}_2)^2$

	A	B	C	D	E
A	0,7	0,7	0,4	0,6	0,5
B	0,7	0,9	0,4	0,6	0,5
C	0,5	0,5	0,4	0,5	0,5
D	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4
E	0,7	0,9	0,4	0,6	0,5

Мы видим, что включение ($\tilde{R}_1 \sqcup \tilde{R}_2$ $)^2 \subset \tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$ не выполняется и, следовательно, $\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$ нетранзитивное.

Таким образом, композиция двух транзитивных отношений не всегда дает транзитивное отношение.

2.4. Нечеткие отношения предпорядка

Нечетким отношением предпорядка называется бинарное нечеткое отношение, обладающее свойствами транзитивности и рефлексивности.

Сначала рассмотрим теорему.

Теорема 1. Если $\tilde{R}$ — транзитивно и рефлексивно (т.е. предпорядок), то

$$\tilde{R}^k = \tilde{R}, \quad k = 1,2,3,...$$

Доказательство. Достаточно обратиться к определению транзитивности (44) и выражению $\tilde{R} \circ \tilde{R} \subset \tilde{R}$ и показать, что если

$$\forall x: \ \mu_{\tilde{R}}(x,x) = 1,$$

то

$$\tilde{R}^2 = \tilde{R}.$$

Поскольку

$$\tilde{R}^2 = \tilde{R} \circ \tilde{R},$$

то согласно (6) имеем

$$\mu_{\tilde{R}^2}(x,z) = \bigvee_y [\ \mu_{\tilde{R}}(x,y) \wedge \mu_{\tilde{R}}(y,z)]. \qquad (59)$$

Правая часть (59) содержит два равных члена

$$\mu_{\tilde{R}}(x,x) \wedge \mu_{\tilde{R}}(x,z) = \mu_{\tilde{R}}(x,z) \wedge \mu_{\tilde{R}}(z,z) = \mu_{\tilde{R}}(x,z),$$

поскольку в силу рефлексивности

$$\mu_{\tilde{R}}(x,x) = \mu_{\tilde{R}}(z,z) = 1.$$

Напомним, что $\tilde{R}$ -*транзитивное* отношение, т.е.

$$\mu_{\tilde{R}}(x,z) \geq \bigvee_y [\ \mu_{\tilde{R}}(x,y) \wedge \mu_{\tilde{R}}(y,z)],$$

и поэтому $\mu_{\tilde{R}}(y,z)$ не меньше, чем $\mu_{\tilde{R}}(x,y) \wedge \mu_{\tilde{R}}(y,z)$.

Следовательно, $\mu_{\tilde{R}}(x,z)$ — значение правой части (59), и мы действительно имеем

$$\tilde{R}^2 = \tilde{R} \; . \qquad (60)$$

Теорема 2. Если $\tilde{R}$ — предпорядок, то

$$\tilde{R} = \tilde{R}^2 = ... = \tilde{R}^k = \hat{\tilde{R}} . \qquad (61)$$

Доказательство. Это следствие из теоремы 1. Достаточно рассмотреть (50) и (60) вместе.

Пример 1. На рис. 45 изображен предпорядок

P = {A, B, C, D, E}.

$\tilde{R}$	A	B	C	D	E
A	1	0,7	0,8	0,5	0,5
B	0	1	0,3	0	0,2
C	0	0,7	1	0	0,2
D	0,6	1	0,9	1	0,6
E	0	0	0	0	1

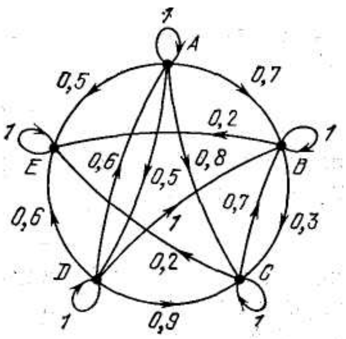


Рис. 45.

Его транзитивность можно проверить с помощью соотношения

$$\tilde{R}^2 \subset \tilde{R} .$$

Рефлексивность непосредственно следует из существования единиц на главной диагонали.

Наконец, можно проверить, что действительно

$$\tilde{R}^2 = \tilde{R} \; .$$

Пример 3. Нечеткое бинарное отношение $x\tilde{R}y$, где $x,\; y \in N$, с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y) = \mathrm{e}^{-k(x-y)^2} \;, \quad k>1,$$

не предпорядок, так как оно нетранзитивно.

Пример 4 (рис. 46).

$$0 \le a_1 \le a_2 \le ... \le a_k \le ... \le 1.$$

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	…
x_1	1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	…
x_2	0	1	a_2	a_2	a_2	a_2	…
x_3	0	a_1	1	a_3	a_3	a_3	…
x_4	0	a_1	a_2	1	a_4	a_4	…
x_5	0	a_1	a_2	a_3	1	a_5	…
x_6	0	a_1	a_2	a_3	a_4	1	…
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Рис. 46.

Это отношение на счетном бесконечном множестве *Р* есть предпорядок.

Нечеткий полупредпорядок. Транзитивное нечеткое отношение, которое не обладает свойствами рефлексивности, называется *полупредпорядком,* или, что то же самое, *нерефлексивным нечетким предпорядком.*

Пример 1. Отношения, которое представлено на рис. 47, транзитивно, но не рефлексивно; это отношение — полупредпорядок.

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	A	B	C
A	0,2	1	0,4
B	0	0,6	0,3
C	0	1	0,3

Рис. 47.

Пример 2. Отношение на рис. 38 есть полупредпорядок.

Антирефлексивный нечеткий предпорядок. Частным случаем нечеткого полупредпорядка есть отношение, у которого

$$\forall\, x \in P:\quad \mu_{\tilde{R}}\,(x,x) == 0.$$

В этом случае говорят, что нечеткий предпорядок *антирефлексивный.* Таким образом, отношение предпорядка на рис. 48 антирефлексивно.

$\tilde{R}$	A	B	C
A	0	·	0,4
B	0	0	0
C	0	1	0

Рис. 1.48.

2.5. Отношение подобия

Отношение подобия, или *нечетким отношением эквивалентности,* называется нечеткое бинарное отношение, обладающее свойствами:

1) транзитивности;
2) рефлексивности;
3) симметричности.

Очевидно, что это предпорядок.

Сначала рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Рассмотрим отношение, которое представлено на рис. 49.

$\tilde{R}$	A	B	C	D	E
A	1	0,8	0,7	1	0,9
B	0,8	1	0,7	0,8	0,8
C	0,7	0,7	1	0,7	0,7
D	1	0,8	0,7	1	0,9
E	0,9	0,8	0,7	0,9	1

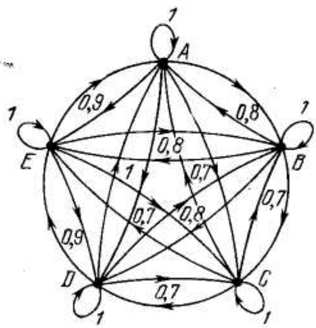


Рис. 49.

Можно непосредственно убедиться, что оно рефлексивно и симметрично. Для проверки транзитивности достаточно подсчитать $\tilde{R}^2$.

Тогда согласно (61) должны иметь

$$\tilde{R}^2 = \tilde{R}.$$

Пример 2 (рис. 50). Если положить $0 \le a \le 1$, то имеем отношение подобия.

$\tilde{R}$	A	B	C	D	E
A	1	a	a	a	a
B	a	1	a	a	a
C	a	a	1	a	a
D	a	a	a	1	a
E	a	a	a	a	1

Рис. 50.

Пример 3 (рис. 51). Если положить

$$0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_k \le \ldots \le 1.$$

то это отношение подобия, которое определено на бесконечном множестве *P*.

$\tilde{R}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	…
x_1	1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	…
x_2	a_1	1	a_2	a_2	a_2	a_2	a_2	…
x_3	a_1	a_2	1	a_3	a_3	a_3	a_3	…
x_4	a_1	a_2	a_3	1	a_4	a_4	a_4	…
x_5	a_1	a_2	a_3	a_4	1	a_5	a_5	…
x_6	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	1	a_6	…
x_7	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	1	…
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Рис. 51.

Пример 4. Нечеткое отношение $x\,\tilde{R}\,y$, где $x,y \in \mathrm{R}^+$, определяемое функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y) = e^{-k(y+1)}, \qquad y<x, \quad k>1;$$

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y) = 1, \qquad y = x,$$

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y) = e^{-k(x+1)}, \qquad y > x, \quad k > 1,$$

есть отношение подобия.

Теорема 1. Пусть $\tilde{R} \subset P \times P$ — отношение подобия. Пусть также x, y, z — три элемента множества P. Положим

$$\left.\begin{aligned} c &= \mu_{\tilde{R}}(x,z) = \mu_{\tilde{R}}(z,x), \\ a &= \mu_{\tilde{R}}(x,y) = \mu_{\tilde{R}}(y,x), \\ b &= \mu_{\tilde{R}}(y,z) = \mu_{\tilde{R}}(z,y). \end{aligned}\right\}$$

Тогда

$c \geq a = b$, или $a \geq b = c$, или $b \geq c = a$.

Другими словами, из этих трех величин a, b и c по крайней мере две величины равны друг другу, а третья больше двух остальных.

Доказательство. Итак, по нашей гипотезе имеем

$$c \geq a \wedge b, \tag{62}$$

$$b \geq c \wedge a. \tag{63}$$

$$a \geq b \wedge c. \tag{64}$$

Предположим, что

$$c \geq b > a, \tag{65}$$

тогда соотношения (62) и (63) удовлетворяются, а (64) — нет, и если положить $b=a$, то уже удовлетворяются все три соотношения. Предположим, что

$$c \geq a > b. \tag{66}$$

Тогда (62) и (64) удовлетворяются, а (63) - нет, и если положить $a = b$, то удовлетворяются все три соотношения.

Далее, если ни (65), ни (66) не выполняются, то выполняется соотношение

$$c \geq a = b.$$

Аналогично можно показать, что не может быть ни $a \geq b > c$, ни $a \geq c > b$. Однако справедливо соотношение

$$a \geq b = c.$$

Аналогично можно показать, что не может иметь место ни $b \geq c > a$, ни $b \geq a > c$, однако справедливо соотношение

$$b \geq a = c.$$

Таким образом, необходимо, чтобы всегда по крайней мере две из этих величин были равны.

Теперь неравенства (62)—(64) дают нам:

если $a=b$,

$$c \geq a \wedge b,$$

$$b = c \wedge a,$$
$$a = b \wedge c;$$

если $b = c$,

$$c = a \wedge b,$$
$$b = c \wedge a,$$
$$a \geq b \wedge c;$$

если $c = a$,

$$c = \geq a \wedge b,$$
$$b \geq c \wedge a,$$
$$a = b \wedge c.$$

2.6. Подотношение подобия в нечетком предпорядке

Пусть $\widetilde{R} \subset P \subset P$ — отношение нечеткого предпорядка. Если существует обычное подмножество $P_1 \subset P$, такое, что

$$\forall x, y \in P_1: \ \mu_{\widetilde{R}}(x,y) = \mu_{\widetilde{R}}(y, x),$$

то элементы множества P_1 находятся между собой в отношении подобия, которое мы будем называть *подотношение подобия* в предпорядке $\widetilde{R}$.

Будем говорить, что подотношение подобия *максимально,* если в рассмотренном отношении не существует другого отношения подобия той же природы.

Предположим теперь, что отношение предпорядка таково, что каждый из элементов подмножества универсального множества принадлежит максимальному подотношению подобия и не принадлежит никакому другому. Это можно перефразировать следующим образом: все максимальные подотношения подобия не пересекаются. В этом случае подмножества, на которых определены такие непересекающиеся максимальные подотношения подобия, будем называть *классами подобия* предпорядка.

Однако не все нечеткие предпорядки можно разложить на классы подобия. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. На рис. 55 представлено отношение предпорядка.

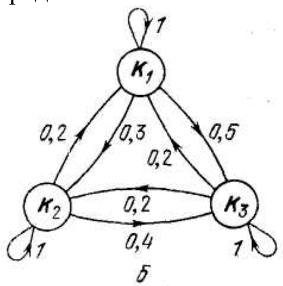
$\tilde{R}$	A	B	C	E	F	D	G
A	1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,3	0,4
B	0,2	1	0,5	0,2	0,2	0,3	0,5
C	0,2	0,5	1	0,2	0,2	0,3	0,5
E	0,2	0,2	0,2	1	0,8	0,3	0,5
F	0,2	0,2	0,2	0,8	1	0,3	0,5
D	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	1	0,4
G	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	1

Рис. 55.

Этот передпорядок не является симметричным отношением. Однако заметим, что отношение $\tilde{R}$ можно разложить на три подотношения: $\tilde{R}_1$, определенное на подмножестве {A, B, C, E, F}, $\tilde{R}_2$ — на {D} и $\tilde{R}_3$— на {G}. Очевидно, что обычные подмножества $К_1$ ={A, B, C, E, F}, $К_2$= {D}, $К_3$ = {G} - максимальны по отношению к свойству подобия (чего нельзя сказать, например, о {B, C, F} или {A, C, E}). Мы скажем, что отношение $\tilde{R}$ нечеткого предпорядка разложимо относительно $К_1$, $К_2$ и $К_3$ на максимальные непересекающиеся подотношения подобия, образующие классы подобия в предупорядоченном множестве. Если мы теперь рассмотрим сильнейшие пути, которые существуют между этими классами, то увидим (рис. 56), что эти классы сами образуют транзитивное несимметричное нечеткое отношение, которое, как будет показано дальше, есть отношение нечеткого порядка.

$\tilde{R}'$	K_1	K_2	K_3
K_1	1	0,3	0,5
K_2	0,2	1	0,4
K_3	0,2	0,2	1

а



б

Рис. 56.

Пример 2. На рис. 57,*а* представленно нечеткое отношение предпорядка.

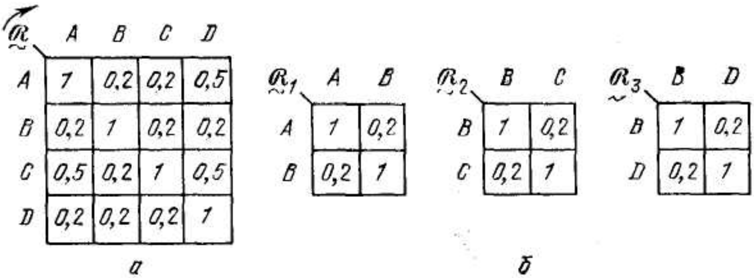


Рис. 57.

Можно найти три подотношения подобия $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2$ и $\tilde{R}_3$ (рис. 57, *б),* и хотя они максимальные, но пересекаются, и, следовательно, данные подотношения не определяют классов подобия.

Приводимий нечеткий предпорядок. Нечеткий предпорядок, который раскладывается на классы подобия, будет называться *приводимым нечетким предпорядком.* Например, нечеткий предпорядок на рис. 55 — приводимый, а на рис. 57, *а* -неприводимый.

В приведенных выше примерах рассматривались конечные множества *Р*, но разложение на классы подобия, такие, как были только что описанны, имеет место и в случае, когда *Р* — бесконечное множество, счетное или нет. В этом случае как сами классы, так и их число могут быть конечными или бесконечными. Однако представление отношений с помощью матриц или графов Бержа могут использоваться только в тех случаях, когда *Р* — счетное множество.

Поиск максимальных [подотношений] подобия предпорядка (*Р конечное).* В некоторых простых случаях, рассматривая пары элементов, которые обладают свойством симметрии, сразу получают максимальные подотношения подобия, которые могут быть как пересекающимися, так и нет. Однако всегда желательно иметь общую процедуру.

2.7. Антисимметрия

Нечеткое бинарное отношение называется *антисимметричным,* если

$$\forall\, (x,y) \in P \times P \text{ при } x \neq y:$$

$$\mu_{\tilde{R}}\ (x,y) \neq \mu_{\tilde{R}}\ (y,x) \quad \text{или} \quad \mu_{\tilde{R}}\ (x,y) = \mu_{\tilde{R}}\ (y,x) = 0.$$

Пример 1. На рис. 58 —60 приведено несколько примеров антисимметричных нечетких бинарных отношений.

$\tilde{R}$	A	B	C	D	E
A	0	0,3	0	0,9	1
B	0,5	0,8	0,6	0,8	0
C	0	0,5	1	0	1
D	0,5	1	0,2	1	0,3
E	0	0	0	0,2	0

Рис. 58.

$\tilde{R}$	A	B	C	D
A	0	0	0	0,8
B	0	0	0,6	0
C	1	0,2	0,3	1
D	1	0	0	1

Рис. 59.

$\tilde{R}$	A	B	C	D	E	F
A	0	0,3	0	0,2	0	0,8
B	0	1	1	0,8	0	0,5
C	0	0	0,3	0	0	0,6
D	0	0	0	0	0	0
E	0	0,3	0	0,2	0,5	0,5
F	0,7	0	0	0	0	0,1

Рис. 60.

Для отношения на рис. 58 имеем

$\mu_{\tilde{R}}$ (A, B)< $\mu_{\tilde{R}}$ (B, A),

$\mu_{\tilde{R}}$ (A, C) = $\mu_{\tilde{R}}$ (C, A)=0,

$\mu_{\tilde{R}}$ (A, D)> $\mu_{\tilde{R}}$ (D, A),

$\mu_{\tilde{R}}$ (A, E)> $\mu_{\tilde{R}}$ (E, A)

и т.д.

Пример 2. Пусть $x\tilde{R}y$, где x, $y \in \mathrm{R}^+$. Тогда отношение $\tilde{R}$, определяемое функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{R}}\ (x,y) = e^{-(ax+by)}, \quad a>b>1,$$

антисимметрично.

Совершенная антисимметрия. Л. А. Заде определяет антисимметрию более строго, чем в данной работе, имея при этом в виду некоторые свойства; в данном определении будем называть это *совершенной антисимметрией.* Совершенным антисимметричным отношением называется такое отношение (Л. А. Заде дает другое определение: ($\mu_{\tilde{R}}$ $(x,y)>0$ и $\mu_{\tilde{R}}(y,x)>0) \Rightarrow (x=y)$),

что $\forall\, (x, y) \in P\times P$ и $x\neq y$:

$$\mu_{\tilde{R}}\ (x,y)>0 \Rightarrow \mu_{\tilde{R}}\ (y,x) = 0.$$

Позднее, при обсуждении понятия совершенного порядка, мы возвратимся к исследованию нескольких свойств совершенной антисимметрии.

Замечание. Любое совершенное антисимметричное отношение будет и антисимметричным отношением.

Пример 1. На рис. 61 представлено совершенное антисимметричное отношение.

$\tilde{R}$	A	B	C	D	E	F
A	0	0,8	0,4	0,6	0	0
B	0	0,3	0	0,6	0	0,7
C	0	0,3	1	0,2	1	0,6
D	0	0	0	0,8	0	0,3
E	0	0,5	0	0	0	1
F	0,7	0	0	0	0	1

Рис. 61.

Пример 2. Рассмотрим две области D_1 и D_2 в $R^+\times R^+$, которые показаны на рис. 62.

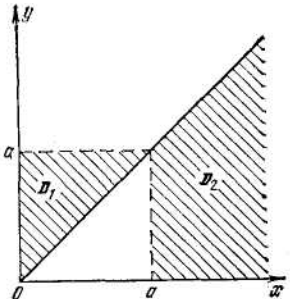


Рис. 62.

Отношение $x\,\widetilde{R}\,y$, определенное на R^+ функцией принадлежности

$$\mu_{\widetilde{R}}(x,y) = \begin{cases} \mu_1(x,y), & \text{если} \quad (x,y) \in D_1, \\ \mu_2(x,y), & \text{если} \quad (x,y) \in D_2, \\ 0, & \text{если} \quad (x,y) \notin D_1 \cup D_2. \end{cases}$$

есть антисимметричное отношение.

2.8. Нечеткие отношения порядка

Нечетким отношением порядка называется бинарное отношение, которое:

1) рефлексивно;
2) транзитивно ;
3) антисимметрично

(будем также говорить простое *отношение порядка,* если это не приводит к недоразумению).

Можно также дать следующее определение: антисимметричное (следовательно приводимое отношение и такое, что каждый класс подобия содержит только один элемент) нечеткое отношение предпорядка называется нечетким отношением порядка.

Пример 1. На рис. 63 и 64 представлены нечеткие отношения порядка.

$\tilde{R}$	A	B	C	D
A	1	0,8	0	0
B	0,2	1	0	0
C	0,3	0,4	1	0,1
D	0	0	0	1

Рис. 63.

$\tilde{R}$	A	B	C	D
A	1	0,8	0	0
B	0,2	1	0	0
C	0,3	0,4	1	0,1
D	0	0	0	1

Рис. 64.

Можно проверить, что они действительно рефлексивны, транзитивны и антисимметричны.

Пример 2. Отношение, которое определено в (59) и представленное на рис. 46, есть нечеткое отношение порядка.

Пример 3. Отношение $x\,\tilde{R}\,y$, где $x,\ y\in\ N$ (рис. 65), есть нечеткое отношение порядка.

$\tilde{R}$	0	1	2	3	4	5	
0	1	e^{-1}	e^{-2}	e^{-3}	e^{-4}	e^{-5}	…
1	0	1	e^{-3}	e^{-4}	e^{-5}	e^{-6}	…
2	0	0	1	e^{-5}	e^{-6}	e^{-7}	…
3	0	0	0	1	e^{-7}	e^{-8}	…
4	0	0	0	0	1	e^{-9}	…
5	0	0	0	0	0	1	…
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Рис. 65.

Антисимметричные отношения, которые называют *порядками* и которые обозначаются буквой P, в зависимости от выполнения условия рефлексивности или антирефлексивности разделяют на *нестрогие* и *строгие* порядки. Мы здесь для определенности будем рассматривать лишь *строгие,* т.е. антирефлексивные, *порядки.* Свойства *нестрогих* (рефлексивных) *порядков* во многом совпадают со свойствами строгих порядков.

Теорема 1. Каждое нечеткое отношение строгого порядка индуцирует порядок (в смысле теории множеств) на своем универсуме посредством отношения

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y) \geq \mu_{\tilde{R}}(y,x),$$

Этот порядок будем обозначать $y \tilde{>} x$.

Различные порядки отличаются друг от друга требованиями, предъявляемыми к условию транзитивности. Как правило, эти требования выражают разумность, рациональность, согласованность отношения упорядочения, заданного в множестве X. Слабейшее из этих требований — условие ацикличности отношения строгого порядка $\tilde{P}$, и наиболее жесткие требования — это условие линейной транзитивности и условие квазисерийности.

Если для отношений сходства условие транзитивности обычно записывается в виде $S \supseteq S \sqcup S$, и различные способы определения операции композиции позволяют задавать разные типы транзитивности, причем оказывается, что таких типов существует не так уж и много, то для отношений порядка условие транзитивности нечетких отношений удобно записывать в виде, аналогичном условию транзитивности обычных порядков:

$$\tilde{P}(x, y) > \mathbf{0},\ \tilde{P}(y, z) > \mathbf{0} \Rightarrow \tilde{P}(x, z) \geq \tilde{P}(x, y) * \tilde{P}(y, z), \qquad (67)$$

где $*$ — некоторая операция в L. Оказывается, что из множества всех отношений порядка можно выделить значительное количество отличающихся друг от друга классов порядков специального вида, определяемых как способом задачи операции * в L, так и способом записи условия транзитивности, подобного условию (67). Ниже перечисляются некоторые условия транзитивности, которые определяют эти классы нечетких строгих порядков. Учитывая ассиметричность отношения строгого порядка $\tilde{P}$, будем писать $\tilde{P}(x, y) \geq \mathbf{0}$, если $\tilde{P}(y, x) = \mathbf{0}$.

Ацикличность:

$$\forall x_0, x_2, \ldots, x_n \in X\colon\ \tilde{P}(x_0, x_1) > \mathbf{0},\ \tilde{P}(x_1, x_2) > \mathbf{0}, \ldots$$
$$\ldots, \tilde{P}(x_{n-1}, x_n) > 0 \Rightarrow \tilde{P}(x_0, x_n) \geq \mathbf{0}.$$

Слабая транзитивность:

$$\tilde{P}(x, y) > \mathbf{0},\quad \tilde{P}(y, z) > \mathbf{0} \Rightarrow \tilde{P}(x, z) > \mathbf{0}. \qquad (68)$$

Отрицательная транзитивность:

$$\tilde{P}(x,y) \geq \mathbf{0},\quad \tilde{P}(y,z) \geq \mathbf{0} \Rightarrow \tilde{P}(x,z) \geq \mathbf{0}.$$

(•)-*транзитивность* (L = [0, 1]):

$$\widetilde{P}\ (x,y)>\mathbf{0},\ \ \widetilde{P}\ (y,z)>\mathbf{0} \Rightarrow \widetilde{P}\ (x,z) \geq \widetilde{P}\ (x,y) \bullet \widetilde{P}\ (y,z). \quad (69)$$

($\wedge$)- *транзитивность:*

$$\widetilde{P}\ (x,y) > \mathbf{0},\ \ \widetilde{P}\ (y,z) > \mathbf{0} \Rightarrow \widetilde{P}\ (x,z) \geq \widetilde{P}\ (x,y) \wedge \widetilde{P}\ (y,z). \quad (70)$$

(1/2, +*)-транзитивность* (L = [0,M]):

$$\widetilde{P}\ (x,y) > \mathbf{0},\ \ \widetilde{P}\ (y,z) > \mathbf{0} \Rightarrow \widetilde{P}\ (x,z) \geq (\widetilde{P}\ (x,y) + \widetilde{P}\ (y,z))/2.$$

Сильная транзитивность;

$$\widetilde{P}\ (x,y) \geq \mathbf{0},\ \ \widetilde{P}\ (y,z) \geq \mathbf{0} \Rightarrow \widetilde{P}\ (x,z) \geq \widetilde{P}\ (x,y) \vee \widetilde{P}\ (y,z). \quad (71)$$

Сверхсильная транзитивность: условие (71) вместе с условием:

$$\widetilde{P}\ (x,y) > \mathbf{0},\ \ \widetilde{P}\ (y,z) > \mathbf{0} \Rightarrow \widetilde{P}\ (x,z) > \widetilde{P}\ (x,y) \vee \widetilde{P}\ (y,z).$$

Метрическая транзитивность (L = [0, *M*]*):*

$$\widetilde{P}\,(x,y)\geq\mathbf{0}, \widetilde{P}\,(y,z)\geq\mathbf{0} \Rightarrow \widetilde{P}\,(x,y)+\widetilde{P}\,(y,z)\geq\widetilde{P}\,(x,z)\geq\widetilde{P}\,(x,y)\vee\widetilde{P}\,(y,z). \quad (72)$$

Квазисерийность:

$$\widetilde{P}\ (x,y) \geq \mathbf{0},\ \ \widetilde{P}\ (y,z) \geq \mathbf{0} \Rightarrow \widetilde{P}\ (x,z) = \widetilde{P}\ (x,y) \vee \widetilde{P}\ (y,z). \quad (73)$$

Линейная транзитивность (L = [0, *M*]*):*

$$\widetilde{P}\ (x,y) \geq \mathbf{0},\ \ \widetilde{P}\ (y,z) \geq \mathbf{0} \Rightarrow \widetilde{P}\ (x,z) = \widetilde{P}\ (x,y) + \widetilde{P}\ (y,z). \quad (74)$$

Ультраметрическая транзитивность:

$$\widetilde{P}\,(x,y)>\mathbf{0}, \widetilde{P}\,(y,z)>\mathbf{0} \Rightarrow \widetilde{P}\,(x,y)\vee\widetilde{P}\,(y,z)\geq\widetilde{P}\,(x,z)\geq\widetilde{P}\,(x,y)\wedge\widetilde{P}\,(y,z). \quad (75)$$

В общем случае предполагается, что рассмотренные условия транзитивности определенны для линейно упорядоченного *L*, хотя некоторые условия могут быть обобщенны и на случай, когда *L* является решеткой. Условия, при определении которых принимают участие операции сложения и умножения, используются, когда *L* является интервалом вещественных чисел.

Рассмотренные условия транзитивности могут использоваться как при построении моделей рациональности нечетких предпочтений в нормативной теории выбора, так и при формировании некоторой правильной структуры системы, информация о которой может быть представлена в виде нечеткого отношения порядка.

Условия ацикличности, слабой транзитивности и отрицательной транзитивности равносильны условию ацикличности, транзитивности и отрицательной транзитивности, соответственно, обыкновенного отношения $\widetilde{P}_0$, определяемого следующим образом:

$$\widetilde{P}_0\,(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad P(x,y) > 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Аналогичные свойства могут быть определены как α-свойства для различных α-уровней $\widetilde{P}_\alpha$ (α∈*L)* отношения $\widetilde{P}$.

В отличие от первых трех свойств другие свойства более специфны для нечетких отношений и в большей мере учитывают согласованность силы отношения между элементами множества *X*. Для этих свойств также могут быть сформулированы α-свойства заменой в левых частях этих свойств на α∈*L*.

Условие (70) для антисимметричных отношений порядка совпадает со свойством транзитивности. Условие (71) представляется наиболее естественным условием согласованности при интерпретации отношения порядка как отношения, учитываютщего силу предпочтения в парных сравнениях альтернатив. Частным случаем *сильного порядка* (порядка, который удовлетворяет условию сильной транзитивности (71)) является *метрический порядок* (условие (72)). Условие (72) эквивалентно для ассимметричных отношений неравенству треугольника:

$$\widetilde{P}\ (x,z)\leq \widetilde{P}\ (x,y) + \widetilde{P}\ (y,z) \quad \forall\ x,y,z\in X.$$

Условие (73) определяет нечеткую квазисерию. Каждый α-уровень нечеткой квазисерии является обыкновенной квазисерией, т.е. удовлетворяет условиям:

$$x\,\widetilde{P}_\alpha\ y,\quad y\,\widetilde{P}_\alpha\ z \Rightarrow x\,\widetilde{P}_\alpha\ z,$$

$$x\,\widetilde{P}_\alpha y,\ \neg(z\,\widetilde{P}_\alpha\ y)\Rightarrow x\,\widetilde{P}_\alpha z;\ \ \neg(y\,\widetilde{P}_\alpha\ x), y\,\widetilde{P}_\alpha\ (z) \Rightarrow x\,\widetilde{P}_\alpha\ z. \qquad (76)$$

Поскольку обычная квазисерия определяет разбиение множества *X* на упорядоченные классы эквивалентности, нечеткая квазисерия определяет разбиение множества *X* на упорядоченные классы эквивалентности на каждом уровне α∈*L*. Эти разбиения вложены друг в друга; таким образом, нечеткая квазисерия определяет иерархию разбиений множества *X* на упорядоченные классы эквивалентности (рис. 66).

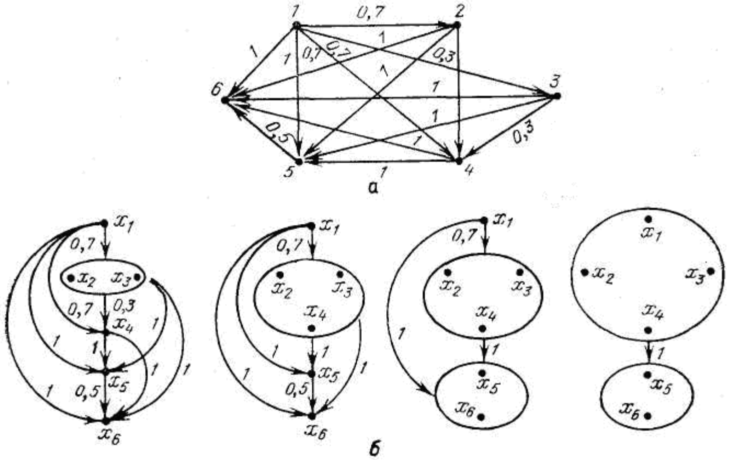


Рис. 66.

Нечеткая квазисерия $\widetilde{P}$: *а* — граф отношения; *б* — система разбиений на упорядоченные классы по отношению $\widetilde{P}$

Исходная матрица отношения $\widetilde{P}$ приведена в табл. 1.

Таблица. 1.

P	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	0,7	0,7	0,7	1	1
x_2	0	0	0	0,3	1	1
x_3	0	0	0	0,3	1	1
x_4	0	0	0	0	1	1
x_5	0	0	0	0	0	0,5
x_6	0	0	0	0	0	0

Частным случаем метрических порядков, кроме квазисерии, является *линейный порядок,* определяемый условием (74).

Линейный порядок при интерпретации $\widetilde{P}$ *(x, y)* как силы предпочтения альтернативы *x* над альтернативой *y* задает на множестве альтернатив *X* некоторую аддитивную функцию полезности, которая может быть определена на *X*, например, с помощью соотношения

$$f(x) = \sup_{y \in X} \tilde{P}(x, y).$$

Ультраметрическая транзитивность построена по аналогии с метрической транзитивностью (72), однако условие (75) не эквивалентно для антисимметричных отношений ультраметрическому неравенству:

$$\tilde{P}(x,z) \leq \tilde{P}(x,y) \vee \tilde{P}(y, z) \quad \forall\, x, y, z \in X. \tag{77}$$

Условие (77) эквивалентно для асимметричных отношений условию квазисерийности (73).

Между строгими порядками (асимметричными отношениями) и слабыми порядками (рефлексивными отношениями) существует тесная связь. Эти порядки могут быть получены друг из друга с помощью ряда преобразований.

Если на L задана операция дополнения, т.е. такая унарная операция ', что на L выполняются тождества

$$(a')' = a, \quad (a \vee b) = a' \wedge b', \quad (a \wedge b)' = a' \vee b',$$

то на множестве нечетких отношений может быть задана операция дополнения, которая обозначается черточкой сверху, с помощью соотношения

$$\overline{\tilde{R}}(x,y) = (\tilde{R}(x,y))' \quad \forall\, x,y \in X,$$

и на множестве нечетких отношений $F(X\times X)$ будут выполняться тождества

$$\overline{\tilde{R}} = \tilde{R}, \tag{78}$$

$$\overline{\tilde{R} \cup \tilde{T}} = \overline{\tilde{R}} \cap \overline{\tilde{T}}, \quad \overline{\tilde{R} \cap \tilde{T}} = \overline{\tilde{R}} \cup \overline{\tilde{T}}. \tag{79}$$

Дистрибутивная решетка, на которой задана операция дополнения, удовлетворяющая тождествам (78) и (79), называется решеткой Де Моргана.

Например, если L=[0, M], то операция дополнения может быть определена как

$$a' = M - a \quad \forall\, a \in L.$$

Если L является конечной цепью, т.е. элементы L могут быть линейно упорядочены: $l_0 \leq l_1 \leq \ldots \leq l_m$, тогда операция дополнения ' на L может быть определена как

$$l'_i = l_{m-1} \quad i = 0, 1, \ldots, m...$$

Если на F задана операция дополнения, то из отношения строгого порядка $\tilde{P}$ могут быть получены

отношение сходства

$$\tilde{S} = \overline{\tilde{P} \cup \tilde{P}^{-1}}; \tag{80}$$

отношение различия

$$\tilde{D} = \tilde{P} \,\square\, \tilde{P}^{-1} \qquad (81)$$

отношение слабого порядка

$$\tilde{R} = \overline{\tilde{P}}^{-1}\,. \qquad (82)$$

Отношение (82) удовлетворяет условию полноты:

$$\tilde{R}\ (x,y) \vee \tilde{R}\ (y,x) = \mathbf{I} \quad \forall\, x,y \in X. \qquad (83)$$

Таким образом, если на X задано нечеткое отношение строгого порядка, то с его помощью могут быть построены на X нечеткие отношения сходства (различия) и слабого порядка. Транзитивность отношения $\tilde{P}$ определяет тот или иной уровень транзитивности отношений $\tilde{S}$ и $\tilde{R}$. В частности, если $\tilde{P}$ является нечеткой квазисерией, то определяемое им $\tilde{S}$ является нечетким отношением эквивалентности, а отношение $\tilde{R}$ будет нечетким квазипорядком, т.е. рефлексивным и транзитивным .

Из (78) и (79) видно, что соотношение (82) может использоваться для получения из полного (83) отношения слабого порядка

отношения строгого порядка

$$\tilde{P} = \overline{\tilde{R}}^{-1} \qquad (84)$$

отношения сходства

$$\tilde{S} = \tilde{R} \cup \tilde{R}^{-1} \qquad (85)$$

отношения различия

$$\tilde{D} = \overline{\tilde{R} \cap \tilde{R}^{-1}}\,.$$

Если отношение слабого порядка не является полным, то соотношение (85) также будет определять некоторое отношение сходства, однако (84) уже не будет определять строгого порядка.

Такой порядок может быть получен из $\tilde{R}$ при L= [0, M] с помощью соотношения

$$\tilde{P} = \tilde{R} \setminus \tilde{R}^{-1}\,, \qquad (86)$$

где операция \ определяется следующим образом:

$$(\tilde{R} \setminus \tilde{R}^{-1})(xy) = \begin{cases} \tilde{R}_1(x,y) - \tilde{R}_2(x,y), & \text{если } \tilde{R}_1(x,y) \ge \tilde{R}_2(x,y), \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

При транзитивном $\tilde{R}$ соотношение (86) определяет транзитивное (70) $\tilde{P}$.

Кроме рассмотренных типов нечетких отношений порядка и слабого порядка, в теории принятия решений используются следующие отношения предпочтения. При L=[0, 1] отношение $\tilde{R}$ называется (+)-полным, если

$$\tilde{R}(x, y) + \tilde{R}(y, x) = 1 \quad \forall\, x, y \in X.$$

Для подобных отношений предпочтения, которые часто интерпретируются как вероятностные отношения предпочтения, рассматриваются условия стохастической транзитивности:

$$\tilde{R}(x, y) \geq 1/2,\ \ \tilde{R}(y, z) \geq 1/2 \Rightarrow \tilde{R}(x, z) \geq 1/2, \qquad (87)$$

и сильной стохастической транзитивности:

$$\tilde{R}(x, y) \geq 1/2,\ \ \tilde{R}(y, z) \geq 1/2 \Rightarrow \tilde{R}(x, z) \geq \tilde{R}(x, y) \vee \tilde{R}(y, z). \quad (88)$$

Отношение строгого предпочтения, связанное с подобным отношением предпочтения, может быть определенно следующим образом:

$$\tilde{P}(x,y) = \begin{cases} \tilde{R}(x, y), & \text{если } \tilde{R}(x, y) \geq \tilde{R}(y, x), \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \qquad (89)$$

Нетрудно найти связь между условиями (87), (88) и условиями отрицательной и сильной транзитивности строгих порядков.

При L = [0, M] отношение $\tilde{R}$ называется (•)-полным, если

$$\tilde{R}(x, y) \bullet \tilde{R}(y, x) = 1.$$

Для подобных отношений предпочтение $\tilde{R}(x, y)$ обычно интерпретируется как «во сколько раз x лучше, чем y», и рассматривается обычно условие сверхтранзитивности

$$\tilde{R}(x, z) = \tilde{R}(x, y) \bullet \tilde{R}(y, z),$$

которое можно записать в виде:

$$\tilde{R}(x, y) > 0,\ \tilde{R}(y, z) > 0 \Rightarrow \tilde{R}(x, z) = \tilde{R}(x, y) \bullet \tilde{R}(y, z).$$

Отношение строгого порядка, которое связано с (•)-полными отношениями, можно определить также с помощью (89).

Нечеткие отношения порядка могут быть получены многими способами и допускать различную интерпретацию. $\tilde{P}(x, y)$ и $\tilde{R}(x, y)$ могут выражать или значение какого-нибудь физического параметра, который характеризует интенсивность доминирования x над y, или усредненную по множеству критериев или индивидуумов силу предпочтения между объектами. Они могут быть получены с помощью шкалы сравнений, в которой эксперты измеряют интенсивность предпочтений при попарных сравнениях альтернатив, могут выражать уверенность, возможность, вероятность доминирования и т.д. Заметим, что возможные интерпретации и способы получения рассмотренных отношений значительно более шире тех, которые подразумеваются в названии «нечеткие отношения».

2.9. Отношения различия

Рассмотрим отношение подобия $\tilde{R}$, которое определено ранее. Для этого напомним здесь три свойства подобия:

1) $\forall\ (x,y),(y,z),(z,x) \in E \times E$:

$\mu_{\tilde{R}}(x,z) \geq \bigvee\limits_{y} [\mu_{\tilde{R}}(x,y) \wedge \mu_{\tilde{R}}(y,z)]$ - транзитивность (90)

2) $\forall\ (x,x) \in E \times E$: $\mu_{\tilde{R}}(x,x) = 1$ — рефлексивность, (91)

3) $\forall\ (x,y) \in E \times E$: $\mu_{\tilde{R}}(x,y) = \mu_{\tilde{R}}(y,x)$ - симметрия. (92)

Теперь с $\tilde{R}$ свяжем отношение $\overline{\tilde{R}}$, такое, что $\forall\ (x,y) \in E \times E$:

$$\mu_{\overline{\tilde{R}}}(x,y) = 1 - \mu_{\tilde{R}}(x,y). \quad (93)$$

Зная, что отношение $\tilde{R}$ обладает свойствами (90) — (93), можно определить и свойства отношения $\overline{\tilde{R}}$. Начнем со свойства (90).

Имеем:

$$1 - \mu_{\overline{\tilde{R}}}(x,z) \geq \bigvee_{y} [[1 - \mu_{\overline{\tilde{R}}}(x,y)] \wedge [1 - \mu_{\overline{\tilde{R}}}(y,z)]]. \quad (94)$$

Но согласно теоремам Де Моргана для нечетких множеств, можно записать

$$[1 - \mu_{\overline{\tilde{R}}}(x,y)] \wedge [1 - \mu_{\overline{\tilde{R}}}(y,z)] = 1 - \mu_{\overline{\tilde{R}}}(x,y) \vee \mu_{\overline{\tilde{R}}}(y,z). \quad (95)$$

Таким образом, (94) можно переписать в виде

$$1 - \mu_{\overline{\tilde{R}}}(x,z) \geq \bigvee_{y} [1 - (\mu_{\overline{\tilde{R}}}(x,y) \vee \mu_{\overline{\tilde{R}}}(y,z))]$$

или

$$\mu_{\overline{\tilde{R}}}(x,z) \leq \bigwedge_{y} [\mu_{\overline{\tilde{R}}}(x,y) \vee \mu_{\overline{\tilde{R}}}(y,z))] \quad (96)$$

Это свойство называется *(min —max)-транзитивностью* (его можно также называть (min-max)-котранзитивностью).

В силу (91)

$$\mu_{\overline{\tilde{R}}}(x,x) = 1 - \mu_{\tilde{R}}(x,x) = 1 - 1 = 0$$

И, наконец, симметрия тоже сохраняется. Итак, мы имеем

1) $\forall\ (x,y),(y,z),(x,z) \in E \times E$:

$\mu_{\tilde{\bar{R}}}(x,z) \leq \bigwedge_{y} [\mu_{\tilde{\bar{R}}}(x, y) \vee \mu_{\tilde{\bar{R}}}(y, z)]$— (min-max)-транзитивность, (97)

2) $\forall\ (x, x) \in E \times E$: $\mu_{\tilde{\bar{R}}}(x, x) = 0$ — антирефлексивность, (98)

3) $\forall\ (x,y) \in E \times E$: $\mu_{\tilde{\bar{R}}}(x,y) = \mu_{\tilde{\bar{R}}}(в, x)$ - симметрия. (99)

Нечеткое бинарное отношение, обладающее свойствами (97) — (99), называется *отношением различия.*

Пример 1. На рис. 67 представленно отношение различия (кроме того, отношение $\tilde{\bar{R}}$ совпадает с отношением подобия $\tilde{R}$ на рис. 49).

$\tilde{R}$	A	B	C	D	E
A	0	0,2	0,3	0	0,1
B	0,2	0	0,3	0,2	0,2
C	0,3	0,3	0	0,3	0,3
D	0	0,2	0,3	0	0,1
E	0,1	0,2	0,3	0,1	0

Рис. 67.

В качестве упражнения проверим (97) для нескольких пар элементов.

Дуга (A, B).

μ(A, A) $\vee$ μ (A, B) = 0 $\vee$ 0,2 = 0,2,

μ(A, B) $\vee$ μ (B, B) = 0,2 $\vee$ 0 = 0,2,

μ(A, C) $\vee$ μ (C, B) = 0,3 $\vee$ 0,3 = 0,3,

μ (A, D) $\vee$ μ (D, B) = 0 $\vee$ 0,2 = 0,2,

μ(A,E) $\vee$ μ(E, B) = 0,1 $\vee$ 0,2, = 0,2,

MIN [0,2; 0,2; 0,3; 0,2; 0,2] = 0,2,

μ (A, B) = 0,2 $\leq$0,2.

Дуга (A, C).

μ (A, A) $\vee$ μ (A, C) = 0 $\vee$ 0,3 = 0,3,

μ (A, B) $\vee$ μ (B, C) = 0,2 $\vee$ 0,3 = 0,3,

μ (A, C) $\vee$ μ (C, C) = 0,3 $\vee$ 0 = 0,3,

μ (A, D) $\vee$ μ (D, C) = 0 $\vee$ 0,3 = 0,3

μ (A, E) $\vee$ μ (E, C) = 0,1 $\vee$ 0,3 = 0,3,

MIN [0,3; ...] =;0,3,

μ (A, C) = 0,3 $\leq$ 0,3 и т.д.

Пример 2. Отношения, которое представлено на рис. 67, есть отношения различия, если $1 \geq b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_l \geq ... \geq 0$.

$\tilde{R}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	...
x_1	0	b_1	b_1	b_1	b_1	b_1	b_1	...
x_2	b_1	0	b_2	b_2	b_2	b_2	b_2	...
x_3	b_1	b_2	0	b_3	b_3	b_3	b_3	...
x_4	b_1	b_2	b_3	0	b_4	b_4	b_4	...
x_5	b_1	b_2	b_3	b_4	0	b_5	b_5	...
x_6	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	0	b_6	...
x_7	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	0	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Рис. 67.

Это отношение получается из отношения на рис. 51 заменой

$$\mu_{\overset{\approx}{R}}(x, y) = 1 - \mu_{\tilde{R}}(x, y).$$

Положим $b_i = 1 - a_i$, $i = 1, 2, 3, ...$

Пример 3. Нечеткое отношение

$$\mu_{\overset{\approx}{R}}(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-k(y+1)}, & y < x, k > 1, \\ 0, & y = x, \\ 1 - e^{-k(x+1)}, & y > x, k > 1 \end{cases}$$

есть отношения различия. Оно получается из

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \begin{cases} e^{-k(y+1)}, & y < x, k > 1, \\ 1, & y = x, \\ e^{-k(x+1)}, & y > x, k > 1 \end{cases}$$

заменой

$$\mu_{\overset{\approx}{R}}(x, y) = 1 - \mu_{\tilde{R}}(x, y).$$

Рассмотрим несколько примеров, но сначала, чтобы иметь все необходимое под рукой, напомним аксиомы, которые связаны с понятием расстояния между двумя элементами множества.

Если d (X, Y) — расстояние между X и Y, то для $\forall$ X, Y, Z $\in$ E должны выполняться условия

1) $d(X, Y) \geq 0$, (100)
2) $d(X, Y) = d(Y, X)$, (101)
3) $d(X, Y) * d(Y, Z) \geq d(X, Z)$, (102)

где * — операция, определенная на расстояниях d (X, Y).

К этим трех условий можно логически ввести четвертое:

$d(X, X) = 0$. (103)

Проверим (100) —(103) для $\mu_{\tilde{R}}(x, y)$; действительно, поскольку

$$0 \leq \mu_{\tilde{R}}(x, y) \leq 1,$$

то (100) удовлетворяется по определению. Соотношение (101) удовлетворяется в силу (99). Соотношение (102), где операция * есть (min — max)-операция, удовлетворяется в силу (1.97). Наконец, (103) тоже истинно [см. (98)]. Таким образом, можно положить

$$d(xy) = \mu_{\tilde{R}}(xy)$$

и рассматривать $\mu_{\tilde{R}}(x, y)$ как расстояние между x и y (в этом случае $\mu_{\tilde{R}}(x, y)$ можно также назвать расстоянием между x и y).

(Min-max)-расстояние между двумя элементами в отношении подобия. Пусть $\tilde{R}$ - отношение подобия. *(Min-max)-расстоянием между x и y, $x,y \in E$,* и $\tilde{R} \subset E \times E$ будем называть

$$d_{\tilde{R}}(xy) = 1 - \mu_{\tilde{R}}(xy).$$

Пример 4. Обратимся снова к примеру на рис. 49 (повтореному на рис. 68) — это отношение подобия $\tilde{R}$.

$\tilde{R}$	A	B	C	D	E
A	1	0,8	0,7	1	0,9
B	0,8	1	0,7	0,8	0,8
C	0,7	0,7	1	0,7	0,7
D	1	0,8	0,7	1	0,9
E	0,9	0,8	0,7	0,9	1

Рис. 68.

На рис. 69 представленно отношение различия, соответствующее изображенному на рис. 68.

$\overline{\tilde{R}}$	A	B	C	D	E
A	0	0,2	0,3	0	0,1
B	0,2	0	0,3	0,2	0,2
C	0,3	0,3	0	0,3	0,3
D	0	0,2	0,3	0	0,1
E	0,1	0,2	0,3	0,1	0

Рис. 69.

Таким образом, имеем

$$d_{\tilde{R}}\ (\mathrm{A,B}) = 0{,}2,$$

$$d_{\tilde{R}}\ (\mathrm{A,C}) = 0{,}3,$$

$$d_{\tilde{R}}\ (\mathrm{A,D}) = 0$$

.....и т.д.

Пример 5. Рассмотрим опять пример

$$\mu_{\tilde{R}}\ (x, y) = \begin{cases} e^{-k(y+1)}, & y < x, k > 1, \\ 1, & y = x, \\ e^{-k(x+1)}, & y > x, k > 1 \end{cases};$$

имеем

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-k(y+1)}, & y < x, k > 1, \\ 0, & y = x, \\ 1 - e^{-k(x+1)}, & y > x, k > 1 \end{cases}$$

2.10. Отношения сходства

Сделаем некоторое лирическое отступление.

В теории обычных множеств тот факт, что это бинарное отношение не унаследовало свойства транзитивности, объясняет почти полное отсутствие интереса у части математиков к этому свойству. Точно так же, как карикатуристы, они каждый раз впадают в общую ошибку, полагая, что сходство транзитивно. Вспомним карикатуры, на которых видно, как изменяющиеся образы, появляются друг за другом, как гетман Мазепа меняется в лице или император Наполеон III превращается в макрель. Талант этих юмористов не должен затемнять их логическую ошибку. Записывая (в понимании теории обычных множеств), что A похоже на B, B похоже на C, C похоже на D, ..., K похоже на L, а поэтому A похоже на L, мы действительно получаем A=L; окончательный вывод из последовательности умозаключений неверен. Ложные выводы этой природы используются людьми для того, чтобы пошутить над чем-либо, или политиками, которые стремятся воспользоваться глупостью некоторых избирателей. Софисты имеют особую склонность уверять нас в существовании транзитивности там, где ее существование особенно сомнительно.

Однако в теории нечетких подмножеств можно измерять несколько видов сходства, используя понятие расстояния в транзитивном замыкании. Понятие сходства тогда устанавливает мост между эквивалентностью и сходством.

А теперь перейдем к делу.

Отношение $\tilde{R}$, такое, что

1) $\forall\ (x, x)\in E\times E$: $\mu_{\tilde{R}}(x, x)=1$ — рефлексивность,

2) $\forall\ (x,y)\in E\times E$: $\mu_{\tilde{R}}(x,y)=\mu_{\tilde{R}}(y, x)$ - симметрия.

называется *отношением сходства*.

Пример 1. На рис. 70 приведен пример отношения сходства.

$\tilde{R}$	A	B	C	D	E
A	1	0,1	0,8	0,2	0,3
B	0,1	1	0	0,3	1
C	0,8	0	1	0,7	0
D	0,2	0,3	0,7	1	0,6
E	0,3	1	0	0,6	1

Рис. 1.70.

Пример 2. Отношение

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y)=e^{-k(x-y)^2}, \quad x,y\in N,$$

как мы уже видели, нетранзитивно, но оно рефлексивно и симметрично, поэтому является отношением сходства.

(Min-max)-расстояние на отношении сходства. Если $\tilde{R}$ есть отношение сходства (композиция $\tilde{R}$ с $\tilde{R}$ сохраняет рефлексивность и симметричность), то его транзитивное замыкание $\hat{\tilde{R}}$ есть отношение подобия. В таком случае понятия (min-max)-расстояния, порожденного $\tilde{R}$, можно определить через расстояние, порожденное $\hat{\tilde{R}}$:

$$d_{\tilde{R}}(x,y)=1-\mu_{\hat{\tilde{R}}}(x,y).$$

Пример 3. Рассмотрим пример на рис. 70. С помощью композиционной формулы (39) мы подсчитали транзитивное замыкание $\hat{\tilde{R}}$, которое изображено на рис. 71.

$\hat{\tilde{R}}$	A	B	C	D	E
A	1	0,6	0,8	0,7	0,6
B	0,6	1	0,6	0,6	1
C	0,8	0,6	1	0,7	0,6
D	0,7	0,6	0,7	1	0,6
E	0,6	1	0,6	0,6	1

Рис. 71.

Далее определили $\overline{\hat{\tilde{R}}}$, такое, что

$$\mu_{\overline{\hat{\tilde{R}}}}(x,y)=1-\mu_{\hat{\tilde{R}}}(x,y).$$

Отношение $\overline{\hat{\tilde{R}}}$ изображено на рис. 72.

$\overline{\hat{\tilde{R}}}$	A	B	C	D	E
A	0	0,4	0,2	0,3	0,4
B	0,4	0	0,4	0,4	0
C	0,2	0,4	0	0,3	0,4
D	0,3	0,4	0,3	0	0,4
E	0,4	0	0,4	0,4	0

Рис. 72.

Наконец, имеем

$$d_{\tilde{\tilde{R}}}\ (\mathrm{A, B}) = 0{,}4,$$

$$d_{\tilde{\tilde{R}}}\ (\mathrm{A,C}) = 0{,}2,$$

....

$$d_{\tilde{\tilde{R}}}\ (\mathrm{B,D})=0{,}4$$

....

и т.д.

Пример 4. Рассмотрим отношение сходства $\widetilde{R}$, определенное как

$$\mu_{\widetilde{R}}\,(x,y) = \frac{1}{1+|\,x-y\,|}\ ,\ \ x\in \mathrm{N},\, y\in \mathrm{N}. \qquad (104)$$

Это отношение представлено на рис. 73.

$\widetilde{R}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	…
1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	…
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	…
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	…
4	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	…
5	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	…
6	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	…
7	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	…
8	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Рис. 73.

Подсчитав

$$\hat{\tilde{R}} = \tilde{R} \,\square\, \tilde{R}^2 \cup \tilde{R}^3 \cup \ldots$$

(чтобы получить $\hat{\tilde{R}}$, необходимо взять $\hat{\tilde{R}} = \tilde{R} \cup \tilde{R}^2 \cup \tilde{R}^3 \cup \ldots$; очевидно, что все элементы $\hat{\tilde{R}}$ стремятся к 1/2, за исключением элементов на главной диагонали, которые остаются равными 1) получим отношение, которое представлено на рис. 74.

$\hat{\tilde{R}}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	...
1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	...
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	...
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	...
4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	...
5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	...
6	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	...
7	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	...
8	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	$\ddots$

Рис. 74.

В таком случае имеем

$$\mu_{\hat{\tilde{R}}}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & x \neq y \\ 1, & x = y \end{cases}$$

Следовательно, можно заключить, что

$$d_{\tilde{R}}\,(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}.$$

Заметим, что, если в (104) считать, что

$$x \in \mathrm{R}^{+} \text{ и } y \in \mathrm{R}^{+},$$

то получим

$$d_{\tilde{R}}\,(x,y)=0$$

для всех x и y. Однако здесь нет парадокса, поскольку расстояние между x и $y = x + dx$ бесконечно мало и того же порядка, что и dx. Конечно, если расстоянию придать некоторый другой смысл, чем придаваемый рассмотренному здесь (min — max)-расстоянию, то это заключение следует пересмотреть.

(Max—·)-транзитивное замыкание для отношения сходства.

Пусть $\tilde{R}$ — отношение сходства. В некоторых случаях предпочтительнее измерять расстояние между элементами с помощью (max—·)-оператора вместо (max — min)-оператора, т.е. использовать выражение:

$$\mu_{\tilde{R}^2}\,(x,z)=\bigvee_{y}\,[\,\mu_{\tilde{R}}\,(x,y)\cdot\mu_{\tilde{R}}\,(y,z)].$$

(*Max — •)-транзитивное замыкание* отношения определяется как

$$\dot{\hat{R}} = \tilde{R} \cup \tilde{R}^{\dot{2}} \cup \tilde{R}^{\dot{3}} \cup \ldots$$

где

$$\tilde{R}^{\dot{k}} = \underbrace{\tilde{R}\cdot\tilde{R}\cdot\ldots\cdot\tilde{R}}_{k\ \text{раз}}\,, \quad k=1,2,3,\ldots$$

Точка над $\dot{\hat{R}}$ и $\dot{k}$ напоминает нам, что мы имеем дело с (max — •)-композицией.

Пример 5. Напомним, что для отношения на рис. 70 мы подсчитали $\hat{\tilde{R}}$ и $\overline{\hat{\tilde{R}}}$ на рис. 71 и 72. На рис. 75 можно увидеть, как определялись $\tilde{R}^{\dot{2}}, \tilde{R}^{\dot{3}}, \tilde{R}^{\dot{4}}, \tilde{R}^{\dot{5}}, \dot{\hat{R}}$.

$\tilde{R}$	A	B	C	D	E
A	1	0,1	0,8	0,2	0,3
B	0,1	1	0	0,3	1
C	0,8	0	1	0,7	0
D	0,2	0,3	0,7	1	0,6
E	0,3	1	0	0,6	1

,

$\tilde{R}^2$	A	B	C	D	E
A	1	0,3	0,8	0,56	0,3
B	0,3	1	0,21	0,6	1
C	0,8	0,21	1	0,7	0,42
D	0,56	0,6	0,7	1	0,6
E	0,3	1	0,42	0,6	1

,

$\tilde{R}^3$	A	B	C	D	E
A	1	0,3	0,8	0,56	0,336
B	0,3	1	0,42	0,6	1
C	0,8	0,42	1	0,7	0,42
D	0,56	0,6	0,7	1	0,6
E	0,336	1	0,42	0,6	1

,

$\tilde{R}^4$	A	B	C	D	E
A	1	0,336	0,8	0,56	0,336
B	0,336	1	0,42	0,6	1
C	0,8	0,42	1	0,7	0,42
D	0,56	0,6	0,7	1	0,6
E	0,336	1	0,42	0,6	1

;

$\tilde{R}^5$	A	B	C	D	E
A	1	0,336	0,8	0,56	0,336
B	0,336	1	0,42	0,6	1
C	0,8	0,42	1	0,7	0,42
D	0,56	0,6	0,7	1	0,6
E	0,336	1	0,42	0,6	1

,

$\hat{\tilde{R}}$	A	B	C	D	E
A	1	0,336	0,8	0,56	0,336
B	0,336	1	0,42	0,6	1
C	0,8	0,42	1	0,7	0,42
D	0,56	0,6	0,7	1	0,6
E	0,336	1	0,42	0,6	1

.

Рис. 75.

Замечание к вычислению $\hat{\tilde{R}}$. Раньше мы видели, что

$$\tilde{R} \circ \tilde{R} \subset \tilde{R} \Rightarrow \tilde{R} \bullet \tilde{R} \subset \tilde{R},$$

хотя обратное утверждение неверно.

Теорема 2 из п. 2.3 (равенство (52)) также справедлива для (max—•)-операции. Для некоторого конкретного *k* имеем

$$\tilde{R}^{k+1} = \tilde{R}^{k} \Rightarrow \hat{\tilde{R}} = \tilde{R} \cup \tilde{R}^{2} \cup \ldots \cup \tilde{R}^{k}$$

В случае, когда $\tilde{R}$ есть отношение сходства, аналогично имеем

$$\tilde{R}^{k+1} = \tilde{R}^{k} \Rightarrow \hat{\tilde{R}} = \tilde{R}^{k}.$$

(Min — sum)-расстояние на отношении сходства. *(Min — sum) - расстоянием* будем называть величину

$$\gamma_{\tilde{R}}(x,y) = \mu_{\overline{\hat{\tilde{R}}}}(x,y).$$

Но сначала следует установить, удовлетворяет ли эта функция аксиомам расстояния (100) - (103).

(100) удовлетворяется априори, поскольку $\mu_{\hat{\tilde{R}}}(x, y) \in [0,\ 1]$.

(101) удовлетворяется априори, поскольку отношение $\hat{\tilde{R}}$ симметрично.

(103) удовлетворяется априори, поскольку отношение $\overline{\underset{\sim}{R}}$ рефлексивно, откуда следует, что $\mu_{\overline{\underset{\&}{R}}}(x,y)= 0$.

Остается показать, что это расстояние действительно обладает свойством (102). Мы поступим так же, как это было сделано для (93)-(96). Имеем

$$\mu_{\underset{\&}{R}}(x, z) > [\, \mu_{\underset{\&}{R}}(x, y) \bullet \mu_{\underset{\&}{R}}(y, \mathrm{z})],$$

отсюда, руководствуясь правилами операций по теоремам Де Моргана для нечетких множеств, имеем:

$$1- \mu_{\overline{\underset{\&}{R}}}(x, \mathrm{z}) \geq \bigvee_{y} [[1- \mu_{\overline{\underset{\&}{R}}}(x,y)] \bullet [1- \mu_{\overline{\underset{\&}{R}}}(y, \mathrm{z})]] \geq$$

$$\geq \bigvee_{y} [1- \mu_{\overline{\underset{\&}{R}}}(x,y)- \mu_{\overline{\underset{\&}{R}}}(y,z) + \mu_{\overline{\underset{\&}{R}}}(x,y) \bullet \mu_{\overline{\underset{\&}{R}}}(y,z)].$$

Это дает

$$\mu_{\overline{\underset{\&}{R}}}(x, \mathrm{z}) \leq \bigvee_{y} [\, \mu_{\overline{\underset{\&}{R}}}(x,y)+ \mu_{\overline{\underset{\&}{R}}}(y, \mathrm{z})- \mu_{\overline{\underset{\&}{R}}}(x,y)+ \mu_{\overline{\underset{\&}{R}}}(y,z),$$

$$\mu_{\overline{\underset{\&}{R}}}(x, \mathrm{z}) \leq \bigvee_{y} [\, \mu_{\overline{\underset{\&}{R}}}(x,y) \hat{+} \mu_{\overline{\underset{\&}{R}}}(y, \mathrm{z})],$$

где $\hat{+}$ есть алгебраическая сумма, которая определена формулой для алгебраической суммы двух отношений. Теперь видно, что для (max — sum)-оператора определенно удовлетворяется свойство (61).

Пример 5. Рассмотрим опять пример на рис. 70. На рис. 75 мы подсчитали (max — •)-транзитивное замыкание, т.е. $\underset{\&}{R}$.

Теперь (min —sum)-расстояния будут задаваться отношением $\overline{\underset{\&}{R}}$, для которого

$$\gamma(x, y) = \mu_{\overline{\underset{\&}{R}}}(x, y) = 1 - \mu_{\underset{\&}{R}}(x, y).$$

На рис. 76 представлены (min—sum)-расстояния между различными элементами. Так, γ (C, F) = 0,58; γ (D, B) = 0,4.

$\bar{\hat{\tilde{R}}}$	A	B	C	D	E
A	0	0,664	0,2	0,44	0,664
B	0,664	0	0,58	0,4	0
C	0,2	0,58	0	0,3	0,58
D	0,44	0,4	0,3	0	0,4
E	0,664	0	0,58	0,4	0

Рис. 76.

Пример 6. Вернемся к примеру на рис. 74. (Max -•)-композиция показывает, что

$$\hat{\tilde{R}} = \tilde{R}$$

Отношение $\bar{\hat{R}}$ представлено на рис. 77.

$\bar{\hat{\tilde{R}}}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$	…
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	…
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	…
3	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	…
4	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	…
5	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	…
6	$\frac{6}{7}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	…
7	$\frac{7}{8}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	…
8	$\frac{8}{9}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Рис. 77.

Очевидно, что

$$\gamma(n_1,n_2) = \frac{|n_2 - n_1|}{|n_2 - n_1| + 1}$$

и, как следствие,

$$\lim_{|n_2 - n_1| \to \infty} \gamma(n_1,n_2) = 1$$

Замечание. Представляется, что $\gamma(x,y)$ дает в практическом отношении лучшее расстояние, чем $d(x,y)$, это может оказаться очень важным для всего, что связано с проблемами сходства, и объясняет наш интерес к (min — sum)-расстоянию. Однако, как мы увидим на рис. 89, декомпозиция на обычные частные графы дальше невозможна.

Теорема 1. Пусть $\tilde{R}$ — отношение сходства. Тогда всегда справедливо включение

$$\overline{\hat{\tilde{R}}} \subset \overline{\hat{R}},$$

т.е.

$$\forall\ (x, y) : d(x, y) \le \gamma(x, y).$$

Доказательство. По условию (max — min)-транзитивности имеем

$$\mu_{\tilde{R}}(x, z) \ge \bigvee_y [\mu_{\tilde{R}}(x, y) \wedge \mu_{\tilde{R}}(y, z)].$$

По условию (max-•)-транзитивности имеем

$$\mu_{\tilde{R}}(x, z) \ge \bigvee_y [\mu_{\tilde{R}}(x, y) \bullet \mu_{\tilde{R}}(y, z)].$$

Но согласно свойству

$$a \bullet b \le a \wedge b, \text{ если } a, b \in [0,1],$$

имеем

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) \wedge \mu_{\tilde{R}}(y, z) \ge \mu_{\tilde{R}}(x, y) \bullet \mu_{\tilde{R}}(y, z),$$

Откуда следует

$$\bigvee_y [\mu_{\tilde{R}}(x, y) \underset{\max-\min}{\wedge} \mu_{\tilde{R}}(y, z)] \ge \bigvee_y [\mu_{\tilde{R}}(x, y) \underset{\max-\cdot}{\bullet} \mu_{\tilde{R}}(y, z)],$$

т.е.

$$\tilde{R} \bullet \tilde{R} \subset \tilde{R} \circ \tilde{R},$$

где, напоминаем, • обозначает (max—•)-композицию, а $\circ$ обозначает (max — min)-композицию.

Отсюда

$$\hat{R} \subset \hat{\tilde{R}}$$

и, следовательно,

$$\overline{\hat{\tilde{R}}} \subset \overline{\hat{R}}$$

Отношение несходства. Отношение $\tilde{R}$, такое, что

1) $\forall$ *(x,x)* $\in$ E×E: $\mu_{\tilde{R}}$ *(x,x)* = 0 (антирефлексивность),

2) $\forall$ *(x, y)* $\in$ E × E: $\mu_{\tilde{R}}$ *(x, y)* = $\mu_{\tilde{R}}$ *(y, x)* (симметрия),

называется *отношением несходства* (рис. 78).

$\tilde{R}$	A	B	C	D	E
A	0	0,3	0,9	1	0,2
B	0,3	0	0,4	0,1	0
C	0,9	0,4	0	0,8	0,1
D	1	0,1	0,8	0	1
E	0,2	0	0,1	1	0

Рис. 78.

Рассмотрим некоторые очевидные свойства. Если $\tilde{R}$ — отношение сходства, то $\overline{\tilde{R}}$ — отношение несходства и наоборот.

Теорема 2. Если $\hat{\tilde{R}}$ есть (max — min) -транзитивное замыкание отношения сходства $\tilde{R}$, то $\overline{\hat{\tilde{R}}}$ есть (min—max)-транзитивное замыкание соответствующего отношения несходства.

Доказательство. (Max — min)-транзитивное замыкание выражается с помощью (50) и (49); таким образом,

$$\hat{\tilde{R}} = \tilde{R} \cup \tilde{R}^2 \cup \tilde{R}^3 \cup \ldots$$

и

$$\mu_{\tilde{R} \circ \tilde{R}}(x, z) = \bigvee_{y} [\, \mu_{\tilde{R}}(x, y) \wedge \mu_{\tilde{R}}(y, z)].$$

Тогда *(min — max)-транзитивное замыкание* запишем в виде (можно обозначать $\tilde{R} * \tilde{R} = \tilde{R}^2$, если нет опасности спутать с (max— min)-операцией, и $\tilde{R} * \tilde{R} * \ldots * \tilde{R} = \tilde{R}^n$)

$$\hat{\tilde{R}} = \tilde{R} \cap (\tilde{R} * \tilde{R}) \cap (\tilde{R} * \tilde{R} * \tilde{R}) \cap \ldots \qquad (105)$$

и

$$\mu_{\tilde{R} * \tilde{R}}(x, z) = \bigwedge_y [\, \mu_{\tilde{R}}(x, y) \vee \mu_{\tilde{R}}(y, z)].$$

Пусть $\tilde{R}$ - отношение сходства, $\hat{\tilde{R}}$ — отношение подобия, $\overline{\tilde{R}}$ — отношение несходства и $\breve{\tilde{R}}$ — отношение различия. Покажем, что

$$\overline{\hat{\tilde{R}}} = \breve{\tilde{R}}$$

В (93)— (96) мы уже показали, что если $\tilde{R}$ (max — min) - транзитивно, то $\overline{\tilde{R}}$ (min — max)-транзитивно.

Покажем теперь, что

$$\underset{\text{max-min}}{\overline{\tilde{R} \circ \tilde{R}}} = \underset{\text{min-max}}{\overline{\tilde{R}} * \overline{\tilde{R}}} \tag{106}$$

Для проверки этого поступим так же, как в (93)— (96):

$$\mu_{\tilde{R} \circ \tilde{R}}(x, z) = \bigvee_y [\, \mu_{\tilde{R}}(x, y) \wedge \mu_{\tilde{R}}(y, z)],$$

$$\mu_{\overline{\tilde{R} \circ \tilde{R}}}(x, z) = 1 - \mu_{\tilde{R} \circ \tilde{R}}(x, z) = 1 - \bigvee_y [\, \mu_{\tilde{R}}(x, y) \wedge \mu_{\tilde{R}}(y, z)] =$$

$$= \bigwedge_y \mu_{\overline{\tilde{R}}}(x, y) \vee \mu_{\overline{\tilde{R}}}(y, z) = \mu_{\overline{\tilde{R}} \circ \overline{\tilde{R}}}(x, z)$$

Это доказывает (106).

Теперь запишем

$$\overline{\hat{\tilde{R}}} = \overline{\tilde{R} \cup \tilde{R}^2 \cup \tilde{R}^3 \cup \ldots} = \overline{\tilde{R} \cup (\tilde{R} \circ \tilde{R}) \cup (\tilde{R} \circ \tilde{R} \circ \tilde{R}) \cup \ldots} =$$

$= \overline{\tilde{R}} \cap \overline{\tilde{R} \circ \tilde{R}} \cap \overline{\tilde{R} \circ \tilde{R} \circ \tilde{R}} \cap \ldots =$ далее, используя теорему Де Моргана, получаем $= \overline{\tilde{R}} \cap \overline{\tilde{R}} * \overline{\tilde{R}} \cap \overline{\tilde{R}} * \overline{\tilde{R}} * \overline{\tilde{R}} \cap \ldots =$ и, наконец, согласно (106) $= \breve{\tilde{R}}$.

Пример 7. Возьмем опять отношение сходства, которое представлено на рис. 70, для которого соответствующее отношение подобия представлено на рис. 71, а матрица расстояний — на рис. 72. Мы встретимся с этими отношениями еще раз при расчетах, которыми заканчивается нахождение $\breve{\tilde{R}}$ на рис. 79, *г-з*.

$\overline{\tilde{R}}$	A	B	C	D	E
A	0	0,9	0,2	0,8	0,7
B	0,9	0	1	0,7	0
C	0,2	1	0	0,3	1
D	0,8	0,7	0,3	0	0,4
E	0,7	0	1	0,4	0

г

$\overline{\tilde{R}}*\overline{\tilde{R}}$	A	B	C	D	E
A	0	0,7	0,2	0,3	0,7
B	0,7	0	0,7	0,4	0
C	0,2	0,7	0	0,3	0,4
D	0,3	0,4	0,3	0	0,4
E	0,7	0	0,4	0,4	0

(min–max)-композиция $\overline{\tilde{R}}*\overline{\tilde{R}}$

д

$\overline{\tilde{R}}^3_*$	A	B	C	D	E
A	0	0,7	0,2	0,3	0,4
B	0,7	0	0,4	0,4	0
C	0,2	0,4	0	0,3	0,4
D	0,3	0,4	0,3	0	0,4
E	0,4	0	0,4	0,4	0

(min–max)-композиция

е

$\overline{\tilde{R}}^4_*$	A	B	C	D	E
A	0	0,4	0,2	0,3	0,4
B	0,4	0	0,4	0,4	0
C	0,2	0,4	0	0,3	0,4
D	0,3	0,4	0,3	0	0,4
E	0,4	0	0,4	0,4	0

(min–max)-композиция

ж

$\check{\overline{\tilde{R}}}$	A	B	C	D	E
A	0	0,4	0,2	0,3	0,4
B	0,4	0	0,4	0,4	0
C	0,2	0,4	0	0,3	0,4
D	0,3	0,4	0,3	0	0,4
E	0,4	0	0,4	0,4	0

пересечение
(min–max)-композиций

з

Рис. 79.

Теорему 2 можно распространить на случай любого отношения, не подчеркивая, что это отношение сходства. Таким образом, можно сформулировать более общую теорему.

Теорема 3. Пусть $\hat{\tilde{R}}$ есть (max — min)-транзитивное замыкание некоторого нечеткого отношения $\tilde{R} \subset E\times E$ и $\check{\overline{\tilde{R}}}$ — (min — max)-транзитивное замыкание $\overline{\tilde{R}}$. Тогда $\overline{\hat{\tilde{R}}} = \check{\overline{\tilde{R}}}$

2.11. Гносеологические аспекты нечетких отношений сходства

В современной математике особое внимание уделяется разработке методов, позволяющих наиболее адекватно отображать динамические процессы, происходящие в условиях неопределенности.

Наиболее точными в условиях нестохастической неопределенности оказываются модели и методы, принадлежащие теории нечетких множеств, предложенной в 1965 г. известнейшим американским математиком, профессором Калифорнийского университета Л.А.Заде.

Вместе с тем достаточно строгий математический аппарат, которым располагает теория нечетких множеств, позволяет весьма точно моделировать не только поведение технических систем, но и мыслительные акты, происходящие в процессе познавательной деятельности человека, центральное место в которой занимает абстрагирование. В предлагаемом читателю кратком исследовании рассматриваются некоторые гносеологические аспекты **нечетких отношений сходства**, которые успешно используются при решении некоторых задач нечеткой классификации и имеют все шансы найти достойное применение в логико-математической теории определений через абстракцию.

В этой теории существенную роль играет теорема о разбиении некоторой предметной области *X* отношением типа равенства *R*, *определенном на данной области*, на подмножества, не имеющие общих элементов. Данные подмножества именуются классами эквивалентности, а отношение *R*, определяемое аксиоматически как симметричное, транзитивное и рефлексивное отношение в *X*, устанавливает связь между различными элементами универсального множества *X*. Так, если *A* и *B* — это различные классы эквивалентности $A, B \subseteq X$ и $x, y \in A$, то выражение *xRy* интерпретируется как «объект *x* равен объекту *y*». Если же $x \in A, y \in B$, то подобная трактовка вышеприведенного выражения, с логической точки зрения, будет представлять собой ложное высказывание.

Однако логико-математическая теория образования и определения понятий, в основе которой лежит теорема о разбиении предметной области *X* отношением *R*, может применяться лишь к абстрактным математическим объектам, поскольку при использовании данного аппарата за пределами математики приходится вводить достаточно жесткие идеализирующие допущения; если данные допущения не принимать во внимание, то в ряде случаев некоторые условия, определяющие отношение *R,* в частности, условие транзитивности, оказываются невыполненными. Выходом из сложившейся ситуации, позволяющим в значительной степени ослабить, а зачастую и совсем устранить идеализирующие допущения и применить теорию определений через абстракцию к объектам реального мира, может оказаться применение в рамках данной теории аппарата нечетких отношений.

В качестве предварительного замечания следует отметить, что теория нечетких множеств, вводя понятие взвешенной принадлежности для объектов $x \in X$, не только позволяет достаточно полно описывать субъективность индивида в процессе его познавательной деятельности, но и весьма эффективно моделировать нечеткие понятия. Следует также указать, что, как аппарат для решения задач классификации объектов, теория нечетких множеств является более эффективной, чем традиционные статистические методы, поскольку, как отмечал основатель теории Заде, «большинство реальных классов размыты по своей природе».

Нечеткое отношение эквивалентности, или, как его еще называют, отношение подобия *S* на множестве *X* (от англ. *similarity* — подобие, сходство) математически определяется как функция $\mu_S : X \times X \to [0,1]$, именуемая функцией принадлежности нечеткого отношения *S*, которая принимает значения на отрезке [0,1] и удовлетворяет следующим свойствам:

1. симметричности:

$$\mu_S(x,y) = \mu_S(y,x), \forall x,y \in X \tag{1}$$

2. рефлексивности:

$$\mu_S(x,x) = 1, \forall x \in X \tag{2}$$

3. транзитивности:

$$\mu_S(x,z) \geq \bigvee_{y \in X}(\mu_S(x,y) \wedge \mu_S(y,z)), \forall x,y,z \in X \tag{3}$$

где символы $\vee$ и $\wedge$ обозначают, соответственно, операции взятия максимального и минимального значений, а выражение $X \times X$ — декартово произведение предметного множества на само себя.

Таким образом, выражение $\mu_S(x, y) = 0.7, x, y \in X$ или, используя алгебраическую форму записи, $S(x, y) = 0.7, x, y \in X$ может трактоваться следующим образом: «объект *x*, принадлежащий множеству *X*, подобен объекту *y*, принадлежащему множеству *X*, со степенью 0.7». Значение 0 в правой части равенства означает полное различие объектов *x* и *y*, а значение 1, соответственно, — полную идентичность рассматриваемых объектов. Следует указать, что множество *X* представляет собой обычное четкое множество объектов в его классическом понимании. Условие симметричности (1) отношения *S* трактуется как «объект *x* подобен объекту *y* в той же степени, в которой объект *y* подобен объекту *x*», а условие рефлексивности (2) отношения *S* трактуется как «объект *x* тождественен сам себе». Условие транзитивности (3) отношения *S* профессор Заде называл свойством размытой транзитивности и трактовал следующим образом: «Сходство *x* и *z* имеет по крайней мере ту же величину, что и сходство *x* и *y* или сходство *y* и *z*».

Итак, отношение подобия *S* является обобщением обычного отношения эквивалентности и также определяет совокупность разбиений области *X* на непересекающиеся классы эквивалентности в силу того, что условие транзитивности (3) налагает достаточно жесткие ограничения на возможные значения функции принадлежности отношения *S*. Другие типы транзитивности, помимо рассмотренной выше так называемой MIN-MAX-транзитивности, существующие в теории нечетких множеств, обусловлены свойствами операции композиции и также налагают некоторые ограничения на возможные значения степеней принадлежности отношения *S*.

Вместе с тем, замечание Заде о размытости большинства реальных классов можно дополнить замечанием о том, что реальные классы объектов, помимо того, что являются размытыми, в большинстве случаев пересекаются. Более того, нельзя не согласиться с американским специалистом в области нечеткой классификации Энрике Г.Руспини в том, что «отношение подобия, в общем, есть нетранзитивное бинарное отношение. Другими словами, из ”A подобно B” и ”B подобно C” не следует, что ”A подобно C”». Эти соображения приводят к заключению о необходимости отказа с целью обобщения от условия транзитивности отношения эквивалентности также и в нечетком случае.

Нетранзитивное нечеткое бинарное отношение, определяемое условиями симметричности (1) и рефлексивности (2), в научной литературе именуется отношением сходства, безразличия, неразличимости или толерантности.

Отношение сходства, определяемое условиями (1) и (2), которые имеют естественную интерпретацию, и получившее в специальной литературе с целью отличия его от отношения подобия S обозначение S_2, разбивает предметную область X на пересекающиеся классы. Для отношения сходства S_2 выражение $\mu_S(x,y) = 0.7, x, y \in X$ может трактоваться следующим образом: «степень сходства объектов x и y, принадлежащих множеству X, равна 0.7». Поскольку в качестве области значений функции принадлежности нечеткого отношения S может выступать не только отрезок вещественной прямой [0,1], но и, к примеру, псевдобулева алгебра, множество вещественных чисел, а также множество лингвистических переменных, то степень сходства элементов может быть указана не только числом из интервала [0,1], но и языковыми выражениями, линейно упорядоченными между собой, такими, к примеру, как «очень слабое сходство», «слабое сходство», «среднее сходство», «сильное сходство», «очень сильное сходство». В нашем примере при использовании лингвистической переменной исходное выражение может трактоваться следующим образом: «объекты x и y, принадлежащие множеству X, сильно похожи».

Таким образом, отношение сходства, определяемое условиями (1) и (2), можно интерпретировать как «два объекта x и y, принадлежащие одной предметной области X, похожи между собой», или, короче, «x похож на y». Очевидно, что при разбиении предметной области X нечетким отношением сходства S_2 на пересекающиеся классы сходства в области пересечения окажутся объекты, в той или иной мере обладающие признаками, свойственными обоим пересекающимся классам, т.е. похожие объекты, а объекты, обладающие признаками одного класса и не обладающие признаками другого, т.е. существенно различающиеся между собой объекты, однозначно окажутся в различных классах. Следует также отметить, что степень принадлежности объекта классу зависит от степени выраженности объектом признаков, свойственных объектам, типичным для данного класса. Данный тезис является одним из основных положений современной теории нечеткой автоматической классификации.

В нескольких работах, посвященных проблеме нечеткого кластер-анализа, были предложены отношения сильного и слабого сходства и были исследованы их некоторые свойства. Применение данного аппарата позволяет более адекватно представлять данные для последующего анализа и, соответственно, создать более гибкие методы классификации. Поскольку одним из этапов процесса абстрагирования является классификация объектов, то применение аппарата нечетких отношений, используемых в теории нечеткой классификации, к решению проблемы моделирования процесса абстрагирования вполне правомерно.

Нечеткое отношение сильного сходства на множестве X, обозначаемое S_3, было определено как симметричное в смысле условия (1) и сильнорефлексивное бинарное отношение. В свою очередь условие сильной рефлексивности определяется как условие

$$\mu_{S_3}(x,y) < 1, \forall x,y \in X, x \neq y \qquad (4)$$

совместно с условием рефлексивности (2). Если нечеткое отношение сходства представить в виде матрицы сходства объектов, то на главной диагонали этой матрицы всегда будут стоять единицы. Однако, если для отношения сходства S_2 допустима ситуация, когда $\mu_{S_2}(x,y) = 1, x,y \in X, x \neq y$, т.е. в составе одного класса сходства на множестве X существует два абсолютно идентичных объекта и возможна ситуация, когда в матрице сходства единицы могут стоять и вне главной диагонали, то для отношения сильного сходства S_3 абсолютно идентичных объектов не существует. Термин же «сильное сходство», являясь устоявшимся математическим термином, указывает на тождественность некоторого объекта $x \in X$ только самому себе. Таким образом, нечеткое отношение сильного сходства содержательно можно интерпретировать следующим образом: два объекта x и y, принадлежащие одной предметной области X, похожи между собой, но не тождественны друг другу.

Следует указать, что тип отношения, порождающего соответствующую структуру, обусловливается принятием во внимание признаков и свойств анализируемых объектов.

Нечеткое отношение слабого сходства на множестве *X*, обозначаемое S_1, определялось как симметричное в смысле условия (1) и слаборефлексивное бинарное отношение, где условие слабой рефлексивности определялось как условие

$$\mu_{S_1}(x, y) \leq \mu_{S_1}(x, x), \forall x, y \in X. \qquad (5)$$

Если же в условии слабой рефлексивности (5) выполняется строгое неравенство, то такое нечеткое отношение именуется строгим отношением слабого сходства, получившим обозначение S_0. Условие слабой рефлексивности (5) в отношении слабого сходства S_1 можно трактовать следующим образом: степень сходства объектов *x* и *y*, принадлежащих множеству *X* не выше, чем сходство какого-либо объекта с самим собой. Здесь необходимо указать на одно очень важное обстоятельство: поскольку условие рефлексивности (2) не является определяющим для этого типа отношений сходства, то возможны ситуации, когда $\mu_{S_1}(x, x) < 1, x \in X$, что можно интерпретировать фразой «объект *x*, принадлежащий множеству *X*, не тождественен сам себе».

В качестве иллюстративного примера из техники можно привести самолет с изменяемой геометрией крыла, т.е., как определял это понятие польский инженер, специалист в области сверхзвуковой авиации Эдмунд Цихош, «самолет, крылья которого изменяют в полете угол стреловидности передней кромки по желанию пилота или по заданной программе. При изменении угла стреловидности изменяются размах и отчасти площадь, а также положение сечений крыла относительно направления потока…». В одной из работ, посвященных проблемам нечеткой классификации, для рассмотрения возможности применения нечетких отношений слабого сходства при представлении данных в задачах нечеткого кластер-анализа в качестве примера самолета изменяемой геометрии крыла рассматривался американский самолет F-111; примерами могут послужить и многие другие самолеты как зарубежной, так и отечественной разработки, однако для человека, не являющегося специалистом в области авиационной техники, один и тот же самолет, но при различных углах стреловидности передней кромки крыла может быть воспринят как два совершенно разных типа самолетов.

Нечеткое отношение строгого слабого сходства на множестве *X*, обозначаемое S_0, соответственно допускает следующую интерпретацию: степень сходства любых двух объектов *x* и *y*, принадлежащих одной предметной области *X*, меньше, чем сходство любого объекта, принадлежащего этой же предметной области *X*, с самим собой. Иными словами, независимо от состояния, любые два объекта из области *X* различаются больше, чем разные состояния любого одного объекта из этой же предметной области. Разумеется, что в такой интерпретации подразумевается, что речь идет не собственно об объектах или их состояниях, а о признаках, свойствах этих объектов при их различных состояниях.

Было показано, что нечеткие отношения сходства упорядочены между собой следующим образом:

$$S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_3 \subseteq S_2, \tag{6}$$

где символ $\subseteq$ означает отношение нестрогого включения. Условие (6) выполняется для любых пар *(x,y)* на декартовом произведении $X \times X$.

Таким образом, на основе проведенного краткого рассмотрения нечетких отношений сходства можно сделать вывод, что они являют собой гибкий и эффективный аппарат для представления неточных, неопределенных и нечетких данных при решении задач классификации объектов. Применение этого аппарата в теории определений через абстракцию позволит обобщить принцип абстракции и разработать методы компьютерного моделирования процесса образования абстракций, что в свою очередь является одной из важнейших проблем искусственного интеллекта. Однако область применения нечетких отношений сходства не ограничена только лишь математическими аспектами задач классификации или, как было продемонстрировано выше, некоторыми математическими аспектами теории определений через абстракцию; этот вид нечетких отношений должен найти более широкое применение в таких областях, как моделирование социально-экономических процессов, в медицинских, социокультурных и других исследованиях в самых различных сферах познавательной деятельности человека. Более детальное гносеологическое рассмотрение предложенного аппарата нечетких отношений сильного и слабого сходства позволит значительно продвинуться вперед по пути решения этих и других проблем современной науки.

2.12. Обобщение нечеткого отношения предпочтения. Принцип обобщения.

Пусть на универсальном множестве Y задано нечеткое отношение предпочтения (н.о.п.) R с функцией принадлежности $\mu_R : Y \times Y \longrightarrow [0;1]$. Пусть Y – класс всех нечетких подмножеств множества Y, т.е. класс всех функций вида $\nu : Y \longrightarrow [0;1]$. Сформулируем следующую задачу: определить, какое нечеткое отношение предпочтения отображает на класс Y исходное н.о.п. R

Для решения этой задачи воспользуемся принципом обобщения, который был предложен Л.Заде. В его основе лежит определение нечеткого множества при обычном (четком) отображении.

Пусть $\varphi : X \longrightarrow Y$ – заданное отображение, A — некоторое нечеткое подмножество множества X с функцией принадлежности $\mu_A(x)$. В соответствии с принципом обобщения образ A при отображении φ определяется как нечеткое подмножество множества Y, представляющее собой совокупность пар вида

$$(y, \mu_B(y)) = (\varphi(x), \mu_A(x)), x \in X \quad , \qquad (1)$$

где $\mu_B(y) : Y \longrightarrow [0;1]$ – функция принадлежности образа.

Функцию принадлежности $\mu_B(y)$ можно записать в виде

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y)} \mu_A(x), y \in Y \quad , \qquad (2)$$

где множество $\varphi^{-1}(y)$ для любого фиксированного $y \in Y$ имеет вид $\varphi^{-1}(y) = \{x : \varphi(x) = y, x \in X\}$ т.е. представляет собой множество всех элементов $x \in X$, образом каждого из которых при отображении φ является элемент *y*.

Применим принцип обобщения в форме (1) для расширения области определения нечеткого отображения.

Нечеткое отображение можно описать как отображение, при котором каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие не конкретный элемент множества *Y*, а в общем случае некоторое нечеткое подмножество множества *Y*. Нечеткое отображение описывается функцией вида $\mu_\varphi : X \times Y \longrightarrow [0;1]$, тогда функция $\mu_\varphi(x_0, y)$ при фиксированном x_0 есть функцией принадлежности нечеткого множества в $y \in Y$, представляющего собой нечеткий образ элемента x_0 при данном отображении.

Например, для систем управления нечеткое множество $\mu_\varphi(x_0, y)$ можно трактовать как нечеткое описание реакции этой системы на управление x_0. Итак, пусть $\mu_\varphi : X \times Y \longrightarrow [0;1]$ – заданное нечеткое отображение, $\mu_A(x)$ — нечеткое множество в *X*, и необходимо найти образ *B* нечеткого множества *A* при этом отображении. Если для этого применить принцип обобщения в форме (1), то получим совокупность пар вида $\{\mu_\varphi(x, y), \mu_A(x)\}, x \in X$, где $\mu_\varphi(x, y)$ при каждом фиксированном $x \in X$ представляет собой нечеткое подмножество множества *Y*. Получаем, что образ нечеткого множества μ_A в данном случае – это сложный объект: нечеткий подкласс класса всех нечетких подмножеств множества *Y*. Использование подобных объектов на практике весьма затруднительно. Поэтому С.А.Орловский предложил принцип обобщения в более удобной форме. В его основе лежит следующее определение образа нечеткого множества при нечетком отображении.

Определение 1*. Образом В нечеткого множества А в Х при нечетком отображении* $\mu_\varphi : X \times Y \longrightarrow [0;1]$ *называется нечеткое множество В с функцией принадлежности вида*

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in X} \min\{\mu_A(x), \mu_\varphi(x, y)\} \qquad (3).$$

В основе этого определения образа лежит максиминная композиция нечетких отношений μ_A и μ_φ. Можно проверить, что в частном случае, когда μ_φ – обычное (четкое) отображение вида $\varphi : X \longrightarrow Y$ (т.е. $\mu_\varphi(x, y) = 1$, при $y = \varphi(x)$ и $\mu_\varphi(x, y) = 0$ для остальных пар (*x, y*)), определение 1 дает

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y)} \mu_A(x), \qquad (4)$$

что соответствует приведенному определению образа при обычном (четком) отображении на основе принципа обобщения Заде.

Иногда заданное нечеткое отображение μ_φ может зависеть от *n* переменных, т.е. иметь вид

$$\mu_\varphi : X \times Y \longrightarrow [0;1],$$

где

$$X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n.$$

Пусть на множестве X задано нечеткое подмножество $\mu_A(x, y)$. В общем случае его функция принадлежности задается так:

$$\mu_A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min\{\mu_1(x_1), \mu_2(x_2), \ldots, \mu_n(x_n), \nu(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}, \qquad (5)$$

где $\mu_i(x_i), i = \overline{1,n}$ и $\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – заданные нечеткие подмножества соответствующих множеств X_i и *X*. Применив в этом случае принцип обобщения в форме (3), получим следующее выражение для функций принадлежности образа нечеткого множества

$$\mu_B(y) = \sup_{x_1,\ldots,x_n} \min\{ \mu_1(x_1), \mu_2(x_2), \ldots, \mu_n(x_n), \nu(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$\mu_\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)\} \qquad (6)$$

Обобщенное нечеткое отношение предпочтения.

Используем введенный выше принцип обобщения для решения задачи, сформулированной в начале разд. 2.12.

Рассмотрим заданное на множестве *Y* н.о.п. *R* с функцией принадлежности $\mu_R(y,z),\ \ y,z \in Y$.

Пусть $\nu : Y \longrightarrow [0;1]$ – некоторое нечеткое подмножество множества *Y*. Тогда согласно принципу обобщения образ ν при нечетком отображении $\mu_R(y,z)$ есть нечеткое подмножество *Y* с функцией принадлежности вида:

$$\eta(\nu, y) = \sup_{z \in Y} \min\{ \nu(z), \mu_R(z, y)\} \quad . \qquad (7)$$

Эта функция η описывает обобщение отображения исходного н.о.п. на множество $Y \times Y$. Иными словами, для фиксированного $\nu_0 \in Y$ функция $\eta(\nu_0, y)$ описывает нечеткое множество элементов *Y*, связанных с ν_0 обобщенным отношением *R′*, т.е. таких $y \in Y$, что $\nu_0 R y$. Следовательно, велечина $\bar{\eta}(\nu_0, y)$ есть степень, с которой нечеткое множество ν_0 предпочтительнее элемента *y*. Аналогично

$$\bar{\eta}(y, \nu_0) = \sup_{z \in Y} \min\{ \nu(z), \mu_R(y, z)\} \qquad (8)$$

есть степень обратного предпочтения $y \geq \nu_0$.

Продолжим процесс обобщения исходного н.о.п. $\underset{\sim}{R}$. Рассмотрим полученную функцию $\tilde{\eta}$ в (9.5.7) как нечеткое отображение $Y \longrightarrow \tilde{y}$, где $\tilde{y}$ – класс всех нечетких подклассов класса Y. Согласно принципу обобщения образом ν_0 при нечетком отображении $\tilde{\eta}$ является нечеткий подкласс класса Y с функцией принадлежности вида

$$\eta(\nu, \nu_0) = \sup_{y \in Y} \min\{\nu_0(y), \tilde{\eta}(\nu, y)\}, \qquad (9)$$

причем его можно понимать как подкласс нечетких подмножеств в Y таких, что $\nu \geq \nu_0$. Из (8), (9) получаем следующее выражение для функции принадлежности обобщенного нечеткого отношения предпочтения:

$$\eta(\nu_1, \nu_2) = \sup_{y \in Y} \min\{\nu_1(y), \sup_{z \in Y}[\nu_2(z), \mu_R(y, z)]\} =$$
$$= \sup_{z, y \in Y} \min\{\nu_1(y), \nu_2(z), \mu_R(y, z)\}. \qquad (10)$$

Аналогично можно прийти к выводу о том, что обратное предпочтение $\nu_2 \geq \nu_1$ выполняется со степенью, равной величине

$$\eta(\nu_2, \nu_1) = \sup_{z, y \in Y} \{\nu_1(y), \nu_2(z), \mu_R(z, y)\}. \qquad (11)$$

Пример 1. Пусть Y – числовая ось и заданное н.о.п. $R(\geq)$ – естественный порядок на Y. Тогда равенства (7), (8) запишутся в виде

$$\tilde{\eta}(\nu, y) = \sup_{\substack{z, y \in Y \\ z \geq y}} \nu(z) \qquad (12)$$

$$\tilde{\eta}(y, \nu) = \sup_{\substack{z, y \in Y \\ y \geq z}} \nu(z) \qquad (13)$$

Пусть нечеткое множество ν имеет вид, показанный на рис. 1.

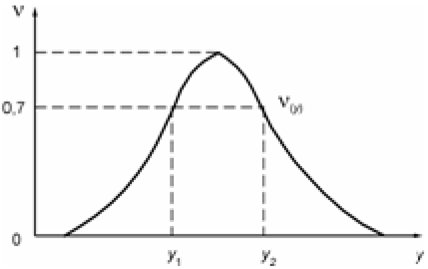


Рис. 1.

Пользуясь выражениями (12), (13), получаем

$$\tilde{\eta}(\nu, y_1) = \tilde{\eta}(y_2, \nu) = 1\ , \ \tilde{\eta}(\nu, y_2) = \tilde{\eta}(y_1, \nu) = 0.7$$

Заметим, что из определений отношений эквивалентности и строгого порядка, получаем:

ν эквивалентно y_1 со степенью 0.7;

ν строго лучше y_1 со степенью 0.3;

ν эквивалентно y_2 со степенью 0.7;

y_2 строго лучше ν со степенью 0.3;

Пример 2. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ – заданное нечеткое множество A в X, которое имеет функцию принадлежности $\mu_A(x)$, задаваемую в табл. 1, а нечеткое отношение R имеет функцию принадлежности $\mu_R(x): X \times Y \longrightarrow [0;1]$ (табл. 2).

Таблица 1					***Таблица 2***					
x	x_1	x_2	x_3		$x \setminus y$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
$\mu_A(x)$	0.3	0.7	1.0		x_1	0.8	1	0	0.3	0.7
					x_2	0.8	0.3	0.8	0.4	0.7
					x_3	0.2	0.3	0.5	0.2	1

Найти образ *B* нечеткого множества *A* в *X*, генерируемый отображением *R* .

Решение. Согласно (3) найдем функцию принадлежности нечеткого множества *B*:

Вычислим сначала $\mu_B(y_1)$. Для этого проведем операцию нахождения min для всех элементов строки $\mu_A(x)$ и столбца y_1 (табл. 2). Это дает

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \end{array}$$

$$[0.3 \quad 0.7 \quad 1] \sqcap \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.8 \\ 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \sqcap 0.8 \\ 0.7 \sqcap 0.8 \\ 1 \sqcap 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.7 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

После выполнения операции max на элементах полученного столбца получим: $\max\{0.3, 0.7, 0.2\} = 0.7$ Таким образом, $\mu_B(y_1) = 0.7$. Проделав аналогичные операции со строкой и всеми столбцами y_1, y_2, y_3, y_4 табл. 2, получим:

$$\mu_B(y_2) = 0.3\ ;\ \mu_B(y_3) = 0.7\ ;\ \mu_B(y_4) = 0.4\ ;\ \mu_B(y_5) = 1$$

Рассмотрим некоторые свойства введенного нами обобщенного нечеткого отношения предпочтения η, которые определяются свойствами исходного отношения μ_R и классом нечетких множеств, на котором оно рассматривается.

Теорема 1. *Если н.о.п.* μ_R *на Y рефлексивно, то и индуцированное им н.о.п.* η *тоже рефлексивно на классе всех нормальных нечетких подмножеств множества Y.*

Доказательство. Если $\nu \in Y$ нормально, т.е. $\sup\limits_{y \in Y} \nu(y) = 1$ то из (10) получим

$$\eta(\nu, \nu) = \sup_{z, y \in Y} \min\{\nu(y), \nu(z), \mu_R(y, z)\} \geq \sup_{y \in Y} \min\{\nu(y), \nu(y)\} =$$

$$= \sup_{y} \nu(y) = 1 \qquad (14)$$

поскольку $\eta(\nu, \nu) \leq 1$ при любом $\nu \in Y$, то отсюда заключаем, что $\eta(\nu, \nu) = 1$. Теорема доказана. В следующих теоремах рассматривается вопрос линейности н.о.п.

Теорема 2. *Если н.о.п.* μ_R *на Y* λ *- сильно линейно, то и индуцированное им н.о.п.* η *также сильно линейно на классе всех нормальных нечетких подмножеств множества Y.*

Теорема 3. *Если н.о.п.* μ_R *на Y* λ *- линейно, то и индуцированное им н.о.п.* η *также линейно на классе всех нормальных нечетких подмножеств множества Y , обладающих свойством* $\sup \nu(y) > \lambda$.

Таким образом, свойство линейности исходного н.о.п. μ_R переносится на индуцированное им обобщенное н.о.п. η

Пример 3. Универсальное множество *X* непрерывно. Пусть $X=R^+$, а нечеткое множество *A* в *X* задано в виде $A = \{x : \mu_A(x) = e^{-k_1 x}, k_1 > 0\}$. Нечеткое отношение $R: X \times Y \longrightarrow [0,1]$ имеет функцию принадлежности $\mu_R(x, y) = e^{-k_2|x-y|}, k_2 > 0$, при $k_2 > k_1$ (функции $\mu_A(x)$ и $\mu_R(x, y)$ приведены на рис. 2,*а*, 2,*б*). Требуется найти образ *B* в *Y*, генерируемый нечетким отношением *R* .

Решение. Согласно (7) $\mu_B(y) = \sup\limits_{x \in X} \min\{\mu_A(x), \mu_R(x, y)\}$.

Определим минимум по x для $\mu_A(x)$ и $\mu_R(x, y)$.

Эти две кривые пересекаются в двух точках:

а) условие $0 \le x \le y : e^{-k_1 x} = e^{-k_2(y-x)}$ дает точку $x_1 = \dfrac{k_2}{k_1 + k_2} y$

б) условие $x > y;\ e^{-k_1 x} = e^{-k_2(x-y)}$ дает точку $x_2 = \dfrac{k_2}{k_1 - k_2} y$

На рис. 2,*в*. сплошной линией выделена кривая $\mu_B(x,y) = \mu_A(x) \cap \mu_R(x,y)$, максимум которой достигается при $x = \dfrac{k_2}{k_1 + k_2} y$. Таким образом, $\mu_B(y) = e^{-\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} y}$.

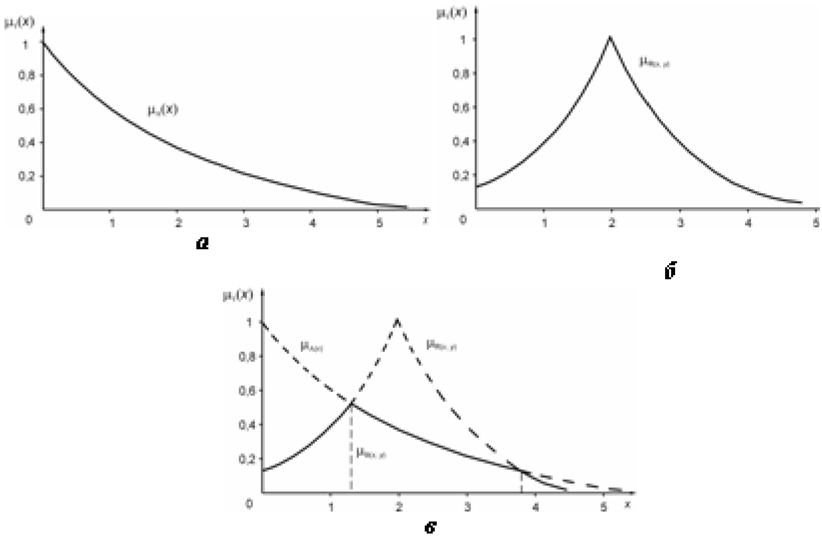


Рис. 2

Пример 4. Пусть нечеткое множество ν на $Y = R^{+} = (0, \infty)$ задано функцией принадлежности $\nu(z) = e^{-k_1|z-5|}$, где $z \in Y, k_1 > 0$ и задано на

$Y\times Y$ четкое отношение порядка $\varphi(x,y)=x\ge y$, где $x,y\in Y$. Найти образ *B* множества ν в *Y*, генерируемый отношением $\varphi(x,y)$.

Решение.

$$\eta(\nu,y)=\sup_{\substack{x\ge y\\ x\in Y}}\{\nu(x)\}$$

Рассмотрим два интервала: $0\le y\le 0 5; y>5$

а) для $0\le y\le 5$:

$$\sup_{x\ge y}\{e^{-k_1|x-5|}\}=1$$

при $x=5$

б) для $y>5$

$$\sup_{x\ge y}\{e^{-k_1|x-5|}\}=e^{-k_1(y-5)},$$

т.е. достигает максимума при $x=y$

Итак,

$$\eta(\nu,y)=\begin{cases}1, & при\quad 0\le y\le 5\\ e^{-k_1(y-5)}, & при\quad y>5\end{cases}$$

Пример 5. Пусть заданы два нечетких множества ν_1 и ν_2 на $Y=R^+$ с функциями принадлежности $\nu_1(y)=e^{-k_1y}, k_1>0$ и $\nu_2(x)=e^{-k_2(x-5)}$, где $k_1>0, k_2>k_1$

Пусть $R \subset Y \times Y$ – четкое отношение нестрогого порядка $(z \geq y)$, т.е.

$$\mu_R(z,y)=\begin{cases}1, & при \quad z \geq y\\ 0, & при \quad z < y\end{cases}$$

Найти функцию принадлежности обобщенного нечеткого отношения предпочтения $\eta(\nu_1,\nu_2)$, генерируемого отношением *R* на ν_1, ν_2.

В соответствии с соотношением (10)

$$\eta(\nu_2,\nu_1)=\sup_{z,y\in Y}\min\{\nu_1(y),\nu_2(z),\mu_R(z,y)\}=\sup_{\substack{z,y\in Y\\ z\geq y}}\{\nu_1(y),\nu_2(z)\}$$

Рассмотрим кривые $\eta_1(y),\eta_2(y)$ (рис. 3) и найдем точки их пересечения.

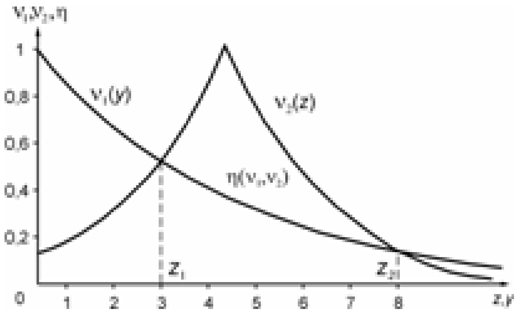


Рис. 3

Имеем $k_1 y = k_2(z-5)$. Найдем левую точку пересечения $(z < 5)$:

$k_1 y = k_2(5-z)$

или

$$k_1 y = 5k_2 - k_2 z; z = \frac{-k_1 y + 5k_2}{k_2}$$

Точка пересечения кривых определяется при $y = z_1 = \frac{Sk_2}{k_1 + k_2}$.

а) Итак, на интервале $0 < y < \frac{Sk_2}{k_1 + k_2}$

$$\eta(\nu_2, \nu_1) = e^{\frac{-Sk_1k_2}{k_1+k_2}};$$

б) на интервале $\frac{Sk_2}{k_1 + k_2} < y < z_2 = \frac{Sk_2}{k_1}$, где – z_2 вторая(правая) точка пересечения кривых $\eta_1(y)$ и $\eta_2(z)$ $\eta(\nu_2, \nu_1) = e^{-k_2 y}$;

в) на интервале $y > z_2 = \frac{Sk_2}{k_1}$.

$$\eta(\nu_2, \nu_1) = e^{-k_2(y - z_2)}$$

Недоминируемые альтернативы в общей задаче нечеткого математического программирования.

Рассмотрим в общем виде задачу нечеткого математического программирования и сведем ее к задаче принятия решений при нечетком отношении предпочтения

Формально задача НМП формулируется следующим образом.

Пусть X – универсальное множество альтернатив и $\mu_A : X \longrightarrow [0;1]$

Задано нечеткое подмножество допустимых альтернатив. Пусть Y - универсальное множество оценок результатов альтернатив из множества X и $\mu_R : X \times Y \longrightarrow [0;1]$ заданное на множестве Y н.о.п. Выборы альтернатив оцениваются нечеткими значениями заданной нечеткой функции цели $\varphi(x, y) : X \times Y \longrightarrow [0;1]$

Задача заключается в рациональном выборе альтернатив на основе информации, заданной в описанной выше форме. При анализе этой задачи будем считать для простоты, что множество допустимых альтернатив *X* описано четко.

Построим на множестве *X* н.о.п. индуцированное исходным н.о.п. μ_R и нечеткой функцией цели φ, а затем выделим в нем подмножество недоминируемых альтернатив.

Любой альтернативе x_0 заданная функция φ ставит в соответствие нечеткую оценку этой альтернативы в виде нечеткого подмножества оценок $\varphi(x, y)$ на *Y*.

Пусть $\tilde{\eta}$ – н.о.п., индуцированное исходным отношением н.о.п. на классе Y всех нечетких подмножеств множества *Y*.

Пользуясь этим отношением, можно сравнивать по отношению предпочтения нечеткие оценки альтернатив, а следовательно, и сами эти альтернативы. Иными словами, степенью предпочтения альтернативы $x_1 \in X$ альтернативе будем $x_2 \in X$ считать степень предпочтения нечеткой оценки $\varphi(x_1, y)$ нечеткой оценке $\varphi(x_2, y)$, т.е. положим

$$\eta(x_1, x_2) = \tilde{\eta}(\varphi(x_1, z) : \varphi(x_2, y)), \qquad (15)$$

где $\varphi(x_1, z)$, $\varphi(x_2, y)$ — соответствующие x_1 и x_2 нечеткие подмножества оценок.

Таким образом, используя определение η получаем н.о.п. на множестве альтернатив следующего вида

$$\eta(\nu_1, \nu_2) = \sup_{z, y \in Y} \min\{\varphi(x_1, z), \varphi(x_2, y), \mu_R(z, y)\}. \qquad (16)$$

Заметим, что в аналогичной задаче с четко описанной ц.ф. $f : X \longrightarrow Y$ определение (15) сводится к обычному (четкому) отношению предпочтения $x_1 \geq x_2 \longleftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Действительно, в этом случае

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad f(x) = y; \\ 0, & \text{в противном случае}; \end{cases}$$

$$\varphi(z, y) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad z \geq y; \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Тогда равенство (15) будет иметь вид

$$\eta(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad f(x_1) \geq f(x_2), \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Можно убедиться в том, что если функция φ нормальная ($\sup\limits_{y \in Y} \varphi(x, y) = 1, \forall x \in X$), то н.о.п. рефлексивно, т.е., $\eta(x_1, x) = 1, \forall x \in X$.

Выделим в множестве *X* с н.о.п. η нечеткое подмножество недоминируемых альтернатив. Согласно определению $X_{нд}$ оно задается так

$$\eta^{нд}(x) = 1 - \sup_{x' \in X}(\eta(x', x), - \eta(x, x')) \qquad (17)$$

Окуда с учетом (15) получаем

$$\tilde{\eta}_{нд}(x) = \sup_{x' \in X}[\sup_{z, y \in Y} \min\{\varphi(x', z), \varphi(x\ , y), \mu_R(z, y)\} - \sup_{z, y \in Y} \min\{\varphi(x, z), \varphi(x\ , y), \mu_R(y, z)\}]. \qquad (18)$$

Рассмотрим более простую, но практически важную задачу, когда множество оценок Y – числовая ось. Тогда выражение (15) принимает вид

$$\eta(x_1, x_2) = \sup_{\substack{z,y \in Y \\ z \geq y}} \min\{\varphi(x_1, z), \varphi(x_2, y)\}, \qquad (19)$$

а решением соответствующей задачи НМП является нечеткое подмножество недоминируемых альтернатив вида

$$\eta^{нд}(x) = 1 - \sup_{x \in X}[\sup_{z \geq y} \min\{\varphi(x', z), \varphi(x\ \ , y)\} -$$
$$\sup_{z \geq y} \min\{\varphi(x, z), \varphi(x', y)\}]. \qquad (20)$$

Величина $\eta^{нд}(x)$ есть степень недоминируемости альтернативы *x*. Если $\eta^{нд}(x) \geq \alpha$, то в множестве *X* нет ни одной альтернативы, которая бы доминировала альтернативу *x* со степенью, большей, чем 1-α. Покажем, что для нахождения альтернативы, не доминируемой со степенью, не меньшей, чем *α*, достаточно решить следующую задачу НМП

$$y \longrightarrow \max \qquad (21)$$

при ограничениях

$$\varphi(x, y) \geq \alpha; x \in X; y \in Y.$$

Теорема 4. *Пусть нечеткая целевая функция* $\varphi : X \times X \longrightarrow [0;1]$ *такова, что* $\sup_y \varphi(x, y) \geq \alpha$ *при любом* $x \in X$ *и пусть* η *- н.о.п. на X, индуцированное отношением нестрогого порядка* $(\geq)$ *на числовой оси Y и функцией* φ. *Если* (x^0, y^0) *– решение задачи (21), то* $\eta^{нд}(x^0) \geq \alpha$, *где* $\eta^{Nd}(x)$ *– нечеткое подмножество недоминируемых альтернатив во множестве* (X, η).

Доказательство. Пусть пара $(x^0, y^0) \in X \times Y$ – решение задачи (9.5.21). Тогда, как следует из (20), для доказательства теоремы 4. достаточно показать, что

$$\sup_{x' \in X}[\sup_{z \geq y}\min\{\varphi(x', z), \varphi(x^0, y)\} - \sup_{z \geq y}\min\{\varphi(x^0, z), \varphi(x', y)\}] \leq 1 - \alpha$$

Допустим противное, т.е., найдутся $\bar{x} \in X$ и ε>0 такие, для которых

$$[\sup_{z \geq y}\min\{\varphi(\bar{x}, z), \varphi(x^0, y)\} - \sup_{z \geq y}\min\{\varphi(x^0, z), \varphi(\bar{x}, y)\}] \geq 1 - \alpha + \varepsilon \tag{22}$$

Выберем $\bar{y} \in Y$ так, что $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) > \alpha - \varepsilon$ (существование такого $\bar{y}$ следует из предположений о функции $\varphi(x, y)$ в условиях теоремы 4).

Поскольку пара (x^0, y^0) – решение задачи (21), то $y^0 > \bar{y}$ и, кроме того $\varphi(x^0, y^0) \geq \alpha$. Отсюда $\sup_{z \geq y}\min\{\varphi(x^0, z), \varphi(x, y)\} > \alpha - \varepsilon$, но тогда неравенство (22) невозможно, так как левое слагаемое в левой части (22) не может превышать 1.

Из доказанной теоремы вытекает, что любые условия, достаточные для решения задачи (21), достаточны и для существования соответствующих недоминируемых альтернатив в множестве. В частности, справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Если множества X и Y компактны, причем Y - подмножество числовой оси, функция* $\varphi : X \times Y \longrightarrow [0;1]$ *полунепрерывна на произведении* $X \times Y, \sup \varphi(x, y) \geq \alpha$ *при любом*

$x \in X$ *и* η *н.о.п. на X, индуцированное отношением порядка* ($\geq$) *на Y и функцией* φ*, то во множестве* (x, η) *имеется, по крайней мере, одна альтернатива x, для которой* $\eta^{N\partial}(x) \geq \alpha$.

2.13. Некоторые свойства отношений подобия и сходства

Теорема декомпозиции для отношения подобия. Пусть $\tilde{R}$ — отношение подобия в E × E. Тогда $\tilde{R}$ можно разложить так:

$$\tilde{R} = \bigvee_{\alpha} \alpha \bullet R_{\alpha},\ 0<\alpha\leq 1, \tag{1}$$

при

$$\alpha_1 > \alpha_2 \Rightarrow R_2 \supset R_1$$

где R_{α} — отношение эквивалентности в смысле обычной теории множеств и $\alpha \bullet R_{\alpha}$ обозначает, что все элементы обычного отношения R_{α} умножаются на α .

Доказательство. Во-первых, $\mu_{\tilde{R}}(x,\ x)=1$, откуда следует, что $(x,\ x)\in R_{\alpha}$ при $\alpha\in[0,1]$; следовательно, R_{α} обладает свойством рефлексивности.

Во-вторых, положив $(x, y)\in R_{\alpha}$, $\alpha\in[0,1]$, получим, что $\mu_{\tilde{R}}(x, y)\geq\alpha$ и в силу симметрии R_{α}: $\mu_{\tilde{R}}(y,\ x)\geq\alpha$. Следовательно, R_{α} обладает свойством симметрии.

В-третьих, для всех $\alpha\in[0,1]$ предположим, что $(x,\ y)\in R_{\alpha}$ и $(y,\ z)\in R_{\alpha}$; тогда $\mu_{\tilde{R}}(y,\ x)\geq\alpha$ и $\mu_{\tilde{R}}(y,\ z)\geq\alpha$; следовательно, по транзитивности $\mu_{\tilde{R}}(x, z) \geq \alpha$ и R_{α} транзитивно.

Поскольку R_{α} рефлексивно, симметрично и транзитивно, то R_{α} — отношение эквивалентности. Справедлива и обратная теорема.

Обратная теорема. Если R_1 не пусто, $(x, x)\in R_1$ и

$$\mu_{\tilde{R}}(x,x)=1,\ \forall x\in E, \tag{2}$$

тогда $\tilde{R}$ — рефлексивное нечеткое отношение.

С другой стороны, можно записать

$$\forall (x,y) \in E\times E:\ \mu_{\tilde{R}}(x, y) = \bigvee_{\alpha} \alpha \bullet \mu_{R_{\alpha}}(x, y). \tag{3}$$

Очевидно, что из симметричности каждого R_α следует симметрия $\tilde{R}$. Наконец, пусть

$$\mu_{\tilde{R}}\ (x, y) = \alpha \text{ и } \mu_{\tilde{R}}\ (y, z) = \beta.$$

Тогда

$$(x, y) \in R_{\alpha\beta} \text{ и } (y, z) \in R_{\alpha\beta}.$$

Как следствие получаем

$$(x, z) \in R_{\alpha\beta}.$$

поскольку $R_{\alpha\beta}$ транзитивно.

Следовательно,

$$\forall\, x, y, z \in \mathrm{E}:\ \mu_{\tilde{R}}\ (x, z) \geq \alpha \wedge \beta$$

и

$$\mu_{\tilde{R}}\ (x, z) \geq \bigvee_{y} (\mu_{\tilde{R}}\ (x, y) \wedge \mu_{\tilde{R}}\ (y, z)),$$

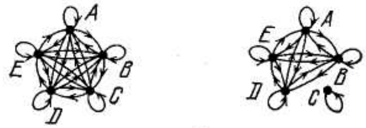
что вместе с (2) и (3) доказывает транзитивность R.

Эта обратная теорема позволяет синтезировать отношение подобия, в то время как прямая теорема позволяет проводить анализ.

Замечание. Как следует из этой теоремы, обычное отношение, ближайшее к отношению подобия, есть отношение эквивалентности. Это становится очевидным, если рассмотреть, что представляет собой R_α, когда $\alpha > 0{,}5$.

Примеры. Посмотрим, как проводится анализ отношения, которое представлено на рис. 49. Декомпозиция этого отношения показана на рис. 1.

$$\begin{array}{c|ccccc} \tilde{R} & A & B & C & D & E\\ \hline A & 1 & 0{,}8 & 0{,}7 & 1 & 0{,}9\\ B & 0{,}8 & 1 & 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}8\\ C & 0{,}7 & 0{,}7 & 1 & 0{,}7 & 0{,}7\\ D & 1 & 0{,}8 & 0{,}7 & 1 & 0{,}9\\ E & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}9 & 1 \end{array} = \vee\left((0{,}7).\underset{R_{0,7}}{\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}}, (0{,}8).\underset{R_{0,8}}{\begin{bmatrix}1&1&0&1&1\\1&1&0&1&1\\0&0&1&0&0\\1&1&0&1&1\\1&1&0&1&1\end{bmatrix}}, \right.$$



$$\left. (0{,}9).\underset{R_{0,9}}{\begin{bmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&0&0&1&1\\1&0&0&1&1\end{bmatrix}}, (1).\underset{R_{1}}{\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}} \right)$$

Рис. 1.

Рассмотрим пример синтеза. Пусть четыре отношения эквивалентности последовательно содержат друг друга (рис. 2).

$R_{0,2}$	A	B	C	D
A	1	1	1	1
B	1	1	1	1
C	1	1	1	1
D	1	1	1	1

а

$R_{0,6}$	A	B	C	D
A	1	1	0	0
B	1	1	0	0
C	0	0	1	1
D	0	0	1	1

б

$R_{0,8}$	A	B	C	D
A	1	1	0	0
B	1	1	0	0
C	0	0	1	0
D	0	0	0	1

в

R_{1}	A	B	C	D
A	1	0	0	0
B	0	1	0	0
C	0	0	1	0
D	0	0	0	1

г

Рис. 2.

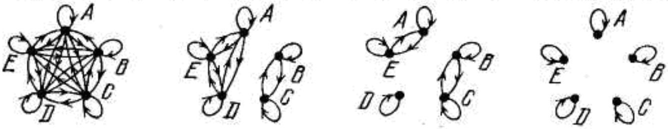
Тогда имеем $\tilde{R} = \vee\ (0{,}2{\cdot}R_{0,2};\ 0{,}6{\cdot}R_{0,6};\ 0{,}8{\cdot}R_{0,8};\ 1{\cdot}R_1)$.
Результат показан на рис. 3.

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	A	B	C	D
A	1	0,8	0,2	0,2
B	0,8	1	0,2	0,2
C	0,2	0,2	1	0,6
D	0,2	0,2	0,6	1

Рис. 3.

Другой пример приведен на рис. 4, где предполагается, что a и $b \in [0,1]$ при $a < b$.

$$V\left(0.\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}, a.\begin{bmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&1&0&0\\0&1&1&0&0\\1&0&0&1&1\\1&0&0&1&1\end{bmatrix}, b.\begin{bmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&1&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&1\end{bmatrix}, 1.\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\right)$$



$$= \begin{array}{c|ccccc} & A & B & C & D & E \\ \hline A & 1 & 0 & 0 & a & b \\ B & 0 & 1 & b & 0 & 0 \\ C & 0 & b & 1 & 0 & 0 \\ D & a & 0 & 0 & 1 & a \\ E & b & 0 & 0 & a & 1 \end{array}$$

Рис. 4.

Транзитивные графы расстояний. Для каждого отношения подобия рассмотрим транзитивные графы, которые отвечают (min — max)-м расстояниям. Несколько примеров послужат наглядной иллюстрацией к этому замечанию.

Пример 1. На рис. 5 показано отношение различия.

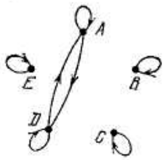
$\tilde{R}$	A	B	C	D	E
A	0	0,2	0,8	0	0,1
B	0,2	0	0,8	0,2	0,2
C	0,8	0,8	0	0,8	0,8
D	0	0,2	0,8	0	0,1
E	0,1	0,2	0,8	0,1	0

Рис. 5.

На рис. 6 представленны транзитивные графы, соответствующие разным расстояниям.

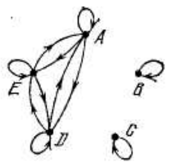
Расстояния равны 0:

	A	B	C	D	E
A	1	0	0	1	0
B	0	1	0	0	0
C	0	0	1	0	0
D	1	0	0	1	0
E	0	0	0	0	1



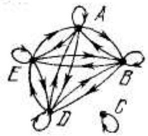
Расстояния меньше или равны 0,1:

	A	B	C	D	E
A	1	0	0	1	1
B	0	1	0	0	0
C	0	0	1	0	0
D	1	0	0	1	1
E	1	0	0	1	1



Расстояния меньше или равны 0,2:

	A	B	C	D	E
A	1	1	0	1	1
B	1	1	0	1	1
C	0	0	1	0	0
D	1	1	0	1	1
E	1	1	0	1	1



Расстояния меньше или равны 0,8:

	A	B	C	D	E
A	1	1	1	1	1
B	1	1	1	1	1
C	1	1	1	1	1
D	1	1	1	1	1
E	1	1	1	1	1

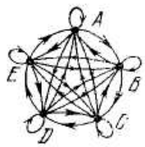


Рис. 6.

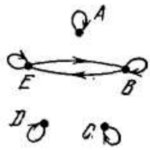
Пример 2 (рис. 7 и 8). Этот пример - на транзитивное замыкание (рис. 71) отношения сходства (рис.70).

$\bar{\hat{\underset{\sim}{R}}}$	A	B	C	D	E
A	0	0,4	0,2	0,3	0,4
B	0,4	0	0,4	0,4	0
C	0,2	0,4	0	0,3	0,4
D	0,3	0,4	0,3	0	0,4
E	0,4	0	0,4	0,4	0

Рис. 7.

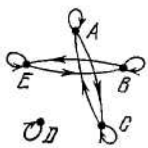
Расстояния равны 0:

	A	B	C	D	E
A	1	0	0	0	0
B	0	1	0	0	1
C	0	0	1	0	0
D	0	0	0	1	0
E	0	1	0	0	1



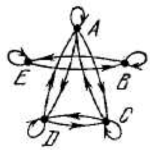
Расстояния меньше или равны 0,2:

	A	B	C	D	E
A	1	0	1	0	0
B	0	1	0	0	1
C	1	0	1	0	0
D	0	0	0	1	0
E	0	1	0	0	1



Расстояния меньше или равны 0,3:

	A	B	C	D	E
A	1	0	1	1	0
B	0	1	0	0	1
C	1	0	1	1	0
D	1	0	1	1	0
E	0	1	0	0	1



Расстояния меньше или равны 0,4:

	A	B	C	D	E
A	1	1	1	1	1
B	1	1	1	1	1
C	1	1	1	1	1
D	1	1	1	1	1
E	1	1	1	1	1

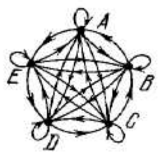


Рис. 8.

Полученное здесь разложение мы сравним с тем, которое получится в следующем примере (рис. 9 и 10).

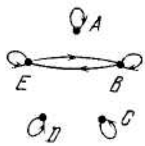
Пример 3 (рис. 9 и 10).

$\hat{\underset{\sim}{R}}$	A	B	C	D	E
A	0	0,664	0,2	0,44	0,664
B	0,664	0	0,58	0,4	0
C	0,2	0,58	0	0,3	0,58
D	0,44	0,4	0,3	0	0,4
E	0,664	0	0,58	0,4	0

Рис. 9.

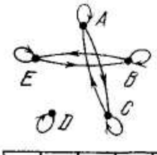
Расстояния равны 0:

1	0	0	0	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	1	0	0	1



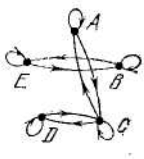
Расстояния меньше или равны 0,2:

1	0	1	0	0
0	1	0	0	1
1	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	1	0	0	1



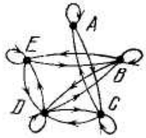
Расстояния меньше или равны 0,3:

1	0	1	0	0
0	1	0	0	1
1	0	1	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1



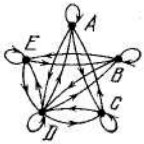
Расстояния меньше или равны 0,4:

1	0	1	0	0
0	1	0	1	1
1	0	1	1	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	1



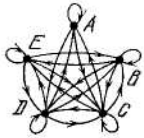
Расстояния меньше или равны 0,44:

1	0	1	1	0
0	1	0	1	1
1	0	1	1	0
1	1	1	1	1
0	1	0	1	1



Расстояния меньше или равны 0,58:

1	0	1	1	0
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
0	1	1	1	1



Расстояния меньше или равны 0,664:

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

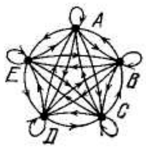


Рис. 10.

(Max— $\cdot$)-транзитивное замыкание отношения сходства на рис. 70 было представлено на рис. 75. Для этого на рис. 76 выписали матрицу (max — sum)-расстояний. В этом примере при декомпозиции на обычные графы расстояний появятся нетранзитивные графы. Использование (max — $\cdot$)-транзитивного замыкания в отношении сходства менее удобно по сравнению с использованием (max — min) транзитивного замыкания.

Декомпозиционное дерево. Если внимательно изучить рис. 1, то можно заметить, что по мере того, как α последовательно принимает значения 0,7; 0,8; 0,9 и 1, разбиение E на классы эквивалентности включает все больше и больше частей. Это разложение было проведено по древовидной схеме (рис. 11).

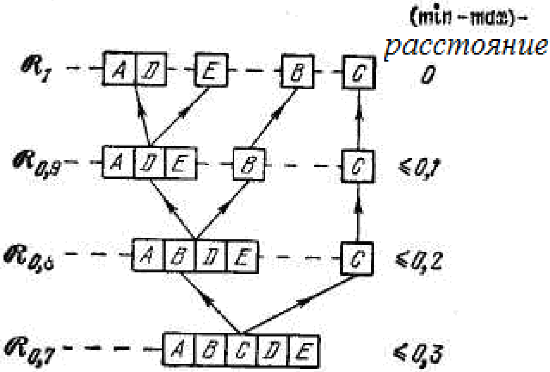


Рис. 11.

Такая схема называется *декомпозиционным деревом.*

Другой пример разложения для данных рис. 4 приведено на рис. 12.

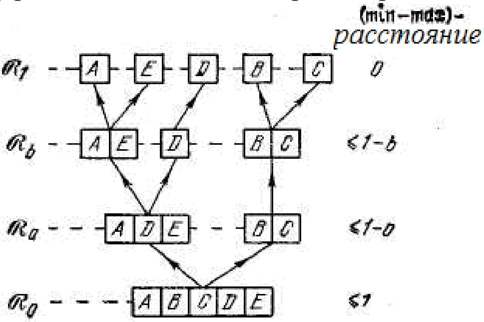


Рис. 12.

Можно проверить, что два элемента *x* и *y,* которые принадлежат E, должны принадлежать одному и тому же классу α-уровня, если и только если

$$\mu_R\ (x,y) \geq \alpha.$$

Это декомпозиционное дерево хорошо отражает структуру отношения подобия или группировки элементов, которые построены с использованием их транзитивных расстояний от других элементов.

Деревья можно представлять разными способами. Используя лингвистические обозначения, дерево на рис. 11 можно записать в следующем виде:

0,7 (0,8 (0,9(1 {A, D}, 1{E}), 0,9(1 {B})), 0,8(0,9 (1{C}))).

Такое использование круглых скобок не слишком удобно.

Можно также использовать польское обозначение, собирая вершины в «кучи».

Дерево на рис. 11 будет тогда записано в виде такой последовательности:

0,7 (ABCDE) 0,8 (ABDE) 0,9 (ADE) 1 (AD), 0,9 (ADE) 1 (E) 0,9 (ADE), 0,8(ABDE) 0,9 (B) 1 (B) 0,9 (B) 0,8 (ABDE) 0,7 (ABCDE) 0,8 (C) 0,9 (C) 1 (C) 0,9 (C) 0,8 (C) 0,7 (ABCDE).

Выбор транзитивно ближайших сообщений. Нечеткое подмножество можно рассматривать как *сообщение,* которое вместо того, чтобы быть бинарным, оказалось нечетким.

Рассмотрим обычное множество F нечетких подмножеств $\tilde{A}_i$ принадлежащих одному и тому же универсальному множеству E:

$$F=\{ \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots , \tilde{A}_n\}.$$

Мы хотим определить, какие из нечетких подмножеств или нечетких сообщений окажутся транзитивно ближайшими. Немного позднее уточним неудобства понятия транзитивности, которое здесь будем рассматривать, при этом преимущества выявятся сразу.

Будем действовать следующим образом (и попутно объяснять, что понимается под «транзитивно ближайшим»).

1. Для каждой пары ($\tilde{A}_i$, $\tilde{A}_j$), $i, j = 1, 2, \dots, n,$ подсчитаем относительное обобщенное расстояние Хемминга (или относительное евклидово расстояние $\varepsilon(A_i,A_j)$ в зависимости от характера проблемы или даже какое-нибудь другое расстояние) $\delta(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j)$, что дает отношение несходства $\tilde{L}$.

2. Вычисляем (min — max)-транзитивное замыкание [определеное в (105)]. Полученное отношение $\hat{\tilde{L}}$ дает (min — max)-транзитивное расстояние

$$\hat{\delta}(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) = 0.$$

3. Затем раскладываем $\hat{\tilde{L}}$ согласно (1) и получаем следующие обычные подмножества F:

транзитивно ближайшие сообщения, для которых

$$\hat{\delta}(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) = 0;$$

транзитивно ближайшие сообщения, для которых

$$0<\delta(\tilde{A}_i,\ \tilde{A}_j)=\alpha_1<\alpha_2<\ldots;$$

транзитивно ближайшие сообщения, для которых

$$0<\alpha_1<\delta(\tilde{A}_i,\ \tilde{A}_j)=\alpha_2<\alpha_3<\ldots;$$

и т.д.

4. Строим соответствующее декомпозиционное дерево.

Пример. Пусть E — конечное универсальное множество с card (E)=7; рассмотрим семь подмножеств или сообщений $\tilde{A}_i$, i = 1,2.....6.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$\tilde{A}_1$ =	0,1	0,8	0,3	1	0,1	0	1
$\tilde{A}_2$ =	0,3	0,8	0,1	1	0	1	0,7
$\tilde{A}_3$ =	0,7	1	0	1	0,8	0,3	0,7
$\tilde{A}_4$ =	0,1	0,8	0,7	0	0,1	1	0,3
$\tilde{A}_5$ =	0,6	1	0	0,7	0,8	0	1
$\tilde{A}_6$ =	0	0,3	0,5	0,1	0,1	0,5	0,8

Теперь подсчитаем относительное обобщенное расстояние Хемминга:

$$\delta(\tilde{A}_u,\ \tilde{A}_j)=\frac{d(\tilde{A}_i,A_j)}{7}.$$

Это дает отношение несходства $\tilde{L}$ (рис. 13, *a*).

$\tilde{\delta}$	$\tilde{A}_1$	$\tilde{A}_2$	$\tilde{A}_3$	$\tilde{A}_4$	$\tilde{A}_5$	$\tilde{A}_6$
$\tilde{A}_1$	0	0,25	0,34	0,44	0,28	0,34
$\tilde{A}_2$	0,25	0	0,31	0,32	0,42	0,40
$\tilde{A}_3$	0,34	0,31	0	0,61	0,14	0,54
$\tilde{A}_4$	0,44	0,32	0,61	0	0,64	0,27
$\tilde{A}_5$	0,28	0,42	0,14	0,64	0	0,54
$\tilde{A}_6$	0,34	0,40	0,54	0,27	0,54	0

а

$\tilde{\delta}$	$\tilde{A}_1$	$\tilde{A}_2$	$\tilde{A}_3$	$\tilde{A}_4$	$\tilde{A}_5$	$\tilde{A}_6$
$\tilde{A}_1$	0	0,25	0,28	0,32	0,28	0,32
$\tilde{A}_2$	0,25	0	0,28	0,32	0,28	0,32
$\tilde{A}_3$	0,28	0,28	0	0,32	0,14	0,32
$\tilde{A}_4$	0,32	0,32	0,32	0	0,32	0,27
$\tilde{A}_5$	0,28	0,28	0,14	0,32	0	0,32
$\tilde{A}_6$	0,32	0,32	0,32	0,27	0,32	0

б

Рис. 13.

Затем с помощью (105) подсчитаем (min — max)-транзитивное замыкание L, которое дает транзитивные расстояния δ (см. рис. 14 и 15).

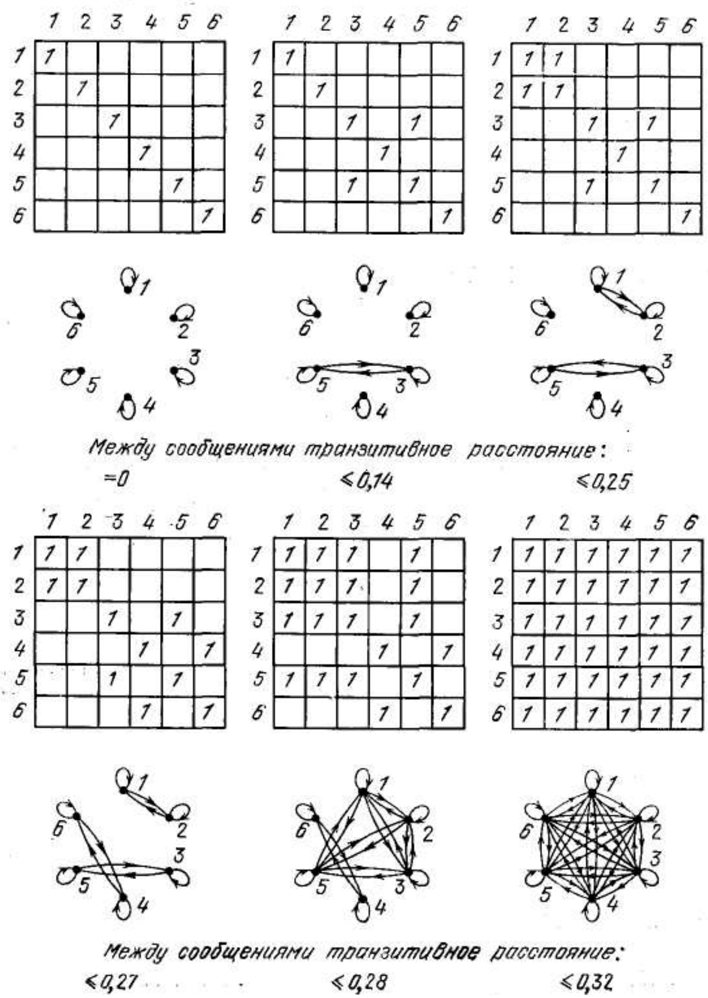

Между сообщениями транзитивное расстояние:
=0
≤0,14
≤0,25
Между сообщениями транзитивное расстояние:
≤0,27
≤0,28
≤0,32

Рис. 14.

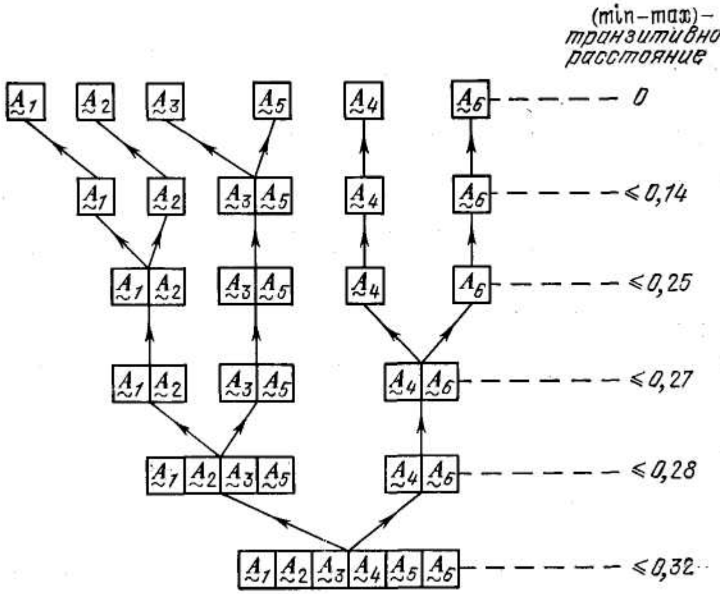


Рис. 15.

Замечание о сущности транзитивного расстояния.

В зависимости от характера решаемой проблемы (min — max)-транзитивное замыкание матрицы расстояний может не иметь значения в практических приложениях. Рассмотрим пример. Имеем следующие четыре сообщения:

$$\underset{\sim}{A}_1 = \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{0} \\ \hline \end{array} \qquad \underset{\sim}{A}_3 = \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{\frac{1}{2}} & \multicolumn{1}{c|}{0} \\ \hline \end{array}$$

$$\underset{\sim}{A}_2 = \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{\frac{1}{2}} \\ \hline \end{array} \qquad \underset{\sim}{A}_4 = \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline \end{array}$$

Относительные обобщенные расстояния Хемминга для этих сообщений приведенные на рис. 16, представляющем матрицу отношения несходства $\overline{\tilde{R}}$.

$\overline{\underset{\sim}{R}}$	$(0,0)$	$(0,\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},0)$	$(0,1)$
$(0,0)$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$(\frac{1}{2},0)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{4}$
$(0,1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0

Рис. 16.

На рис. 17 подсчитано (min — max)-замыкание $\overline{\tilde{R}}$, т.е. $\hat{\overline{\tilde{R}}}$. Теперь видно, что все эти сообщения являются транзитивно равноотстоящими.

$\hat{\overline{\underset{\sim}{R}}}$	$(0,0)$	$(0,\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},0)$	$(0,1)$
$(0,0)$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$(\frac{1}{2},0)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$(0,1)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0

Рис. 17.

Такое понимание (min — max)-транзитивного расстояния может показаться неприемлемым в числовых приложениях. Но относительное обобщенное расстояние Хемминга транзитивно для обычной (min—sum)-операции, т.е.

$$\delta\,(x, z)\leq \underset{в}{\mathrm{MIN}}\,[\delta\,(x, y) + \delta(y, z)], \qquad (4)$$

а так как $\delta\,(x, z)$ — это расстояние, то

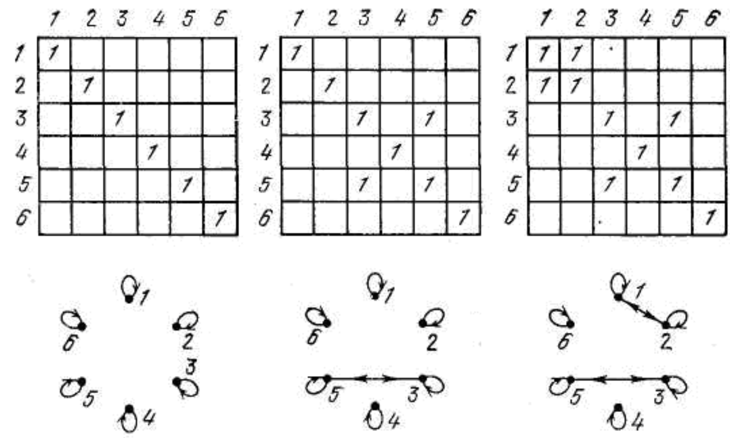
$$\forall\, y{:}\,\delta\,(x, z)\leq \delta\,(x, y) + \delta(y, z).$$

К тем же выводам приводит рассмотрение относительного евклидова расстояния.

Таким образом, каждое отношение $\widetilde{L}$, которое задает относительное обобщенное расстояние Хемминга (или относительное евклидово расстояние), есть отношение, которое совпадает со своим собственным обычным (min — sum)-транзитивным замыканием. Заметим, что правая часть (4) может принять значение больше 1, так как здесь выполняется обычное сложение, но это ничего не меняет, поскольку член слева по построению всегда принадлежит [0,1].

Как будет показано ниже, разложение по уровням относительно значений, которые содержатся в отношении несходства, дальше будет давать не классы эквивалентности, а максимальные подотношения.

Обычное (min—sum)-различие. Декомпозиция на максимальные подотношения. Отношение (4) можно рассматривать как отношение различия, которое можно назвать обычным (min — sum)-различием.



{1}, {2}, {3}
{4}, {5}, {6}
Расстояние =0

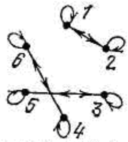
{1}, {2}, {3,5}
{4}, {6}
Расстояние ≤ 0,14

{1,2}, {3,5}
{4}, {6}
Расстояние ≤ 0,25

	1	2	3	4	5	6
1	1	1				
2	1	1				
3			1		1	
4				1		1
5			1		1	
6				1		1

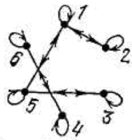
	1	2	3	4	5	6
1	1	1			1	
2	1	1				
3			1		1	
4				1		1
5	1		1		1	
6				1		1

	1	2	3	4	5	6
1	1	1			1	
2	1	1	1			
3		1	1		1	
4				1		1
5	1		1		1	
6				1		1



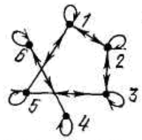
{1,2},{3,5},{4,6}

Відстань ⩽ 0,27



{1,2},{1,5},{3,5}
{4,6}

Відстань ⩽ 0,28



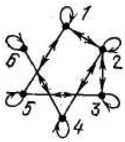
{1,2},{1,5},{2,3}
{3,5},{4,6}

Відстань ⩽ 0,31

	1	2	3	4	5	6
1	1	1			1	
2	1	1	1	1		
3		1	1		1	
4		1		1		1
5	1		1		1	
6				1		1

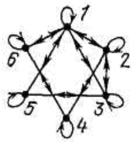
	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1		1	1
2	1	1	1	1		
3	1	1	1		1	
4		1		1		1
5	1		1		1	
6	1			1		1

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1		1	1
2	1	1	1	1		1
3	1	1	1		1	
4		1		1		1
5	1		1		1	
6	1	1		1		1



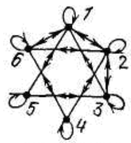
{1,2},{1,5},{2,3},{2,4}
{3,5},{4,6}

Відстань ⩽ 0,32



{1,2,3},{1,3,5},{1,6}
{2,4},{4,6}

Відстань ⩽ 0,34



{1,2,3},{1,2,6},{1,3,5}
{2,4,6}

Відстань ⩽ 0,40

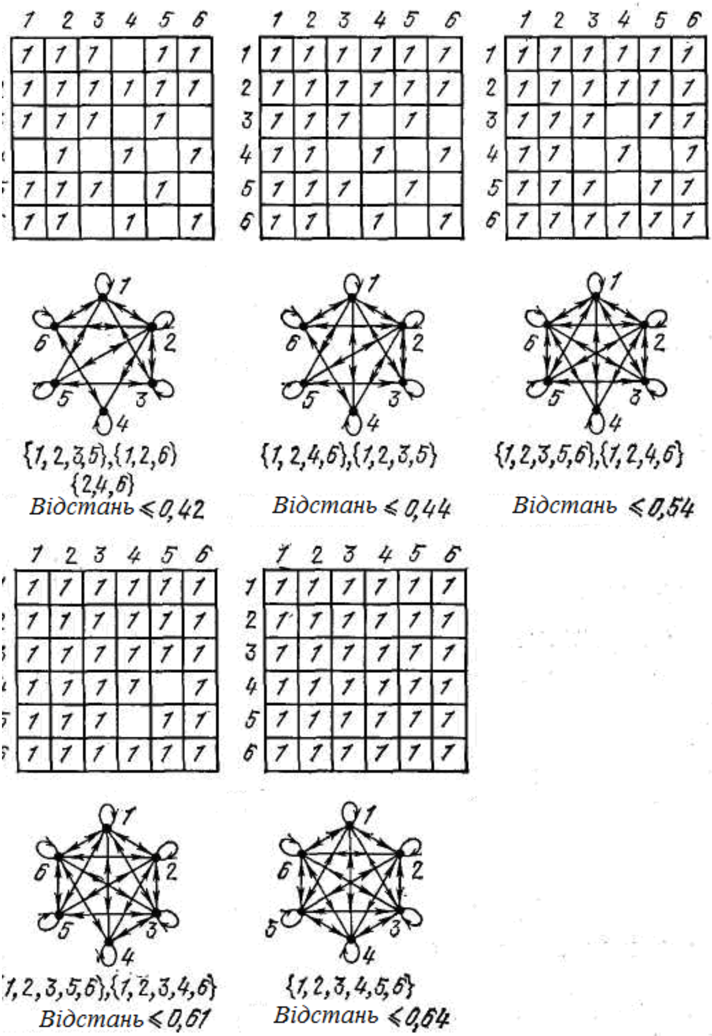
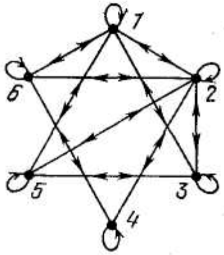


Рис. 18.

Как видно в примере на рис. 18, для расстояний $d \leq k$ (k произвольное) не получаются обычные графы, подграфы которых устанавливают классы эквивалентности. Иногда можно использовать менее строгое понятие, довольно важное при различных операциях — понятие максимальных подотношений, которые могут быть как обычными, так и непересекающимися.

Обратимся к рис. 18 и рассмотрим более подробно обычный симметричный граф, соответствующий $d \leq 0{,}42$. На рис. 19 мы изобразили этот обычный граф и выделили три максимальных подотношения или полных обычных графа, каждый из которых устанавливает отношение эквивалентности.



	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1		1	1
2	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1		1	
4		1		1		1
5	1	1	1		1	
6	1	1		1		1

	1	2	3	5
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
5	1	1	1	1

	1	2	6
1	1	1	1
2	1	1	1
6	1	1	1

	2	4	6
2	1	1	1
4	1	1	1
6	1	1	1

	1	2	3	5
1	0	0,25	0,34	0,28
2	0,25	0	0,31	0,42
3	0,34	0,31	0	0,14
5	0,28	0,42	0,14	0

	1	2	6
1	0	0,25	0,34
2	0,25	0	0,40
6	0,34	0,40	0

	2	4	6
2	0	0,32	0,40
4	0,32	0	0,27
6	0,40	0,27	0

Несодержащиеся друг в друге максимальные подотношения подобия, $d \leq 0{,}42$

Рис. 19

Для каждого из этих подотношений расстояние каждого элемента до другого меньше или равно 0,42 и свойство (4) подтверждается. В общем случае такое разложение нельзя сделать без соответствующего алгоритма.

Замечание. Обычное (min—sum)-различие недвойственно обычному (max —·)-подобию. Двойственным к первому из этих отношений и будет алгебраическое (min—sum)-различие.

Рассмотрим пример, в котором появляются максимальные подотношения.

Пример. Разложим отношение различия, которое задано на рис. 13,*а* (см. декомпозицию на рис. 18).

Наконец, можно также использовать алгебраическую

($a \hat{+} b = a + b — ab$) (min — sum)-транзитивность для того, чтобы получить разложение на максимальные подотношения.

Сравнивая рис. 14 и 18, можно увидеть преимущества и недостатки использования (min — max)-транзитивности, с одной стороны, и (min — sum)-транзитивности — с другой. Первая дает классы эквивалентности, которые появляются последовательно в зависимости от величины α, интерпретация которой очень спорна. Вторая транзитивность дает только максимальные подотношения, в общем случае непересекающиеся; однако ее интерпретация бесспорна, особенно когда речь идет о приложениях в области классификации структур.

2.14. Некоторые свойства нечетких отношений совершенного порядка

Теорема о декомпозициях для нечеткого отношения совершенного порядка. Пусть $\tilde{R}$ есть нечеткое отношение совершенного порядка в E × E. Отношение $\tilde{R}$ можно разложить в виде

$$\tilde{R} = \bigvee_{\alpha} \alpha \cdot R_\alpha, \ 0 < \alpha \le 1, \qquad (1)$$

$$\text{при } \alpha_1 \ge \alpha_2 \Rightarrow R_{\alpha_1} \subset R_{\alpha_2},$$

где R_α — отношение порядка в смысле теории обычных множеств и $\alpha \cdot R_\alpha$ обозначает произведение всех элементов R_α на величину α.

Доказательство. Рефлексивность и транзитивность R_α доказывется так же, как и ранее. Покажем, что свойство совершенной антисимметрии также выполняется.

Чтобы показать, что R_α антисимметрично, сначала заметим, что поскольку $\tilde{R}$ рефлексивно, то определение

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) > 0 \Rightarrow \mu_{\tilde{R}}(y, x) = 0$$

можно заменить

$$(\mu_{\tilde{R}}\ (x, y) > 0 \text{ и } \mu_{\tilde{R}}\ (y, x) > 0) \Rightarrow (x=y).$$

Антисимметричность будем доказывать методом от противного. Предположим, что $(x, y) \in R_\alpha$ и $(y, x) \in R_\alpha$. Тогда $\mu_{\tilde{R}}(x, y) \geq \alpha$ и $\mu_{\tilde{R}}(y, x) \geq \alpha$ и в силу антисимметрии $\tilde{R}$:$x=y$. Теперь, наоборот, предположим, что $\mu_{\tilde{R}}\ (x, y)=\alpha > 0$ и $\mu_{\tilde{R}}\ (y, x) = \beta \geq 0$. Положим $\gamma = \alpha \geq \beta$. Тогда $(x, y) \in R_\gamma$ и $(y, x) \in R_\gamma$ и из антисимметрии R_γ следует, что $x=y$. Значит, при сделанном предположении невозможно получить $x \neq y$.

Пример 1. На рис. 1 представленна декомпозиция нечеткого отношение совершенного порядка.

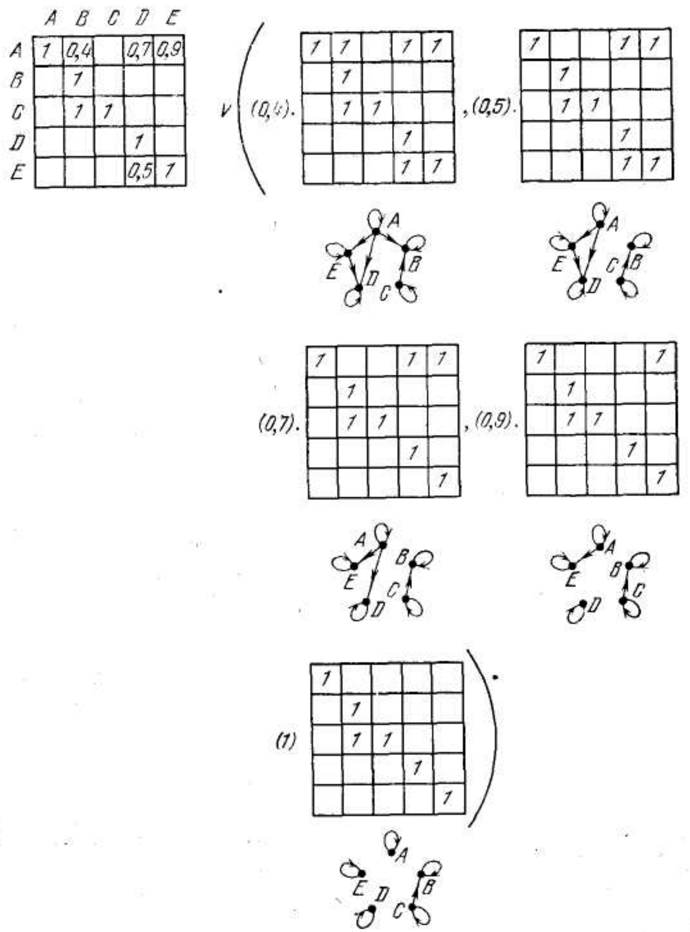


Рис. 1.

Для большей наглядности результатов мы опустили нули. Под каждым R_α расположили эскиз обычного антисимметричного графа.

Пример 2. На рис. 2 показано, как происходит синтез отношения совершенного порядка.

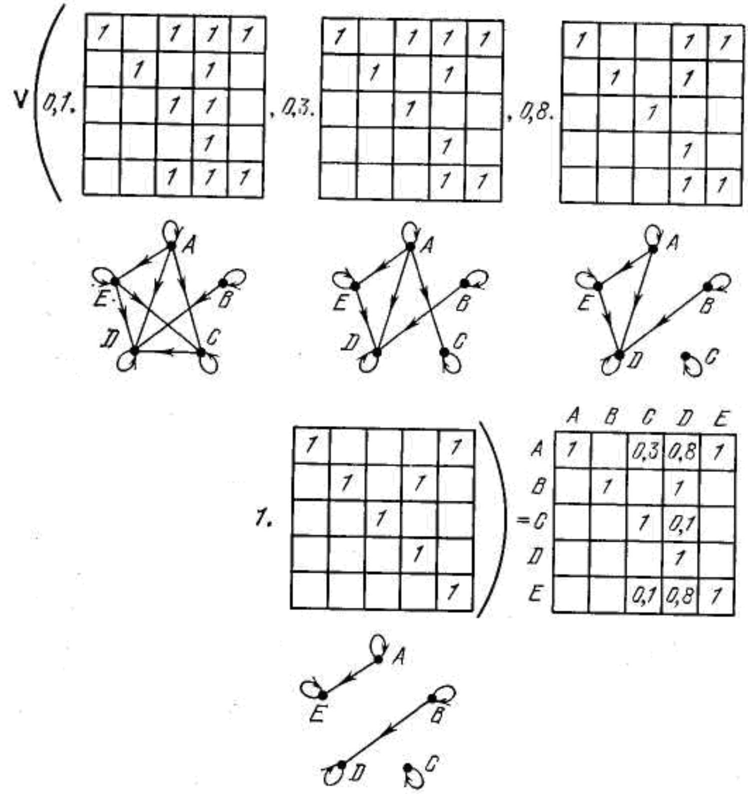


Рис. 2.

Расширение декомпозиционного свойства на случай приводимого предпорядка, классы подобия которого совершенно упорядочены.

Свойства (1) совпадают всегда, когда рассматривается приводимий предпорядок, классы подобия которого устанавливают совершенный порядок.

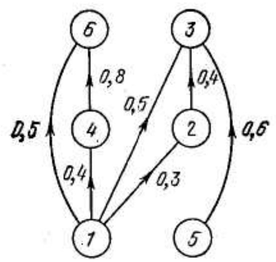
Пример. На рис. 3 приводится пример такой декомпозиции.

		1	1	1	2	3	3	4	5	5	6
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	A	1	0,2	0,6	0,3	0,5	0,5	0,4			0,5
1	B	0,2	1	0,2	0,3	0,5	0,5	0,4			0,5
1	C	0,6	0,2	1	0,3	0,5	0,5	0,4			0,5
2	D				1	0,4	0,4				
3	E					1	0,4				
3	F					0,4	1				
4	G							1			0,8
5	H					0,6	0,6		1	0,8	
5	I					0,6	0,6		0,8	1	
6	J										1

= V ((0,2).

1	1	1	1	1	1	1			1
1	1	1	1	1	1	1			1
1	1	1	1	1	1	1			1
			1	1	1				
				1	1				
				1	1				
						1			1
				1	1		1	1	
				1	1		1	1	
									1

,



(0,3).

1		1	1	1	1	1			1
	1		1	1	1	1			1
1		1	1	1	1	1			1
			1	1	1				
				1	1				
				1	1				
						1			1
				1	1		1	1	
				1	1		1	1	
									1

,

(0,4).

1		1		1	1	1			1
	1			1	1	1			1
1		1		1	1	1			1
			1	1	1				
				1	1				
				1	1				
						1			1
				1	1		1	1	
				1	1		1	1	
									1

,

(0,5).

1		1		1	1				1
	1			1	1				1
1		1		1	1				1
			1						
				1					
					1				
						1			1
				1	1		1	1	
				1	1		1	1	
									1

,

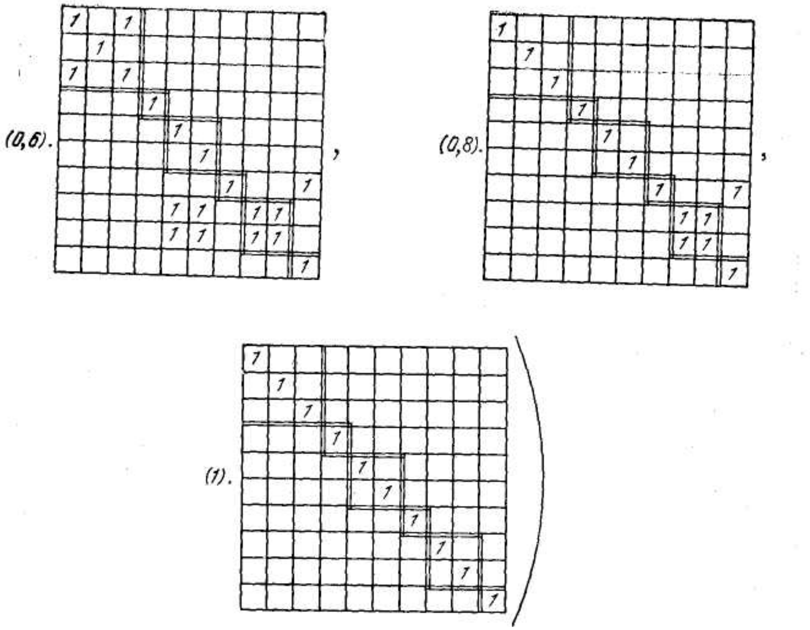


Рис. 3.

На рисунке для большей наглядности опущены нули. С другой стороны, выделены числовые элементы и классы подобия, свойства которых легко определить.

Пример синтеза см. на рис. 4.

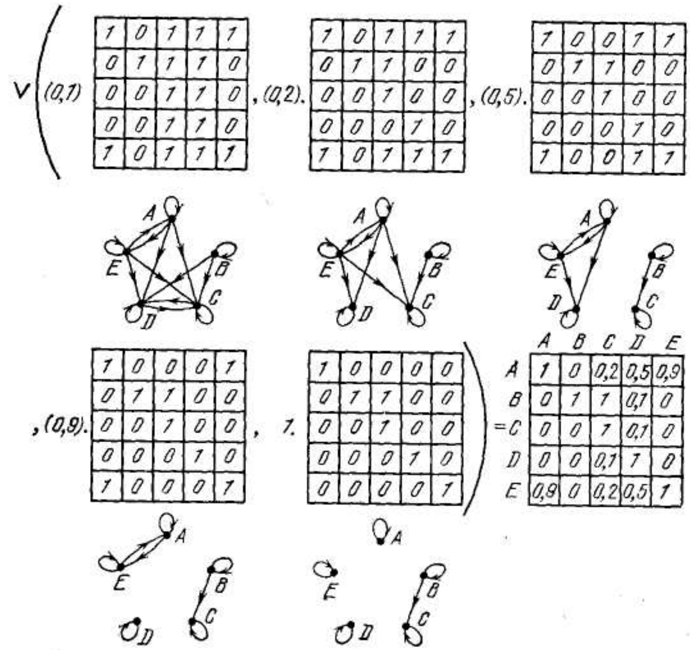


Рис. 4.

На рис. 5 показана блочно-треугольная форма предпорядка.

$\underset{\sim}{R}$	A	E	B	C	D
A	1	0,9	0	0,2	0,5
E	0,9	1	0	0,2	0,5
B	0	0	1	1	0,1
C	0	0	0	1	0,1
D	0	0	0	0,1	1

Рис. 5.

Подведем итог, составив табл. 1, отражающую все случаи, соответствующие теме этого раздела.

Таблица 1

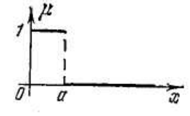
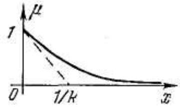
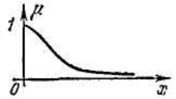
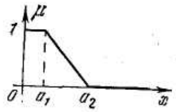
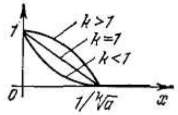
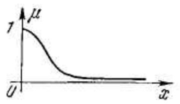
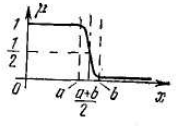
Свойства основных нечетких отношений

Отно-шения	Свойства						
	Рефле-ксив-ность	Анти-рефле-ксив-ность	(max-min)-тран-зитив-ность	(min - max)-тран-зитив-ность	Симме-трич-ность	Анти-симме-трич-ность	Сответст-вующий граф не имеет контуров, кроме петель
Пред-порядок	+		+				
Подобие	+		+		+		
Различие		+		+	+		
Сходство	+				+		
Неходство		+			+		
Поряд-ковое	+					+	+
Нестро-гий по-рядок	+		+			+	+
Стро-гий по-рядок		+	+			+	+

2.15. Обзор простейших функций принадлежности

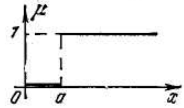
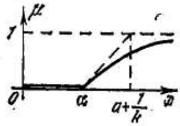
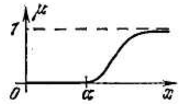
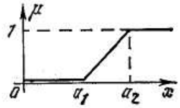
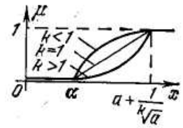
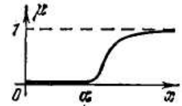
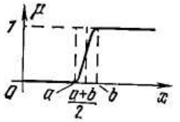
Универсальные множества: $\mathbf{R}^+$, N

Функция принадлежности утверждения «величина *x* мала»

Область определения	График	Функция	
$\mathbf{R}^+$ $\mathbf{N}$		$\mu(x)=1,\quad 0\leqslant x\leqslant a,$ $=0,\quad x>a.$	29.1
$\mathbf{R}^+$ $\mathbf{N}$		$\mu(x)=e^{-kx},\quad k>0.$	29.2
$\mathbf{R}^+$ $\mathbf{N}$		$\mu(x)=e^{-kx^2},\quad k>0.$	29.3
$\mathbf{R}^+$ $\mathbf{N}$		$\mu(x)=1,\quad 0\leqslant x\leqslant a_1,$ $=\dfrac{a_2-x}{a_2-a_1},\quad a_1\leqslant x\leqslant a_2,$ $=0,\quad a_2\leqslant x.$	29.4
$\mathbf{R}^+$ $\mathbf{N}$		$\mu(x)=1-ax^k,\quad 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{\sqrt[k]{a}},$ $=0,\quad \dfrac{1}{\sqrt[k]{a}}\leqslant x.$	29.5
$\mathbf{R}^+$ $\mathbf{N}$		$\mu(x)=\dfrac{1}{1+kx^2},\quad k>1.$	29.6
$\mathbf{R}^+$ $\mathbf{N}$		$\mu(x)=1,\quad 0\leqslant x\leqslant a,$ $=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{b-a}\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right),$ $a\leqslant x\leqslant b$ $=0,\quad b\leqslant x.$	29.7

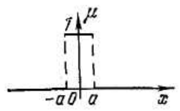
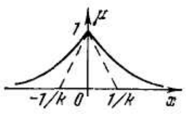
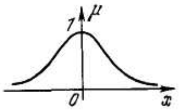
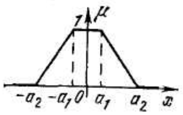
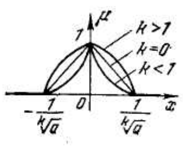
Универсальные множества: $\mathbf{R}^+$, N

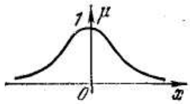
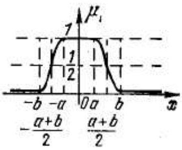
Функция принадлежности утверждения «величина *x* большая»

Область определения	График	Функция
R^+ N		$\mu(x)=0, \quad 0 \leqslant x < a,$ $=1, \quad a \leqslant x.$ 29.8
R^+ N		$\mu(x)=0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \alpha$ $=1-e^{-k(x-\alpha)}, \quad \alpha \leqslant x,$ 29.9 $k>0.$
R^+ N		$\mu(x)=0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \alpha,$ $=1-e^{-k(x-\alpha)^2}, \quad \alpha \leqslant x,$ 29.10 $k>0.$
R^+ N		$\mu(x)=0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a_1,$ $=\dfrac{x-a_1}{a_2-a_1}, \quad a_1 \leqslant x \leqslant a_2,$ 29.11 $=1, \quad a_2 \leqslant x.$
R^+ N		$\mu(x)=0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \alpha,$ $=a(x-\alpha)^k, \quad \alpha \leqslant x \leqslant \alpha+\dfrac{1}{\sqrt[k]{a}},$ $=1, \quad \alpha+\dfrac{1}{\sqrt[k]{a}} \leqslant x.$ 29.12
R^+ N		$\mu(x)=0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \alpha,$ $=\dfrac{k(x-\alpha)^2}{1+k(x-\alpha)^2}, \quad \alpha \leqslant x < \infty.$ 29.13
R^+ N		$\mu(x)=0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a,$ $=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{b-a}\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right), \quad a \leqslant x \leqslant b,$ $=1, \quad a \leqslant x.$ 29.14

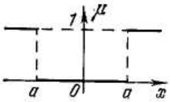
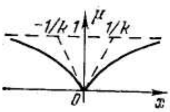
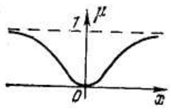
Универсальные множества: R, Z

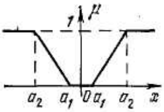
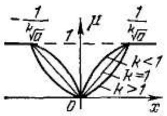
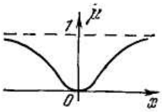
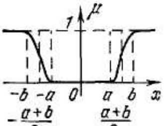
Функция принадлежности утверждения «величина |*x*| мала»

Область определения	График	Функция	
R Z		$\mu(x)=0,\quad -\infty<x<a,$ $=1,\quad -a\leqslant x\leqslant a,$ $=0,\quad a\leqslant x.$	29.15
R Z		$\mu(x)=e^{kx},\quad -\infty<x\leqslant 0,$ $=e^{-kx},\quad 0\leqslant x<\infty,$ $k>1.$	29.16
R Z		$\mu(x)=e^{-kx^2}.$	29.17
R Z		$\mu(x)=0,\quad -\infty<x\leqslant -a_2,$ $=\frac{a_2+x}{a_2-a_1},\quad -a_2\leqslant x\leqslant -a_1,$ $=1,\quad -a_1\leqslant x\leqslant a_1,$ $=\frac{a_2-x}{a_2-a_1},\quad a_1\leqslant x\leqslant a_2,$ $=0,\quad a_2\leqslant x<\infty.$	29.18
R Z		$\mu(x)=0,\quad -\infty<x\leqslant -\frac{1}{\sqrt[k]{a}},$ $=1-a(-x)^k,\quad -\frac{1}{\sqrt[k]{a}}\leqslant x\leqslant 0,$ $=1-a(x)^k,\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{\sqrt[k]{a}},$ $=0,\quad \frac{1}{\sqrt[k]{a}}\leqslant x<\infty.$	29.19

Область определения	График	Функция
R Z		$\mu(x)=\dfrac{1}{1+kx^2},\quad k>1.$ 29.20
R Z		$\mu(x)=0,\quad -\infty<x\leqslant -b,$ $=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{b-a}\left(x+\dfrac{a+b}{2}\right),$ $-b\leqslant x\leqslant -a,$ $=1,\quad -a\leqslant x\leqslant a,$ $=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{b-a}\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right),$ $a\leqslant x\leqslant b,$ 29.21 $=0,\quad b\leqslant x<\infty.$

Универсальные множества: R, Z
Функция принадлежности утверждения «величина $|x|$ большая»

Область определения	График	Функция
R Z		$\mu(x)=1,\quad -\infty<x<-a,$ $=0,\quad -a<x<a,$ $=1,\quad a<x<\infty.$ 29.22
R Z		$\mu(x)=1-e^{kx},\quad -\infty<x\leqslant 0,$ $=1-e^{-kx},\quad 0\leqslant x<\infty,$ $k>1.$ 29.23
R Z		$\mu(x)=1-e^{-kx^2},\quad k>1.$ 29.24

Область определения	График	Функция
R **Z**		$\mu(x)=1, \quad -\infty<x<-a_2,$ $=-\dfrac{x+a_1}{a_2-a_1}, \quad -a_2\leqslant x\leqslant -a_1,$ $=0, \quad -a_1\leqslant x\leqslant a_1, \quad$ 29.25 $=\dfrac{x-a_1}{a_2-a_1}, \quad a_1\leqslant x\leqslant a_2,$ $=1, \quad a_2\leqslant x<\infty.$
R **Z**		$\mu(x)=1, \quad -\infty<x<-\dfrac{1}{\sqrt[k]{a}},$ $=a(-x)^k, \quad -\dfrac{1}{\sqrt[k]{a}}\leqslant x\leqslant 0,$ $=ax^k, \quad 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{\sqrt[k]{a}}, \quad$ 29.26 $=1, \quad \dfrac{1}{\sqrt[k]{a}}\leqslant x<\infty.$
R **Z**		$\mu(x)=\dfrac{kx^2}{1+kx^2}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{kx^2}}, \quad k>1.$ 29.27
R **Z**		$\mu(x)=1, \quad -\infty<x\leqslant -b$ $=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{b-a}\left(x+\dfrac{a+b}{2}\right),$ $-b\leqslant x\leqslant -a,$ $=0, \quad -a\leqslant x\leqslant a,$ $=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{b-a}\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right),$ $a\leqslant x\leqslant b,$ $=1, \quad b\leqslant x<\infty.$ 29.28

В приведенных таблицах мы описали различные функции принадлежности, полезные для представления числовых нечетких подмножеств, соответствующих следующим нечетким утверждениям:

величина x мала (29.1) — (29.7),

величина x большая (29.8) — (29.14),

величина $|x|$ мала (29.15) — (29.21),

величина $|x|$ большая (29.22) — (29.28).

Для этих утверждений можно построить числовые нечеткие подмножества относительно двух переменных. Покажем, как это делается. Кроме того, в этом же разделе покажем, как анализировать и синтезировать транзитивные нечеткие отношения.

А. Цилиндрические функции принадлежности типа

$$\mu(x, y) = f(x^2 + y^2)$$

соответствуют утверждению «$x^2 + y^2$ обладают свойством $\mathcal{P}$».

Возьмем теперь кривые и функции (29.1)—(29.14) и заменим x на

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Для (29.1)—(29.14) свойство $\mathcal{P}$ можно сформулировать как «величина $x^2 + y^2$ мала или x и y малы».

Для (29.8)—(29.14) свойство $\mathcal{P}$ можно сформулировать как «величина $x^2 + y^2$ большая или x и y большие».

Пример. Учитывая (29.6), можно видеть, что

$$\mu(x, y) = \frac{1}{1 + k(x^2 + y^2)}\ .$$

Б. Гиперболические функции принадлежности типа

$$\mu(x, y) = f(|x - y|)$$

или

$$\mu(x, y) = f(|y^2 - x^2|)$$

соответствуют утверждению «$|y - x|$ или $|y^2 - x^2|$ обладают свойством $\mathcal{P}$».

Возьмем кривые и функции (29.1)—(29.14) и заменим x на

$$\rho = |y - x|$$

или

$$\rho = \sqrt{|x^2 + y^2|};$$

для (29.1)—(29.7) свойство $\mathcal{P}$ можно сформулировать как

«величина y очень близка к x»,

для (29.8)—(29.14)

«(y очень отличается от x».

Для обращения свойства $\mathcal{P}$ в противоположное можно также использовать $\rho = |y — kx|$ при достаточно большом k.

Замечание. Известно, что

$$e^{-u} = \frac{1}{1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \ldots} .$$

Таким образом, функции

$$e^{-u} \quad \text{и} \quad \frac{1}{1+u}$$

в качестве функции принадлежности будут давать сходные результаты, когда

$$u = \varphi(x), \quad u = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2}\ ), \quad u = \varphi(\sqrt{|\, x^2 + y^2\, |}\ ) \text{ и др.}$$

Определение свойства (max — min)-транзитивности в случае непрерывной функции принадлежности отношения.

В этом случае очень легко оценить функцию принадлежности $\mu_{\tilde{R}}(x, y)$, если она представляет отношение, обладающее одним из следующих свойств: рефлексивностью, симметрией, антисимметрией.

Хуже обстоят дела с транзитивностью. Рассмотрим сначала (max—min)-транзитивность, а потом (max — ·)-транзитивность (можно перейти к доказательствам относительно (min—max)-, (min—sum)- или даже обычной (min -сложение)-транзитивности).

Напомним, что (max - min)-транзитивность характеризуется следующим свойством:

$$\mu_{\tilde{R}}(x, z) \geq \bigvee_{y} [\, \mu_{\tilde{R}}(x, y) \wedge \mu_{\tilde{R}}(y, z)]. \qquad (1)$$

На рис. 1 показано, как получить правый член соотношения (1).

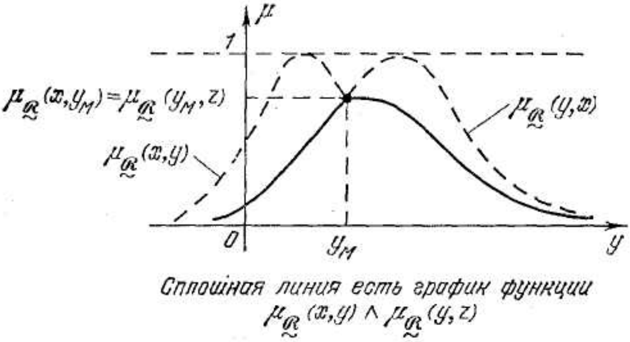


Рис. 1.

Если в этом примере x и z рассматриваются как параметры, то имеется единственная точка пересечения функций принадлежности $\mu_{\tilde R}(x,\ y)$ и $\mu_{\tilde R}(y,\ z)$; в других случаях таких точек может быть несколько, но каждый раз только одна из них будет определять максимум $y_М$. В дальнейшем удобно действовать следующим образом.

1. Определяем точку $y_М$ как функцию от x и z, такую, что

$$\mu_{\tilde R}\ (x, y_М)=\ \mu_{\tilde R}\ (y_М, z).$$

2. Подставляем значение $y_М$ как функцию от x и z в $\mu_{\tilde R}\ (x, y_М)$ или в $\mu_{\tilde R}\ (y_М, z)$, что даст функцию $\lambda\ (x, z)$.

3. Сравниваем $\lambda(x, z)$ с $\mu_{\tilde R}\ (x, z)$. Если

$$\forall\ (x, z):\quad \mu_{\tilde R}\ (x, z)\geq \lambda\ (x, z),$$

то отношение $\tilde R$ транзитивно. Если же

$$\exists\ \mu_{\tilde R}\,(x, z):\quad \mu_{\tilde R}\ (x, z)<\lambda(x, z),$$

то отношение $\tilde R$ не транзитивно.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Имеем нечеткое отношение $\tilde R$, определенное для $x\in$ R$^+$ и $y\in$ R$^+$:

$$\mu_{\tilde R}=\begin{cases} e^{-x} & y<x, \\ 1, & y=x, \\ e^{-y} & y>x. \end{cases} \qquad (2)$$

На рис. 2 для случаев $x < z$ (рис. 2, *а*) и $x > z$ (рис. 2, *б)* изображена функция $\mu_{\tilde{R}}$ *(x,y)* как функция от *y (x* принимается в качестве параметра) и $\mu_{\tilde{R}}$ *(y, z) (z* принимается в качестве параметра).

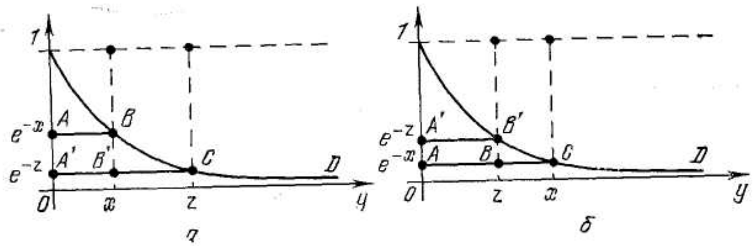


Рис. 2.

На этих рисунках ABCD представляет функцию $\mu_{\tilde{R}}$ *(x, y)* (с *x* в качестве параметра), а A'B'CD представляет функцию $\mu_{\tilde{R}}$ *(y, z) (z-параметр*) .

В случае $x < z$ max — min равен e^{-z}, а в случае $x > z$ max — min равен e^{-x}. Поэтому можно записать

$$\lambda(x, z)= \begin{cases} e^{-z} & x \le z, \\ e^{-x} & x \ge z. \end{cases}$$

Сравниваем $\lambda(x, z)$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{R}}(x, z)$, которая задается (2), где *z* заменяет *y:*

$$\mu_{\tilde{R}}(x, z)= \begin{cases} e^{-z} & x < z, \\ 1, & x = z, \\ e^{-x} & x > z. \end{cases}$$

В результате сравнения видим, что

$$\mu_{\tilde{R}}(x, z)= \lambda(x, z),\ \ x \ne z \qquad (3)$$

$$\mu_{\tilde{R}}(x,z) > \lambda(x,z),\ \ x = z. \qquad (4)$$

Следовательно, $\tilde{R}$ — транзитивное отношение. Заметим, что это отношение есть отношение подобия.

На рис. 3 представлено с помощью матрицы нечеткое отношение, соответствующее (2), где вместо N использовано R^{+}.

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	1	e^{-1}	e^{-2}	e^{-3}	e^{-4}	e^{-5}	e^{-6}	e^{-7}	...
1	e^{-1}	1	e^{-2}	e^{-3}	e^{-4}	e^{-5}	e^{-6}	e^{-7}	...
2	e^{-2}	e^{-2}	1	e^{-3}	e^{-4}	e^{-5}	e^{-6}	e^{-7}	...
3	e^{-3}	e^{-3}	e^{-3}	1	e^{-4}	e^{-5}	e^{-6}	e^{-7}	...
4	e^{-4}	e^{-4}	e^{-4}	e^{-4}	1	e^{-5}	e^{-6}	e^{-7}	...
5	e^{-5}	e^{-5}	e^{-5}	e^{-5}	e^{-5}	1	e^{-6}	e^{-7}	...
6	e^{-6}	e^{-6}	e^{-6}	e^{-6}	e^{-6}	e^{-6}	1	e^{-7}	...
7	e^{-7}	e^{-7}	e^{-7}	e^{-7}	e^{-7}	e^{-7}	e^{-7}	1	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Рис. 3.

На нем выявляются особенности расположения значений функции принадлежности. Предлагаем самим проверить транзитивность в этом случае, используя (1). (Max-min)-оператор умножения строки на столбец позволит проверить (3) и (4)

Пример 2. Рассмотрим нечеткое отношение $\tilde{R}$, которое определено для $x \in$ R и $y \in$ R (рис. 4):

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y) = e^{-(x-y)^2} . \qquad (5)$$

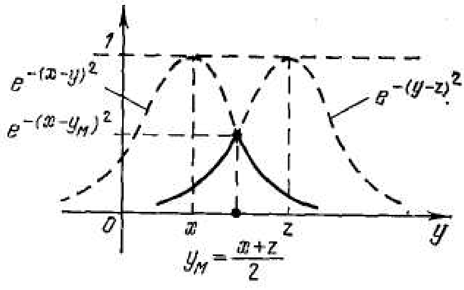


Рис. 4.

Легко находим, что

$$e^{-(x-y_M)^2} = e^{-(y_M-z)^2} ,$$

поэтому

$$x\text{-}y_M = y_M\text{ -}z$$

или

$$y_M = (x + z)/2.$$

Значение y_M отмечено на рис. 4. Подставив это значение y_M в правый член (5)), получим

$$\lambda\,(x, z) = \mathrm{e}^{-(x-y_M)^2} = \mathrm{e}^{\frac{-(x-z)^2}{4}}$$

Мы видим, что

$$\forall\,(x, z)\text{:}\ \mathrm{e}^{-(x-z)^2} \le \mathrm{e}^{\frac{-(x-z)^2}{4}}$$

т.е.

$$\forall\ (x,z)\text{:}\quad \mu_{\tilde{R}}\ (x,z) \le \lambda\,(x, z).$$

Таким образом, отношение $\tilde{R}$ нетранзитивно. Заметим, что тем не менее это отношение является отношением сходства.

На рис. 5 представлено соответствующее отношение $\tilde{R}$, но с заменой R^+ на N.

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	5	6	7	…
0	1	e^{-1}	e^{-4}	e^{-9}	e^{-16}	e^{-25}	e^{-36}	e^{-49}	…
1	e^{-1}	1	e^{-1}	e^{-4}	e^{-9}	e^{-16}	e^{-25}	e^{-36}	…
2	e^{-4}	e^{-1}	1	e^{-1}	e^{-4}	e^{-9}	e^{-16}	e^{-25}	…
3	e^{-9}	e^{-4}	e^{-1}	1	e^{-1}	e^{-4}	e^{-9}	e^{-16}	…
4	e^{-16}	e^{-9}	e^{-4}	e^{-1}	1	e^{-1}	e^{-4}	e^{-9}	…
5	e^{-25}	e^{-16}	e^{-9}	e^{-4}	e^{-1}	1	e^{-1}	e^{-4}	…
6	e^{-36}	e^{-25}	e^{16}	e^{-9}	e^{-4}	e^{-1}	1	e^{-1}	…
7	e^{-49}	e^{-36}	e^{-25}	e^{-16}	e^{-9}	e^{-4}	e^{-1}	1	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Рис. 5.

Пример 3. Рассмотрим нечеткое отношение, которое определено для $x \in R^+$ и $y \in R^+$:

$$\mu_{\tilde{R}}\ (x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{1+xy}, & y>x,\\ 0, & y\le x.\end{cases}$$

На рис. 6 показано, что min— max соответствует $y_M=z$, отсюда

$$\lambda(x,\ y_M)=\begin{cases}\lambda(x,z),\\ \dfrac{xz}{1+xz}, & z>x,\\ 0, & z<x.\end{cases}$$

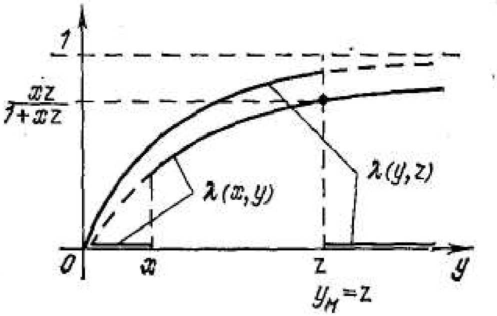


Рис. 6.

Мы видим, что

$$\mu_{\tilde{R}}\ (x,z)=\lambda\ (x,z).$$

Следовательно, отношение $\widetilde{R}$ действительно транзитивно. Можно также проверить, что это отношение есть полный нечеткий порядок.

На рис. 7 представлено соответствующее отношение с N вместо R^+.

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
1	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	...
2	0	0	0	$\frac{6}{7}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{14}{15}$	...
3	0	0	0	0	$\frac{12}{13}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{18}{19}$	$\frac{21}{22}$	...
4	0	0	0	0	0	$\frac{20}{21}$	$\frac{24}{25}$	$\frac{28}{29}$	...
5	0	0	0	0	0	0	$\frac{30}{31}$	$\frac{35}{36}$	...
6	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{42}{43}$	...
7	0	0	0	0	0	0	0	0	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Рис. 7.

Замечание о синтезе транзитивного нечеткого отношения. Если анализ нечеткого отношения в R или R^+, как мы видели, не очень легкий, то, за исключением некоторых очень простых частных случаев, их синтез еще более затруднителен. Достаточно хороший метод синтеза состоит в том, чтобы выполнить синтез отношения в N, а потом перейти к R^+ или R.

Теоремы декомпозиции для отношения подобия (16) и для отношения совершенного порядка (17) позволяют легко синтезировать соответствующие отношения. Можно предложить и соответствующий алгоритм.

Алгоритм для построения нечеткого транзитивного отношения в счетном множестве.

1. Пусть имеем последовательность (конечную или нет) чисел $a_i \in [0,1]$, строго упорядоченную по *i:*

$$1 > a_1 > a_2 > ... > a_r > .... > 0.$$

Шаг за шагом строим транзитивный обычный граф, добавляя дуги и следя, чтобы сохранялась транзитивность. На $(i + 1)$-м шаге алгоритма к построенному транзитивному графу, дугам которого уже присвоены значения $a_1, a_2, ..., a_i$ добавляются новые дуги, так что в результате получается новый транзитивный граф. Всем добавленным дугам на $(i + 1)$-м шаге присваиваются значения a_{i+1}. Конечный нечеткий граф, полученный после остановки на шаге i, транзитивен; если процедура не останавливается за конечное число шагов, то получается бесконечный граф, причем тоже транзитивный.

Пример. Рассмотрим бесконечную последовательность

$$1 > 1/2 > 1/3 > 1/4 > \ldots \ldots > 1/r > \ldots > 0.$$

Мы имеем намерение построить транзитивный и антирефлексивный нечеткий граф, обладающий совершенной антисимметрией. Построение выполняется в соответствии с порядком, указанным на рис. 8, где дуги добавляются произвольно, но с оговоркой, что транзитивность должна сохраняться на каждом шаге.

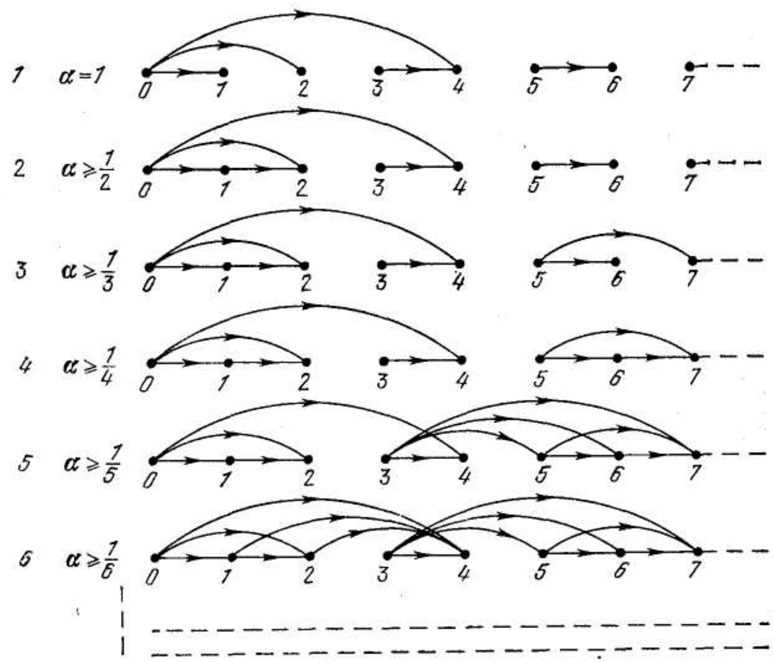


Рис. 8.

Как строится этот нечеткий граф, понятно из рис. 9.

x \ y	0	1	2	3	4	5	6	7	…
0	0	1 ①	1 ①		1 ①				…
1	0	0	$\frac{1}{2}$ ②		$\frac{1}{6}$ ⑥				…
2	0	0	0		$\frac{1}{6}$ ⑥				…
3	0	0	0	0	1 ①	$\frac{1}{5}$ ⑤	$\frac{1}{5}$ ⑤	$\frac{1}{5}$ ⑤	…
4	0	0	0	0	0				…
5	0	0	0	0	0	0	1 ①	$\frac{1}{3}$ ③	…
6	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$ ④	…
7	0	0	0	0	0	0	0	0	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Рис. 9.

Ту же процедуру можно использовать и для предпорядков, отношений подобия, порядков и т.п.

Из полученной матрицы видно, как получить соответствующее отношение $\widetilde{R}$ для R^+ и в конце концов для R. Это, очевидно, не всегда легко сделать.

3. Отдельные аспекты нечеткости отношений

3.1. Фундаментальное измерение нечеткости

В разделе рассматривается аксиоматическая структура для измерения функции принадлежности нечеткого множества (т. е. теоремы представления и единственности), а также предлагается возможный вариант теста на единственность.

Предложена модель фундаментального измерения нечеткости. Однако сначала определим термины «объективное свойство» и «субъективное свойство». Первый термин относится к любому свойству A, про которое недвусмысленно можно сказать, обладает ли им произвольный объект θ, принадлежащий выделенной области исследования Θ. В противоположность объективному свойству лингвистическое определение субъективного свойства *A* содержит неясности. Присущая этому понятию семантическая неопределенность допускает разнообразные интерпретации смысла этого свойства различными наблюдателями.

В дальнейшем определения «объективный» и «субъективный» будут относиться к любому частному свойству объектов из выделенной области исследования, определения «обычный» и «нечеткий» — к подмножеству элементов этой области, порожденному некоторым свойством, определения «четкий» и «нечеткий» — к форме функции множества (четкий — для функции со значениями в бинарной решетке и нечеткий — для функции со значениями в двусторонне ограниченном интервале действительной прямой). Кроме того, из контекста будет ясно, использовано ли слово «нечеткий» в отдельном утверждении применительно ко множеству или к форме функции множества.

3.1.1. Аксиоматизация понятия характеристической функции

Из того факта, что индивидуумы могут по-разному воспринимать интенсивность свойства $\underset{\sim}{A}$, которым обладает объект θ в Θ, делаем вывод, что значение функции принадлежности объекта θ к подмножеству из Θ, индуцированному признаком $\underset{\sim}{A}$ (т. е. к множеству, представляющему свойство $\underset{\sim}{A}$) — которое для простоты будем называть множеством $\underset{\sim}{A}$, не может считаться объективной характеристикой. Таким образом, мы сталкиваемся с проблемой назначения числовых оценок субъективным ощущениям. Задача построения числовых представлений относится к области математической психологии, в которой используется техника теории измерения и шкалирования. Прежде чем ввести технику, необходимую для представления функции принадлежности нечеткого множества, построим представление характеристической функции обычного множества, соответствующего объективному свойству *A*.

Определение. Пусть задана область θ. Определим слабый порядок $\underset{\sim}{>}_A$ на Θ условием

$$\theta_1 \gtrsim_A \theta_2, \text{ если } \begin{cases} \theta_1 \in A, \theta_2 \in A, \\ \text{или } \theta_1 \in A, \theta_2 \notin A, \theta_1, \theta_2 \in \Theta, \\ \text{или } \theta_1 \notin A, \theta_2 \notin A_2, \end{cases}$$

где $\theta_1 \gtrsim_A \theta_2$ читается как «θ_1 обладает свойством *A* по крайней мере в той же степени, что и θ_2» или «утверждение, что θ_1 обладает свойством *A* в той же мере, что и θ_2, по крайней мере истинно», или «относительно свойства *A* объект θ_1 по крайней мере такой же большой, как и θ_2».

Утверждение, что $\theta_1 \gtrsim_A \theta_2$, допускает следующую интерпретацию: объект θ_1 имеет по крайней мере ту же степень принадлежности множеству (представляющему) *A,* что и θ_2.

Таким образом, $\theta_1 \sim_A \theta_2$ всякий раз, когда $\theta_1 \gtrsim_A \theta_2$ и $\theta_2 \gtrsim_A \theta_1$ (т. е. всякий раз, когда $\theta_1 \in A$, $\theta_2 \in A$ или $\theta_1 \notin A$, $\theta_2 \notin A$) и $\theta_1 >_A \theta_2$ всякий раз, когда $\theta_1 \gtrsim_A \theta_2$ и не $\theta_1 \sim_A \theta_2$ (т. е. всякий раз, когда $\theta_1 \in A$, $\theta_2 \notin A$).

По терминологии теории намерений введенная таким образом система $\langle \theta, \gtrsim_A \rangle$, состоящая из области исследования и отношения (в данном случае — отношения порядка) на этой области, называется *эмпирической структурой с отношением*. Назовем определенную здесь эмпирическую структуру с отношениями структурой *бинарной* принадлежности.

Построить любую эмпирическую структуру с отношениями — значит установить гомоморфное соответствие с «числовой структурой с отношениями» $\langle \varphi(\theta), \geqslant \rangle$ (где область значений φ есть подмножество действительной прямой), т. е.

$$\theta_1 \gtrsim_A \theta_2 \Leftrightarrow \varphi(\theta_1) \geqslant \varphi(\theta_2). \qquad (1)$$

Кроме того, поскольку Θ состоит только из двух классов эквивалентности по отношению $\gtrsim_A$, то φ принимает только два значения— по одному для каждого класса. Очевидно, что $\varphi(\theta)$ есть характеристическая функция $\chi_A(\theta)$.

Теперь возникает вопрос о единственности этого числового представления. Поскольку порядок сам по себе — это только отношение, определенное на Θ, то для любых $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ уравнение (1) оказывается единственным условием, связывающим $\varphi(\theta_1)$ и $\varphi(\theta_2)$. Следовательно, значения шкалы $\varphi(\theta)$ определены с точностью до строго возрастающих преобразований *f*; любая другая шкала φ^* удовлетворяющая уравнению (1), связана с φ уравнением $\varphi^*(\theta) = f[\varphi(\theta)]$. Поэтому значения 0 и 1 для $\chi_A(\theta)$ нельзя расценивать как объективное или абсолютное следствие структуры $\langle \Theta, \gtrsim_A \rangle$ — именно этот факт отражается распространенным переобозначением 0 и

1 значениями *f* и *t* (*f* — ложно, *t* — истинно), где $t >_A f$. Таким образом, χ_A определена на «порядковой шкале» (т. е. порядок — единственное отношение на Θ), и структура бинарной принадлежности в действительности определяет только топологию.

3.1.2. Аксиоматизация понятия функции принадлежности

Числовое представление функции принадлежности для нечеткого множества, ассоциированного с субъективным свойством, строят аналогичным образом только для того, чтобы подчеркнуть нечеткость лингвистического определения свойства $\underset{\sim}{A}$. Обозначение $\gtrsim_A$ заменяется на $\gtrsim_{\underset{\sim}{A}}$.

Определение. Пусть дана область Θ; определим на ней слабый порядок $\gtrsim_{\underset{\sim}{A}}$ так, чтобы

$$\theta_1 \gtrsim_{\underset{\sim}{A}} \theta_2, \ \forall\, \theta_1, \theta_2 \in \Theta,$$

если наблюдатель считает, что «θ_1 обладает свойством $\underset{\sim}{A}$ по крайней мере в той же степени, что и θ_2», или «утверждение, что θ_1 обладает свойством $\underset{\sim}{A}$ в той же степени, что и θ_2, по крайней мере истинно», или «относительно свойства $\underset{\sim}{A}$ объект θ_1 по крайней мере такой же большой как и θ_2».

Аналогично $\theta_1 \sim_{\underset{\sim}{A}} \theta_2$ тогда и только тогда, когда $\theta_1 \gtrsim_{\underset{\sim}{A}} \theta_2$ и $\theta_2 \gtrsim_{\underset{\sim}{A}} \theta_1$ и $\theta_1 >_{\underset{\sim}{A}} \theta_2$ тогда и только тогда, когда $\theta_1 \gtrsim_{\underset{\sim}{A}} \theta_2$ и не $\theta_2 \sim_A \theta_1$.

Таким образом, отношение $\theta_1 \gtrsim_{\underset{\sim}{A}} \theta_2$ для субъективного свойства читается так же, как и $\theta_1 \gtrsim_A \theta_2$ для объективного свойства. Однако последнее отношение может быть нарушено в трех случаях в зависимости от бинарных оценок того, может или нет θ_1 и θ_2 каждый обладать свойством *A,* как это установлено определением, введенным в разд. 3.1.1. Напротив, отношение $\theta_1 \gtrsim_A \theta_2$ не может быть нарушено в этих случаях, так как в суждениях об объектах θ_1 и θ_2 относительно субъективного свойства *A* учитывается степень проявления рассматриваемого свойства, т. е. для каждого объекта имеется не две, а континуум возможностей.

Определенная ранее система $\langle \Theta, \gtrsim_{\underset{\sim}{A}} \rangle$ будет называться «структурой многозначной принадлежности».

Отметим, что в приведенных определениях ничего не говорится об ограничениях, накладываемых на функцию принадлежности.

Определение. Структура принадлежности $\langle\Theta, \gtrsim_{\underset{\sim}{A}}\rangle$ называется «ограниченной», если существуют элементы θ_{max} и θ_{min}, такие, что $\theta_{max} \gtrsim_{\underset{\sim}{A}} \theta$ и $\theta \gtrsim_{\underset{\sim}{A}} \theta_{min}$ для любого $\theta \in \Theta$.

Здесь θ_{max} — оцениваемый субъектом объект, функция принадлежности которого свидетельствует о том, что он определенно обладает свойством $\underset{\sim}{A}$, а θ_{min} — определенно не обладает $\underset{\sim}{A}$. (Эти субъективные суждения интерпретируются в том смысле, что θ_{max} обладает максимальной принадлежностью множеству, представляющему $\underset{\sim}{A}$, а θ_{min} — минимальной.)

Подобно структуре бинарной принадлежности ограниченная структура многозначной принадлежности допускает числовое представление в порядковой шкале.

Теорема о представлении 1. Пусть Θ — область исследования и $\langle\Theta, \gtrsim_{\underset{\sim}{A}}\rangle$ — структура многозначной принадлежности. Тогда существует действительная функция φ на Θ такая, что для всех $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$

$$\theta_1 \gtrsim_{\underset{\sim}{A}} \theta_2 \Leftrightarrow \varphi(\theta_1) \geqslant \varphi(\theta_2). \qquad (2)$$

Более того, если $\langle\Theta, \gtrsim_{\underset{\sim}{A}}\rangle$—ограниченная структура принадлежности, то функция φ — ограниченная.

Теорема единственности 1. (Имеется в виду единственность числового представления структуры многозначной принадлежности в порядковой шкале.) Пусть φ* — еще одна шкала, удовлетворяющая уравнению (2). Тогда существует строго возрастающая функция *f*, такая, что

$$\varphi^*(\theta) = f[\varphi(\theta)]. \qquad (3)$$

Доказательство теоремы о представлении 1 состоит из вывода соответствующего простого порядка $\Theta/\sim_{\underset{\sim}{A}}$ (т. е. классов эквивалентности Θ по отношению $\gtrsim_{\underset{\sim}{A}}$). Каждому классу эквивалентности ставится в соответствие действительное число, при назначении которого учитывается только одно ограничение: если в простом порядке один класс не доминирует над другим, то назначаемое ему действительное число должно быть не меньше числа, поставленного в соответствие другому классу. Результирующие значения принадлежности ограничены снизу числом, приписанным классу эквивалентности $[\theta_{min}]$, и сверху — значением, присвоенным классу $[\theta_{max}]$; построенное соответствие единственно с точностью до строго возрастающего преобразования.

Например, если Θ ={люди различного роста} и *A* = *высокий,* то график φ(θ) в зависимости от φ(θ) для субъекта может иметь вид сплошной кривой на рис. 1, где Θ представлено соответствующей числовой областью физической меры роста (т. е. носитель $X(\Theta)=[0, \infty)$ — шкала в метрах).

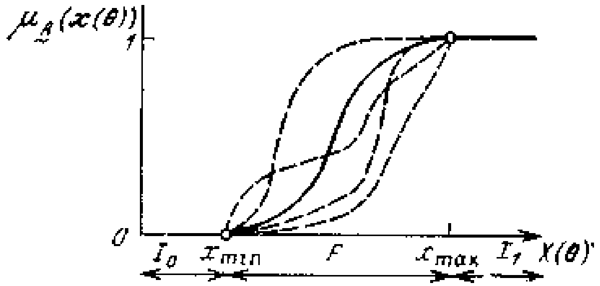


Рис.1.

Если определить $\mu_A(\theta)$ условием $\mu_A \triangleq$ «принадлежность θ множеству то A»$=\varphi(\theta)$, эта кривая будет представлять $\mu_{выс}(\theta)$. Однако даже если произвольно положить $\mu_A(\theta_{min})=0$ и $\mu_A(\theta_{max})=1$, мы все же будем иметь бесконечное множество кривых в «нечеткой области» *F,* каждая из которых — возможный результат строгого монотонного преобразования шкальных значений области *F*. Некоторые из этих альтернативных кривых показаны на рисунке штриховыми линиями Заметим также, что субъективное понятие A разбивает Θ на три области: I_0, I_1 и F — в отличие от объективного понятия, которое разбивает Θ только на две «области безразличия»: I_0 и I_1, образованные объектами в $[\theta_{min}]$ и $[\theta_{max}]$ соответственно, т. е. такими, при которых у субъекта не возникает неопределенности относительно того, обладают ли они свойством A или нет.

Таким образом показано, что точно так же, как характеристическая функция χ_A объективного свойства, функция принадлежности μ_A субъективною свойства определена порядковой шкалой.

До сих пор по отношению $\gtrsim_A$ смоделированы только топологические свойства Θ. Чтобы вместо порядковой шкалы для μ_A построить более сильную шкалу, воспользуемся тем, что переход от двузначной принадлежности к многозначной позволяет перейти от всего лишь топологических свойств Θ, определенных отношением $\gtrsim_{\underset{\sim}{A}}$, к алгебраическим свойствам.

Для установления в Θ слабого интервального порядка потребуем, чтобы в общем случае субъект мог сравнить любую пару интервалов, определенных набором из четырех точек в Θ. Например, пусть субъект установил, что объект θ_2 обладает свойством $\underset{\sim}{A}$ по крайней мере в той же степени, что и θ_1 (т. е. θ_2 имеет по крайней мере ту же степень принадлежности множеству $\underset{\sim}{A}$, что и θ_1), и что θ_4 обладает свойством $\underset{\sim}{A}$ по крайней мере в той же степени, что и θ_3 (т. е. θ_4 имеет по крайней мере ту же степень принадлежности множеству $\underset{\sim}{A}$, что и θ_3). Далее, пусть он установил, что приращение свойства $\underset{\sim}{A}$ от θ_1 до θ_2 по крайней мере так же велико, как от θ_3 до θ_4 (другими словами, приращение принадлежности множеству $\underset{\sim}{A}$ от θ_1 до θ_2 по крайней мере также велико, как от θ_3 до θ_4 (другими словами, приращение принадлежности множеству $\underset{\sim}{A}$ от θ_1 до θ_2 по крайней мере также велико, как приращение от θ_3 до θ_4, или, что эквивалентно, принадлежность θ_2 превосходит принадлежность θ_1 по крайней мере на столько, на сколько θ_4 превосходит θ_3). В последнем предложении сравниваются не точки в Θ, а интервалы в Θ, и утверждение можно переписать в виде

$$\theta_2\,\theta_1 \gtrsim'_{\underset{\sim}{A}} \theta_4\,\theta_3, \qquad \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 \in \Theta \tag{4}$$

В отличие от двух предшествующих сравнений это не топологическое, а алгебраическое утверждение об отношении $\gtrsim_{\underset{\sim}{A}}$ в Θ, и этот факт позволяет перейти от порядковой шкалы принадлежности к более сильной шкале. Уравнение (4) формулирует утверждение о бинарных отношениях в $\Theta\times\Theta$ (т. е. во множестве интервалов в Θ), которое в числовом представлении системы $\langle\varphi(\theta), \geqslant\rangle$ может быть выражено в виде утверждения

$$\varphi(\theta_2)-\varphi(\theta_1) \geqslant \varphi(\theta_4)-\varphi(\theta_3). \tag{5}$$

Определение. Ограниченная структура многозначной принадлежности $\langle\Theta, \gtrsim'_{\underset{\sim}{A}}\rangle$, для которой интервалы $\theta_j\theta_i$ в Θ могут быть слабо упорядочены по отношению $\gtrsim'_{\underset{\sim}{A}}$ при любых $\theta_i, \theta_j \in \Theta$, называется разностно-сравнимой и обозначается $\langle\Theta\times\Theta, \gtrsim'_{\underset{\sim}{A}}\rangle$.

Разностно-сравнимая ограниченная структура многозначной принадлежности образует «алгебраическую разностную структуру», если удовлетворяются следующие пять аксиом:

А1 — аксиома слабой упорядоченности: структура $\langle\Theta\times\Theta, \gtrsim'_{\underset{\sim}{A}}\rangle$ определяет слабый оторядок;

А2 — аксиома перемены знака: если $\theta_2\theta_1 \gtrsim'_{\underset{\sim}{A}} \theta_4\theta_3$, то $\theta_3\theta_4 \gtrsim'_{\underset{\sim}{A}} \theta_1\theta_2$;

А3 — аксиома слабой монотонности: если $\theta_2\theta_1 \gtrsim'_{\underset{\sim}{A}} \theta'_2\theta'_1$ и $\theta_3\theta_2 \gtrsim'_{\underset{\sim}{A}} \theta'_3\theta'_2$, то $\theta_3\theta_1 \gtrsim''_{\underset{\sim}{A}} \theta'_3\theta'_1$,

А4 — условие разрешимости: если $\theta_2\theta_1 \gtrsim'_{\underset{\sim}{A}} \theta'_4\theta'_3 \gtrsim'_{\underset{\sim}{A}} \theta_1\theta_1$, то существуют θ'_4, $\theta''_4 \in \Theta$ такие, что $\theta'_4\theta_1 \gtrsim'_{\underset{\sim}{A}} \theta_4\theta_3 \gtrsim'_{\underset{\sim}{A}} \theta_2\theta''_4$;

А5 — архимедово условие: если $a_1a_2 \ldots a_i \ldots$— строго ограниченная стандартная последовательность (т. е. для любых a_i, a_{i+1} в последовательности $a_{i+1}a_i \sim'_{\underset{\sim}{A}} a_2a_1$; не верно, что $a_2a_1 \sim'_{\underset{\sim}{A}} a_1a_1$; существуют θ'_4, $\theta''_4 \in \Theta$ такие, что $\theta''_4\theta'_4 >'_{\underset{\sim}{A}} a_ia_1 >'_{\underset{\sim}{A}} \theta'_4\theta''_4$ для любых a_i в последовательности), то последовательность $a_1a_2 \ldots a_i$. конечна.

Аксиома А2 говорит, что если изменение свойства $\underset{\sim}{A}$ при переходе от θ_1 к θ_2 по крайней мерей такое же (т. е. столь же положительное), как при переходе от θ_3 к θ_4, то изменение свойства $\underset{\sim}{A}$ в противоположном направлении от θ_2 к θ_1 не больше (т. е. не более положительное), чем при переходе от θ_4 к θ_3. Другими словами, если приращение свойства $\underset{\sim}{A}$ при переходе от θ_1 к θ_2 по крайней мере такое же, как при переходе от θ_3 к θ_4, то соотношение уменьшений свойства при переходе в обратном направлении должно оставаться тем же.

Аксиома А3 говорит, что если приращение свойства $\underset{\sim}{A}$ при переходе от θ_1 к θ_2 по крайней мере такое же, как при переходе от θ'_1 к θ'_2, и приращение от θ_2 к θ_3 по крайней мере такое же, как при переходе от θ'_2 к θ'_3, то приращение от θ_1 к θ_3 по крайней мере, такое же, как приращение от θ'_1 к θ'_3.

Аксиомы А2 и А3 интуитивно кажутся достаточно разумными и можно ожидать, что им удовлетворят данные, полученные от любого наблюдателя.

Аксиомы А4 и А5 больше относятся к свойствам самого множества Θ, чем к способности субъекта произвести оценки по отношению $\gtrsim'_{\underset{\sim}{A}}$.

Аксиома А4 просто устанавливает, что область исследований Θ достаточно плотная, чтобы можно было «скопировать» любой интервал $\theta_4\theta_3$ в пределах интервала, не меньшегои $\theta_2\theta_1$, относительно любого из концов θ_1 или θ_2. Если точка θ_1 — концевая, то субъект выбирает точку θ'_4 так, чтобы прирост свойства $\underset{\sim}{A}$ от θ_1 к θ'_4

равнялся приросту от θ_3 к θ_4. Если точка θ_2 концевая, то субъект выбирает точку θ''_4 так, чтобы прирост свойстваот $\underset{\smile}{A}$ θ''_4 к θ_2 равнялся приросту от θ_3 к θ_4.

В формулировке аксиомы А5 первые два условия в скобках определяют стандартную последовательность, а добавление третьего условия в скобках приводит к определению строго ограниченной последовательности «копий» $a_{i+1}a_i$ интервала a_2a_1 внутри большего интервала $\theta''_4\theta'_4$. Аксиома А5 просто устанавливает, что эта последовательность должна быть конечной, т. е интервал $\theta''_4\theta'_4$ не может быть бесконечно большим относительно любого меньшего интервала a_2a_1, длина которого не равна нулю Это означает, что прирост свойства $\underset{\smile}{A}$ при переходе от любой точки θ'_4 к любой другой точке θ''_4 может быть превышен за конечное число последовательных приращений размером a_2a_1.

Поскольку мы хотим построить числовое представление φ на действительной прямой, а для действительных чисел аксиома А5 выполнена (т. е. для любых данных x, $y \in R$, таких, что $y > x > 0$, существует целое число n, такое, при котором выполняется условие $nx > y$), то нужно, чтобы А5 была истинной для эмпирической системы $\langle \Theta \times \Theta, \gtrsim'_{\underset{\smile}{A}} \rangle$. А так как трудно себе представить субъекта, который любое приращение свойства $\underset{\smile}{A}^*$ от одной точки в в

до другой рассматривал бы как бесконечно большее, чем любое другое нулевое приращение, то представляется разумным предположить, что аксиома А5 справедлива для системы $\langle \Theta \times \Theta, \gtrsim '_{\underset{\smile}{A}} \rangle$.

Очевидно, что А4 — структурное предположение, которое будет выполнено, если Θ достаточно плотное множество для того, чтобы при заданных θ_1, θ_3, θ_4 можно было найти значение θ'_4 такое, что $\theta'_4\theta_1 \gtrsim'_{\underset{\smile}{A}} \theta_4\theta_3$, будем предполагать, что Θ достаточно плотное множество и аксиома А4 удовлетворяется непосредственно. Такое множество называется «порядкаво-плотным» и его примером служит множество Θ = {люди различного роста }. Нужно заметить, что любая эмпирическая область Θ может быть представлена с помощью некоторой числовой области $X(\Theta)$.Например [(см. рис. 1), где использовали $X(\Theta) = [0, \infty)$ (метр)], всякий раз, когда Θ — порядково-плотное множество, как в данном примере с Θ = {люди различного роста}, множество $X(\Theta)$ будет непрерывным. (Случаи, когда Θ не порядково-плотное множество, и, значит, $X(\Theta)$ не непрерывное, а дискретное множество, как и случаи многомерной области $X(\Theta)$, необходимо исследовать). Если субъективные ощущения свойства $\underset{\sim}{A}$, относящегося к порядково-плотной области Θ, удовлетворяют аксиомам А1—А5, то имеет место следующее числовое представление принадлежности.

Теорема о представлении 2. Пусть Θ — порядково-плотное множество, $\langle\Theta, \gtrsim_{\underset{\sim}{A}}\rangle$— разностно-сравнимая, ограниченная система многозначной принадлежности, такая, что $\langle\Theta\times\Theta, \gtrsim'_{\underset{\sim}{A}}\rangle$ — алгебраическая разностная структура. Тогда существует ограниченная действительная функция $\mu_{\underset{\sim}{A}}$, определенная на Θ, и такая, что для всех $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 \in\Theta$:

$$\theta_2 \gtrsim_{\underset{\sim}{A}} \theta_1 \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_2) \geqslant \mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_1), \tag{6}$$

$$\theta_2\,\theta_1 \gtrsim'_{\underset{\sim}{A}} \theta_4\,\theta_3 \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_2)-\mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_1) \geqslant \mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_4)-\mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_3) \tag{7}$$

Заметим, что слабый порядок $\gtrsim_{\underset{\sim}{A}}$ неявно содержится в слабом порядке $\gtrsim'_{\underset{\sim}{A}}$. Действительно, если $\theta_2\theta_1 \gtrsim'_{\underset{\sim}{A}}\theta_3\theta_3$, то из уравнения (7) следует

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_2)-\mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_1) \geqslant \mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_3)-\mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_3),$$

и, значит, $\mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_2) \geqslant \mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_1)$, что в оилу определения (6) означает $\theta_2 \geqslant_{\underset{\sim}{A}} \theta_1$

Итак, любая кривая на рис. 1 допустима для ограниченной структуры многозначной принадлежности $\langle\Theta, \gtrsim_{\underset{\sim}{A}}\rangle$, но только одна из них допустима для разностно-сравнимой ограниченной структуры многозначной принадлежности $\langle\Theta\times\Theta, \gtrsim'_{\underset{\sim}{A}}\rangle$. Это объясняется тем, что все эти кривые согласованы с бинарным отношением порядка $\gtrsim_{\underset{\sim}{A}}$ в Θ, но только одна удовлетворяет четверке алгебраических соотношений на Θ, задающих отношение $\gtrsim'_{\underset{\sim}{A}}$.

Построив представление системы $\langle\Theta\times\Theta, \gtrsim'_{\underset{\sim}{A}}\rangle$ с помощью гомоморфной ей числовой структуры $\langle\mu_{\underset{\sim}{A}}, \geqslant\rangle$, перейдем к вопросу о единственности такого представления

Теорема единственности 2. (Имеется в виду единственность представления в интервальной шкале, т. е. с точностью до линейного преобразования.) Если $\mu^*_{\underset{\sim}{A}}$ — еще одна функция, удовлетворяющая уравнениям (6) и (7), то

$$\mu^*_{\underset{\sim}{A}}(\theta) = c_1\,\mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta) + c_2, \quad c_1 > 0, \tag{8}$$

т. е. $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ определена на шкале интервалов.

Таким образом, числовое представление $\mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta)$ единственно с точностью до положительного линейного преобразования. Это означает, что числовое представление включает две константы: произвольный нуль и произвольный масштаб. Поэтому любому элементу в Θ можно приписать значение принадлежности 0,00 и любому другому — значение 1,00. Любому элементу $\theta_- \in [\theta_{\min}] \triangleq I_0$ можно присвоить произвольное значение B_L и любому элементу $\theta_+ \in [\theta_{\max}] \triangleq I_1$ — произвольное значение B_U. Однако если однажды эти два значения B_L и B_U выбраны, то значения принадлежности всех остальных элементов в Θ полностью определяются этими границами. Более детально смысл этого свойства интервальной шкалы принадлежности будет рассмотрен в разд. 3.1.3.

3.1.3. О силе шкалы

3.1.3.1. Сравнение шкалы отношений со шкалой интервалов

Уже показано, как можно построить числовое представление принадлежности на шкале интервалов. Имея в виду такую шкалу (еще один пример такой шкалы доставляет физическая величина «температура»), имеет смысл говорить об отношении разностей значений принадлежности двух точек из Θ, но не об отношении самих значений принадлежности. Как следует из теоремы единственности 2, это оправдано тем, что первое отношение инвариантно к положительным линейным преобразованиям:

$$T_{c_1, c_2}[\mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta)] = c_1 \mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta) + c_2 \triangleq \mu^*_{\underset{\sim}{A}}(\theta),\ c_1 > 0,$$

в то время как для отношения значений функции принадлежности это не так. Действительно,

$$\frac{\mu^*_{\underset{\sim}{A}}(\theta_1) - \mu^*_{\underset{\sim}{A}}(\theta_2)}{\mu^*_{\underset{\sim}{A}}(\theta_3) - \mu^*_{\underset{\sim}{A}}(\theta_4)} = \frac{c_1 \mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_1) + c_2 - c_1 \mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_2) - c_2}{c_1 \mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_3) + c_2 - c_1 \mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_4) - c_2} =$$

$$= \frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_1) - \mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_2)}{\mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_3) - \mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_4)}, \tag{9}$$

в то время как

$$\frac{\mu^*_{\underset{\sim}{A}}(\theta_1)}{\mu^*_{\underset{\sim}{A}}(\theta_3)} = \frac{c_1 \mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_1) + c_2}{c_1 \mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_3) + c_2} = \frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_1) + \frac{c_2}{c_1}}{\mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_3) + \frac{c_2}{c_1}} \neq \frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_1)}{\mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_3)}\ . \tag{10}$$

Чтобы соотношение (10) выполнялась со знаком равенства и, тем самым, принадлежность измерялась в шкале отношений, необходимо выполнение равенства c_2=0; а тогда множество допустимых преобразований, с точностью до которых определяется единственность числового соответствия, оказывается множеством преобразований подобия. Множество преобразований подобия будет записываться в виде

$$\tau[\mu_{\underset{\sim}{A}}] = \{T_{c_1, 0}[\mu_{\underset{\sim}{A}}] = c_1 \mu_{\underset{\sim}{A}} | c_1 > 0\} \triangleq \tau_{RS},$$

где запись $\tau[\cdot]$ обозначает «множество допустимых преобразований» функции аргумента, а τ_{RS} — мнемоническое обозначение для «множества допустимых преобразований шкалы отношений». Однако из вывода теоремы единственности 2 следует, что

$$\tau[\mu_{\underset{\sim}{A}}] = \{T_{c_1, c_2}[\mu_{\underset{\sim}{A}}] = c_1 \mu_{\underset{\sim}{A}} + c_2 | c_1 > 0\} \triangleq \tau_{IS},$$

где τ_{IS} — мнемоническое обозначение для «множества допустимых преобразований шкалы интервалов».

Теперь если в уравнении (9) положить $\theta_1 = \theta_4 = \theta_{min}$, то для того чтобы $\frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_1) - \mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_{min})}{\mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_3) - \mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_{min})}$ свести к $\frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_1)}{\mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_3)}$, необходимо принять $B_L = \mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_{min}) = 0$ и таким образам уменьшить числю произвольных констант в числовом представлении до одной (т. е. $B_U = \mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta_{max})$).

Заметим, что $\tau_{RS} \subset \tau_{IS}$. Это включение отражает только тот факт, что класс преобразований, которые сохраняют неизменными отношения значений функции, меньше классов преобразований, которые сохраняют неизменными отношения разностей значений. Таким образам, числовое соответствии в шкале отношений *более уникально,* чем в шкале интервалов в том смысле, что в первом случае эквивалентные (т. е. сохраняющие эмпирические отношения в Θ по $\gtrsim_{\underset{\sim}{A}}$) числовые представления получаются с помощью класса преобразований, составляющих подмножество класса допустимых преобразований шкалы интервалов. Для функции, измеряемой в шкале отношений для всех эквивалентных числовых представлений, полученных с использованием τ_{RS}, значение нуля всегда присваивается одному и тому же классу эквивалентности, тогда как для функции, измеряемой в шкале интервалов, назначения числового значения любому классу эквивалентности всегда произвольно.

1.3.1.2. Определение естественного нуля

Теперь утверждение, что некоторая эмпирическая система с отношениями имеет числовое представление в шкале отношений, эквивалентно утверждению, что ее числовое представление единственно с точностью до преобразования подобия. Кроме того, каждое из этих утверждений эквивалентно утверждению, что эмпирическая система с отношениями имеет *естественный нуль,* т. е. если носитель $X(\Theta)$ непрерывен (как на рис. 1), то существует объект θ_0, которому должно быть назначено определенное, а не произвольное числовое значение функции принадлежности, а именно «0». Далее, чтобы при слабом упорядочении для каждой эмпирической области Θ и для каждого субъекта существовал естественный нуль, необходимо выполнение условия

$$\exists\ \theta_0 \in \Theta \ni \theta \gtrsim \theta_0\ \forall\ \theta \in \Theta. \tag{11}$$

Для ограниченной структуры многозначной принадлежности $\langle\Theta, \gtrsim_{\underset{\sim}{A}}\rangle$ для всех $\theta\in\Theta : \theta \gtrsim_{\underset{\sim}{A}} \theta_{\min}$. Действительно, для любого $\theta_{-}\in[\theta_{\min}] \triangleq I_0 : \theta \gtrsim_{\underset{\sim}{A}} \theta_{-}$ — для всех $\theta\in\Theta$. Однако для принадлежности естественный нуль не должен присваиваться классу эквивалентности $[\theta_{-}]$ (т. е. I_0) всех объектов с принадлежностью B_L, а только тем объектам в этом классе, которые имеют наибольшее значение $x(\theta)$, т. е. тем объектам, которые отображаются в точку $x_{\min}$ на рис. 1, поскольку все остальные элементы интервала I_0 образуют нижнюю ветвь четкой двузначной части функции $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ и, таким образом, как показано в разд. 3.1.2, обладают только топологическими свойствами, определенными отношением $\gtrsim_{\underset{\sim}{A}}$, что приводит к порядковой шкале, тогда как вопрос о существовании естественного нуля во множестве элементов, упорядоченных отношением $\gtrsim_{\underset{\sim}{A}}$, требует анализа алгебраической структуры.

Соотношение (11) представляет собой только необходимое условие существования естественного нуля, поскольку ему удовлетворяет минимальный элемент в любом упорядочении. Условие, по которому можно определить, будет ли данный минимальный элемент естественным нулем или нет, состоит в том, что (с учетом ограничений, накладываемых на физическую различимость стимулов в Θ) этот элемент должен быть однозначно определен для данного субъекта, и вообще для каждого субъекта интервал I_0 должен определяться однозначно. В этом случае для функции принадлежности — неубывающей, когда она представлена в виде зависимости $\mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta)$ от

$x(\theta)$,как, например, для Θ= {люди различного роста} и A = *высокий,* — интервал I_0 определяется одним элементом θ_{min}, так как

$$x(\theta) \leqslant x_{min} \Leftrightarrow \theta \sim_{\underset{\sim}{A}} \theta_{min},$$

где $x_{min} = x(\theta_{min})$. Таким образом, точное определение I_0 эквивалентно точному определению элемента θ_{min} (или, что одно и то же, значения x_{min}).

Поскольку субъект не совсем уверен в смысле субъективного понятия $\underset{\sim}{A}$, то утверждать, что некоторое понятие разбивает область исследования Θ точно на интервалы I_0, F и I_1 и что точки x_{min} и x_{max} могут быть точно определены (в пределах физической, различимости) — значит вступать в противоречие с самой сутью представления о нечеткости.

Для доказательства того, что субъект не имеет естественного нуля для функции принадлежности $\mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta)$, достаточно принять, что для субъекта значение $x_{min} \pm \varepsilon$ (где ε «мало») может быть столь же легко взято в качестве точки разделения интервалов I_0 и F, как и значение x_{min}, т. е. достаточно предположить, что существует объект θ, который субъект отличает от θ_{min} и, значит, *считает* $x(\theta) \neq x_{min}$, и который он столь же легко может предложить для определения точки разбиения интервалов I_0, F. Например, для Θ={люди различного роста } и $\underset{\sim}{A}$ = *высокий,* субъект может в качестве θ_{min} выбрать объект высотой 1,5 м, но с легкостью согласится, что объект высотой 1,5 м±0,003 м может быть также выбран в качестве θ_{min}.

Однако если субъект непреклонен в своем выборе конкретного объекта θ_{min}, то еще нужно убедиться, будет ли выбранный им объект θ_{min} естественным нулем или нет, т. е. нужно проверять согласованность его выбора. Если в качестве естественного нуля был выбран θ_{min} и θ_- — объект в интервале $I_0 - \theta_{min}$, физически отличный от θ_{min}, то субъект никогда не должен утверждать, что $\theta_- <_{\underset{\sim}{A}} \theta_{min}$, а всегда говорить, что $\theta_- \sim_A \theta_{min}$. Аналогично, если объект $\theta \in [\Theta - I_0]$ физически отличим от θ_{min}, то субъект никогда не должен утверждать, что $\theta_{min} \sim_{\underset{\sim}{A}} \theta$, а должен всегда утверждать, что $\theta_{min} <_{\underset{\sim}{A}} \theta$. Если первая ошибка все же сделана, то θ_{min} нужно перенести в θ_-, если сделана вторая ошибка, то за θ_{min} нужно принять θ. В любом случае исходный объект θ_{min} не будет естественным нулем, а функция принадлежности $\mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta)$ — измерена в шкале отношений.

Таким образом, если субъект настаивает на своем выборе θ_{min} в качестве естественного нуля, то процедура проверки состоит в предъявлении нескольких пар объектов θ_i и θ_j, таких, что θ_i и θ_j

физически различимы, а значения $x(\theta_i)$ и $x(\theta_j)$ лежат в малой окрестности x_{min}. Затем субъекта несколько раз просят сделать выбор между случайно предъявляемыми парами объектов, т. е он должен определить, какое из трех отношений $\theta_i >_{\underset{\sim}{A}} \theta_j$, $\theta_i \sim_{\underset{\sim}{A}} \theta_j$, $\theta_j >_{\underset{\sim}{A}} \theta_i$ он считает справедливым. Любая несогласованность — даже в одном испытании — доказывает, что объект θ_{min} не может считаться естественным нулем.

Рассмотрим теперь другие кривые графиков функции принадлежности, изображающие зависимость $\mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta)$ от $x(\theta)$, например, унимодальную кривую на рис 2, представляющую Θ = {одноэтажные дома фиксирований ширины и различной высоты} и свойства *A = эстетическая привлекательность* (т. е. *красивый)*. (Обычно в научной литературе унимодальным называется распределение, имеющее единственный максимум (на рис 2 — континуум).)

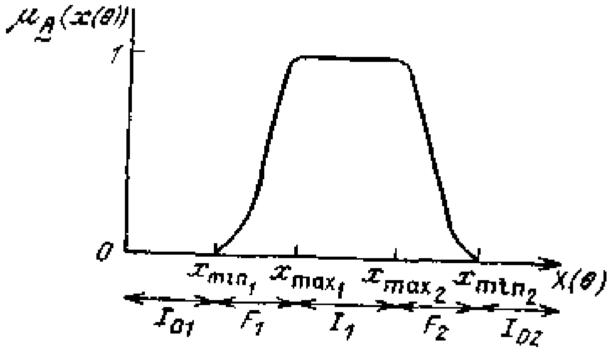


Рис.2

В этом случае

$$I_0 = \bigcup_{i=1}^{n} I_{0_i}.$$

Чтобы интервал I_0 можно было определить точно, и, таким образом, измерять принадлежность в шкале отношений, каждый элемент множества $\{\theta_{min_j}\}_j \ni j$ концевых точек в I_0 должен быть однозначно (с точностью до физической различимости) определен субъектом.

Описанная процедура проверки должна применяться теперь к каждому объекту θ_{min_j} и, если хотя бы одна концевая точка точно не зафиксирована в представлении эксперта, то функция $\mu_{\underset{\sim}{A}}(\theta)$ не измерима в шкале отношений. Как утверждалось ранее, условие, определяющее естественный нуль, по-видимому, невыполнимо для

субъектов, по суждениям которых выясняется структура принадлежностей, поэтому функция принадлежности будет измеряться в шкале, не сильнее шкалы интервалов. Мы чувствуем, что искать точное (с учетом ограничений на физическую различимость) - разбиение Θ на интервалы I_0, I_1 и F на основе свойства $\underset{\sim}{A}$, представление о котором у субъекта неточно (неопределенно или неясно), — изначально неосуществимое желание, к тому же противоречащее основным предпосылкам теории нечетких множеств
В заключение отметим, что разделе 3.1 предложена модель измерения нечеткости для непрерывного носителя *X(Θ).* Сформулированы теоремы представления и единственности и предложен тест для проверки того, какая из двух шкал измерения принадлежности применима в конкретной модели: шкала отношений или всего лишь интервалов. Эта модель измерения может использоваться как основа для построения функций принадлежности. Описаны методы шкалирования и некоторые предварительные результаты их использования в эмпирических исследованиях

3.2. Робастость операторов нечетких отношений

Нечеткое отношение *R* можно построить по заданной цепи импликаций $(A_1 \Rightarrow B_1) \dots (A_n \Rightarrow B_n)$. Отношение рассматривается как оператор, ставящий в соответствие нечеткому множеству *А* некоторое нечеткое множество *В* в качестве значения оператора на аргументе *А*. Рассматривается проблема характеризации робастности такого оператора. А именно, для заданного нечеткого множества *В* — элемента области значений отношения *R* характеризуется семейство нечетких множеств (содержащихся в области определения *R),* таких, что для любого $A \in \mathcal{A} : R \circ A = B$. Характеризация семейства А формулируется как эффективное и необходимое условие принадлежности *А* к А.
Как в классической теории множеств, так и в теории нечетких множеств, понятие отношения служит основой для теоретического определения понятия отображения. Для данных пространств *X* и *Y* отображение можно рассматривать как подходящее подмножество прямого произведения *X*×*Y*. Как в теории, так и на практике, существует множество других путей конкретизации этого понятия. Однако фундаментальное определение базируется на теоретико-множественной концепции. Этот же путь Заде выбрал для определения нечеткого преобразования. По данным отношениям атомарной

импликации $R_i = A_i \Rightarrow B_i,\ i=1,\ ...,\ N$ строится глобальное отношение $R = \bigcup_{i=1}^{N} R_i,$ которое в сочетании с композиционным правилом вывода играет роль оператора. Для данного аргумента — нечеткого множества, взятого из подходящим образом определенной области, используя оператор *R*, можно получить нечеткое множество, представляющее значение этого преобразования. Таким образом имеем дело с системой

$$R \circ A = B, \tag{1}$$

где *А* — аргумент (входное множество), *В* — значение (выходное множество).

В определении нечеткого преобразования по Заде и почти во всех практических работах опорные пространства входных и выходных множеств предполагаются дискретными. Это позволяет представить систему (1) в виде конечной системы алгебраических уравнений, записанных на языке операторов взятия минимума и максимума:

$$[A(x_1),\ \dots,\ A(x_k)] \circ \begin{bmatrix} R(x_1,\ y_1) \dots R(x_1,\ y_l) \\ \dots\dots\dots\dots \\ R(x_k,\ y_1) \dots R(x_k,\ y_l) \end{bmatrix} = [B(y_1) \dots B(y_l)],$$

или согласно определению операции« $\circ$ » в виде

$$\begin{aligned} &(A(x_1) \wedge R(x_1,\ y_1)) \vee \dots \vee (A(x_k) \wedge R(x_k,\ y_1)) = B(y_1), \\ &\vdots \\ &(A(x_1) \wedge R(x_1,\ y_l)) \vee \dots \vee (A(x_k) \wedge R(x_k,\ y_l)) = B(y_l). \end{aligned} \tag{2}$$

С системой (2) связано много проблем, которые должны быть решены прежде, чем ее можно будет использовать на практике в соответствии с эвристическим композиционным правилом вывода. Одна из наиболее привлекательных проблем — проблема о разрешимости системы (2) и поисках ее решений. Задача состоит в том, чтобы по данным *R* и *B* сказать, можно ли найти множество *A* такое, что $R \circ A = B,$ и если да, то определить все такие множества. Далее рассматриваются обе эти проблемы. Вопрос существования был косвенно решен в ряде работ и в несколько модифицированном виде будет рассмотрен в следующем разделе. Что же касается определения решений системы (2), то оказывается, что обычно приходится иметь дело с семейством нечетких подмножеств. Это установленный факт, но остается проблема описания этого семейства. Частично это было сделано в ряде работ: указана верхняя граница семейства решений. В этих работах приводится эффективное условие, согласно которому нечеткое множество становится решением системы (2). Дальнейшее исследование и эффективное определение семейства решений для данных *R* и *B* приводится в разд. 3.2.2. В последнем разделе формулируются некоторые наиболее важные свойства этого семейства. До сих пор внимание было привлечено к проблеме решения системы (2). В то же время название раздела говорит о робастности. Фактически проблема робастности возникает в связи с некоторыми выводами о структуре нечеткого оператора R на заданном множестве решений системы. Если система (1) обладает свойством хорошего отображения, то очевидно, что равенство $R \circ A_i = B_i$ справедливо при любом $i = 1, \ldots, N$. Для практических применений важно знать, как «далеко» от A_i можно сдвигать нечеткое множество на входе системы (1), не изменяя значения B_i на выходе.

3.2.1. Верхняя граница

Пусть заданы пространства X и Y, card $X<\infty$, card $Y<\infty$. Для простоты предположим, что функции принадлежности, определенные на X или Y, принимают значения в единичном интервале, однако это могла бы быть любая вполне упорядоченная полная Брауэрова структура. Для любых элементов $a, b \in [0, 1]$ положим $a \,\alpha\, b = \{x \in [0, 1] : a \wedge x \leqslant b\}$. Теперь можно ввести операцию α для нечетких подмножеств.

Определение 1. Пусть A — нечеткое подмножество пространства X, R — нечеткое отношение, определенное на прямом произведении $X \times Y$. Тогда

$$(A \,\underline{\alpha}\, R)(y) = \bigwedge_X A(x) \,\underline{\alpha}\, R(x, y).$$

Для данного отношения R, определенного на $X \times Y$, можно определить так называемое обратное отношение R^{-1} на $Y \times X$ условием: $R^{-1}(y, x) = R(x, y)$. В этом контексте можно установить теорему.

Теорема 1. Пусть даны: нечеткое отношение R, определенное на $X \times Y$, A и B — нечеткие подмножества X и Y соответственно. Тогда для фиксированных R и B имеем

1) $\mathcal{A} = \{A : R \circ A = B\} \neq \varnothing \Leftrightarrow (R \,\underline{\alpha}\, B^{-1})^{-1}$,

2) $(R \,\underline{\alpha}\, B^{-1})^{-1}$ — максимальный элемент семейства $\mathcal{A}$ при условии, что $\mathcal{A} \neq \varnothing$.

В свете проблемы поиска решения для системы (2) сформулированную теорему можно назвать теоремой существования, так как условие 1 дает ответ на вопрос о существовании решения. Условие 2 дает одно из решений, а именно, наибольшее. Для остальных решений справедливо следующее утверждение:

Утверждение 1. Пусть для данных R и B, и некоторого нечеткого входного множества A имеем: $R \circ A = B$. Тогда для любого нечеткого D, такого, что

$$A \leqslant D \leqslant (R \underline{\alpha} B^{-1})^{-1}$$

справедливо равенство $R \circ D = B$.

Доказательство. В силу условия 2 и простых свойств операций $\max(\vee)$ и $\min(\wedge)$ получаем

$$R(x,\ y) \wedge A(x) \leqslant R(x,\ y) \wedge D(x) \leqslant R(x,\ y) \wedge (R \,\alpha\, B^{-1})^{-1}(x),$$
$$x \in X,\ y \in Y$$

Тогда

$$B(y) = \bigvee_X R(x,\ y) \wedge A(x) \leqslant \bigvee_X R(x,\ y) \wedge D(x) \leqslant$$
$$\leqslant \bigvee_X R(x,\ y) \wedge (R \underline{\alpha} B^{-1})^{-1}(x) = B(y)$$

для любого $y \in Y$. Это означает, что $R \circ D = B$.

При поиске всех представителей семейства $\mathscr{A}$ мы сталкиваемся с более сложными проблемами. Чтобы дать необходимое и достаточное условие принадлежности нечеткого аргумента A семейству $\mathscr{A}$, потребуются дополнительные теоретические рассмотрения.

3.2.2. Характеризация семейства $\mathscr{A}$

Предположим, что имеется отношение $R = [R(x_i, y_j)]$, $i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, l$, определенное на пространстве $X \times Y$, $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_l\}$ и нечеткое подмножество $B = [B(y_j)]$, $j = 1, \ldots, l$ пространства Y. Предположим также, что $(R \underline{\alpha} B^{-1})^{-1} = B$, что обеспечивает условие, согласно которому множество решений задачи непусто. Для простоты обозначим нечеткое множество $(R \underline{\alpha} B^{-1})^{-1}$ через Z. Построим матрицу $\hat{M}$:

$$\hat{M}(Z) = \begin{bmatrix} Z(x_1) \wedge R(x_1,\ y_1) \ldots Z(x_1) \wedge R(x_1,\ y_l) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ Z(x_k) \wedge R(x_k,\ y_1) \ldots Z(x_k) \wedge R(x_k,\ y_l) \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Можно заметить, что $Z(x_j) \wedge R(x_j,\ y_i) = B(y_i)$ при $j = 1, \ldots, k$ и максимальные компоненты i-го столбца равны значению $B(y_i)$ (см. (2)). С помощью операции δ, которую определим следующим образом: для $a,\ b \in [0,\ 1]$ имеем $a\delta b = 1$, если $a = b$, иначе $a\delta b = 0$, на основе матрицы $\hat{M}$ построим матрицу M:

$$M(Z) = \begin{bmatrix} m_{11}\,\delta\, B(y_1) \ldots m_{1l}\,\delta\, B(y_l) \\ \vdots \qquad \vdots \\ m_{k1}\,\delta\, B(y_1) \ldots m_{kl}\,\delta\, B(y_l) \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Легко видеть, что $m_{ij} \in \{0,\ 1\}$. Из предположения, что $R \circ Z = B$, следует, что в каждом столбце матрицы *М* расположена хотя бы одна единица. Появление единиц указывает на выполнение композиционного правила вывода. Построим теперь граф *G*, порожденный матрицей *М,* т. е. рассмотрим матрицу *М* как матрицу инциденций точек из пространства *X* и *Y*. С ее помощью получим двудольныйграф $G = G(X,\ Y,\ U)$, где множество ребер $U = \{u(x_i,\ y_i) : m_{ij} = 1\}$.

Рассмотрим пример.

Пример 1.Пустьо пределены пространства

$$X = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\},\quad Y = \{y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4\},$$

а атомарные отношения R_1 и R_2 определяются нечеткими подмножествами

$$A_1 = [1\ \ 0{,}8\ \ 0{,}3\ \ 0{,}3],\quad B_1 = [0{,}3\ \ 0{,}3\ \ 0{,}7\ \ 1],$$

$$A_2 = [0\ \ 0{,}1\ \ 0{,}8\ \ 1],\quad B_2 = [1\ \ 0{,}9\ \ 0{,}6\ \ 0{,}3].$$

В этом случае глобальное отношение

$$R = R_1 \cup R_2 = (A_1 \Rightarrow B_1),\ \text{иначе}\ (A_2 \Rightarrow B_2)$$

принимает вид

$$R = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}7 & 1 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}8 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}6 & 0{,}3 \end{bmatrix}.$$

Определенная здесь система обладает так называемым свойством хорошего отображения, т. е. $R \circ A_i = B_i,\ \ i = 1, 2.$ Нас интересует вопрос: как далеко от A_1 можно сдвинуть входное множество, не изменяя выходного B_1.

1. По определению 1, можно подсчитать верхнюю границу для А; она равна $(R \underline{\alpha} B^{-1})^{-1} = [1\ \ 1\ \ 0{,}3\ \ 0{,}3]$.
2. Используя формулы (2) и (3) для матрицы *М,* получаем

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Построим граф G:

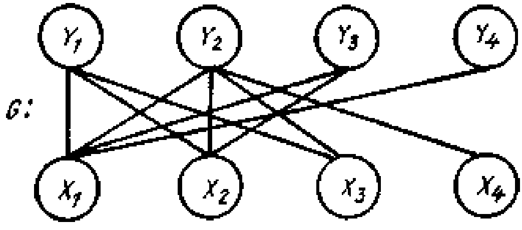


Рис. 1

4. Упорядочим множество Y, положив $y_i \leq y_j$ тогда и только тогда, когда $B_1(y_i) \leqslant B_1(y_j)$. В данном случае точки y_j графа G упорядочены слева направо в возрастающей последовательности (рис. 1).

5. Напомним, что индексы столбцов матрицы M связаны с индексами соответствующих компонентов выходного вектора $[B_1(y_j)]^k{}_{j=1}$. Может оказаться, что некоторые компоненты этого вектора имеют одинаковое значение. В этом случае соответствующие точки графа G должны слиться. Поскольку в данном примере $B_1(y_1)=B_1(y_2)=0{,}3$, то точки y_i и y_{j2} сливаются, образуя граф G_c (рис. 2).

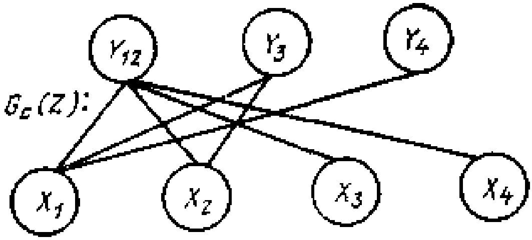


Рис. 2

Для дальнейшего обсуждения предположим, что $B_i(y_j) \neq 0$, $j=1, \ldots l$. Это предположение не ограничивает общность результатов. Если найдется некоторый индекс j такой, что $B_i(y_j)=0$, то точку y_j можно удалить из графа G без какого-либо влияния на окончательный ответ.

Теперь прервем рассмотрение примера, так как для получения заключительных утверждений о семействе А следует обратиться к теории. Используя поясненные в примере понятия, введем следующие определения.

Определение 2. В графе G_c минимальным контактом с множеством Y называется подмножество ребер $C_y \subset U$ такое, что удаление из него любого ребра приведет к отделению некоторой точки (т. е. для некоторого $y \in Y$ степень y станет равна нулю).

Определение 3. Контакт C_y согласован с порядком в Y (см. п. 4 в приведенном примере) тогда и только тогда, когда $u(x_i, y_i) \notin U \Rightarrow u(x_i, y_s) \notin U$ при $s>j$.

В рассматриваемом примере в графе G_c имеется только один минимальный контакт, согласованный с порядком: $C_y=\{u(x_1, y_{12}), u(x_1, y_3), u(x_1, y_4)\}$. Это связано с тем обстоятельством, что степень y_4 = 1 и вершина x_1 инцидентна y_4, но это означает, что $u(x_1, y_4)$ принадлежит любому минимальному контакту, так что, по определению 3, ему должны также принадлежать и ребра $u(x_1, y_{12})$ и $u(x_1, y_3)$. В силу определения 2 очевидно, что любой другой контакт не минимален.

Имея некоторый контакт C_y, минимальный и согласованный с порядком, и используя описанный далее алгоритм, можно получить нечеткое входное множество, столь необходимое для построения семейства A.

Алгоритм 1. Обозначим через $\Gamma(z)$ множество вершин графа G_c, инцидентных данной вершине $z \in X \bigcup Y$ в подграфе $(X, Y, C_y) \subset G_c$, где C_y — минимальный контакт, согласованный с порядком. Нечеткое входное множество $A=[A(x_1), ..., A(x_k)]$ определяется следующим образом:

$$A(x_1)=B(y_s), \quad \text{где} \quad y_s=\max\{y_i : y_i \in \Gamma(x_1)\},$$
$$A(x_2)=B(y_t), \quad \text{где} \quad y_t=\max\{y_i : y_i \in \Gamma(x_2)\},$$
$$\vdots$$
$$A(x_k)=B(y_p), \quad \text{где} \quad y_p=\max\{y_i : y_i \in \Gamma(x_k)\}.$$

Лемма 1. Если для данного нечеткого множества A матрица $M(A)$ (определенная с помощью (2) и (3)) порождает контакт графа $G(Z)$, то $A \in \mathscr{A}$.

Доказательство. Зафиксируем какой-нибудь элемент $y_i \in Y$. Надо доказать равенство

$$\bigvee_X A(x_i) \wedge R \ (x_i, y_j) = B(y_j).$$

Поскольку $M(A)$ порождает контактграфа $G(Z)$, то найдется некоторый x_s такой, что $x_s \in \Gamma(y_j)$. Это, однако, означает, что $m_{sj} \in M(A)$ равно единице. Если это так, то в соответствии с процедурой построения матрицы $M(A)$ имеем $A(x_s) \wedge R(x_s, y_j) = B(y_j)$.

Утверждение 2. Для данных R и B в системе (1) любое нечеткое множество A, полученное с помощью алгоритма 1, принадлежит семецству A.

Доказательство. Легко видеть, что контакт C_y можно считать порожденным $M(A)$. Однако в силу леммы 1 это означает, что $A \in$ A.

Утверждение 3. Любое решение A системы (2), достигнутое с помощью алгоритма 1, — минимальное, т. е. уменьшение любого компонента функции принадлежности $A(x)$ приводит к тому, что

$A \notin \mathcal{A}$.

Доказательство. Уменьшение любого компонента функции принадлежности, определенной с помощью алгоритма 1, влечет исчезновение одной или больше единиц из матрицы $M(A)$. Это означает, что получаемый подграф больше не имеет контакта с множеством Y. По определению, это означает, что для некоторого y_0 степень y_0 = 0, т. е. $\bigvee_X A(x) \wedge R(x,\ y_0) < R(y_0)$, откуда получаем, что $A \notin \mathcal{A}$.

Утверждение 4. Если A — минимально, C — некоторое нечеткое подмножество пространства X и $A \leqslant C \leqslant (R\underline{\alpha}B^{-1})^{-1}$, то $C \in \mathcal{A}$.

Доказательство аналогично доказательству утверждения 1.

Понятие минимального решения было введено в утверждение 3. Минимальное решение строится с помощью конечного двудольного графа. Это позволяет прийти к выводу, что за конечное число шагов можно найти все минимальные контакты в $G(Z)$, согласованные с порядком в Y. Поэтому с помощью алгоритма 1 можно построить все минимальные нечеткие подмножества X. Обозначим их $A^1, ..., A^p$.

Определение 4. Пусть дано конечное нечеткое отношение R и выходное нечеткое подмножество B, содержащееся в Y. Тогда максимальный куб A^i нечетких подмножеств X определяется следующимобразом: $\mathrm{A}^i = \{C$ — нечеткое подмножество X: $A^i \leqslant C \leqslant$ $\leqslant (R\underline{\alpha}B^{-1})^{-1}\}$.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{A}^1$, ..., $\mathcal{A}^p$ — максимальные кубы для данных R и B. Тогда $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{A}^i$.

Доказательство. Включение $\supseteq$, понимаемое в смысле определения 4, очевидно в силу утверждения 4. Рассмотрим обратное включение. Предположим, что $A \in \mathcal{A}$, тогда в силу того, что $A \leqslant R\underline{\alpha}B^{-1})^{-1}$, имеет место включение графа $G(A)$ в граф $G(Z) : G(A) \supseteq G(Z)$ (в смысле включения множества ребер). Поскольку для каждого y_i справедливо равенство $B(y_i) = \bigvee_X A(x) \wedge R(x,\ y_i)$, то $M(A)$ порождает контакт $C_y(A)$ в $G(Z)$, согласованный с порядком. Этот контакт или минимален, т. е. $A = A^i$ для некоторого i, или содержит некоторый минимальный контакт, т. е. $A \in \mathrm{A}^i$ для некоторого i. Это означает, что в обоих случаях A принадлежит, по крайней мере, одному максимальному кубу, что и завершает доказательство.

Эту теорему можно рассматривать как необходимое и достаточное условие того, что данное нечеткое входное множество A будет решением уравнения $R \circ X = B$. Не удивительно, что семейство А — неупорядоченное множество. Это связано со структурой входной области. Поскольку множество А есть объединение кубов А ^{i}, то определенный интерес представляют семейства этого множества Некоторые вводные положения, связанные с этой темой, приведены в следующем разделе.

3.2.3. Некоторые свойства пространства решений

Определим операцию, которая для заданного $A \in \mathscr{A}$ порождает куб:
$\bar{A} = \{C$ — нечеткое подмножество множества
$X : A \leqslant C \leqslant (R \underline{\alpha} B^{-1})^{-1}\}$. (5)

Эту операцию можно обобщить на случай любого семейства пространства решений А. А именно, если $\Omega \subset \mathscr{A}$, то

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{A \in \Omega} \bar{A}. \qquad (6)$$

Легко видеть, что формула (б) определяет операцию замыкания. Известно, что если определена операция замыкания, то семейство $\mathscr{F}$ всех замкнутых подмножеств данного пространства образует решетку относительно операций + и $\ddagger$, определенных следующим образом:

$$F + G = \overline{F \cup G},$$
$$F \ddagger G = F \cap G, \quad F,\ G \in \mathscr{F}. \qquad (7)$$

С учетом определения, записанного в виде условия (5), становится очевидно, что $\overline{F \cup G} = F \cup G$, т. е. сумма замкнутых подмножеств замкнута. В силу этого свойства кажется естественным сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 5. Семейство $\mathscr{F}$ замкнутых подмножеств пространства А с определенной на нем согласно (7) операцией образует дистрибутивную решетку, т. е.

$$F \ddagger (G + H) = F (\ddagger G) + (F \ddagger H),$$
$$A + (G \ddagger H) = (F + G) \ddagger (F + H) \quad \text{для } F,\ G,\ H \in \mathscr{F}.$$

Следствие 1. Решетка $\mathscr{F}$, образованная замкнутыми подмножестрапространства А — модулярная, т. е. $F \ddagger (G + (F \ddagger H)) =$
$= (F \ddagger G) + (F \ddagger H)$.

Выписанное только что равенство справедливо, поскольку любая дистрибутивная решетка модулярна.

Следствие 2. Пусть $C,\ D \in \mathscr{A}$, тогда $C \vee D \in \mathscr{A}$, но не обязательно $C \wedge D \in \mathscr{A}$. Действительно, $C \vee D \in \overline{C \cup D} = \bar{C} \cap \bar{D} \subset \mathscr{A}$. Далее, поскольку существует только один замкнутый относительно самого себя элемент пространства А, а именно: $(R\underline{\alpha}B^{-1})^{-1}$, то, если С и *D* не совпадают с этой максимальной точкой, они не замкнутые. Кроме того, $C \bigwedge D \in \bar{C} \; \ddagger \; \bar{D} \subset \mathscr{A}$ только в тривиальном случае при *С* = *D*. Можно доказать, что существуют решения, точнее, минимальные решения $\mathscr{A}^i$, пересечение которых ($\bigwedge$ — операция взятия минимума для функции принадлежности) уже не будет решением. Это следует с очевидностью из понятия минимального контакта и алгоритма 1.

Обатим нимание на практическое значение изложенной теории. На практике оператор нечеткого преобразования *R*, образованный импликацией отношений $A_i \Longrightarrow B_i$ аппроксимирует некоторую реальную зависимость вход-выход. Во многих случаях эта зависимость достаточно строго может быть выявлена в виде вербального описания. Допустим, что единственно доступная информация о реальном процессе — это такое лингвистическое описание. С помощью теории нечетких множеств его можно представить системой (1). Однако теперь возникает вопрос: насколько точно формальная система отражает опыт человека. В основу анализа можно положить различные определения уровней точности. Интересующий нас смысл, вкладываемый в понятие точности, раскрывается экспертом в диалоговом режиме создания нечеткой системы. На основе теории нечетких множеств разработчик строит нечеткую систему в виде нечеткого отношения, полученного с помощью атомарных импликаций, построенных по экспертной информации. На этом этапе из-за языковой неопределенности могут возникнуть серьезные затруднения. Предположим, что эксперт описал систему, состоящую из *N* атомарных импликаций $(\bar{A}_i \Rightarrow B_i)$. На основе изложенной теории разработчик системы может построить семейства $\mathscr{A}^1, \ldots, \mathscr{A}^N$ как множество решений для $B_1, \ldots, B_N$ соответственно. Если эксперт согласен, что все члены семейства $\mathscr{A}^i$ огут быть приняты в качестве входных для соответствующего B_i, то все в порядке. Однако может оказаться, что некоторые множества $\mathscr{A}^i$ слишком широки. Это означает, что либо при определении структуры, либо в реализации системы допущены ошибки. И их нужно устранить, чтобы достичь необходимой с эвристической точки зрения согласованности между экспертом и разработчиком системы. Иначе проблема решения системы (1) может считаться неадекватной реальности.

4. Эталонный подход к получению нечеткого отношения предпочтения

Нечеткие отношения индивидуального предпочтения *JR* на *X* предлагается получать с использованием множества «эталонных» объектов У и заданного на У отношения S. Вводится закон «взаимодействия» *\F* между *X* и *Y* или закон «согласования» *S я R*. Исследуются его свойства для некоторого типа отношений. Рассматривается проблема выбора на основе отношения *R*, а также проблемы организации таких экспертиз и практического применения эталонного подхода. Приводятся примеры. В заключение обсуждается роль эталонных объектов при экспертизе.

4.1. О понятии эталона. Эталонное отношение в четком случае

В естественных науках под эталонами понимают нечто, принимаемое за образец, критерий, модель, пример или правило для сравнения или сопоставления с эквивалентными объектами. В качестве примеров эталонов укажем на: метр — эталон меры длины; уровень жизни — стандарт, принятый в данной стране для оценки условий жизни; установленные обычаем или общим согласием нормы взаимоотношений между людьми, служащие для характеристики стиля поведения в данном обществе; и последнее — уголовное законодательство, представляющее собой канонический свод моделей — эталонов противоправного поведения (и соответствующих эталонных мер наказания).

Приведенные примеры иллюстрируют только одну составляющую эксплуатируемого понятия, а именно, физическую содержательность понятия «эталон» в различных контекстах. Далее остановимся на физическом содержании этого понятия в задачах получения и обработки индивидуальных предпочтений. Здесь же отметим, что для семантической точности понятия необходимо также определить его формульную составляющую, дающую возможность оперировать точной формальной структурой при разработке аналитического аппарата.

Основное назначение эталона состоит в том, что содержащаяся в нем информация определенного типа служит для оценки аналогичной информации в других объектах. Эти оценки могут быть представлены в виде бинарных отношений индивидуального предпочтения. В ряде работ рассматривается четкое отношение «быть эталоном» и описывается его формальная структура. Пусть M — некоторое множество объектов и A — отношение эквивалентности на M. Это отношение определяет разбиение множества M на систему непустых подмножеств классов разбиения —$\{M_1, M_2, ...\}$, таких, что

$$1)\quad M = M_1 \cup M_2 \cup \dots,$$
$$2)\quad M_i \cap M_j = \varnothing \text{ при } i \neq j.$$

Наличие разбиения $M = \{M_1, M_2, ...\}$ означает, что в каждом его классе M_i собраны такие элементы из M, которые сходны, одинаковы или эквивалентны в смысле, определяемом отношением A. Теперь в каждом множестве M_i выберем некоторый содержащийся в нем элемент x_i и будем называть его эталоном для всякого элемента y, входящего в то же множество M_i. По определению, будем полагать выполненным соотношение x_iA_y. Так, определенное отношение в ряде работ называется отношением «быть эталоном»; обозначим его через Θ.

На основе этого конструктивного определения «x является эталоном для y» структура Θ характеризуется следующими свойствами:
1) для всякого y существует эталон x: $x\Theta y$;
2) если $x\Theta y$, то $y\Theta x$;
3) из $x\Theta y$ и $z\Theta y$ следует $x = z$.

Можно показать, что из этих трех свойств следует определение эталона с помощью разбиения. Другими словами, существует сюръективное отображение $\varphi : X \to Y$, где X — множество объектов, а элементы множества образов Y служат эталонами для элементов из X. Элемент y_j будет эталоном для объектов $x_i \in X$, если $\varphi(x_i)=y_j$. Множество всех элементов $x_i \in M$, имеющих данный образ $y_i \in Y$, составляет класс разбиения множества X по отношению «иметь общий образ», «иметь общий эталон».

Результаты традиционного (метрического) использования эталонов в качестве меры всегда можно выразить в виде заключения, что этой меры в исследуемых объектах содержится больше, меньше, столько же или же она вовсе отсутствует. Четкое отношение «быть эталоном» — в силу своей бинарной природы — может фиксировать наличие или отсутствие только одного из этих факторов. В связи с этим целесообразно обратиться к нечетким бинарным отношениям, позволяющим при соответствующем использовании эталонов выражать все четыре перечисленные соотношения.

Нечеткое бинарное отношение R определяется как нечеткая совокупность упорядоченных пар. Если $X=\{x\}$ и $Y=\{y\}$ — множества объектов, то нечеткое отношение из X в Y определяется как нечеткое подмножество $X \times Y$, характеризуемое функцией принадлежности $\mu_R(x, y)$, которая каждой паре (x, y) ставит в соответствие степень принадлежности $\mu_R(x, y)$ отношению R. На практике $\mu_R(x, y) \in [0, 1]$. Если $X = Y$, то говорят, что бинарное отношение определено на множестве X, если же $X \neq Y$, то говорят, что бинарное отношение определено между множествами X и Y, и такие отношения называют отображениями.

4.2. Общая схема проведения экспертных оценок

Для получения отношений индивидуального предпочтения при использовании четких отношений применяют, как правило, одну из двух известных схем: или одновременное сравнение (ранжирование) по предпочтительности всех объектов, или одновременное сравнение только двух объектов (парное сравнение). Известно, что парные сравнения производятся наиболее просто, однако их объем может быть очень велик в случае полных парных сравнений.

Рассмотрим следующую общую схему проведения экспертных оценок. Пусть наряду с множеством исследуемых объектов X экспертам предъявляется также множество эталонных объектов Y. Эксперты производят парные сравнения (x_i, y_j), $x_i \in X$, $y_j \in Y$.

Функционирование такой схемы определяется тремя отношениями: наперед заданным отношением S *на* множестве эталонных объектов Y, искомым отношением R *на* множестве исследуемых объектов X, и отношением F *между* этими двумя множествами. Другими словами, отношение S фиксирует состояние системы эталонных множеств, искомое отношение R должно характеризовать состояние системы элементов $x_i \in X$, а (отношение) отображение F определяет характер взаимодействия этих систем, характер их согласования.

Однако для полного описания такой схемы указанных трех отношений, очевидно, не достаточно. Общая схема будет определяться постулатом, закладываемым в основу закона взаимодействия этих трех отношений, и соответственно свойствами формальной реализации такого закона взаимодействия. Прежде чем перейти к обсуждению предлагаемого закона взаимодействия, напомним некоторые свойства используемых отношений.

4.3. Формальное описание отношений в общей схеме экспертизы

Определение 1. Нечетким отношением *между* множествами X и Y называется нечеткое подмножество R прямого произведения $X \times Y : R \subset X \times Y$. В случае, если $Y=X$, то отношение R называется отношением *на* множестве X.

В теории нечетких множеств рассматривается понятие композиции нечетких отношений.

Определение 2. Пусть R — отношение между X и Y, а S — отношение между Y и Z. Композицией $S \circ R$ отношений R и S называется отношение T между X и Z с функцией принадлежности

$$\mu_T(x, z) = \bigvee_{y \in Y} \mu_S(x, y) \wedge \mu_S(y, z).$$

В терминах композиции бинарных отношений формулируются многие свойства этих отношений, в частности, свойство транзитивности нечеткого отношения R, заданного на данном множестве X, которое может быть записано в виде $R \circ R \subseteq R$.

Таким образом, нечеткое отношение R называется транзитивным, если для всех $x, y, z \in X : \mu_R(x, z) \geqslant \mu_R(x, y) \wedge \mu_R(y, z)$. Помимо свойства транзитивности бинарные отношения характеризуются также свойствами рефлексивности (антирефлексивности) и симметричности (антисимметричности). Отношение R называется рефлексивным, если $\mu_R(x, x) = 1$ для всех $x \in X$ (соответственно антирефлексивным, если $\mu_R(x, x) = 0$для всех $x \in X$), называется симметричным, если $\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x)$ (антисимметричным, если из $\mu_R(x, y) > 0$ следует $\mu_R(y, x) = 0$).

Простейшими нечеткими отношениями предпочтения являются отношение нечеткого частичного порядка и отношение нечеткого линейного порядка. Нечеткий частичный порядок определяется как антисимметричное, транзитивное отношение, а отношение линейного нечеткого порядка как связное отношение частичного порядка, т. е. такое отношение частичного порядка, что для любой пары *(x, y)* или $\mu_R(x, y) > 0$> или $\mu_R(y, x) > 0$. Так, определенные отношения суть естественная экспликация соответствующих типов четких отношений.

Важную роль в теории нечетких бинарных отношений играет понятие нечеткой эквивалентности. Отношение нечеткой эквивалентности определяется как рефлексивное, симметричное, транзитивное нечеткое отношение.

В теории принятия решений рассматриваются отношения предпочтения. Такими отношениями называются рефлексивные, связные бинарные отношения. Опишем общую структуру нечетких предпочтений.

Пусть R — такое отношение, т. t. рефлексивное и связное бинарное отношение. Обозначим через I бинарное отношение с функцией принадлежности $\mu_I(x, y) = \mu_R(x, y) \wedge \mu_R(y, x)$ и через P — бинарное отношение с функцией принадлежности:

$$\mu_P(x, y) = \begin{cases} \mu_R(x, y), & \text{если } \mu_R(x, y) > \mu_R(y, x), \\ 0 & , \text{если } \mu_R(x, y) \leqslant \mu_R(y, x). \end{cases}$$

Отношения I и P называются отношениями безразличия и строгого предпочтения для отношения R.

Теорема 1. Если R — транзитивное нечеткое отношение предпочтения, то отношения I и P также будут транзитивными.

Доказательство. Для отношения I утверждение теоремы доказано в ряде работ**.** Покажем, что отношение P транзитивно. Надо показать, что

$$\mu_P(x, z) \geqslant \mu_P(x, y) \wedge \mu_P(y, z). \tag{1}$$

Очевидно, можно считать, что $\mu_P(x, y) > 0$ и $\mu_P(y, z) > 0$. Однако-Тогда $\mu_P(x, y) = \mu_R(x, y)$, $\mu_P(y, z) = \mu_R(y, z)$, причем $\mu_R(x, y) > \mu_R(y, x)$ и $\mu_R(y, z) > \mu_R(z, y)$. Если $\mu_P(x, z) > 0$, то $\mu_P(x, y) = \mu_R(x, z)$ и (1) совпадает с условием транзитивности отношения R. Предположим, что $\mu_P(x, z) = 0$. Тогда $\mu_R(x, z) = \mu_I(x, z)$ или $\mu_R(x, z) \leqslant \mu_R(z, x)$. Итак, имеем $\mu_R(x, y) > \mu_R(y, x)$, $\mu_R(y, z) > \mu_R(z, y)$ и $\mu_R(z, x) \geqslant \mu_R(x, z)$. Среди этих шести чисел выберем наименьшее. Очевидно, возможны три случая:

А. Наименьшее есть $\mu_R(y, x)$. Тогда $\mu_R(y, x) \geqslant \mu_R(y, z) \wedge \mu_R(z, x)$. Так как $\mu_R(y, z)$ не наименьшее, то $\mu_R(z, x) = \mu_R(y, x)$ и $\mu_R(x, z) = = \mu_R(z, x)$. Но $\mu_R(x, z) \geqslant \mu_R(x, y) \wedge \mu_R(y, z)$. Так как $\mu_R(x, z)$ — наименьшее число, то одно из значений $\mu_R(x, y)$ и $\mu_R(y, z)$ тоже должно быть наименьшим, что противоречит исходным неравенствам.

Б. Наименьшее есть $\mu_R(z, y)$. Тогда $\mu_R(z, y) \geqslant \mu_R(z, x) \wedge \mu_R(x, y)$, откуда $\mu_R(z, x) = \mu_R(x, z) = \mu_R(z, y)$ — наименьшие. Так как $\mu_R(x, z) \geqslant \mu_R(x, y) \wedge \mu_R(y, z)$, то получаем противоречие.

В. Наименьшее есть $\mu_R(x, z)$. Тогда $\mu_R(x, z) \geqslant \mu_R(x, y) \wedge \mu_R(y, z)$. Но $\mu_R(x, y)$ и $\mu_R(y, z)$ заведомо не наименьшие, и опять получаем противоречие.

Отметим, что обратная теорема неверна, т. е. транзитивность отношений I и P, вообще говоря, не влечет транзитивности отношением R**.**

Наиболее существенно будет использоваться свойство транзитивности отношения строгого предпочтения P. Это связано с тем, что условие транзитивности отношения P достаточно для существования функции выбора, определяемой отношением P.

Описанная в разд. 4.2 общая схема проведения экспертных оценок предусматривает возможность использования как нечетких, так и четких отношений. Заметим, что предыдущие определения классов нечетких отношений и свойств этих отношений дают соответствующие четкие понятия, если считать, что функция принадлежности μ принимает только значения 0 и 1.

4.4. Закон взаимодействия отношений

Пусть заданы два множества X и Y с нечеткими отношениями R и S на них соответственно. Пусть также задано нечеткое отношение F между X и Y. Кортеж $\langle X, R; Y, S; F\rangle$ будем называть согласованной схемой, если выполнено соотношение

$$R = F^{-1} \circ S \circ F, \tag{2}$$

где

$$\mu_R(x, y) = \bigvee_{u, v \in Y} \{\mu_F(x, u) \wedge \mu_S(u, v) \wedge \mu_F(y, v)\}.$$

Отметим, что на языке теории множеств согласно закону (2) отношение R является прообразом отношения S относительно соответствия F.

Одна из проблем, возникающих при исследовании закона (2), состоит в изучении того, какие из свойств транзитивности отношения S в соответствии с этим законом переносятся на отношение R. При произвольном выборе отношения F нельзя, вообще говоря, утверждать выполнение свойства транзитивности отношения R, даже если отношение S — четкое. Однако при некоторых дополнительных условиях на отношения F и S можно доказать, что свойство транзитивности отношения P выполняется для отношения R. Доказательству этого посвящена оставшаяся часть раздела.

Сначала введем важное свойство нечеткого отношения F, которое в дальнейшем будет предполагаться выполненным постоянно. Будем говорить, что отношение F функционально, если оно удовлетворяет условию: для любого $x \in X$ существует единственное $y \in Y$, такое, что $\mu_R(x, y) = 1$. Другими словами, предполагается, что в каждой строке матрицы отношения F найдется элемент, равный 1.

Далее докажем теоремы, устанавливающие транзитивность строгого отношения предпочтения *P* для предпочтения *R*, определяемого законом (1) в следующих двух частных случаях:

1) *S* — четкое отношение линейного порядка, а *F*— нечеткое отношение, обладающее свойством функциональности;

2) *S* — нечеткий линейный порядок, *F* — четкое отображение

Теорема 2. Пусть $R=F^{-1}\circ S\circ F$. Тогда *P* — четкий частичный порядок, если *S* — четкий линейный порядок, а *F* — нечеткое отображение $F: X\to Y$.

Доказательство. Рассмотрим функцию принадлежности отношения $R=F^{-1}\circ S\circ F: \mu_R(x_1, x_2)=\bigvee_{y_1, y_2\in Y}\{\mu_F(x_1, y_1)\wedge\mu_S(y_1, y_2)\wedge\mu_F(x_2, y_2)\}$.

Так как *F* обладает свойством функциональности, то для каждого *x* существует единственный элемент y_x, такой, что $\mu_F(x, y_x)=1$. В силу того, что *S* есть четкий линейный порядок, для каждой пары (x_1, x_2) либо $\mu_S(y_{x_1}, y_{x_2})$ и $\mu_S(y_{x_2}, y_{x_1})=0$, либо, наоборот, $\mu_S(y_{x_2}, y_{x_1})=1$ и $\mu_S(y_{x_1}\ \ y_{x_2})=0$, либо $\mu_S(y_{x_1}, y_{x_2})=$ $=\mu_S(y_{x_2}, y_{x_1})=1$.

В первом случае имеем $\mu_R(x_1, x_2)=1$ и $\mu_R(x_2, x_1)<1$, откуда $\mu_P(x_1, x_2)=1$ и $\mu_P(x_2, x_1)=0$. Аналогично во втором случае получаем $\mu_R(x_1, x_2)<1$ и $\mu_R(x_1, x_2)=1$. Наконец, в третьем случае $\mu_R(x_1, x_2)=\mu_R(x_2, x_1)$ и $\mu_P(x_1, x_2)=\mu_P(x_2, x_1)$. Итак, показано, что отношение *P* четкое. Покажем, что *P* транзитивно. Пусть $\mu_P(x_1, x_2)=1$ и $\mu_P(x_2, x_3)=1$. Но тогда $\mu_S(y_{x_1}, y_{x_2})=1$ и $\mu_S(y_{x_2}, y_{x_3})=1$ и в силу транзитивности *S* $\mu_S(y_{x_2}, y_{x_3})=1$, откуда $\mu_R(x_1, x_2)=1$. Предположим, что также $\mu_R(x_3, x_1)=1$. Но тогда $\mu_S(y_{x_3}, y_{x_1})=1$ и $y_{x_1}=y_{x_2}=y_{x_3}$, что противоречит предположению $\mu_P(x_1, x_2)=1$. Полученное противоречие показывает, что $\mu_P(x_1,x_3)=1$, что и требовалось доказать.

Теорема 3. Пусть $R=F^{-1}\circ S\circ F$. Тогда *P* — нечеткий частичный порядок, если *S* — нечеткий линейный порядок, а *F* — четкое отображение.

Доказательство. Имеем

$$\wedge\mu_F(x_2, y_2)=\mu_S(F(x_1), F(x_2)).$$

$$\mu_R(x_1, x_2)=\bigvee_{y_1, y_2\in Y}\{\mu_F(x_1, y_1)\wedge\mu_S(y_1, y_2)\wedge$$

Пусть

$$\mu_R(x_1, x_2)>\mu_R(x_2, x_1),$$

т. е.

$\mu_S(F(x_1), F(x_2)) > \mu_S(F(x_2), F(x_1))$. Так как S — нечеткий линейных порядок, то отсюда следует, что $\mu_S(F(x_2), F(x_1)) = 0$. Обратно, из предыдущего условия следует, что $\mu_R(x_1, x_2) >$ $> \mu_R(x_2, x_1)$. Таким образом, условие $\mu_P(x_1, x_2) > 0$ равносильно условию $\mu_S(F(x_2), F(x_1)) = 0$. Покажем, что P транзитивно, т. е. что $\mu_P(x_1, x_3) \geqslant \mu_P(x_1, x_2) \wedge \mu_P(x_2, x_3)$ для любых $x_1, x_2, x_3 \in X$. Очевидно, что достаточно рассмотреть случай $\mu_P(x_1, x_2) > 0$ и $\mu_P(x_2, x_3) > 0$. Но тогда

$$\mu_P(x_1, x_2) \wedge \mu_P(x_2, x_3) = \mu_R(x_1, x_2) \wedge \mu_R(x_2, x_3) =$$
$$= \mu_S(F(x_1), F(x_2)) \wedge \mu_S(F(x_2), F(x_3)) \leqslant \mu_S(F(x_1), F(x_3)) = \mu_R(x_1, x_3). \quad (3)$$

Предположим, что $\mu_R(x_1, x_3) \leqslant \mu_R(x_3, x_1)$. Тогда $\mu_P(x_1, x_3) = 0$ и $\mu_S(F(x_3), F(x_2)) > 0$. Но в силу $\mu_P(x_1, x_2) > 0$ имеем $\mu_s(F(x_1), F(x_2)) > 0$ и, аналогично, $\mu_S(F(x_2), F(x_3)) > 0$, откуда $\mu_s(F(x_1), F(x_3)) > 0$. Так как S есть нечеткий линейный порядок, то $F(x_1) = F(x_3)$. Имеем $0 = \mu_S(F(x_2), F(x_1)) = \mu_S(F(x_3), F(x_2)) = \mu_S(F(x_1), F(x_2))$, что противоречит линейности S. Полученное противоречие показывает, что $\mu_R(x_1, x_3) > \mu_R(x_3, x_1)$, т. е. $\mu_R(x_1, x_3) = \mu_P(x_1, x_3)$. Возвращаясь к (3), получаем доказываемую транзитивность.

Итак, рассмотрен закон взаимодействия (2) для двух типов отношений S — четких и нечетких линейных порядков. Отметим, что в случае, когда S есть «отношение равенства» на эталонах, задача построения отношения R сводится к задаче кластерного анализа.

4.5. Выбор на основе отношения

В этом разделе будет предложен подход к решению проблемы выбора подмножеств «наилучших» альтернатив из заданного множества X альтернатив, подлежащих оценке. Ранее было показано, как на основе закона взаимодействия на множестве X может быть построено нечеткое отношение предпочтения R. Значение $\mu_R(x, y)$ функции принадлежности этого отношения интерпретировалось как «степень предпочтительности» альтернативы x альтернативе y. Так как исходное предпочтение R есть нечеткое отношение, то естественно полагать, что и подмножество «наилучших» относительно R альтернатив окажется нечетким множеством в X. Предлагаем следующее.

Определение 3. Подмножеством наилучших относительно предпочтения R альтернатив из множества X называется нечеткое подмножество $B(R)$ с функцией принадлежности

$$\mu_{B(R)}(x) = \bigwedge_{y \in X} \mu_R(x, y). \quad (4)$$

В качестве обоснования для такого определения можно привести следующие соображения. Пусть R — четкое отношение линейного квазипорядка. Известно, что относительно R множество распадается на классы попарно неразличимых элементов, причем сами классы отношением R уже линейно упорядочены. В этом случае применение формулы (4) к R выделяет класс наилучших альтернатив относительно R. Таким образом, формулу (4) можно рассматривать как обобщение на произвольные нечеткие предпочтения такого понятия, как «класс наилучших альтернатив относительно линейного квазипорядка».

Вообще говоря, если на R не накладывать никаких ограничений, то множество $B(R)$ наилучших альтернатив, определяемое формулой (4), может оказаться пустым, и мы будем не в состоянии произвести выбор в X. Поэтому желательно иметь критерий, который на основе свойств предпочтения R гарантировал бы возможность выбора. Оказывается, что предпочтения R, возникающие на основе предложенной ранее схемы, всегда имеют непустое подмножество наилучших альтернатив $B(R)$. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Пусть нечеткое предпочтение R таково, что соответствующее строгое предпочтение P транзитивно. Тогда $B(R) \neq \varnothing$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда

$$\bigvee_{y \in X} \mu_R(x, y) = 0. \tag{5}$$

Выберем произвольно $x_0 \in X$. Согласно (5) найдется значение $x_1 \in X$, такое, что $\mu_R(x_0, x_1)=0$. Поскольку R — линейное отношение, то, по определению отношения P, имеем $\mu_P(x_1, x_2)>0$. Аналогично для x_1 найдется значение x_2, такое, что $\mu_R(x_1, x_2)=0$ и $\mu_P(x_2, x_1)>0$. Продолжая этот процесс, построим последовательность $\{x_i\}$ элементов множества X, такую, что $\mu_R(x_i, x_{i+1}) = \mu_P(x_i, x_{i+1})=0$, а $\mu_P(x_{i+1}, x_i)>0$. Так как множество X конечно, то для некоторых k и n, таких, что $k<n$, имеем $x_k = x_n$. В силу транзитивности P имеем

$$0 = \mu_p(x_{n-1}, x_n) = \mu_p(x_{n-1}, x_k) \geqslant$$

$$\geqslant \mu_p(x_{n-1}, x_{n-2}) \wedge \mu_p(x_{n-2}, x_k) \geqslant ..$$

$$... \geqslant \mu_p(x_{n-1}, x_{n-2}) \wedge \mu_p(x_{n-2}, x_{n-3}) \wedge ... \wedge \mu_p(x_{k+1}, x_k) > 0.$$

Полученное противоречие завершает доказательство.

Доказанный результат, а также теоремы 1—3 показывают, что применение формулы (4) для построения нечеткого подмножества «наилучших» альтернатив всегда дает непустое множество, если в качестве предпочтения R используются отношения, образующиеся из предложенной общей схемы.

Формулу (4) несложно обобщить и на случай, когда выбор производится не из всего множества *X*, а из некоторого его (возможно, нечеткого) непустого подмножества *A*. Тогда множество *B*(*R*) определяется функцией принадлежности $\mu_{B(R)}(x) = \bigwedge_{\mu_A(y)>0} \mu_R(x, y) \wedge A(x)$. Легко показать, что теорема 4 остается справедливой и в этом случае.

4.6. Вопросы практического применения эталонного подхода

В организации экспертизы по описанной в п. 4.2 общей схеме можно выделить следующие три последовательных этапа и возникающие при этом вопросы.

I этап:

а) формирование множества эталонов *Y*,

б) назначение или экспертное определение на *Y* соответствующей структуры, т. е. определение эталонного отношения *S*.

II этап:

а) выбор типа отношения *F:* нормированное или ненормированное, четкое или нечеткое,

б) выбор способа оценки *F:* с помощью экспертов или «техническими» средствами.

III этап:

а) определение на *X* отношения *R*, индуцированного отношением *S*,

б) построение решающего правила.

Несмотря на то, что в ходе экспертизы перечисленные по этапам вопросы возникают именно в такой последовательности, эти вопросы взаимосвязаны и должны разрешаться комплексно. Здесь будут рассмотрены вопросы, возникающие на первых двух этапах и проиллюстрирована техника расчетов по приведенной схеме.

Происхождение объектов, принимаемых за эталоны, должно определяться спецификой решаемой задачи, и поэтому само понятие эталона — относительное. Однако и на общем уровне рассмотрения можно указать некоторые общие приемы их выбора. Например, при экспертизе промышленных или потребительских товаров в качеств эталонов можно выбирать два или три образца, один — признанный на уровне мировых стандартов, второй — «средний» по своим показателям, и третий — бракованный образец. Другими словами, здесь эталоны могут выбираться или назначаться *извне* и ни один из них может не принадлежать множеству X рассматриваемых объектов.

В другом случае эталоны могут выбираться из числа подлежащих оценке объектов. Для этого можно провести предварительную экспертизу с целью выделения, например, наилучшего, наихудшего и промежуточного между ними объектов при условии высокой согласованности экспертных суждений об этих объектах. Эталоны могут выбираться также исходя из условий, что они являются наиболее яркими носителями ценных или существенных для целей экспертизы признаков (свойств). В этом случае эталоны реализуют некоторый предикат, который экспертам представляется очевидным. Таким образом, в практических ситуациях отношение S может назначаться организаторами экспертизы или определяться с помощью дополнительной экспертизы.

Экспертное оценивание отношения F между X и Y удобно производить в таблице $X \times Y$, входными элементами которой являются элементы из X, а выходными — эталоны из множества Y. Учитывая то обстоятельство, что отображение F должно удовлетворять условию функциональности, экспертное оценивание F можно производить двумя способами. В первом на экспертные оценки $f(x_i, y_j)$ элементов таблицы $X \times Y$ не накладывается никаких ограничений, связанных с условием функциональности, но по окончании экспертизы каждая i-я строка таблицы $X \times Y$ нормируется максимальным значением $f(x_i, y)$, $y \in Y$. Во втором случае эксперту предлагается сначала выбрать для каждого $x_г$ максимально близкий к нему эталон y_j и оценить их сходство $f(x_i, y_j)$ единицей; а остальные оценки $f(x_i, y_l)$, $y_l \in Y$, $l \neq j$, $i = \text{const}$, назначать исходя из этой максимально схожей пары.

Представляется полезным применить такой тестовый прием: сначала не предъявлять к экспертным оценкам отношения F требования функциональности. Тогда стремление экспертов для фиксированного x_i несколькими значениями $f(x_i, y_j)$, $y_j \in Y$ присвоить значение 1 будет свидетельствовать или о неудачном выборе эталонов, или о недостаточном профессиональном уровне экспертов.

Рассмотрим теперь примеры организации таких экспертиз и выполнения расчетов по схеме (1).

Пример 1. Пусть на экспертизу представлено три объекта, т. е. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ и множество эталонов состоит из двух объектов $Y = \{y_1, y_2\}$, на которых определен четкий линейный порядок

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Допустим, что эксперт оценил степень сходства каждого объекта с каждым эталоном и определил отношение *F* следующим образом.

$$F' = \begin{pmatrix} 0,16 & 0,80 \\ 0,75 & 0,52 \\ 0,36 & 0,90 \end{pmatrix}$$

Перейдем теперь к нормированной матрице отношения *F*,

$$F = \begin{pmatrix} 0,2 & 1,0 \\ 1,0 & 0,7 \\ 0,4 & 1,0 \end{pmatrix}$$

В соответствии с (2) определим отношение предпочтения *R* на *X:*

$$R = \begin{pmatrix} 0,2 & 1,0 \\ 1,0 & 0,7 \\ 0,4 & 1,0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0,2 & 1,0 & 0,4 \\ 1,0 & 0,7 & 1,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,0 & 0,7 & 1,0 \\ 1,0 & 1,0 & 1,0 \\ 1,0 & 0,7 & 1,0 \end{pmatrix}.$$

Если нормированное отношение *F* представить в виде двудольного орграфа (рис 1), то уже из неформальных соображении, рассматривая этот граф, можно сделать вывод, что из данных трех объектов x_1, x_2 и x_3 объект x_2 наиболее предпочтителен, поскольку он со степенью 1 схож с наиболее предпочтительным эталоном y_1. Отношение строгого предпочтения *P,* соответствующее отношению *R,*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

подтверждает этот неформальный вывод.

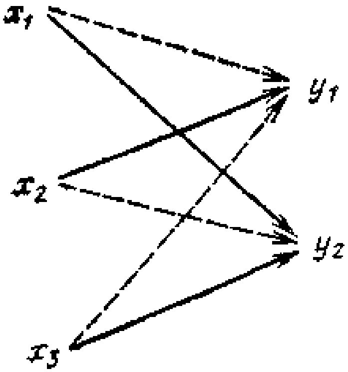


Рис. 1

Отношение безразличия *I*, соответствующее *R,* имеет вид

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0,7 & 1 \\ 0,7 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Пусть множество рассматриваемых объектов X состоит из трех объектов, $X = \{a_1, a_2, a_3\}$ и экспертам предлагается использовать шкалу оценок $Y = \{x, y, ..\}$ представляющую собой множество действительных чисел.

Таким образом, задача эксперта состоит в том, чтобы построить четкое отображение $f : X \to Y$.

Определим эталонное отношение S на множестве Y условием

$$S(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 1, & \text{если } x < y, \\ 1 - e^{y-x}, & \text{если } x > y, \end{cases}$$

а отношение F между X и Y будет определяться условием

$$F(a_i, x) = \begin{cases} 0, & \text{если } a_i \neq x, \\ 1, & \text{если } a_i = x. \end{cases}$$

Пусть эксперт оценил объекты следующим образом $f(a_1) = 1$, $f(a_2) = 1$, $f(a_3) = 2$. Определим предпочтения, порождаемые этими оценками в соответствии с законом (2)

$$R(a_i, a_j) = \bigvee_{x, y} \{F(a_i, x) \wedge S(x, y) \wedge F(a_j, y)\}.$$

Например,

$$R(a_3, a_1) = F(a_3, 2) \wedge S(2, 1) \wedge F(a_1, 1) = 1 \wedge (1 - e^{-1}) \wedge 1 = 1 - e^{-1}.$$

Таким образом, получаем следующее отношение

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 - e^{-1} \\ 1 & 1 & 1 - e^{-1} \\ 1 - e^{-1} & 1 - e^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Отношения строгого предпочтения P и безразличия I, соответствующие отношению R, имеют вид

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 - e^{-1} & 1 - e^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно отношению P объект x_3 предпочтительнее объектов x_1 и x_2 со степенью $1 - e^{-1}$, а все множество X разбивается на два четких класса (x_1, x_2) и (x_3).

Пример 3. Пусть элементы эталонного множеетва $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ есть разновесы трех различных, но неизвестных номиналов, и на первом этапе экспертизы с помощью экспертов на Y определен нечеткий линейный порядок S, матрица которого имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}95 & 1 \\ 0 & 1 & 0{,}90 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значения $\mu_S(y_i, y_j)$, $i<j$, выражают степень уверенности экспертов в том, что y_i тяжелее y_j. Задача экспертизы состоит в том, чтобы с помощью эталонных разновесов проранжировать объекты из $X=\{x_1, x_2, x_3\}$. В распоряжении исследователя имеется прибор, позволяющий только оценить отношение x/y или y/x. Определим отношение F в законе (2) формулой

$$F(x_i, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{если } x_i/y_j = 1, \\ \dfrac{2}{x_i/y_j + y_j/x_i}, & \text{если } x_i/y_j \neq 1. \end{cases}$$

Пусть взвешивание дало следующие результаты:

$$x_i/y_j = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 3{,}6 & 18{,}0 \\ 0{,}4 & 1{,}8 & 9{,}0 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 2{,}0 \end{pmatrix}, \quad y_j/x_i = \begin{pmatrix} 1{,}1 & 2{,}2 & 10{,}0 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 2{,}5 \\ 0{,}0 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Тогда нормированное отношение F имеет вид

$$F(x_i/y_j) = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 0{,}51 & 0{,}11 \\ 0{,}88 & 1{,}0 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}86 & 1{,}0 \end{pmatrix}.$$

Подставляя отношения F и S в (2), получаем

$$R = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 0{,}95 & 1{,}0 \\ 0{,}88 & 1{,}0 & 0{,}90 \\ 0{,}25 & 0{,}86 & 1{,}0 \end{pmatrix}.$$

Отношение.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}95 & 1{,}0 \\ 0 & 0 & 0{,}90 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

дает искомое ранжирование $x_3<x_2<x_1$.

Исследуемые при экспертизе альтернативы характеризуются, как правило, многофакторной природой. Поэтому в практических задачах часто оказывается, что расхождение между экспертными суждениями возникает не вследствие различного отношения экспертов к этим альтернативам, а из-за того, что эксперты — вольно или невольно — при сравнении альтернатив привлекают дополнительные, не оговоренные в статусе экспертизы признаки. Наличие эталонных объектов ограничивает степень свободы экспертов в этом отношении и делает условия сравнения альтернатив более жесткими.

Варьируя содержательным наполнением, операционным значением и формальной экспликацией эталонного отношения, можно учитывать такие особенности природы и структуры свойств, которыми наделяются эталонные объекты, и тем самым добиваться большей адекватности оценок целям экспертизы. Так, одно и то же эталонное множество можно характеризовать свойствами, реализующими содержательное и формальное представление о полезности, доминировании, сходстве, эквивалентности, или свойствами, превращающими эталоны в представителей некоторых кластеров, или свойствами скалярной природы и т. п.

Предлагаемая схема организации экспертизы, как представляется, обладает следующими достоинствами:

1) простотой проведения парных сравнений и потенциальной возможностью уменьшить их общее число подобно тому, как это делается при частичных парных сравнениях;

2) наличием общих для всех экспертов фиксированных объектов, играющих роль точек отсчета при оценивании исследуемых объектов, способствующих унификации механизмов индивидуального оценивания и, следовательно, повышению согласованности экспертных оценок;

3) она предоставляет в распоряжение исследователей средство для совершенствования и разработки методов экспертного оценивания, наиболее адекватных целям экспертизы за счет варьирования как физической природы и состава эталонных объектов, так и типа определяемого на них отношения.

Еще один важный момент связан с выбором закона взаимодействия эталонного отношения с экспертными измерениями. Общее назначение такого закона состоит в том, чтобы или 1) получить отношения, позволяющие решить задачу экспертизы, или 2) выявить соответствие экспертных предпочтений эталонной структуре, или и то и другое. (Здесь рассматривалась только первая задача.)

В данной работе исследовался только один закон взаимодействия эталонного отношения с экспертными измерениями. На самом деле в условиях одной и той же практической задачи можно, по-видимому, рассматривать несколько таких законов. При выборе закона взаимодействия нужно руководствоваться, по крайней мере, двумя соображениями.

Во-первых, закон взаимодействия должен гарантировать получение «хороших» отношений, т. е. отношений, обладающих нужными теоретико-множественными свойствами, позволяющими решить задачу экспертизы. Во-вторых, закон должен «учитывать» свойства экспериментального и эталонного отношений и иметь содержательную интерпретацию и (или) формальное обоснование.

В связи с этим весьма полезным может оказаться общий системный подход к экспертизе. Экспертизу можно рассматривать как модель реальной системы с двумя входами X и Y, «серым ящиком» и ограничениями, накладываемыми на выходное отношение — отношение R. Свойства отношений на X и Y характеризуют состояние этих входов, свойства результирующего отношения R играют роль ограничений на состояние выхода, а функционирование «серого ящика» должно определяться состояниями входов и выхода, а также физическим постулатом, что все эти три компонента системы связаны реально общим законом — законом взаимодействия. Задача исследователя системы состоит в поиске и формулировании такого закона.

5. Вопросы анализа и синтеза нечетких отображений

В практических ситуациях отображения чаще всего задаются не точными уравнениями, а совокупностью дискретных, зашумленных и неточных данных. Как рассматривать и представлять в виде нечетких такие отображения — тема настоящего исследования. Особенно рекомендуется представление нечетких отображений с помощью нечетких гранул.

В практических ситуациях реальные действительно-значные отображения получают не всегда в виде аналитических уравнений $y=f(x)$, а скорее в виде совокупности дискретных данных, как некоторое семейство точек (x_i, y_i), $i=1, m$. Очевидно, что такая спецификация функций f неполна. Кроме того, данные часто оказываются зашумленными или неточными, в этих случаях спецификация f может быть только приближенной. Предполагая для заданного уравнения некоторую структурную форму f, имеющиеся данные можно использовать для идентификации параметров f. Однако в некоторых случаях уже относительно природы того, что специфицируется, может существовать неопределенность: в какой степени можно судить о том, что имеющиеся в распоряжении исследователя выборки получены по наблюдениям за отображением, а не за отношением между элементами?

Первоначальная конкретизация того, что предполагается быть отображением, обычно не достаточно результативна. Нужны методы анализа данных для отбора исходной информации. Могут оказаться желательными и другие представления, отличные от простого задания набором точек, которые должны быть не только просты в обращении, но и учитывать неопределенность первичной спецификации, а не вводить произвольную, иллюзорную и часто вводящую в заблуждение точность.

Можно представить себе, что первичные данные дают картину *f*. Если разглядывать эту картину слишком близко, то форма *f* покажется очень нерегулярной и беспорядочной из-за зернистости изображения, но стоит отойти подальше, как картина покажется однородной и более определенной. По аналогии с этим будем интересоваться здесь такими локально-зернистыми представлениями *f*, которые могут оказаться глобально гладкими; и теория возможностей создает, по-видимому, подходящую основу для таких представлений.

Вначале рассмотрим, что практически понимается под нечетким отображением, а не быдем вводить сразу некоторые нечеткие версии классических математических определений.

Сначала рассмотрим различные типы спецификаций, затем обратимся к анализу возможных свойств специфицированных отображений; затем обрисуем некоторые методы получения приемлемых представлений.

5.1. Различные типы спецификаций отображений

Спецификации отображения могут быть более или менее неопределенными. Можем выделить следующие случаи.

А. Предполагается, что все точки (x_i, y_i) принадлежат графику функции $y=f(x)$, $x\in\mathscr{X}\subset\mathbf{R}$, $y\in\mathscr{Y}\subset\mathbf{R}$. В этом случае возникает проблема подбора кривой: найти функцию *f*, обладающую некоторыми «приятными» свойствами (вообще предполагается, что *f* наделена некоторой структурной формой, например *f* — многочлен) и минимизирующую $\Sigma_i(f(x_i)-y_i)^2$ или некоторый другой критерий. В ряде работ нечеткая характеристическая функция использовалась для определения «остроты» угла в каждом узле сплайна в алгоритме аппроксимации с переменными узлами.

Б. Из-за возможных ошибок измерения точки (x_i, y_i) не обязательно принадлежат графику *f;* есть уверенность только в том, что, например,

$$\exists\, x_i^*\in[x_i-\Delta x_i,\ x_i+\Delta x_i],\ \exists\, y_i^*\in[y_i-\Delta y_i,\ y_i+\Delta y_i],$$

такие, что $y^*_i=f(x^*_i)$.

Иногда вместо четких, как здесь, интервалов, возможное положение x^*_i (соответственно y^*_i) может быть ограничено выпуклым и нормализованным нечетким множеством X_i (соответственно Y_i). Другими словами, при использовании α-среза $X_{i\alpha}$ множества X_i (определенного как $X_{i\alpha}=\{x,\ \mu_{X_i}(x)\geqslant\alpha,\ \alpha\in]0,\ 1]\}$, где μ_{X_i} — функция принадлежности X_i), вполне допустимо, что со степенью $\alpha'\leqslant\alpha$ точка $x^*_i\notin X_{i\alpha}$. Вследствие выпуклости X_i срез $X_{i\alpha}$ есть интервал, а нормальность X_i гарантирует, что $X_{i1}\neq\varnothing$. Функция X_i представляет собой нечеткое число или распределение возможностей для более или менее возможных значений неизвестного x^*_i. В этом случае последовательность пар нечетких множеств $(X_i,\ Y_i)$ приводит к введению мягких ограничений в задаче подбора кривой. Кроме того, ошибка при попытке измерить x^*_i не всегда не зависит от ошибки измерения y^*_i: между ними может существовать взаимодействие, даже тогда, когда такое взаимодействие практически трудно объяснить. Другими словами, расположение точки $(x^*_i,\ y^*_i)$ может быть ограничено соответствующим подмножеством прямого произведения

$$[x_i-\Delta x_i,\ x_i+\Delta x_i]\times[y_i-\Delta y_i,\ y_i+\Delta y_i]$$

и в более общем случае соответствующим подмножеством $X_i\times Y_i$. Прямые произведения невзаимодействующих нечетких подмножеств определяются через оператор конъюнкции min:

$$\mu_{X_i\times Y_i}(x,\ y)=\min(\mu_{X_i}(x),\ \mu_{Y_i}(y)),\ \forall x\in\mathscr{X},\ y\in\mathscr{Y}. \qquad (1)$$

Теперь, чтобы контролировать конъюнкции ошибок, можно использовать операции более строгой конъюнкции, такие как произведение или $\max(0,\ a+b-1)$ и с их помощью построить слабо невзаимодействующие прямые произведения:

$$\max(0,\ \mu_{X_i}(x)+\mu_{Y_i}(y)-1)\leqslant\mu_{X_i}(x)\cdot\mu_{Y_i}(y)\leqslant\min(\mu_{X_i}(x),\ \mu_{Y_i}(y)).$$

Примечание. При одних и тех же условиях проведения n измерений $(x^j{}_i,\ y^j{}_i,\ j=1,\ n)$ пары $(x_i,\ y_i)$ существуют несколько способов объединения интервалов ошибок

$$I^j(x_i)=[x_i^j-\Delta x_i^j,\ x_i^j+\Delta x_i^j],$$

$$I^j(y_i)=[y_i^j-\Delta y_i^j,\ y_i^j+\Delta x_i^j]$$

в (четкое или нечеткое) подмножество $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$. Основной вопрос состоит в следующем: следует ли для построения гранулы информации объединить сначала $I^j(x_i)$ и $I^j(y_i)$, а затем уже построить прямое произведение, или объединить прямые произведения

$$I^j(x_i)\times I^j(y_i),\ j=1,\ n.$$

В. В случае А задавались точно размещенные точки подлинного отображения f. В случае Б были известны нечеткие расположения точек подлинного отображения f, и на основе сведений о выборке точек, которые не принадлежат графику f, а только располагаются в его окрестности, определялись возможные границы каждого расположения. Теперь предположим, что точки снова расположены точно, однако f уже не настоящее отображение. Другими словами, y есть функция не только от x, но и от других переменных, хотя если интересоваться только грубым описанием всего процесса, то действием этих вторичных переменных можно пренебречь. Можно обратиться к модели $y=f(x)+w$, где f — подлинное отображение и w — случайная переменная с нулевым математическим ожиданием. В качестве альтернативы можно рассмотреть модель, которая оказывается почти отображением и в которой $\tilde{f}$ — нечеткое отображение: $\tilde{f}(x)$ есть нечеткое множество, ограничивающее возможные значения «соответствующего» y, т. е. каждому x ставится в соответствие нечеткое значение $\tilde{f}(x)=\tilde{y}$.

Если в распоряжении имеется большое число точек (x_i, y_i), то для того чтобы уплотнить информацию, можно пожелать сгруппировать точки в нечеткие кластеры. Таким образом, неточность данных (см. Б), а также неясная природа f могут привести к введению нечетких множеств прямого произведения $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ в качестве описания отображения f.

Г. Функцию f можно определить и непосредственно с помощью выпуклых нормализованных нечетких множеств. Выпуклые нечеткие множества удобны по той причине, что они моделируют грубо специфицированные значения. Если эти нечеткие множества снабжены контекстно зависимыми метками на естественном языке, то можно говорить о лингвистических спецификациях. Есть три типа причин, по которым f может задаваться лингвистически: 1) даже при хорошо известной функции f может возникать интерес только к ее грубому описанию; 2) доступность только приближенного описания f, как, например, в случае Б, когда неточность данных эквивалентна заданию нечетких множеств; 3) f — не настоящее отображение, может рассматриваться как таковое с точностью до аппроксимации. Эта ситуация относится к случаю В. Данные относительно f можно разбить на кластеры, чтобы построить нечеткие множества, наделенные лингвистической интерпретацией. Такую лингвистическую спецификацию можно описать как множество пар $(X_i,\ Y_i)$, $i=1,\ N$ нечетких множеств.

5.2. Четкое представление нечеткой гранулированной спецификации

Рассмотрим данные, состоящие из $\{(X_i,\ Y_i)\},\ i=1,\ N,$ где X_i (соответственно Y_i) — нечеткое множество на $\mathscr{X}$ (соответственно на $\mathscr{Y}\subset\mathbf{R}$, выпуклое и нормализованное по предположению. Если считать, что в основе истинного отображения $f:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ лежит такая спецификация, то для любого i множество Y_i будет образом множества X_i при отображении f, т. е. можно использовать принцип продолжения

$$\forall\, i, \forall\, y, \mu_{Y_i}(y) = \sup_{x\in\mathscr{X}} \mu_{X_i}(x) \tag{2}$$

при ограничении $y=f(x)$. Соотношение (2) словами можно выразить так: «чем больше x принадлежит X_1, тем больше y принадлежит Y_i» Действительно, из (2) следует

$$\forall\, x,\ \mu_{Y_i}(f(x)) \geqslant \mu_{X_i}(x). \tag{3}$$

Другими словами, если f сужено на носитель $S(X_i)$ множества X_i, то f — отображение с нечеткой областью определения X_i и нечеткой областью значений Y_i. Такого типа отображение детально изучалось в литературе по нечеткой топологии. Отметим, что соотношение (2) определяет наименьшее нечеткое множество Y_i (в смысле обычного включения нечетких множеств), которое при заданном X_i удовлетворяет неравенству (3). Условие (3) можно также интерпретировать в терминах α-срезов:

$$(3) \Leftrightarrow \forall\, \alpha \in]\,0,1],\ x \in (X_i)_\alpha \Rightarrow f(x) \in (Y_i)_\alpha$$

или эквивалентно $(X_i)_\alpha \subseteq f^{-1}((Y_i)_\alpha),\ \forall\alpha\in]0,\ 1]$.

В рамках этой интерпретации проблема идентификации состоит в том, чтобы найти функцию f, удовлетворяющую соотношению (2). Именно, каждая пара множеств $(X_i,\ Y_i)$ порождает часть f_i функции f, определенной на $S(X_i)$. Затем все части f_i нужно объединить в единственную функцию f.

Для данной пары i условие (2) можно представить в виде

$$\forall\, y \in S(Y_i),\ \mu_{Y_i}(y) = \sup_x \min(\mu_{X_i}(x), \mu_{F_i(x)}(y)), \tag{4}$$

где

$$\mu_{F_i(x)}(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y=f_i(x), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Решением (4) для заданного значения y будет характеристическая функция $\mu_{F_i(\cdot)}(y)$ множества $\{x\,|\,\mu_{X_i}(x)=\mu_{Y_i}(y)\}$. Другими словами, f_i определяется из условия

$$\forall x \in S(X_i),\ f_i(x) = y : \mu_{X_i}(x) = \mu_{Y_i}(y).$$

Заметим, что f_i не обязательно существует на $S(X_i)$, например, если $\exists x \in S(X_i),\ \forall y \in S(Y_i),\ \mu_{Y_i}(y) \neq \mu_{X_i}(x)$. Кроме того, f_i может определяться неоднозначно, например, если $\exists x$ такой, что множество $\Phi_i(x) = \{y \mid \mu_{Y_i}(y) = \mu_{X_i}(x)\}$ содержит более одного элемента. Для того чтобы характеризовать f на основе всех данных пар $\{(X_i, Y_i)\},\ i = 1, N$, следует отыскать процедуру для синтеза множества $\{f_i\},\ i = 1, N$ отображений, полученных от каждой пары $(X_i, Y_i),\ i = 1, N$. По сути надо проверить согласованность f_i и f_j в случае, когда $X_i \cap X_j \neq \varnothing$. А именно, чтобы избежать противоречивой информации, множества возможных значений $f_i(x)$ и $f_j(x)$ $\forall x \in S(X_i \cap X_j)$ не должны пересекаться. Итак, множество условий для существования не нечетких отображений f, лежащих в основе гранулированной спецификации $\{(X_i, Y_i)\},\ i = 1, N$ имеет вид

$$\begin{cases} \forall i, \forall x \in S(X_i), \Phi_i(x) \neq \varnothing, \\ \forall i, \forall j \neq i, \forall x \in S(X_i \cap X_j) \neq \varnothing, \Phi_i(x) \cap \Phi_j(y) \neq \varnothing. \end{cases} \quad (5)\text{-}(6)$$

При условиях (5) и (6) функцию f можно (не единственным образом) выбрать из условия: $\forall i,\ \forall x \in S(X_i),\ f(x) \in \Phi_i(x)$. Заметим, что если для представления $\{(X_i, Y_i)\},\ i = 1, N$ существует функция f, то

$$\forall i, j, \sup_y \min(\mu_Y(y), \mu_{Y_i}(y)) \geqslant \sup_x \min(\mu_{X_i}(x), \mu_{X_j}(x)). \quad (7)$$

Доказательство. Согласно (3) $\sup_y \min(\mu_{Y_i}(y), \mu_{Y_j}(y)) \geqslant$

$$\geqslant \sup_x \min(\mu_{Y_i}(f(x)), \mu_{Y_j}(f(x))) \geqslant \sup_x \min(\mu_{X_i}(x), \mu_{X_j}(x)).$$

Примечание. Если X_i, Y_i — нечеткие множества при всех i, то $\forall x \in X_i,\ \Phi_i(x) = Y_i$, так что прямое произведение $X_i \times Y_j$ составляет возможную область значений для определения f_i.

Если f не существует, то для представления гранулированной спецификации вместо четкого отображения можно попытаться построить нечеткое отношение.

5.3. Нечеткое представление нечеткой гранулированной спецификации

Обобщение (2) на нечеткое представление приводит к проблеме нахождения нечеткого отношения R на $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$, построенного из нечетких отношений R_i, таких что

$$\forall\, y,\ \mu_{Y_i}(y) = \sup_{x \in \mathscr{X}} \min\left(\mu_{X_i}(x),\ \mu_{R_i}(x, y)\right). \qquad (8)$$

И опять ответ не единственный.

Интересным решением (8) будет прямое произведение $X_i \times Y_i$, определенное в (1). Это — решение невзаимодействующее, так как всякое $\alpha \in]0,\ 1]$ сужает X_i и Y_i до $(X_i)_\alpha$ и $(Y_i)_\alpha$ и приводит к сужению $X_i \times Y_i$ на $(X_i)_\alpha \times (Y_i)_\alpha$. Это согласуется с примечанием в разд. 5.2.

Заметим, что $X_i \times Y_i$ всегда будет решением (8) только потому, что X_i и Y_i имеют один и тот же вес (как нормализованные нечеткие множества). Прямое произведение $X_i \times Y_i$ называется *нечеткой гранулой.*

Переобозначая (8) в компактной форме $Y_i = X_i \circ R_i$, имеем

$$Y_i = X_i \circ (X_i \times Y_i)\ ; \quad X_i = Y_i \circ (X_i \times Y_i), \qquad (9)$$

так что $X_i \times Y_i$ представляет собой двухстороннее решение, не заключающее в себя идею причинной связи между X_i и Y_i. В представлении $(X_i,\ Y_i)$ через $X_i \times Y_i$ предполагается всего лишь возможно одновременное появление X_i и Y_i. Наконец, X_i и Y_i можно восстановить из $X_i \times Y_i$ с помощью проекции.

Общее отношение целесообразно определить как

$$R = \bigcup_{i=1,\,N} X_i \times Y_i, \qquad (10)$$

где $\bigcup$ обозначает max.

Это определение устанавливает, что R отражает возможность одновременного появления любой пары *(*X_i и Y_i*)* (Когда гранулы частично перекрываются, суммируем их, беря их объединение (в смысле max), и тем самым отходим от вероятностной интерпретации гранул).

Этот подход широко используется в литературе по нечеткому управлению.

Однако можно предпочесть направленную интерпретацию гранулярной спецификации и допустить некоторую причинную связь между X_i и Y_i. Тогда пара *(*X_i и Y_i*)* означает «если x есть X_i, то y есть Y_i». Используя какую-нибудь многозначную импликацию, можно определить R_i, например, условием

$$R_i^1(x,\ y) = \max\left(1 - \mu_{X_i}(x),\ \mu_{Y_i}(y)\right), \qquad (11)$$

$$R_i^2(x,\ y) = \min\left(1, 1 - \mu_{X_i}(x) + \mu_{Y_i}(y)\right). \qquad (12)$$

Следует отметить следующие свойства:

для *(x, y)* таких, что $\mu_{Y_i}(y) \geqslant \mu_{X_i}(x)$ (т. е. y есть возможное значение *f(x)* в (2))

$$R_i^1(x, y) \geqslant \frac{1}{2} \text{ и } R_i^2(x, y) = 1 ;$$

если X_i — нечеткое множество, то $X_i \circ R^1{}_i \supset Y_i$, $X_i \bullet R^2{}_i \supset Y_i$ (строгое включение). Это обусловлено частичным перекрытием X_i и $\bar{X}_i$ (дополнением X_i), которое мешает восстановлению исходной информации для низких степеней принадлежности. Можно показать, что для непрерывных X_i

$$\mu_{R_i^1 \circ X_i}(y) = \max(0{,}5, \mu_{Y_i}(y))$$

$$\mu_{R_i^2 \circ X_i}(y) = \frac{1}{2}(1 + \mu_{Y_i}(y) ;$$

если $\mu_{X_i}(x) = 0$ (т. е. x не имеет ничего общего с X_i), то $\mu_{R_i}(x, y) = 1$ при любом y, что означает: y совершенно неопределенен, в то время как $\mu_{X_i \times Y_i}(x, y) = 0$.

Глобальное отношение, определенное на семействе $\{R^j{}_i\}$, $i = 1, N$, с помощью некоторой импликации, можно получить, полагая

$$R = \bigcap_{i=1,N} R_i^j, \; j = 1, 2,$$

где $\bigcap$ означает min.

Это агрегирование можно оправдать тем фактом, что если пара (X_i, Y_i) четкая при любом i и множества X_i представляют собой последовательность соседних непересекающихся интервалов, то

$$\bigcap_{i=1,N} R_i^j = \bigcup_{i=1,N} X_i \times Y_i, \; j = 1, 2.$$

Однако есть доводы и против такого объединения отношений $R^j{}_i$.

Примечание. Наибольшее решение в (8) (в смысле обычного включения нечетких множеств) имеет вид

$$\mu_{\hat{R}_i}(x, y) = 1, \text{ когда } \mu_{Y_i}(y) \geqslant \mu_{X_i}(x),$$

$$\mu_{\hat{R}_i}(x, y) = \mu_{Y_i}(y) \text{ в остальных случаях.}$$

Оно соответствует импликации Брауэра и, таким образом, выражает причинность.

Если импликацию (11) заменить ассоциированной с ней эквивалентностью, то поскольку min(max(l—a, b), max(a, 1— b))= max(min(a, b), min(l—a, 1—b)), функцию $\mu_{R_i}(x, y)'$ следует заменить на $\max(\mu_{X_i \times Y_i}(x, y), \mu_{\bar{X}_i \times \bar{Y}_i}(x, y))$, где $\bar{X}_i$ и $\bar{Y}_i$ обозначают дополнения X_i и Y_i соответственно. Такая эквивалентность соответствует высказыванию «x есть X_i и y есть Y_i» или «x не есть X_i и y

не есть Y_i», которое запрещает как высказывание «x есть X_i и y не есть Y_i», так и «x не есть X_i и y есть Y_i».

Таким образом, при использовании эквивалентности заранее предполагается, что соответствие X_i и Y_i будет однозначным в каждом из этих двух возможных смыслов.

При использовании импликации заранее предполагается, что нечетко специфицированное отображение рассматривается как «грубое отображение», обратное к «грубо инъективному», поскольку, когда x принадлежит X_i, исключается любое другое нечеткое значение, отличное от Y_i. Использование прямого произведения не накладывает заранее никаких ограничений и не мешает парам (X_i, Y_i) и $(X_1, Y'_1 \neq Y_i)$ быть представленными в спецификациях.

Утверждения вроде «x принадлежит X_i и y принадлежит Y_i», «если x принадлежит X_i, то y принадлежит Y_i», «y принадлежит Y_i, тогда и только тогда, когда x принадлежит X_i» представляют собой нечеткие гранулы информации. Заде использовал это выражение в другом контексте, но с аналогичным смыслом. Высказывание «x принадлежит X_i и y принадлежит Y_i» соответствует нечеткой грануле $X_i \times Y_i$ (конечно, если X_i и Y_i — взаимодействующие, то $X_i \times Y_i$ можно заменить соответствующим подмножеством), выражающей локальную информацию без какого-либо предварительного предположения о природе того, что специфицируется.

Примечание. Одна из важнейших проблем заключается в оценке нечеткого множества Y', соответствующего данному нечеткому множеству по гранулированной информации, заданной парами (X_i, Y_i). Поскольку мы пренебрегаем тем, что же точно согласно (2) отображается соответствием $X' \to Y'$, то можно попытаться экстраполировать Y'.

В литературе по нечеткому управлению Y' обычно определяется выражением

$$Y' = R \circ X', \text{ где } R = \bigcup_{i=1,N} X_i \times Y_i.$$

Можно показать, что это эквивалентно $Y' = \bigcup_{i=1,N} ((X_i \times Y_i) \circ X')$,

т. е. эквивалентно сохранению раздельных гранул при выполнении max-min композиции и последующего объединения результатов. Более того, имеем

$$\forall y, \mu_{Y'}(y) = \max_{i=1,N} \min(\mathrm{hgt}(X' \cap X_i), \mu_{Y_i}(y)), \tag{13}$$

где hgt есть высота нечеткого множества; $\mathrm{hgt}(X' \cap X_i) = \sup \mu_{X \cap X_i}$.

Очевидно, что при этом подходе выполняется неравенство

$$\forall i, \mathrm{hgt}(Y' \cap Y_i) \geqslant \mathrm{hgt}(X' \cap X_i), \tag{14}$$

которое представляет естественное требование. На основе (12) предложен другой способ определения Y':

$$Y' = \bigcap_{i=1,N} (X' \circ R_i^2).$$

При таком подходе правила $X_i \Rightarrow Y_i$ сохраняются раздельными.

Для того чтобы судить относительно возможности сохранить или не сохранить эти правила раздельными, требуется тщательно изучить приводит ли использование импликации при работе с гранулированными спецификациями к возможному удовлетворению таких естественных требований, как (14).

5.4. Гранулированные спецификации

В этом разделе рассмотрение ограничивается спецификациями, составленными из множества «гранул» $X_i \times Y_i,\ i = 1,\ N$. Другими словами, каждая гранула $(X_i,\ Y_i)$ интерпретируется как прямое произведение: нечеткое множество $X_i \times Y_i$ выглядит как нечеткое пятно или гранула в этой области.

При построении гранулированной спецификации информация должна анализироваться по ее полноте, согласованности и избыточности.

По-видимому, полноту спецификации логично связать с качеством покрытия множества X, области определения $\mathscr{X}$. Покрытие

$$\mathrm{cov}\,(\mathscr{X},\ X_i,\ i = 1,\ N) =$$
$$= \inf_{x \in \mathscr{X}} \max_{i} \mu_{X_i}(x) = 1 - \sup_{x \in \mathscr{X}} (1 - \max_{i=1,N} \mu_{X_i}(x))$$

равно дополнению до 1 возможности того, что существует элемент из области $\mathscr{X}$, который не «принадлежит» нечеткому множеству $\bigcup_{i=1,N} X_i$.

Другими словами, это есть мера невозможности этого события и мера необходимости противоположного события:

«Все элементы области $\mathscr{X}$ действительно «принадлежат» нечеткому множеству $\bigcup_{i=1,N} X_i$».

Функцией $\mathrm{cov}(\mathscr{X};\ X_i,\ i = 1,\ N)$ оценивается, с какой степенью множества X_i образуют хорошее покрытие области $\mathscr{X}$.

Примечание. В ряде работ излагается, по-видимому, более вероятностный подход, поскольку при определении нечеткого разбиения накладывается требование

$$\inf_{x\in\mathscr{X}} \sum_{i=1,N} \mu_{X_i}(x) = 1.$$

Если исключить нарушение непрерывности предмета спецификации, то две пары (X_i, Y_i), (X_j, Y_j) будут выглядеть противоречивыми как при близких X_i и X_j, так и далеко расположенных друг от друга Y_i и Y_j. Предположим, что существует отображение f такое, что $Y_i = f(X_i)$ и $Y_j = f(X_j)$ (в смысле (2)). Тогда неравенство

$$\sup_{y\in\mathscr{Y}} \min(\mu_{Y_i}(y), \mu_{Y_j}(y)) \geqslant \sup_{x\in\mathscr{X}} \min(\mu_{X_i}(x), \mu_{X_j}(x)) \quad (15)$$

выражает тот факт, что согласованность Y_i и Y_j больше или равна согласованности X_i и X_j. Согласованностью двух нечетких множеств оценивается степень возможности, с которой две переменные, априорные значения которых ограничены этими множествами, принимают одно и то же значение. Неравенство (15) превращается в равенство, когда f взаимно-однозначная функция. Это согласуется с тем, что обратное неравенство (интерпретируемое как «чем ближе Y_i и Y_j, тем ближе должны быть X_i и X_j») реализует некоторый тип грубого условия инъективности.

Если неравенство (15) не выполняется, то либо пары (X_i, Y_i) и (X_j, Y_j) противоречивы, либо f — разрывная функция. Можно показать, что неравенство остается справедливым, если $\forall x \exists y$:

$$\mu_R(x, y) = 1 \text{ и } Y_i = R \circ X_i,\ Y_j = R \circ X_j.$$

Если $Y_j = f(X_j)$, $Y_i = f(X_i)$ и данные непротиворечивы, то как необходимое следствие получается

$$X_i \subseteq X_j \Rightarrow Y_i \subseteq Y_j.$$

Пара (X_j, Y_j) дает избыточную информацию относительно (X_i, Y_i), и к тому же эта информация менее точная. Однако X_i, возможно, необходимо для того, чтобы обеспечить хорошее покрытие $\mathscr{X}$. Множество X_j окажется действительно излишним, если множества

$$\{X_k \mid k = 1, N\} - \{X_j\}$$

образуют достаточно хорошее покрытие области $\mathscr{X}$.

Величиной $I(X_i, X_j) = \inf_{x\in\mathscr{X}} \max(\mu_{X_j}(x), 1 - \mu_{X_i}(x))$ оценивается степень пустоты пересечения $X_i \cap \bar{X}_j$. Ее можно рассматривать как степень включения X_i в X_j. Если $Y_i = f(X_i)$ и $Y_j = f(X_j)$, то можно показать, что $\forall i \neq j \quad I(Y_j, Y_i) \geqslant I(X_j, X_i)$. Величина

$$\max_{i\neq j} I(X_j, X_i)$$

оценивает, до какой степени можно считать, что существует X_k, содержащее другие X_i.

Таким образом, во избежание избыточности можно потребовать, чтобы $\mathrm{cov}(\mathscr{X};\ X_i,\ i=1,\ N)$ и $1-\max_{i\neq j} I(X_j,\ X_i)$ были близки к 1.

Наконец, если носитель некоторого Y_i слишком велик, то информация становится слишком неточной и для того, чтобы сделать локально точным поведение предмета спецификации, удобно заменить X_i на семейство подмножеств (которое вместе с множеством $\{X_k | k=1,\ N\}-\{X_i\}$ сохраняет хорошее покрытие $\mathscr{X}$).

5.5. Нечеткие представления точечных данных

В этом небольшом разделе кратко затронем два вопроса. Первый: каким образом можно представить большое семейство точечных данных $(x_i,\ y_i)$ с помощью относительно малого числа нечетких гранул или нечетким отношением? Второй: как перейти от нечеткого гранулированного представления к нечеткому отношению? Первые попытки рассмотреть эти вопросы с аналитической точки зрения были сделаны для гранулярного подхода. Хотя гранулярное представление оказалось очень полезным, аналитический подход остается очень привлекательным. Это объясняется тем, что нечеткое отношение R на $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ может оказаться эквивалентным нечетко-значному отображению $\tilde{f}$ (представляющему обычное отображение $\mathscr{X}$ во множество нечетких подмножеств множества $\dot{\mathscr{Y}}$, поскольку $\forall x,\ \forall y \mu_R(x,\ y)=\mu_{\tilde{f}(x)}(y)$.

Такое представление удобно для обобщенных аналитических операций, таких, как интегрирование и дифференцирование.

Общие этапы процедуры получения таких представлений нечетких гранул или нечеткого отношения состоят в следующем:

1) если семейство точек $(x_i,\ y_i)$ велико, применим сначала какой-нибудь метод кластеризации, который представляется подходящим, такой, чтобы с его помощью можно обрабатывать большие множества данных;

2) первый шаг дает нечеткие гранулы. С помощью проектирования можно получить пары $(X_i,\ Y_i)$ (для простоты предполагаем, что рассматривается двумерный случай) и затем гранулированную спецификацию точечных данных;

3) наоборот, выполнив объединение нечетких гранул, получим нечеткое отношение $\tilde{f}$. Для того чтобы сделать его более гладким и легким для последующих аналитических выкладок, можно прибегнуть к следующей процедуре:

$\forall x \in \mathscr{X}$ взять выпуклую оболочку $f^*(x)$ отношения $\tilde{f}(x)$ и нормализовать *f*(x)*,
выбрать параметризованное представление, например (L—*R)*-представление, и идентифицировать параметры, так, чтобы они соответствовали *f*(x)*.
Таким образом, получим не вероятностное аналитическое представление исходного точечного множества данных.

Нечеткие отношения, рассматриваемые как отображения точек в нечеткие множества, еще не нашли большого отражения в литературе. В противоположность этому гранулярная точка зрения рассматривалась и применялась более широко, причем чаще всего с использованием прямого произведения. Новые интересные вопросы возникли после введения Заде нечеткого вероятностного ограничения в гранулярном знании.

Важно отметить, что в теории нечетких множеств и нечеткие отображения, и гранулированная нечеткая информация могут рассматриваться как альтернативные способы моделирования одних и тех же плохо определенных систем. Многие направления исследований остались еще не изученными: проблемы идентификации аналитического представления нечетких отображений, правил проверки пригодности гранулированной информации и т. п. Цель этих исследований состоит в обеспечении возможности получать легкие в обработке представления плохо определенных систем с учетом пронизывающей их неопределенности.

5.6. Примеры решения задач

Напомним основные свойства нечетких отношений. Одним из основных понятий теории нечетких множеств считается понятие нечеткого отношения. Эти отношения позволяют формализовать неточные утверждения типа «*x* почти равно *y*» или «*x* значительно больше чем *y*». Приведем определение нечеткого отношения и комбинации нечетких отношений.

Определение.

Нечеткое отношение *R* между двумя непустыми множествами (четкими) X и Y будем называть нечеткое множество, определенное на декартовом произведении X×Y, т.е.

$$R \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y} = \{(x, y) : x \in \mathbf{X}, y \in \mathbf{Y}\}. \qquad (1)$$

Другими словами, нечеткое отношение - множество пар

$$R = \{((x, y), R(x, y))\}, \qquad (2)$$

где

$$\mu_R : \mathbf{X} \times \mathbf{Y}\,[0,1] \qquad (3)$$

- это функция принадлежности, которая каждой паре (*x*, *y*) приписывает ее степень принадлежности $\mu_R(x, y)$, которая интерпретируется как сила связи между элементами $x \in \mathbf{X}$ и $y \in \mathbf{Y}$. В соответствии с принятым соглашением нечеткое отношение можно представить в виде

$$R = \sum_{\mathbf{X} \times \mathbf{Y}} \frac{\mu_R(x, y)}{(x, y)} \qquad (4)$$

или

$$R = \int_{\mathbf{X} \times \mathbf{Y}} \frac{\mu_R(x, y)}{(x, y)}. \qquad (5)$$

Пример 1.

Применим определение 1 для формализации неточного утверждения «*y* примерно равно *x*». Пусть $\mathbf{X} = \{3, 4, 5\}$ и $\mathbf{Y} = \{4, 5, 6\}$. Отношение *R* можно определить следующим образом:

$$R = \frac{1}{(4,4)} + \frac{1}{(5,5)} + \frac{0,8}{(3,4)} + \frac{0,8}{(4,5)} + \frac{0,8}{(5,4)} + \frac{0,8}{(5,6)} + \frac{0,6}{(3,5)} + \frac{0,6}{(4,6)} + \frac{0,4}{(3,6)} \qquad (6)$$

Следовательно, функция принадлежности $\mu_R(x,y)$ отношения R имеет вид

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y, \\ 0,8, & \text{если } |x-y| = 1, \\ 0,6, & \text{если } |x-y| = 2, \\ 0,4, & \text{если } |x-y| = 3. \end{cases} \qquad (7)$$

Отношение R можно также задать в виде матрицы

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 & 0,4 \\ 1 & 0,8 & 0,6 \\ 0,8 & 1 & 0,8 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad (8)$$

где $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$, а $y_1 = 4$, $y_2 = 5$, $y_3 = 6$.

Пример 2.

Пусть $\mathbf{X} = \mathbf{Y} = [0,120]$ - это длительность жизни человека. В этом случае отношение R с функцией принадлежности

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x - y \le 0, \\ \dfrac{x-y}{30}, & \text{если } 0 < x - y < 30, \\ 1, & \text{если } x - y \ge 30 \end{cases} \qquad (9)$$

представляет неточное утверждение «особа x намного старше особы y».

Следует подчеркнуть, что нечеткое отношение R - это нечеткое множество, поэтому сохраняют силу введенные определения операций пересечения, суммирования и дополнения:

$$\mu_{R \cap S}(x,y) = \min\left(\mu_R(x,y), \mu_S(x,y)\right), \tag{10}$$

$$\mu_{R \cup S}(x,y) = \max\left(\mu_R(x,y), \mu_S(x,y)\right), \tag{11}$$

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y) = 1 - \mu_R(x,y). \tag{12}$$

В теории нечетких множеств важную роль играет понятие комбинации двух нечетких отношений. Рассмотрим три четких множества X,Y, Z и два нечетких отношения $R \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ и $S \subseteq \mathbf{Y} \times \mathbf{Z}$ с функциями принадлежности $\mu_R(x,y)$ и $\mu_S(y,z)$.

Определение 2.

Комбинацией типа $\sup - T$ нечетких отношений $R \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ и $S \subseteq \mathbf{Y} \times \mathbf{Z}$ называется нечеткое отношение $R \circ S \not\subset \mathbf{X} \times \mathbf{Z}$ с функцией принадлежности

$$\mu_{R \circ S}(x,z) = \sup_{y \in \mathbf{Y}} \left\{\left[\mu_R(x,y)^T * \mu_S(y,z)\right]\right\}. \tag{13}$$

Конкретная форма функции принадлежности $\mu_{R \circ S}(x,z)$ комбинации $R \circ S$ зависит от T-нормы, используемой в формуле (13). Если в качестве T-нормы применяется min, т.е. $T(a,b) = \min(a,b)$, то равенство (13) можно представить в виде

$$\mu_{R \circ S}(x,z) = \sup_{y \in \mathbf{Y}} \left\{ \min \left[\mu_R(x,y), \mu_S(y,z) \right] \right\}. \qquad (14)$$

Формула (14) известна в литературе под названием «комбинация типа sup-min». Если множество Y имеет конечное количество элементов, то комбинация типа sup-min сводится к комбинации типа max-min в форме

$$\mu_{R \circ S}(x,z) = \max_{y \in \mathbf{Y}} \left\{ \min \left[\mu_R(x,y), \mu_S(y,z) \right] \right\}. \qquad (15)$$

Пример 3.

Допустим, что отношения *R* и *S* представлены матрицами

$$R = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,5 \\ 0,6 & 1 \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,8 \\ 0,7 & 0,9 & 0,4 \end{bmatrix}, \qquad (16)$$

причем $\mathbf{X} = \{x_1, x_2\}$, $\mathbf{Y} = \{y_1, y_2\}$, $\mathbf{Z} = \{z_1, z_2\}$. Комбинация типа max-min отношений *R* и *S* имеет вид

$$Q = R \circ S = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,5 \\ 0,6 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,8 \\ 0,7 & 0,9 & 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \end{bmatrix} \qquad (17)$$

где

$$q_{11} = \max\left[\min(0,2;0,3), \min(0,5;0,7)\right] = 0,5,$$

$$q_{12} = \max\left[\min(0,2;0,6), \min(0,5;0,9)\right] = 0,5,$$

$$q_{13} = \max\left[\min(0,2;0,8), \min(0,5;0,4)\right] = 0,4,$$

$$q_{21} = \max\left[\min\left(0,6;0,3\right),\min\left(1;0,7\right)\right] = 0,7,$$

$$q_{22} = \max\left[\min\left(0,6;0,6\right),\min\left(1;0,9\right)\right] = 0,9,$$

$$q_{23} = \max\left[\min\left(0,6;0,8\right),\min\left(1;0,4\right)\right] = 0,6.$$

Поэтому

$$Q = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,4 \\ 0,7 & 0,9 & 0,6 \end{bmatrix}. \qquad (18)$$

В таблице 1 собраны важнейшие свойства нечетких отношений, причем *I* означает единичную матрицу, а *O* - нулевую матрицу.

Таблица 1.

Важнейшие свойства нечетких отношений

1	$R \circ I = I \circ R = R$
2	$R \circ O = O \circ R = O$
3	$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$
4	$R^m \circ R^n = R^{m+n}$
5	$(R^m)^n = R^{mn}$
6	$R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$
7	$R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$
8	$S \subset T \rightarrow R \circ S \subset R \circ T$

Как отмечалось выше, для практических приложений особенно важна комбинация нечеткого множества с нечетким отношением. Рассмотрим нечеткое множество $A \subseteq \mathbf{X}$ и нечеткое отношение $R \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ с функциями принадлежности $\mu_A(x)$ и $\mu_R(x,y)$.

Определение 3.

Комбинация нечеткого множества $A \subseteq \mathbf{X}$ и нечеткого отношения $R \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ обозначается $A \circ R$ и определяется как нечеткое множество $B \subseteq \mathbf{Y}$.

$$B = A \circ R \tag{19}$$

с функцией принадлежности

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in \mathbf{X}} \left\{ \left[\mu_A(x)^T * \mu_R(x,y) \right] \right\}. \tag{20}$$

Конкретная форма записи выражения (20) зависит от используемой *T*-нормы и от свойств множества X. Выделим 4 случая:

1) если $T(a,b) = \min(a,b)$, то получаем комбинацию типа sup-min

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in \mathbf{X}} \left\{ \min\left[\mu_A(x), \mu_R(x,y) \right] \right\}, \tag{21}$$

2) если $T(a,b) = \min(a,b)$ и X представляет собой множество с конечным количеством элементов, то получаем комбинацию типа max-min

$$\mu_B(y) = \max_{x \in \mathbf{X}} \left\{ \min\left[\mu_A(x), \mu_R(x,y) \right] \right\}, \tag{22}$$

3) если $T(a,b)=a\cdot b$, то получаем комбинацию типа sup-произведение (sup-product)

$$\mu_B(y)=\sup_{x\in\mathbf{X}}\{\mu_A(x)\cdot\mu_R(x,y)\}, \qquad (23)$$

4) если $T(a,b)=a\cdot b$ и X представляет собой множество с конечным количеством элементов, то получаем комбинацию типа max-произведение (max-product)

$$\mu_B(y)=\max_{x\in\mathbf{X}}\{\mu_A(x)\cdot\mu_R(x,y)\}. \qquad (24)$$

Пример 4.

Допустим, что $\mathbf{X}=\{x_1,x_2,x_3\}$, $\mathbf{Y}=\{y_1,y_2\}$ и *A* имеет вид

$$A=\frac{0,4}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{0,6}{x_3}, \qquad (25)$$

тогда как отношение *R* представлено матрицей

$$R=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0,5 & 0,7 \\ 0,2 & 1 \\ 0,9 & 0,3 \end{bmatrix} \end{array}. \qquad (26)$$

Комбинацию $A\circ R$ типа max-min рассчитываем по формуле (22). Результат комбинации - это нечеткое множество *B* вида

$$B = \frac{\mu_B(y_1)}{y_1} + \frac{\mu_B(y_2)}{y_2}, \tag{27}$$

причем

$$\mu_B(y_1) = \max\{\min(0,4;0,5), \min(1;0,2), \min(0,6;0,9)\} = 0,6 \tag{28}$$

$$\mu_B(y_2) = \max\{\min(0,4;0,7), \min(1;1), \min(0,6;0,3)\} = 1 \tag{29}$$

Поэтому

$$B = \frac{0,6}{y_1} + \frac{1}{y_2}. \tag{30}$$

6. Построение групповых решений в пространствах четких и нечетких бинарных отношений

Введение

Настоящий раздел изложен по результатам работ В.Б. Кузмина. Современный этап в развитии теории систем и системного анализа отмечен обращением к сложным и плохо определенным системам, связанным с деятельностью людей. Для решения задач, возникающих в процессе управления такими системами, имеющейся объективной информации оказывается явно недостаточно и тогда дополнительно привлекается **<u>субъективная информация</u> — индивидуальные суждения высококвалифицированных специалистов (экспертов).** В этих условиях особенно повышается роль субъективной информации, а также выдвигаются новые требования к методам ее обработки и к обоснованности решений, принимаемых на ее основе.

В реальных задачах принятия решений с использованием экспертных суждений трудно рассчитывать на то, что при поиске решения можно будет ограничиться формальными математическими методами, однако их использование зачастую становится полезным и необходимым на разных этапах фомирования приемлемого коллективного решения. Очевидно, что при решении многих задач системного анализа тот или иной способ принятия решения должен опираться на групповые суждения экспертов. Попытка усреднить отдельные мнения часто приводит к тому, что с этим средним мнением каждый эксперт в отдельности согласен не больше, чем, может быть, с точкой зрения другого эксперта. Поэтому особое внимание привлекают такие способы построения групповых решений, которые опирались бы не столько на формальные правила, сколько на «разумные», легко воспринимаемые людьми принципы, позволяющие придавать содержательное толкование получаемым решениям.

К таким «разумным», «естественным» принципам относится принцип единогласия Парето для согласования индивидуальных предпочтений. Пожалуй, ни один другой принцип согласования не обсуждался в научной литературе так глубоко и детально, как этот, и в то же самое время он, пожалуй, единственный, для которого не существовало техники получения групповых решений. Это обстоятельство, ввиду практической важности проблемы построения групповых решений предопределяет интерес к поиску математического аппарата для получения групповых решений, удовлетворяющих принципу единогласия Парето. Использование принципа Парето позволяет сделать акцент в сторону максимального учета индивидуальных предпочтений экспертов и разработать такую общую процедуру, чтобы усредненное мнение более или менее удовлетворяло все множество экспертов.

Работа В.Б. Кузьмина лежит в русле того направления в моделировании группового выбора, которое трактует индивидуальные мнения (предпочтения) как точки в пространстве соответствующих бинарных отношений. Распространенное понимание принципа Парето как принципа отбраковки тех и только тех альтернатив, которые «единогласно подчинены» другим альтернативам, сводится к построению «пересечения» индивидуальных бинарных отношений. В работе В.Б. Кузьмина используется более широкое истолкование принципа Парето как лишь необходимого (не обязательно достаточного) условия для группового решения, но зато отнесенного не только к «отбраковке», но и к «принятию» альтернатив. Это истолкование сводится к выделению в качестве группового предпочтения некоторого «промежуточного» бинарного отношения «между» заданными индивидуальными отношениями. Изучение формализации понятий «промежуточности» и производных от него понятий «выпуклости» и т. п. в пространстве отношений позволило

В.Б. Кузьмину развить «геометрический» взгляд на изучаемые объекты.

При разработке этого «геометрического» подхода В.Б. Кузьмин исходил из более широкой задачи: провести общее исследование геометрии пространств отношений индивидуального предпочтения, наиболее распространенных в практике экспертного метода. Надо отметить, что для решения задачи группового выбора в пространствах отношений традиционно применяется метрическая структура, которая используется в общеизвестных «механических» правилах нахождения группового решения — в медианах и средних. При этом в стороне остаются такие геометрические структуры, как «между», выпуклости, частичного порядка и др. Исследование именно таких структур является целью настоящей работы В.Б. Кузьмина.

Исследования геометрических структур проводятся для пространств двух типов бинарных отношений: обычных (четких) и нечетких. **<u>Общая схема исследований следующая</u>: рассматриваются два варианта понятия «между» для отношений и соответственно два варианта понятия «выпуклости» множества отношений, исследуется взаимосвязь между ними и предлагается алгоритм построения выпуклой оболочки множества индивидуальных отношений и его «ядра», содержащего искомые групповые решения, т. е. решения, удовлетворяющие принципу единогласия Парето**.

Исследование геометрических структур проводится на <u>двух уровнях общности</u>: сначала проводится общее рассмотрение пространств бинарных отношений (четких или нечетких) без конкретизации типа отношений, а затем результаты переносятся на конкретные пространства. Так, для пространств четких бинарных отношений вводится понятие полных пространств, рассмотрение которых допускает изучение конкретных пространств с общих позиций и упрощает доказательства; доказывается теорема о существовании линейного сегмента в произвольном пространстве бинарных отношений; для полных пространств доказывается эквивалентность двух определений выпуклости, одно из которых есть полный аналог соответствующего понятия в евклидовой геометрии, а другое —- экспликация принципа Парето и т. д. Вместе с тем результаты общего изучения нельзя перенести механически в некоторые конкретные пространства и здесь требуется проведение дальнейших исследований. Так, например, остался невыясненным вопрос о том, является ли пространство линейных квазипорядков полным пространством; понятие «ядра» исходной совокупности индивидуальных предпочтений может рассматриваться в различных модифицированных вариантах, отвечающих специфике решаемой задачи, и требует поиска структурных характеристик.

В настоящей работе В.Б. Кузьмина результаты общего изучения геометрии пространств предпочтений исследуются в приложении к пространствам частичных порядков и квазитранзитивных отношений, и решение задачи группового выбора доводится в них до машинных алгоритмов.

Методологическая особенность развиваемого в работе В.Б. Кузьмина подхода состоит в том, что поиску единственного группового решения сначала предшествует построение множества «допустимых» групповых решений, удовлетворяющих принципу Парето. Выбор единственного группового решения производится уже из построенного множества допустимых групповых решений.

Интерес к пространствам нечетких отношений связан с тем, что язык теории нечетких отношений позволяет получать оценки той степени (меры, вероятности), с которой исследуемые объекты находятся в данном отношении, и поэтому во многих практических задачах оказывается наиболее адекватным условиям экспертного оценивания и целям экспертизы.

В работе В.Б. Кузьмина последовательно осуществляется перенос ряда результатов, полученных для четких отношений, на случай нечетких бинарных отношений, что влечет наряду с естественным обобщением и необходимость преодоления определенных трудностей. Так, кроме общих исследований пространств нечетких отношений по вышеописанной схеме, в пространстве нечетких частичных порядков доказывается ряд специальных свойств, вводится мера близости, на основе понятия ядра строится множество допустимых групповых решений, предлагается способ построения единственного группового решения в этом пространстве с использованием операции арифметического осреднения.

В предлагаемой работе В.Б. Кузьмина рассматриваются и практические аспекты применения разработанного подхода к задачам анализа экспертных суждений, предлагается специальная процедура, ориентированная на получение искомых решений, описываются машинные алгоритмы их построения. Вводимые в работе В.Б. Кузьмина понятия и получаемые результаты подробно иллюстрируются простыми примерами.

Основные идеи геометрического подхода и место их изложения в разделе представлены в следующей таблице:

Этапы построения групповых решений	Математическая модель	Разделы текста	
		Четкие отношения	Нечеткие отношения
Отношения индивидуального предпочтения	Точки в пространстве бинарных отношений	6.1-6.3	6.8
Групповые решения, удовлетворяющие принципу Парето	Выпуклая оболочка исходных точек	6.4.	6.9
Допустимые групповые решения	Ядро выпуклой оболочки	6.5	6.10
Единственное групповое решение	Средняя точка ядра	—	6.11

В заключительном подразделе 6.12 предлагается метод получения нечетких отношений индивидуального предпочтения и один подход к проблеме выбора на основе получающихся нечетких отношений предпочтения.

6.1. Геометрический подход к проблеме группового выбора

Проблема агрегирования индивидуальных суждений о порядке предпочтений на конечном множестве исследуемых объектов в содержательном плане состоит в нахождении такого суждения, которое было бы «средним» относительно исходных или другими словами, находилось бы «в середине между ними». Для поиска и оценки суждений, претендентов на роль такого среднего, часто используется метрический подход. При этом подходе исходные данные задачи агрегирования, например, «погружаются» в подходящую абстрактную модель, скажем, взятую из физики модель пространственного расположения единичных масс, и задачу нахождения среднего трактуют как задачу нахождения центра тяжести. Подобный прием был использован, например, в работе Кемени и Снелла, в которой было введено понятие расстояния между суждениями, а в качестве среднего выбиралось суждение, сумма расстояний до которого от исходных суждений минимальна. Именно с этим метрическим подходом будет производиться сравнение подхода, развиваемого в данном разделе.
Отметим, что для решения проблемы агрегирования индивидуальных предпочтений используются и некоторые другие подходы, в работе не рассматриваемые. Среди них можно упомянуть аксиоматический подход и статистические методы.

В этом разделе мы попытаемся выявить причины обращения к метрическим моделям и пространствам предпочтений при решении проблемы группового выбора. При этом будет показано, что к понятию модели приводят два пути, использующие различные способы представления индивидуальных предпочтений. Кроме того, такое рассмотрение позволит понять некоторые аспекты метрического подхода к проблеме группового выбора, присущие также и развиваемому подходу.

6.1.1. Представление предпочтений

Этапу обработки индивидуальных предпочтений неизбежно предшествует этап измерений самих предпочтений. В современной науке под измерением понимают строгую и для данного вида измерений почти всегда воспроизводимую с «близким» результатом процедуру, при которой измеряемое свойство объекта (признак, фактор) сравнивается с некоторым эталонным его проявлением и в результате получается число, характеризующее степень выраженности исследуемого свойства. Такая трактовка измерения заимствована из классической физики и относится к случаю, когда исследуемые свойства обладают количественной природой или мы умеем их наделять таковой, как, например, в случае измерения количества тепла.
В случае качественных свойств корректно говорить об измерении, если в приведенной выше трактовке понятия «измерение» переставить некоторые акценты. Поскольку структура качественных свойств, как правило, «неосязаема», то «легализация» свойств начинается — явно или неявно — с построения некоторого соответствия между совокупностью наших содержательных представлений о природе свойств и описанием этой совокупности в точных терминах.
В теории измерений качественных свойств такое «описание в точных терминах» структуры исследуемых свойств производится с использованием понятия *системы с отношениями.* При этом, говоря, что свойство имеет определенную структуру, подразумевают любую структуру, детерминированную эмпирическими связями между эмпирическими объектами. Этот общий подход распространяется также на случай «эмпирических отношений», которые являются субъективными утверждениями об отношениях между эмпирическими объектами. Когда имеют дело с качественными свойствами, объектом измерения как раз и являются эмпирические отношения, а результат выражается через посредство субъективных утверждений об измеряемых отношениях. Под самим измерением понимают в этом случае установление соответствия между эмпирической и некоторой

числовой системами с отношениями, а под шкалой — совокупность из обеих систем с отношениями и соответствия между ними.

Рассмотренную ситуацию формально можно описать следующим образом. Пусть A — конечное множество объектов, называемое *носителем* системы. Объекты из A являются носителями исследуемого свойства (признака, фактора). Множество A вместе с фиксированным на нем множеством отношений $R_i\ (i \in I)$ называется *системой с отношениями* и обозначаетсям $\mathcal{A} = \langle A;\ R_i\ (i \in I)\rangle,\ I = \{1, \ldots, n\},\ n = |A|.$ В зависимости от того, какова природа объектов и отношений (эмпирическая или числовая), система с отношениями называется *эмпирической* или *числовой системой с отношениями* соответственно. Простейшей эмпирической системой с отношениями, служащей основанием для шкал наименований, является система $\mathcal{A} = \langle A;\ \approx\rangle$, где $\approx$ есть отношение эквивалентности.

В большинстве встречающихся на практике случаев измерение качественных свойств производится в шкалах порядка, приводящих к представлению результатов измерений в виде ранжирований. В этом случае эмпирическая система с отношениями содержит по крайней мере отношения эквивалентности и порядка такие, что соответствующая система с отношениями представляет собой упорядоченное множество. Примером такой системы может служить множество индивидуумов, сравниваемых, скажем, по уровню умственных способностей.

На языке введенных понятий теории измерений отображение $m\colon \mathcal{A} \to \mathcal{R}$ называется *шкалой порядка,* если m — монотонно возрастающее преобразование, где $\mathcal{A}$ — эмпирическая система $\langle A; \approx, \prec\rangle$ с отношениями эквивалентности $\approx$ и строгого предпочтения $\prec$, а $\mathcal{R}$ — числовая система $\langle R; =, <\rangle$ с отношениями равенства = и порядка <. Такое отображение называется *гомоморфизмом* системы.

Широкое использование шкал порядка в практике получения данных об индивидуальных предпочтениях объясняет интерес многих исследователей к методам обработки измерений в этих шкалах, в том числе и при поиске групповых предпочтений. Поэтому естественно обращение к теории, в рамках которой рассматриваются условия, налагаемые на методы обработки измерений в различных шкалах, т. е. обращение к теории измерений.

Отметим далее, что, вообще говоря, существует целый класс шкал, отображающих данную эмпирическую систему в числовую. Эти шкалы между собой связаны допустимыми преобразованиями, которые переводят данную шкалу в эквивалентные ей шкалы.

Для шкалы порядка класс допустимых преобразований составляют все монотонно возрастающие преобразования, ими же ограничиваются и возможности обработки результатов измерений в этой шкале. По этой причине многие традиционные способы обобщенного описания (осреднения) результатов таких измерений непригодны, поскольку для статистик, включающих средние стандартные отклонения, знание лишь порядка следования недостаточно. К допустимым статистикам в данном случае относятся только квантили и процент присвоения данному объекту определенного ранга, чего явно недостаточно для решения практических задач.

Таким образом, обращение к теории измерений позволяет нам только выявить те ограничения, которые необходимо соблюдать при «арифметической» обработке индивидуальных суждений о порядке предпочтений на исследуемых объектах, и практически не дает нам никаких средств, позволяющих находить групповое предпочтение. Поэтому невольно возникает мысль искать такое представление для измерений предпочтений, которое, с одной стороны, гарантировало бы удовлетворение выявленных ограничений на методы обработки измерений, а с другой стороны, давало бы возможность применения других «неарифметических» методов обработки измерений.

В соответствии с тем, что исходными данными в проблеме агрегирования служат совокупности индивидуальных отношений предпочтения, мы будем рассматривать совокупности $\mathcal{U}$ из m индивидуальных суждений о порядке предпочтений на множестве $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Поэтому числовая система $\mathcal{R}$, которую мы будем рассматривать, состоит из m-мерного линейного пространства $\mathbf{R}^m$ — носителя числовой системы и совокупности из m отношений предпочтения на $\mathbf{R}^m$, причем i-е отношение задается сравнением двух векторов из $\mathbf{R}^m$ по величине i-й координаты.

Любой гомоморфизм эмпирической системы в выбранную числовую систему задается функцией f, которая каждому объекту из эмпирической системы ставит в соответствие точки в носителе числовой системы, т. е. точки в пространстве $\mathbf{R}^m$. Задающие эти гомоморфизмы числовые функции f называются *представляющими функциями* (другими словами, действительная функция f на объектах $\{a_1, a_2, \ldots\}$ представляет данное упорядочение множества A, если числа $\{f(a_1), f(a_2), \ldots\}$ упорядочены по величине так же, как объекты множества *A* в данном упорядочении.). Для системы $\mathcal{U}$ представляющие функции являются действительными *m*-мерными вектор-функциями. Построенная шкала определяется упорядоченной тройкой $\langle \mathcal{U}, \mathcal{R}, f \rangle$.

Для данных эмпирической и числовой систем могут существовать различные представляющие функции *f*. Обозначим через φ преобразование, связывающее два некоторых гомоморфизма *f* и *g* данной эмпирической системы в числовую систему. Это преобразование задает изоморфизм числовой системы на себя. Для системы $\mathcal{R}$ такие изоморфизмы могут, например, задаваться монотонными преобразованиями координат векторов из R^m, причем каждая координата подвергается своему монотонному преобразованию.

Множество всех изоморфизмов φ образует группу Ф.

Мы скажем, что две шкалы $\langle \mathcal{U}, \mathcal{R}, f \rangle$ и $\langle \mathcal{U}, \mathcal{N}, g \rangle$ принадлежат шкалам одного и того же типа Ф, если существует такое $\varphi \in \Phi$, что диаграмма на рис. 1 коммутативна.

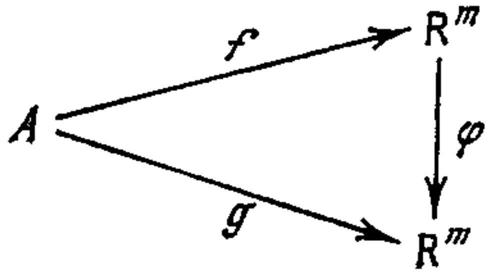


Рис. 1

Рассмотрим теперь векторное пространство **Е** всех функций на *A* со значениями в R^m. Размерность **Е** равна $m \times n$. Для каждой фиксированной системы $\mathcal{U}$ множество ее представляющих функций является подмножеством в пространстве **Е**. Пространство **Е** будем называть *пространством шкал.* Группа Ф действует на пространстве шкал **Е** как группа взаимнооднозначных преобразований. Именно, каждой $f \in \mathbf{E}$ ставится в соответствие $f' = \varphi \circ f$ для $\varphi \in \Phi$. Все пространство распадется на орбиты относительно группы Ф, т. е. представляется в виде объединения непересекающихся минимальных подмножеств. (*Орбитой* элемента под действием группы преобразований называется множество всех его образов при действии элементами этой группы.) Каждая такая орбита состоит из множества всех представляющих функций для некоторой системы $\mathcal{U}$, и, наоборот, для каждой системы $\mathcal{U}$ множество всех ее представляющих функций составляет орбиту группы Ф. Тем самым между множеством орбит пространства шкал **Е** и множеством всех эмпирических систем $\{\mathcal{U}\}$ установлено взаимнооднозначное соответствие. Каждую орбиту в **Е** можно задать с помощью уравнений и неравенств.

В теории измерений вопросы обработки данных исследуются в связи с так называемой *проблемой адекватности.* Проблема адекватности возникает в общем случае при рассмотрении вопроса о том, какие отношения в числовой системе соответствуют «истинным» отношениям в эмпирической системе. Простые примеры показывают, что не любые отношения между результатами измерений соответствуют «истинным» отношениям между объектами. Более того, указания на некоторые отношения между измерениями могут оказаться бессмысленными без указания на то, в какой шкале были произведены измерения. Например, справедливость числового утверждения, что квадрат массы одного тела меньше массы другого тела, зависит от шкалы измерения масс. Другими словами, возникает проблема адекватности операций, которые производятся над измерениями, тем отношениям, которые существуют в эмпирической системе.

Общий подход к определению адекватности намечен в ряде работ. Принимая во внимание, что основной объект наших рассмотрений — это совокупности утверждений о порядке предпочтений, определение адекватности мы дадим здесь в удобной для нас форме.

Прежде всего условимся, что под *числовым утверждением* для системы $\mathcal{U}$ будем понимать отношение или набор отношений вида $F(x)P0$, где $x \in \mathbf{E}$, F — некоторая числовая функция на *Е, Р* — одно из отношений $<$, $\leqslant$, $=$ (например, $F(x) < 0$).

Определение 1. Числовое утверждение $F(x)P0$ называется *адекватным,* если для любого $\varphi \in \Phi$ отношения и $F(x)P0$ $F(\varphi(x))\ P0$ эквивалентны.

Рассмотрим множество тех $x \in \mathbf{E}$, для которых выполняется $F(x)P0$. Наше определение требует, чтобы это множество было инвариантным относительно преобразований $\varphi \in \Phi$. Геометрически это означает, что это множество — объединение некоторого числа орбит пространства **Е**. Последнее вытекает из следующего утверждения, которое в дальнейшем будет существенно использоваться.

Утверждение 1. *Для того чтобы числовое утверждение было адекватно, необходимо и достаточно, чтобы множество тех x, для которых* $F(x)\ P0$ *справедливо, было объединением некоторого числа орбит.*

Для иллюстрации понятия адекватности разберем три примера.

Пример 1. Дано $A = \{a,\ b,\ c\}$, проверяется адекватность числового утверждения $x_a + x_b > x_c$. Для этого примера **E** — 3-мерное пространство, $F(x) = x_a + x_b - x_c$, *P* — отношение >. Рассматривается шкала отношений. Так как для этого типа шкал допустимые преобразования — это преобразования подобия $\varphi(x) = kx\ \ (k > 0)$, то для этой шкалы орбитами в пространстве **E** будут лучи, выходящие из начала координат. Неравенство $x_a + x_b - x_c > 0$ определяет полупространство в пространстве **E**, которое, естественно, представляется объединением некоторого множества орбит. В силу утверждения 1 рассматриваемое числовое утверждение адекватно вшкале отношений.

Пример 2. Исследуем то же самое утверждение в шкале интервалов, допустимые преобразования в которой составляют линейные положительные преобразования $\varphi(x) = kx + l,\ k > 0$.

Рассмотрим орбиту точки $\overline{X}_0 = \left(x_a^0, x_b^0, x_c^0\right)$. Тогда для любой точки X, принадлежащей орбите $\overline{X}_0$, имеем $X = kX_0 + l$, или, в координатной записи, $x_a = kx_a^0 + b$ и т. д. Вектор $\mathbf{l} = (l,\ l,\ l)$. Если X_0 пропорционален 1, то $\overline{X}$ пропорционален 1 тоже, поэтому орбитой такой точки будет $x_a = x_b = x_c$. Если же это не выполняется, то множество векторов $\overline{X}$ (орбита $\overline{X}_0$) заполняет полуплоскость, проходящую через прямую $x_a = x_b = x_c$ и вектор $\overline{X}_0$. Пространство **E** в этом случае расслаивается на множество плоскостей (орбит), опирающихся на орбиту $x_a = x_b = x_c$. Для того чтобы $x_a + x_b - x_c > 0$ было адекватно, согласно утверждению 1 необходимо, чтобы определяемое этим неравенством полупространство представлялось в виде объединения некоторого числа описанных полуплоскостей. Это не так в силу того, что направляющий вектор этого полупространства (1, 1, —1) не ортогонален направляющему вектору (1, 1, 1) орбиты $x_a = x_b = x_c$. Полупространство, определяемое неравенством $x_a + x_b - x_c > 0$, пересекает каждую орбиту $\varphi(x) = kx + l$ и ни одной не содержит целиком. Следовательно, утверждение $x_a + x_b - x_c > 0$ неадекватно в шкале интервалов.

Пример 3 мы «оживим» фабулой из экспертной практики. Пусть два эксперта производят упорядочение трех объектов a_1, a_2, a_3. В качестве основания числовой системы используется множество натуральных чисел от 1 до 10. В таблице 1 приведены оценки $f(a_i)$; $i = 1, 2, 3$, отражающие степени предпочтения экспертов.

Таблица 1

Эксперты	Представляющие функции	Значение представляющих функций на объектах			Упорядочение
		a_1	a_2	a_3	
1	f_1	10	9	5	$a_3 < a_2 < a_1$
2	f_2	1	3	5	$a_1 < a_2 < a_3$

Определим понятие обобщенного среднего по Колмогорову:

$$f_p(X, F) = F^{-1}\left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} F(x^i)\right),$$

где $F(z)$ —строго монотонная функция, $F^{-1}(z)$ — обратная к ней. Зададимся целью выбрать одно из возможных средних для описания «среднего» группового упорядочения. Подсчитаем значения для четырех наиболее распространенных видов средних: квадратичного, арифметического, геометрического и гармонического (см. таблицу 2, где для наглядности эти значения приводятся с точностью до постоянных множителей).

Таблица 2

Вид среднего	Значения среднего на объектах			Упорядочения, соответствующие виду среднего
	a_1	a_2	a_3	
$\sqrt{f_1^2+f_2^2}$	$\sqrt{101}$	$\sqrt{90}$	$\sqrt{50}$	$a_3 < a_2 < a_1$
f_1+f_2	11	12	10	$a_3 < a_1 < a_2$
$\sqrt{f_1 \cdot f_2}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{27}$	$\sqrt{25}$	$a_1 < a_3 < a_2$
$\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}\right)^{-1}$	0,91	2,25	2,50	$a_1 < a_2 < a_3$

Из таблицы 2 непосредственно видно, что выбранные средние дают нам четыре различных групповых упорядочения, из которых никакое не имеет очевидного преимущественного права представлять совокупность исходных упорядочений.

В соответствии с определением 1 для того чтобы определить пригодность того или иного среднего представлять всю совокупность исходных упорядочений, нужно проверить адекватность набора утверждений, состоящего из совокупности исходных упорядочений и утверждения, полученного на основе выбранного среднего. Упорядочения должны быть записаны в виде числовых утверждений. Так, например, для среднего арифметического нужно рассматривать следующий набор числовых утверждений:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(a_3) < f_1(a_2) < f_1(a_2), \\ f_2(a_1) < f_2(a_2) < f_2(a_3), \\ \dfrac{f_1(a_3)+f_2(a_3)}{2} < \dfrac{f_1(a_1)+f_2(a_1)}{2} < \dfrac{f_1(a_2)+f_2(a_2)}{2}. \end{array}\right\} \quad (*)$$

Легко привести пример, когда значение истинности утверждения (*) изменяется в результате применения монотонного преобразования. Рассмотрим кусочно-линейную монотонную функцию, которая оставляет на месте точки *1, 3, 5* и *10,* а точку *9* переводит в точку *6* (рис. 2).

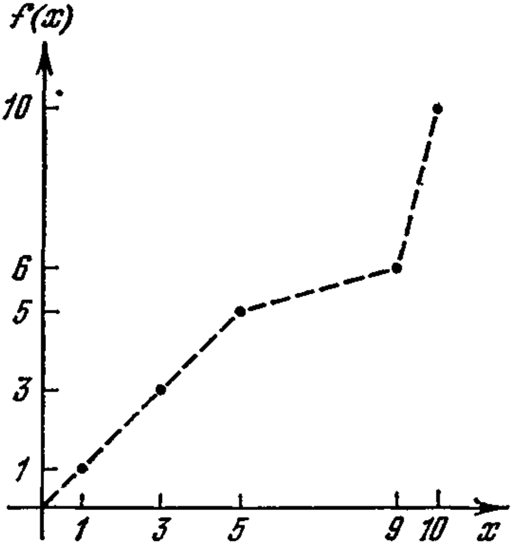


Рис. 2

Тогда два первых неравенства в системе (*) не изменятся, а третье примет вид

$$\frac{f_1(a_2)+f_2(a_2)}{2}<\frac{f_1(a_2)+f_2(a_3)}{2}<\frac{f_1(a_1)+f_2(a_1)}{2},$$

что соответствует изменению среднего упорядочения с $a_3 < a_1 < a_2$ на $a_2 < a_3 < a_1$ и, следовательно, значение истинности утверждения (*) изменится. Отсюда следует известный факт: среднее арифметическое неадекватно в шкале порядка. Легко привести примеры, показывающие, что другие виды обобщенных средних тоже неадекватны.

Возникает вопрос, почему использование обобщенных средних для характеристики совокупностей ранжировок дает разные результаты. Глубокая причина этого заключается в том, что при такой обработке ранги или значения представляющих их функций выступают в роли количественной меры оцениваемых объектов, тогда как, по существу, они являются только метками, позволяющими лишь расставить объекты в соответствии с предпочтениями оценивающих их экспертов. Последовательное развитие этого замечания приводит к заключению, что под *измерением* в шкале порядка следует понимать в общем случае не значение представляющей функции на объекте, а *всю ранжировку в целом.* Другими словами, каждое отдельное измерение в шкале порядка множеству оцениваемых объектов ставит в соответствие некоторое бинарное отношение, например, квазипорядок. На введенном выше языке орбит это означает, что порядковая информация о каждой орбите в пространстве шкал **E** представляется соответствующим орбите квазипорядком.

Установление изоморфизма между множеством орбит в пространстве шкал и множеством всех возможных (на фиксированном носителе *A)* отношений данного типа позволяет, следовательно, каждую орбиту заменить ее математической моделью — точкой, помеченной соответствующим орбите отношением. Заметим, что орбиты в пространстве шкал располагаются определенным образом, т. е. в каждом отдельном случае (см. примеры 1 и 2) в их расположении есть определенная структура. Для наведения на множестве помеченных точек структуры, удобной для наших дальнейших рассмотрений, естественно обратиться к привычному, сложившемуся геометрическому представлению о расстоянии. Таким образом, определение на множестве $\mathcal{U}$ всех бинарных отношений данного типа метрической структуры *d* дает возможность исследовать совокупность индивидуальных предпочтений в рамках метрической модели.

Такая модель, следовательно, имеет два геометрических представления. Одно, как бы внешнее относительно модели, является следствием показанного изоморфизма между моделью и пространством шкал **E**, другое, внутреннее, индуцируется метрической структурой в самой модели.

Представление измерений в шкале порядка точками в модели заведомо снимает проблему адекватности *), поскольку при работе внутри модели исходные точки уже не затрагиваются, не сдвигаются: все дальнейшие операции производятся лишь с внутренней относительно модели характеристикой взаимного расположения точек — попарными расстояниями между ними. (Существуют и другие подходы к решению проблемы адекватности. Так, изложение теории измерений на языке допустимых преобразований, нацеленное на изучение адекватности, и решение задачи нахождения адекватных средних для наиболее распространенных шкал см. в работах А. И. Орлова; в ряде работ описывается статистический подход к решению задачи нахождения адекватного среднего в шкалах порядка.) Проблема группового выбора решается при этом указанием такой точки T модели, в которой достигается минимум суммы расстояний или суммы квадратов расстояний от T до данных точек.

При анализе данной совокупности ранжировок сами ранжировки не подвергаются обработке — функция расстояния обеспечивает основные данные, на которых уже работают самые разные аналитические аппараты.

Достоинства метрических моделей выявляются в приложениях к многообразным теоретическим и практическим задачам в различных областях от «чистой» математики до полевых социологических исследований. Однако, как отмечается в ряде работ, существуют некоторые трудности использования таких моделей при анализе совокупностей экспертных суждений и поиске группового решения.

Как указывается в ряде работ, недостатки данных о расстоянии с первого взгляда не кажутся очевидными. Для двух или другого небольшого числа ранжировок расстояния между ними или до какой-либо внутренней точки модели еще дают представление о структуре связей между ними. Однако, при большом числе оцениваемых объектов (>4) и большом числе исходных ранжировок никакого реального представления об их расположении и структуре связей составить невозможно. Ценность анализа таких данных, например, методами факторного анализа или распознавания образов в значительной степени зависит уже от искусства, проявляемого исследователем при интерпретации результатов применения этих методов.

При построении метрической модели приходится вводить и определять довольно много понятий: «между», линейный сегмепт, путь, масштаб расстояния. При этом модель наделяется теми характеристиками, которые были использованы в определяемых понятиях и вводимых аксиомах. Второй недостаток метрической модели как раз и состоит в том, что при аксиоматическом определении функции расстояния вводятся положения, не всегда имеющие эмпирическое обоснование или подтверждение. К таким положениям можно отнести, например, условия равноправия объектов и равноценности места в ранжировании или связь масштаба расстояния с числом оцениваемых объектов для метрики в пространстве разбиений.

6.1.2. Геометрический подход

Богатство геометрических структур в моделях для различных отношений предпочтения не исчерпывается одной метрической структурой. В качестве примера можно указать на работы, посвященные изучению топологических структур на множествах предпочтений. Большой интерес представляет структура выпуклости, которую можно определить во множестве предпочтений. Наше основное внимание будет посвящено общему изучению этой структуры.

Интерес к выпуклым структурам продиктован, во-первых, простыми аналитическими соображениями. Поскольку неадекватные операции по обработке измерений в шкале порядка все-таки применяются, то исследовался вопрос о том, как результаты применения этих операций соотносятся (геометрически) с исходными данными. Отметим, что неадекватная арифметическая обработка качественных данных (определяемых в общем случае значениями представляющих функций) с помощью произвольных математических средних, дает результат, принадлежащий выпуклой оболочке исходных данных. Во-вторых, выпуклые структуры, как показывают проводимые далее исследования, помогают раскрыть качественно новые и важные эмпирические связи в практических приложениях.

Для терминологического различения в нашем подходе вместо понятия метрической модели используется понятие *пространства* как множества всех возможных на фиксированной совокупности объектов отношений данного типа, наделенного структурой выпуклости.

Единственным общим понятием метрического и развиваемого в настоящей работе подхода является понятие «между», используемое при определении структуры выпуклости. Главное «техническое» отличие рассматриваемого здесь подхода к анализу индивидуальных отношений предпочтения от аналитических методов, используемых в метрическом подходе, заключается в последовательном использовании исключительно геометрических понятий и структур. Естественно, что при построении алгоритмов, реализующих развиваемый подход, и интерпретации результатов его практического использования мы оперируем только геометрическими (внутренними относительно рассматриваемых пространств) понятиями, что дает основание весь подход в целом назвать *геометрическим* подходом к анализу индивидуальных отношений предпочтения.

В заключение этого параграфа остановимся на одном обстоятельстве, связанном с общей методологией решения проблемы группового выбора. В канонической теории принятия решений под *групповым выбором* понимается задание такой функции, которая исходному множеству индивидуальных предпочтений ставит в соответствие одно единственно групповое предпочтение. Вопросы существования и свойств таких функций обсуждались в литературе очень широко и они не входят в круг рассматриваемых здесь вопросов. Отметим лишь, что в большинстве исследованных случаев попытки построения функции группового выбора, как правило, приводили либо к ее неоднозначности, либо к доказательству того, что при постулированных условиях такой функции не существует (теорема Эрроу о «невозможности»). Так, в метрической модели в качестве группового выбора используют медиану или среднее, которые определяются неоднозначно. Кроме того, если пытаться рассматривать, например, множество всех медиан для исходной совокупности точек, то описание этого множества наталкивается на существенные аналитические трудности.

В этой связи общую проблему группового выбора предлагается рассматривать на двух уровнях общности.

На первом уровне целесообразно полностью абстрагироваться от конкретного физического содержания решаемой практической задачи (в частности — от конкретных шкал, в которых произведены измерения) и рассматривать индивидуальные суждения как наборы точек в некоторой модели или пространстве. Как указывалось в 6.1.1, при этом подходе полностью снимаются вопросы, связанные с решением проблемы адекватности в данной шкале. При рассмотрении задачи группового выбора в такой модели или пространстве нет оснований требовать от функции группового выбора однозначности. Более естественным представляется подход, при котором исходному набору индивидуальных суждений ставится в соответствие некоторое множество альтернатив, в определенном смысле *допустимых* для поиска среди них группового решения. К такому же результату, как это будет показано ниже, приводит также содержательное и формальное исследование понятий выпуклой оболочки множества исходных предпочтений и некоторого выпуклого подмножества этой оболочки — так называемого «ядра».

На втором уровне общности рассматривается задача построения функции группового выбора, которая учитывает все специфические особенности задачи. Сюда входит, например, учет компетентности экспертов, учет всех параметров, по которым производится оценивание, процедурные вопросы, предпочтения лица, выбирающего окончательное решение и т. п. Несмотря на то, что в каждой конкретной ситуации, по-видимому, удается найти групповое решение, задача построения на этом уровне общей функции группового выбора представляется бесперспективной. Заметим, что числовые данные, которые получаются в результате измерений в определенных шкалах, являются данными для решения задачи группового выбора на втором уровне.

Предлагаемый подход позволяет решать задачу агрегирования на первом из указанных выше уровней. Применение разработанных методов позволяет опираясь на исходную совокупность индивидуальных предпочтений, выделить некоторое множество «допустимых» групповых решений. Задача нахождения единственного группового решения может рассматриваться как задача выбора из этого множества «допустимых» решений на втором уровне, т. е. с учетом всех специфических условий.

6.2. Бинарные отношения (четкий случай)

В предыдущем разделе при рассмотрении некоторых понятий теории измерений мы ввели понятие «тип шкалы», в которой измеряются предпочтения. Со шкалой каждого типа связан определенный способ оценивания. Так, при измерении в шкале порядка объекты расставляются последовательно в соответствии с убыванием степени их предпочтительности или значений представляющих функций на объектах. С измерениями в интервальной шкале мы сталкиваемся в повседневной жизни, когда, например, измеряем длины, температуру, время. Способ измерений в шкале отношений хорошо иллюстрирует процедура взвешивания на обычных весах.

С каждым способом измерения в шкале данного типа связана определенная форма представления результатов измерений. Так, результаты измерений в шкале порядка на данном множестве объектов могут быть представлены, например, в виде значений представляющих функций на этих объектах или в виде последовательности номеров мест, упорядоченных так же, как и значения представляющих функций, или же могут быть заданы в виде неравенств. Выбор той или иной формы для представления результатов измерений предпочтений в шкале данного типа в конечном итоге определяется тем математическим аппаратом, который предполагается использовать для анализа и обработки измерений, или принципом их агрегации.

В последующих разделах будет систематически использоваться аппарат обычной теории множеств и теоретико-множественное представление измерений предпочтений. Язык бинарных отношений и булевых матриц позволяет рассматривать более широкий спектр качественных данных об объектах, чем терминология теории измерений. При этом определенному типу качественной информации соответствует определенный класс отношений. Не останавливаясь на обосновании такого выбора, в этом разделе мы введем понятие бинарного отношения, дадим краткий перечень действий (операций) над отношениями и основных свойств отношений.

6.2.1. Понятие бинарного отношения

Пусть **А** — некоторое конечное множество $\mathbf{A} = (x,\ y,\ z,\ \ldots)$. Рассмотрим множество всех пар элементов (*x, у*), где *х* и $y \in \mathbf{A}$. При условии, что *х* не совпадает с *у,* мы будем различать пары *(х, у)* и *(у, х),* т. е. считать элементы в парах упорядоченными. Множество всех упорядоченных пар *(х, у),* где $(x,\ y) \in \mathbf{A}$, обозначается $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$. Любое подмножество *Р* множества $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ называется *бинарным отношением* на множестве **А**. Множество **А** иногда называют областью задания отношения *Р.* Тот факт, что пара *(х, у)* элементов $x,\ y \in \mathbf{A}$ состоит в отношении Р, будет записываться $(x,\ y) \in P$ или *xPy.* Бинарное отношение может задаваться или непосредственным указанием пар элементов, состоящих в данном отношении, или правилом, которое позволяет для каждой пары установить, находится или нет данная пара в данном отношении.

Пусть на *n*-элементном множестве **А** определено бинарное отношение *Р.* Перенумеруем элементы множества **А** числами от 1 до *n* и каждому *i*-му элементу поставим в соответствие *i*-й столбец и *i*-ю строку квадратной таблицы размером $n \times n$. Тот факт, что для пары элементов с номерами *i* и *j* выполняется отношение $P\colon\ (x_i,\ x_j) \in P$ будем отмечать единицей на пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца и нулем — если $(x_i,\ x_j) \notin P$, т. е. если отношение *Р* для элементов x_i и x_j не выполняется. Обозначая элементы построенной таким образом матрицы через a_{ij}, правило задания отношения можно сформулировать так:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \textbf{если выполняется} \quad x_i P x_j, \\ 0, & \textbf{если не выполняется} \quad x_i P x_j. \end{cases}$$

Такой способ представления бинарного отношения называется *матричным.* Полученная матрица называется *матрицей бинарного отношения P.* Мы будем обозначать ее $\left(a_{ij}^{P}\right)$ или просто (P).

6.2.2. Действия над бинарными отношениями

В этом разделе мы определим действия над бинарными отношениями, которые опять приводят к бинарным отношениям.

1. *Пересечение* $P \cap Q$ отношений называется отношение, которое содержит только общие для P и Q пары

$$(x,\ y) \in \mathbf{A}\colon\ P \cap Q = \{(x,\ y)\colon\ (x,\ y) \in P \ \ \textbf{и} \ \ (x,\ y) \in Q\}.$$

Когда P и Q не имеют общих пар, т. е. не пересекаются, то говорят, что их пересечение пусто и записывают $P \cap Q = \varnothing.$

Пример 2.1. Пусть матрицы отношений P и Q имеют вид (для большей наглядности нули в матрицах отношений всюду опущены.)

$$(P) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} \qquad (Q) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline \end{array}$$

Тогда очевидно, что матрица отношения $P \cap Q$ имеет вид

$$(P \cap Q) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

Таким образом, матрица отношения $P \cap Q$ есть булево пересечение матриц отношений P и Q.

2. *Объединением* отношений $P \cup Q$ называется отношение, которое включает все пары, содержащиеся или в подмножестве P или в подмножестве Q: $P \cup Q = \{(x,\ y)\colon\ (x,\ y) \in P$ или

$(x, y) \in Q\}$. Когда объединение $P \cup Q$ содержит все возможные пары из $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$, а пересечение P и Q пусто, то говорят, что отношения P и Q образуют *разбиение* $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$, а их объединение есть полное отношение.

Пример 2.2. Для отношений P и Q из примера 2.1 очевидно имеем

$$(P \cup Q) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Таким образом, матрица отношения $P \cup Q$ есть булева сумма матриц отношений P и Q.

3. *Разностью* $P \backslash Q$ отношений P и Q называется отношение, состоящее из тех пар $(x, y) \in P$, которые не содержатся в Q: $P \backslash Q = \{(x, y): (x, y) \in P$ и $(x, y) \notin Q\}$. Частный случай разности двух отношений представляет собой операция взятия дополнения к отношению P (см. ниже п. 5).

Пример 2.3. Для отношений P и Q из примера 2.1 имеем

$$(P \backslash Q) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & 1 \\ \hline & & \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} \qquad (Q \backslash P) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline 1 & & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline \end{array}$$

4. *Симметрической разностью* $P \Delta Q$ называется отношение, состоящее из тех пар (x, y), содержащихся в объединении $P \cup Q$, которые не содержатся в пересечении $P \cap Q$. Другими словами,

$$P \Delta Q = (P \cup Q) \backslash (P \cap Q) = (P \backslash Q) \cup (Q \backslash P).$$

Пример 2.4. Для отношений P и Q из примера 2.1 имеем

$$(P \Delta Q) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & 1 \\ \hline 1 & & 1 \\ \hline & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

5. *Дополнением* $\bar{P}$ называется отношение, состоящее из тех пар $(x, y) \in \mathbf{A} \times \mathbf{A}$, которые не входят в P: $\bar{P} = \{(x, y): (x, y) \in \mathbf{A} \times \mathbf{A}$ и $(x, y) \notin P\}$. Отношения P и $\bar{P}$ образуют разбиение $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$, т. е. $P \cup \bar{P} = \mathbf{A} \times \mathbf{A}$ и $P \cap \bar{P} = \varnothing$.

Пример 2.5. Для отношения P из примера 2.1 имеем

$$(\bar{P}) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline 1 & & 1 \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline \end{array}$$

6. *Обратным отношением* P^{-1} к отношению P называется отношение, которое содержит пару (x, y) тогда и только тогда, когда $(y, x) \in P$, т. е. $P^{-1} = \{(x, y): (y, x) \in P\}$.

Пример 2.6. Для отношения P из примера 2.1

$$(P^{-1}) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline 1 & & 1 \\ \hline \end{array}$$

матрица обратного отношения P^{-1} является транспонированной к исходной матрице отношения P.

7. *Композицией* (произведением) $P \circ Q$ отношений P и Q называется отношение, которое содержит пару (x, y) тогда и только тогда, когда существует $z \in \mathbf{A}$ такое, что $(x, z) \in P$ и $(z, y) \in Q$, т. е. $P \circ Q = \{(x, y):$ найдется z такое, что $(x, z) \in P$ и $(z, y) \in Q\}$.

К частным случаям КОМПОЗИЦИИ ОТНОСИТСЯ *квадрат отношения* P: $P^2 = \{(x, y):$ найдется z такое, что $(x, z) \in P$ и $(z, y) \in P\}$. На индукции определяется *n-я степень отношения P:*

$$P^n = P^{n-1} \circ P.$$

Тот факт, что $(x, y) \in P^n$ означает, что существует цепочка элементов $x_0 = x,\ x_1,\ \ldots,\ x_n = y$ такая, что для $(x_i, x_{i+1}) \in P$ $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Пример 2.7. Для отношений P и Q из примера 2.1 композиция этих отношений имеет матрицу

$$(P \circ Q) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline \end{array}$$

Матрица композиции отношений P и Q есть булево произведение матриц этих отношений.

8. *Сужением* отношения P на подмножество $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ называется отношение $P_{\mathbf{B}}$ на множестве **B**, которое состоит из всех тех пар $(x, y) \in P$ таких, что $x \in B$ и $y \in B$. Другими словами, $P_{\mathbf{B}} = P \cap (\mathbf{B} \times \mathbf{B})$.

Пример 2.8. Сужение отношений P из примера 1 на подмножество **B**, состоящего из первого и третьего элементов, имеет матрицу

$$(P_B) = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array}$$

Поскольку бинарные отношения мы рассматриваем как *подмножества* прямого произведения, то для них определено

Отношение включения $P \subseteq Q$, которое выполнено тогда и только тогда, когда каждая пара (x, y), принадлежащая P, принадлежит также и отношению Q.

6.2.3. Свойства бинарных отношений

В этом разделе мы приведем краткие определения важнейших свойств отношений, которые понадобятся нам в дальнейшем.

1. *Рефлексивность* отношения R означает, что $(x, x) \in R$, т. е. рефлексивное отношение выполняется между элементом и им самим (xRx). В матрице рефлексивного отношения на главной диагонали всегда стоят единицы.

2. *Антирефлексивность* отношения R означает, что $(x, x) \notin R$, т. е. отношение R выполняется только для несовпадающих элементов. В матрице антирефлексивного отношения на главной диагонали стоят нули.

3. *Симметричность* отношения R означает, что если $(x, y) \in$ $\in R$, то $(y, x) \in R$, т. е. если для пары (ж, y) выполнено отношение R, то для пары (y, x) также выполнено отношение R. В матрице

симметрического отношения элементы a_{ij} и a_{ji}, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны между собой.

4. *Антисимметричность* отношения R означает, что если $(x, y) \in R$ и $(y, x) \in R$, то $x = y$. Для элементов матрицы антисимметричного отношения выполняется следующее условие: $a_{ij} \cdot a_{ji} = 0$ при $i \neq j$.

5. *Транзитивность* отношения R означает, что из $(x, z) \in R$ и $(z, y) \in R$ следует $(x, y) \in R$. Если в матрице транзитивного отношения элементы $a_{ii} = 1$ и $a_{ij} = 1$, то обязательно $a_{ij} = 1$. Квадрат R^2 транзитивного отношения R, вообще говоря, содержится в самом отношении R: $R^2 \subseteq R$. В случае, если отношение R рефлексивно, то $R^2 = R$.

С понятием транзитивного отношения связано понятие операции *транзитивного замыкания.* Именно, для каждого отношения R определим отношение $\hat{R}$, как наименьшее транзитивное отношение, содержащее данное. Можно показать, что такое отношение определяется единственным образом и $\hat{R} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$, где n — мощность множества **A** — области задания отношения R.

Пример 2.9. Проиллюстрируем это свойство. Пусть отношение R определяется матрицей

$$(R) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & \\ \hline 1 & & 1 \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array}$$

Тогда имеем

$$(R^2) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & 1 \\ \hline & 1 & 1 \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} \qquad (R^3) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 1 \\ \hline 1 & & 1 \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array}$$

и транзитивное замыкание отношения R есть матрица

$$(\hat{R}) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array}.$$

6. *Линейность (связность)* отношения R означает, что для любых $x,\ y \in \mathbf{A},\ x \neq y$ или $(x,\ y) \in R,$ или $(y,\ x) \in R.$ В матрице линейного отношения или a_{ij} =1, или a_{ji} =1 для любых $i \neq j$.

Поскольку бинарные отношения, с которыми нам придется встречаться, как правило, возникают в результате формализации условий выбора, то бинарные отношения будем называть *предпочтениями.* Это могут быть, например, субъективные предпочтения экспертов, лица, принимающего решение, или предпочтения, основанные на функции полезности. Простым примером такого отношения предпочтения является упорядочение некоторого фиксированного множества объектов по степени выраженности признака, определенного на этих объектах, например, по их стоимости.

6.3. Пространства четких бинарных отношений

Во многих теоретических исследованиях и практических приложениях приходится рассматривать не произвольные бинарные отношения предпочтения на данном множестве объектов, а отношения предпочтения, на которые наложены некоторые дополнительные условия. Другими словами, обычно рассматривают специальные типы отношений предпочтений, обладающие некоторыми из перечисленных в разделе 6.2 свойств. Особенности решаемой практической задачи предопределяют тип рассматриваемых отношений. Например, в задачах группового выбора обычно используют отношение линейного квазипорядка, соответствующее числовому отношению ≥ (не меньше). Реже используются отношения частичного порядка, совершенного строгого порядка, толерантности и т. п.

Множество всех бинарных отношений предпочтения данного типа с геометрической точки зрения, изложенной в разделе 6.1, образует пространство — пространство бинарных отношений предпочтения данного типа.

В этом разделе рассмотрим абстрактную модель пространства отношения и двенадцать конкретных реализаций этой модели. Основное внимание будет сосредоточено на анализе взаимосвязей, существующих между пространствами отношений различных классов.

6.3.1. Три класса отношений

Пусть **А** — конечное множество объектов. Бинарное отношение *R* называется *отношением слабого предпочтения* на множестве **А**, если для любых $x,\ y \in \mathbf{A}$ выполняется либо *xRy*, либо *yRx*.

Из нашего определения следует, что отношение слабого предпочтения рефлексивно, т. е. *xRx* для любых $x \in \mathbf{A}$. Для остальных пар (*x*, *y*) могут иметь место два случая: либо мы имеем *xRy*, и не выполнено *yRx*, либо одновременно выполняется *xRy* и *yRx*. В первом случае мы говорим, что *x* строго предпочитается *y* и пишем *xPy*. Тем самым *отношение строгого предпочтения Р* определяется следующим образом: объекты $x,\ y \in \mathbf{A}$ находятся в отношении *Р (xPy)* тогда и только тогда, когда выполнено *xRy* и не выполнено *yRx*. Отношение Р, очевидно, антирефлексивно и антисимметрично.

Во втором случае мы говорим, что выбор между *x* и *y* для нас безразличен и будем обозначать это *xIy*. *Отношение безразличия I* тем самым определено следующим образом: $(x,\ y) \in I$ тогда и только тогда, когда *xRy* и *yRx*. Очевидно, что отношение *I* рефлексивно и симметрично.

В качестве примера рассмотрим отношение *R* с матрицей

(R) =

1	1	1
1	1	1
		1

Этому отношению *R* соответствует строгое отношение предпочтения *Р* с матрицей

(P) =

		1
		1

и отношение безразличия *I* с матрицей

$$(I) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array}$$

Используя определение бинарного отношения как подмножества прямого произведения, взаимосвязь введенных отношений можно сформулировать в виде следующего утверждения:

Утверждение 3.3. *Множества P, I,* P^{-1} *образуют разбиение прямогопроизведения* $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$. *При этом* $R = P \cup I$, $P = \overline{R^{-1}}$ *и*

$$I = R \cap R^{-1} = P \cup P^{-1}.$$

Справедливость этого утверждения легко проверить для предыдущего примера.

6.3.2. Пространства предпочтений и безразличия

В практических задачах, которые нам придется рассматривать, мы будем иметь дело не с отдельно взятыми отношениями, а с совокупностями таких отношений. Например, можно было бы рассматривать множество *всех* отношений предпочтения или *всех* отношений безразличия. Однако особенности каждой отдельной задачи обычно сужают это множество в силу того, что на отношения накладываются дополнительно условия, например условие транзитивности и т. п. Основным объектом наших исследований будут именно *подмножества* множества всех бинарных отношений. Дадим следующее общее определение.

Определение 3.2.1. *Пространством бинарных отношений* с носителем **А** называется произвольное подмножество множества всех бинарных отношений на **А**.

Несмотря на большую общность этого определения, на основе его можно получить содержательные результаты для произвольных пространств бинарных отношений. Здесь нас будут интересовать лишь отношения слабого и строгого предпочтений и безразличия. В соответствии с этим мы будем рассматривать лишь подмножества, состоящие целиком из элементов одного класса и соответственно этому пространства будем называть *пространствами предпочтения* (слабого или строгого) или *пространствами безразличия.*

Обозначим через $\mathbf{R}$ произвольное пространство отношений слабого предпочтения. С каждым пространством R связаны пространство $\mathbf{P}$

отношений строгого предпочтения P и пространство I отношений безразличия I. Таким образом, пространство P образовано всеми отношениями P такими, что $P = \overline{R^{-1}}$, где $R \in \mathsf{R}$,

а пространство I состоит из всех I таких, что $I = R \cap R^{-1}$.

Указанные взаимосвязи между пространствами R, P и I легко описать следующим образом. Введем отображения i, α и β, отображающие множество всех бинарных отношений, определенных на множестве **A**, в себя:

$$i: \quad \mathbf{M} \mapsto \overline{\mathbf{M}^{-1}},$$
$$\alpha: \quad \mathbf{M} \to \mathbf{M} \cap \mathbf{M}^{-1},$$
$$\beta: \quad \mathbf{M} \to \overline{\mathbf{M} \cup \mathbf{M}^{-1}},$$

Где $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{A}$. Сужение отображения i (которое мы будем обозначать той же буквой) на пространство R отображает это пространство биективно на пространство P. Аналогично α и β (точнее их сужение на соответствующее пространство) отображают сюрьективно R и P на I.

Эти отображения можно представить в виде следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{R} \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "i"'] & & \mathsf{I} \\
& \mathsf{P} \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

Диаграмма 3.1

Мы закончим этот параграф доказательством того, что эта диаграмма коммутативна.

Утверждение 3.2. *Диаграмма* 3.1 *коммутативна, т. е.* $\alpha = \beta \circ i$.

Доказательство. Пусть $R \in \mathsf{R}$. Имеем $\alpha(R) = R \cap R^{-1}$

и $\qquad (\beta \circ i)(R) = \beta(i(R)) = \beta(\overline{R^{-1}}) = \overline{\overline{R^{-1}} \cup (\overline{R^{-1}})^{-1}} = R^{-1} \cap \mathsf{R}$,

откуда следует утверждение теоремы.

6.3.3. Диаграмма пространств предпочтений и безразличия

В практических задачах, где используются отношения предпочтения и безразличия, обычно интересно рассматривать не произвольные подмножества таких отношений, а совокупности отношений, обладающие определенными свойствами.

Рассмотрим сначала конкретные пространства слабых предпочтений.

$\mathcal{P}$ — *пространство всех отношений слабого предпочтения.*

$\mathcal{QT}$ — *пространство всех квазитранзитивных отношений*, т. е. пространство всех слабых предпочтений, удовлетворяющих условию квазитранзитивности: для любого $R \in \mathcal{QT}$ отношение $P = \overline{R^{-1}}$ транзитивно.

Пример 3.1. Примером отношения из пространства $\mathcal{QT}$ может служить отношение *R*, заданное матрицей

$$(R) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$$

Легко проверить, что это отношение нетранзитивно (так как $R \subset R^2$), а отношение $P = \overline{R^{-1}}$ имеет матрицу

$$(P) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 1 \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline\end{array}$$

и транзитивно.

$\mathcal{QO}$ — *пространство линейных квазипорядков.* Получается из $\mathcal{QT}$ требованием транзитивности отношения *R*.

Пример 3.2. Примером отношения из $\mathcal{QO}$ может служить транзитивное отношение, заданное матрицей

1	1	1
1	1	1
		1

$\mathcal{TO}$ — *пространство совершенных порядков.* Получается из $\mathcal{QO}$ требованием антисимметричности отношений *R*.

Пример 3.3. Примером отношения из $\mathcal{TO}$ может служить антисимметричное отношение, заданное матрицей

1	1	1
	1	1
		1

Связь между введенными пространствами слабого предпочтения можно изобразить в виде диаграммы 3.2, где стрелки указывают отображение вложения φ пространств: каждое предыдущее пространство есть подмножество последующего.

$$\mathcal{TO} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{QO} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{QT} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{P}$$

Диаграмма 3.2

Пример 3.4. Теперь приведем пример отношения из пространства $\mathcal{P}$, которое не принадлежит ни одному из вложенных в него пространств (см. диаграмму 3.2);

1	1	1
	1	1
1		1

Это отношение не принадлежит пространству $\mathcal{QT}$, так как отношение $\overline{R^{-1}}$, имеющее матрицу

	1	
		1

нетранзитивно.

Теперь рассмотрим пространства строгого предпочтения, соответствующие, согласно диаграмме 3.1, указанным пространствам слабого предпочтения.

$\mathcal{SP}$ — *пространство всех отношений строгого предпочтения.*

$\mathcal{PO}$ — *пространство всех отношений строгого частичного порядка,* т. е. транзитивных отношений строгого предпочтения.

Пример 3.5. Пусть $R \in \mathcal{QT}$ есть отношение из примера 3.1. Тогда отношение $P = \overline{R^{-1}}$ принадлежит пространству $\mathcal{PO}$ и имеет матрицу

		1

Очевидно, что *P* есть частичный порядок.

$\mathcal{QS}$ — *пространство всех квазисерий,* т. е. строгих частичных порядков *P* таких, что $I = \overline{P \cup P^{-1}}$ — эквивалентность.

Пример 3.6. Пусть $R \in \mathcal{QO}$ есть отношение из примера 3.2. Тогда Отношение $P = \overline{R^{-1}}$ принадлежит пространству $\mathcal{QS}$ и имеет матрицу

		1
		1

$\mathcal{TSO}$ — *пространство всех совершенных строгих порядков.*

Пример 3.7. Пусть $R \in \mathcal{TO}$ есть, отношение из примера 3.3. Тогда Отношение $P = \overline{R^{-1}}$ принадлежит пространству $\mathcal{TSO}$ и имеет матрицу

	1	1
		1

Связь введенных пространств изображена на диаграмме 3.3, где стрелки указывают вложение пространств.

$$\mathcal{TYO} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{QY} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{PO} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{YP}$$

Диаграмма 3.3

Пример 3.8. Для *R* из примера 3.4 отношение $P = \overline{R^{-1}}$ с матрицей

	1	
		1

служит примером отношения из пространства $\mathcal{SP}$, которое не принадлежит ни одному из вложенных в него пространств из диаграммы 3.3.

Наконец, в соответствии с диаграммой 3.1, определим пространства отношений безразличия.

$\mathcal{T}$ — *пространство всех отношений безразличия,* т. е. симметричных и рефлексивных отношений. Такие отношения называются *отношениями толерантности*. Поэтому мы в дальнейшем будем называть это пространство *пространством толерантностей.*

$\mathcal{TOT}$ — *пространство всех транзитивно ориентируемых отношений толерантности,* т. е. таких отношений толерантности *T*, что дополнение к *T* представляется в виде объединения взаимно обратных транзитивных отношений.

Пример 3.9. Для отношения *R* из примера 3.1 отношение $I = R \cap$ $\cap\, R^{-1}$ имеет матрицу-

1	1	
1	1	1
	1	1

Дополнение к этому отношению имеет матрицу

		1
1		

и представляется в виде объединения взаимнообратных отношений P и P^{-1} с матрицами

1		

		1

соответственно.

$\mathcal{J}$ — *пространство всех отношений эквивалентности.*

Пример 3.10. Для отношения R из примера 3.2 отношение I имеет матрицу

1	1	
1	1	
		1

Очевидно, что I есть эквивалентность.

$\mathcal{E}$ — *пространство всех отношений равенства.* Очевидно, что оно состоит из одной точки, матрица отношений которой есть диагональная матрица.

Так же как и в предыдущих случаях укажем связь введенных пространств на одной диаграмме

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{J} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{TOT} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{T}$$

Диаграмма 3.4

Пример 3.11. Подобно тому, как это было сделано в примерах 3.4 и 3.8, приведем пример отношения из пространства $\mathcal{T}$, не принадлежащего ни одному из вложенных в него пространств на диаграмме 3.4. Если мы возьмем для этой цели отношение *R* из примера 3.4, то получим отношение *I* с матрицей

1		1
	1	
1		1

Легко видеть, что отношение с такой матрицей является эквивалентностью и, следовательно, принадлежит пространству $\mathcal{J}$. Таким образом, полученное отношение, против ожиданий, не является примером отношения, принадлежащего пространству $\mathcal{T}$ и не принадлежащего вложенным в него пространствам.

В данном случае этот факт объясняется тем, что отображение α (диаграмма 3.1) является сюръективным, а не биективным отображением. Другими словами, прообраз точки из пространства $\mathcal{T}$ в пространстве $\mathcal{P}$ состоит, вообще говоря, из нескольких точек. В нашем примере в этот прообраз, наряду с отношением *R* из примера 3.4 входит, скажем, отношение R^7 с матрицей

1	1	1
	1	
1	1	1

А это отношение принадлежит пространству $\mathcal{QO}$, что и объясняет принадлежность отношения *I* пространству $\mathcal{J}$.

Искомый пример можно привести лишь в случае, когда мощность *n* носителя **A** не менее 5. В случае *n* = 5 таким примером может служить отношение *I* с матрицей

1		1	1	
	1		1	1
1		1		1
1	1		1	
	1	1		1

Подобные отношения, входящие среди прочих в пространство $\mathcal{T}$, называются *транзитивно неориентируемыми.* В терминах теории графов транзитивно ориентируемые и неориентируемые отношения изучались Гилмором и Гофманом.

Диаграммы 3.1—3.4 можно объединить в одну трехмерную диаграмму 3.5. Вертикальные отображения на этой диаграмме являются вложениями пространств, а типы горизонтальных отображений определены в 6.3.2.

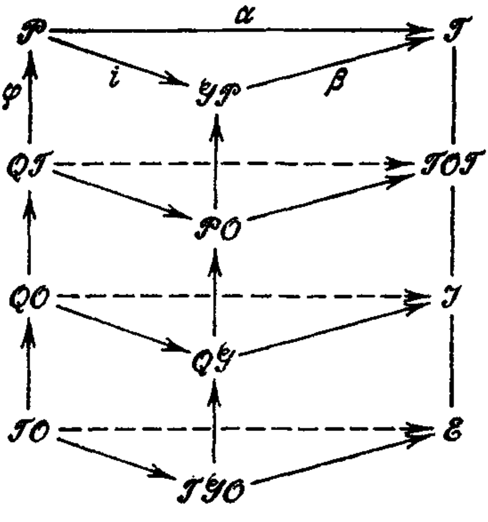


Диаграмма 3. 5

Покажем теперь, что диаграмма 3.5 коммутативна. Это означает, что любые два пути, идущие в направлении стрелок из одного пространства в другое, определят одно и то же отображение этих пространств.

Лемма 3.1. *Любой квадрат отображений на диаграмме* 3.5 *коммутативен.*

Доказательство. Утверждение леммы непосредственно следует из того, что вертикальные стрелки суть вложения, определяемые одинаковыми формулами.

Лемма 3.2. *Любой треугольник отображения на диаграмме* 3.5 *коммутативен.*

Доказательство непосредственно следует из утверждения 3.2.

Теорема 3.1. *Диаграмма* 3.5 *коммутативна.*

Доказательство. Нам надо показать, что любые два пути, идущие из одного пространства в другое, задают одно и то же отображение. Для примера рассмотрим следующие два пути:

$\mathcal{TO} \to \mathcal{QO} \to \mathcal{QT} \to \mathcal{TOT}$ и $\mathcal{TO} \to \mathcal{TPO} \to \mathcal{E} \to \mathcal{I} \to \mathcal{TOT}$.

Последний путь в силу леммы 3.2 задает то же отображение, что и путь

$$\mathcal{TO} \to \mathcal{E} \to \mathcal{I} \to \mathcal{TOT}.$$

Последний путь в силу леммы 3.1 задает то же отображение, что и путь

$$\mathcal{TO} \to \mathcal{QO} \to \mathcal{T} \to \mathcal{TOT}.$$

В силу той же леммы 3.1 последний путь задает то же отображение, что и первый путь $\mathcal{TO} \to \mathcal{QO} \to \mathcal{QT} \to \mathcal{TOT}$.

Сводная схема из двенадцати пространств (диаграмма 3.5) содержит пространства многих отношений, используемых на практике и исследуемых в теории полезности и группового выбора. Четыре пространства из этой системы изучались в рамках метрического подхода. Так на аксиоматической основе в пространстве $\mathcal{QO}$ была введена и использована концепция расстояния между ранжированиями для построения ранжирования, «согласованного» с данными.] Аналогичный подход был развит для расстояния в пространстве эквивалентностей $\mathcal{I}$, и для пространства квазисерий $\mathcal{QS}$ (изоморфного пространству $\mathcal{QO}$). В пространстве строгих частичных порядков $\mathcal{P}$ расстояние аксиоматически было введено в ряде работ. Проблема группового выбора в этих пространствах всеми авторами ставилась так, как она была сформулирована в разделе 3 для первого уровня общности.

Таким образом, в метрическом подходе изученными оказались все пространства второго (снизу) «этажа» диаграммы 3.5 и одно пространство — с третьего. Интересным фактором представляется появление в этой схеме двух не изучавшихся ранее пространств $\mathcal{OT}$ и $\mathcal{TOT}$ третьего «этажа». Точки пространства квазитранзитивных отношений $\mathcal{QT}$ в общем случае представляют собой отношения менее «жесткие» в части требований транзитивности, чем отношения из $\mathcal{QO}$, и имеют содержательный, эмпирический эквивалент в теории экономического поведения. Более подробно пространство $\mathcal{QT}$ будет изучаться в главе разделе 7. Пространство $\mathcal{TOT}$ содержит такие отношения толерантности из $\mathcal{T}$, которые совпадают с отношением $\overline{P \cup P^{-1}}$, где P — квазитранзитивное отношение. Другими словами, отношения из $\mathcal{TOT}$ суть отношения неразличимости для отношений из $\mathcal{QT}$. В данной работе это пространство не изучается.

Самостоятельной и интересной представляется задача расширения этой схемы или за счет введения в нее других, часто используемых в приложениях и теоретических исследованиях отношений, или за счет пространств с несколькими отношениями, например, с отношением древесного порядка и лексикографического порядка и т. п.

Таким образом, изображенная на диаграмме 3.5 система пространств бинарных отношений в наглядной форме представляет мир таких пространств. Она позволяет указать место как уже изученных в метрическом подходе пространств, так и тех, которые будут рассматриваться в данной работе. Выявленные связи между пространствами будут использованы для переноса постановок задач и методов их решения из одних пространств в другие.

7. Геометрические структуры пространств бинарных отношений

При обсуждении основных положений геометрического подхода в разделе 3 мы уже отмечали, что в настоящее время наиболее распространенным является подход, при котором для решения задачи группового выбора в пространстве отношений данного типа вводится метрическая структура. Она вводится на основе общих сложившихся геометрических представлений и концепций. В основе вводимых расстояний лежит система аксиом, одна из которых вводит важное геометрическое понятие «между». Это понятие является единственным общим понятием для метрического и разрабатываемого здесь геометрического подхода.

Понятие «между» лежит в основе теоретических построений в геометрическом подходе и в нашем контексте несет естественную смысловую нагрузку, например, в утверждениях типа «одно отношение предпочтения лежит между двумя другими» или в заданиях вида «найти отношение предпочтения, лежащее между данными». Эти высказывания не содержат в себе ничего необычного.

Ситуация, стоящая за ними, чрезвычайно жизненна и с давних времен привлекает к себе внимание. Для примера укажем на, по-видимому, первую и простейшую как по форме, так и по содержанию постановку задачи принятия решения, сформулированную (как принято считать), в первой половине XIV века французским философом Ж. Буриданом в известной притче об осле: осел, очутившись между двумя совершенно одинаковыми охапками сена не мог ни одну из них предпочесть другой, т. е. решить, какую из них выбрать, и околел от голода. Несмотря на, казалось бы, шутливый характер этого примера, можно сказать, что изложенная в нем в аллегорической форме ситуация выбора с незначительными вариациями составляет основу доброй половины задач, решаемых с помощью экспертов. Другая половина представляет собой «зеркальное отражение» этой ситуации в том смысле, что организаторы экспертиз хотят попасть в положение героя притчи, т. е. найти решение, которое лежало бы одновременно между всеми суждениями экспертов. (Пожалуй, и в наше время привлечение большинства современных научных методов для решения задачи «буриданова осла» вряд ли помогло бы последнему избежать летального исхода, исключая разве что только голосование при нечетном числе экспертов и запрете воздерживаться от голосования.)

В обычной евклидовой геометрии мы имеем представление о расположении одной точки пространства между двумя другими: точка A лежит между точками B и C, если она лежит на отрезке прямой, соединяющей B и С, при этом сумма расстояний от точйи A до точек B и C, равна расстоянию между B и С. В терминах понятия расстояния между отношениями тот факт, что отношение A находится между отношениями B и C характеризуется аналогично. Различие в природе евклидова пространства и пространства отношений в последнем случае проявляется в определении понятия «линейный сегмент», заменяющего для пространств отношений понятие «отрезок прямой».

Наш особый интерес к понятию «между» связан с тем, что при согласовании индивидуальных предпочтений групповое решение естественно искать среди множества всех тех предпочтений, которые расположены «в середине между» исходными предпочтениями. Такие, лежащие между исходными, множества предпочтений названы в данной работе *выпуклыми множествами.*

В этом разделе теория выпуклых множеств строится для произвольных пространств бинарных отношений. В дальнейшем мы не будем различать точки пространства и соответствующие им бинарные отношения. Всюду в этом разделе рассматривается фиксированное пространство $\mathbf{R}$. Если это особо не оговорено, то мы считаем, что все рассматриваемые точки принадлежат этому пространству.

7.1. Отношение «между»

Начнем изучение структур пространств предпочтений с введения двух определений понятия «между».

Определение 7.1. Отношение R лежит между отношениями R_1 и R_2, если

$$R_1 \cap R_2 \subseteq R \subseteq R_1 \cup R_2.$$

То обстоятельство, что отношение R лежит между отношениями R_1 и R_2 будет записываться так: $R \in [R_1, R_2]$.

Первое определение понятия «между» для случая трех отношений R, R_1 и R_2 содержательно означает, что отношение R_2, если оно лежит между отношениями R_1 и R_2 должно содержать то общее, что есть в отношениях R_1 и R_2 (т. е. содержать в себе пересечение этих отношений), и само содержаться в отношении, аккумулирующем R_1 и R_2. Эта интерпретация становится совершенно прозаической, если в ней всюду слово «отношение» заменить на одно из синономичных в данном контексте слов: «суждение», «мнение», «высказывание».

Введенное определение «между» допускает естественное обобщение на случай произвольного числа отношений.

Определение 7.2. Отношение R лежит между отношениями $R_1, R_2, \ldots, R_k$, если

$$\bigcap_i R_i \subseteq R \subseteq \bigcup R_i.$$

Запись $R \in [R_1, \ldots, R_k]$ будет обозначать, что точка R лежит между точками $R_1, R_2, \ldots, R_k$.

Понятие «между» определяет некоторую геометрическую структуру пространства $\mathbf{R}$. Наряду с этой структурой в пространстве $\mathbf{R}$ имеется структура частично упорядоченного множества. Именно, предпочтение R_1 предшествует (нестрого) предпочтению R_2, если $R_1 \subseteq R_2$. Это отношение частичного порядка на $\mathbf{R}$ индуцирует отношение частичного порядка на любом подмножестве в $\mathbf{R}$. В дальнейшем, говоря о максимальных и минимальных элементах различных подмножеств в пространстве $\mathbf{R}$, мы будем иметь в виду минимальные и максимальные элементы этих подмножеств относительно этого порядка. Структура «между» и структура порядка на $\mathbf{R}$ согласованы в том смысле, что из $R_1 \subseteq R \subseteq R_2$ следует, что $R \in [R_1, R_2]$.

Докажем вспомогательное утверждение, устанавливающее связь двух определений «между». Пусть $R_1, R_2, \ldots, R_k$ — точки пространства $\mathbf{R}$.

Лемма 7.1. *Пусть* $Q_j \in [R_1, \ldots, R_k]$ *для* $j = \overline{1, m}$ *и* $R \in [Q_1, \ldots, Q_m]$. *Тогда* $R \in [R_1, \ldots, R_k]$.

Доказательство. Согласно определению 7.2 имеем

$$\bigcap_{i=1}^{k} R_i \subseteq Q_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} R_i,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\bigcap_{i=1}^{k} R_i \subseteq Q_m \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} R_i.$$

Согласно определению 7.1

$$Q_1 \cap \ldots \cap Q_m \subseteq R \subseteq Q_1 \cup \ldots \cup Q_m.$$

Из выписанных включений следует

$$\bigcap_{i=1}^{k} R_i \subseteq Q_1 \cap \ldots \cap Q_m \subseteq R \subseteq Q_1 \cup \ldots \cup Q_m \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} R_i,$$

откуда $R \in [R_1, \ldots, R_k]$, что и требовалось доказать.

Следствие. Пусть R' и R'' лежат между R_1 и R_2. Тогда любое R, лежащее между R' и R'', лежит также и между R_1 и R_2. Пусть R' и R'' — две различные точки в пространстве $\mathbf{R}$.

Определение 7.3. *Линейным сегментом* между R' и R'' назовемпоследовательность различных точек $R_1, \ldots, R_k$ такую, что

1. $R_1 = R'$, $R_k = R''$;
2. $R_i \in [R_m, R_l]$ для $m \leqslant i \leqslant l$;
3. из $R \in [R_i, R_{i+1}]$ следует, что либо $R = R_i$, либо $R = R_{i+1}$.

Две различные точки R' и R'' назовем *соседними,* если они сами образуют линейный сегмент. Очевидно, что между соседними точками не лежит ни одна точка, отличная от них. Линейный сегмент является последовательностью соседних точек, лежащих «между» двумя данными и «соединяющей» их.

Теорема 7.1. *В произвольном пространстве бинарных отношений* $\mathbf{R}$ *для любой пары различных точек существует линейный сегмент между ними.*

Доказательству теоремы предпошлем следующую лемму.

Лемма 7.2. *Пусть R' и R'' —различные точки в пространстве* $\mathbf{R}$. *Существует точка, лежащая между R' и R'' и соседняя к R' .*

Доказательство. Пусть $R \in [R', R'']$ и $R \neq R''$. Согласно следствию из леммы 7.1 множество всех точек, лежащих между R' и R, содержится в множестве точек, лежащих между R' и R''.

Покажем, что $R'' \notin [R', R]$. Предположим противное. Тогда справедливы включения

$$R' \cap R'' \subseteq R \subseteq R' \cup R''$$

и

$$R' \cap R \subseteq R \subseteq R' \cup R.$$

Из этих включений имеем

$$R = (R \cap R') \cup (R \cap R'') \subseteq R'' \cup (R \cap R'') = R''$$

и

$$R'' = (R'' \cap R') \cup (R'' \cap R) \subseteq R \cup (R'' \cap R) = R.$$

Отсюда $R = R''$, что противоречит условию $R \neq R''$. Итак, множество точек, лежащих между R' и R, строго содержится в множестве точек, лежащих между R' и R''. Так как множество точек, лежащих между R' и R'', конечно, то отсюда непосредственно следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы 7.1. Пусть R' и R'' — точки пространства $\mathbf{R}$. Положим $R_1 = R'$ и определим R_2 как соседнюю к R_1 точку, лежащую между R' и R'' . Как показано в лемме 7.2, такая точка существует. Если $R_2 = R''$, то теорема доказана. В противном случае мы применяем предыдущее рассуждение к точкам R_2и R''. По индукции, пусть R_{i+1} есть соседняя точка к R_i, лежащая между R_i и R''. Легко видеть, что на некотором шаге мы получим $R_k = R''$. Согласно следствию из леммы 7.1, все построенные точки лежат между R' и R''.

Покажем, что построенная последовательность точек задает линейный сегмент между R' и R''. Очевидно, достаточно проверить выполнение условия 2 из определения 7.3. Пусть R_m, R_i и R_l такие, что $m \leqslant i \leqslant l.$ Из построения последовательности точек $\{R_i\}$ следует, что $R_i \in [R_m, R'']$, $R_l \in [R_i, R'']$, т. е. справедливы включения

$$R_m \cap R'' \subseteq R_i \subseteq R_m \cup R'' \quad \text{и} \quad R_i \cap R'' \subseteq R_l \subseteq R_i \cup R''.$$

Используя эти включения, получаем

$$R_m \cap R_l \subseteq R_m \cap (R_i \cup R'') =$$
$$= (R_m \cap R_i) \cup (R_m \cap R'') \subseteq (R_m \cap R_i) \cup R_i = R_i$$

и

$$R_m \cup R_l \supseteq R_m \cup (R_i \cap R'') =$$
$$= (R_m \cup R_i) \cap (R_m \cup R'') \supseteq (R_m \cup R_i) \cap R_i = R_i,$$

откуда следует, что $R_i \in [R_m, R_l]$, что и требовалось доказать.

Введенное в этом параграфе понятие линейного сегмента является аналогом привычного геометрического понятия отрезка прямой, соединяющей две заданные точки. Существенное отличие состоит в том, что, вообще говоря, существуют различные линейные сегменты, соединяющие две заданные точки. Это обстоятельство накладывает специфический оттенок на интерпретацию геометрических построений в пространствах бинарных отношений.

7.2. Выпуклые множества и выпуклые оболочки

Наличие понятия «между» в пространстве предпочтений позволяет ввести естественное понятие выпуклого множества. Соответственно тому, что у нас имеется два определения «между», мы дадим два определения выпуклости.

Определение 7.4. Множество $\mathbf{X}$ точек пространства $\mathbf{R}$ называется *выпуклым,* если вместе с любыми двумя точками оно содержит любую точку, лежащую между ними.

Используя наши обозначения, можно сказать, что множество X выпукло, если из $R', R'' \in X$ и $R \in [R', R'']$ следует, что $R \in X.$

Определение 7.5. Множество $\mathbf{X}=\{R_1, \ldots, R_k\}$ точек пространства $\mathbf{R}$ называется *выпуклым,* если из $R \in [R_1, \ldots, R_k]$ следует, что $R \in \mathbf{X}.$

Другими славами, множество отношений выпукло, если любое отношение, лежащее одновременно между всеми отношениями из этого множества, принадлежит этому же множеству.

Исследуем связь между двумя определениями выпуклости. Следующее утверждение непосредственно вытекает из леммы 7.1.

Лемма 7.3. *Из выпуклости в смысле определения* 7.5 *следует выпуклость в смысле определения* 7.4 *для любого пространства бинарных отношений* $\mathbf{R}$.

До сих пор на пространство $\mathbf{R}$ не накладывалось никаких ограничений. В дальнейшем мы будем в основном рассматривать пространства бинарных отношений, для которых выполнено следующее условие.

Условие полноты. *Для любых двух соседних точек R′ и R″ пространства* $\mathbf{R}$ *симметрическая разность* $R'\Delta R''$ *есть одноэлементное множество.*

Другими словами, соседние отношения различаются на одной паре элементов множества *A*. Пространства, удовлетворяющие условию полноты, будем называть *полными пространствами.*

Если вспомнить, что в пространстве отношений предпочтения может быть определена метрическая структура, то полные пространства характеризуются тем, что в этих пространствах соседние точки отстоят друг от друга на минимальное единичное расстояние. Другими словами, полные пространства плотно, без «дыр» заполнены точками этого пространства.

Для полных пространств существует более глубокая связь между двумя определениями выпуклости, чем установленная в общем случае в лемме 7.3.

Лемма 7.4. *Для полного пространства из выпуклости в смысле определения* 7.4 *следует выпуклость в смысле определения* 7.5.

Доказательство. Пусть $\mathbf{X} = \{R_1, \ldots, R_k\}$. — множество, выпуклое в смысле определения 7.4, т. е. вместе с любыми двумя точками из *X* содержит все точки, лежащие между ними. Пусть $R \in [R_1, \ldots, R_k]$. Рассмотрим линейный сегмент между R_1 и *R* (выбор точки R_1 произволен). Предположим, что $R \notin \mathbf{X}$. Поскольку $R_1 \in X$, то в линейном сегменте между R_1 и *R* найдутся две последовательные точки *R′* и *R″* такие, что $R' \in \mathbf{X}$, а $R'' \notin \mathbf{X}$.

Так как точки *R′* и *R″* — соседние, то возможны два случая: $R''\backslash R' = \{(a, b)\}$ или $R'\backslash R'' = \{(a, b)\}$ для некоторой пары *(a, b).*

Рассмотрим эти случаи отдельно.

1. $R'' = R' \cup \{(a, b)\}$, $(a, b) \notin R'$. Так как $R \in [R', R]$. по определению линейного сегмента, то $R'' \subseteq R' \cup R$, откуда $(a, b) \in R$. Так как $R \in [R_1, \ldots, R_k]$, то $R \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} R_i$. Отсюда $(a, b) \in R_i$ для некоторого *i*. Покажем, что $R'' \in [R', R_i]$. Действительно, $R' \cap R_i \subseteq R''$, так как $R' \subset R''$. Далее, $R'' \subseteq R' \cup R_i$, так как $R'' = R' \cup \{(a, b)\}$ и $(a, b) \in R_i$. Итак, $R'' \in [R', R_i]$. Но $R' \in \mathbf{X}$, $R_i \in \mathbf{X}$, а $R'' \notin \mathbf{X}$, что противоречит выпуклости.

2. $R' = R'' \cup \{(a, b)\}$, $(a, b) \notin R''$. Так как $R'' \in [R', R]$ по определению линейного сегмента, то $R' \cap R \subseteq R''$, откуда $(a, b) \notin R$. Так как $R \in [R_1, \ldots, R_k]$, то $\bigcap_{i=1}^{k} R_i \subseteq R$. Отсюда найдется номер i такой, что $(a, b) \notin R_i$. Покажем, что $R'' \in [R', R_i]$. Действительно, $R' \cap R_i \subseteq R''$, так как $R' = R'' \cup \{(a, b)\}$ и $(a, b) \notin R_i$. Далее, $R'' \subseteq R' \cup R_i$, так как $R'' \subset R$. Итак, $R'' \in [R', R_i]$. Но $R' \in \mathbf{X}$, $R_i \in \mathbf{X}$, а $R'' \notin \mathbf{X}$, что противоречит выпуклости X.

Полученные противоречия показывают, что $R \in \mathbf{X}$, что и требовалось доказать.

Из доказанных лемм непосредственно следует, что справедлива

Теорема 7.2. *Для полного пространства* $\mathbf{R}$ $\mathbf{R}$ *оба определения выпуклости эквивалентны.*

Доказанные теоремы позволяют исследовать в полных пространствах аналог геометрического понятия выпуклой оболочки множества.

Пусть теперь **X** — произвольное множество в пространстве бинарных отношений $\mathbf{R}$.

Определение 7.6. *Выпуклой оболочкой множества* **X** *в пространстве* $\mathbf{R}$ называется наименьшее выпуклое множество, содержащее **X** (понимая выпуклость в смысле определений 7.4 или 7.5).

Выпуклые оболочки множества **X** будем обозначать через $\mathbf{C(X)}$ и $\mathbf{\Pi(X)}$ соответственно определениям выпуклости 7.4 и 7.5. Так как само пространство $\mathbf{R}$—выпуклое множество и содержит **X**, а пересечение выпуклых множеств, как нетрудно видеть,— выпуклое множество, то выпуклая оболочка существует для любого множества **X**. Легко проверить, что она определяется единственным образом и совпадает с пересечением всех выпуклых множеств, содержащих **X**.

Наличие двух определений выпуклости и соответственно — двух вариантов выпуклой оболочки позволяет дать два способа построения выпуклой оболочки. Используем сначала определение **C(X).** Для данного множества **X** обозначим через **X'** множество, полученное добавлением к **X** всех точек, лежащих между парами точек из **X**. Введем обозначения: $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}$, $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}'$, $\mathbf{X}_2 = (\mathbf{X}')'$, ..., $\mathbf{X}^m = (\mathbf{X}^{m-1})'$. Очевидно, что $\mathbf{X}_i \subseteq \mathbf{X}_{i+1}$. Так как число точек в пространстве $\mathbf{R}$ конечно, то последовательность вложенных множеств $\mathbf{X}_i$ стабилизируется, т. е. найдется номер N такой, что $\mathbf{X}_{N-1} \neq \mathbf{X}_N$, а $\mathbf{X}_N = \mathbf{X}_{N+1} = \mathbf{X}_{N+2} = \ldots$

Лемма 7.5. *В предыдущих обозначениях* $\mathbf{X}_N = \mathbf{C}(\mathbf{X})$ *для любого пространства* $\mathbf{R}$.

Доказательство. Пусть $R', \quad R'' \in \mathbf{X}_N$ и $R \in [R', \quad R'']$.
Имеем $R \in \mathbf{X}_{N+1}$. Но $\mathbf{X}_{N+1} = \mathbf{X}_N$ по определению N. Итак, $\mathbf{X}_N$ выпуклое множество. Пусть **Y** — выпуклое в смысле определения 7.4 множество и $\mathbf{X} \subset \mathbf{Y}$. Очевидно, что $\mathbf{X}_i \subseteq Y$ для всех i. В частности, $\mathbf{X}_N \subseteq \mathbf{Y}$, откуда следует, что $\mathbf{X}_N$ — минимальное выпуклое множество, содержащее **X**.

Выпуклую оболочку можно построить также, исходя из определения **П(X).** Для заданного множества $\mathbf{X} = \{R_1, \ \ldots, \ R_k\}$ определим множество $\tilde{\mathbf{X}}$ всех R таких, что $R \in [R_1, \ldots, R_k]$.

Лемма 7.6. *Для полного пространства* $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{\Pi}(\mathbf{X})$.

Доказательство. Согласно лемме 7.1 $\tilde{\mathbf{X}}$—выпуклое множество в смысле определения 7.5. С другой стороны, если $\mathbf{Y} \supseteq \mathbf{X}$ **и** $\mathbf{Y}$ — выпуклое множество, то $\tilde{\mathbf{X}} \subseteq \mathbf{Y}$ в силу определения 7.5. Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 7.7. *Пусть* X *— подмножество в произвольном пространстве* $\mathbf{R}$. *Тогда* $\mathbf{C}(\mathbf{X}) \subseteq \mathbf{\Pi}(\mathbf{X})$

Доказательство. Следует непосредственно из следствия к лемме 7.1, леммы 7.5 и леммы 7.6.

Теорема 7.3. *Для произвольного подмножества* X *в полном пространстве бинарных отношений*

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}) = \mathbf{\Pi}(\mathbf{X}).$$

Доказательство. Как следует из леммы 7.6, достаточно показать, что $\mathbf{C}(\mathbf{X}) \supseteq \mathbf{\Pi}(\mathbf{X})$. Так как $\mathbf{X} \subset \mathbf{C}(\mathbf{X})$, то в силу определения выпуклой оболочки $\mathbf{\Pi}(\mathbf{X})$ имеем $\mathbf{\Pi}(\mathbf{X}) \subseteq \mathbf{\Pi}(\mathbf{C}(\mathbf{X}))$. Но по теореме .2 для полного пространства бинарных отношений $\mathbf{\Pi}(\mathbf{C}(\mathbf{X})) = \mathbf{C}(\mathbf{X})$, откуда и следует доказываемое включение. Теорема доказана.

Результаты этой главы, сформулированные здесь во всей общности для произвольных пространств бинарных отношений, применимы и к пространствам предпочтений и безразличия.

7.3. Выпуклые оболочки и проблема группового выбора

В предыдущем параграфе мы ввели в рассмотрение класс пространств бинарных отношений — полные пространства. Для полных пространств оказалось, что два различных варианта определения выпуклости дали один и тот же результат, точнее, соответствующие этим определениям выпуклые множества отношений совпадают. Этот факт в свете проблем группового выбора представляет для нас определенный интерес. Если первое определение выпуклой оболочки, базирующееся на первом определении щшятия «между» и первом определении выпуклости, имеет ярко выраженную геометрическую основу и является полным аналогом соответствующего понятия в евклидовой геометрии, то — второе определение связано с важным понятием в теории группового выбора. Именно, оно представляет собой не что иное, как формализацию хорошо известного условия Парето на принцип согласования отношений индивидуального предпочтения: *«если все индивидуумы предпочитают объект a объекту b, то и в групповом отношении объект a должен быть предпочтительнее b. Точно так же, если все члены группы безразличны в выборе между a и b, таково же должно быть групповое решение»*.

Построенное групповое множество как раз и состоит из отношений, удовлетворяющих этому условию, и поэтому выбор единственного группового решения естественно производить из отношений, составляющих это множество. Однако не все точки выпуклой оболочки «равноправны» в том смысле, что некоторые из них расположены ближе к одним исходным точкам (мнениям), чем к другим. Кроме того, число отношений, составляющих выпуклую оболочку исходного множества отношений, в практических приложениях может оказаться столь велико, что задача выбора окончательного решения на первом уровне будет трудноразрешимой. Поэтому здесь открываются широкие возможности для создания различных способов сокращения числа или направленного отбора отношений, из которых затем будет выбрано единственное групповое решение.

В следующих разделах задача направленного формирования множества допустимых групповых решений будет решена для трех конкретных пространств. Сейчас мы проиллюстрируем общую идею решения такой задачи. В конкретных задачах в каждом выпуклом множестве можно выделить подмножество точек, с геометрической точки зрения расположенных однородно относительно исходных точек, порождающих выпуклую оболочку. Такое выделенное подмножество в дальнейшем будет называться ядром выпуклого множества. Ядро имеет простую геометрическую структуру: оно представляет собой выпуклое множество всех точек, лежащих между двумя точками, которые в дальнейшем будут обозначаться $P_{\min}$ и $P_{\max}$. Ни одна из точек, входящих в ядро, не «тяготеет» к какому-либо одному из исходных суждений. В этом смысле все точки ядра «равноправны». Очевидно, что они также удовлетворяют условию Парето. Исходя из этих свойств точки ядра признаются в геометрическом подходе допустимыми для поиска среди них групповых решений.

8. Теория выпуклых множеств в пространствах частичных порядков и квазитранзитивных отношений

Результаты, полученные ранее для произвольных пространств бинарных отношений, в этом разделе будут использованы в приложении к двум конкретным пространствам отношений предпочтения: частичного порядка $\mathcal{PO}$ и квазитранзитивных отношений предпочтения $\mathcal{QT}$. Для этих пространств удается более глубоко исследовать структуру выпуклых множеств и построить алгоритмы нахождения множества допустимых групповых решений.

8.1. Выпуклые множества в пространстве $\mathcal{PO}$

Прежде всего мы установим полноту пространства $\mathcal{PO}$. Напомним, что точками этого пространства служат отношения частичного порядка на некотором конечном множестве **A**, т. е. антирефлексивные и транзитивные бинарные отношения на **A**. Отношение частичного порядка всегда обладает свойством антисимметричности. Очевидно, что пересечение $P \cap Q$ двух отношений частичного порядка *P* и *Q* снова является отношением частичного порядка. Напротив, их объединение $P \cup Q$, вообще говоря, уже не является отношением частичного порядка.

Для доказательства полноты необходимо проверить, что любые соседние точки пространства $\mathcal{PO}$ различаются лишь на одноэлементном множестве. Пусть *P* и *Q* — две соседние точки в $\mathcal{PO}$. Так как $P \cap Q \in \mathcal{PO}$, и, очевидно, $P \cap Q \in [P,\ Q]$, то либо

$P \cap Q = P$, либо $P \cap Q = Q$. Таким образом, из двух соседних отношений в $\mathscr{PO}$ одно обязательно содержится в другом. Пусть, например, $P \subset Q$. Справедлива следующая

Лемма 8.1. *Если* $P \subset Q$ *— две соседние точки в пространстве* $\mathscr{PO}$, *то* $Q = P \cup \{(a, b)\}$ *для некоторой пары* $(a, b) \in A \times A$.

Доказательство. Согласно теореме Шпильрайна элементы множества *A* могут быть занумерованы так, что из $(a_i, a_j) \in Q$ всегда следует, что $i < j$. Рассмотрим пары (a_i, a_j), принадлежащие *Q* и не принадлежащие P: $(a_i, a_j) \in Q \setminus P$. Пусть i_0 — наибольший из индексов *i* у таких пар. Положим $a = a_{i_0}$. Среди индексов *j* таких, что $(a, a_j) \in Q \setminus P$, выберем наименьший j_0. Положим $b = a_{j_0}$. Очевидно, $(a, b) \in Q \setminus P$.

Определим отношение *R* на *A* следующим образом: $R = Q \setminus \{(a, b)\}$. Покажем, что *R* — частичный порядок. Очевидно, достаточно установить транзитивность *R*. Пусть $(x, y) \in R$, $(y, z) \in R$. Докажем, что и $(x, z) \in R$. Если

$$(x, z) \neq (a, b),$$

то $(x, z) \in R$, так как *Q* транзитивно. Предположим, что

$$(x, z) = (a, b).$$

Тогда $(a, y) \in Q$ и $(y, b) \in Q$. Пусть $y = a_k$. Тогда имеем $i_0 < k$ и $k < j_0$. Так как $k < j_0$, то $(a, y) = (a, a_k) \notin Q \setminus P$ по определению j_0. Следовательно, $(a, y) \in P$. Так как $i_0 < k$, то $(y, b) = (a_k, a_{j_0}) \notin Q \setminus P$ по определению i_0. Следовательно, $(y, b) \in P$. Отсюда в силу транзитивности *P* имеем $(a, b) \in P$, что противоречит тому, что $(a, b) \in Q \setminus P$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Для случая небольших кардинальных чисел множества **A** $(n = 2, 3)$ пространство $\mathscr{PO}$ можно изобразить графически в виде обычной диаграммы Хассе. Опуская тривиальный случай $n = 2$, мы приведем эту диаграмму для случая, когда **A** состоит из трех элементов: $\mathbf{A} = \{a, b, c\}$.

На рис. 8.1 стрелки указывают вложение частичных порядков, рассматриваемых как подмножества в $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$.

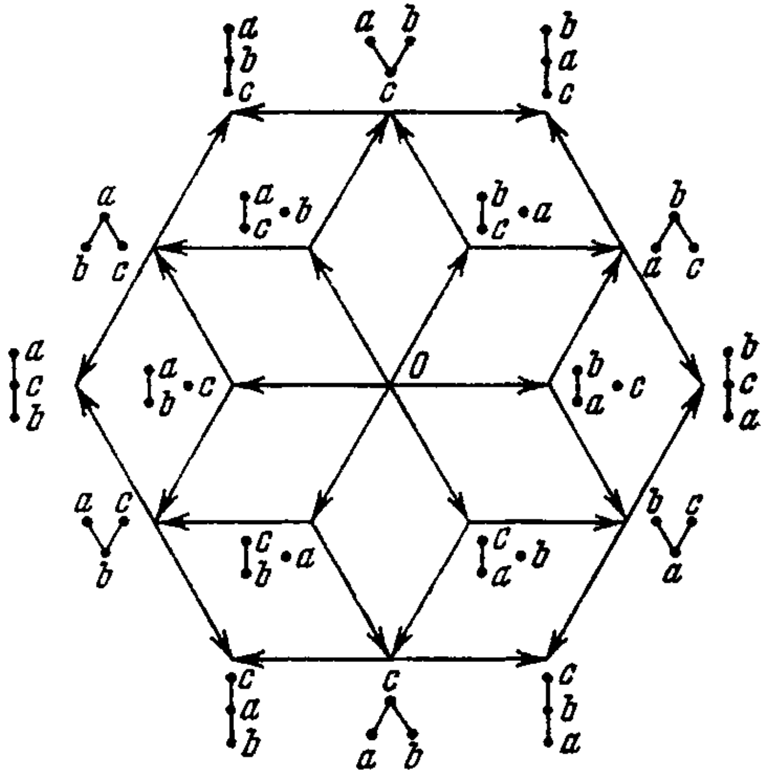


Рис. 8.1.

Буквой $\mathcal{O}$ обозначен тривиальный частичный порядок, совпадающий с пустым подмножеством. Рис. 8.1 является хорошей иллюстрацией к лемме 8.1: соседние точки на нем — это в точности те, которые соединены стрелками.

Из леммы 8.1 непосредственно следует, что справедлива

Теорема 8.1. *Пространство* $\mathcal{PO}$ *является полным пространством.*

Таким образом, для пространства $\mathcal{PO}$ справедливы все результаты, полученные для полных пространств бинарных отношений в предыдущем разделе. В частности, два определения выпуклости эквивалентны в этом пространстве, и для любого множества $\mathbf{X} \subset \mathcal{PO}$ выпуклая оболочка $\mathbf{C}(\mathbf{X})$ совпадает с $\mathbf{\Pi}(\mathbf{X})$.

Изучим теперь подробнее структуру выпуклых множеств в пространстве $\mathcal{PO}$. Пусть **X** — выпуклое множество в пространстве $\mathcal{PO}$.. Тогда на **X** также определено отношение частичного порядка из $\mathcal{PO}$.

Опишем подробнее структуру частичного порядка на **X**.

Лемма 8.2. *В выпуклом множестве* **X** *имеется единственный минимальный элемент.*

Доказательство. Пусть *P* и *Q* — два различных минимальных элемента из **X**. Частичный порядок $R = P \cap Q$ лежит между *P* и *Q* и, следовательно, $R \in \mathbf{X}$. С другой стороны, *R* содержится в *P* и *Q*, но не совпадает с ними, что противоречит минимальности *P* и *Q*.

Множество **X** является выпуклой оболочкой множества, состоящего из минимального элемента и всех максимальных элементов, так как любой элемент множества **X** лежит между минимальным и некоторым максимальным элементом. Максимальных элементов в множестве **X** может быть несколько. Таким образом, выпуклая оболочка множества **X** полностью определяется минимальными и максимальными элементами. Мы будем говорить, что выпуклое множество **X** *порождается* подмножеством **X**', если $\mathbf{C}(\mathbf{X}') = \mathbf{X}$. В рассматриваемом случае выпуклое множество **X** порождается подмножеством, состоящим из минимального и всех максимальных элементов.

Рассмотрим структуру выпуклого множества, обладающего единственным максимальным элементом. В этом случае, как следует из изложенного, все точки множества **X** лежат между минимальным и единственным максимальным элементами. Обозначим через $P_{\min}$ и $P_{\max}$ минимальный и максимальный элементы множества **X** соответственно. Очевидно, что $P_{\min} \subset P_{\max}$. Обозначим через *d* мощность разности отношений $P_{\max}$ и $P_{\min}$, т. е. $d = |P_{\max} \backslash P_{\min}|$. Рассмотрим структуру множества всех отношений (не обязательно частичных порядков), лежащих между $P_{\min}$ и $P_{\max}$. Каждое такое отношение получается добавлением к отношению $P_{\min}$ некоторого подмножества из $P_{\max} \backslash P_{\min}$. Тем самым множество всех отношений, лежащих между $P_{\min}$ и $P_{\max}$, имеет ту же структуру, что и множество всех подмножеств $P_{\max} \backslash P_{\min}$. Поскольку множество всех подмножеств $P_{\max} \backslash P_{\min}$ естественным образом отождествляется с вершинами *d*-мерного куба, то и множество всех отношений, лежащих между $P_{\max}$ и $P_{\min}$, имеетту же структуру. При этом отношения $P_{\min}$ и $P_{\max}$ соответствуют противоположным вершинам такого куба.

Однако не все вершины построенного таким образом d-мерного куба соответствуют частичным порядкам. Все эти отношения являются антисимметричными, так как они содержатся в частичном порядке P_{max}. Так как эти отношения можно выписывать последовательно, то, проверяя каждое из них на транзитивность, мы можем выделить среди 2^d вершин те из них, которые соответствуют отношениям частичного порядка.

В случае, если в выпуклом множестве **X** имеется несколько максимальных элементов, то все множество **X** является подмножеством объединения кубов, соответствующих всем парам (P_{min}, P_{max}). При этом два куба, соответствующие P_{max}^1 и P_{max}^2, инцидентны по грани, соответствующей паре $(P_{min}, P_{max}^1 \cap P_{max})$.

В общем случае рассмотрим грань, по которой инцидентны все кубы, соответствующие имеющимся в **X** максимальным элементам. Из предыдущих построений следует, что эта грань является кубом, соответствующим (P_{min}, P_k), где P_k — частичный порядок, ЯВЛЯЮЩИЙСЯ пересечением всех максимальных элементов из **X**.

8.2. Базис и ядро в пространстве $\mathcal{PO}$

Как уже указывалось выше, любое выпуклое множество $\mathbf{X} \subset \mathcal{PO}$ порождается множеством, состоящим из минимального элемента множества **X** и всех его максимальных элементов. Однако априори не очевидно, что для построения выпуклого множества **X** необходимо использовать все максимальные элементы этого множества. В общем случае множество **X** является выпуклой оболочкой множества, состоящего из минимального и некоторого собственного подмножества максимальных элементов. Введем следующее

Определение 8.1. *Базисом* выпуклого множества **X** назовем произвольное подмножество множества всех максимальных элементов из **X**, которое вместе с минимальным элементом порождает **X**.

Из рассмотрения в предыдущем параграфе структуры выпуклого множества в пространстве $\mathcal{PO}$ следует, что существует максимальная грань, по которой инцидентны все кубы, соответствующие парам (P_{min}, P_{max}), где P_{max} пробегает множество всех базисных элементов. Эта грань является кубом с вершинами P_{min} и $\widehat{P}_{max}$, где $\widehat{P}_{max}$ есть пересечение всех максимальных элементов в **X**. С геометрической точки зрения точки этого куба образуют выпуклое множество, расположенное «однородно» относительно исходного выпуклого множества. Это позволяет ввести следующее

Определение 8.2. *Ядром* выпуклого множества $\mathbf{X} \subset \mathcal{PO}$ будем называть множество всех точек, лежащих между минимальной точкой и пересечением всех базисных точек в **X**.

Пересечение всех максимальных точек из базиса будем называть *ядерным отношением* и обозначать P_k.

Выделим два возможных крайних случая. Первый, когда в множестве **X** имеется всего лишь одна максимальная точка. В этом случае все точки множества **X** лежат между минимальной и данной максимальной точками и ядро совпадает с самим множеством **X**. Второй случай имеет место тогда, когда ядро состоит из одной точки. Эта точка является минимальной точкой, которая является пересечением всех максимальных точек.

Возвращаясь к содержательной постановке задачи (раз. 3), напомним, что выпуклая оболочка представляет собой множество всех возможных групповых решений. В силу «однородности» расположения точек ядра относительно выпуклой оболочки исходного множества предпочтений, естественно считать отношения, принадлежащие ядру, отношениями, *допустимыми для поиска групповых решений.* С этой точки зрения ядро является множеством допустимых групповых решений.

8.3. Геометрические структуры в пространстве $\mathcal{QT}$

Напомним, что точками пространства $\mathcal{QT}$ служат все квази-транзитивные отношения слабого предпочтения R на фиксированном конечном множестве **A**. Условие квазитранзитивности отношения R состоит в том, что соответствующее ему отношение строгого предпочтения $P = \overline{R^{-1}}$ должно быть транзитивным отношением, т. е. частичным порядком. Тем самым отображение i, заданное условием $i\colon \mathbf{M} \mapsto \overline{\mathbf{M}^{-1}}$, является биективным отображением пространства $\mathcal{QT}$ на пространство $\mathcal{PO}$.

Отметим важные свойства отображения i. Во-первых, оно обращает символ включения $\subset$ для отношений. Точнее, из $R_1 \subset R_2$ следует $i(R_1) \supset i(R_2)$. Во-вторых, при отображении i пересечение отображений переходит в объединение образов и наоборот. Таким образом,

$$i(R_1 \cap R_2) = i(R_1) \cup i(R_2) \text{ и } i(R_1 \cup R_2) = i(R_1) \cap i(R_2).$$

Так как основные геометрические структуры в пространствах бинарных отношений вводились в терминах символов $\subset$, $\cup$ и $\cap$, то, используя терминологию теории структур, можно сказать, что i осуществляет дуальный изоморфизм пространств $\mathcal{QT}$ и $\mathcal{PO}$. Используя этот дуальный изоморфизм, можно перенести все результаты, полученные для пространства $\mathcal{PO}$ на пространство $\mathcal{QT}$ (разумеется, в двойственной формулировке). Мы проиллюстрируем это положение, доказав полноту пространства $\mathcal{QT}$.

Лемма 8.3. *Объединение двух квазитранзитивных предпочтений есть снова квазитранзитивное предпочтение.*

Доказательство. Пусть $R = R_1 \cup R_2$, где R_1 и R_2 — Квазитранзитивные предпочтения. Имеем $\overline{R^{-1}} = \overline{R_1^{-1}} \cap \overline{R_2^{-1}} = P_1 \cap P_2$. Так как $P_1 \cap P_2$ есть частичный порядок, то R есть квазитранзитивное предпочтение.

Лемма 8.4. *Если R_i и R_2 — два соседних квазитранзитивных предпочтения, то их симметрическая разность есть одноэлементное множество.*

Доказательство. Рассмотрим отношения $P_1 = i(R_1)$ и $P_2 = i(R_2)$ в пространстве $\mathcal{PO}$. Если в этом пространстве существует отношение P, отличное от P_1 и P_2 и такое, что $P \in [P_1, P_2]$, то отношение $R = i(P)$, в силу биективности i, отлично от R_1 и R_2 и $R \in [R_1, R_2]$, что противоречит тому, что точки R_1 и R_2 — соседние. Отсюда следует, что P_1 и P_2 — соседние точки в $\mathcal{PO}$.

По определению симметрической разности имеем

$$R_1 \Delta R_2 = (R_1 \cap \overline{R}_2) \cup (\overline{R}_1 \cap R_2) =$$
$$= (\overline{P_1^{-1}} \cap P_2^{-1}) \cup (P_1^{-1} \cap \overline{P_2^{-1}}) = P_1^{-1} \Delta P_2^{-1} = (P_1 \Delta P_2)^{-1}.$$

Но $P_1 \Delta P_2$ есть одноэлементное множество в силу леммы 8.1, откуда и следует доказываемое утверждение.

Из доказанной леммы непосредственно следует, что справедлива

Теорема 8.2. *Пространство $\mathcal{QT}$ есть полное пространство.*

Точно таким же образом в пространство $\mathcal{QT}$ можно перенести понятия базиса, ядра, ядерной точки, рассмотренные в пространстве $\mathcal{PO}$. Все эти понятия переносятся из $\mathcal{PO}$ в $\mathcal{QT}$ в двойственной формулировке, т. е. с заменой минимальных элементов на максимальные и наоборот.

Вся теория выпуклых множеств в пространстве $\mathcal{QT}$ могла бы быть построена на основе непосредственного изучения структур этого пространства так, как это было сделано для пространства $\mathcal{PO}$. Мы предпочли использованный здесь подход, так как он естественным образом вытекает из идей, развитых в разделе 6, где была построена диаграмма пространств бинарных отношений.

8.4. Построение ядра в пространстве $\mathcal{PO}$

Из результатов раздела 7, опираясь на два определения понятия «между», можно получить точные алгоритмы для построения выпуклой оболочки исходного множества предпочтений, чтобы затем для этой оболочки построить ядро. Однако основную задачу — построение ядра — можно решить, не используя описания всего выпуклого множества. Опишем алгоритм построения ядра.

Пусть $\mathbf{M} = \{P_1, \ldots, P_k\}$ — множество точек в пространстве $\mathcal{PO}$, которые мы интерпретируем как индивидуальные предпочтения, и $\mathbf{C(M)}$ — выпуклая оболочка множества М. Пусть $P = \bigcup_i P_i,\ i = \overline{1, k}$. Обозначим для каждого $P_i \in \mathbf{M}$ $(i = \overline{1, k})$ через P'_i максимальный элемент в P, содержащий P_i: $P'_i \supset P_i$. Для некоторых i может быть $P'_i = P_i$ или $P'_i = P'_j$ $(i, j = \overline{1, k};\ i \neq j)$.

Теорема 8.3. *Отношение* $P_k = \bigcap_i P'_i$ $(i = \overline{1, k})$ *есть ядерное отношение для* $\mathbf{C(M)}$ *и ядро* $\mathbf{C(M)}$ *состоит из всех точек, лежащих между* $P_{\min} = \bigcap_i P_i$ *и* P_k.

Доказательство. Покажем сначала, что $\mathbf{C(M)}$ совпадает с выпуклой оболочкой множества $\{P_{\min}, P'_1, \ldots, P'_k\}$. Так как $P_{\min} \subseteq P_i \subsetneq P'_i$, то $P_i \in [P_{\min}, P'_i]$; таким образом, все P_i принадлежат выпуклой оболочке $\mathbf{C}(\{P_{\min}, P'_1, \ldots, P'_k\})$. Согласно лемме 7.1 отсюда следует, что $\mathbf{C(M)} \subseteq \mathbf{C}(\{P_{\min}, P'_1, \ldots, P'_k\})$.

Так как $P_i \subseteq P'_i \subseteq P_j$, то $\bigcap_{j=1}^{k} P_j \subseteq P'_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} P'_j$, т. е. $P'_i \in \mathbf{C(M)}$,

$i=\overline{1,k}$. Так как и $P_{\min}\in \mathbf{C}(\mathbf{M})$, то снова согласно лемме 7.1 $\mathbf{C}(\mathbf{M})\supseteq \mathbf{C}\left(\{P_{\min}, P'_1, \ldots, P'_k\}\right)$, откуда следует доказываемое утверждение:

$$\mathbf{C}(\mathbf{M})=\mathbf{C}\left(\{P_{\min}, P'_1, \ldots, P'_k\}\right).$$

Из этого равенства с учетом очевидной максимальности всех $P_1, \ldots, P'_k$ в $\mathbf{C}(\mathbf{M})$ следует, что множество $\{P'_1, \ldots, P'_k\}$ есть базисное множество, откуда и следует утверждение теоремы. Эта теорема (в «двойственной» формулировке) справедлива также и в пространстве $\mathcal{QT}$.

Интерес к ядру, построенному в этой теореме, вызван тем, что базис, на основе которого строится ядро, порождается исходной совокупностью точек $P_1, \ldots, P_k$. Поэтому с точки зрения геометрического подхода это ядро отражает индивидуальную структуру *исходного* набора предпочтений, а не структуру произвольного базиса, порождающую то же выпуклое множество.

Исходя из свойств максимальных элементов и доказательства теоремы 8.3, легко описать алгоритм поиска максимального элемента P'_i, ближайшего к данному P_i. Для исходной совокупности индивидуальных предпочтений $(P_1, \ldots, P_k)$ определим отношение $P=\bigcup_{i=1}^{k} P_i$. Затем для каждого P_i ищем максимальный элемент, добавляя к P_i по одной паре предпочтений $\{x, y\}$ из $\Delta P_i = P\backslash P_i$ и проверяя полученное отношение на транзитивность. Процесс продолжается до тех пор, пока какую бы пару мы ни добавляли, транзитивное отношение не получается. Если такой пары предпочтений в ΔP_i не нашлось, то, следовательно, P_1 есть уже максимальная точка.

8.5. Построение ядра в пространстве $\mathcal{QO}$

В задачу настоящей работы не входит подробное изучение структуры выпуклых множеств в пространстве $\mathcal{QO}$ аналогично тому, как это было сделано для пространства $\mathcal{PO}$ и $\mathcal{QT}$. Однако ввиду того, что отношения линейного квазипорядка в практических задачах встречаются довольно часто, здесь будет рассмотрен эвристический алгоритм построении ядра выпуклого множества в пространстве $\mathcal{QO}$, основанный на полученных выше результатах.

Пусть исходное множество отношений индивидуального предпочтения **X** задано в прост ранстве $\mathcal{QO}$. В разделе 6 была рассмотрена коммутативная диаграмма 6.5 пространств бинарных отношений. Фрагмент этой диаграммы, содержащий три рассматриваемых пространства, изображен на рис. 8.2.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{QT} \arrow[rr, "i"] & & \mathcal{PO} \\ \mathcal{QO} \arrow[u, "\varphi"] & & \end{tikzcd}$$

Рис. 8.2.

Напомним, что отображение φ есть отображение вложения, т. е. в нашем случае пространство линейных квазипорядков $\mathcal{QO}$ есть подмножество пространства квазитранзитивных отношений и вкладывается в последнее целиком. Точки пространства $\mathcal{QO}$ в пространстве $\mathcal{QT}$ характеризуются как транзитивные отношения квазитраизитивного предпочтения. Используя отображения *i* и φ, можно определить образ множества **X** в пространстве $\mathcal{PO}$ как множество $\mathbf{Y} = (i \circ \varphi)(\mathbf{X})$.

Для множества **Y**, согласно изложенному выше, можно построить ядро $\mathbf{K}(\mathbf{Y})$ в пространстве $\mathcal{PO}$. В дальнейшем мы будем различать следующие две ситуации:

1. Прообраз множества $\mathbf{K}(\mathbf{Y})$ в пространстве $\mathcal{QO}$ относительно отображения $i \circ \varphi$ непуст. В этом случае за ядро исходного множества *X* принимаем прообраз $(\varphi^{-1} \circ i^{-1})\ (\mathbf{K}(\mathbf{Y}))$ ядра множества **Y**.
2. Прообраз $\mathbf{K}(\mathbf{Y})$ в $\mathcal{QO}$ пуст. Это означает, что множество $i^{-1}(\mathbf{K}(\mathbf{Y}))$ в пространстве $\mathcal{QT}$ не содержит транзитивных отношений. В этом случае естественно пополнить множество $\mathbf{K}(\mathbf{Y})$ таким отношением, которое, с одной стороны, имело бы прообраз в $\mathcal{QO}$, а с другой стороны, «не слишком бы отличалось» по своему геометрическому расположению от ядра.

В качестве такой точки предлагается рассматривать максимальную точку Рк, содержащуюся (в смысле «не превосходящую») в $P_{\min} \in \mathbf{K}(\mathbf{Y})$ и такую, что ее прообраз в $\mathcal{QO}$ существует. Выбор именно такой точки продиктован следующими геометрическими соображениями. Любая другая точка вне ядра содержится в пересечении некоторых (не всех) максимальных элементов выпуклой оболочки $\mathbf{C}(\mathbf{X})$. Следовательно, эта точка «ориентирована» на эти максимальные элементы и расположена «неравномерно» по отношению к исходному множеству.

Следующее утверждение позволит нам указать алгоритм для построения отношения Pк.

Теорема 8.4. *Образ точки* Pк *приотображении* i^{-1} *совпадает с транзитивным замыканием отношения* $i^{-1}(P_{\min})$.

Доказательство. Поскольку точка Pк есть максимальное отношение в $\mathcal{PO}$, содержащееся в $P_{\min}$ и имеющее прообраз в $\mathcal{QO}$, то $i^{-1}(P_{\text{К}})$ есть минимальное отношение в $\mathcal{PO}$, содержащее $i^{-1}(P_{\min})$ и такое, что $i^{-1}(P_{\text{К}})$ есть минимальное транзитивное отношение в $\mathcal{QT}$, содержащее $i^{-1}(P_{\min})$. Отсюда следует, что $i^{-1}(P_{\text{К}})$ совпадает с транзитивным замыканием $i^{-1}(P_{\min})$.

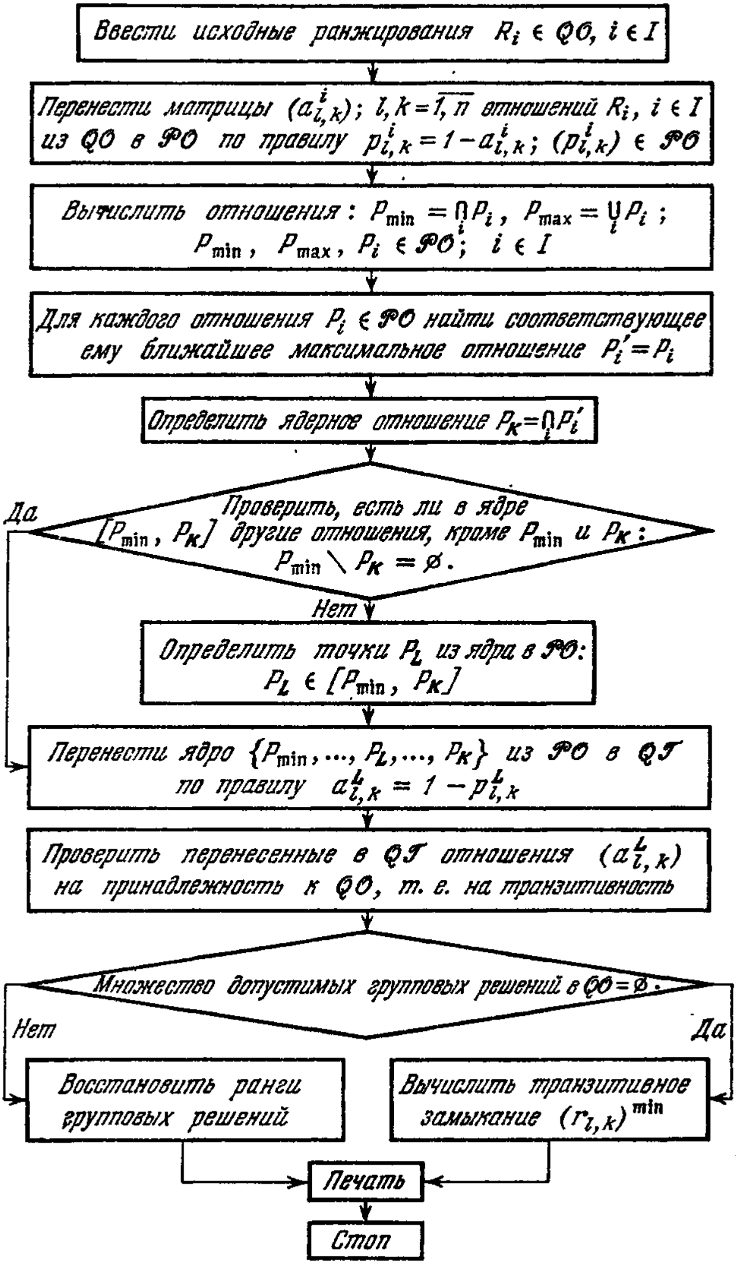
Итак, для построения ядра множества **X** в пространстве $\mathcal{QO}$ мы последовательно рассматриваем точку $P_{\min}$, ее прообраз $\widehat{i^{-1}}(P_{\min})$ в пространстве $\mathcal{QT}$, транзитивное замыкание отношения $\widehat{i^{-1}}(P_{\min})$ и, наконец, в качестве единственной точки — ядра множества **X** — образ отношения $\widehat{i^{-1}(P_{\min})}$ в пространстве $\mathcal{QO}$.

Подводя итог исследованиям, проведенным в этом разделе, отметим, что в нем предложено решение основной задачи — построение множества допустимых групповых решений для трех пространств предпочтений. В дальнейшем мы рассмотрим алгоритм построения ядер в этих пространствах и различные примеры, иллюстрирующие основные введенные понятия.

8.6. Блок-схема алгоритма «Ядро»

В предыдущих параграфах этого раздела было получено строгое решение задачи построения множества допустимых групповых решений в пространствах $\mathcal{QT}$ и $\mathcal{PO}$ и предложен эвристический метод решения этой задачи для случая, когда исходные данные принадлежат пространству $\mathcal{QO}$. Поскольку решение последней задачи включает решение первой, то при разработке алгоритма естественно рассматривать более общий случай, когда исходные данные принадлежат QO и в этом же пространстве ищутся допустимые групповые решения.

Итак, пусть исходные данные являются отношениями линейного квазипорядка, т. е. экспертные оценки представляются в виде ранжирований исследуемых объектов по предпочтениям. Зафиксируем нумерацию оцениваемых объектов. Будем через $j = 1, 2, \ldots, n$ обозначать текущий индекс объекта, через $i = 1, 2, \ldots, m$—текущий индекс эксперта, через $(R_i) = (r_{i1}, r_{i2}, \ldots, r_{ij}, \ldots, r_{in})$ — ранжирование, полученное от i-го эксперта, где r_{ij} — ранг j-го объекта, присвоенный ему i-м экспертом. Таким образом, входными данными являются: n, m и $\{(R_1), (R_2), \ldots, (R_m)\}$. Блок-схема на рис. 8.3 описывает работу алгоритма.



Ввести исходные ранжирования $R_i \in QO$, $i \in I$
Перенести матрицы $(a^i_{l,k})$; $l,k=\overline{1,n}$ отношений R_i, $i \in I$ из QO в $\mathcal{P}O$ по правилу $p^i_{l,k}=1-a^i_{l,k}$; $(p^i_{l,k}) \in \mathcal{P}O$
Вычислить отношения: $P_{\min}=\bigcap_i P_i$, $P_{\max}=\bigcup_i P_i$; $P_{\min}$, $P_{\max}$, $P_i \in \mathcal{P}O$; $i \in I$
Для каждого отношения $P_i \in \mathcal{P}O$ найти соответствующее ему ближайшее максимальное отношение $P_i'=P_i$
Определить ядерное отношение $P_K=\bigcap_i P_i'$
Да
Проверить, есть ли в ядре $[P_{\min}, P_K]$ другие отношения, кроме $P_{\min}$ и P_K: $P_{\min} \setminus P_K = \varnothing$.
Нет
Определить точки P_L из ядра в $\mathcal{P}O$: $P_L \in [P_{\min}, P_K]$
Перенести ядро $\{P_{\min}, \ldots, P_L, \ldots, P_K\}$ из $\mathcal{P}O$ в $Q\mathcal{T}$ по правилу $a^L_{l,k}=1-p^L_{l,k}$
Проверить перенесенные в $Q\mathcal{T}$ отношения $(a^L_{l,k})$ на принадлежность к QO, т. е. на транзитивность
Множество допустимых групповых решений в $QO=\varnothing$.
Нет
Да
Восстановить ранги групповых решений
Вычислить транзитивное замыкание $(r_{l,k})^{\min}$
Печать
Стоп

Рис. 8.3.

Пояснения к блок-схеме будут сопровождаться примерами на трех объектах *a, b* и *c.*

1. Для каждой ранжировки R_i выписываем матрицу (a^i_{lk}); $l, k = 1, 2, \ldots, n$ отношенияпредпочтения *i*-го эксперта по правилу

$$a^i_{lk} = \begin{cases} 1, & \text{если } r_{il} - r_{ik} \leqslant 0, \\ 0, & \text{если } r_{il} - r_{ik} > 0. \end{cases}$$

Пусть $R_i = (1, 1, 2)$, т. е. эксперт считает, что $a \sim b > c$. Матрица отношения предпочтения *i*-го эксперта в пространстве $\mathcal{QO}$ имеет вид

$$(a_{lk})^i = \begin{array}{c|c|c|c|} & a & b & c \\ \hline a & 1 & 1 & 1 \\ \hline b & 1 & 1 & 1 \\ \hline c & & & 1 \\ \hline \end{array}$$

2. Переносим исходные данные из $\mathcal{QO}$ в $\mathcal{PO}$ в соответствии с формулой

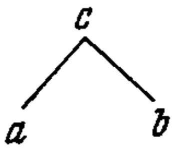
$$p^i_{lk} = 1 - a^i_{lk}.$$

Для выписанной в п. 1 матрицы отношений в $\mathcal{QO}$ пространстве $\mathcal{PO}$ имеем матрицу P_i:

$$P_i = \begin{array}{c|c|c|c|} & a & b & c \\ \hline a & & & \\ \hline b & & & \\ \hline c & 1 & 1 & \\ \hline \end{array}$$

а сама точка P_i в графическом представлении имеет вид

P_i :



3. Выписываем минимальное отношение

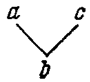
$$P_{\min} = \bigcap_{i=1}^{m} P_i$$

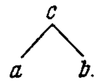
по условию

$$p_{lk}^{\min} = \begin{cases} 1, & \text{если } p_{lk}^{i} = 1 \text{ по всем } i = 1, \ldots, m, \\ 0, & \text{если } p_{lk}^{i} = 0 \text{ по всем } i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Так, для трех отношений в $\mathcal{PO}$

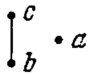
$$P_1 = \begin{array}{c|c|c|c|} & a & b & c \\ \hline a & & 1 & \\ \hline b & & & \\ \hline c & & 1 & \\ \hline \end{array} \qquad P_2 = \begin{array}{c|c|c|c|} & a & b & c \\ \hline a & & 1 & \\ \hline b & & & \\ \hline c & 1 & 1 & \\ \hline \end{array} \qquad P_3 = \begin{array}{c|c|c|c|} & a & b & c \\ \hline a & & & \\ \hline b & & & \\ \hline c & 1 & 1 & \\ \hline \end{array}$$





имеем

$$\bigcap_{i=1}^{3} P_i = \begin{array}{c|c|c|c|} & a & b & c \\ \hline a & & & \\ \hline b & & & \\ \hline c & & 1 & \\ \hline \end{array};$$



4. Выписываем максимальное отношение

$$P_{\max} = \bigcup_{i=1}^{m} P_i$$

в пространстве $\mathcal{PO}$ по правилу

$$p_{lk}^{\max} = \begin{cases} 1, & \text{если } p_{lk}^{i} = 1 \text{ хотя бы для одного } i = 1, \ldots, m, \\ 0, & \text{если } p_{lk}^{i} = 0 \text{ для всех } i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Для отношений из п. 3 имеем

$$\bigcup_{i=1}^{3} P_i = \begin{array}{c|c|c|c|} & a & b & c \\ \hline a & & 1 & \\ \hline b & & & \\ \hline c & 1 & 1 & \\ \hline \end{array}$$

5. Для каждой из точек P_i в пространстве $\mathscr{PO}$ теперь нужно найти соответствующую ей максимальную ближайшую точку $P_i'\ (P_i \subset P_i')$. Обозначим $\bigcup_{j=1}^{m} P_j = (p_{lk}) = P.$

5а) Цикл по $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m.$ Выход в п. 6.

5б) Для каждой точки P_i находим матрицу (∇p_{lk}^i) «добавок», т. е. матрицу тех $\nabla p_{lk}^i,$ добавление которых к P_i по описанному ниже правилу позволит найти соответствующий максимальный элемент P_i'

$$(\nabla p_{lk}^i) = P \setminus P_i, \quad \nabla p_{lk}^i = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad p_{lk} - p_{lk}^i = 1, \\ 0, & \text{если} \quad p_{lk} - p_{lk}^i = 0. \end{cases}$$

Для примера из п. 3 для P_1, имеем

$$\underset{\left(\bigcup\limits_{j=1}^{3} P_j\right)}{\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & \\ \hline & & \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline \end{array}} \quad \setminus \quad \underset{(P_1)}{\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & \\ \hline & & \\ \hline & 1 & \\ \hline \end{array}} \quad = \quad \underset{(\nabla p_{lk}^1)}{\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}}$$

5в) Цикл по $l,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$ Выход в п. 5д. Из матрицы (∇p_{lk}^i) выбираем единичный элемент $\nabla p_{lk}^i = 1,$ добавляем его к P_i и получаем отношение P_i':

$$P_i' = P_i \cup \nabla p_{lk}^i.$$

Проверяем полученную матрицу P_i' на транзитивность, для чего возводим P_i' в квадрат и проверяем включение $P_i' \supseteq (P_i')^2.$

Если включение выполняется, то переходим к п. 5г, если же —

нет, то продолжаем перебор добавок ∇p^{i}_{lk}. Для нашего примера

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline & & \\ \hline & 1 & \\ \hline\end{array} \cup \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & \\ \hline 1 & & \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline & & \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline\end{array}$$

$$(P_1) \quad \cup \quad (\nabla p^{1}_{31}) \quad = \quad (P'_1)$$

$$(P'_1)^2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & \\ \hline & 1 & \\ \hline\end{array} \subseteq \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline & & \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline\end{array} = (P'_1)$$

5г) Полагаем $P_i := P'_i$. Повторяем вычисления пункта 56 с той лишь разницей, что вместо матрицы отношения P_i вычитаем из P матрицу полученного транзитивного отношения P'_i.

5д) Если ни одно добавление ∇p^{i}_{lk} к P_i не привело к новой транзитивной точке P'_i, т. е. отношение P_i уже само есть максимальная точка, то в массив максимальных точек $\{P'_i\}$ записываем $P'_i = P_i$ и продолжаем цикл по *i,* п. 5а. В противном случае в массив $\{P'_i\}$ заносим матрицу найденного максимального отношения P_i и возвращаемся к п. 5а.

6. К этому моменту сформирован массив максимальных точек $\{P'_1, P'_2, \ldots, P'_m\}$. Выписываем ядерное отношение $P_{\text{К}} = \bigcap\limits_{i=1}^{m} P'_i$ по условию

$$p^{\text{К}}_{lk} = \begin{cases} 1, & \text{если } p'_{lk} = 1 \quad \text{для всех } i = 1, \ldots, m, \\ 0, & \text{если } p'_{lk} = 0 \quad \text{хотя бы для одного } i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Точки $P_{\min}$ и $P_{\text{К}}$ определяют ядро в пространстве $\mathcal{PO}$ и представляют собой два допустимых групповых решения в $\mathcal{PO}$, удовлетворяющих принципу Парето. Все остальные решения заполняют линейный сегмент между $P_{\min}$ и $P_{\text{К}}$. Перейдем теперь к построению линейного сегмента. Обозначим множество точек линейного сегмента через $\{P_L\}$.

7. Выписываем матрицу (∇p_{lk}^{L}):

$$P_K \setminus P_{min} = (\nabla p_{lk}^{L})^{lk},$$

где

$$\nabla p_{lk}^{L} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad p_{lk}^{K} - p_{lk}^{min} = 1, \\ 0, & \text{если} \quad p_{lk}^{K} - p_{lk}^{min} = 0. \end{cases}$$

8. Построим массив $\mathbf{L} = \{(l, k)\}$ адресов-индексов тех элементов матрицы (∇p_{lk}^{L}), которые равны 1. Например, для матрицы

$$(\nabla p_{lk}^{L}) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & \\ \hline & & 1 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}$$

этот массив будет иметь вид $L = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$.
Далее будем перебирать все возможные комбинации «добавок» из (∇p_{lk}^{L}) к отношению P_{min} следующим образом. Пусть $T = \underbrace{00 \ldots 0}_{|L| \text{ раз}}$, где через $|\mathbf{L}|$ обозначено число элементов в (∇p_{lk}^{L}), равных 1. Теперь будем к T прибавлять единицу по модулю 2. Если в получаемых таким образом числах номера позиций, занимаемых единицами, отождествлять с номерами адресов *(l, k)* в массиве *L*, то таким образом мы переберем все возможные комбинации «добавок». Объединяя P_{min} с этими комбинациями и проверяя полученное объединение на транзитивность, мы построим все точки линейного сегмента между P_{min} и P_K и, следовательно, все допустимые групповые решения в пространстве $\mathcal{PO}$.

9. Если по условиям задачи допустимые групповые решения нужно получить в пространстве частичных порядков $\mathcal{PO}$, то массив (P_L) нужно вывести на печать.

В качестве дополнительных характеристик полученного множества допустимых групповых решений в $\mathcal{PO}$ можно подсчитать нормированное расстояние между «крайними» мнениями из ядра по формуле

$$d = \frac{\sum\limits_{l,k=1}^{n} \left| p_{lk}^{\min} - p_{lk}^{\text{К}} \right|}{n(n+1)}$$

и коэффициент согласия Кендалла для этих же точек:

$$\tau = 1 - 2d.$$

10. Если групповые решения ищутся в пространстве линейных квазипорядков $\mathcal{QO}$, то перенос точек ядра в пространство $\mathcal{QO}$ производится по формуле

$$a_{ij}^{l} = 1 - p_{ij}^{l}; \qquad i, j = \overline{1, n},$$

где $\left(a_{ij}^{l}\right)$ есть матрица группового предпочтения в $\mathcal{QO}$, а $\left(p_{ij}^{l}\right) \in \in \{P_{\text{L}}\}$. Каждая полученная матрица $\left(a_{ij}^{l}\right)$ проверяется на транзитивность.

11. Если множество допустимых групповых решений в пространстве $\mathcal{QO}$ пусто, то за групповое решение принимается транзитивное замыкание отношения $\left(1 - p_{lk}^{\min}\right)$.

12. Работа алгоритма после выполнения п. 11 заканчивается восстановлением по матрицам групповых решений рангов соответствующих ранжирований.

9. Общий анализ выпуклых и метрических структур

В предыдущих разделах для решения проблемы группового выбора была развита общая теория выпуклых множеств в пространствах бинарных отношений и рассмотрены ее реализации в трех конкретных пространствах отношений индивидуального предпочтения. Настало время ответить на два вполне уместных здесь вопроса: как реализуются результаты, полученные в рамках этой теории, в остальных пространствах системы пространств, представленной на

диаграмме 6.5, и как соотносятся групповые решения, получаемые на основе предложенного подхода, и подхода, при котором для построения групповых решений используется метрическая структура?
Отвечая на эти вопросы, удобно взглянуть на построенную в разделе 6 систему пространств как бы сверху. Мы начнем наш «обзор» с общего рассмотрения метрической структуры в полных пространствах и указания на ранее изученные в этом отношении пространства (9.1). В следующем параграфе будут рассмотрены выпуклые и метрические структуры в нерассматривавшихся ранее неполных пространствах. В конце этого параграфа ответ на первый вопрос будет представлен в таблице, подводящей итог изучению свойств полноты и выпуклости в пространствах диаграммы 6.5.
В последнем параграфе этого раздела будет проведено сравнение указанных двух подходов к решению проблемы группового выбора на конкретных примерах в двух пространствах диаграммы 6.5.

9.1. Близость и метрика в полных пространствах бинарных отношений

Интуитивно понятие близости существует в любом пространстве с метрикой — мы говорим, что точка *R* «ближе» к точке *P,* чем точка *Q*, если $d(R,\ P) < d(Q,\ R)$, где *d* — функция расстояния в заданном пространстве. Оказывается, что в любом пространстве бинардых отношений аксиоматическое описание понятия «функция близости», более широкое, чем понятие метрики, в конечном итоге приводит к однозначной метрической структуре. Этим мы обязаны специфике рассматриваемых задач.
В этом параграфе мы рассмотрим функции близости и расстояния для случая полных пространств бинарных отношений, где связь между этими понятиями становится наиболее прозрачной.
Начнем со следующего общего определения.
Определение 9.1. Пусть $\mathbf{R}$ — произвольное пространство бинарных отношений. *Функцией близости* на пространстве $\mathbf{R}$ называется каждая функция $\delta(P,\ Q)$ на $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, удовлетворяющая условиям:
А1. Аддитивность:

$$R \in [P,\ Q] \Rightarrow \delta(P,\ R) + \delta(R,\ Q) = \delta(P,\ Q) \quad \forall\ P,\ Q.$$

А2. Нормировка: для любых двух соседних точек *P* и *Q*

$$\delta(P,\ Q) = 1.$$

Замечание. В то время как условие А1 носит «универсальный» характер и используется при определении функции близости во *всех* пространствах, условие А2 может видоизменяться в зависимости от конкретного вида пространства. В том виде, как это условие представлено в определении 9.1, оно пригодно для всех полных пространств и, например, для пространств $\mathcal{TO}$ и $\mathcal{TPO}$ (см. диаграмму 6.5).

Нашей ближайшей задачей будет установление существования и единственности функции близости, определенной условиями А1 и А2, для полных пространств бинарных отношений. Сначала установим, что в любом пространстве бинарных отношений справедлива

Лемма 9.1. *Если функция близости существует, то она определяется условиями* А1 *и* А2 *однозначно для любого пространства бинарных отношений* $\mathbf{R}$.

Доказательство. Пусть $P, Q \in \mathbf{R}$ и $P \neq Q$. Согласно теореме 7.1 существует линейный сегмент между *P* и *Q:*

$$R_0 = P,\ R_1,\ \ldots,\ R_n = Q \qquad (n \geqslant 1).$$

Из условия А2 непосредственно выводим, что

$$\delta(P,\ Q) = \delta(R_0,\ R_1) + \delta(R_1,\ R_2) + \ldots + \delta(R_{n-1},\ R_n).$$

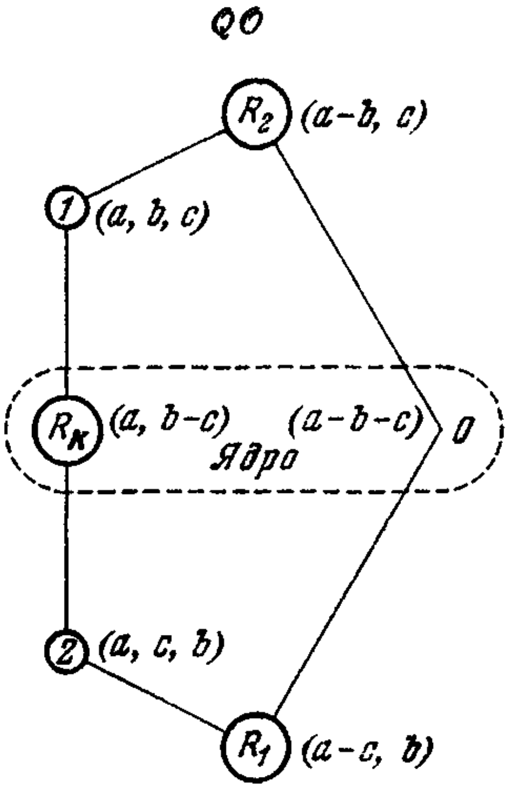
Согласно условию А2 отсюда следует $\delta(P,\ Q) = n,$ так как R_{i-1} и R_i — соседние точки в пространстве $\mathbf{R}$ для всех *i*. Если же *P* = *Q,* то из А1 получаем, что $\delta(P,\ Q) = 0.$

Следствие 9.1. Если функция δ существует, то она удовлетворяет также условиям

А3. Симметрия: $\delta(P,\ Q) = \delta(Q,\ P)\,P,\ Q.$

А4. Неотрицательность: $\delta(P,\ Q) \geqslant 0$ и $\delta(P,\ Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q.$

Наше предположение о существовании функции близости, конечно, было существенным при доказательстве вышеуказанных свойств. Рассмотрим фрагмент пространства $\mathcal{QO}$ для трех объектов



Очевидно, что последовательность R_1, 2, R_K, 1, R_2 является линейным сегментом. Но R_1, 0, R_2 также есть линейный сегмент.
Так как $4 \neq 2$, то мы делаем вывод, что в пространстве QO не существует функции δ, удовлетворяющей условиям А1 и А2. Здесь дело в том, что, как мы уже указывали выше, формулировка условия А2 выбирается в зависимости от конкретного пространства бинарных отношений.

Теперь установим *существование* функции близости, удовлетворяющей условиям А1 и А2, в полных пространствах бинарных отношений. С этой целью напомним сначала читателю определение расстояния Хемминга между булевыми матрицами. Пусть $p = \{p_{ij}\}$ и $q = \{q_{ij}\}$ — две булевы матрицы размера $n \times n$. Расстояние Хемминга $\chi(p, q)$ между ними определяется формулой

$$\chi(p, q) = \sum_{i,j=1}^{n} |p_{ij} - q_{ij}|. \tag{9.1}$$

Расстояние Хемминга удовлетворяет всем обычным свойствам геометрического расстояния.

Так как каждое бинарное отношение определяет булеву матрицу (см. 5.1), то можно считать, что на любом пространстве бинарных отношений существует метрика $d_\chi(P, Q)$, определяемая формулой

$$d_\chi(P, Q) = \chi(p, q), \tag{9.2}$$

где p и q — булевы матрицы отношений P и Q.

Лемма 9.2. *В полном пространстве бинарных отношений функция* $\delta(P, Q) = d_\chi(P, Q)$ *удовлетворяет условиям* А1 *и* А2.

Доказательство. Пусть $R \in [P, Q]$, т. е.

$$P \cap Q \subseteq R \subseteq P \cup Q. \tag{9.3}$$

Переходя к булевым матрицам отношений, перепишем 9.3 в виде

$$p_{ij} \wedge q_{ij} \leqslant r_{ij} \leqslant p_{ij} \vee q_{ij}, \tag{9.4}$$

где $\{p_{ij}\}$, $\{q_{ij}\}$, $\{r_{ij}\}$— матрицы отношений P, Q и R соответственно.

Имеем в силу (9.1), (9.2)

$$(P, Q) = d_\chi(P, Q) = \sum_{ij} |p_{ij} - q_{ij}| =$$

$$= \sum_{ij} (|p_{ij} - r_{ij}| + |r_{ij} - q_{ij}|) = d_\chi(P, R) + d_\chi(P, Q) = \delta(P, R) + \delta(R, Q).$$

Тем самым установлено, что А1 выполняется.

Пусть теперь P и Q — соседние точки. Так как пространство **R** полно, отсюда следует, что симметрическая разность $P \Delta Q$ есть одноэлементное множество. В терминах матриц $\{p_{ij}\}$ и $\{q_{ij}\}$ бинарных отношений P и Q это означает, что $\{p_{ij}\}$ и $\{q_{ij}\}$ различаются ровно одним элементом, т. е. для всех i и j, кроме одной пары, $|p_{ij} - q_{ij}| = 0$. Из (9.1) и (9.2) получаем

$$\delta(P, Q) = d_\chi(p, q) = \sum_{ij} |p_{ij} - q'_{ij}| = 1,$$

что и требовалось доказать.

Из доказанного выше следует, что справедлива следующая

Теорема 9.1. *На любом полном пространстве* **R** *существует единственная функция близости* $\delta(P, Q)$, *удовлетворяющая ус-*

ловиям A1 *и* A2. *Эта функция совпадает с расстоянием Хемминга между матрицами бинарных отношений из пространства* $\mathbf{R}$:

$$\delta(P, Q) = d_\chi(P, Q) = \sum_{ij} |p_{ij} - q_{ij}|,$$

где $\{p_{ij}, q_{ij}\}$ — *матрицы отношений P и Q.*

9.2. Пространства $\mathcal{TO}$ и $\mathcal{TSO}$

В этом параграфе мы довольно подробно рассмотрим структуру пространства $\mathcal{TSO}$ и изоморфного ему пространства $\mathcal{TO}$ — пространств, которые нам в этой работе еще не встречались. Эти пространства (вместе с тривиальпым пространством $\mathcal{E}$) образуют «первый этаж» диаграммы 6.5. Сначала мы рассмотрим выпуклые структуры, а завершим параграф изучением структур близости и метрики в пространстве $\mathcal{TSO}$.

Напомним определение пространства $\mathcal{TSO}$.

Определение 9.2. Пространство $\mathbf{R}$ бинарных отношений называется *пространством совершенных строгих порядков* $(\mathcal{TSO})$, если каждая его точка *L* есть бинарное отношение совершенного строгого порядка, т. е. удовлетворяет условиям

1. Антирефлексивность: $(x, x) \in L \ \forall x$
2. Транзитивность: $(x, y) \in L, (y, z) \in L \Rightarrow (x, z) \in L.$
3. Связность: для любых *x* и *y* либо $(x, y) \in L$ либо $(y, x) \in L.$

Отношения совершенного строгого порядка, или, как еще говорят, *отношения строгого линейного порядка* на конечном множестве **A** из *n* элементов, обладают довольно простой структурой. Так как, очевидно, каждое отношение *L* строгого линейного порядка на **A** есть в то же самое время отношение строгого частичного порядка, то в силу теоремы Шпильрайна на **A** существует нумерация $\mathbf{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, согласованная с *L*. Учитывая свойство связности строгого линейного порядка, получаем следующее утверждение.

Лемма 9.3. *Для любого линейного порядка L на конечном множестве* **A** *существует нумерация* $\mathbf{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *такая, что* $(a_i, a_j) \in L \Leftrightarrow i < j.$

Очевидно, что предыдущая лемма устанавливает взаимнооднозначное соответствие между точками пространства $\mathcal{TSO}$ и различными нумерациями множества **А**. Фиксируя какую-либо нумерацию $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n)$, мы видим, что любая другая нумерация получается в результате некоторой *перестановки* элементов множества А. Поэтому число различных точек пространства $\mathcal{TSO}$ равно n!.

Изучим подробнее структуру *соседних* точек в пространстве $\mathcal{TSO}$.

Напомним, что точка L лежит между точками L_1 и L_2 тогда и только тогда, когда

$$L_1 \cap L_2 \subseteq L \subseteq L_1 \cup L_2. \qquad (9.5)$$

Для любых двух элементов x и y множества **А** пусть $i, \ i_1, \ i_2$ и $j, \ j_1, \ j_2$ — их номера в нумерациях, согласованных соответственно с $L, \ L_1, \ L_2$. Из (9.5) получаем

$$\text{1) из } i_1 < j_1 \text{ и } i_2 < j_2 \text{ следует } i < j, \qquad (9.6)$$

$$\text{2) из } i < j \text{ следует, что } i_1 < j_1 \text{ или } i_2 < j_2,$$

причем условия (9.6) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы $L \in [L_1, \ L_2]$.

Лемма 9.4. *Согласованные нумерации соседних точек в* $\mathcal{TSO}$ *отличаются перестановкой двух последовательных элементов.*

Доказательство. Пусть L_1 и L_2 - две соседние точки и $(a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_n)$ — нумерация, согласованная с L_1, а $(s_1, \ s_2, \ \ldots \ldots, \ s_n)$ — нумерация тех же элементов в нумерации, согласованной с L_2. Так как $L_2 \neq L_1$, то найдется i такой, что $s_{i+1} < s_i$. Рассмотрим точку L, для которой номера элементов есть $(1, \ \ldots, \ i-1, \ i+1, \ i, \ i+2, \ \ldots, \ n)$. Для L легко проверяется выполнение условий (9.6) и, следовательно, $L \in [L_1, \ L_2]$. Так как L_1 и L_2 — соседние точки и $L \neq L_1$, то $L_2 = L$, откуда и следует утверждение леммы.

Теперь мы обратимся к выпуклым структурам пространства $\mathcal{TSO}$. Для этого пространства справедливы все общие определения и результаты 7.1—.2. Однако пространство $\mathcal{TSO}$ очевидным образом не является полным пространством — матрицы двух соседних отношений, как это следует из леммы 9.4, различаются ровно на двух элементах. Несмотря на это здесь удается установить эквивалентность двух определений выпуклости (см. 7.2).

Лемма 9.5. *В любом пространстве* $\mathcal{TPO}$ *из выпуклости в смысле определения* 7.4 *следует выпуклость в смысле определения* 7.5.

Доказательство. Пусть $\mathbf{X} = \{L_1, L_2, \ldots, L_k\}$ — множество, выпуклое в смысле определения 7.4, и пусть $L \in [L_1, \ldots, L_k]$. Рассмотрим линейный сегмент между L_1 и L_2. Предположим, что $L \notin \mathbf{X}$. Так как $L_1 \in \mathbf{X}$, то в линейном сегменте между L_1 и L найдутся две соседние точки L' и L'' такие, что $L' \in \mathbf{X}$, а $L'' \notin \mathbf{X}$. Пусть $(a_1, \ldots, a_n)$—нумерация элементов, согласованная с L'. Тогда в силу леммы 9.4 номера тех же элементов в нумерации, согласованной с L'', будут $(1, 2, \ldots, i-1, \underline{i+1}, \underline{i}, i+2, \ldots \ldots, n)$ для некоторого i. Пусть $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$— номера тех же элементов в нумерации, согласованной с L. Так как $L'' \in [L', L]$, то в силу второго условия из (9.6) имеем $s_{i+1} < s_i$. Пусть теперь $(s_1^r, s_2^r, \ldots, s_n^r)$ — номера тех же элементов в нумерации, согласованной с $L_r \in \mathbf{X}$ $(r = 1, 2, \ldots, k)$. Так как $L \in [L_1, \ldots, L_k]$, то $L \subseteq \bigcup\limits_r L_r$. Отсюда в силу $s_{i+1} < s_i$ найдется номер r, для которого $s_{i+1}^r < s_i^r$. Покажем, что $L'' \in [L', L_r]$. Условие 1 из (9.6), очевидно, выполнено, так как $s_{i+1}^r < s_i^r$, а L'' отличается от L' перестановкой объектов с номерами i и $i+1$. Из тех же соображений следует выполнение условия 2 из (9.6). Но $L' \in \mathbf{X}$ и $L_r \in \mathbf{X}$, а $L'' \notin \mathbf{X}$, что противоречит выпуклости **X**. Полученное противоречие показывает, что $L \in \mathbf{X}$, т. е. множество **X** выпукло в смысле определения 7.5. Лемма доказана.

Объединяя результат леммы 9.5 с результатом леммы 7.4, получаем теорему.

Теорема 9.2. *В пространстве* $\mathcal{TPO}$ *(и изоморфном ему пространстве* $\mathcal{TO}$*) оба определения выпуклости эквивалентны.*

На этом мы закончим рассмотрение выпуклых структур в пространствах $\mathcal{TPO}$ и перейдем к изучению структуры близости и метрики в этих пространствах.

Несмотря на то, что пространства $\mathcal{TPO}$ не являются полными, для них возможно определение функции близости. Так как в 9.1 было показано, что из существования функции близости, удовлетворяющей условиям А1 и А2, следует ее единственность в любом пространстве бинарных отношений, то достаточно показать, что в пространстве $\mathcal{TPO}$ существует функция $\delta(L_1, L_2)$, удовлетворяющая А1 и А2.

Определим $\delta(L_1, L_2)$ формулой

$$\delta(L_1, L_2) = \frac{1}{2}\chi(L_1, L_2). \tag{9.7}$$

Условие A1 проверяется так же, как и в произвольном пространстве (см. 9.1). Пусть теперь L_1 и L_2 — соседние точки в пространстве $\mathcal{TPO}$. Из леммы 9.4 следует, что матрицы отношений L_1 и L_2 различаются ровно на двух элементах. Поэтому $d_\chi(L_1, L_2) = 2$, откуда следует A2. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 9.3. *В пространстве* $\mathcal{TPO}$ *существует единственная функция близости, удовлетворяющая условиям* A1 *и* A2. *Эта функция близости задается формулой* (9.7).

Так как d_χ является метрикой, то справедлива

Теорема 9.4. *Функция близости, определенная в теореме* 9.3, *задает метрическую структуру пространства* $\mathcal{TPO}$.

Полученные выше в этом параграфе результаты вполне аналогичны результатам для полных пространств. Возвращаясь к диаграмме 6.5, можно сказать, что для пространств предпочтений 1-го, 3-го и 4-го «этажей» этой диаграммы два общих определения выпуклости оказываются эквивалентными, что позволяет развивать для них геометрический подход к проблеме группового выбора, предложенный в данной работе. Далее, для этих же пространств оказался возможным общий подход к понятию функции близости (условия A1 и A2) и построение на его основе метрики в этих пространствах. Эта метрика для единственного из этих пространств, изучавшегося ранее,— пространства $\mathcal{PO}$, позволяет развивать в этих пространствах метрический подход.

Обратимся теперь к пространствам 2-го «этажа» диаграммы 6.5. Это пространство $\mathcal{QO}$ (и изоморфное ему пространство $\mathcal{OP}$) и пространство безразличия $\mathcal{T}$. В ряде работ был намечен метрический подход к проблеме группового выбора в данных пространствах. Относительно сложная структура самих отношений в этих пространствах и, особенно, соседних отношений, не позволяет реализовать для них рассматриваемы подход, основанный на функциях близости. Введение метрики в этих пространствах возможно только лишь на основе довольно громоздкой системы аксиом, хотя в конечном итоге эти метрики совпадают с расстоянием Хемминга, что имеет место и при данном подходе.

9.3. Полные и неполные пространства

Как видно из изложенного выше, в основе всех построений в рамках геометрического подхода лежит эквивалентность двух понятий выпуклости — геометрического и опирающегося на принцип единогласия Парето. В 7.2 был доказан простой критерий, позволяющий установить наличие такой эквивалентности. Для этого *достаточно* потребовать, чтобы рассматриваемое пространство бинарных отношений удовлетворяло условию полноты (см. 7.2). Однако полнота пространств не является *необходимым* условием эквивалентности двух понятий выпуклости. Так, например, пространство $\mathcal{T}$ отношений толерантности не является полным, однако для него можно доказать эквивалентность двух понятий выпуклости.

На диаграмме 6.5 можно легко указать пространства, являющиеся полными. Это пространства $\mathcal{P}$, $\mathcal{QT}$, $\mathcal{SP}$, $\mathcal{PO}$ и $\mathcal{E}$, последнее — тривиально полное. Все остальные пространства полными не являются. Однако для некоторых из них довольно легко устанавливается эквивалентность двух понятий выпуклости. Такими пространствами являются два изоморфных пространства $\mathcal{TO}$ и $\mathcal{TPO}$, изученные в предыдущем параграфе, а также пространства $\mathcal{T}$ и $\mathcal{TOT}$.

Пространство разбиений $\mathcal{J}$ дает нам пока единственный пример пространства, в котором два определения выпуклости не совпадают и приводят, вообще говоря, к разным выпуклым множествам. Покажем это на следующем примере.

Пусть $\mathbf{A} = \{a, b, c\}$. Рассмотрим множество $\mathbf{X} = \{I_0, I_1, I_2, I_3\}$, элементы которого задаются матрицами отношений

$$(I_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (I_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(I_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что множество X является выпуклым в смысле определения 7.4. Однако оно не является выпуклым в смысле определения 7.5, так как отношение эквивалентности *I* с матрицей

$$(I)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

лежит между всеми элементами из **X** (оно совпадает с $I_0 \cup I_1 \cup \cup I_2 \cup I_3)$, но не принадлежит **X**. Следующая таблица подводит итог рассмотрению свойств полноты и выпуклости для пространств из диаграммы 6.5.

Свойство	Пространство			
	$\mathcal{P}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{QT}$, $\mathcal{SP}$, $\mathcal{PO}$	$\mathcal{QO}$, $\mathcal{QS}$	$\mathcal{TO}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{TSO}$, $\mathcal{TOT}$	$\mathcal{S}$
Пространство полно	**Да**	**Нет**	**Нет**	**Нет**
Два определения выпуклости совпадают	**Да**	**?**	**Да**	**Нет**

9.4. Сравнение геометрического и метрического подходов

В атом параграфе мы проиллюстрируем работу алгоритма для построения ядра выпуклой оболочки на четырех парах простейших примеров и одновременно проведем сравнение результатов применения метрического и геометрического подходов к решению задач группового выбора. Пары примеров составлены следующим образом: в первом примере каждой пары исходные данные задаются в пространстве $\mathcal{QO}$ и в нем же ищется групповое решение, во втором примере в качестве исходных принимаются все точки выпуклой оболочки в пространстве $\mathcal{PO}$, полученной в первом примере пары, и групповое решение ищется также в $\mathcal{QO}$.

Все примеры проводятся для $\mathbf{A}=\{a,\ b,\ c\}$. Фрагменты пространств, изображаемые на рисунках, представляют собой выпуклые оболочки для исходных данных примера. Стрелками на рисунках указываются отношения включения. Для удобства представления о расположении исходных данных в пространствах $\mathcal{PO}$ и $\mathcal{QO}$ на рис. 9.1 эти пространства изображены целиком. Исходные данные в первых примерах каждой пары для пространства $\mathcal{QO}$ будут обозначаться через

$R_1, R_2, \ldots,$ а соответствующие им точки в $\mathcal{PO}$ —через $P_1, P_2, \ldots$

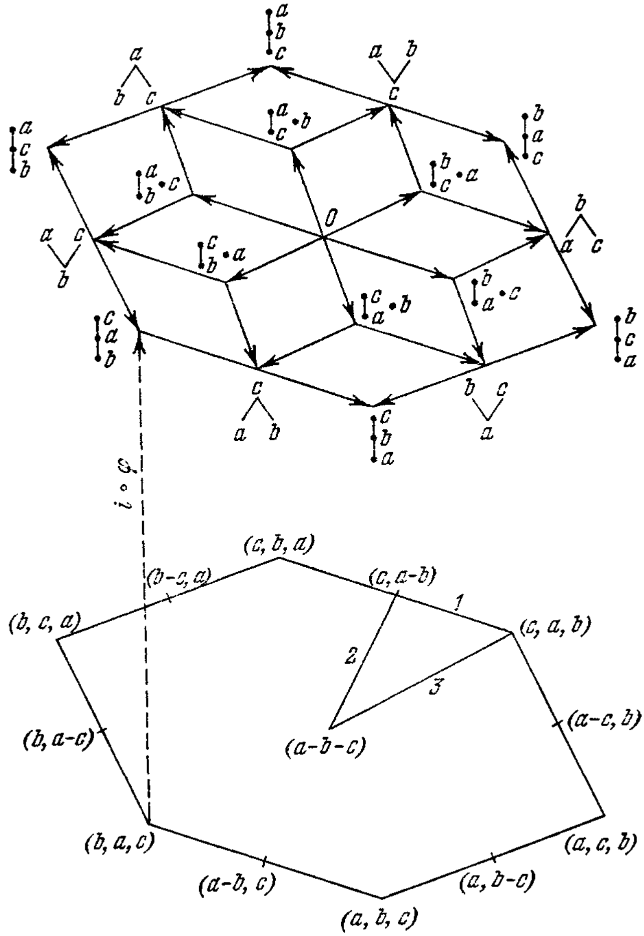


Рис. 9.1.

Начиная со второй пары примеров все исходные отношения будут сразу приводиться в одной таблице. Только в первом примере будет подробно описано формирование максимальных элементов P'_{i_1} ближайших кданным P_i. В остальных же — они будут сразу отмечаться на рисунке.

Для сравнения условий, в которых приходится решать проблему группового выбора в пространствах $\mathcal{PO}$ и $\mathcal{QO}$, в каждом примере

для каждого пространства будут определены точки ядра, точки, в которых достигается или минимум суммы расстояний
до исходных, т. е. медианы, или минимум суммы квадратов таких расстояний, т. е. среднее (напомним здесь лишь то, что все расстояния между бинарными отношениями, вводимые при метрическом подходе аксиоматически, совпадают с расстоянием Хемминга между соответствующими булевыми матрицами отношений). Все эти данные будут сводитьсяв таблицы, непосредственно следующие за фрагментами пространств, являющихся выпуклыми оболочками для исходных данных примера.

Примеры подобраны таким образом, чтобы проиллюстрировать такие конфигурации расположения индивидуальных предпочтений, которые приводят к ядрам (множествам допустимых групповых решений) разной размерности — от минимального нулевого до максимального 3-мерного (подразумевая реализацию пространства $\mathcal{PO}$ в виде подмножества вершин куба размерности $n(n-1)/2$, где n — число объектов), а также показать различные случаи соотнесения точек ядра с точками, принимаемыми в качестве групповых решений в метрическом подходе, т. е. с медианами и средними.

Отметим очевидную из рис. 9.1 разницу в пространственном расположении точек в используемых пространствах. В пространстве $\mathcal{PO}$ все расстояния между соседними точками равны 1, т. е. в этом отношении пространство $\mathcal{PO}$ — «однородное», точки в нем расположены равномерно, без сгущений и разрежений. В пространстве $\mathcal{QO}$ дело обстоит не так. По периметру шестиугольника, на котором расположены 12 точек, расстояния между соседними точками равны 1, но между этими точками и тачкой, расположенной в центре пространства $\mathcal{QO}$ расстояние равно 2
или 3, как это показано на рис. 9.1.

Пример А1. Пусть исходное множество **X** состоит из двух линейных квазипорядков $R_1 = (b,\ a,\ c)$ **и** $R_2 = (a - c,\ b)$. Выпишем матрицы отношений R_1 и R_2:

$$(R_1) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} \qquad (R_2) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

и их образы в пространстве $\mathcal{PO}$:

$$(P_1) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline & & \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline \end{array} \qquad (P_2) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline 1 & & 1 \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

В данном примере исходные точки отстоят друг от друга на расстояние $d = 5$, т. е. почти на максимальное расстояние $(d_{max} = 6)$. Построим ядро в $\mathcal{PO}$ в соответствии с процедурой, описанной в 8.3. Находим

$$(P_{min}) = (P_1 \cap P_2) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \in \mathcal{PO}$$

$$(P) = (P_1 \cup P_2) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline 1 & & 1 \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline \end{array} \notin \mathcal{PO}$$

Найдем теперь максимальные элементы P_1 и P_2. Непосредственной проверкой убеждаемся, что какой бы элемент из разности $P \backslash P_1$ мы ни добавляли к P_1, мы не получим транзитивного отношения. Следовательно, P_1 уже само является максимальным элементом. В разности же $P \backslash P_2$ только добавление пары $\{(c, a)\}$ дает транзитивное отношение и, следовательно, $P'_2 = P_2 \cup \{(c, a)\}$.
Отсюда получаем, что ядерное отношение $P_K = P'_1 \cap P'_2 = \{(c, a)\}$.
Таким образом, мы получили одномерное ядро, состоящее из двух точек: $P_{min} = 0$ и $P_K = \{(c, a)\}$. Следовательно, в пространстве $\mathcal{PO}$ множество допустимых групповых решений состоит из двух отношений, первое из которых говорит о том, что эксперты «в среднем» не различают объекты или считают их несравнимыми, а второе — что эксперты могут «в среднем» провести различие только между двумя объектами a и c, а именно: (a, c), а третий объект b считают несравнимым с объектами a и c.

При переносе построенного ядра в пространство $\mathcal{QO}$ получаем только одно решение $R = (a - b - c)$, соответствующее $P_{\min}$, поскольку для P_K в пространстве $\mathcal{QO}$ нет соответствующего отношения. Полученное в $\mathcal{QO}$ отношение R содержательно означает, что «в среднем» эксперты считают все объекты эквивалентными.

Выпуклые оболочки для исходных данных представлены на рис. 9.2 и рис. 9.3 для пространств $\mathcal{PO}$ и $\mathcal{QO}$ соответственно.

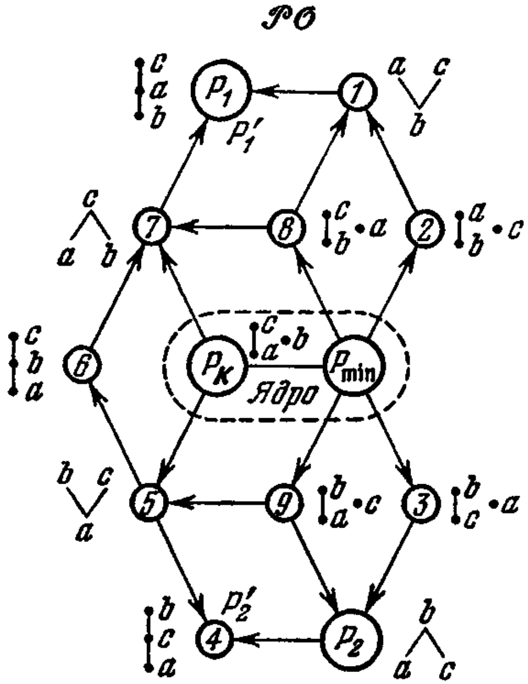


Рис.9.2

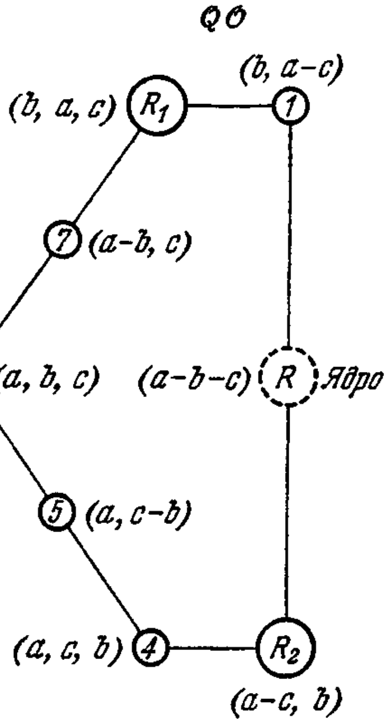


Рис.9.3

Для рассматриваемых исходных данных все необходимые характеристики точек, составляющих выпуклую оболочку в обоих пространствах, сведены в таблицу 9.1.

Таблица 9.1

Точки			$\mathcal{P}O$		QO		
			min Σd	min Σd^2	Точки	min Σd	min Σd^2
1	2	3	4	5	6	7	8
Выпуклой оболочки	Ядра́	P_{min}	*	*	R	*	*
		$P_К$	*	*	—		
	Исходные	P_1	*	—	R_1	*	
		P_2	*	—	R_2	*	
		1,4	*	—	1,4	*	
		2,8	*	*	—		
		3,9	*	—	—		
		5,6	*	*	5,6	*	*
		7	*	—	7	*	

Эта таблица устроена следующим образом. В столбцах 3 и 6 помещены все точки, отмеченные на рис. 9.2 и 9.3 для пространств $\mathcal{PO}$ и $\mathcal{QO}$ соответственно. На одной и той же строке в этих столбцах указаны точки, соответствующие друг другу при переходе из одного пространства в другое, причем, если для точки из $\mathcal{PO}$ (например, точки $P_К$) в пространстве $\mathcal{QO}$ соответствующей точки нет, то в столбце 6 (напротив точки $P_К$) ставится прочерк. В каждом пространстве точки распределены на три группы (см. столбцы 1 и 2): составляющие выпуклую оболочку, являющиеся исходными и образующие ядро выпуклой оболочки. В столбцах 4 и 7 для $\mathcal{PO}$ и $\mathcal{QO}$ соответственно звездочками отмечены точки, являющиеся медианами, а в столбцах 5 и 8 — являющиеся средними. Найти эти тачки можно непосредственным расчетом соответствующих сумм, подсчитывая расстояния от данной точки до всех исходных по рис. 9.1 или рис. 9.2 и 9.3. Заметим, что при расчете медиан и средних во внимание принимались все точки пространств $\mathcal{PO}$ и $\mathcal{QO}$.

Таким образом, в этом примере, как это видно из таблицы 9.1, для двух исходных точек R_1 и R_2 соответствующая им выпуклая оболочка в пространстве $\mathcal{QO}$ состоит из 8 точек, а в пространстве $\mathcal{PO}$ — из 13 точек. Ядро выпуклой оболочки в $\mathcal{QO}$ содержит одну точку R, в $\mathcal{PO}$ — две точки: $P_{\min}$ и $P_К$. Данные, характеризующие состояние проблемы группового выбора в рассматриваемом случае, представлены в таблице 9.2.

Таблица 9.2

		В пространстве $\mathcal{PO}$	В пространстве $\mathcal{QO}$
Размерность ядра		1	0
Число точек в ядре		2	1
Возможные групповые решения при метрическом подходе (1-й уровень)	Медианы	Все 13 точек выпуклой оболочки (из них 2 ядерные)	Все 8 точек выпуклой оболочки (из них 1 ядерная)
	Средние	6 точек (из них 2 ядерные)	3 точки (из них 1 ядерная)
Допустимые групповые решения при геометрическом подходе (1-й уровень)		2 точки	1 точка

Условия выбора группового решения в обоих пространствах при метрическом подходе можно признать довольно сложными. Если групповое решение выбирать из числа медиан, то в $\mathcal{QO}$ таковым может служить любая из восьми точек выпуклой оболочки, а в $\mathcal{PO}$ — любая из тринадцати точек выпуклой оболочки. Отметим при этом, что семь из восьми точек в $\mathcal{QO}$ и одиннадцать из тринадцати точек в $\mathcal{PO}$ не попадают в ядро. Привлечение среднего только приблизительно наполовину уменьшает число возможных групповых решений. Все ядерные точки попали в обоих пространствах в число медиан и средних. При «комплексном» подходе, т. е. таком подходе, когда на втором уровне выработки группового решения рассматриваются только те точки, которые на первом уровне удовлетворяют требованиям обоих подходов одновременно, в пространстве $\mathcal{QO}$ было бы только одно решение — точка *R*, а в $\mathcal{PO}$ — только два решения: $P_{\min}$ и $P_К$.

Пример А2. Будем теперь все точки выпуклой оболочки в пространстве $\mathcal{PO}$, полученной в предыдущем примере А1, считать исходными, а поиск группового решения по-прежнему проводить в пространстве $\mathcal{QO}$. Очевидно, что при таком выборе исходных данных, выпуклые оболочки и их ядра в обоих пространствах (см. рис. 9.2 и 9.3) останутся без изменений.

Таблица 9.3

Точки			$\mathcal{PO}$		$\mathcal{QO}$		
			min Σd	**min Σd²**	**Точки**	**min Σd**	**min Σd²**
1	2	3	4	5	6	7	8
	Ядра́	$P_{\min}$	*	*	R		
		$P_К$	*		—		
Исходные и выпуклой оболочки		P_1			R_1		
		P_2			R_2		
		1, 4			1, 4		
		2, 3, 8, 9			—		
		5, 7			5, 7	*	
		6			6	*	*

Таблица 9.4

		В пространстве $\mathcal{PO}$	В пространстве $\mathcal{QO}$
Размерность ядра		**1**	**0**
Число точек в ядре		**2**	**1**
Возможные групповые решения при метрическом подходе (1-й уровень)	**Медианы**	**2 (ядерные) точки**	**3 точки**
	Средние	**1 (ядерная) точка**	**1 точка**
Допустимые групповые решения при геометрическом подходе (1-й уровень)		**2 точки**	**1 точка**

Как видно из таблиц 9.3 и 9.4, условия группового выбора при метрическом подходе изменились: в пространстве $\mathcal{PO}$ только две точки являются медианами, а в $\mathcal{QO}$ — только три. При геометрическом подходе множество допустимых групповых решений остается неизменным, поскольку ядра выпуклых оболочек не изменились. Отметим две особенности, выявляемые данной парой примеров. Первая — общая для всех пар рассматриваемых здесь примеров, состоит в том, что, как указывалось в 8.2, выпуклая оболочка для каждой совокупности данных в общем
случае может порождаться несколькими базисами. Так, например, выпуклая оболочка (см. рис. 9.2) в $\mathcal{PO}$, кроме базисов (P_1, P_2) и (1, 4) может быть образована базисами из точек

$$(P_1, 6, P_2),\ (P_1, 7, P_2),\ (P_1, 5, P_2),\ (P_1, 4, P_2),\ (P_1, P_{\min}, P_2)$$

и т. д.

Выбирая эти наборы базисных точек в качестве исходных данных при метрическом подходе, мы будем в общем случае получать разные групповые решения при неизменном согласии всех наборов в смысле принципа Парето.

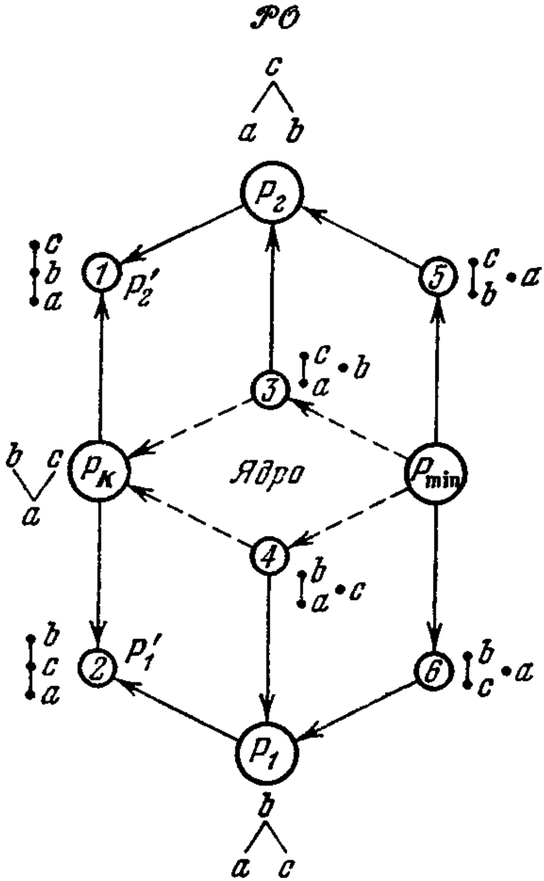
Вторая особенность состоит в следующем. В примере А1 при метрическом подходе можно было выбрать решения как принадлежащие, так и не принадлежащие ядру. Рассматриваемый же набор исходных данных дает нам пример того, что множество решений при метрическом и геометрическом подходах могут не пересекаться: ни одна из точек 5, 6, 7, составляющих в пространстве $\mathcal{QO}$ множество возможных групповых решений при метрическом подходе, не принадлежит ядру.

Пример Б1. Исходные данные этого примера приведены в таблице 9.5.

Таблица 9.5

i	1	2
R_i	$(a—c,\ b)$	$(a—b,\ c)$
P_i	$\{(b, a), (b, c)\}$	$\{(c, a), (c, b)\}$

Выпуклые оболочки исходных точек приведены на рис. 9.4 и 9.5.



𝒫𝒪
c
a b
$P_г$
1
$P_г'$
c
b
a
5
c
b
a
3
c
a
b
b c
a
$P_к$
Ядро
P_{min}
4
b
a
c
2
P_1'
b
c
a
6
b
c
a
P_1
b
a c

Рис. 9.4.

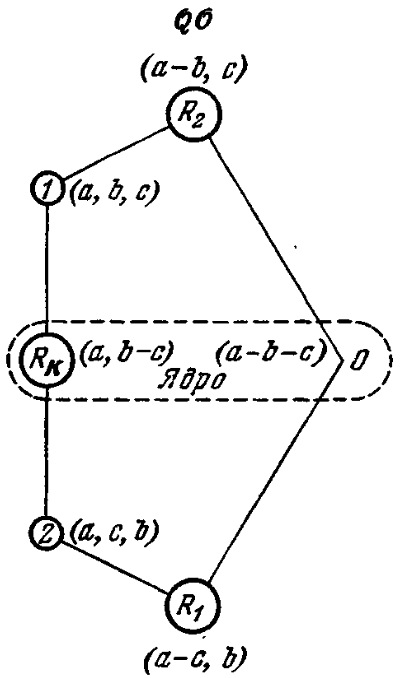


Рис. 9.5.

Возможные групповые решения при метрическом подходе и точки для данных примера Б1 представлены в таблице 9.6.

Таблица 9.6

Точки			$\mathcal{P}O$		QO		
			min Σd	min Σd^2	Точки	min Σd	min Σd^2
1	2	3	4	5	6	7	8
Выпуклой оболочки	Ядра	$P_{\min}$ 3, 4 $P_{К}$	* * *	* *	0 — $R_{К}$	* *	* *
	Ис-ход-ные	P_1 P_2	* *		R_1 R_2	* *	
		1, 2 5, 6	* *		1, 2 —	*	

Характеристики условий для выбора группового решения на первом уровне собраны в таблице 9.7.

Таблица 9.7

		В пространстве $\mathcal{PO}$	В пространстве $\mathcal{QO}$
Размерность ядра		2	1
Число точек в ядре		4	2
Возможные групповые решения при метрическом подходе (1-й уровень)	Медианы	Все 10 точек выпуклой оболочки (из них 4 ядерные)	Все 6 точек выпуклой оболочки (из них 2 ядерные)
	Средние	2 (ядерные) точки	2 (ядерные) точки
Допустимые групповые решения при геометрическом подходе (1-й уровень)		4 точки	2 точки

Отметим, что расстояние между исходными точками $(d(R_1, R_2) = 4)$ и само расположение точек по сравнению с примером А1, как это видно из сравнения выпуклых оболочек на рис. 9.3 и 9.5, изменились незначительно, а размерность ядра в обоих пространствах увеличилась. Условия выбора группового решения сохраняют двухуровневость и аналогичны условиям примера А1. При комплексном подходе количество решений на первом уровне может быть сокращено до двух в каждом пространстве.

Пример Б2. Пусть, как и в примере А2, точки выпуклой оболочки в пространстве $\mathcal{PO}$ будут исходными точками при поиске группового решения в пространстве $\mathcal{QO}$. Групповые решения при обоих подходах представлены в таблице 9.8.

Таблица 9.8

Точки			$\mathcal{P}O$		QO		
			min Σd	min Σd^2	Точки	min Σd	min Σd^2
1	2	3	4	5	6	7	8
Исходные и выпуклой оболочки	Ядра	$P_{\min}$ 3, 4 $P_К$	* * *	*	0 — $R_К$	*	*
		P_1 P_2	[illegible]		R_1 R_2		
		1, 2 5, 6			1, 2 —		

Из таблицы 9.8 видно, что в обоих пространствах все медианы и все средние являются одновременно и точками ядра. В пространстве QO проблема выбора группового решения при комплексном подходе решается однозначно выбором точки $R_К$.

Пример В1. Пусть исходные данные имеют вид

Таблица 9.9

i	1	2	3	4
R_i	(a, b, c)	$(a—b, c)$	$(a, b—c)$	$(a—b—c)$
P_i	$\{(c, b), (c, a), (b, a)\}$	$\{(c, a), (c, b)\}$	$\{(b, a), (c, a)\}$	0

Выпуклые оболочки исходных данных приведены на рис. 9.6 и 9.7.

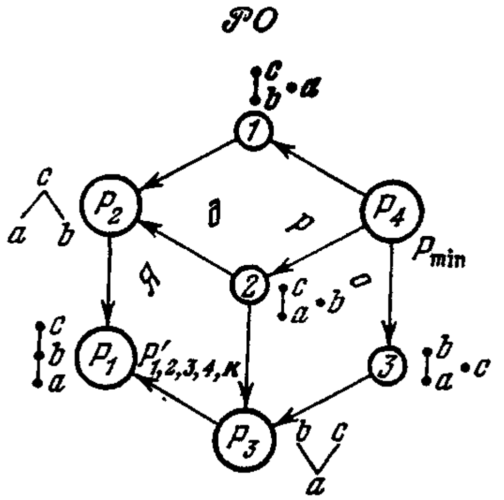


Рис. 9.6

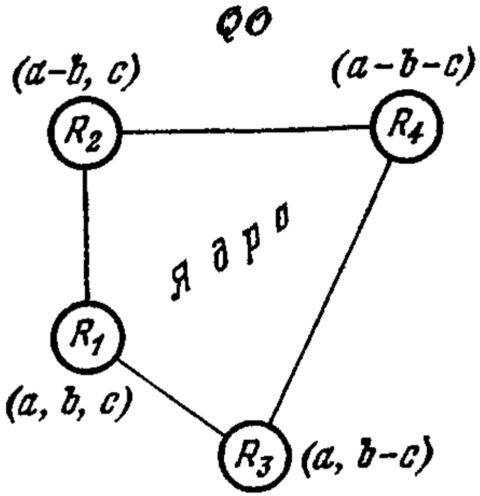


Рис. 9.7.

Как видно из рис. 9.7, исходные данные в пространстве *QO* составляют ядро и выпуклую оболочку одновременно. Размещение медиан и средних показано в таблице 9.10.

Таблица 9.10

Точки			$\mathcal{PO}$		$\mathcal{QO}$		
			min Σd	min Σd^2	Точки	min Σd	min Σd^2
1	2	3	4	5	6	7	8
Ядра́ и выпуклой оболочки	Исходные	1 P_1 P_2, P_3 P_4	 * *		R_1 R_2, R_3 R_4	 * *	*
		1, 3 2	*	*	— —		

Таким образом, в пространстве $\mathcal{QO}$ любая исходная точка при геометрическом подходе может быть выбрана в качестве группового решения (см. табл. 9.11), а в $\mathcal{PO}$—любая из семи точек выпуклой оболочки.

Таблица 9.11

		В пространстве $\mathcal{PO}$	В пространстве $\mathcal{QO}$
Размерность ядра		3	2
Число точек в ядре		7	4
Возможные групповые решения при метрическом подходе (1-й уровень)	Медианы	4 точки (все ядерные)	3 точки (все ядерные)
	Средние	1 (ядерная) точка	1 (ядерная) точка
Допустимые групповые решения при геометрическом подходе (1-й уровень)		7 точек	4 точки

Дополнительный учет критериев метрического подхода сокращает число решений на первом уровне в $\mathcal{QO}$ до двух-трех точек, а в $\mathcal{PO}$—до четырех $(P_2, P_3, P_4, 2)$ или даже одной точки (2).

Пример В2. Размещение медиан и средних для случая, когда точки выпуклой оболочки в пространстве $\mathcal{PO}$ из примера В1 принимаются в качестве исходных для поиска решений в пространстве $\mathcal{QO}$, показано в таблице 9.12.

Таблица 9.12

Точки		$\mathcal{PO}$		$\mathcal{QO}$		
		min Σd	min Σd^2	точки	min Σd	min Σd^2
1, 2	3	4	5	6	7	8
Исходные, ядра и выпуклой оболочки	P_1			R_1		
	P_2, P_3			R_2, R_3	*	*
	P_4			R_4	*	
	1, 3			—		
	2	*	*	—		

Как видно из этой таблицы, на роль группового решения в пространстве $\mathcal{PO}$ при любом подходе может претендовать только одна точка 2. В пространстве же $\mathcal{QO}$, естественно, условия выбора группового решения не изменились.

Пример Г1. Пусть исходные данные имеют вид

Таблица 9.13

i	1	2
R_i	(c, b, a)	$(b, a—c)$
P_i	$\{(a, b), (a, c), (b, c)\}$	$\{(a, b), (c, b)\}$

Выпуклые оболочки для исходных данных приведены на рис. 9.8 и 9.9.

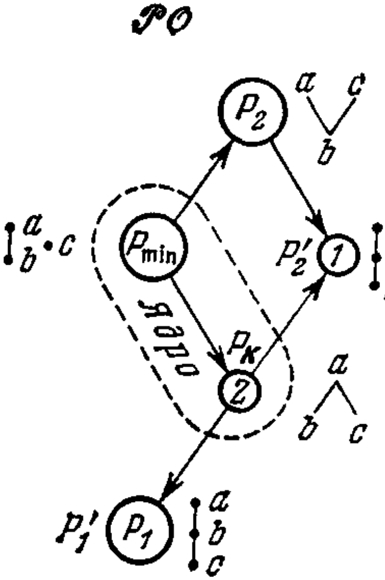


Рис. 9.8.

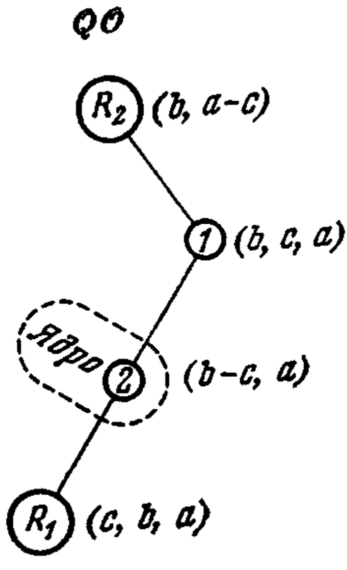


Рис. 9.9.

Обратим внимание на то, что в данном примере в пространстве $\mathcal{QO}$ (см. рис. 9.9) две точки (1 и 2) расположены одинаково относительно исходных точек. Однако точка 1 не попадает в число ядерных вследствие того, что в ней отношение на паре объектов (*b, c)* «тяготеет» к исходной точке R_2.

Из таблицы 9.14 видно, что, подобно тому, как это было в примерах А1 и Б1, в обоих пространствах все точки выпуклой оболочки являются медианами, а точки ядра — к тому же и средними.

Таблица 9.14

Точки			$\mathcal{PO}$		$\mathcal{QO}$		
			min Σd	min Σd^2	Точки	min Σd	min Σd^2
1	2	3	4	5	6	7	8
Выпуклой оболочки	Ядра	$P_{\min}$	*	*	—		
		2	*	*	2	*	*
	Исходные	P_1	*		R_1	*	
		P_2	*		R_2	*	
		1	*	*	1	*	*

Из приведенных в таблицах 9.14 и 9.15 данных следует, что при комплексном подходе число решений на первом уровне в $\mathcal{PO}$ ограничено двумя точками ($P_{\min}$ и 2), а в $\mathcal{QO}$ — одной точкой (2).

Таблица 9.15

		В пространстве $\mathcal{PO}$	В пространстве $\mathcal{QO}$
Размерность ядра		1	0
Число точек в ядре		2	1
Возможные групповые решения при метрическом подходе (1-й уровень)	Медиана	Все 5 точек выпуклой оболочки (из них 2 ядерные)	Все 4 точки выпуклой оболочки (из них 1 ядерная)
	Средняя	3 точки (из них 2 ядерные)	2 точки (из них 1 ядерная)
Допустимые групповые решения при геометрическом подходе (1-й уровень)		2 точки	1 точка

Пример Г2. Размещение медиан и средних для последнего примера, когда точки выпуклой оболочки в пространстве $\mathcal{PO}$ из примера Г1 являются исходными данными для поиска решений в пространстве $\mathcal{QO}$, показано в таблице 9.16.

Таблица 9.16

Точки			$\mathcal{PO}$		$\mathcal{QO}$		
			minΣd	minΣd^2	точки	minΣd	minΣd^2
1	2	3	4	5	6	7	8
Исходные и выпуклой оболочки	Ядра́	P_{min} 2	*	*	— 2	*	*
		P_1 P_2			R_1 R_2		
		1			1	*	*

В пространствах $\mathcal{PO}$ и $\mathcal{QO}$ проблема выбора группового решения на *1*-м уровне не вызывает никаких затруднений при комплексном подходе: таковым несомненно должна быть точка *2*.

Эти примеры дают нам большинство возможных вариантов соотнесения ядерных точек, с одной стороны, и медиан и средних — с другой. Так, например, групповые решения при геометрическом подходе могут полностью содержаться в решениях метрического подхода (в $\mathcal{PO}$ —примеры А1, Б1, Г1; в $\mathcal{QO}$ — примеры А1, Б1, Г1, Г2) и наоборот (в $\mathcal{PO}$ — примеры В1, В2; в $\mathcal{QO}$—пример В2), могут полностью совпадать (в $\mathcal{PO}$—примеры А2, Б2, Г2; в $\mathcal{QO}$— пример Б2), могут не иметь общих решений (в $\mathcal{QO}$— пример А2).

Из непосредственного сравнения примеров в каждой паре видно, что при метрическом подходе разнообразие (увеличение числа) исходных мнений (точек) уменьшает число возможных групповых решений, в то время как при геометрическом подходе число допустимых групповых решений определяется, вообще говоря, расположением «самых крайних» мнений. Поясним это замечание на примере А2. В примере А2 перечислены несколько базисов, образующих одну и ту же выпуклую оболочку (рис. 9.2). Первые два из них, а именно (P_1, P_2) и (1, 4), являются минимальными по числу содержащих точек и составлены из таких «крайних» мнений: какие бы мнения из образуемой ими выпуклой оболочки (т. е. лежащие между этими крайними) мы не добавляли в эти базисы, ни выпуклая оболочка, ни, соответственно, ядро не вменятся.

Рассмотренные примеры являются также иллюстрацией к тому факту, что размерность ядра, и, следовательно, число точек в нем, связана не с максимальным расстоянием между исходными мнениями (точками), а с их взаимным расположением, определяющим конфигурацию выпуклой оболочки. Иллюстрацией этому служат примеры А1 и Б1: несмотря на то, что расстояние между исходными точками во втором примере меньше, чем в первом, размерность ядра во втором примере больше.

Суммируя сделанные замечания, можно сделать вывод о различной природе факторов, определяющих множества групповых решений при обоих подходах, и невозможности на данном уровне исследований установить строгие зависимости между результатами применения сравниваемых подходов.

Сравнение условий, характеризующих проблему группового выбора при обоих подходах, приводит нас к заключению, что комплексное применение геометрического и метрического подходов может, по-видимому, стать действенным средством для выделения хорошо обоснованных групповых решений, попадающих на второй уровень, где из множества допустимых групповых решений выбирается единственное решение.

10. Практическое применение геометрического подхода

10.1. Анализ экспертиз НИР

Алгоритм «Ядро» был использован для анализа трех экспертиз НИР, проводившихся последовательно друг за другом на ежегодных научных конференциях. Экспертное оценивание НИР и обработка оценок производились по методике, учитывающей специфику набора управляющих воздействий, применявшихся по результатам экспертиз. Качество НИР характеризовалось по двум аспектам, каждый из которых описывался 3—4 признаками.

Оценки по признакам выставлялись в специальным образом устроенных балльных шкалах. Полезно различать два вида балльных оценок: к первому виду относятся оценки, производимые при наличии объективного критерия, ко второму — когда не только нет общепринятых эталонов, но и сомнительно даже наличие некоего единственного объективного критерия, субъективным отражением которого являются оценки. Во втором случае оценки рассматриваются выполненными в шкале порядка. С этой точки зрения на основании балльных оценок составлялись совокупности упорядочений, которые затем обрабатывались программой «Ядро». Результаты этой обработки сравнивались с упорядочениями, соответствующими агрегированным показателям НИР или по аспектам, или в целом, или средним оценкам по одному из признаков.

Первая экспертиза НИР. По результатам первой экспертизы были составлены 18 совокупностей из пяти (по числу экспертов) упорядочений каждая, полученных на основе оценок НИР по трем признакам в шести научных секциях. В каждой секции докладывалось в среднем по 11 работ. Анализ этих совокупностей имел целью выяснить, имеется ли среди экспертов согласованность в смысле принципа Парето по использованным для оценки признакам. Единственное невырожденное групповое решение имело вид 22221222222 (здесь, и далее в этом разделе, в такой записи цифра на i-м месте указывает ранг i-го объекта.), т. е. представляло собой разбиение 11 объектов на два упорядоченных класса, причем класс наиболее предпочтительных объектов состоит из одного объекта. Практически во всех комиссиях по всем трем признакам оказалось невозможным построить искомые групповые решения.

По результатам этой экспертизы исследовался также вопрос о том, как усреднение экспертных оценок влияет на согласованность экспертных суждений в смысле принципа Парето. По каждому из трех признаков в отдельности были рассчитаны средние (по числу экспертов в секции) арифметические балльные оценки для каждого объекта. На их основе были составлены шесть совокупностей из трех упорядочений каждая. Результаты обработки приведены в таблице 10.1.

Таблица 10.1

Комиссии	Объекты											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
I	3	5	5	1	3	9	5	5	2			
	3	8	6	1	4	9	6	7	2			
II	1	3	3	3	3	3	3	3	1			
	1	6	8	9	7	5	4	3	2			
III	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2
	4	5	11	12	3	10	1	8	2	6	9	7
IV	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2
	7	9	2	3	4	1	6	10	11	8	12	5
V	2	2	2	2	1	2	2	11	2	2	2	
	8	3	5	4	1	10	9	11	7	6	2	
VI	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2		
	6	2	4	10	3	1	9	5	7	8		

В этой таблице для каждой секции в первой строке указаны отношения из ядра, а во второй — отношение, соответствующее агрегированным показателям, принимавшееся за «истинное».

Приведенные в таблице 10.1 допустимые групповые решения представляют собой в среднем разбиение оцениваемой совокупности объектов на 2-3 класса. Наиболее «тонко различающие» объекты групповое решение, составляющее ядро экспертных суждений первой комиссии, разбивает объекты на пять классов. Оно хорошо согласуется с упорядочением, полученным по агрегированным оценкам. Это может свидетельствовать или о том, что в дайной комиссии суждения экспертов по отдельным признакам определялись совокупными (агрегированными) достоинствами работ, или связано с тем, что состав работ сам по себе таков, что достоинства работ по агрегированному показателю монотонно связаны с частными признаками (а экспертная комиссия в целом довольно чутко отреагировала на это).

Отметим характер использования алгоритма в последнем случае: упорядочения, составившие ядро, представляют собой, по существу, новый фактор, агрегирующий осредненные экспертные предпочтения по трем «чистым» признакам. При этом упорядочения, соответствующие частным признакам, являются «вариациями» упорядочения, составленного по агрегированным показателям.

Вторая экспертиза НИР. По результатам проведенного анализа в методику экспертного оценивания был внесен ряд изменений. Одно из них было связано со способом назначения балльных оценок и имело целью создать предпосылки для одинаковой «настройки» экспертов, т. е. для приведения их систем субъективных ценностей к некоторой, по возможности одинаково понимаемой системе. С этой целью во второй экспертизе на шкалах задавались оценки «эталонных» объектов, одним из которых, например, служило представление экспертов о типичной работе в определенной научной школе.

Оценивание НИР на этот раз производилось по четырем частным признакам и одному обобщенному признаку, т. е. по совокупному представлению о достоинствах НИР. Оценки по последнему признаку эксперты выражали сразу в виде ранжировки работ. Это позволило подвергнуть проверке гипотезу о том, что у эксперта в процессе работы складывается некоторое общее представление о совокупных достоинствах оцениваемых работ, которое находит отражение в ранжировке по обобщенному признаку и составляет ядро упорядочений по «чистым» признакам.

Для иллюстрации того, как проявляется этот феномен, приведем один пример. В верхней части таблицы 10.2 выписаны упорядочения по четырем частным признакам, а в нижней, отделенной чертой части,— соответствующее им ядро.

Таблица 10.2

Упорядочения по признакам	Объекты							
	1	2	3	4	5	6	7	8
X	5	4	2	3	1	2	4	4
Y	3	3	2	2	1	2	3	3
W	4	3	3	2	1	3	5	3
Z	4	4	3	2	1	3	4	4
Ядро	5	5	2	2	1	2	5	5

Восьмой объект в этой комиссии был третьим эталонным объектом («типичная работа»). Как видно из самой таблицы, упорядочения объектов по частным признакам у этого эксперта варьируются вокруг упорядочения, представляющего собой разбиение оцениваемого набора объектов на три упорядоченных класса эквивалентных друг другу объектов.

Теперь обратимся к таблице 10.3.

Таблица 10.3

Упорядочения по признаку	Объекты						
	1	2	3	4	5	6	7
X	5	4	2	3	1	2	4
Y	3	3	2	2	1	2	3
W	4	3	3	2	1	2	5
Z	4	4	3	2	1	3	4
Обобщенному	6	5	2	4	1	3	7
Ядро	5	5	2	2	1	2	5
	6	5	2	2	1	2	6

В ней по сравнению с данными таблицы 10.2 добавлено еще одно упорядочение оцениваемых работ по совокупному представлению об их достоинствах, полученное от того же эксперта. Ранги эталонного объекта (8) отсутствуют, поскольку он не принимался во внимание при оценивании по обобщенному признаку. Ядро теперь состоит из двух упорядочений. Первое совпадает с упорядочением, составляющим ядро при четырех признаках (табл. 10.2). Второе упорядочение как бы «уточняет» первое и представляет собой разбиение, уже довольно тонко «различающее» оцениваемые НИР: 7 работ разбиваются на 4 упорядоченных класса. Из непосредственного оценивания видно, что это упорядочение очень «близко» к упорядочению по обобщенному признаку.

Обратимся теперь к таблице 10.4.

Таблица 10.4

Ядра	Объекты									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Эксперт № 2	3	1	3	1	3	3	3	3	3	3
Эксперт № 3	3	1	3	1	3	3	3	3	3	3
Эксперт № 4	2	2	3	1	2	2	2	2	2	2
Признак X	3	1	3	1	3	3	3	3	3	3

В этой таблице приведены невырожденные ядра по результатам обработки экспертных оценок в комиссии № 3. В ней выписаны четыре упорядочения, каждое из которых составило ядро соответствующей совокупности упорядочений. Первые три упорядочения получены по оценкам, которые три эксперта проставили НИР по четырем частным признакам. Четвертое упорядочение составляет ядро по оценкам НИР всеми экспертами комиссии по одному частному признаку.

Как видно из этой таблицы, в «середине» исследованных совокупностей экспертных суждений лежит довольно «грубое» разбиение оцениваемого набора объектов на два упорядоченных класса эквивалентных друг другу объектов. Аналогичные результаты получены по данным комиссии № 2.

Проведенный анализ экспертных оценок экспертизы НИР показал общее повышение примеров согласия в смысле принципа Парето, и, хотя не все исследованные совокупности упорядочений дали интересные, невырожденные решения, однако даже в экспертизе, по своей методике не ориентированной на получение групповых решений, удовлетворяющих принципу Парето, мы наблюдаем интересные примеры согласованности в исследуемом здесь смысле.

Третья экспертиза НИР. Если на данных второй экспертизы геометрический подход применялся для проверки гипотезы о механизме многопараметрического индивидуального оценивания, то данные последней экспертизы были использованы для дальнейшего исследования механизма «группового» оценивания.

На основе агрегированных показателей научно-исследовательских работ, подсчитанных для восьми комиссий, было составлено 16 групп (по 8 для каждого из двух аспектов) — в среднем из семи упорядочений каждая. Только одна группа упорядочений дала искомое решение. Таким образом, совокупности агрегированных показателей, как и в предыдущих экспертизах, оказались непригодными для построений коллегиальных решений, удовлетворяющих принципу единогласия Парето.

Другая картина наблюдается при анализе упорядочений, соответствующих средним оценкам признаков для каждого аспекта в отдельности. Как видно из таблицы 10.5, в большинстве случаев были получены коллективные решения.

Таблица 10.5

Комиссия	Решения, полученные по признакам	
	Аспекта I	Аспекта II
1	1 1 1 1 1 1 1 1 9	1 2 2 2 5 5 5 5 9
2	1 2 2 2 2 2 2 2	1 1 1 1 1 1 1 1
3	—	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 14
4	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 12	1 1 1 1 1 1 7 8 8 10 10 12
5	1 2 3 3 5 5	1 2 3 3 3 6 1 2 3 4 4 6 1 2 3 3 5 6
6	—	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 14
7	—	1 1 1 1 1 1 1 1 1 10 10
8	1 1 3 3 3 3 7	1 1 3 3 3 6 6

Близкие к приведенным в таблице 10.5 результаты были получены (табл. 10.6) при анализе пар упорядочений, полученных по агрегированным показателям с учетом стандартных отклонений для каждой работы, рассчитанных по формуле

$$\sigma(n, j) = \sqrt{\frac{1}{m_0} \sum_{m=1}^{m_0} [\omega(n, j, m) - \omega(n, j)]^2},$$

где $\omega(n, j, m)$— согласованная по эталону оценка n-й работы по j-му признаку у m-го эксперта, $\omega(n, j)$— коллективная оценка по признаку, m_0 — число экспертов в данной комиссии.

Таблица 10.6

Комиссия	Решения, полученные по агрегированным показателям работ $\pm\sigma$	
	Аспект I	Аспект II
1	1 1 3 4 5 6 7 7 9	
2	1 2 3 3 4 4 4 8	1 2 3 3 3 3 3 3
3	1 2 3 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 14
4	1 1 1 4 4 4 4 4 4 4 4 4	1 2 3 4 4 4 7 8 8 10 11 11
5	1 2 2 2 2 6	1 2 3 4 5 6
6		1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 14
7	2 1 1 1 1 1 1 1 1 10 10	1 2 3 3 3 3 3 3 3 3 10 10
8	1 1 3 3 3 3 7	1 2 3 4 4 4 4

Эти данные свидетельствуют о том, что учет стандартных отклонений дает возможность получать искомые групповые решения, хорошо согласующиеся с упорядочениями, соответствующими агрегированным (по аспектам) показателям.

10.2. Процедура выработки группового решения

Выбор конкретного метода экспертных оценок зависит от характера решаемой практической задачи и ряда условий, которые при этом нужно соблюдать. Здесь мы кратко остановимся на одном аспекте, связанном с методикой организации экспертного оценивания.

Методики проведения экспертиз, как правило, не содержат в себе операций (тестов, процедур и т. п.), выполнение которых гарантировало бы (хотя бы с достаточной степенью уверенности), что групповое решение будет удовлетворять тем или иным, заранее оговоренным требованиям, обладать заранее обусловленными свойствами. Обстоятельство это, как представляется, вырастает в большую и самостоятельную проблему. В практике экспертного метода нередко встречаются ситуации, когда практически ни один из имеющихся в распоряжении исследователя методов обработки не дает удовлетворительных результатов. Например, результаты применения методов факторного анализа или многомерного шкалирования не поддаются разумной интерпретации; мажоритарные правила не дают транзитивных отношений; распределение частот рангов близко к равномерному; селекция экспертов с целью формирования «согласованной» группы не позволяет отобрать нужного минимального количества экспертов; ядра состоят только из пустых отношений и т. д. Только «механическое» правило нахождения группового решения в метрическом подходе всегда работает безотказно: любая из просмотренных тем или иным способом точек, дающая минимум суммы расстояний или квадратов расстояний до исходных точек, может быть принята в качестве группового решения.

По своему существу рассматриваемая ниже идея использования эталонных объектов очень близка к механизму, обусловливающему существование невырожденных решений. Последнее означает, что во множестве рассматриваемых объектов существует такое его подмножество, которое мы будем называть *эталонным,* что предпочтения экспертов на нем полностью совпадают. При этом все эксперты согласны так же и с тем, что остальные, не входящие в это множество элементы, одинаковым образом группируются в классы эквивалентности, а последние одинаковым образом располагаются (упорядочиваются) между элементами эталонного множества.

В плане дальнейшего развития геометрического подхода эти соображения были использованы для построения процедуры экспертного оценивания, которая способствовала бы выработке группового решения, удовлетворяющего принципу Парето.

Процедурой выработки решений будем называть конечную последовательность операций (операций в широком смысле этого слова), ориентированных на получение решений, обладающих наперед заданными свойствами. В терминах геометрического подхода процедура выработки решения должна быть ориентирована на получение в общем случае невырожденных групповых отношений, удовлетворяющих принципу Парето на согласование индивидуальных предпочтений.

Рассмотрим одну из возможных процедур. Мы будем различать в этой процедуре итерации и шаги. Каждая итерация состоит из двух шагов. Номер итерации будет обозначаться индексом s над символами отношений и множеств.

s-я итерация. На первом шаге экспертам предъявляется все множество объектов $\mathbf{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ для выработки индивидуальных предпочтений, и в результате этого предъявления в пространстве $\mathcal{QO}$ получается некоторое множество точек $\mathbf{X}^s$ — множество отношений индивидуального предпочтения. Ядро этого множества $\mathbf{X}^s$ обозначим через $\mathbf{K}(\mathbf{X}^s)$, а через $R^s_{\max}$— максимальное отношение из $\mathbf{K}(\mathbf{X})$. Отношение $R^s_{\max}$ представляет собой упорядоченное разбиение оцениваемой совокупности объектов на несколько классов эквивалентности, в том числе $R^s_{\max}$ может быть вырожденным отношением, т. е. полной эквивалентностью. Пусть теперь мы имеем произвольное невырожденное отношение линейного квазипорядка R^s: $R^s \subseteq R^s_{\max}$. Отношение R^s будем называть *опорным* отношением. Рассмотрим отношение безразличия для R^s, которое будем обозначать через I_{R^s}. Этому отношению соответствует разбиение множества объектов $\mathbf{A}$ на классы: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^s_1 \cup \mathbf{A}^s_2 \cup \ldots \cup \mathbf{A}^s_l$, где l — число классов.

На втором шаге s-й итерации процедуры каждому эксперту классы объектов $\mathbf{A}^s_1, \ldots, \mathbf{A}^s_l$ предъявляются раздельно, и на каждом из них эксперты определяют свои предпочтения. Таким образом совокупность предпочтений 1-го эксперта на s-м шаге может быть представлена набором предпочтений на каждом из классов разбиения множества $\mathbf{A}$: $(R_j)_i^s = (R_1, \ldots, R_l)_i^s$.

Далее возможны два пути. Первый, наиболее трудоемкий по объему вычислений, состоит в том, что дальнейшему анализу подвергаются отношения, представляющие собой комбинацию предпочтений различных экспертов на данных *I* классах:

$R_{i_1 i_2 \ldots i_l} = R_{i_1} \cup R_{i_2} \cup \ldots \cup R_{i_l} \cup (R^s \setminus I_{R^s})$. Очевидно, что $R_{i_1 i_2 \ldots il} \subseteq R^s$. Всего таких отношений может быть составлено m^l, где m — число экспертов. Полученный набор отношений принимается за исходное множество $\mathbf{X}^{s+1}$ для первого шага последующей итерации.

Второй путь состоит в том, что в качестве элементов множества $\mathbf{X}^{s+1}$ принимаются m упорядочений $(R_j)^s$, $j = 1, 2, \ldots, l$, каждое из которых составлено из предпочтений одного из экспертов на всех классах разбиения множества $\mathbf{A}^s$.

(s+1)-я итерация начинается с построения ядра множества отношений индивидуального предпочтения $\mathbf{X}^{s+1}$, полученных на втором шаге предыдущей итерации, а затем повторяются всеизложенные выше операции. Формально процедура заканчивается при выполнении условия $R^{s+1} = R^s_{\max}$.

Остановимся более подробно на понятии опорного отношения. Требование наличия невырожденного решения означает или сов-падение экспертных предпочтений относительно, как минимум, одной пары объектов из **A**, или то, что «в среднем» эксперты считают два объекта неразличимыми. Использование опорного отношения призвано способствовать выполнению этого условия. Выбор этого отношения может производиться с учетом специфики решаемой задачи и степени согласованности экспертов на первом шаге каждой итерации. Кроме того, опорное отношение можно задавать извне, т. е. на объектах, которые в общем случае непосредственно не входят во множество **A** подлежащих экспертизе объектов. Упорядочение объектов опорного отношения в этом случае может определяться, например, предпочтениями лица, принимающего решение; объективными данными, возможно даже теми, которые не учитываются в самой экспертизе; результатами подобных же экспертиз, в которых согласованность экспертов оказалась удовлетворительной для организаторов экспертизы; вспомогательной операцией, как, например, предваряющее экспертизу разбиение оцениваемых объектов на 2-3 упорядоченных класса, и последующим формированием опорного отношения из 2-3 объектов, попавших в пересечение (по разбиениям всех экспертов), и т. п.

Нужно отметить, что наличие тем или иным образом сформированного опорного отношения полностью не гарантирует появление невырожденных групповых решений. Это обстоятельство может явиться, например, следствием того факта, что объекты опорного отношения, будучи строго упорядочены между собой, оцениваются экспертами как неразличимые в сравнении с частью объектов из оцениваемой совокупности, или предпочтения некоторых экспертов на парах, содержащих объекты из $\boldsymbol{R}^s$и из $\mathbf{A}\backslash\boldsymbol{R}^s$ диаметрально противоположны. В этом случае, учитывая специфику задачи, можно или сменить объекты в опорном отношении, или, оставив те же объекты, подкорректировать порядок на них, или, наконец, заменить часть экспертов.

В практических приложениях встречаются такие ситуации, когда до экспертизы или уже после нее становится очевидным, что множество оцениваемых объектов или состав экспертов неоднородны или и то и другое одновременно. Иллюстрацией этого может служить, например, экспертиза НИР в одной тематической комиссии, когда, скажем, одна часть работ оказалась чисто теоретического характера, а другая — прикладного. К тому же по пристрастиям к работам того или иного характера можно, очевидно, разделить и экспертов в комиссии. Не останавливаясь на методах выявления этих факторов, предположим, что они нами установлены. В этом случае представляется разумным на классах разбиения всей совокупности оцениваемых объектов искать, «подядра», т. е. ядра индивидуальных предпочтений для каждой в отдельности группы экспертов-единомышленников. Групповые решения каждой группы (подядра) могут быть объединены опорным отношением. Возможность реализации этой идеи определения подядер заложена в первом из путей комплектования наборов предпочтений, рассматриваемых на втором шаге процедуры выработки решения.

Ниже описываются две конкретные процедуры выработки решения, первая из которых носит экспериментальный характер, а вторая была применена при определении признаков для оценки методов прогнозирования выходного потока на обогатительной фабрике и выбора самого метода прогнозирования.

Процедура I. Оценка художественных произведений. Объектами оценки в первой процедуре выработки решений служили литературные произведения детективного жанра. Цель экспертизы состояла в том, чтобы от данной группы экспертов получить групповое упорядочение оцениваемых объектов по общему впечатлению об их достоинствах. В группу оцениваемых объектов было подобрано 8 произведений, группа экспертов состояла из 7 человек. Предварительная экспертиза отобранных произведений дала набор упорядочений (таблица 10.7), на основе которого оказалось невозможным получить невырожденное групповое решение с нужными свойствами.

Таблица 10.7

Эксперты	Объекты 1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	4	5	5	5
2	1	2	4	3	4	4	4	5
3	1	3	1	3	2	4	5	4
4	1	2	5	3	4	3	6	6
5	2	1	4	3	3	6	5	5
6	2	2	1	4	3	6	5	7
7	2	1	1	4	5	3	7	6

Для построения опорного отношения был составлен набор из 7 произведений с таким расчетом, чтобы в нем были как явные «лидеры», так и явные «аутсайдеры». Объекты этой группы упорядочивались также по общему впечатлению. В таблице 10.8 приведены экспертные оценки дополнительной группы объектов и их ядро.

Таблица 10.8

Эксперты	Объекты a	b	c	d	e	f	g
1	1	2	2	2	5	5	7
2	1	2	2	2	4	5	6
3	1	2	2	2	3	3	4
4	1	3	3	2	3	4	5
5	1	3	3	2	4	4	5
6	1	2	3	4	5	5	6
7	1	4	2	3	5	5	5
Ядро	1	2	2	2	5	5	5
	1	2	2	2	5	6	6

На основе групповых решений, полученных на объектах дополнительной группы, было составлено опорное отношение из четырех объектов: $a \succ c \succ e \succ g$.

На первом шаге процедуры экспертам предъявлялись все 8 объектов оцениваемой совокупности **А** = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, и сообщалось опорное отношение, между объектами которого эксперты должны были расставлять объекты из **А**. В таблице 10.9 приведены экспертные оценки, полученные после этого предъявления, и их ядро (буквами в таблице обозначаются объекты опорного отношения).

Таблица 10.9

Эксперты	Объекты											
	a	1	2	*c*	3	4	5	6	*e*	7	8	*g*
1	1	2	3	4	5	6	7	8	6	10	9	9
2	1	1	4	3	5	6	7	7	6	8	8	8
3	1	2	4	3	5	7	6	6	7	9	8	10
4	1	2	4	5	3	7	6	8	7	9	9	9
5	1	2	4	5	3	6	8	7	7	9	10	11
6	1	2	3	5	4	6	7	8	9	11	10	12
7	1	1	4	5	3	7	7	8	8	10	9	9
Ядро	1	1	3	3	3	6	6	6	6	10	10	10
	1	2	3	3	3	6	6	6	6	10	10	10

Как видно из этой таблицы, наиболее «тонко различающее» оцениваемые объекты упорядочение, помещенное в последней строке таблицы 10.9, представляет собой разбиение 12 объектов на 5 классов:

$$(a) \succ (1) \succ (2,\ 3,\ c) \succ (4,\ 5,\ 6,\ e) \succ (7,\ 8,\ g). \qquad (*)$$

Без объектов опорного отношения оба решения из ядра имеют вид:

$$(1) \succ (2,\ 3) \succ (4,\ 5,\ 6) \succ (7,\ 8).$$

На классах (2, 3, *c)* и (4, 5, ,6, *e)* разбиения (*) была проведена следующая итерация. Поскольку внутри каждого класса объекты оказались неразличимыми по общему впечатлению, то для каждого класса были введены дополнительные признаки: объекты первого класса оценивались по «занимательности сюжета», а второго— «по убедительности метода раскрытия преступления». Ядро предпочтений для первого класса «выделило» на первое место объект 2, а для второго имело вид $4 \sim 5 \succ 6 \sim e$. Окончательное групповое решение имело вид $1 \succ 2 \succ 3 \succ 4 \sim 5 \succ 6 \succ 7 \sim 8$.

Таким образом, к характерной особенности этой процедуры можно отнести использование дополнительных объектов при построении опорного отношения и введение дополнительных признаков на второй итерации для увеличения «разрешающей способности» группового решения, получаемого на второй итерации.

Процедура II. Выбор характеристик. Объектами оценки во второй процедуре служили восемь характеристик методов прогнозирования. Учитывая относительно большое количество характеристик, а, следовательно, и трудность сравнения алгоритмов по стольким показателям, а также различную природу самих характеристик (от чисто количественных, объективных, таких, как «точность прогноза», до качественных, таких, как «эксплуатационные характеристики») была проведена экспертная оценка важности характеристик с целью выделения наиболее важных из них. Оценка производилась следующим образом. Экспертам предлагалось разбить все характеристики на две группы, помещая в первую из них наиболее важные характеристики, а во вторую — наименее важные. Результаты этого этапа экспертизы приведены в таблице 10.10.

Таблица 10.10

Эксперты №№	Характеристики	
	Наиболее важные (группа 1)	Наименее важные (группа 2)
1	3, 5	1, 2, 4, 6, 7, 8
2	1, 2, 3, 5, 6	4, 7, 8
3	3, 4, 5	1, 2, 6, 7, 8
4	3, 5, 6	1, 2, 4, 7, 8
5	2, 3, 4, 5, 6, 8	1, 7
6	1, 3, 5, 6, 8	4, 7
7	2, 3, 5, 6	1, 4, 7, 8
8	3, 4, 5, 6	1, 2, 7, 8

Непосредственный анализ экспертных оценок таблицы 10.9 показывает, что данный набор характеристик можно разбить на три группы. К первой относятся характеристики 5 и 3, признаваемые всеми без исключения экспертами как наиболее важные, к третьей — характеристика 7, отнесенная всеми экспертами в группу менее важных, и ко второй группе — характеристики 1, 2, 4, 6, 8, относительно которых мнения экспертов разошлись. В силу этого из каждой группы было выбрано по одной характеристике, из которых составилась эталонная группа из трех упорядоченных по важности характеристик $(5 \succ 4 \succ 7)$. На втором этапе экспертизыкаждый эксперт ранжировал характеристики, расставляя их между эталонными. Результаты этого этапа экспертизы приведены в таблице 10.11.

Таблица 10.11

Эксперты №№	Характеристики							
	3	1	2	4	5	6	8	7
1	1	5	6	4	2	3	7	8
2	1	6	5	3	2	3	7	4
3	1	4	5	2	1	2	6	3
4	1	6	7	3	2	4	7	5
5	1	5	6	2	2	3	7	4
6	1	5	6	3	2	4	7	5
7	1	4	5	2	2	3	7	6
8	1	4	5	2	1	3	6	7
Ядро	1	4	4	3	1	3	4	4
	1	4	4	3	2	3	4	4

Эта группа экспертных оценок была обработана с целью выделения ядра. В результате получено два упорядочения, помещенных в последних строках таблицы. Таким образом, в числе наиболее важных оказались характеристики 3, 5, *4* и *6*.

10.3. Обсуждение

Анализ экспертных оценок НИР дал нам примеры существования искомых решений. Однако, многие из исследованных совокупностей экспертных суждений оказались таковы, что построить на их основе групповое решение с заданными свойствами не оказалось возможным. В практических задачах, когда выбрано правило построения группового решения, такая ситуация часто может признаваться недопустимой: решение, удовлетворяющее данному принципу согласования экспертных суждений, должно быть получено обязательно. Поэтому и был поставлен вопрос о поиске путей, которые если бы и не гарантировали полностью, то в достаточной мере способствовали бы получению искомого решения.

В специальной литературе подробно обсуждаются естественные, «разумные» требования, характеризующие конкретные принципы согласования индивидуальных предпочтений, и новое теоретическое исследование этих требований не является целью данной работы. Обращение к этим требованиям продиктовано следующим обстоятельством.

Общая теория аксиоматического подхода к проблеме согласования отношений дает мало рекомендаций для практического построения группового предпочтения. Так, рассмотрение некоторых наборов естественных требований приводит или к выводу о невозможности существования принципов согласования для этих требований (теорема Эрроу о «невозможности»), или к тому, что им могут удовлетворять только тривиальные решения.

Существует несколько возможностей для выхода из этого положения. Один из них, например, указывается при разборе парадокса Эрроу: сохранить формулировку задачи и отказаться от одного из условий как слишком ограничительного. В этом плане считается наиболее целесообразным отказаться от так называемого требования «независимости объектов» (требование «несвязанных альтернатив»). Вместо требования «независимости» предполагается возможным ввести в задачу разумно выбранные гипотетические объекты (альтернативы) в качестве базиса для оценки сравнительных степеней предпочтений.

ОСНОВНОЙ элемент предложенной процедуры выработки решений — опорное отношение, по-видимому, той же природы, что и «разумно выбранные гипотетические объекты». Отметим, однако, что использованные в двух практических задачах опорные отношения по своему характеру несколько отличаются друг от друга. Эти отличия порождены как спецификой оцениваемых объектов и характером предпочтений на них, так и различием целей экспертиз.

В первой задаче высказываемые экспертами предпочтения носят, если можно так сказать, крайне субъективный, «вкусовой» характер. Поэтому в этом случае естественно стремление получить такое групповое предпочтение, которое было бы по возможности максимально независимым от привнесения новых объектов, а также сохранить первоначальное максимальное согласие, которое было у экспертов до введения опорного отношения. Собственно говоря, удовлетворение последнего требования и может служить в этом случае некоторой проверкой корректности использованных в процедуре операций и основанием для того, чтобы рекомендовать полученное групповое предпочтение для дальнейшего рассмотрения и формирования окончательного решения.

Непосредственное сравнение общих для всех экспертов предпочтений, полученных до (рис. 10.1) и после (рис. 10.2) процедуры, свидетельствует о том, что введение опорного отношения в данном случае не исказило тех предпочтений, которые совпадали у всех экспертов. Задача оценивания признаков для методов прогнозирования отличалась от первой тем, что в ней, во-первых, решение должно было быть обязательно получено, во-вторых, априори предполагалось, что индивидуальные предпочтения не должны быть сильно «окрашены» субъективными пристрастиями специалистов, и, наконец, нужно было минимизировать число обращений к экспертам.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	×			1	1	1	1	1
2		×		1		1	1	1
3			×				1	1
4				×			1	1
5					×		1	1
6						×	1	1
7							×	
8								×

Рис. 10.1.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	×	1	1	1	1	1	1	1
2		×		1	1	1	1	1
3			×	1	1	1	1	1
4				×			1	1
5					×		1	1
6						×	1	1
7							×	
8								×

Рис. 10.2.

До начала экспертизы признаков было сделано предположение о невозможности получения согласованного решения с первого предъявления всех признаков. Поэтому, с учетом перечисленных выше условий задачи, использованная операция для построения опорного отношения — дихотомия исходного набора признаков — преследовала цель получить информацию об объектах, на которых предпочтения экспертов совпадают или разнятся, с тем чтобы полученные данные можно было использовать как основу для уточнения и согласования предпочтений экспертов на остальных объектах. Таким образом, опорное отношение было построено на подмножестве оцениваемой совокупности объектов и входило составной частью в суждение всех экспертов при последующих шагах процедуры.

Конкретные операции, используемые для построения опорных отношений, должны быть, конечно, практически оправданы и целесообразны с точки зрения особенностей решаемой задачи и данного правила нахождения группового решения. Очевидно, что их разнообразие не исчерпывается приведенными примерами.

В этой связи представляется интересным дальнейшее исследование различных операций для построения опорных отношений с точки зрения тех нарушений и модификаций, которые эти операции привносят в известные требования группового выбора. Приведем два примера возможных интерпретаций привносимых изменений.

1. Введение опорных отношений можно интерпретировать как сужение пространства предпочтений за счет отбрасывания отношений, в которых, для первой задачи — дополнительно вводимые объекты, а во второй — часть подлежащих оценке объектов упорядочены так же, как в опорном отношении.

2. Вводимые опорные отношения нарушают требование «ненавязанности» группового решения: в первой задаче — на множестве объектов, расширенном за счет объектов опорного отношения, во второй — на исходном множестве. Правда, в последнем случае, опорное отношение можно считать в некоторой степени «самонавязанным» на части оцениваемых объектов.

Теоретическое исследование подобных интерпретаций может способствовать появлению и обоснованию новых практических приемов введения опорных отношений.

11. Нечеткие соответствия, нечеткие бинарные отношения, нечеткие отображения

11.1. Введение

Экспертные методы используются главным образом в ситуациях, которые характеризуются большой сложностью решаемой проблемы и неопределенностью исследуемых объектов. Экспертные оценки, призванные разрешить эту неопределенность, часто представляются в форме обычных бинарных отношений, которые позволяют однозначно выразить, по сути дела, простой факт: какие объекты из оцениваемой совокупности находятся или не находятся в данном отношении. В то же время однозначный ответ на вопрос «находятся или не находятся?» не всегда возможен. Очевидно, что каждый читатель может припомнить случай, когда поставленный в аналогичную ситуацию, он чувствовал, что более точным был бы ответ, содержащий в себе оценку той степени, с которой объекты находятся в данном отношении. Конечно, содержательная интерпретация такой меры может быть различной, в зависимости от физической природы задачи, например, она может пониматься как степень уверенности, что объекты находятся в данном отношении. Язык теории нечетких множеств дает возможность для выражения таких величин и тем самым оказывается во многих случаях более адекватным условиям экспертного оценивания, чем обычная «четкая» теория.

Обозревая уже изложенный материал, мы видим, что в наших рассмотрениях существенную роль играли свойства отображений, которые нам приходилось использовать. Так было при введении понятий теории измерений, построении схемы пространств предпочтений и безразличия и исследовании взаимосвязей между ними, решении задачи группового выбора в расширенной постановке. Поэтому, развивая геометрический подход к проблеме группового выбора в нечетком случае нам, с одной стороны, хотелось бы использовать уже полученные результаты и разработанные методы, а с другой стороны, мы должны внимательно рассмотреть вопрос: что же нового привносит в развиваемый подход использование информации нового вида — нечетких отношений предпочтения.

С этой целью мы в первую очередь предпримем исследования свойств и структур нечетких отношений. Оказывается, что многие структурные свойства четких отношений, как правило, непосредственно не переносятся на нечеткий случай, что затрудняет построение и исследование пространств нечетких отношений по схеме, аналогичной диаграмме 6.5. Однако для случая отношений частичного порядка такая экспликация возможна и будет в дальнейшем реализована построением метрического и геометрического подходов к решению проблемы группового выбора.

Этот раздел мы начнем с краткого очерка основных понятий теории нечетких отношений. Здесь будут рассмотрены представления нечетких отношений, действия над нечеткими отношениями и свойства нечетких отношений. Как было указано выше, структура нечетких отношений не всегда адекватна структуре соответствующих четких отношений. Это будет продемонстрировано при проведении сравнительного анализа структуры отношений нечеткой эквивалентности и нечеткого квазипорядка и исследовании связей между свойствами транзитивности.

11.2. Нечеткие соответствия. Понятие нечеткого бинарного отношения

Опишем сначала общую конструкцию нечетких соответствий и их композиций.

Определение 11.1. Пусть $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$— множества. *Нечетким соответствием* Ф называется нечеткое множество с областью определения $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$.

Функция принадлежности нечеткого соответствия Ф есть функция $\mu_\Phi(x_1, x_2)$ двух аргументов $x_i \in \mathbf{X}_i,\ i = 1\ 2.$

Определение 11.2. Пусть Ф и Ψ— два нечетких соответствия с областями $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$ и $\mathbf{X}_2 \times \mathbf{X}_3$соответственно. *Композицией* Ф и Ψ называется нечеткое соответствие $\Psi \circ \Phi$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\Psi\circ\Phi}(x_1, x_3) = \bigvee_{x_2 \in \mathbf{X}_2} \mu_\Phi(x_1\, x_2) \wedge \mu_\Psi(x_2, x_3)$$

и областью определения $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_3$.

В силу ассоциативности операции $\wedge$ операция композиции $\Psi \circ \Phi$ также является ассоциативной, т. е.

$$(\Phi \circ \Psi) \circ \Theta = \Phi \circ (\Psi \circ \Theta).$$

Далее, из $\Psi \subseteq \Theta$ следует

$$\Phi \circ \Psi \subseteq \Phi \circ \Theta \text{ и } \Psi \circ \Phi \subseteq \Theta \circ \Phi.$$

Наконец, имеем

$$\Phi \circ (\Psi \cup \Theta) = (\Phi \circ \Psi) \cup (\Phi \circ \Theta).$$

Заметим, что для пересечений, вообще говоря, имеет место лишь включение

$$\Phi \circ (\Psi \cap \Theta) \subseteq (\Phi \circ \Psi) \cap (\Phi \circ \Theta).$$

Пусть Ф — нечеткое соответствие с областью определения $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$. *Обратным нечетким соответствием* $Ф^{-1}$ называется нечеткое соответствие с функцией принадлежности $\mu_{\Phi^{-1}}(x_2, x_1) = \mu_\Phi(x_1, x_2)$ и областью определения $\mathbf{X}_2 \times \mathbf{X}_1$. Легко проверить, что выполняются следующие свойства обратного нечеткого соответствия:

$$(\Phi \circ \Psi)^{-1} = \Psi^{-1} \circ \Phi^{-1} \text{ и } (\Phi^{-1})^{-1} = \Phi.$$

Если **А** — нечеткое множество с областью $\mathbf{X}_1$, то образом этого *нечеткого множества относительно нечеткого соответствия* Ф называется нечеткое множество $\mathbf{\Phi} \circ \mathbf{A}$ с областью определения $\mathbf{X}_2$ и функцией принадлежности

$$\mu_{\Phi \circ \mathbf{A}}(x_2) = \bigvee_{x_1 \in \mathbf{X}_1} \mu_\mathbf{A}(x_1) \wedge \mu_\Phi(x_1, x_2).$$

Пусть теперь **В** —нечеткое множество с областью $\mathbf{X}_2$. *Прообразом нечеткого множества* **В** *относительно нечеткого соответствия* Ф называется нечеткое множество $\mathbf{B} \circ \mathbf{\Phi}$ с областью определения $\mathbf{X}_1$ и функцией принадлежности

$$\mu_{\mathbf{B} \circ \Phi}(x_1) = \bigvee_{x_2 \in \mathbf{X}_2} \mu_\Phi(x_1, x_2) \wedge \mu_\mathbf{B}(x_2).$$

Ясно, что прообраз нечеткого множества есть его образ при обратном соответствии.

Если элементы множеств $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$ занумерованы, то нечеткие множества и соответствия естественным образом представляются матрицами с элементами из [0, 1]. В этом случае операция композиции представляет собой обычную (max, min) композицию матриц по правилу «строка на столбец». Две специализации понятия нечеткого соответствия — бинарные нечеткие отношения и нечеткие отображения — представляют собой предмет изучения в этом разделе. Ниже мы изложим основные определения и некоторые свойства из области этих понятий. Начнем с бинарных отношений.

Пусть **А** — конечное множество из n элементов. Элементы этого множества будем обозначать $x, y, z, \ldots$

Определение 11.3. *Бинарным нечетким отношением* на множестве **А** называется нечеткое соответствие с областью определения $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$.

Другими словами, нечетким отношением R называется нечеткое множество с носителем $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$. Тем самым нечеткое отношение задается функцией принадлежности $\mu_R(x, y)$, принимающей значение в интервале [0, 1]. В дальнейшем мы рассматриваем только нормальные отношения, т. е. такие отношения, функция принадлежности которых μ_R хотя бы на одной паре $(x, y) \in \mathbf{A} \times \mathbf{A}$ принимает значение 1.

Нечеткое отношение, кроме описанного способа, может задаваться в виде матрицы. Пусть элементы множества **A** занумерованы в виде последовательности $\mathbf{A} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Элементы матрицы $\{\mu_{ij}^R\}$, задающей нечеткое отношение *R*, определяются равенством

$$\mu_{ij}^R = \mu_R(x_i, x_j).$$

В теоретических рассмотрениях мы будем использовать первый способ представления нечеткого отношения — через функцию принадлежности $\mu_R(x, y)$; для решения практических задач удобнее использовать матричную форму. В дальнейшем матрицу отношений будем обозначать просто *(R)*.

11.3. Действия над нечеткими бинарными отношениями. Свойства нечетких бинарных отношений

Напомним, что в теории нечетких множеств большую роль играют операции $\vee$ и $\wedge$, которые являются операциями взятия максимума и минимума для действительных чисел. С помощью этих операций мы введем действия над нечеткими бинарными отношениями, используемыми в данной работе.

1. *Пересечением* нечетких бинарных отношений *P* и *Q* называется нечеткое бинарное отношение $P \cap Q$, определяемое функцией принадлежности

$$\mu_{P\cap Q}(x, y) = \mu_P(x, y) \wedge \mu_Q(x, y), \qquad \forall x, y \in \mathbf{A}\times\mathbf{A}.$$

Пример 11.1. Пусть матрицы отношений *P* и *Q* имеют вид

$$(P) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0{,}8 & 0{,}3 \\ \hline & 1 & \\ \hline & & 0{,}6 \\ \hline \end{array} \qquad (Q) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0{,}2 & & \\ \hline 0{,}9 & 1 & 0{,}6 \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

Тогда матрица отношения $P \cap Q$ имеет вид

$$(P\cap Q) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0{,}2 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & & \\ \hline\end{array}$$

2. *Объединением* нечетких отношений P и Q называется нечеткое бинарное отношение $P \cup Q$, определяемое функцией принадлежности

$$\mu_{P\cup Q}(x, y) = \mu_P(x, y) \vee \mu_Q(x, y), \qquad \forall x, y \in \mathbf{A}\times\mathbf{A}.$$

Пример 11.2. Для отношений P и Q из примера 11.1 имеем

$$(P\cup Q) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0{,}8 & 0{,}3 \\ \hline 0{,}9 & 1 & 0{,}6 \\ \hline & & 0{,}6 \\ \hline\end{array}$$

3. *Дополнением* нечеткого отношения R называется отношение $\overline{R}$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\overline{R}}(x, y) = 1 - \mu_R(x, y).$$

Пример 11.3. Для отношения P из примера 11.1 имеем

$$(\overline{P}) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 0{,}2 & 0{,}7 \\ \hline 1 & & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0{,}4 \\ \hline\end{array}$$

4. *Обратным отношением* к отношению P называется отношение R^{-1} с функцией принадлежности

$$\mu_{R^{-1}}(x, y) = \mu_R(y, x).$$

Очевидно, что матрица R^{-1} является транспонированной к матрице R. **Пример 11.4.** Для отношения P из примера 11.1 имеем

$$(P^{-1}) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & \\ \hline 0{,}8 & 1 & \\ \hline 0{,}3 & & 0{,}6 \\ \hline\end{array}$$

5. *Композицией* двух нечетких отношений P и Q называется отношение $P \circ Q$ с функцией принадлежности

$$\mu_{P \circ Q}(x, z) = \bigvee_{y} (\mu_P(x, y) \wedge \mu_Q(y, z)).$$

Введенное здесь определение композиции соответствует максиминной композиции, введенной в работе Л. Заде. Отметим, что композиция двух нечетких отношений может определяться также с использованием других бинарных операций вместо операции $\wedge$.

Квадратом отношений *P* называется композиция отношения *P* с самим собой:

$$P^2 = P \circ P.$$

Аналогично определяется *n-я степень* нечеткого бинарного отношения *P:*

$$P^n = \underbrace{P \circ P \circ \ldots \circ P}_{n \text{ раз}}.$$

Пример 11.5. Для отношений *P* и *Q* из примера 11.1 имеем

$(P \circ Q) =$

0,2	0,8	0,6
0,9	1	0,6

$(P^2) =$

1	0,8	0,3
	1	
		0,6

Матрица композиции отношений *P* и *Q* есть максиминное произведение матриц этих отношений. Заметим, что P^2 совпало с *P*.

6. *Отношение включения* $P \subseteq Q$ выполняется тогда и только тогда, когда для каждой пары (x, y) выполняется условие

$$\mu_P(x, y) \leqslant \mu_Q(x, y).$$

Так же как и четкие бинарные отношения, нечеткие отношения различаются по своим свойствам. Ниже мы перечислим наиболее важные из них.

1. *Рефлексивность* нечеткого бинарного отношения *R* означает, что $\mu_R(x, x) = 1 \quad \forall x \in \mathbf{A}$. В матрице рефлексивного нечеткого отношения на главной диагонали стоят единицы.

2. *Антирефлексивность* нечетного отношения *R* означает, что $\mu_R(x, x) = 0 \quad \forall x \in \mathbf{A}$. В матрице антирефлексивного нечеткого отношения на главной диагонали стоят нули.

3. *Симметричность* нечеткого отношения *R* означает, что $\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x) \quad \forall x, y \in \mathbf{A}$. Матрица симметричного отношения есть симметричная матрица.

4. *Антисимметричность* нечеткого отношения *R* означает, что из $\mu_R(x, y) > 0$ следует, что $\mu_R(y, x) = 0$ для $x \neq y$. В

матрице антисимметричного отношения произведение симметричных относительно главной диагонали элементов равно нулю.

5. *Транзитивность* нечеткого отношения *R* означает, что для любых $x, \ y, \ z \in \mathbf{A}$ выполняется соотношение

$$\mu_R(x, z) \geqslant \bigvee_{y \in \mathbf{X}} (\mu_R(x, y) \wedge \mu_R(y, z)) \qquad \forall x, z \in \mathbf{X}.$$

В терминах композиции отношений это условие означает, что $R^2 \subseteq R.$ Можно показать, что для рефлексивного *R* транзитивность означает, что $R^2 = R.$ Примером транзитивного нечеткого отношения может служить отношение *P* из примера 11.1 как это было показано в примере 11.5.

Транзитивным замыканием $\widehat{R}$ нечеткого отношения *R* называется наименьшее транзитивное отношение, содержащее *R*. Транзитивное замыкание отношения *R* может быть найдено по формуле

$$\widehat{R} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n,$$

Где $n = |\mathbf{A}|.$

6. *Линейность* (связность) нечеткого отношения *R* означает, чтодля любой пары $(x, \ y) \in \mathbf{A} \times \mathbf{A}$ или $\mu_R(x, \ y) > 0,$ или

$\mu_R(y, \ x) > 0.$

11.4. Типы нечетких бинарных отношений. Нечеткие отображения

Различные комбинации перечисленных свойств определяют важнейшие классы нечетких отношений. Мы перечислим те из них, которые будут использованы в настоящей работе.

1. *Частичный нечеткий порядок.* Так называются антисимметричные транзитивные нечеткие отношения. Если наложены дополнительно условия рефлексивности или антирефлексивности, то соответствующий частичный нечеткий порядок называется *рефлексивным* или *антирефлексивным.*

2. *Линейный нечеткий порядок.* Если частичный нечеткий порядок обладает свойством линейности, то он называется *линейным порядком.*

3. *Нечеткая эквивалентность.* Так называется рефлексивное, симметричное и транзитивное нечеткое отношение.

4. *Нечетная диагональ.* Рефлексивные нечеткие отношения Δ такие, что $\mu_\Delta(x, y) < 1$ для $x \neq y$ называются *нечеткими диагоналями,* или *диагональными отношениями.* Ниже будут также определены понятия нечеткого отношения квазипорядка и нечеткого квазитранзитивного отношения.

Если элементы множества занумерованы, то бинарные нечеткие отношения представляются квадратными матрицами с элементами, принадлежащими [0, 1]. В этом случае для нечеткого частичного порядка нумерация элементов множества **А** может быть выбрана так, что отношение представляется треугольной матрицей. Точнее, справедливо следующее утверждение, являющееся частным случаем теоремы, доказанной Л. Заде.

Утверждение 11.1. *Пусть Р — отношение строго нечеткого частичного порядка на множестве* **А** *из п элементов. Тогда существует такая нумерация элементов множества* $\mathbf{A} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, *что из* $\mu_P(x_i, x_j) > 0$ *следует, что* $i<j$.

Нумерацию, существование которой имеется в виду в утверждении, будем называть *согласованной с Р.* Отметим, что такая нумерация определяется, вообще говоря, неоднозначно.

Доказательство утверждения 11.1. Обозначим через P_0 нечеткое подмножество $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$, состоящее из тех пар $(x, y) \in \in \mathbf{A} \times \mathbf{A}$, для которых $\mu_P(x, y) > 0$. Легко видеть, что P_0 есть четкий частичный порядок. Пусть $\mathbf{A} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — какая-нибудь нумерация множества **А**, согласованная с этим частичным порядком. Очевидно, что это и есть искомая нумерация.

Если Ф — нечеткое соответствие с областью $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$, а R - нечеткое отношение на $\mathbf{X}_1$, то нечеткое отношение $\Phi \circ R \circ \Phi^{-1}$ на $\mathbf{X}_2$ называется *образом нечеткого отношения R относительно нечеткого соответствия* Ф. *Прообразом* нечеткого отношения относительно нечеткого соответствия Ф называется его образ относительно обратного соответствия Φ^{-1}.

Другой важный частный случай нечеткого соответствия — это понятие нечеткого отображения.

Определение 11.4. *Нечетким отображением F* множества **X** в нечеткое множество **Y** называется такое нечеткое соответствие с областью $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, что

(1) $F \circ F^{-1} \subseteq \Delta_{\mathbf{Y}}$,

(2) $F^{-1} \circ F \supseteq \Delta_{\mathbf{X}}$,

где Δ_X и Δ_Y — некоторые диагональные нечеткие отношения (зависящие от *F)* на множествах **Y** и **X** соответственно. Как обычно, $F\colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ будет обозначать нечеткое отображение множества **X** во множество **Y**.

Условие (1) означает, что для каждого $x \in \mathbf{X}$ существует не более одного $y \in \mathbf{Y}$ такого, что $\mu_F(x, y) = 1$ (функциональность нечеткого отображения). Условие (2) означает, что для каждого $x \in \mathbf{X}$ существует $y \in \mathbf{Y}$ такой, что $\mu_F(x, y) = 1$(т. е. что *F* всюду определено на **X***)*. Нечеткое отображение *F* называется *инъективным,* если $F^{-1} \circ F = \Delta_{\mathbf{X}}$, и *сюръективным,* если $F \circ F^{-1} = \Delta_{\mathbf{Y}}$, для некоторых нечетких диагоналей Δ_X и Δ_Y.

Понятие образа и прообраза для нечетких отображений те же, что и для нечетких соответствий.

11.5. Структура нечетких отношений эквивалентности

В этом параграфе будет полностью описана структура нечетких эквивалентностей на конечном множестве. Напомним определение нечеткого отношения эквивалентности на множестве **X**.

Определение 11.5. Нечеткое отношение *I* на множестве **X** называется *нечеткой эквивалентностью,* если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. Рефлексивность:

$$\mu_I(x, x) = 1 \qquad \forall x \in \mathbf{X}. \tag{11.1}$$

2. Симметричность:

$$\mu_I(x, y) = \mu_I(y, x) \qquad \forall x, y \in \mathbf{X}. \tag{11.2}$$

3. Транзитивность:

$$\mu_I(x, z) \geqslant \bigvee_{y \in \mathbf{X}} \mu_I(x, y) \wedge \mu_I(y, z) \qquad \forall x, z \in \mathbf{X}. \tag{11.3}$$

Отметим, что условие транзитивности, в силу рефлексивности, может быть записано в виде $I \circ I = I$.

В четком случае каждое отношение эквивалентности определяет разбиение множества **X** на непересекающиеся классы попарно эквивалентных элементов. Множество всех классов образует фактор-множество $\mathbf{X}/I$. Обратно, каждое разбиение множества **X** определяет на этом множестве некоторое отношение эквивалентности. Существует также сюръективное отображение $\pi\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}/I$, называемое *каноническим,* в терминах которого могут быть описаны как само отношение эквивалентности (ядро канонического отображения π), так и его классы (прообразы элементов фактор-множества).

Ниже будут определены нечеткие аналоги этих понятий и доказаны аналогичные свойства нечетких эквивалентностей, классов и канонических отображений.

Определение 11.6. Пусть I — нечеткая эквивалентность на множестве **X**. *Нечетким классом* элемента $a \in X$ относительно I называется нечеткое множество $[a]$ такое, что $[a](x) = I(a, x)$.

В силу 11.1 $[a](a) = 1$, т. е. высота *) каждого нечеткого класса равна 1.

Напомним, что *высотой* $h(x)$ нечеткого множества **X** называется верхняя грань значений его функций принадлежности.

Лемма 11.1. $[a] = [b]$ *тогда и только тогда, когда* $I(a, b) = 1$.

Доказательство. Пусть $[a] = [b]$. Тогда $I(a, b) = [a](b) = [b](b) = 1$. Обратно, пусть $I(a, b) = 1$. Тогда в силу (11.3) имеем

$$\mu_{[a]}(x) = \mu_I(a, x) \geqslant \mu_I(a, b) \wedge \mu_I(b, x) = \mu_I(b, x) = \mu_{[b]}(x)$$

и

$$\mu_{[b]}(x) = \mu_I(b, x) \geqslant \mu_I(b, a) \wedge \mu_I(a, x) = \mu_I(a, x) = \mu_{[b]}(x),$$

откуда $[a] = [b]$.

Следствие 11.1.

$$h([a] \cap [b]) < 1 \text{ для } [a] \neq [b]. \qquad (11.4)$$

Доказательство. Пусть $h([a] \cap [b]) = 1$. Тогда, в силу конечности множества X, найдется $x \in \mathbf{X}$ такой, что $\mu_{[a]}(x) = 1$ и $\mu_{[b]}(x) = 1$, откуда

$$\mu_I(a, b) \geqslant \mu_I(a, x) \wedge \mu_I(x, b) = 1 \text{ и } [a] = [b].$$

Множество различных классов множества **X** относительно нечеткой эквивалентности I называется *фактор-множеством* и обозначается $\mathbf{X}/I$. Таким образом, $[x]$ есть элемент множества $\mathbf{X}/I$ и два таких элемента $[x]$ и $[y]$ совпадают тогда и только тогда, когда $I(x, y) = 1$.

Следующая теорема характеризует основные свойства классов.

Теорема 11.1. *Пусть I — нечеткая эквивалентность на* **X**. *Тогда*

$$1.\ \bigvee_{[x]} \mu_{[x]}(y) = 1 \quad \forall y \in \mathbf{X}, \tag{11.5}$$

т. е. объединение (11.5) *всех классов есть множество* **X**;

$$2.\ \mu_{[x]}(y) = \mu_{[y]}(x) \tag{11.6}$$

(симметричность классов);

$$3.\ h([a] \cap [b]) \leqslant \mu_I(a, b) \tag{11.7}$$

(свойство ограниченности пересечений классов).

Доказательство. Свойства (1) и (2) тривиально следуют из определения классов. Далее,

$$\mu_{[a]\cap[b]}(x) = \mu_I(a, x) \wedge \mu_I(b, x) \leqslant \mu_I(a, b),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 11.2. $[a] \cap [b] = \varnothing$ *тогда и только тогда, когда* $I(a, b) = 0.$

Доказательство. Достаточность непосредственно следует из (11.7). Пусть теперь $[a] \cap [b] = \varnothing.$ Тогда

$$\mu_I(a, b) = \mu_I(a, b) \wedge \mu_I(b, b) = \mu_{[a]}(b) \wedge \mu_{[b]}(b) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Основное отличие нечетких классов от четких состоит в возможности непустого пересечения нечетких классов. Однако, есть условие (11.7), дающее количественную оценку высоты пересечения нечетких классов. Последнее следствие утверждает, что условие равенства нулю связи между двумя элементами множества **X** является необходимым и достаточным для непересечения соответствующих нечетких классов.

Рассмотрим теперь вопрос о построении нечеткой эквивалентности по ее классам. Дадим следующее определение, обобщающее понятие разбиения на нечеткий случай.

Определение 11.7. *Нечетким разбиением множества* **X** называется конечное множество **Y** различных нечетких множеств *у* с общей областью **X** таких, что

$$\bigvee_{y \in \mathbf{Y}} y(x) = 1 \qquad \forall x \in \mathbf{X}, \tag{11.8}$$

$$h(y_1 \cap y_2) < 1 \text{ для } y_1 \neq y_2; \quad y_1,\ y_2 \in \mathbf{Y}. \tag{11.9}$$

Из условий (11.8) и (11.9) легко следует, что для каждого $x \in \mathbf{X}$ существует единственный элемент $[x] \in \mathbf{X}$ такой, что $\mu_{[x]}(x) = 1.$

Введенное обозначение устанавливает адекватность условий (11.8) и (11.9) свойствам классов (11.4) и (11.7).

Легко, однако, проверить, что не каждое нечеткое разбиение является множеством классов некоторой нечеткой эквивалентности. Следующая теорема содержит условия того, что нечеткое разбиение определяет нечеткую эквивалентность.

Теорема 11.2. *Если нечеткое разбиение* **Y** *множества* **X** *удовлетворяет условиям*

$$\mu_{[x]}(y) = \mu_{[y]}(x) \tag{11.10}$$

и

$$h([x] \cap [y]) \leqslant \mu_{[x]}(y), \tag{11.11}$$

то оно является фактор-множеством множества **X** *относительно нечеткой эквивалентности I, определяемой функцией принадлежности*

$$\mu_I(x,\ y) = \mu_{[x]}(y). \tag{11.12}$$

Доказательство. Установим необходимые свойства нечеткого отношения *I*, определяемого условием (11.12). По определению $\mu_I(x,\ y)$ имеем $\mu_I(x,\ x) = \mu_{[x]}(x) = 1,$ т. е. *I* рефлексивно. Далее, в силу (11.10)

$$\mu_I(x,\ y) = \mu_{[x]}(y) = \mu_{[y]}(x) = \mu_I(y,\ x),$$

откуда *I* — симметричное отношение. Наконец, в силу (11.11), имеем

$$\mu_I(x,\ y) \wedge \mu_I(y,\ z) = \mu_{[x]}(y) \wedge \mu_{[z]}(y) \leqslant$$
$$\leqslant h([x] \cap [z]) \leqslant \mu_{[x]}(z) = \mu_I(x,\ z).$$

Таким образом, *I* является также транзитивным отношением. Из (11.12) очевидно, что классы относительно *I* совпадают с элементами нечеткого разбиения **Y**. Теорема доказана.

Теорема 11.2 дает законченное описание нечетких отношений эквивалентности в терминах нечетких разбиений.

Пусть *I* — некоторая нечеткая эквивалентность на множестве **X**. Каждый элемент $x \in \mathbf{X}$ принадлежит, вообще говоря, разным классам, причем каждый раз мы можем указать степень принадлежности данного элемента данному классу. Поэтому каноническое отображение *π* множества **X** на фактор-множество $\mathbf{X}/I$ является нечетким отображением. Дадим строгое определение и докажем свойства канонического отображения.

Определение 11.8. Пусть I — нечеткая эквивалентность на множестве X, а $\mathbf{X}/I$ — фактор-множество относительно I. Нечеткое соответствие с функцией принадлежности

$$\mu_\pi(x, [y]) = \mu_I(x, y) \tag{11.13}$$

называется *каноническим отображением.*

Отметим сразу, что (11.13) определено корректно. Действительно, если $[y_1] = [y_2]$, то

$$\mu_I(x, y_1) \geqslant \mu_I(x, y_2) \wedge \mu_I(y_2, y_1) = \mu_I(x, y_2)$$

в силу леммы 11.1. Аналогично $\mu_I(x, y_2) \geqslant \mu_I(x, y_1)$, откуда $\mu_I(x, y_1) = \mu_I(x, y_2)$, что доказывает корректность (11.13).

Следующая теорема устанавливает свойства канонического нечеткого отображения, аналогичные свойствам четкого канонического отображения.

Теорема 11.3. *Нечеткое соответствие* π, *определенное формулой* (11.13), *является сюръективным нечетким отображением множества* X *на фактор-множество* $\mathbf{X}/I$, *причем*

$$\pi^{-1} \circ \pi = I. \tag{11.14}$$

Доказательство. Имеем

$$\mu_{\pi\circ\pi^{-1}}([x], [y]) = \bigvee_{z\in\mathbf{X}} \mu_\pi(z, [x]) \wedge \mu_\pi(z, [y]) =$$

$$= \bigvee_{z\in\mathbf{X}} \mu_I(x, z) \wedge \mu_I(y, z) = \mu_I(x, y).$$

Так как для $[x] \neq [y]$ выполнено $\mu_I(x, y) < 1$, то $\pi \circ \pi^{-1}$ является нечетким диагональным отношением на $\mathbf{X}/I$ и π — сюръективно. Далее,

$$\mu_{\pi^{-1}\circ\pi}(x, y) = \bigvee_{[z]\in\mathbf{X}/I} \mu_\pi(x, [z]) \wedge \mu_\pi(y, [z]) =$$

$$= \bigvee_{[z]\in\mathbf{X}/I} \mu_I(x, z) \wedge \mu_I(z, y) = \bigvee_{z\in\mathbf{X}} \mu_I(x, z) \wedge \mu_I(z, y) = \mu_I(x, y),$$

так как из $[z_1] = [z_2]$ следует $\mu_I(x, z_1) = \mu_I(x, z_2)$ и $\mu_I(z_1, y) = \mu_I(z_2, y)$. Теорема доказана.

Легко видеть, что *образ* элемента $x \in \mathbf{X}$ относительно π состоит в точности из тех классов, которые содержат *x,* а *прообраз* любого класса есть сам этот класс, рассматриваемый как нечеткое множество.

Утверждение теоремы 11.3, вообще говоря, не допускает обращения. Точнее, может существовать сюръективное нечеткое отображение f: $\mathbf{X} \to \mathbf{X}/I$ такое, что $f^{-1} \circ f = \pi$ в то же время не являющееся каноническим отображением. Пусть, например, **X** — трехэлементное множество, а нечеткая эквивалентность *I* задана матрицей

$$(I)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0,7\\ 1 & 1 & 0,7\\ 0,7 & 0,7 & 1\end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что *π* задается матрицей

$$(\pi)=\begin{pmatrix}1 & 0,7\\ 1 & 0,7\\ 0,7 & 1\end{pmatrix},$$

нечеткое отображение *f*, заданное матрицей

$$(f)=\begin{pmatrix}1 & 0,3\\ 1 & 0,5\\ 0,7 & 1\end{pmatrix},$$

является сюръективным, и $f^{-1}\circ f=I.$

В отличие от четкого случая не всякое нечеткое отображение порождает нечеткую эквивалентность. Пусть $F\colon\ \mathbf{X}\to\mathbf{Y}$— некоторое нечеткое отображение. Покажем, что прообразы $F^{-1}(y)$ элементов $y\in\mathbf{Y}$ образуют нечеткое разбиение множества **X**. Так как *F* — нечеткое отображение, то

$$\bigvee_{y\in\mathbf{Y}}\mu_{F^{-1}}(x)=\bigvee_{y\in\mathbf{Y}}\mu_F(x,y)=1\qquad\forall x\in\mathbf{X}.$$

Далее, из тех же соображений

$$h(F^{-1}(y_1)\cap F^{-1}(y_2))=\bigvee_x\mu_F(x,\ y_1)\wedge\mu_F(x,\ y_2)<1.$$

Следовательно, $F^{-1}(y)$ также образует нечеткое разбиение. Полученное нечеткое разбиение множества **X**, вообще говоря, не удовлетворяет условиям (11.10) и (11.11) и, следовательно, может не задавать нечеткую эквивалентность на **X**.

11.6. Нечеткие предпочтения

Дадим следующее общее определение.

Определение 11.9. *Нечетким предпочтением* на множестве **X** называется произвольное рефлексивное линейное нечеткое отношение *R* на множестве **X**.

Значение $\mu_R(x,\ y)$ интерпретируется как степень выраженности представления о том, что элемент *x* «не хуже» элемента *y*. Требования рефлексивности и линейности являются обычными в теории рационального выбора, так как они необходимы для существования функции выбора, основанной на предпочтении.

С понятием нечеткого предпочтения тесно связаны понятия строгого нечеткого предпочтения и нечеткого отношения безразличия.

Определение 11.10. Пусть R — нечеткое предпочтение на множестве **X**. *Строгим нечетким предпочтением* называется нечеткое отношение P с функцией принадлежности.

$$\mu_P(x, y) = \begin{cases} \mu_R(x, y), & \textbf{если} \ \ \mu_R(x, y) > \mu_R(y, x), \\ 0, & \textbf{если} \ \ \mu_R(x, y) \leqslant \mu_R(y, x). \end{cases} \quad (11.15)$$

Нечетким отношением безразличия называется нечеткое отношение с функцией принадлежности

$$\mu_I(x, y) = \mu_R(x, y) \wedge \mu_R(y, x). \quad (11.16)$$

Отметим сразу, что в силу (11.15) и (11.16) отношение P является антисимметричным и антирефлексивным, а I — симметричное и рефлексивное нечеткое отношение.

В теории рационального выбора большую роль играют отношения линейного квазипорядка, которые определяются как рефлексивные линейные транзитивные отношения. Эта роль обусловлена простой структурой таких отношений. Именно, оказывается, что каждое такое отношение определяет разбиение множества **X** на классы попарно неразличимых элементов, причем сами классы данным отношением уже просто упорядочены.

Таким образом, требование одной лишь транзитивности предпочтения достаточно для весьма полного описания его структуры. Такая структура отношения линейного квазипорядка позволяет строить «хорошие» функции выбора, основанные на таких предпочтениях.

Ситуация резко меняется при переходе к рассмотрению нечетких предпочтений. Здесь требование одной лишь транзитивности оказывается слишком слабым для выявления какой-либо структуры, полезной для построения «разумной» функции выбора (хотя существование функции выбора в этом случае легко устанавливается).

В следующем параграфе мы подробна изучим различные виды транзитивности нечетких предпочтений и связи между ними. Здесь же мы дадим соответствующее определение.

Определение 11.11. *Предпочтение обладает свойствами* (T), (PP), (II), (IP), (PI) тогда и только тогда, когда выполнены соотношения соответственно

$$(T): \mu_R(x, z) \geqslant \mu_R(x, y) \wedge \mu_R(y, z), \text{ или } R = R \circ R, \quad (11.17)$$

$$(PP): \mu_P(x, z) \geqslant \mu_P(x, y) \wedge \mu_P(y, z), \text{ или } P \supset P \circ P, \quad (11.18)$$

$$(II): \mu_I(x, z) \geqslant \mu_I(x, y) \wedge \mu_I(y, z), \text{ или } I = I \circ I, \quad (11.19)$$

$$(IP): \mu_P(x, z) \geqslant \mu_I(x, y) \wedge \mu_P(y, z), \text{ или } P = I \circ P, \quad (11.20)$$

$$(PI): \mu_P(x, z) \geqslant \mu_P(x, y) \wedge \mu_I(y, z), \text{ или } P = P \circ I. \quad (11.21)$$

Очевидно, что свойства (T), (PP) и (II) выражают просто транзитивность нечетких отношений *R, P* и *I* соответственно.

В четком случае из транзитивности предпочтения *R* следует выполнение всех свойств (11.18) — (11.21), что, по существу, и обусловливает «хорошую» структуру линейных квазипорядков. Ниже будет показано, что в нечетком случае связи между различными свойствами транзитивности значительно более слабы.

11.7. Соотношения между свойствами транзитивности

В этом параграфе будут установлены все логические связи между различными свойствами транзитивности нечетких предпочтений (11.17) -(11.21).

Лемма 11.2. $(T) \Rightarrow (II)$.

Доказательство. В силу (*T*) имеем

$$\mu_I(x, y) \wedge \mu_I(y, z) =$$
$$= (\mu_R(x, y) \wedge \mu_R(y, x)) \wedge (\mu_R(y, z) \wedge \mu_R(z, y)) \leqslant$$
$$\leqslant (\mu_R(x, y) \wedge \mu_R(y, z)) \wedge (\mu_R(z, y) \wedge \mu_R(y, x)) \leqslant$$
$$\leqslant \mu_R(x, z) \wedge \mu_R(z, x) = \mu_I(x, z),$$

откуда следует (*II*).

Лемма 11.3. $(T) \Rightarrow (PP)$.

Доказательство. Для отношений *I* утверждение теоремы доказано в ряде работ. Покажем, что отношение *P* транзитивно. Нам надо показать, что

$$\mu_P(x, z) \geqslant \mu_P(x, y) \wedge \mu_P(y, z) \qquad \forall x, y, z \in \mathbf{X}. \quad (*)$$

Очевидно, что можно считать $\mu_P(x, y) > 0$ и $\mu_P(y, z) > 0$. Но тогда $\mu_P(x, y) = \mu_R(x, y)$, $\mu_P(y, z) = \mu_R(y, z)$, причем $\mu_R(x, y) > \mu_R(y, x)$ и $\mu_R(y, z) > \mu_R(z, y)$. Если $\mu_P(x, z) > 0$, то $\mu_P(x, y) = \mu_R(x, z)$ и (*) совпадает с условием транзитивности отношения *R*.

Предположим, что $\mu_P(x, z)=0$. Тогда $\mu_R(x, z)=\mu_I(x, z)$ или $\mu_R(x, z)\leqslant\mu_R(z, x)$. Итак, мы имеем $\mu_R(x, y)>\mu_R(y, x)$, $\mu_R(y, z)>\mu_R(z, y)$ и $\mu_R(z, x)\geqslant\mu_R(x, z)$. Среди этих шести чисел выберем наименьшее. Очевидно, возможны три случая:

а) Наименьше еесть $\mu_R(y, x)$. Тогда $\mu_R(y, x)\geqslant\mu_R(y, z)\wedge\wedge\mu_R(z, x)$. Так как $\mu_R(y, z)$ не наименьшее, то $\mu_R(x, z)\geqslant\mu_R(x, y)\wedge\mu_R(y, z)$ и $\mu_R(x, z)=\mu_R(z, x)$. Но $\mu_R(x, z)\geqslant\mu_R(x, y)\wedge\mu_R(y, x)$. Так как $\mu_R(x, z)$ — наименьшее число, то одно из $\mu_R(x, y)$ и $\mu_R(y, z)$ тоже должно быть наименьшим, что противоречит исходным неравенствам.

б) Наименьшее есть $\mu_R(z, y)$. Тогда $\mu_R(z, y)\geqslant\mu_R(z, x)\wedge\mu_R(x, y)$, откуда $\mu_R(z, x)=\mu_R(x, z)=\mu_R(z, y)$ — наименьшие. Так как $\mu_R(x, z)\geqslant\mu_R(x, y)\wedge\mu_R(y, x)$, то мы получаем противоречие.

в) Наименьшее есть $\mu_R(x, z)$. Тогда $\mu_R(x, z)\geqslant\mu_R(x, y)\wedge\mu_R(y, z)$. Но $\mu_R(x, y)$ и $\mu_R(y, z)$ заведомо не наименьшие, и мы опять получаем противоречие.

Отметим, что обратное утверждение неверно, т. е. транзитивность отношений *I* и *P*, вообще говоря, не влечет транзитивности отношений *R*. Таким образом, отношение безразличия всегда является нечетким отношением эквивалентности.

Лемма 11.4. $(PI)\Rightarrow P\cap I=\varnothing$ и $(IP)\Rightarrow P\cap I=\varnothing$.

Доказательство. В силу условия *(PI)*

$$0=P(x, x)\geqslant P(x, y)\wedge I(y, x),$$

откуда или $P(x, y)=0$, или $I(x, y)=0$, т. е. $P\cap I=\varnothing$.

Аналогично доказывается вторая часть утверждения леммы.

Лемма 11.5. $(T)\ \&\ (PI)\Rightarrow(IP)$.

Доказательство. Надо показать, что

$$P(x, z)\geqslant I(x, y)\wedge P(y, z)\qquad\forall x, y, z. \tag{11.22}$$

Рассмотрим два случая.

1) $P(x, z)>0$. Тогда $R(x, z)=P(x, z)$ в силу (11.15). Имеем

$$I(x, y)\wedge P(y, z)\leqslant R(x, y)\wedge R(y, z)\leqslant R(x, z)=P(x, z),$$

что и требовалось доказать.

2) $P(x, z) = 0$. Если $I(x, y)$ или $P(y, z)$ равны нулю, то (11.22) тривиально. Пусть $I(x, y) > 0$ и $P(y, z) > 0$. Тогда $P(z, y) = 0$, и в силу *(PI)* имеем

$$0 = P(z, y) \geqslant P(z, x) \wedge I(x, y),$$

откуда $P(z, x) = 0$, так как $I(x, y) > 0$. Из $P(x, z) = P(z, x) = 0$ следует, что $I(x, z) = I(z, x) > 0$, так как *R* — линейное отношение. Но тогда

$$I(y, z) \geqslant I(y, x) \wedge I(x, z) > 0,$$

откуда $P(y, z) = 0$ по предыдущей лемме. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Доказательство следующей леммы вполне аналогично предыдущему, и мы его опускаем.

Лемма 11.6. $(T)\ \&\ (IP) \Rightarrow (PI)\ \&\ (PP)$.

Следующая лемма утверждает, что условия (PP), (II), (IP) и (PI) в совокупности определяют транзитивное нечеткое предпочтение.

Лемма 11.7. $(PP)\ \&\ (II)\ \&\ (PI)\ \&\ (IR) \Rightarrow (T)$.

Доказательство. Имеем в силу (11.18) — (11.21)

$$R \circ R = (I \cup P) \circ (I \cup P) =$$
$$= (I \circ I) \cup (I \circ P) \cup (P \circ I) \cup (P \circ P) \subseteq I \cup P = R.$$

Следующие две леммы утверждают, что других логических связей между свойствами транзитивности, кроме перечисленных выше в леммах 11.2 — 11.4 и 11.5 — 11.7, не существует.

Лемма 11.8. *Ни одно из свойств* (11.17) — (11.21) *не является логическим следствием никакого собственного подмножества множества свойств* $\{(PP), (II), (PI), (IP)\}$, *не содержащего этого свойства.*

Доказательство. Для каждого трехэлементного подмножества множества свойств $\{(PP), (II), (IP), (PI)\}$ мы построим пример нечеткого предпочтения, обладающего свойствами из этого подмножества и не обладающего остальными свойствами транзитивности. Существование таких примеров и доказывает лемму.

1) Рассмотрим подмножество $\{(II), (IP), (PI)\}$. Пусть на трехэлементном множестве *X* задано нечеткое предпочтение *R* с матрицей

$$(R) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \beta \\ \gamma & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \alpha, \beta, \gamma \neq 0.$$

Тогда *I* и *P* имеют следующие матрицы

$$(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad (P) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверяется, что *R* обладает свойствами (II), (IP) и (PI) и не обладает свойствами *(PP)* и (*T*).

2) Рассмотрим подмножество $\{(PP), (IP), (PI)\}$. Определим нечеткое предпочтение *R* матрицей

$$(R) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \beta & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad 0 < \beta < \alpha.$$

Очевидно, что $I = R$ и $P = \varnothing$. Так как *R* не транзитивно, то *(T)* и (*II*) не выполнены, тогда как (PP), (IP) и (PI), выполняются.

3) Пусть $\{(II), (PP), (IP)\}$—подмножество условий. Определим нечеткое предпочтение *R* матрицей

$$(R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad 0 < \alpha < 1.$$

Имеем

$$(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что (*II*) и *(PP)* выполнены. Имеем

$$(I \circ P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P,$$

т. е. *(IP)* также выполняется. Легко проверить, однако, что $(P \circ I) \nsubseteq P$ и $(R \circ R) \nsubseteq R$, т. е. условия *(T)* и *(PI)* не выполняются.

4) Рассмотрим, наконец, следующее подмножество $\{(II),\ (PP),\ (PI)\}$. Здесь требуемым примером является нечеткое предпочтение *R* с матрицей

$$(R)=\begin{pmatrix}1 & 1 & \alpha\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \text{где}\quad 0<\alpha<1.$$

Для этого нечеткого предпочтения легко проверяется, что условия (*II*), *(PP)* и *(PI)* выполнены, а *(IP)* и *(T)* — нет.

Лемма 11.9. *Из (T) не следует (IP) или (PI).*

Доказательство. Рассмотрим нечеткое предпочтение *R,* обладающее свойством *(T)* с матрицей

$$(R)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ \alpha & 1 & 1\\ \alpha & \alpha & 1\end{pmatrix},\quad \text{где}\quad 0<\alpha<1.$$

Это нечеткое предпочтение обладает свойствами (*T*) и *(PP).* Очевидно, что для этого *R* справедливо, что $P\cap I\neq\varnothing$. По лемме 11.4 отсюда следует, что *(PI)* и *(IP)* не выполнены.

Полученные результаты могут быть объединены в следующую теорему.

Теорема 11.4. *Все логические связи между различными свойствами транзитивности* (11.17) — (11.21) *описываются диаграммами*

$$(T)\Rightarrow(II)\,\&\,(PP),$$

$$(T)\,\&\,(PI)\Rightarrow(PP)\,\&\,(IP),$$

$$(T)\,\&\,(IP)\Rightarrow(PP)\,\&\,(PI)$$

и

$$\{(PP)\,\&\,(II)\,\&\,(IP)\,\&\,(PP)\}\Rightarrow(T).$$

11.8. Нечеткие квазипорядки

Стремление использовать в теории нечетких множеств достаточно полные аналоги соответствующих четких понятий приводит нас к следующему определению.

Определение 11.12. *Нечетким квазипорядком* называется нечеткое предпочтение, обладающее свойствами *(T)* и (*PI*).

В силу теоремы 11.4 нечеткие квазипорядки удовлетворяют всем условиям (11.17) — (11.21).

Пусть R — некоторый нечеткий квазипорядок. Тогда P и I являются транзитивными нечеткими отношениями и определено каноническое отображение $\pi\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}/I$.

Нашей ближайшей задачей будет установление свойств нечетких квазипорядков, аналогичных известным свойствам четких квазипорядков.

Лемма 11.10. *Пусть* $L = \pi \circ P \circ \pi^{-1}$ *— образ строгого нечеткого предпочтения при каноническом отображении. Тогда L — транзитивное и антисимметричное нечеткое отношение.*

Доказательство. В силу свойств *(PI)* и *(PP)* имеем

$$L \circ L = \pi \circ P \circ \pi^{-1} \circ \pi \circ P \circ \pi^{-1} = \pi \circ P \circ I \circ P \circ \pi^{-1} \subseteq \pi \circ P \circ \pi^{-1} = L,$$

откуда следует транзитивность нечеткого отношения L. Далее,

$$\begin{aligned}\mu_L([a],\ [b]) &= \bigvee_{x,y} \mu_\pi(x,\ [a] \wedge \mu_P(x,\ y) \wedge \mu_\pi(y,\ [b]) = \\ &= (\bigvee_{x,y} \mu_I(x,\ a)\ \wedge \mu_P(x,\ y) \wedge \mu_I(y,\ b)) = \mu_P(a,\ b)\end{aligned} \tag{11.23}$$

в силу свойств *(IP)* и *(PI)*. Антисимметричность нечеткого отношения L непосредственно следует из (11.23).

Таким образом, отношение строгого продпочтения P для нечетких квазипорядков индуцирует частичный нечеткий порядок L на фактор-множестве X/I. Вообще говоря, L не является линейным нечетким порядком, как это имеет место в четком случае. Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие того, что индуцированное нечеткое отношение L является линейным нечетким порядком.

Теорема 11.5. *Образ строгого нечеткого предпочтения P при каноническом отображении на фактор-множество тогда и только тогда является линейным нечетким порядком, когда нечеткое отношение безразличия I является четким отношением.*

Доказательство. Пусть $L = \pi \circ P \circ \pi^{-1}$ — линейный нечеткий порядок на X/I и $\mu_I(a,\ b) > 0$ для некоторой пары элементов $a, b \in \mathbf{X}$. Тогда по лемме 11.4 $\mu_P(a,\ b) = \mu_P(b,\ a) = 0.$ Согласно (11.23) имеем $\mu_L([a],\ [b]) = \mu_L([b],\ [a]) = 0,$ откуда $[a]$ = $[b]$ в силу линейности нечеткого отношения L. Согласно лемме 11.1 отсюда следует, что $\mu_I(a,\ b) = 1.$

Обратно, пусть I — четкое отношение. Предположим, что $\mu_L([a],\ [b]) = \mu_L([b],\ [a]) = 0.$ Тогда в силу (11.23) $\mu_P(a,\ b) = \mu_P(b,\ a) = 0$ и, следовательно, $\mu_I(a,\ b) = 1.$ Отсюда $[a]$ = $[b]$, что завершает доказательство.

Нечеткие квазипорядки, для которых *L* является линейным нечетким порядком, естественно называть *линейными нечеткими квазипорядками.* Следующая теорема дает описание линейных нечетких квазипорядков как прообразов линейных нечетких порядков.

Теорема 11.6.

1) *Пусть* $f\colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ *— четкое отображение и L — рефлексивный линейный нечеткий порядок на* **Y**. *Тогда прообраз нечеткого отношения L является линейным нечетким квазипорядком на* **X**.

2) *Каждый линейный нечеткий квазипорядок на* **X** *есть прообраз некоторого рефлексивного линейного нечеткого порядка относительно подходящего четкого отображения.*

Доказательство.

1) Пусть $R = f^{-1} \circ \bar{L} \circ f$ — прообраз нечеткого отношения *L*. Представим $\bar{L}$ в виде $\bar{L} = L \cup \Delta_{\mathbf{Y}}$, где *L* — антирефлексивный линейный нечеткий порядок на $\mathbf{Y}$, $\Delta_{\mathbf{Y}}$ — четкая диагональ на **Y**.

Так как *f* — четкое отображение, то

$$\mu_R(x, y) = \bigvee_{u,v} \mu_f(x, u) \wedge \mu_{\bar{L}}(u, v) \wedge \mu_f(y, v) = \mu_{\bar{L}}(f(x), f(y)). \tag{11.24}$$

По определению $I(x, y)$ и в силу антисимметричности *L* имеем

$$\mu_I(x, y) = \mu_{\bar{L}}(f(x), f(y)) \wedge \mu_{\bar{L}}(f(y), f(x)) = \begin{cases} 1, & \text{если } f(x) = f(y), \\ 0, & \text{если } f(x) \neq f(y), \end{cases}$$

откуда $I = f^{-1} \circ f$ и является четким отношением.

Далее, в силу (11.24)

$$\mu_R(x, y) > \mu_R(y, x) \Rightarrow \mu_{\bar{L}}(f(x), f(y)) > 0 \,\&$$

$$\& \; \mu_{\bar{L}}(f(y), f(x)) = 0 \Rightarrow \mu_P(x, y) = \mu_L(f(x), f(y)).$$

Отсюда непосредственно следует, что $P = f^{-1} \circ L \circ f$.

Проверим выполнение свойств *(T)* и *PI*). Имеем

$$R \circ R = f^{-1} \circ \bar{L} \circ f \circ f^{-1} \circ \bar{L} \circ f \subseteq f^{-1} \circ \bar{L} \circ f = R.$$

Далее,

$$P \circ I = f^{-1} \circ L \circ f \circ f^{-1} \circ f \subseteq f^{-1} \circ L \circ f = P,$$

так как $f \circ f^{-1} \subseteq \Delta_{\mathbf{Y}}$.

Итак, мы доказали, что *R* является линейным нечетким квазипорядком на **X**.

2) Пусть R — нечеткий линейный квазипорядок на **X** и L — образ нечеткого отношения P при каноническом отображении π. Пусть $\bar{L} = L \cup \Delta,$ где Δ — четкая диагональ на $\mathbf{X}/I$.

Имеем

$$\pi^{-1} \circ \bar{L} \circ \pi = (\pi^{-1} \circ L \circ \pi) \cup (\pi^{-1} \circ \Delta \circ \pi) =$$
$$= (\pi^{-1} \circ \pi \circ P \circ \pi^{-1} \circ \pi) \cup (\pi^{-1} \circ \pi) = (I \circ P \circ I) \cup I = P \cup I = R,$$

что и требовалось доказать.

Доказанная теорема является обобщением на нечеткие отношения известной зависимости между линейными квазипорядками и оценками на множестве **X**. Множество **Y** из теоремы 11.6 можно рассматривать как множество значений оценок (функций на **X**), а отображение f — как «скалярный критерий». Однако, в отличие от четкого случая теорема позволяет более тонко различать предпочтения, возникающие из оценок.

Рассмотрим следующий пример. Пусть на множестве из четырех элементов заданы две числовые оценки: (2, 3, 3, 100) и (0,9, 1,1, 1,9, 1,9). Эти две оценки порождают одинаковые четкие линейные квазипорядки с матрицей

$$(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для описания очевидного количественного различия между предпочтениями, заданными выше оценками, воспользуемся нечетким подходом. Определим на множестве действительных чисел **R** нечеткий линейный рефлексивный порядок $\bar{L},$ например, формулой

$$(\mu_{\bar{L}}(x, y)) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x = y, \\ 0, & \text{если} \quad x < y, \\ 1 - e^{y-x}, & \text{если} \quad x > y. \end{cases}$$

Легко видеть, что $\bar{L}$ согласовано с естественным порядком на R в том смысле, что $\bar{L}$ содержится в этом порядке. Вычисления (с двумя знаками) дают следующие матрицы нечетких предпочтений, соответствующих заданным оценкам:

$$(R_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}63 & 1 & 1 & 0 \\ 0{,}63 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (R_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}18 & 1 & 1 & 0 \\ 0{,}18 & 1 & 1 & 1 \\ 0{,}63 & 0{,}55 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эти нечеткие отношения очевидным образом отражают различие между двумя заданными предпочтениями.

Таким образом, в настоящем разделе описаны и исследованы структура нечетких бинарных отношений безразличия и предпочтения. С точки зрения проблемы группового выбора этими отношениями представляются индивидуальные мнения экспертов. Используя общий подход, развитый в предыдущих разделах для четких отношений, мы в дальнейшем обратимся к изучению совокупностей нечетких бинарных отношений, которые также будут называться *пространствами нечетких бинарных отношений.*

12. Пространства нечетких бинарных отношений.

Как уже отмечалось в разделе 7, при рассмотрении общей теории геометрических структур выпуклых множеств в пространствах обычных бинарных отношений предпочтения в практических задачах используются не произвольные отношения предпочтения (четкие или нечеткие), а предпочтения, на которые налагаются дополнительные ограничения. Ограничения эти обычно диктуются особенностями задачи, а также желанием работать с предпочтениями, удовлетворяющими требованиям, естественным с точки зрения лиц, проводящих экспертизу. Такими естественными ограничениями являются, например, условия транзитивности и рефлексивности (или антирефлексивности). Особенности задачи могут привести исследователя к рассмотрению, например, только линейных нечетких отношений или отношений, все функции принадлежности которых принимают только значения 0 и 1, т. е. четких бинарных отношений.

12.1. Структуры пространств нечетких бинарных отношений

Для того, чтобы не связывать себя пока никаким конкретным типом отношений, мы ограничимся следующим определением понятия «пространство нечетких бинарных отношений» (Под «нечетким предпочтением» мы теперь будем подразумевать произвольное нечеткое бинарное отношение.).

Определение 12.1. *Пространством нечетких бинарных отношений* ($\mathcal{FR}$) над множеством **А** называется произвольное подмножество множества всех нечетких бинарных отношений на **А**.

Заметим сразу, что в ограничения, упомянутые в определении, может входить условие, что функции принадлежности принимают значения 0 и 1. Тем самым пространства четких предпочтений становятся частным случаем пространства нечетких предпочтений.

Несмотря на некоторую расплывчатость определения 12.1 (нет строгого определения системы ограничений), мы можем добиться определенных результатов и в этом случае, если будем рассматривать все пространства нечетких предпочтений просто как некоторые совокупности нечетких предпочтений.

Следующие примеры дают представления о возможных пространствах нечетких предпочтений.

Пример 12.1. Пространство $\mathcal{FPO}$ всех строгих отношений частичного порядка на множестве **А**. Оно является множеством всех функций $\mu(x, y)$ на $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$, удовлетворяющих условиям

1) $\mu(x, x) = 0$ для всех $x \in \mathbf{A}$ (антирефлексивность),
2) $\mu(x, z) \geqslant \bigvee_y (\mu(x, y) \wedge \mu(y, z))$ для всех (x, z) (транзитивность).

Далее будет рассмотрена другая модель для $\mathcal{FPO}$.

Пример 12.2. Пространство $\mathcal{FQO}$ квазитранзитивных отношений на множестве **А**. Если *Р*, как обычно, обозначает строгое предпочтение для *R*, то $\mathcal{FQO}$ состоит из всех функций $\mu_R(x, y)$ на А таких, что

1) $\mu_R(x, x) = 1$,
2) $\mu_R(x, y) = 0 \Rightarrow \mu_R(y, x) > 0$,
3) $\mu_R(x, z) \geqslant \bigvee_y (\mu_P(x, y) \wedge \mu_P(y, z))$ для всех (x, z).

Пример 12.3. Пространство $\mathcal{FB}$ всех нечетких бинарных отношений на множестве **А** мощности *n*. Очевидно, что $\mathcal{FB}$ есть множество всех функ-ций $\mu(x, y)$ на $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$, удовлетворяющих условию $0 \leqslant \mu(x, y) \leqslant 1$. Таким образом, $\mathcal{FB}$ естественно изоморфно множеству точек единичного куба в n^2-мерном линейном пространстве.

Пусть $\mathcal{FR}$ — произвольное пространство нечетких отношений.

В дальнейшем мы отождествляем точки пространства $\mathcal{FR}$ с соответствующими им отношениями. Перейдем к изучению геометрических структур в $\mathcal{FR}$. Для четкого случая эти структуры были введены и изучены в разделе 7.

Определение 12.2. Пусть *R'* и *R''* —различные точкн пространства $\mathcal{FR}$. Точка *R* лежит *между* точками *R'* и *R''* (обозначается $R \in [R', R'']$) тогда и только тогда, когда

$$R' \cap R'' \subseteq R \subseteq R' \cup R''.$$

Введенное понятие «между» допускает обобщение на случай произвольной совокупности предпочтений. Пусть *I* — множество индексов.

Определение 12.3. Пусть $\{R_i\}$, $i \in I$— произвольное семейство точек пространства $\mathcal{FR}$. Точка $R \in \mathcal{FR}$ лежит между точками семейства $\{R_i\}$ (обозначается тогда $R \in [R_i]_{i \in I}$) и только тогда, когда

$$\bigcap_{i \in I} R_i \subseteq R \subseteq \bigcup_{i \in I} R_i.$$

Докажем теперь вспомогательное утверждение, устанавливающее связь различных определений «между».

Лемма 12.1. *Пусть* Q_i $(i \in I)$ *и* R_j $(j \in J)$ *два семейства в пространстве* $\mathcal{FR}$. *Тогда из* $Q_i \in [R_j]_{j \in J}$ *для всех* $i \in I$ *и* $R \in [Q_i]_{i \in I}$ *в* $\mathcal{FR}$ *следует, что* $R \in [R_j]_{j \in J}$.

Доказательство. Из $Q_i \in [R_j]_{j \in J}$ следует

$$\bigcap_{j \in J} R_j \subseteq Q_i \subseteq \bigcup_{j \in J} R_j$$

для $i \in I$. Далее, по условию леммы

$$\bigcap_{i \in I} Q_i \subseteq R \subseteq \bigcup_{i \in I} Q_i.$$

Очевидно, имеем

$$\bigcap_{i \in J} R_j \subseteq \bigcap_{i \in I} Q_i \subseteq R \subseteq \bigcup_{i \in I} Q_i \subseteq \bigcup_{j \in J} R_j,$$

откуда $R \in [R_j]_{j \in J}$.

Следствие. *Пусть* $R' \in [R_1, R_2]$ *и* $R'' \in [R_1, R_2]$. *Тогда любое R, лежащее между R' и R'', лежит также и .между* R_1 *и* R_2.

Пусть *R'* и *R''* —две различные точки пространства $\mathcal{FR}$.

Определение 12.4. *Линейным сегментом* $\mathbf{L}(R', R'')$ между точками R' и R'' в пространстве $\mathcal{FR}$ назовем максимальное множество точек, лежащих между R' и R'', удовлетворяющее условию: для любых $P, Q \in \mathbf{L}(R', R'')$ или $P \in [R', Q]$, или $Q \in [R', P]$. Очевидно, что $R' \in \mathbf{L}(R', R'')$ и $R'' \in \mathbf{L}(R', R'')$.

Теорема 12.1. *В произвольном пространстве нечетких отношений* $\mathcal{FR}$ *между любыми двумя различными точками существует линейный сегмент.*

Доказательство. Предварительно докажем вспомогательное утверждение. Пусть R' — точка в $\mathcal{FR}$. Определим на множестве всех точек пространства $\mathcal{FR}$ отношение $\prec$ следующим образом: $P \prec Q$ тогда и только тогда, когда $P \in [R', Q]$.

Лемма 12.2. *Отношение* $\prec$ *есть нестрогий частичный порядок на* $\mathcal{FR}$, *т. е. рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение.*

Доказательство.

1. *Рефлексивность,* $P \prec P$, так как $P \in [R', P]$.

2. *Антисимметричность.* Пусть $P \prec Q$ и $Q \prec P$. Тогда имеем одновременно $R' \cap Q \subseteq P \subseteq R' \cup Q$ и $R' \cap P \subseteq Q \subseteq R' \cup P$, откуда

$$P = (P \cap R') \cup (P \cap Q) \subseteq Q \cup (P \cap Q) = Q,$$

$$Q = (Q \cap R') \cup (Q \cap P) \subseteq P \cup (Q \cap P) = P.$$

Отсюда $Q = P$, и, следовательно, выполняется только одно из исходных неравенств.

3. *Транзитивность.* Пусть $P \prec Q$ и $Q \prec P$. Тогда $P \in [R', Q]$ и $Q \in [R', R]$. Из следствия к лемме 12.1 получаем $P \in [R', R]$, откуда $P \prec R$.

Вернемся к доказательству теоремы 12.1. Отношение $\prec$, определенное на всем пространстве $\mathcal{FR}$ относительно точки R', превращает множество всех точек $\mathcal{FR}$, лежащих между R' и R'', в частично упорядоченное множество с наименьшим элементом R' и наибольшим элементом R''. Напомним, что *цепью* в частично упорядоченном множестве называется такое подмножество, любые два элемента которого сравнимы. Легко видеть, что согласно определению 12.4 линейный сегмент есть ни что иное, как максимальная цепь относительно порядка $\prec$. Согласно известной теореме Хаусдорфа максимальная цепь в частично упорядоченном множестве всегда существует. Такая максимальная цепь и задает нам линейный сегмент Теорема 12.1 доказана.

Замечание. Теорема 12.1 устанавливает существование линейных сегментов. Вообще говоря, утверждение о единственности линейного сегмента неверно. Как правило, их может быть бесконечно много, если пространство $\mathcal{FR}$ бесконечно.

В следующей теореме будет дана характеристика линейного сегмента, устанавливающая аналогию введенного понятия с понятием линейного сегмента, использованным в разделе 7 для четкого случая.

Теорема 12.2. *Для любого линейного сегмента* $\mathbf{L}(R', R'')$ существует *определенная на нем взаимнооднозначная функция l(R) со значениями в интервале* [0, 1], *удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $l(R') = 0$, $l(R'') = 1$;

2) $R \in [P, Q]$ *тогда и только тогда, когда*

$(l(R) - l(P))(l(R) - l(Q)) \leqslant 0.$

Очевидно, что условие (2) означает, что число *l(R)* лежит между числами $l(P)$ и $l(Q)$ тогда и только тогда, когда *R* лежит между *P* и *Q*.

Доказательство теоремы 12.2. Пусть, как обычно, $\mu_R(x, y)$ обозначает функцию принадлежности отношения *R*. Определим функцию *l(R)* на пространстве $\mathcal{FR}$ формулой

$$l(R) = \frac{\sum\limits_{(x,y)} |\mu_R(x, y) - \mu_{R'}(x, y)|}{\sum\limits_{(x,y)} |\mu_{R'}(x, y) - \mu_{R''}(x, y)|}, \qquad (*)$$

где *R*' и *R*''— фиксированные точки пространства $\mathcal{FR}$.

Ограничение функции *l(R)* на $\mathbf{L}(R', R'')$ будем обозначать тем же символом *l(R)*. Докажем важное свойство функции $l(R)$: $P \in [R', Q]$ тогда и только тогда, когда $l(P) \leqslant l(Q)$, причем равенство достигается только в случае *P* = *Q*.

Действительно, пусть $P \in [R', Q]$ и $\mu_P(x, y)$ и $\mu_Q(x, y)$ — функции принадлежности для *P* и *Q*. Тогда

$$\mu_{R'} \wedge \mu_Q \leqslant \mu_P \leqslant \mu_{R'} \vee \mu_Q.$$

Очевидно, имеем

$$|\mu_Q - \mu_{R'}| = |\mu_P - \mu_{R'}| + |\mu_Q - \mu_P|.$$

Суммируя эти неравенства по воем парам *(x, y),* имеем

$$\sum_{(x,y)} |\mu_Q(x, y) - \mu_{R'}(x, y)| =$$
$$= \sum_{(x,y)} |\mu_P(x, y) - \mu_{R'}(x, y)| + \sum_{(x,y)} |\mu_Q(x, y) - \mu_P(x, y)|.$$

Отсюда получаем

$$l(Q) = l(P) + \frac{\sum_{(x,y)} |\mu_Q(x, y) - \mu_P(x, y)|}{\sum_{(x,y)} |\mu_{R'}(x, y) - \mu_{R''}(x, y)|}.$$

Поскольку $P \neq Q$, то $l(P) < l(Q)$:

Пусть теперь $l(P) < l(Q)$ для $P,\ Q \in \mathbf{L}(R',\ R'')$. Покажем, что $P \in [R',\ Q]$. Предположим противное, т. е., что $Q \in [R',\ P]$. Повторяя почти дословно предыдущее рассуждение, получим

$$l(P) = l(Q) + \frac{\sum_{(x,y)} |\mu_Q(x, y) - \mu_P(x, y)|}{\sum_{(x,y)} |\mu_{R'}(x, y) - \mu_{R''}(x, y)|}.$$

Отсюда $l(Q) < l(P)$. Полученное противоречие доказывает, что $P \in [R',\ Q]$.

Покажем теперь, что функция *l(R)* на $\mathbf{L}(R',\ R'')$ удовлетворяет всем условиям теоремы 12.2. Во-первых, функция *l(R)* взаимнооднозначна на $\mathbf{L}(R',\ R'')$ в силу только что доказанного свойства. Очевидно также, что $l(R') = 0$ и $l(R'') = 1$. Перейдем к доказательству свойства (2). Пусть сначала $R \in [P,\ Q]$ для $R, P, Q \in \mathbf{L}(R',\ R'')$ и $R \neq P,\ R \neq Q$. Пусть для определенности также $P \in [R',\ Q]$. Тогда $R' \cap Q \subseteq P \subseteq R' \cup Q$ и $P \cap Q \subseteq R \subseteq P \cup Q$. Отсюда

$$R' \cap R \subseteq R' \cap (P \cup Q) = (R' \cap P) \cup (R' \cup Q) \subseteq (R' \cap P) \cup P = P,$$

$$R' \cup R \supseteq R' \cup (P \cap Q) = (R' \cup P) \cap (R' \cup Q) \supseteq (R' \cup P) \cap Q = Q$$

и, следовательно, $P \in [R',\ R]$. Используя доказанное выше свойство функции *l*, имеем $l(P) < l(R)$. Далее, из $R \in [P,\ Q]$ и $P \in [R',\ Q]$ в силу следствия из леммы 12.1, имеем $R \in [R',\ Q]$, откуда $l(R) < l(Q)$. Окончательно:

$$(l(R) - l(P))(l(R) - l(Q)) < 0.$$

Остальные случаи разбираются аналогично. Пусть теперь $(l(R) - l(P))(l(R) - l(Q)) \leqslant 0$ для точек *R, P, Q* линейного сегмента $\mathbf{L}(R',\ R'')$. Пусть для определенности, $l(P) \leqslant l(R) \leqslant l(Q)$. Согласно свойству функции *l* имеем

$P \in [R', R]$ и $R \in [R', Q]$ или $R' \cap R \subseteq P \subseteq R' \cup R$ и $R' \cap Q \subseteq R \subseteq R' \cup Q$. Отсюда получаем

$P \cap Q \subseteq (R' \cup R) \cap Q = (R' \cap Q) \cup (R \cap Q) \subseteq R \cup (R \cap Q) = R.$

$P \cup Q \supseteq (R' \cap R) \cup Q = (R' \cup Q) \cap (R \cup Q) \supseteq R \cap (R \cup Q) = R$

и, следовательно, $R \in [P, Q]$. Теорема доказана.

Следствие. *Из* $P \in [R', Q]$ *следует* $Q \in [P, R'']$ *в линейном сегменте* $\mathbf{L}(R', R'')$.

Доказательство. Из $P \in [R', Q]$ имеем $l(P) < l(Q)$. Но поскольку $l(Q) \leqslant l(R'') = 1$, то $Q \in [P, R'']$.

Функция $l(R)$, определенная условиями теоремы 12.2, как бы нумерует точки линейного сегмента $\mathbf{L}(R', R'')$ от R' к R''.

12.2. Выпуклые множества и выпуклые оболочки

Понятие «между», введенное в определении 12.2, позволяет дать следующее определение выпуклого множества в пространстве $\mathcal{FR}$.

Определение 12.5. Множество **X** точек пространства $\mathcal{FR}$ называется *выпуклым,* если из $R', R'' \in X$ и $R \in [R', R'']$ следует

$$R \in X.$$

Это определение дословно повторяет известное геометрическое определение выпуклого множества.

Определение 12.6. *Выпуклой оболочкой* $\mathbf{C(X)}$ множества **X** в пространстве $\mathcal{FR}$ называется наименьшее выпуклое множество, содержащее данное множество **X**.

Легко видеть, что выпуклая оболочка множества **X** всегда существует, определяется единственным образом и совпадает с пересечением всех выпуклых множеств пространства $\mathcal{FR}$, содержащих данное множество **X**.

Наличие альтернативного определения «между» для совокупности точек пространства $\mathcal{FR}$ (см. определение 12.3) приводит нас к понятию точки Парето для множества точек пространства

Определение 12.7. Точку *P* пространства $\mathcal{FR}$ будем называть точкой Парето (мы употребляем это понятие в ином смысле, чем оно используется в теории функций выбора.) множества **X** точек пространства $\mathcal{F}\mathcal{R}$, если

$$\bigcap_{R\in \mathbf{X}} R \subseteq P \subseteq \bigcup_{R\in \mathbf{X}} R.$$

Множество всех точек Парето множества **X** будем обозначать **П(X).** Выше (см. раз. 7) мы уже обсуждали важность этого понятия в теории группового выбора.

Установим теперь взаимосвязь понятий выпуклости и точек Парето. Начнем со следующего утверждения.

Лемма 12.3. *Для любого множества точек* **X** *в пространстве*

$$\mathbf{C(X)} \subseteq \mathbf{\Pi(X)}.$$

Доказательство. Следует из леммы 12.1.

Как показывают простые примеры, вообще говоря, множества $\mathbf{C(X)}$ и $\mathbf{\Pi(X)}$ различны. Однако, как и в четком случае, имеется целый класс пространств, для которых множество точек Парето любого множества совпадает с выпуклой оболочкой этого множества.

Определение 12.8. Пространство $\mathcal{F}\mathcal{R}$ называется *полным,* если для любых различных точек R' и R'' существует линейный сегмент $\mathbf{L}(R', R'')$ в $\mathcal{F}\mathcal{R}$, который можно представить в виде объединения линейных сегментов:

$$\mathbf{L}(R', R'') = \mathbf{L}(R_0, R_1) \cup \mathbf{L}(R_1, R_2) \cup \ldots \cup \mathbf{L}(R_{m-1}, R_m)$$

(где $R_0 = R'$, $R_m = R''$) таких, что симметрическая разность $R_i \Delta R_{i+1}$ есть одноэлементное нечеткое множество для всех $i = \overline{1, m}.$ Сформулированное условие полноты пространства $\mathcal{F}\mathcal{R}$ гарантирует не только достаточный запас точек в пространстве, но и относительно «плотное» их расположение.

В качестве примера полного пространства рассмотрим пространство $\mathcal{F}\mathcal{B}$ всех нечетких отношений на данном множестве A. Покажем, что $\mathcal{F}\mathcal{B}$ действительно полное пространство. Пусть R' и R''—две различные точки в $\mathcal{F}\mathcal{B}$. Обозначим $R = R' \cap R''$. Очевидно, что $R \in [R', R'']$. Построим линейный сегмент от R' к R'' считая, что $R' \neq R$. Поскольку $R \subseteq R'$, то $\mu_R(x, y) \leqslant \mu_{R'}(x, y)$. Занумеруем произвольным образом пары (x, y), для которых $\mu_R(x, y) < \mu_{R'}(x, y)$. Индуктивно построим линейные сегменты $\mathbf{L}(R_i, R_{i+1})$, положив $R_0 = R'$ и

$$\mu_{R_1}(x,y)=\begin{cases}\mu_{R_0}(x,y), & \textbf{если} \quad (x,y)\neq(x_1,y_1),\\ \mu_R(x,y), & \textbf{если} \quad (x,y)=(x_1,y_1)\end{cases}$$

и, далее,

$$\mu_{R_i}(x,y)=\begin{cases}\mu_{R_{i-1}}(x,y), & \textbf{если} \quad (x,y)\neq(x_i,y_i),\\ \mu_R(x,y), & \textbf{если} \quad (x,y)=(x_i,y_i).\end{cases}$$

Очевидно, что каждый линейный сегмент $\mathbf{L}(R_i,\ R_{i+1})$ однозначно определяется точками R_i и R_{i+1} и объединение $\mathbf{L}(R_0,\ R_1)\cup\mathbf{L}(R_1,\ R_2)\cup\ldots\cup\mathbf{L}(R_{s-1},\ R_s)$, где *s* — число занумерованных пар *(x, у),* является линейным сегментом от *R'* к *R''*.

Аналогично строится линейный сегмент от *R* к *R''*. Легко проверяется, что объединение $\mathbf{L}(R',\ R)\cup\mathbf{L}(R,\ R'')$ есть линейный сегмент между *R'* и *R''*.

Как будет показано ниже, пространство $\mathcal{FPO}$ нечетких частичных порядков также является полным пространством, пространство же $\mathcal{FJ}$ нечетких эквивалентностей не является полным.

Точки *Р* и *Q* пространства $\mathcal{FR}$ такие, что $P\Delta Q$ есть одноэлементное нечеткое множество, будем называть *соседними* в пространстве $\mathcal{FR}$. Последовательность $R_0,\ R_1,\ldots,\ R_m$ соседних точек в сегменте $\mathbf{L}(R',\ R'')$, существование которой постулируется для полного пространства $\mathcal{FR}$, будем называть *основой* линейного сегмента $\mathbf{L}(R',\ R'')$.

Рассмотрим линейный сегмент $\mathbf{L}(R_{i-1},\ R_i)$ между последовательными точками основы линейного сегмента $\mathbf{L}(R',\ R'')$. Пусть $R_{i-1}\Delta R_i=\{(a,\ b)\}$. Легко видеть, что функции принадлежности всех точек *R* из $\mathbf{L}(R_{i-1},\ R_i)$ совпадают везде кроме точки (*a*, *b*). При этом $\mu_{R_{i-1}}(a,b)\leqslant\mu_R(a,b)\leqslant\mu_{R_i}(a,b)$. Отсюда следует, что линейный сегмент $\mathbf{L}(R_{i-1},\ R_i)$ определяется однозначно соседними точками R_{i-1} и R_i.

В дальнейших построениях мы будем пользоваться в полном пространстве $\mathcal{FR}$ только линейными сегментами, имеющими основу. Как следует из вышеизложенного, такие линейные сегменты полностью определяются своими основами.

Лемма 12.4. *Для любого множества точек* X *полного пространства* $\mathcal{FR}$ *справедливо включение* $\Pi(\mathbf{X}) \subseteq \mathbf{C}(\mathbf{X})$.

Доказательство. Предположим, что найдется точка $R \in \Pi(\mathbf{X})$ такая, что $R \notin \mathbf{C}(\mathbf{X})$. Выберем произвольно точку $R' \in \mathbf{X}$ и рассмотрим линейный сегмент $\mathbf{L}(R', R)$ с множеством вершин $\{R_0 = R', R_1, R_2, \ldots, R_m = R\}$. Такой линейный сегмент существует в силу полноты пространства $\mathcal{FR}$. Из нашего предположения следует, что существует k такое, что все R_i с $i<k$ принадлежат $\mathbf{C}(\mathbf{X})$, а $R_k \notin \mathbf{C}(\mathbf{X})$. Так как точки R_{k-1} и R_k— соседние, то

$$\mu_{R_{k-1}}(x, y) = \begin{cases} \mu_{R_{k-1}}(x, y), & \text{если } (x, y) \neq (a, b), \\ \mu_{R_{k-1}}(a, b) + \delta, \ \delta \neq 0, & \text{если } (x, y) = (a, b) \end{cases}$$

для некоторой пары $(a, b) \in \mathbf{A} \times \mathbf{A}$. Рассмотрим два случая.

1) $\delta > 0$.

Так как $R_k \in [R_{k-1}, R]$ (в силу следствия из теоремы 12.2), то $R_k \subseteq R_{k-1} \cup R$. Отсюда $\mu_{R_k}(a, b) \leqslant \mu_{R_{k-1}}(a, b) \vee \mu_R(a, b)$. Но $\mu_{R_k}(a, b) > \mu_{R_{k-1}}(a, b)$, откуда $\mu_{R_k}(a, b) \leqslant \mu_R(a, b)$. Далее, из $R \in \Pi(\mathbf{X})$ следует, что $R \subseteq \bigcup\limits_{P \in \mathbf{X}} P$. Возможны два случая. Либо $\bigvee\limits_{P \in \mathbf{X}} \mu_P(a, b)$ существует, и тогда

$$\mu_R(a, b) \leqslant \bigvee_{P \in \mathbf{X}} \mu_P(a, b), \text{ либо } \mu_R(a, b) < \sup_{P \in \mathbf{X}} (\mu_P(a, b)).$$

В обоих случаях, очевидно, существует $P \in \mathbf{X}$ такое, что $\mu_R(a, b) \leqslant \mu_P(a, b)$, откуда $\mu_{R_k}(a, b) \leqslant \mu_P(a, b)$.

Далееиз $\mu_{R_{k-1}}(x, y) \leqslant \mu_{R_k}(x, y)$ следует, что $R_{k-1} \subseteq R_k$, откуда

$$R_{k-1} \cap P \subseteq R_k.$$

Из $\mu_{R_{k-1}}(a, b) \leqslant \mu_{R_k}(a, b) \leqslant \mu_P(a, b)$ следует, что $\mu_{R_k}(a, b) \leqslant \mu_{R_{k-1}}(a, b) \vee \mu_P(a, b)$, откуда, с очевидностью, $\mu_{R_k}(x, y) \leqslant \mu_{R_{k-1}}(x, y) \vee \mu_P(x, y)$ для всех (x, y). Другими словами, $R_k \subseteq R_{k-1} \cup P$.

Таким образом, мы получили, что $R_k \in [R_{k-1}, P]$. Но $R_{k-1} \in \mathbf{C}(\mathbf{X})$ и $P \in \mathbf{X} \subseteq \mathbf{C}(\mathbf{X})$, откуда $R_k \in \mathbf{C}(\mathbf{X})$. Полученное противоречие заканчивает рассмотрение первого случая.

2) $\delta < 0$.

Из того, что $R_k \in [R_{k-1}, R]$, имеем $R_{k-1} \cap R \subseteq R_k$, откуда $\mu_{R_{k-1}}(a, b) \wedge \mu_R(a, b) \leqslant \mu_{R_k}(a, b)$. Поскольку δ<0, то $\mu_{R_k}(a, b) \geqslant \mu_R(a, b)$. Из того же, что $R \in \Pi(\mathbf{X})$, следует, что $\bigcap_{P \in \mathbf{X}} P \subseteq R$.

Рассмотрим два случая. Либо $\bigwedge_{P \in \mathbf{X}} \mu_P(a, b)$ существует и тогда

$\bigwedge_{P \in \mathbf{X}} \mu_P(a, b) \leqslant \mu_R(a, b)$, либо $\inf_{P \in \mathbf{X}} (\mu_P(a, b)) \leqslant \mu_R(a, b)$. В обоих случаях получается, что найдется $P \in X$ такое, что $\mu_P(a, b) \leqslant \mu_R(a, b)$, откуда $\mu_P(a, b) \leqslant \mu_{R_k}(a, b)$. Далее, из $\mu_{R_k}(x, y) \leqslant \mu_{R_{k-1}}(x, y)$ следует, что $R_k \subseteq R_{k-1}$, откуда $R_k \subseteq R_{k-1} \cup P$. Из $\mu_P(a, b) \leqslant \mu_{R_k}(a, b) < \mu_{R_{k-1}}(a, b)$ следует, то $\mu_{R_k}(x, y) \geqslant \mu_P(x, y) \wedge \mu_{R_{k-1}}(x, y)$ для всех *(x, y)*, т. е. $R_{k-1} \cap P \subseteq R_k$.

Таким образом, мы установили, что $R_k \in [R_{k-1}, P]$, т. е. $R_k \in \in \mathbf{C}(\mathbf{X})$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Из леммы 12.3 и 12.4 получаем следующую теорему.

Теорема 12.3. *В полном пространстве* $\mathcal{FR}$ *выпуклая оболочка* $\mathbf{C}(\mathbf{X})$ *произвольного множества* X *совпадает с множеством точек Парето* $\Pi(\mathbf{X}) : \mathbf{C}(\mathbf{X}) = \Pi(\mathbf{X})$.

В заключение рассмотрим связь между выпуклыми оболочками в пространстве $\mathcal{FR}$ и пространстве $\mathcal{FB}$ всех нечетких бинарных отношений на данном множестве А. Очевидно, что $\mathcal{FR} \subseteq \mathcal{FB}$, т. е. любое множество **X** в пространстве $\mathcal{FR}$ можно рассматривать как множество точек пространства $\mathcal{FB}$. Для данного множества **X** из пространства $\mathcal{FR}$ можно рассматривать в этом случае две выпуклые оболочки: $\mathbf{C}_{\mathcal{FR}}(\mathbf{X})$— выпуклую оболочку в пространстве $\mathcal{FR}$— и $\mathbf{C}_{\mathcal{FB}}(\mathbf{X})$— выпуклую оболочку в пространстве $\mathcal{FB}$.

Множества $\mathbf{C}_{\mathcal{FR}}(\mathbf{X})$ и $\mathbf{C}_{\mathcal{FB}}(\mathbf{X})$, рассматриваемые как подмножества пространства $\mathcal{FB}$, вообще говоря, различны. Очевидно лишь, что $\mathbf{C}_{\mathcal{FR}}(\mathbf{X}) \subseteq \mathbf{C}_{\mathcal{FB}}(\mathbf{X}) \cap \mathcal{FR}$.

Для полных же пространств справедлива

Теорема 12.4. *В полном пространстве* $\mathcal{FR}$ *выпуклая оболочка любого множества* **X** *есть пересечение пространства* $\mathcal{FR}$ *с выпуклой оболочкой* **X** *в пространстве* $\mathcal{FB}$:

$$\mathbf{C}_{\mathcal{FR}}(\mathbf{X}) = \mathbf{C}_{\mathcal{FB}}(\mathbf{X}) \cap \mathcal{FR}.$$

Доказательство: Так как $\mathcal{FR}$ и $\mathcal{FB}$ — полные пространства, то $\mathbf{C}_{\mathcal{FR}}(\mathbf{X}) = \Pi_{\mathcal{FR}}(\mathbf{X})$ и $\mathbf{C}_{\mathcal{FB}}(\mathbf{X}) = \Pi_{\mathcal{FB}}(\mathbf{X})$, где $\Pi_{\mathcal{FR}}(\mathbf{X})$ и $\Pi_{\mathcal{FB}}(\mathbf{X})$ — множество точек Парето множества **X** в пространствах $\mathcal{FR}$ и $\mathcal{FB}$ соответственно. Очевидно, $\Pi_{\mathcal{FR}}(\mathbf{X}) = \Pi_{\mathcal{FB}}(\mathbf{X}) \cap \mathcal{FR}$, откуда и следует утверждение теоремы.

На этом мы закончим рассмотрение геометрической структуры произвольных пространств нечетких отношений. Наши последующие построения будут связаны с конкретным пространством — пространством нечетких частичных порядков $\mathcal{FPO}$. Это пространство является полным пространством, и для него справедливы все предыдущие результаты. Использование специальных свойств нечетких частичных порядков позволяет, однако, провести более детально изучение структуры пространства $\mathcal{FPO}$. В частности, мы определим метрическую структуру на $\mathcal{FPO}$ и рассмотрим проблему группового выбора для этого пространства. В данной работе мы ограничимся рассмотрением только этого пространства нечетких предпочтений, что в общем не является сильным ограничением, так как любое строгое предпочтение может рассматриваться как частичный порядок.

13. Пространство нечетких частичных порядков

В этом разделе мы будем изучать пространство нечетких частичных порядков (сокращенно $\mathcal{FPO}$), т. е. множество всех нечетких бинарных отношений частичного порядка на фиксированном множестве **A**. Для этого пространства, в силу достаточно простой структуры нечеткого бинарного отношения частичного порядка, удается получить более глубокие результаты, чем для произвольных пространств нечетких бинарных отношений. В частности, на пространстве $\mathcal{FPO}$ будет исследована метрическая структура, доказана полнота этого пространства, и на основе этого построена теория выпуклых оболочек и ядер в этом пространстве.

13.1. Полнота пространства $\mathcal{FPO}$

В разделе 12 было доказано, что полнота пространства нечетких отношений является достаточным условием для совпадения понятий *выпуклая оболочка* и *множество точек Парето.* Понятие «полнота» существенно не только для решения проблемы группового выбора, т. е. описания точек Парето, но и для наиболее простой реализации метрического подхода.

Перейдем теперь к исследованию условия полноты в пространстве $\mathcal{FPO}$. Для доказательства полноты пространства $\mathcal{FPO}$ в силу определения 12.8 необходимо для любой пары различных точек *P* и *Q* пространства $\mathcal{FPO}$ построить основу некоторого линейного сегмента между точками *P* и *Q*. Установим справедливость следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 13.1. *Пересечение любого множества отношений нечеткого частичного порядка есть нечеткий частичный порядок* (например, пересечение двух нечетких частичных порядков есть снова нечеткий частичный порядок.).

Доказательство. Пусть $\{P_i\}_{i\in I}$— произвольная совокупность нечетких частичных порядков. Их пересечение *P* есть нечеткое бинарное отношение с функцией принадлежности $\mu_P(x, y) = \bigwedge\limits_{i\in I} \mu_{P_i}(x, y)$. Очевидно, что *P* — антирефлексивно, т. е. $\mu_P(x, x) = 0.$ Докажем транзитивность *P*. В силу транзитивности каждого P_i имеем для любого $y \in A$

$$\mu_P(x, z) = \bigwedge_{i\in I} \mu_{P_i}(x, z) \geqslant \bigwedge_{i\in I} \left(\mu_{P_i}(x, y) \wedge \mu_{P_i}(y, z)\right) =$$

$$= \left(\bigwedge_{i\in I} \mu_{P_i}(x, y)\right) \wedge \left(\bigwedge_{i\in I} \mu_{P_i}(y, z)\right) = \mu_P(x, y) \wedge \mu_P(y, z),$$

что и требовалось доказать.

Как следует из доказанной леммы, для установления полноты пространства $\mathcal{FPO}$ достаточно построить основу линейного сегмента между точками *P* и *Q* для случая, когда $P \subset Q.$ Действительно, частичный порядок $P \cap Q$ содержится и в P и в Q и лежит между P и Q. Поэтому объединение линейных сегментов между P и $P \cap Q$ и между $P \cap Q$ и Q и дает нам линейный сегмент между P и Q.

Лемма 13.2. *Пусть* $P \subset Q$. *Тогда существует точка P' в пространстве* $\mathcal{FPO}$, *соседняя к Q и такая, что* $P \subseteq P' \subset Q$.

Доказательство. Пусть **A** = $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ — нумерация, согласованная с Q. Очевидно, что эта нумерация будет согласована и с Р. Выберем наибольшее i такое, что существует j такое, что $\mu_Q(a_i, a_j) > \mu_P(a_i, a_j)$. Так как $P \neq Q$, то такое i существует. Положим $a = a_i$. Выберем наименьшее j такое, что $\mu_Q(a, a_j) > \mu_P(a, a_j)$. Положим $b=a_j$. Определим следующим образом функцию принадлежности отношения P':

$$\mu_{P'}(x, y) = \begin{cases} \mu_Q(x, y), & \text{если} \quad (x, y) \neq (a, b), \\ \mu_P(a, b), & \text{если} \quad (x, y) = (a, b). \end{cases}$$

Покажем, что P' — частичный порядок. Очевидно, что P — антирефлексивное отношение. Для доказательства транзитивности установим, что

$$\mu_{P'}(x, z) \geqslant \mu_{P'}(x, y) \wedge \mu_{P'}(y, z) \qquad (*)$$

выполняется для всех x, y и z, отличных друг от друга. Рассмотрим все возможные, случаи.

1) Среди пар (x, y), (y, z) и (x, z) нет пары (a, b). Тогда (*) следует из транзитивности Q.

2) $(x, y) = (a, b)$. Имеем

$$\mu_{P'}(x, y) \wedge \mu_{P'}(y, z) = \mu_P(a, b) \wedge \mu_Q(b, z) \leqslant$$
$$\leqslant \mu_Q(a, b) \wedge \mu_Q(b, z) \leqslant \mu_Q(a, z) = \mu_Q(x, z).$$

3) $(y, z) = (a, b)$. Имеем

$$\mu_{P'}(x, y) \wedge \mu_{P'}(y, z) = \mu_Q(x, a) \wedge \mu_P(a, b) \leqslant$$
$$\leqslant \mu_Q(x, a) \wedge \mu_Q(a, b) \leqslant \mu_Q(x, b) = \mu_Q(x, z).$$

4) $(x, z) = (a, b)$. Предположим, что

$$\mu_{P'}(x, z) < \mu_P(x, y) \wedge \mu_P(y, z)$$

или

$$\mu_P(a, b) < \mu_Q(a, y) \wedge \mu_Q(y, b)$$ для некоторого y.

Тогда $\mu_P(a, b) < \mu_Q(a, y)$ и $\mu_P(a, b) < \mu_Q(y, b)$. Пусть $y = a_k$. Тогда

Имеем $i < k$ и $k < j$, так как $\mu_Q(a, y) > 0$ и $\mu_Q(y, b) > 0.$ Так как $i < k$, то $\mu_Q(y, b) = \mu_P(y, b).$ Так как $k < j$, то $\mu_Q(a, y) = \mu_P(a, y).$ В силу транзитивности имеем

$$\mu_P(a, b) \geqslant \mu_P(a, y) \wedge \mu_P(y, b) = \mu_Q(a, y) \wedge \mu_Q(y, b) > \mu_P(a, b).$$

Полученное противоречие показывает, что (*) в случае (4) снова выполнено, что и завершает доказательство леммы 13.2.

Замечание. Отметим, что построенная при доказательстве леммы 13.2 точка *P′* обладает следующим важным свойством: мощность множества пар *(x, y),* на котором $\mu_P(x, y) \neq \mu_{P'}(x, y),$ на единицу меньше мощности множества пар *(x, y),* на котором $\mu_P(x, y) \neq \mu_Q(x, y).$

Из последнего замечания следует, что за конечное число шагов, пользуясь конструкцией из доказательства леммы 13.2, можно построить последовательность точек $P = P_N \subset P_{N-1} \subset \ldots \subset P_2 \subset \subset P_1 \subset Q.$ Точки $P_{N-1}, \ldots, P_1$ образуют, очевидно, основу линейного сегмента, который в силу рассуждений, предваряющих лемму 12.4, определяется ими однозначно.

Итак, нами доказана следующая

Теорема 13.1. *Пространство* $\mathcal{FPO}$ *является полным пространством.*

Тем самым для $\mathcal{FPO}$ справедливы все результаты для полных пространств, полученные в предыдущем параграфе. Именно,

$$\mathbf{C}(X) = \mathbf{\Pi}(\mathbf{X})$$

и

$$\mathbf{C}_{\mathcal{FPO}}(\mathbf{X}) = \mathbf{C}_{\mathcal{FB}}(\mathbf{X}) \cap \mathcal{FPO},$$

где **X** — произвольное множество в пространстве частичных порядков $\mathcal{FPO}$.

13.2. Метрика в пространстве $\mathcal{FPO}$

Мы начнем этот параграф с введения меры близости между нечеткими частичными порядками. Под *мерой близости* мы будем понимать функцию на парах элементов из $\mathcal{FPO}$, удовлетворяющую некоторым естественным условиям. Например, естественно потребовать, чтобы «близким» нечетким частичным порядкам соответствовали «небольшие» значения этой меры и т. п.

Определение 13.1. *Мерой близости* между нечеткими частичными порядками будем называть функцию $d(P, Q)$, заданную на множестве всех пар *(P, Q)* элементов множества $\mathcal{FPO}$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $d(P, Q) = d(Q, P)$;

2) $d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q)$ тогда и только тогда, когда $R \in [P, Q]$ (*R* лежит между *P* и *Q*);

3) $d(P, Q) = |\mu_P(x, y) - \mu_Q(x, y)|$ для соседних нечетких частичных порядков *P* и *Q*.

Теорема 13.2. *Существует единственная функция d(P, Q), удовлетворяющая условиям* 1—3. *Значения функции d(P, Q) могут быть вычислены по формуле*

$$d(P, Q) = \sum_{(x,y)} |\mu_P(x, y) - \mu_Q(x, y)|. \qquad (13.1)$$

Доказательство. Покажем сначала, что функция *d(P, Q)* определяется условиями 1—3 однозначно. Пусть P_1 и P_2 — нечеткие частичные порядки. В силу леммы 13.1 $P_3 = P_1 \cap P_2$ есть нечеткий частичный порядок, причем $P_3 \in [P_1, P_2]$. Отсюда по условию 2 $d(P_1, P_2) = d(P_1, P_3) + d(P_3, P_2)$. Так как $P_3 \subseteq P_1$ и $P_3 \subseteq P_2$, то достаточно показать, что *d(P, Q)* однозначно определено для $P \subset Q$. Поскольку в этом случае очевидно, что $P \in [\mathbf{0}, Q]$, то $d(P, Q) = d(\mathbf{0}, Q) - d(\mathbf{0}, P)$ по условиям 2 и 1. (Здесь **0** обозначает тривиальный частичный порядок с функцией принадлежности тождественно равной нулю.) Покажем, что $d(\mathbf{0}, P)$ однозначно определено для любого *P*. Если *P* = 0, то из $\mathbf{0} \in [\mathbf{0}, \mathbf{0}]$ следует $d(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = d(\mathbf{0}, \mathbf{0}) + d(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, откуда $d(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$. Если $P \neq \mathbf{0}$, то согласно лемме 13.2 существует нечеткий частичный порядок P_1 такой, что $P_1 \subset P$ и P_1 есть нечеткий частичный порядок, соседний к *P.* При этом носитель P_1 строго содержится в Р. Далее, согласно лемме 13.2 существует нечеткий частичный порядок $P_2 \subset P_1$ и соседний к P_1 и т. д. Применяя последовательно лемму 13.2, мы получим последовательность $P \supset P_1 \supset P_2 \supset \ldots$ вложенных соседних нечетких частичных порядков, причем носители их строго убывают. В силу конечности **A** эта последовательность обрывается: $P \supset P_1 \supset P_2 \supset \ldots \supset P_k \supset \mathbf{0}$. Применяя последовательно условие 2, получаем

$$d(0,\ P) = d(0,\ P_1) + d(P_1,\ P) = d(0,\ P_2) + d(P_2,\ P_1) + d(P_1,\ P) =$$
$$= d(0,\ P_k) + d(P_k,\ P_{k-1}) + \ldots + d(P_2,\ P_1) + d(P_1,\ P).$$

Так как нечеткие частичные порядки P_i и P_{i+1} соседние, то все слагаемые в этой сумме однозначно определены условием теоремы, а следовательно, установлена однозначность функции
$d(P,\ Q)$.

Для доказательства оставшейся части теоремы достаточно проверить, что функция (13.1) удовлетворяет всем условиям 1—3. Выполнение условий 1 и 3 очевидно. Пусть теперь $R \in [P,\ Q]$. В соответствии с условием 2 рассмотрим выражение

$$d(P, R) + d(R, Q) =$$
$$= \sum_{(x,y)} |\mu_P(x, y) - \mu_R(x, y)| + \sum_{(x,y)} |\mu_R(x, y) - \mu_Q(x, y)| =$$
$$= \sum_{(x,y)} (|\mu_P(x, y) - \mu_R(x, y)| + |\mu_R(x, y) - \mu_Q(x, y)|).$$

Поскольку по определению условия $R \in [P,\ Q]$ имеем

$$\mu_P(x,\ y) \wedge \mu_Q(x,\ y) \leqslant \mu_R(x,\ y) \leqslant \mu_P(x,\ y) \vee \mu_Q(x,\ y),$$

то рассматриваемое выражение принимает вид

$$d(P, R) + d(R, Q) = \sum_{(x,y)} |\mu_P(x, y) - \mu_Q(x, y)| = d(P, Q).$$

Следовательно, условие 2 тоже выполняется. Доказательство закончено.

Из доказанной теоремы 13.2 видно, что мера близости, определенная естественными условиями 1—3, существует и при этом определяется ими единственным образом. Оказывается, что так определенная мера близости к тому же обладает следующим важным свойством: ее можно рассматривать как метрику на пространстве $\mathcal{FPO}$.

Теорема 13.3. *Функция* $d(P,\ Q)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

4) $d(P,\ Q) = 0$ *тогда и только тогда, когда P = Q.*

5) $d(P,\ Q) \leqslant d(P,\ R) + d(R,\ Q)$ *для любых P, Q, R.*

Доказательство. Оба условия немедленно следуют из формулы (13.1). Таким образом, установлено, что функция *d*, определенная формулой (13.1), удовлетворяет условиям 1—5, причем уже условиями 1—3 определяется однозначно. Условия 1, 2, 4, 5 в совокупности эквивалентны обычным трем аксиомам геометрического расстояния. Подобная геометрическая трактовка функции близости как функции расстояния позволяет при решении проблемы группового выбора использовать известные аналоги из геометрии и механики, например понятие центра тяжести и проч.

13.3. Базис выпуклого множества

Поскольку полнота пространства $\mathcal{FPO}$ уже доказана в 13.2, и, следовательно, выпуклые оболочки в $\mathcal{FPO}$ совпадают с множеством точек Парето, в этом параграфе будет рассмотрена более детально структура выпуклых множеств.

Для построения выпуклой оболочки **C(M)** множества **M** не всегда необходимо использовать все точки из **M**. Может оказаться так, что $\mathbf{C}(\mathbf{M}_1) = \mathbf{C}(\mathbf{M})$ для некоторого собственного подмножества $\mathbf{M}_1 \subset \mathbf{M}.$

Определение 13.2. Минимальное (по включению) подмножество **B** множества **M**, обладающее свойством $\mathbf{C}(\mathbf{B}) = \mathbf{C}(\mathbf{M}),$ называется *базисом.* Точки базиса **B** называются *базисными точками* **M**.

Данное множество **M** может обладать различными базисами. Объединение всех базисов совпадает с множеством всех базисных точек. Другими словами, точка множества **M** является базисной тогда и только тогда, когда она входит в некоторый базис.

Изучим подробнее структуру базисных точек в пространстве $\mathcal{FPO}.$

В разделе 12 было рассмотрено пространство $\mathcal{FB}$ всех бинарных отношений на заданном множестве **A**. Доказанная там теорема 12.4 в применении к пространству $\mathcal{FPO}$ утверждает, что

$$\mathbf{C}_{\mathcal{FPO}}(\mathbf{M}) = \mathbf{C}_{\mathcal{FB}}(\mathbf{M}) \cap \mathcal{FPO}.$$

Тем самым, выпуклые оболочки в пространстве $\mathcal{FPO}$ как бы «наследуются» из пространства $\mathcal{FB}.$ Наш интерес к этой теореме в данном случае определяется тем обстоятельством, что выпуклые оболочки в $\mathcal{FB}$ могут быть описаны следующим образом.

Теорема 13.4. *Выпуклая оболочка* **C(M)** *любого конечного множества* **M** *точек пространства* $\mathcal{FB}$ *имеет вид:* $\mathbf{C}(\mathbf{M}) = \{R : R \in$ $\in [R', R''],\ R' \subset R''\},$ *где R', R'' — точки пространства* $\mathcal{FB}.$

Доказательство. Положим $R' = \bigcap\limits_{R_i \in \mathbf{M}} R_i$ и $R'' = \bigcup\limits_{R_i \in \mathbf{M}} R_i.$

Очевидно, что $R' \in \mathbf{C}(\mathbf{M}),\ R'' \in \mathbf{C}(\mathbf{M})$ и $R' \subset R''.$ Пусть $R \in \mathbf{C}(\mathbf{M}).$

В силу теоремы 12.3

$$\bigcap_{R_i \in \mathbf{M}} R_i \subseteq R \subseteq \bigcup_{R_i \in \mathbf{M}} R_i,$$

т. е. $R \in [R', R'']$.. Пусть теперь некоторое $R \in [R', R'']$. В силу выпуклости **C(M)** отсюда следует, что $R \in \mathbf{C}(\mathbf{M})$.

Напомним (см. 12.1, пример 12.3), что пространство $\mathcal{FB}$ всех нечетких бинарных отношений на множестве **A** из *n* элементов отождествляется с n^2-мерным кубом всех функций $\mu(x, y)$ на $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$, удовлетворяющих условию $0 \leqslant \mu(x, y) \leqslant 1$. С точки зрения такого представления пространства $\mathcal{FB}$ выпуклая оболочка, описанная в теореме 13.4, есть замкнутый параллелепипед в этом кубе с противоположными вершинами, определяемыми функциями принадлежности отношений *R'* и *R''*, т. е. множество функций $\mu(x, y)$ удовлетворяет условию

$$\mu_{R'}(x, y) \leqslant \mu_R(x, y) \leqslant \mu_{R''}(x, y).$$

Этот факт позволяет дать простое описание базисных точек выпуклой оболочки конечного множества **M** в пространстве $\mathcal{FPO}$. Оказывается, что базисные точки располагаются на границе параллелепипеда, являющегося выпуклой оболочкой $\mathbf{C}_{\mathcal{FB}}(\mathbf{M})$ множества **M** в пространстве $\mathcal{FB}$. Справедлива также следующая теорема.

Теорема 13.5. *Если точка* $P \in \mathbf{M}$ *является базисной, то*

$$\mu_P(x, y) = \bigwedge_{R_i \in \mathbf{M}} \mu_{R_i}(x, y) \quad \text{или} \quad \mu_P(x, y) = \bigvee_{R_i \in \mathbf{M}} \mu_{R_i}(x, y) \tag{13.2}$$

хотя бы для одной пары $(x, y) \in \mathbf{A} \times \mathbf{A}$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть **B** есть базис множества **M**, содержащий точку *P*. Тогда, так как **C(M)=C(B),** то имеем

$$\mu_P(x, y) > \bigwedge_{R_i \in \mathbf{M}} \mu_{R_i}(x, y) = \bigwedge_{R_i \in \mathbf{B}} \mu_{R_i}(x, y), \tag{13.3}$$

$$\mu_P(x, y) < \bigvee_{R_i \in \mathbf{M}} \mu_{R_i}(x, y) = \bigvee_{R_i \in \mathbf{B}} \mu_{R_i}(x, y)$$

для всех пар $(x, y) \in \mathbf{A} \times \mathbf{A}$. Рассмотрим множество $\mathbf{B}' = \mathbf{B} \setminus \{P\}$.

Очевидно, $\mathbf{B}' \subset \mathbf{B}$. Покажем, что $\mathbf{C}(\mathbf{B}') = \mathbf{C}(\mathbf{M})$. Так как **C(M) =** **= C (B),** то достаточно показать, что $\mathbf{C}(\mathbf{B}') = \mathbf{C}(\mathbf{B})$. Так как $P \in \mathbf{B}$, то из (13.3) следует, что

$$\mu_P(x, y) > \bigwedge_{R_i \in \mathbf{B}'} \mu_{R_i}(x, y)$$
$$\mu_P(x, y) < \bigvee_{R_i \in \mathbf{B}'} \mu_{R_i}(x, y). \tag{13.4}$$

Очевидно, что $\mathbf{C}(\mathbf{B}') \subseteq \mathbf{C}(\mathbf{B})$. Покажем, что $\mathbf{C}(\mathbf{B}) \subseteq \mathbf{C}(\mathbf{B}')$. Пусть $R \in \mathbf{C}(\mathbf{B})$. Тогда

$$\bigwedge_{R_i \in \mathbf{B}} \mu_{R_i}(x, y) \leqslant \mu_R(x, y) \leqslant \bigvee_{R_i \in \mathbf{B}} \mu_{R_i}(x, y),$$

откуда в силу (13.4) имеем

$$\bigwedge_{R_i \in \mathbf{B}'} \mu_{R_i}(x, y) \leqslant \mu_R(x, y) \leqslant \bigvee_{R_i \in \mathbf{B}} \mu_{R_i}(x, y),$$

т. е. $R \in \mathbf{C}(\mathbf{B}')$. Мы доказали, что $\mathbf{C}(\mathbf{B}') = \mathbf{C}(\mathbf{B}) = \mathbf{C}(\mathbf{M})$. Поскольку $\mathbf{B}' \subset \mathbf{B}$, доказанный факт противоречит определению **B** как минимального подмножества в **M**, удовлетворяющего условию $\mathbf{C}(\mathbf{B}) = \mathbf{C}(\mathbf{M})$. Теорема доказана.

Отметим, что обратное к теореме 13.6 утверждение, вообще говоря, неверно. Может оказаться так, что точка множества **M** лежит на границе параллелепипеда, являющегося выпуклой оболочкой этого множества в пространстве $\mathcal{FB}$, но не является базисной. Рассмотрим пример.

Пример 13.1. Пусть множество **A** состоит из двух элементов. На рис. 13.1 изображена проекция пространства $\mathcal{FB}$ на подпространство нечетких антирефлексивных отношений на множестве **A**.

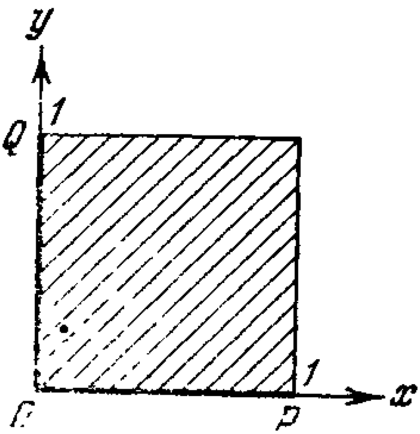


Рис. 13.1

Такие отношения задаются матрицами вида, изображенного на рис. 13.2.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & x \\ \hline y & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Рис. 13.2

Проекция $\mathcal{F}\mathcal{B}$ есть тогда единичный квадрат на координатной плоскости (*x, y)* (рис. 13.1). Очевидно, что пространство $\mathcal{FPO}$ есть объединение единичных отрезков на осях координат.

Пусть **М** состоит из трех частичных порядков с матрицами, представленными на рис. 13.3.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Рис. 13.3.

Нарис. 13.1 эти точки обозначены буквами 0, *P* и *Q* соответственно. Очевидно, что 0 удовлетворяет условию (2) теоремы 13.5. В то же время эта точка не входит в единственный базис множества **М**, который состоит из точек *P* и *Q*.

13.4. Ядро выпуклой оболочки

Основной задачей развиваемого подхода является построение множества допустимых групповых решений в пространстве $\mathcal{FPO}$. Такое множество допустимых групповых решений будет построено в этом параграфе в виде ядра выпуклой оболочки. Результаты предыдущего параграфа относительно структуры базисных точек позволяют ввести следующее

Определение 13.2. *Граничным слоем* $\partial\mathbf{M}$ множества М в пространстве $\mathcal{FPO}$ назовем множество всех точек этого множества, удовлетворяющих условию теоремы 13.5.

Как следует из теоремы 13.5, граничный слой $\partial\mathbf{M}$ содержит все базисные точки множества **М**. С геометрической точки зрения все точки множества $\partial\mathbf{M}$ находятся на «периферии» выпуклой оболочки **С(М).** В соответствии с идеями геометрического подхода, мы хотим определить ядро множества как некоторое подмножество выпуклой оболочки, находящееся в ее «середине». С этой точки зрения точки границы непригодны для построения ядра. Введем следующее определение.

Определение 13.3. *Внутренностью* $i\mathbf{M}$ множества **М** назовем множество $\mathbf{M}\backslash\partial\mathbf{M}.$

Очевидно, что $i\mathbf{M} \subset \mathbf{M}.$

Обозначим $\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}$ и определим последовательность множеств $\mathbf{M}_k$ рекуррентным соотношением

$$\mathbf{M}_k = i\mathbf{M}_{k-1}, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots \tag{13.5}$$

Так как **М** — конечное множество, а $i\mathbf{M} \subset \mathbf{M},$ то последовательность $\mathbf{M}_k$, начиная с некоторого номера *N,* стабилизируется: $\mathbf{M}_{N+1} = \mathbf{M}_{N+2} = \ldots = \varnothing.$ Это означает, что $i\mathbf{M}_N = \varnothing,$ т. е. $\mathbf{M}_N = \partial\mathbf{M}_N.$

Таким образом, нами построена последовательность вложенных подмножеств множества **М**, последнее из которых совпадает со своим граничным слоем.

Определение 13.4. *Ядром* **К(М)** конечного множества **М** точек пространства $\mathcal{FPO}$ будем называть выпуклую оболочку последнего непустого множества в последовательности (13.5): $\mathbf{K}(\mathbf{M}) =$

$$= \mathbf{C}(\mathbf{M}_N).$$

Описанное в этом определении множество нечетких частичных порядков в свете проблемы группового выбора представляет собой множество групповых решений, допустимых для выбора среди них одного единственного решения.

Ход рассуждений, приведший нас к понятию ядра, подсказывает следующую простую процедуру его построения.

Пусть **М** — конечное множество точек в пространстве $\mathcal{FPO}.$

Обозначим $\mu_{\mathrm{I}}^{\mathbf{M}} = \bigwedge\limits_{R\in\mathbf{M}} \mu_R(x, y)$ и

$$\mu_{II}^{\mathbf{M}} = \bigvee_{R \in \mathbf{M}} \mu_R(x, y).$$

Для $k = 1, 2, \ldots$ определим процедуру построения ядра следующим образом.

Шаг 1. Среди точек множества $\mathbf{M}_k$ выделим те, у которых функция принадлежности хотя бы на одной паре совпадает с $\mu_I^{\mathbf{M}_k}$ или с $\mu_{II}^{\mathbf{M}_k}$. Эти точки составляют множество $\partial\mathbf{M}_k$. Определяем

$$\mathbf{M}_{k+1} = i\mathbf{M}_k = \mathbf{M}_k \backslash \partial\mathbf{M}_k.$$

Шаг 2. Если $\mathbf{M}_{k+1} = \varnothing$, то полагаем $\mathbf{K}(\mathbf{M}) = \mathbf{C}(\mathbf{M}_k)$. Если $\mathbf{M}_{k+1} \neq \varnothing$, то $k := k + 1$ и переходит к шагу 1.

Как указывалось выше, эта процедура за конечное число шагов позволяет сформировать множество **К(М).**

13.5. Алгоритм «$\mathcal{F}$-ядро»

Задача алгоритма состоит в том, чтобы для исходного множества **М** из *N* отношений предпочтения, представленных в форме нечетких частичных порядков, построить последовательность из *s* вложенных друг в друга выпуклых оболочек — граничных слоев $\partial\mathbf{M}^s$. Для описания блок-схемы этого алгоритма нам дополнительно понадобятся следующие характеристики: **В** — число отношений в $i\mathbf{M}^{s+1}$, т. е. во внутренности (s+1)го слоя; *с* — счетчик отношений, составляющих $\partial\mathbf{M}^s$, *b* — счетчик числа просмотренных отношений в $i\mathbf{M}^{s+1}$. Через $\mu_t(x, y)$ обозначаются элементы матрицы μ_t, через μ_I^s и μ_{II}^s — минимальное и максимальное отношение s-й оболочки соответственно.

Итак, для работы алгоритма должно быть введено множество **М**, число *N* отношений в **М** и число *n*, определяющее размерность отношений $\mu \in \mathbf{M}$. Блок-схема алгоритма «$\mathcal{F}$-ядро» приведена на рис. 13.4.

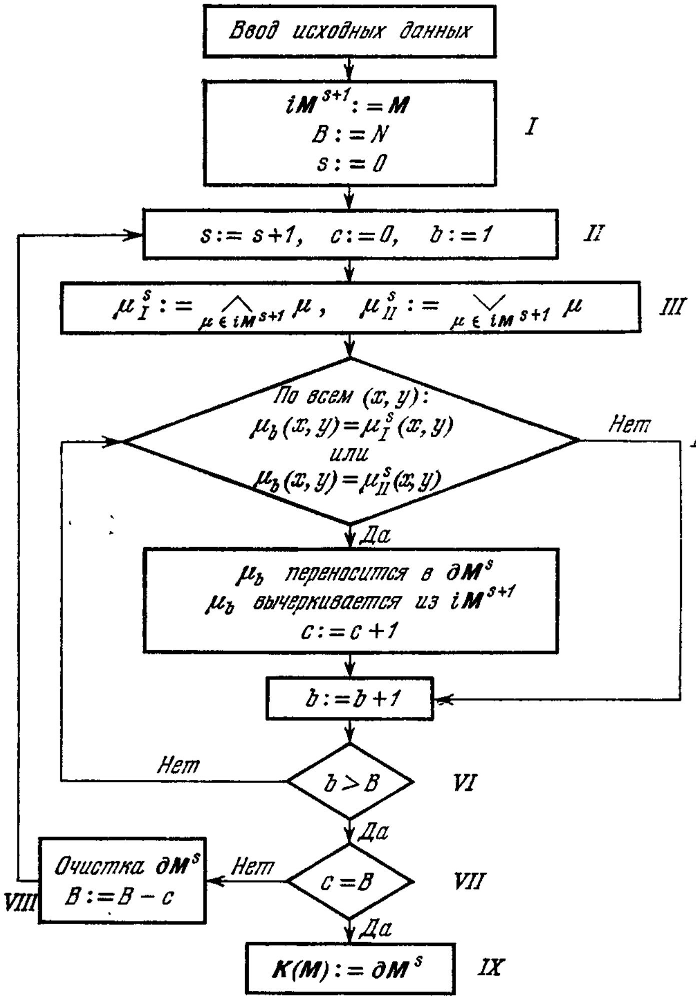


Рис. 13.4.

К блокам, отмеченным на рис. 13.4 римскими цифрами, приведем краткие пояснения.

1. В блоке I исходное множество **M** отношений переносится в массив $i\mathbf{M}^{s+1}$. В начале работы цикла из блоков II—VIII в этом массиве, по-существу, хранится внутренность *s*-й оболочки исходного множества **M**.

2. В блоке II производится настройка счетчиков: номеров выделяемой оболочки *s*, числа отношений граничного слоя $\partial\mathbf{M}^s$ и числа просмотренных отношений из внутренности s-го слоя $i\mathbf{M}^{s+1}$.
3. В блоке III формируются минимальное и максимальное отношения s-й выпуклой оболочки.
4. В блоках IV и V производится формирование s-го граничного слоя $\partial\mathbf{M}^s$. Отношения, принадлежащие $\partial\mathbf{M}^s$, переписываются в массив $\partial\mathbf{M}^s$ из массива $i\mathbf{M}^{s+1}$, а в последнем стираются (блок V).
5. Если все отношения из $i\mathbf{M}^{s+1}$ просмотрены (проверяется в блоке VI), а в массив $\partial\mathbf{M}^s$ перешли не все точки из $i\mathbf{M}^{s+1}$, т. е. если внутренность (s+1)-го слоя непуста (проверяется в блоке VII), то после очистки массива $\partial\mathbf{M}^s$ (блок VIII), производится переход к формированию следующей выпуклой оболочки.
6. Работа алгоритма заканчивается в случае, когда внутренность s-го слоя состоит только из точек граничного слоя (проверяется в блоке VII).

14. Групповые решения в пространстве нечетких частичных порядков

В предыдущем разделе на основе геометрического подхода было построено множество допустимых решений в проблеме группового выбора. В практических приложениях задача группового выбора обычно требует построения единственного группового решения. Особенность исходных данных в нашей задаче — нечеткость бинарных отношений частичного порядка — предоставляет возможность для построения такого единственного решения. Эти возможности связаны с арифметической обработкой исходных данных. В отличие от четкого случая арифметические операции над нечеткими отношениями снова приводят к нечетким отношениям. Примером такого рода арифметических операций могут служить операции осреднения, широко используемые при обработке данных. Трудности, которые возникают при этом подходе, связаны с тем, что нечеткие отношения, получающиеся после такой обработки, могут отличаться по своим свойствам от отношений, которые представляли собой исходные данные. Например, полученное отношение может оказаться нетранзитивным, тогда как исходные данные были транзитивными. При построении допустимых групповых решений такой проблемы не возникало, поскольку задача решалась на основе геометрического подхода.

В этом разделе будет предложен способ построения единственного группового решения на основе операции осреднения. Так как нечеткий частичный порядок определяется двумя условиями — антирефлексивности и транзитивности — то возникающая здесь проблема состоит в том, чтобы построенное среднее отношение также обладало этими свойствами. Для решения этой проблемы предлагается следующий подход. Сначала строится такая модель пространства $\mathcal{FPO}$, изоморфная в рамках геометрического подхода самому пространству $\mathcal{FPO}$, что операция осреднения, примененная к произвольной совокупности исходных данных не нарушает свойства антисимметричности. Тем самым проблема сводится к построению транзитивного группового решения. В заключительном параграфе этого раздела описывается алгоритм для построения такого решения.

14.1. Модель пространства $\mathcal{FPO}$

Определение 14.1. *Пространством* $\mathcal{AS}$ будем называть множество всех действительных функций на $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$, удовлетворяющих условию антисимметричности $f(x, y) = -f(y, x)$.

Из определения (14.1) следует, что $f(x, x) = 0$ для всех $x \in \mathbf{A}$. Функцию, тождественно равную нулю, будем обозначать $\mathbf{0}(x, y)$.

По аналогии с предыдущими исследованиями определим необходимые структуры в $\mathcal{AS}$.

1. Частичный порядок $\prec$ на $\mathcal{AS}$ определяется условием: $f \prec g$ тогда и только тогда, когда $f \cdot (f - g) \leq 0$.

2. Элемент лежит $f \in \mathcal{AS}$ между элементами g и h; $g, h \in \mathcal{AS}$ (обозначается $f \in [g, h]$) тогда и только тогда, когда $g \wedge h \leq f \leq g \vee h$.

3. Расстояние $d(f, g)$ определяется формулой

$$d(f, g) = \frac{1}{2} \sum_{(x,y)} |f(x, y) - g(x, y)|.$$

Установим, что в п. 1 нами действительно определено отношение частичного порядка.

Лемма 14.1. *Отношение* $\prec$, *определенное в п.* 1, *является рефлексивным, антисимметричным и транзитивным отношением.*

Доказательство. Рефлексивность отношения $\prec$ очевидна; проверим выполнение свойства антисимметричности. Пусть $f \prec g$ и $g \prec f$. Тогда $f(f-g) \leqslant 0$ и $g(g-f) \leqslant 0$, откуда $f^2 \leqslant fg$ и $g^2 \leqslant fg$. Складывая последние два неравенства, получаем, что $f^2 + g^2 \leqslant 2fg$, откуда $f = g$.

Докажем теперь транзитивность отношения $\prec$. Пусть $f \prec g$ и $g \prec h$. Тогда имеем $f^2 \leqslant gf$ и $g^2 \leqslant gh$. Перемножая эти неравенства, получаем: $f^2g^2 \leqslant g^2fh$ или, $g^2(f^2 - fh) \leqslant 0$, откуда $f^2 - fh \leqslant 0$ для тех пар (x, y), для которых $g(x, y) \neq 0$. Если же $g(x, y) = 0$, то из $f^2 \leqslant gf$ следует, что $f(x, y) = 0$, откуда $f^2 - fh = 0$. Окончательно получаем, что неравенство $f^2 - fh \leqslant 0$ выполнено для всех пар (x, y), откуда $f \prec h$.,

Доказательство окончено.

Докажем теперь, что частичный порядок $\prec$ и структура «между» на $\mathscr{AP}$ согласованы между собой.

Лемма 14.2. $f \prec g$ *тогда и только тогда, когда* $f \in [0, g]$.

Доказательство. Пусть $f \prec g$, т. е. $f(f-g) \leqslant 0$. Пусть также $g(x, y) \geqslant 0$ для некоторой пары $(x, y) \in \mathscr{AP}$. Тогда из неравенства $f(f-g) \leqslant 0$ имеем $0 \leqslant f(x, y) \leqslant g(x, y)$. Так как

$$0(x, y) \wedge g(x, y) = 0,$$

и

$$0(x, y) \vee g(x, y) = g(x, y),$$

откуда

$$0(x, y) \wedge g(x, y) \leqslant f(x, y) \leqslant 0(x, y) \vee g(x, y).$$

Если же $g(x, y) < 0$, то $g(y, x) > 0$ и

$$0(y, x) \wedge g(y, x) \leqslant f(y, x) \leqslant 0(y, x) \vee g(y, x),$$

откуда, пользуясь антисимметричностью функций f и g,

$$0(x, y) \wedge g(x, y) \leqslant f(x, y) \leqslant 0(x, y) \vee g(x, y).$$

Итак, мы доказали, что $f \in [0, g]$.

Пусть $f \in [0, g]$. Тогда $0 \wedge g \leqslant f \leqslant 0 \vee g$. Если $g \geqslant 0$, то это означает, что $0 \leqslant f \leqslant g$, т. е. выполняется неравенство $f(f-g) \leqslant 0$.

Если $g \leqslant 0$, то $g \leqslant f \leqslant 0$, т. е. $f(f-g) \leqslant 0$. Таким образом, в любом случае $f(f-g) \leqslant 0$, т. е. $f \prec g$ и доказательство закончено.
Установим возможность изоморфного вложения пространства $\mathcal{FPO}$ в пространство $\mathcal{AS}$. Докажем, что существует взаимнооднозначное отображение $\mathcal{FPO} \to \mathcal{AS}$, сохраняющее основные структуры.

Теорема 14.1. *Отображение* Φ: $P \to f_P$ *пространства* $\mathcal{FPO}$ *в пространство* $\mathcal{AS}$, *определенное формулой*

$$f_P(x, y) = \mu_P(x, y) - \mu_P(y, x), \quad (14.1)$$

где $\mu_P(x, y)$ — *функция принадлежности нечеткого частичного порядка P, является взаимнооднозначным вложением, сохраняющим структуры порядка, «между» и расстояние между парами точек.*

Доказательство. Нам предстоит доказать следующие четыре утверждения:

1. Отображение Ф взаимнооднозначное.
2. $P \subseteq Q$ в $\mathcal{FPO}$ тогда и только тогда, когда $f_P \prec f_Q$.
3. $P \in [R, Q]$ в $\mathcal{FPO}$ тогда и только тогда, когда $f_P \in [f_R, f_Q]$.
4. $d(P, Q) = d(f_P, f_Q)$, где первое расстояние вычислено в пространстве $\mathcal{FPO}$, а второе — в $\mathcal{AS}$.

Рассмотрим эти утверждения по порядку.

1. Взаимнооднозначность отображения Ф. Пусть $f_P = f_Q$ для некоторых $P, Q \in \mathcal{FPO}$. Если $f_P(x, y) \geqslant 0$, то $f_P(x, y) = \mu_P(x, y)$. Но тогда и $f_Q(x, y) = \mu_Q(x, y)$, откуда $\mu_P(x, y) = \mu_Q(x, y)$. Если $f_P(x, y) < 0$, то $\mu_P(x, y) = 0$ и $\mu_Q(x, y) = 0$, т. е. $\mu_P(x, y) = \mu_Q(x, y)$.

Итак, из $f_P = f_Q$ следует *P* = *Q*.

2. Сохранение порядка. Пусть имеем $P \subseteq Q$, т. е. $\mu_P(x, y) \leqslant \leqslant \mu_Q(x, y)$. Предположим сначала, что $\mu_Q(x, y) = 0$ для некоторой пары *(x, y)*. Тогда $\mu_P(x, y) = 0$ и $f_P(x, y) = -\mu_P(x, y)$ и $f_Q(x, y) = -\mu_Q(x, y)$. Имеем

$$f_P(x, y)[f_P(x, y) - f_Q(x, y)] = -\mu_P(x, y)[-\mu_P(x, y) + \mu_Q(x, y)] \leqslant 0,$$

так как $\mu_Q(x, y) \geqslant \mu_P(x, y)$. Если $\mu_P(x, y) > 0$, то $\mu_P(y, x) = 0$ и в силу предыдущего $f_P(y, x)[f_P(y, x) - f_Q(y, x)] \leqslant 0$, откуда, поль зуясь антисимметричностью f_P и f_Q, имеем $f_P(x, y)[f_P(y, x) -$

$$- f_Q(y, x)] \leqslant 0.$$

Итак, из $P \subseteq Q$ следует $f_P \prec f_Q$.

Пусть теперь, наоборот, $f_P \prec f_Q$. Тогда $f_P(f_P - f_Q) \leqslant 0$. Пусть (*x*, *y)* такая пара, что $f_Q(x, y) \geqslant 0$. Тогда $0 \leqslant f_P(x, y) \leqslant f_Q(x, y)$, откуда $\mu_P(x, y) \leqslant \mu_Q(x, y)$. Если же $f_Q(x, y) < 0$, то $f_Q(x, y) \leqslant f_P(x, y) \leqslant 0$ и $\mu_P(x, y) = \mu_Q(x, y) = 0$.

Итак, из $f_P \prec f_Q$ следует $P \subseteq Q$.

3. Сохранение отношения «между». Пусть $P \in [R, Q]$, т. е. $\mu_R \wedge \mu_Q \leqslant \mu_P \leqslant \mu_R \vee \mu_Q$. Если (*x*, *y)* такая пара, что $\mu_R(x, y) \vee \mu_Q(x, y) = 0$, то $\mu_R(x, y) = \mu_Q(x, y) = \mu_P(x, y) = 0$, откуда $f_P(x, y) = -\mu_P(y, x)$, $f_Q(x, y) = -\mu_Q(y, x)$ и $f_R(x, y) = -\mu_R(y, x)$. Отсюда очевидно, что $f_R(x, y) \wedge f_Q(x, y) \leqslant f_P(x, y) \leqslant f_R(x, y) \vee$ $\vee f_Q(x, y)$. Если $\mu_R(x, y) \vee \mu_Q(x, y) > 0$, то пусть, например, $\mu_R(x, y) \vee \mu_Q(x, y) = \mu_R(x, y)$. Имеем

$$f_P(x, y) = \mu_P(x, y) - \mu_P(y, x) \leqslant \mu_P(x, y) \leqslant \mu_R(x, y) \vee \mu_Q(x, y) =$$
$$= [\mu_R(x, y) - \mu_R(y, x)] \vee [\mu_Q(x, y) - \mu_Q(y, x)],$$

так как $\mu_R(y, x) = 0$ и $\mu_Q(x, y) \leqslant \mu_R(x, y)$.

Итак, $f_P(x, y) \leqslant f_R(x, y) \vee f_Q(x, y)$ для всех пар *(x, y)*. В частности, $f_P(y, x) \leqslant f_R(y, x) \vee f_Q(y, x)$, откуда $-f_P(x, y) \leqslant [-f_R(x, y)] \vee [-f_Q(x, y)]$ или $f_P(x, y) \geqslant f_R(x, y) \wedge f_Q(x, y)$.

Итак, из $P \in [R, Q]$ следует, что $f_P \in [f_R, f_Q]$.

Пусть теперь $f_P \in [f_R, f_Q]$, т. е. $f_R \wedge f_Q \leqslant f_P \leqslant f_R \vee f_Q$. Пусть также (*x*, *y)* такая пара, что $f_R(x, y) \geqslant f_Q(x, y)$. Тогда

$f_Q(x,\ y) \leqslant f_P(x,\ y) \leqslant f_R(x,\ y)$. Далее, очевидно, что $\mu_P = {}^1/_2(f_P + |f_P|),\ \mu_R = {}^1/_2(f_R + |f_R|),\ \mu_Q = {}^1/_2(f_Q + |f_Q|)$. Функция $u = {}^1/_2(v + |v|)$ является неубывающей функцией аргумента *v*. Поэтому $\mu_Q(x,\ y) \leqslant \mu_P(x,\ y) \leqslant \mu_R(x,\ y)$, откуда $\mu_R(x,\ y) \wedge \mu_Q(x,\ y) \leqslant \mu_P(x,\ y) \leqslant \mu_R(x,\ y) \vee \mu_Q(x,\ y)$. Случай $f_R(x,\ y) < f_Q(x,\ y)$ рассматривается аналогично и приводит к той же системе неравенств. Итак, из $f_P \in [f_R,\ f_Q]$ следует $P \in [R,\ O]$.

4. Сохранение расстояний. Пусть $P,\ Q \in \mathcal{FPO}$, а f_P и f_Q — соответствующие точки в $\mathcal{AS}$. Согласно формуле (13.1) имеем

$$d(P, Q) = \sum_{(x,y)} |\mu_P(x, y) - \mu_Q(x, y)|.$$

Следующее равенство легко проверяется перебором возможных случаев:

$$|\mu_P(x,\ y) - \mu_Q(x,\ y)| + |\mu_P(y,\ x) - \mu_Q(y,\ x)| = |f_P(x,\ y) - f_Q(x,\ y)|.$$

Суммируя по всем парам *(x, y)*, получаем $2d(P,\ Q) = 2d(f_P,\ f_Q)$, откуда $d(P,\ Q) = d(f_P,\ f_Q)$.

Доказательство теоремы 14.1 закончено.

Из наших построений видно, что образ пространства $\mathcal{FPO}$ при вложении Ф является на самом деле собственным подмножеством куба **Е** пространства $\mathcal{AS}$, определяемого условием $E = \{f:\ |f| \leqslant 1\}$. Образ пространства $\mathcal{FPO}$ при вложении Ф будем обозначать $\mathcal{FPO}_\Phi$ и называть *моделью пространства* $\mathcal{FPO}$.

Проиллюстрируем это следующим примером.

Пример 14.1. Пусть **А** — множество, состоящее из двух элементов. Тогда пространство $\mathcal{AS}$ состоит из антисимметричных 2 × 2-матриц вида

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & x \\ \hline -x & 0 \\ \hline \end{array}$$

Тем самым оно изоморфно действительной прямой. Каждый нечеткий частичный порядок $R \in \mathcal{FPO}$ при отображении Ф переходит в точку отрезка [—1, 1] (рис. 14.1).

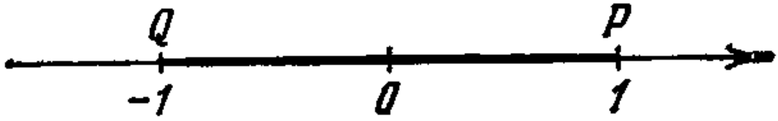


Рис. 14.1

Пусть P и Q — частичные порядки из примера 13.1 (см. рис. 14.1). На рис. 14.1 этим частичным порядкам соответствуют точки с x=1 и x = —1.

Фактически, отображение Ф, заданное формулой (14.1), определяет для любого нечеткого отношения $P \in \mathcal{FPO}$ его образ в пространстве $\mathcal{AP}$. При таком расширении отображения Ф оно перестает быть, вообще говоря, взаимнооднозначным. В дальнейшем для нас будет особенно удобно то обстоятельство, что среди прообразов точки $f \in E$ всегда существует *единственное* антирефлексивное и антисимметричное отношение, определяемое функцией принадлежности

$$\mu_P(x, y) = \frac{1}{2}\left(f_P(x, y) + |f_P(x, y)|\right).$$

Действительно, пусть отношение P имеет функцию принадлежности, удовлетворяющую условиям антисимметричности и соотношению 14.1. Рассмотрим следующие случаи:

1) $f_P(x, y) > 0.$ Тогда $\mu_P(x, y) > \mu_P(y, x)$ и в силу условия антисимметричности $f_P(x, y) = \mu_P(x, y).$

2) $f_P(x, y) < 0.$ Тогда $\mu_P(x, y) < \mu_P(y, x)$ и в силу условий антисимметричности $\mu_P(x, y) = 0.$

3) $f_P(x, y) = 0.$ Тогда $\mu_P(x, y) = \mu_P(y, x)$ и в силу условий антисимметричности и антирефлексивности $\mu_P(x, y) = 0.$ Итак,

$$\mu_P(x, y) = \begin{cases} f_P(x, y), & \text{если } f_P(x, y) > 0, \\ 0, & \text{если } f_P(x, y) \leqslant 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\mu_P(x, y) = \frac{1}{2}\left(f_P(x, y) + |f_P(x, y)|\right).$$

14.2. Построение единственного группового решения

Модель пространства $\mathcal{FPO}$ и взаимнооднозначное отображение Ф этого пространства в модель, построенные в предыдущем параграфе, позволяют предложить следующий подход к построению единственного группового решения. Обозначим через $f_{ср}$ среднее арифметическое образов исходных точек, выпуклой оболочкой которой является ядро. Вообще говоря, прообраз $f_{ср}$ хотя и является антисимметричным отношением, может не принадлежать пространству $\mathcal{FPO}$, так как может оказаться нетранзитивным.

Рассмотрим в пространстве $\mathcal{AP}$ отрезок, соединяющий точки f_{min} (образ минимального отношения из ядра) и $f_{ср}$, и на этом отрезке выберем точку, прообраз которой принадлежит пространству $\mathcal{FPO}$, ближайшую к $f_{ср}$. Прообраз этой точки принимается за групповое решение, соответствующее исходным данным, для которых было построено ядро.

На рис. 14.2 приведена блок-схема алгоритма, реализующего поиск определенного выше группового решения.

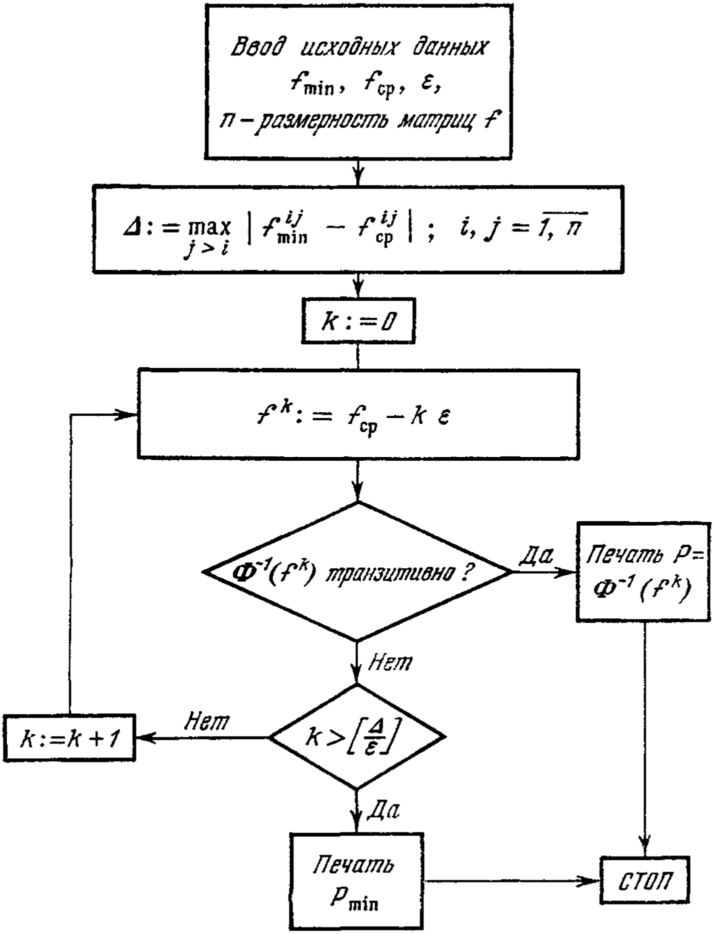


Рис. 14.2.

Для работы алгоритма необходимо задать точность ε, с которой будет определено групповое решение. Алгоритм последовательно, начиная с $f_{\text{ср}}$, с шагом равным е перебирает точки отрезка $[f_{\min},\ f_{\text{ср}}]$ до тех пор, пока не будет получена точка, прообраз которой транзитивен. Число шагов алгоритма не больше Δ/ε, где

$$\Delta = \max_{(x,y)} | f_{\text{ср}}(x,y) - f_{\min}(x,y) |.$$

14.3. Проекции нечетких отношений

Важную роль в теории нечетких множеств играет понятие проекции нечеткого отношения. Дадим определение проекции бинарного нечеткого отношения.

Пусть $\mu_Q(x,y)$— функция принадлежности нечеткого отношения в $U \times V$. Проекции Q_U и Q_V отношения Q на U и V— есть множества в U и V с функцией принадлежности вида

$$\mu_{Q_U}(x) = \sup_V \ \mu_Q(x,y),$$
$$\mu_{Q_V}(x) = \sup_U \ \mu_Q(x,y).$$

Условной проекцией нечеткого отношения Q на U, при произвольном фиксированном $y_0 \in V$, называется множество P_U с функцией принадлежности вида $\mu_{P_U}(x|y_0) = \mu_Q(x,y_0)$.

Аналогично определяется условная проекция на V при заданном $x_0 \in U$:

$$\mu_{P_V}(y|x_0) = \mu_Q(x_0,y).$$

Из данного определения видно, что проекции Q_U и Q_V не влияют на условные проекции P_U и P_V, соответственно. Дадим далее определение, которое учитывает их взаимосвязь.

Условные проекции второго типа определяются следующим образом:

$$\mu_{P_U}(x|y_0) = \frac{\mu_Q(x,y_0)}{\mu_{Q_V}(y_0)}, \quad \mu_{Q_V}(y_0) > 0,$$
$$\mu_{P_U}(y|x_0) = \frac{\mu_Q(x_0,y)}{\mu_{Q_U}(x_0)}, \quad \mu_{Q_U}(x_0) > 0.$$

Если $\mu_{Q_V}(y_0) = 0$ или $\mu_{Q_U}(x_0) = 0$, то полагаем, соответственно, что $\mu_{P_U}(x|y_0) = 0$ или $\mu_{P_U}(y|x_0) = 0$.

Заметим, что условные проекции первого типа содержатся в соответствующих проекциях второго типа.

Пусть U и V— базовые множества, Q — нечеткое отношение в $U \times V$ и Q_U и Q_V — его проекции на U и V, соответственно.

Нечеткие множества Q_U и Q_V называются независимыми, если

$$Q = Q_U \times Q_V.$$

Следовательно, они независимы по первому типу, если

$$\mu_Q(x, y) = \mu_{Q_U}(x) \wedge \mu_{Q_V}(y),$$

и независимы по второму типу, если

$$\mu_Q(x, y) = \mu_{Q_U}(x) \cdot \mu_{Q_V}(y).$$

В противном случае проекции Q_U и Q_V являются зависимыми (соответствующего типа).

Независимость второго типа можно интерпретировать следующим образом. Данные соотношения с учетом произвольности x_0 и u_0 перепишем в виде

$$\mu_Q(x, y) = \mu_{P_U}(x|y)\mu_{Q_V}(y),$$
$$\mu_Q(x, y) = \mu_{P_V}(y|x)\mu_{Q_U}(x).$$

14.4. Классы нечетких отношений

Все типы нечетких отношений в зависимости от свойств, которыми они обладают, могут быть разделены на три больших класса. В первый класс входят симметричные отношения, которые обычно характеризуют сходство или различие между объектами множества *X*. Второй класс образуют антисимметричные отношения; они задают на множестве *X* отношения упорядоченности, доминирования, подчиненности и т.п. Третий класс состоит из всех остальных отношений.

Отношения каждого класса, в свою очередь, могут быть разделены на подклассы в зависимости от выполнения условий рефлексивности и антирефлексивности.

Рефлексивные и симметричные отношения обычно называют отношениями сходства, толерантности, безразличия или неразличимости. В дальнейшем эти отношения будем называть отношениями сходства и обозначать буквой S. Антирефлексивные и симметричные отношения называются отношениями различия и обозначаются буквой D. Отношения сходства и отношения различия двойственны друг другу. Антисимметричные отношения, называемые предпорядками и обозначаемые буквой P, в зависимости от выполнения условия рефлексивности или антирефлексивности делятся на нестрогие и строгие порядки.

Из отношений третьего класса, обозначаемых буквой R, обычно выделяют лишь рефлексивные отношения, которые будут называться слабыми порядками.

На следующем уровне классификации из каждого класса отношений могут быть выделены отношения специального вида. Определяющим условием для них является условие транзитивности. Оно устанавливает связь между силой отношения для различных пар объектов из X. Эта связь может быть очень слабой, а может накладывать достаточно сильные ограничения на возможные значения силы отношения между объектами из X. Число отличающихся друг от друга условий транзитивности зависит от типа отношения, для которого они формулируются.

Условия транзитивности зависят от вида операций, с помощью которых они определяются. Наиболее общими условиями транзитивности являются условия, определяемые с помощью решеточных операций $\vee$ и $\wedge$ в L. Более частыми являются условия, определяемые с помощью дополнительных операций в Lи зависящих от конкретного вида L. В этих случаях указывается вид соответствующего множества L. Далее мы будем рассматривать нечеткие отношения, определенные на множестве L=[0, 1].

Отношения сходства и различия

Симметричное и рефлексивное нечеткое отношение сходства является аналогом обычного отношения толерантности. Нечеткие отношения сходства обычно задаются с помощью матриц сходства, связи между объектами, либо с помощью неориентированных взвешенных графов. Матрицы сходства могут быть получены как в результате измерения некоторого физического параметра, так и в результате опроса экспертов, которые для каждой пары объектов из *X* указывают их степень сходства в некоторой шкале сравнений.

Условие транзитивности для нечетких отношений сходства обычно формулируются в виде

$$S \supseteq S \circ S,$$

которое при различных определениях операции композиции приводит к различным условиям транзитивности. Наиболее распространенными условиями транзитивности являются следующие:

- ($\wedge$)-транзитивность

$$\forall x, y, z \in X \qquad \mu_S(x, z) \geqslant \mu_S(x, y) \wedge \mu_S(y, z).$$

- ($\cdot$)-транзитивность

$$\forall x, y, z \in X \qquad \mu_S(x, z) \geqslant \mu_S(x, y) \cdot \mu_S(y, z).$$

- (Δ)-транзитивность

$$\forall x, y, z \in X \qquad \mu_S(x, z) \geqslant \mu_S(x, y) + \mu_S(y, z) - 1.$$

Наиболее интересными свойствами обладает ($\wedge$)-транзитивное отношение сходства S, которое является обобщением обычного отношения эквивалентности. Это отношение называется **нечетким отношением эквивалентности** или **отношением подобия**. Нетрудно показать, что любой α-уровень нечеткого отношения эквивалентности является обычным отношением эквивалентности и, следовательно, определяет разбиение множества объектов *X* на непересекающиеся классы эквивалентности. Из вложенности α-уровней нечеткого отношения следует и вложенность разбиений множества *X*, соответствующих различным α-уровням, причем с уменьшением α происходит укрупнение классов эквивалентности α-уровней. Таким образом, нечеткое отношение эквивалентности задает иерархическую совокупность разбиений множества X на непересекающиеся классы эквивалентности.

Нечеткое отношение эквивалентности, в отличие от произвольного отношения сходства, определяет совокупность разбиений множества X на классы эквивалентности, благодаря тому, что условие транзитивности накладывает дополнительно сильные ограничения на возможные значения степени принадлежности. В случае, когда L=[0, 1], отношение сходства S транзитивно тогда и только тогда, если для любых $x, y, z \in X$ из трех чисел $\mu_S(x, y), \mu_S(y, z), \mu_S(x, z)$, по крайней мере, два числа равны друг другу и по величине не превышают третье. Таким образом, нечеткое отношение эквивалентности обладает многими полезными свойствами из-за своего довольно специфического вида.

Отношением различия D **называется симметричное и антирефлексивное нечеткое отношение**. Отношение различия двойственно отношению сходства. В случае, когда L=[0, 1], эти отношения могут быть получены друг из друга с помощью соотношения:

$$\mu_D(x, y) = 1 - \mu_S(x, y),$$

что можно записать в алгебраической форме как $D = \bar{S}$.

Ультраметрикой называется отношение различия, удовлетворяющее следующему неравенству:

$$\forall x, y, z \in X \qquad \mu_D(x, z) \leqslant \mu_D(x, y) \vee \mu_D(y, z).$$

Очевидно, что это условие двойственно условию ($\wedge$)-транзитивности. Понятие ультраметрики первоначально возникло и изучалось в кластерном анализе при исследовании свойств меры различия между объектами, определяющих естественное представление множества объектов в виде дерева разбиений.

Представление ультраметрики с помощью системы вложенных друг в друга отношений эквивалентности было также известно в кластерном анализе, однако лишь в рамках теории нечетких отношений это представление получило естественное объяснение.

Метрикой называется отношение различия, удовлетворяющее неравенству треугольника:

$$\forall x, y, z \in X \qquad \mu_D(x, z) \leqslant \mu_D(x, y) + \mu_D(y, z).$$

От метрики обычно требуют выполнения условия сильной антирефлексивности. Метрика, удовлетворяющая лишь простому условию антирефлексивности, называется **псевдометрикой**. Двойственным по отношению к метрике является (Δ)-транзитивное отношение сходства.

Двойственным условию ($\cdot$)-транзитивности является следующее условие:

$$\forall x, y, z \in X \qquad \mu_D(x, z) \leqslant \mu_D(x, y) + \mu_D(y, z) - \mu_D(x, y)\mu_D(y, z).$$

Задачи нечеткой классификации

Пусть имеется набор *X* фотографических портретов всех членов нескольких семей. Требуется разделить этот набор на группы так, чтобы в каждой оказались портреты членов только одной семьи. Пусть $\mathrm{f}_1(x, y)$— функция принадлежности нечеткого бинарного отношения сходства на заданном наборе фотографий. Для каждой пары фотографий *x* и *y* значение $\mathrm{f}_1(x, y)$ есть субъективная оценка человеком степени сходства *x* и *y*. Это нечеткое отношение можно рассматривать как своего рода "экспериментальные данные", отражающие понимание человеком понятия "сходства" в данной задаче. Следующий этап — использование этих "данных" для требующейся классификации фотографий.

Заметим, что нечеткое отношение $\mathrm{f}_1(x, y)$обладает естественными свойствами рефлексивности и симметричности. Оно называется одношаговым отношением, в том смысле, что описывает результаты лишь попарного сравнения портретов друг с другом. Для $f_1(x,y)$ вводится *n*-шаговое отношение $f_n(x,y)$ следующим образом:

$$f_n(x,y) = \sup_{x_1 \ldots x_{n-1} \in X} \min\{f_1(x,x_1), \ldots, f_1(x_{n-1},y)\}.$$

Это отношение является *n*-арной композицией исходного "экспериментального" отношения $f_1(x,y)$ и представляет собой в некотором смысле его уточнение. Нетрудно показать, что для любых $x, y \in X$ выполняется цепочка неравенств

$$0 \leqslant f_1(x,y) \leqslant f_2(x,y) \leqslant \ldots \leqslant f_n(x,y) \leqslant \ldots \leqslant 1,$$

из которой следует, в частности, что для любых $x, y \in X$ последовательность $\{f_k(x,y)\}$ имеет предел при $k \to \infty$. Таким образом, существует предельное отношение сходства, определяемое равенством

$$f(x,y) = \lim_{k \to \infty} f_k(x,y), \quad \text{для всех } x, y \in X.$$

Это предельное отношение является конечным результатом обработки результатов нечетких измерений $f_1(x,y)$ и следующим образом используется для классификации.

Для произвольного числа λ (0< λ <1) вводится обычное (не нечеткое) отношение R_λ:

$$R_\lambda(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad f(x,y) \geqslant \lambda.$$

Нетрудно показать, что для любого λ (0< λ <1) R_λ есть отношение эквивалентности в *X*, т.е. для любых $x, y \in X$ выполняются обычные аксиомы эквивалентности

(1) $R_\lambda(x,x)$ — **рефлексивность**,

(2) $R_\lambda(x,y) \Longrightarrow R_\lambda(y,x)$ — **симметричность**,

(3) $R_\lambda(x,y) \& R_\lambda(y,z) \Longrightarrow R_\lambda(x,z)$ — **транзитивность**.

Заметим, что (3) есть следствие того, что предельное нечеткое отношение $f(x,y)$ обладает свойством нечеткой транзитивности

$f(x,z) \geqslant \min\{f(x,y), f(y,z)\}$, для всех $x, y, z \in X$.

Окончательный этап алгоритма классификации — разбиение множества *X* на классы эквивалентности по полученному отношению R_λ.

Выбор величины порога λ в этом алгоритме осуществляется, исходя из условий начальной задачи. В приведенном выше примере с фотографиями этот выбор осуществляли следующим образом. Пусть имеется набор из 20 фотографий представителей 3 семей. Тогда величину λ выбирают так, чтобы в результате реализации алгоритма классификации получилось 3 класса эквивалентности по отношению R_λ.

Порядки и слабые порядки

Антисимметричное, транзитивное нечеткое отношение *P* называется отношением упорядочения или порядком. Мы будем рассматривать только строгие порядки, т.е. порядки, для которых выполняется свойство антирефлексивности. Свойства нестрогих (рефлексивных) порядков во многом совпадают со свойствами строгих порядков.

Различные **порядки** отличаются друг от друга требованиями, предъявляемыми к условию транзитивности. Слабейшее из этих требований — условие ацикличности отношения строгого порядка *P*, наиболее жесткие требования — условия линейной транзитивности и условие квазисерийности.

Если для отношения сходства условие транзитивности обычно записывают в виде $S \supseteq S \circ S$ и различные способы определения операции композиции позволяют задавать разные типы транзитивности, причем оказывается, что таких типов существует не так уж и много, то для **отношения порядка** условие транзитивности нечеткого отношения удобно записывать в виде, аналогичном условию транзитивности обычных порядков:

$P(x,y) > 0,\ P(y,z) > 0 \quad \Rightarrow \quad P(x,z) \geqslant P(x,y) * P(y,z)$, где *— некоторая операция в L. Оказывается, что из множества всех отношений порядка можно выделить значительное количество отличающихся друг от друга классов порядков специального вида, определяемых как способом задания операции *в L, так и способом записи условия транзитивности. Далее перечислим некоторые условия транзитивности, определяющие эти классы нечетких строгих порядков. Учитывая асимметричность отношения строгого порядка L, будем полагать $P(x,y) \geqslant 0$, если $P(y,x)=0$.

- **Ацикличность**:

$$\forall x_0, x_1, \ldots, x_n,$$
$$P(x_0,x_1)>0,\ P(x_1,x_2)>0, \ldots, P(x_{n-1},x_n)>0 \ \Rightarrow\ P(x_0,x_n) \geqslant 0.$$

- **Слабая транзитивность**:

$$\forall x,y,z \qquad P(x,y)>0,\ P(y,z)>0 \ \Rightarrow\ P(x,z)>0.$$

- **Отрицательная транзитивность**:

$$\forall x,y,z \qquad P(x,y) \geqslant 0,\ P(y,z) \geqslant 0 \ \Rightarrow\ P(x,z) \geqslant 0.$$

- ($\cdot$)- **транзитивность**:

$$\forall x,y,z \qquad P(x,y)>0,\ P(y,z)>0 \ \Rightarrow\ P(x,z) \geqslant P(x,y)\cdot P(y,z).$$

- ($\wedge$)- **транзитивность**:

$$\forall x,y,z \qquad P(x,y)>0,\ P(y,z)>0 \ \Rightarrow\ P(x,z) \geqslant P(x,y) \wedge P(y,z).$$

- ($1/2,+$)- **транзитивность**:

$$\forall x,y,z \qquad P(x,y)>0,\ P(y,z)>0 \ \Rightarrow\ P(x,z) \geqslant \frac{P(x,y)+P(y,z)}{2}.$$

- **Сильная транзитивность**:

$$\forall x, y, z \qquad P(x,y) \geqslant 0,\ P(y,z) \geqslant 0 \ \Rightarrow\ P(x,z) \geqslant P(x,y) \vee P(y,z).$$

- **Сверхсильная транзитивность**:

$$\forall x, y, z \qquad P(x,y) > 0,\ P(y,z) > 0 \ \Rightarrow\ P(x,z) > P(x,y) \vee P(y,z).$$

- **Метрическая транзитивность**:

$$\forall x, y, z \qquad P(x,y) \geqslant 0,\ P(y,z) \geqslant 0 \ \Rightarrow \\ \Rightarrow\ P(x,y) + P(y,z) \geqslant P(x,z) \geqslant P(x,y) \vee P(y,z).$$

- **Квазисерийность**:

$$\forall x, y, z \qquad P(x,y) \geqslant 0,\ P(y,z) \geqslant 0 \ \Rightarrow\ P(x,z) = \\ = P(x,y) \vee P(y,z).$$

- **Ультраметрическая транзитивность**:

$$\forall x, y, z \qquad P(x,y) > 0,\ P(y,z) > 0 \ \Rightarrow \\ \Rightarrow\ P(x,y) \vee P(y,z) \geqslant P(x,z) \geqslant P(x,y) \wedge P(y,z).$$

В общем случае предполагается, что рассмотренные условия транзитивности определены для L=[0, 1], хотя некоторые условия могут быть обобщены и на случай, когда L является решеткой.

Условия ацикличности, слабой транзитивности и отрицательной транзитивности нечеткого отношения P равносильны соответственно условиям ацикличности, транзитивности и отрицательной транзитивности обычного отношения P_0, определяемого следующим образом:

$$P_0(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } P(x,y) > 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Аналогичные свойства могут быть определены как α-свойства для различных α -уровней P_α отношения P.

В отличие от первых трех свойств, остальные свойства более специфичны для нечетких отношений и в большей мере учитывают согласованность силы отношения между элементами множества X. Для этих свойств также могут быть сформулированы α -свойства.

Частным случаем **сильного порядка** (порядка, удовлетворяющего условию сильной транзитивности) является **метрический порядок**. Для асимметричных отношений условие метрической транзитивности эквивалентно неравенству треугольника.

Условие квазисерийности определяет нечеткую квазисерию. Каждый α -уровень нечеткой квазисерии является обыкновенной квазисерией, т.е. удовлетворяет условиям

$$\begin{array}{lcl} P_\alpha(x,y), P_\alpha(y,z) & \Rightarrow & P_\alpha(x,z); \\ P_\alpha(x,y), \neg P_\alpha(z,y) & \Rightarrow & P_\alpha(x,z); \\ \neg P_\alpha(y,x), P_\alpha(y,z) & \Rightarrow & P_\alpha(x,z). \end{array}$$

Поскольку обычная квазисерия определяет разбиение множества X на упорядоченные классы эквивалентности, нечеткая квазисерия определяет разбиение множества X на упорядоченные классы эквивалентности на каждом α-уровне. Эти разбиения вложены друг в друга; таким образом, нечеткая квазисерия определяет иерархию разбиений множества X на упорядоченные классы эквивалентности.

Частным случаем метрических порядков, помимо квазисерии, является **линейный порядок**, определяемый условием линейной транзитивности. Линейный порядок при интерпретации $P(x,y)$ как силы предпочтения альтернативы x над альтернативой y задает на множестве альтернатив X некоторую аддитивную функцию полезности, которая может быть определена на X, например, с помощью соотношения

$$f(x) = \sup_{y \in X} P(x,y).$$

Ультраметрическая транзитивность построена по аналогии с метрической транзитивностью, однако для антисимметричных отношений она не эквивалентна ультраметрическому неравенству $P(x,z) \leqslant P(x,y) \vee P(y,z)$.

Между строгими порядками (асимметричными отношениями) и слабыми порядками (рефлексивными отношениями) существует тесная связь. Эти порядки могут быть получены друг из друга с помощью ряда преобразований.

Если на *L* задана операция дополнения, т.е. такая унарная операция $\neg$, что на *L* выполняются тождества

$$\neg(\neg\alpha) = \alpha, \quad \neg(\alpha \wedge \beta) = \neg\alpha \ \vee \ \neg\beta, \quad \neg(\alpha \vee \beta) = \\ = \neg\alpha \ \wedge \ \neg\beta.,$$

то на множестве нечетких отношений может быть задана операция дополнения следующим образом:

$$\mu_{\bar{R}}(x,y) = \neg\mu_R(x,y),$$

и на множестве нечетких отношений будут выполняться тождества

$$\bar{\bar{R}} = R, \qquad \overline{R \cup T} = \bar{R} \cap \bar{T}, \qquad \overline{R \cap T} = \bar{R} \cup \bar{T}.$$

Если на множестве нечетких отношений задана операция дополнения, то из отношения строгого порядка *P* могут быть получены:

- Отношение сходства $S = \overline{P \cup P^{-1}}$;
- Отношение различия $D = P \cup P^{-1}$;
- Отношение слабого порядка $R = \overline{P^{-1}}$.

Транзитивностью отношения *P* определяется тот или иной уровень транзитивности отношений *S* и *R*. В частности, если *P* является нечеткой квазисерией, то определяемое им отношение *S* является нечетким отношением эквивалентности, а отношение *R* будет нечетким квазипорядком.

Нечеткие отношения порядка могут быть получены многими способами и допускают различную интерпретацию. Они могут выражать либо значение какого-либо физического параметра, характеризующего интенсивность доминирования *x* над *y*, либо усредненную по множеству критериев или индивидуумов силу предпочтения между объектами. Они могут быть получены с помощью шкалы сравнений, которой эксперты измеряют интенсивность предпочтений при попарных сравнениях альтернатив, могут выражать уверенность, возможность, вероятность доминирования и т.п.

Задачи нечеткого упорядочения

Любую задачу принятия решений можно сформулировать как задачу отыскания максимального элемента в множестве альтернатив с заданным в нем отношением предпочтения. Однако во многих реальных ситуациях в множестве альтернатив можно определить лишь нечеткое отношение предпочтения, т.е. указать для каждой пары альтернатив *x* и *y* лишь степени, с которыми выполняются предпочтения $x \succ y$ и $y \succ x$. В таких случаях задача принятия решения становится неопределенной, поскольку неясно, что такое максимальный элемент для нечеткого отношения предпочтения. Для двух типов нечетких отношений можно предложить способы упорядочения элементов конечного множества, в котором задано нечеткое отношение. Способы эти сводятся к тому, что для каждого из рассматриваемых типов нечетких отношений строится некоторая функция (напоминающая функцию полезности), и элементы множества упорядочиваются по соответствующим им значениям этой функции.

Пусть $\mathrm{f(x,y)}$— функция принадлежности бинарного нечеткого отношения в множестве *X* (например, отношения нестрого предпочтения). Допустим, что рассматривается задача упорядочения элементов конечного множества $\mathrm{T}=\{\mathrm{x}_1, \ldots, x_n\}$. Упорядочение можно осуществлять по значениям следующей функции:

$$f(x_i|T) = \min_j \; f(x_i|x_j),$$

где $\mathrm{x}_j \in T$, а функция

$$f(x_i|x_j) = \frac{f(x_i,x_j)}{\max\{f(x_i,x_j),f(x_j,x_i)\}}.$$

Для вычисления значений функции $\mathrm{f}(\mathrm{x}_i|T)$удобно пользоваться следующим равенством:

$$f(x_i|T) = \min\left\{\frac{f(x_i,x_1)}{f(x_1,x_i)}, \ldots, \frac{f(x_i,x_n)}{f(x_n,x_i)}\right\}.$$

По отношению к этому упорядочению максимальным в множестве *T* является элемент x_i^0 такой, что

$$f(x_i^0|T) = \max_{x_k \in T} f(x_k|T).$$

Рассмотрим еще одну задачу упорядочения, иллюстрируемую следующим примером.

Требуется решить, кто из детей: старший сын x_1, младший сын x_2 или дочь x_3больше всего похож на отца z. Заданы "результаты измерений": x_1 и x_2 взятые отдельно, похожи на отца со степенями 0,8 и 0,5 соответственно; x_2 и x_3, взятые отдельно, похожи на отца со степенями 0,4 и 0,7; наконец, x_1 и x_3, взятые отдельно, похожи на отца со степенями 0,5 и 0,3.

Таким образом, в этой задаче, в отличие от предыдущей, имеется стандартный элемент (шаблон) для упорядочиваемого множества *T*, т.е. элемент, обладающий свойствами, общими для всех элементов этого множества. Иначе говоря, если $\mathrm{f(x,y)}$— нечеткое отношение в $\mathrm{X} \supset T$(например, отношение сходства), то

$$f(z, x_i) = 1, \qquad \text{для любого } x_i \in T.$$

При наличии стандартного элемента для каждой пары элементов *x* и *y* множества *T* задаются величины $\mathrm{f(x,\ y{:}\ z)}$, $\mathrm{f(y,\ x{:}\ z)}$, т.е. степени отношения (например, сходства) *x* и *y*, взятых отдельно, к z. Упорядочение элементов множества *T* с заданным таким способом нечетким отношением предлагается осуществлять в соответствии со значениями функции

$$f(x_j|T:z) = \min\left\{\frac{f(x_j,x_1:z)}{f(x_1,x_j:z)}, \dots, \frac{f(x_j,x_n:z)}{f(x_n,x_j:z)}\right\}.$$

Максимальным в смысле этого упорядочения является элемент x_i^0 такой, что

$$f(x_i^0|T:z) = \max_{x_k \in T} f(x_k|T:z).$$

Для задачи о сходстве отца и детей значения этой функции таковы:

$$f(x_1|T:z) = 1, \quad f(x_2|T:z) = 4/7, \quad f(x_3|T:z) = 3/5.$$

Отсюда вытекает, что наиболее похож на отца старший сын, затем следуют дочь и младший сын.

14.5. Разложение на максимальные подотношения подобия

Проблема разложения отношения сходства на максимальные подотношения подобия, когда отношение сходства (или соответствующее понятие расстояния) не позволяет получить классы подобия для расстояний, меньших или равных заданному, связана с проблемой получения обычных максимальных плоских подграфов соответствующего обычного графа. Для решения этой проблемы имеется несколько алгоритмов, из которых мы приведем два. Автором первого является Мальгранж.

Сначала рассмотрим этот алгоритм для более общего случая, а затем вернеся к частому случаю, который нас особенно интересует.

Алгоритм Мальгранжа. Получение максимальных полных подматриц или главных подматриц.

Описание этого алгоритма требует введения некоторых предварительных определений.

В матрице с бинарными элементами (0 или 1), т.е. в булевой матрице, задаюшей граф (а точнее, граф Бержа), *полной подматрицей* называется подматрица, все элементы которой равны 1.

Основной подматрицей (говорят также «максимальной полной подматрицей») называется полная подматрица, не содержащая никакой другой полной подматрицы. Например, на рис. 1 представлены семь основных подматриц матрицы [M].

$$
[M] = \begin{array}{c|cccccc|}
 & a & b & c & d & e & f \\
A & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
B & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
C & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
D & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & b & d & e & f \\
A & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|ccc|}
 & b & d & e \\
A & 1 & 1 & 1 \\
C & 1 & 1 & 1
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc|}
 & b & f \\
A & 1 & 1 \\
D & 1 & 1
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc|}
 & a & c \\
B & 1 & 1
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|ccc|}
 & b & c & f \\
D & 1 & 1 & 1
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|c|}
 & b \\
A & 1 \\
C & 1 \\
D & 1
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|c|}
 & c \\
B & 1 \\
D & 1
\end{array}
$$

Рис. 1.

Покрытием булевой матрицы называется множество полных подматриц, покрывающих все единичные значения этой матрицы.

Пусть L — множество строк и J — множество столбцов булевой матрицы. Каждая полная подматрица определяется упорядоченной парой обычных подмножеств (I_p, J_q), где $I_p \subset I$, $J_q \subset J$. Можно показать, что операции $\dot{\square}$ и $\underset{\bullet}{\mathrm{I}}$, которые двум полным подматрицам булевой матрицы [M], скажем,

$[M_1]$, определенной посредством (I_1, J_1),

$[M_2]$, определенной посредством (I_2, J_2),

ставят в соответствие две подматрицы:

$[M_1] \ \dot{\mathrm{U}} \ [M_2]= [M']$, определенной упорядоченной парой

$$(I_1 \ \mathrm{U} \, I_2, J_1 \ \mathrm{I} \ J_2),$$

$[M_1] \ \underset{\bullet}{\mathrm{I}} \ [M_2]= [M'']$, определенной упорядоченной парой

$$(I_1 \ \mathrm{I} \ I_2, J_1 \ \mathrm{U} \, J_2),$$

есть внутренние операции на множестве M полных подматриц матрицы [M].

Поочередное применение описанных ниже итераций необходимо выполнять до тех пор, пока не сформируются все полные матрицы покрытия (символ C ранее использовался для обозначения категорий, но мы считаем, что не может возникнуть какая-нибудь путаница между этими двумя понятиями, хотя они и обозначены одной и той же буквой).

$$C= \{[M_1], [M_2], ... [M_p]\},$$

позволяет получить основные подматрицы матрицы [M] за конечное число итераций.

Первая итерация. Вычеркиваем все матрицы [M_k], которые содержатся в других подматрицах покрытия C.

Вторая итерация. Добавляем к C подматрицы, которые получены применениям определенных выше операций $\dot{\square}$ и $\underset{\bullet}{\mathrm{I}}$ ко всем парам матриц [M_k] и [M_t] , которые входят в покрытие (кроме полных подматриц, которые уже содержатся в подматрицах покрытия C, что исключает бесконечный процесс).

Пример. Найдем основные подматрицы булевой матрицы на рис. 1.

Этап 1. Выберем покрытие

$$[M_1] = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} b & d & e & f \end{matrix} \\ A & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad [M_2] = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} a & c \end{matrix} \\ B & \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad [M_3] = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} b & d & e \end{matrix} \\ C & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad [M_4] = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} b & c & f \end{matrix} \\ D & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Этап 2 (вторая итерация). Подсчитаем объединения и пересечения:

$$I_1 \cup I_2 = \{A, B\},\ J_1 \cap J_2 = \varnothing,$$

$$I_1 \cup I_3 = \{A, C\},\ J_1 \cap J_3 = \{b, d, e\},$$

откуда получим новую подматрицу

$$[M_5] = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} b & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$I_1 \cup I_4 = \{A, D\},\ J_1 \cap J_4 = \{b, f\}$$

и новую матрицу

$$[M_6] = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} b & f \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ D \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$I_2 \cup I_3 = \{B, C\},\ J_2 \cap J_3 = \varnothing,$$

$$I_2 \cup I_4 = \{B, D\},\ J_2 \cap J_4 = \{c\},$$

что дает новую матрицу

$$[M_7] = \begin{array}{c|c} & c \\ \begin{matrix} B \\ D \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array};$$

$$I_3 \cup I_4 = \{C, D\},\ J_3 \cap J_4 = \{b\},$$

что дает новую матрицу

$$[M_8]=\begin{array}{cc} & b \\ C & \boxed{1} \\ D & \boxed{1} \end{array}\quad .$$

Так как все пересечения $I_i \cap I_j$, $\forall\, i,j$ пустые, то бесполезно подсчитывать $J_i \cup J_j$.

Этап 3 (первая итерация). Выпишем новое покрытие

$$C' = \{ [M_1], [M_2], [M_4], [M_5], [M_6], [M_7], [M_8]\}.$$

Матрица $[M_3]$ содержится в $[M_5]$ и потому не включена в покрытие С.

Этап 4 (вторая итерация).

С дидактической целью приводим все детали расчетов, не исключая вычислений даже тех матриц, которые уже были получены или оказываются пустыми:

$I_1 \cup I_5 = \{A, C\}$, $J_1 \cap J_5 = \{b, d, e\}$, дает $[M_5]$,

$I_1 \cup I_6 = \{A, D\}$, $J_1 \cap J_6 = \{b, f\}$, дает $[M_6]$,

$I_1 \cup I_7 = \{A, B, D\}$, $J_1 \cap J_7 = \varnothing$,

$I_1 \cup I_8 = \{A, C, D\}$, $J_1 \cap J_8 = \{b\}$.

Отсюда получаем новую подматрицу

$$[M_9]=\begin{array}{cc} & b \\ A & \boxed{1} \\ C & \boxed{1} \\ D & \boxed{1} \end{array}\quad ;$$

$I_2 \cup I_5 = \{A, B, C\}$, $J_2 \cap J_5 = \varnothing$,

$I_2 \cup I_6 = \{A, B, D\}$, $J_2 \cap J_6 = \varnothing$,

$I_2 \cup I_7 = \{B, D\}$, $J_2 \cap J_7 = \{c\}$, дает $[M_7]$;

$I_2 \cup I_8 = \{B,C,D\}$, $J_2 \cap J_8 = \varnothing$,

$I_4 \cup I_5 = \{A, C, D\}$, $J_4 \cap J_5 = \{b\}$. Дает $[M_9]$;

$I_4 \cup I_6 = \{A, D\}$, $J_4 \cap J_6 = \{b, f\}$, дает $[M_6]$;

$I_4 \cup I_7 = \{B, D\}$, $J_4 \cap J_7 = \{c\}$, дает $[M_7]$;

$I_4 \cup I_8 = \{C, D\}$, $J_4 \cap J_8 = \{b\}$, содержится в $[M_9]$;

$I_5 \cup I_6 = \{A, C, D\}$, $J_5 \cap J_6 = \{b\}$, дает $[M_9]$;

$I_5 \cup I_7 = \{A, B, C, D\}$, $J_5 \cap J_7 = \varnothing$.

$I_5 \cup I_8 = \{A, C, D\}$, $J_5 \cap J_8 = \{b\}$, дает $[M_9]$;

$I_6 \cup I_7 = \{A, B, D\}$, $J_6 \cap J_7 = \varnothing$,

$I_6 \cup I_8 = \{A, C, D\}$, $J_6 \cap J_8 = \{b\}$, дает **[**M_9**];**

$I_7 \cup I_8 = \{B, C, D\}$, $J_7 \cap J_8 = \varnothing$,

$I_1 \cap I_5 = \{A\}$, $J_1 \cup J_5 = \{b, d, e, f\}$, дает $[M_1]$;

$I_1 \cap I_6 = \{A\}$, $J_1 \cup J_6 = \{b, d, e, f\}$, дает $[M_1]$;

$I_1 \cap I_7 = \varnothing$, $J_1 \cap J_8 = \varnothing$,

$I_2 \cap I_5 = \varnothing$, $I_2 \cap I_6 = \varnothing$,

$I_2 \cap I_7 = \{B\}$, $J_2 \cup J_7 = \{a, c\}$, дает [$M_2$1;

$I_2 \cap I_8 = \varnothing$, $I_4 \cap I_5 = \varnothing$

$I_4 \cap I_6 = \{D\}$, $J_4 \cup J_6 = \{b, c, f\}$, дает $[M_4]$;

$I_4 \cap I_7 = \{D\}$, $J_4 \cup J_7 = \{b, c, f\}$, дает $[M_4]$;

$I_4 \cap I_8 = \{D\}$, $J_4 \cup J_8 = \{b, c, f\}$, дает $[M_4]$;

$I_5 \cap I_6 = \{A\}$, $J_5 \cup J_6 = \{b, d, e, f\}$, дает $[M_4]$;

$I_5 \cap I_7 = \varnothing$.

$I_5 \cap I_8 = \{C\}$, $J_5 \cup J_8 = \{b, d, e\}$, содержится в $[M_5]$;

$I_6 \cap I_7 = \{D\}$, $J_6 \cup J_7 = \{b, d, f\}$, дает $[M_4]$;

$I_6 \cap I_8 = \{D\}$. $J_6 \cup J_8 = \{b, f\}$, содержится в $[M_4]$;

$I_7 \cap I_8 = \{D\}$, $J_7 \cup J_8 = \{b, c\}$, содержится в $[M_4]$.

Этап 5 (первая итерация). Выпишем новое покрытие

$$C'' = \{[M_1], [M_2], [M_4], [M_5], [M_6], [M_7], [M_9]\},$$

матрица $[M_8]$ исключена, так как она содержится в $[M_9]$.

Этап 6 (вторая итерация).

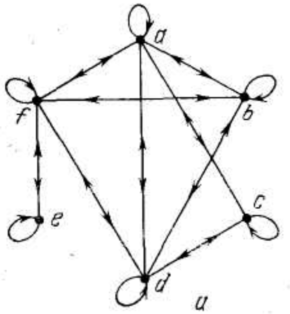
Из проведенных расчетов пересечений и объединений видно, что невозможно найти полную подматрицу, которая не совпадает с какой-нибудь матрицей из предыдущего покрытия или не содержится в ней. Таким образом, мы получили следующее множество основных подматриц покрытия:

$$[M_1] = \begin{array}{c|cccc|} & b & d & e & f \\ \hline A & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \quad [M_2] = \begin{array}{c|cc|} & a & c \\ \hline B & 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \quad [M_4] = \begin{array}{c|ccc|} & b & c & f \\ \hline D & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \quad [M_5] = \begin{array}{c|ccc|} & b & d & e \\ \hline A & 1 & 1 & 1 \\ C & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array},$$

$$[M_6] = \begin{array}{c|cc|} & b & f \\ \hline A & 1 & 1 \\ D & 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \quad [M_7] = \begin{array}{c|c|} & c \\ \hline B & 1 \\ D & 1 \\ \hline \end{array}, \quad [M_9] = \begin{array}{c|c|} & b \\ \hline A & 1 \\ C & 1 \\ D & 1 \\ \hline \end{array}.$$

Поиски максимального подотношения подобия. Перейдем к приложению алгоритма Мальгранжа для поисков максимальных подотношений подобия.

В качестве примера рассмотрим обычный симметричный и рефлексивный граф, который изображен на рис. 2, *а;* мы хотим найти в соответствующей булевой матрице (рис. 2, *б)* основные подматрицы, которые составят ее покрытие. Те из основных подматриц, которые имеют квадратную форму, и дадут искомые подотношения.



а

	a	b	c	d	e	f	
a	1	1	1	1	0	1	5
b	1	1	0	1	0	1	4
c	1	0	1	1	0	0	3
d	1	1	1	1	0	1	5
e	0	0	0	0	1	1	2
f	1	1	0	1	1	1	5

б

	a	d	f	b	c	e	
a	1	1	1	1	1	0	5
d	1	1	1	1	1	0	5
f	1	1	1	1	0	1	5
b	1	1	1	1	0	0	4
c	1	1	0	0	1	0	3
e	0	0	1	0	0	1	2

в

Рис. 2.

Чтобы начать с полных подматриц, которые априори можно рассматривать как довольно близкие к искомым («близкие» с эвристических, не требующего строгого обоснования, соображений), сначала представим строки и столбцы матрицы так, чтобы строки — сверху вниз, а столбцы — справа налево были упорядочены по числу единиц, которые содержатся в них. Это даст матрицу на рис. 2, *в*.

Этап 1. Выделим следующее покрытие:

$$[M_1]=\begin{array}{c|cccc|} & a & d & f & b \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ d & 1 & 1 & 1 & 1 \\ f & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}, \quad [M_2]=\begin{array}{c|ccc|} & a & d & c \\ c & 1 & 1 & 1 \end{array}, \quad [M_3]=\begin{array}{c|cc|} & f & e \\ e & 1 & 1 \end{array}$$

$$[M_4]=\begin{array}{c|c|} & c \\ a & 1 \\ d & 1 \\ c & 1 \end{array}, \quad [M_5]=\begin{array}{c|c|} & e \\ f & 1 \\ e & 1 \end{array}$$

Этап 2 (вторая итерация)

I_1 □ I_2= {*a*, *d*, *f*, *b*, *c*}, J_1 I J_2 = {*a*, *d*),

откуда получаем новую подматрицу

$$[M_6] = \begin{array}{c|cc|} & a & d \\ \hline a & 1 & 1 \\ d & 1 & 1 \\ f & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad ;$$

$I_1 \square I_2 = \varnothing$,

$I_1 \cup I_3 = \{a, d, f, b, e\}$, $J_1 \cap J_3 = \{f\}$,

откуда получаем новую подматрицу

$$[M_7] = \begin{array}{c|c|} & f \\ \hline a & 1 \\ d & 1 \\ f & 1 \\ b & 1 \\ e & 1 \\ \hline \end{array} \quad ;$$

$I_1 \cap I_3 = \varnothing$,

$I_1 \cup I_4 = \{a, d, f, b, c\}$, $J_1 \cap J_4 = \varnothing$,

$I_1 \cap I_4 = \{a, d\}$, $J_1 \cup J_4 = \{a, d, f, b, c\}$.

Получаем новую подматрицу

$$[M_8] = \begin{array}{c|ccccc|} & a & d & f & b & c \\ \hline a & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ d & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad ;$$

$I_1 \cup I_5 = \{a, d, f, b, e\}$, $J_1 \cap J_5 = \varnothing$.

$I_1 \cap I_5 = \{f\}$, $J_1 \cup J_5 = \{a, d, f, b, e)$,

откуда получаем новую подматрицу

$$[M_9] = \begin{array}{c|ccccc|} & a & d & f & b & e \\ \hline f & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad ;$$

$I_2 \cup I_3 = \{c, e\}$, $J_2 \cap J_3 = \varnothing$,

$I_2 \cap I_3 = \varnothing$,

$I_2 \cup I_4 = \{a, d, c\}$, $J_2 \cap J_4 = \{c\}$, дает $[M_4]$;

$I_2 \cap I_4 == \{c\}$, $J_2 \cup J_4 = \{a, d, c\}$, дает $[M_2]$;

$I_2 \cup I_5 = \{c, f, e\}$, $J_2 \cap J_5 = \varnothing$;

$I_2 \cap I_5 = \varnothing$;

$I_3 \cup I_4 = \{a, d, c, e\}$, $J_3 \cap J_4 = \varnothing$;

$I_3 \cap I_4 = \varnothing$;

$I_3 \cup I_5 = \{f, e\}$, $J_3 \cap J_5 = \{e\}$, дает $[M_5]$;

$I_3 \ \square\ I_5 = \{e\} \quad J_3 \ \mathrm{U} \ J_5 = \{f, e\}$, дает $[M_3]$;

$I_4 \ \mathrm{U} \ I_5 = \{a, d, c, e, f\}, \quad J_4 \ \mathrm{I} \ J_5 = \varnothing$;

$I_4 \ \mathrm{I} \ I_5 = \varnothing$

Этап 3 (вторая итерация). Выпишем новое покрытие.

$C' = \{[M_1], [M_2], [M_3], [M_4], [M_5], [M_6], [M_7], [M_8], [M_9]\}$.

Этап 4 (первая итерация).

$I_1 \mathrm{U} \ I_6 = \{a, d, f, b, c\}, \quad J_1 \ \mathrm{I} \ J_6 = \{a, d\}$ дает $[M_6]$,

$I_2 \ \mathrm{I} \ I_6 = \{a, d, f, b\}, \quad J_1 \ \mathrm{U} \ J_6 = \{a, d, f, b\}$ дает $[M_1]$,

$I_1 \ \mathrm{U} \ I_7 = \{a, d, f, b, e\}, \quad J_1 \ \mathrm{I} \ J_7 = \{f\}$ дает $[M_7]$,

$I_1 \mathrm{I} \ I_7 = \{a, d, f, b\}, \quad J_1 \ \mathrm{U} \ J_7 = \{a, d, f, b\}$ дает $[M_1]$,

$I_1 \ \mathrm{U} \ I_8 = \{a, d, f, b\}, \quad J_1 \ \mathrm{I} \ J_8 = \{a, d, f, b\}$ дает $[M_1]$,

$I_1 \ \mathrm{I} \ _8 = \{a, d\}, \quad J_1 \mathrm{U} \ J_8 = \{a, d, f, b, c\}$ дает $[M_8]$,

$I_1 \mathrm{U} \ I_9 = \{a, d, f, b\}, \quad J_1 \ \mathrm{I} \ J_9 = \{a, d, f, b\}$ дает $[M_1]$,

$I_1 \mathrm{I} \ I_9 = \{f\}. \quad J_1 \ \mathrm{U} \ J_9 = \{a, d, f, b, e\}$ дает $[M_9]$,

$I_2 \ \mathrm{U} \ I_6 = \{a, d, f, b, c\}, \quad J_2 \ \mathrm{I} \ J_6 = \{a, d\}$ дает $[M_6]$,

$I_2 \ \mathrm{I} \ I_6 = \{c\}, \quad J_2 \ \mathrm{U} \ J_6 = \{a, d, c\}$ дает $[M_2]$,

$I_2 \ \mathrm{U} \ I_7 = \{a, d, b, e, c\}, \quad J_2 \ \mathrm{I} \ J_7 = \varnothing$,

$I_2 \ \mathrm{I} \ I_7 = \varnothing$,

$I_2 \ \mathrm{U} \ I_8 = \{a, d, c\}, \quad J_2 \ \mathrm{I} \ J_s = \{a, d, c\}$,

дает новую подматрицу

$$[M_{10}] = \begin{array}{c|ccc|} & a & d & c \\ \hline a & 1 & 1 & 1 \\ d & 1 & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad ;$$

$I_2 \ \mathrm{I} \ I_8 = \varnothing$,

$I_2 \ \mathrm{U} I_9 = \{c, f\}, \quad J_2 \ \mathrm{I} \ J_9 = \{a, d\}$ содержится в $[M]$,

$I_2 \ \mathrm{I} \ I_9 = \varnothing$,

$I_3 \ \mathrm{U} I_6 = \{a, d, f, b, c, e\}, \quad J_3 \ \mathrm{I} \ J_6 = \varnothing$,

$I_3 \ \mathrm{I} \ I_6 = \varnothing$,

$I_3 \ \mathrm{U} I_7 = \{a, d, f, b, e\}, \quad J_3 \ \mathrm{I} \ J_7 = \{f\}$ дает $[M_7]$,

$I_3 \ \mathrm{I} \ I_7 = \{e\}, \quad J_3 \ \mathrm{U} \ J_7 = \{f, e\}$ дает $[M_3]$,

$I_3 \mathrm{U} \ I_8 = \{a, d, e\}, \quad J_3 \ \mathrm{I} \ J_8 = \{f\}$ содержится в $[M_7]$,

$I_3 \ \mathrm{I} \ I_8 = \varnothing$,

$I_3 \ \mathrm{U} I_9 = \{f, e\}, \quad J_3 \ \mathrm{I} \ J_9 = \{f, e\}$

дает новую подматрицу

$$[M_{11}] = \begin{array}{c|cc} & f & e \\ \hline f & 1 & 1 \\ e & 1 & 1 \end{array} \quad ;$$

I_3 □ $I_9 = \varnothing$,

I_4 U $I_6 = \{a, d, f, b, c\}$, J_4 I $J_6 = \varnothing$,

I_4 I $I_6 = \{a, d, c\}$, J_4 U $J_6 = \{a, d, c)$ дает $[M_{10}]$,

I_4 U $I_7 = \{a, d, f, b, c, e\}$, J_4 I $J_7 = \varnothing$,

I_4 I $I_7 = \{a, d\}$, J_4 U $J_7 = \{f, c\}$ содержится $[M_8]$,

I_4 U $I_8 = \{a, d, c\}$, J_4 I $J_8 = \{c\}$ дает $[M_4]$,

I_4 I $I_8 = \{a, d\}$, J_4 U $J_8 = \{a, d, f, b, c\}$ дает $[M_8]$,

I_4 U $I_9 = \{a, d, c, f\}$, J_4 I $J_9 = \varnothing$,

I_4 I $I_9 = \varnothing$,

I_5 U $I_6 = \{a, d, f, b, c, e\}$, J_5 I $J_6 = \varnothing$

I_5 I $I_6 = \{f\}$, J_4 U $J_8 = \{a, d, e\}$ содержится в $[M_9]$,

I_5 U $I_7 = \{a, d, f, b, e\}$, J_5 I $J_7 = \varnothing$,

I_5 I $I_7 = \{f, e\}$, J_5 U $J_7 = \{f, e\}$ дает $[M_{11}]$,

I_5 U $I_8 = \{a, d, f, e\}$, J_5 I $J_8 = \varnothing$,

I_5 I $I_8 = \varnothing$,

I_5 U $I_9 = \{f, e\}$, J_5 I $J_9 = \{e\}$ дает $[M_5]$,

1_5 I $I_9 = \{f\}$, J_5 U $J_9 = \{a, d, f, b, e\}$ дает $[M_9]$,

I_6 U $I_7 = \{a. d, f b, c, e\}$, J_7 I $J_7 = \varnothing$,

I_6 I $I_7 = \{a, d, f, b\}$, J_6 U $J_7 = \{a, d, f\}$ содержится в $[M_1]$,

I_6 U $I_8 = \{a, d, f, b, c\}$, J_6 I $J_8 = \{a, d\}$ дает $[M_6]$,

I_6 I $I_8 = \{a, d\}$, J_6 U $J_8 = \{a, d, f, b, c\}$ дает $[M_8]$,

I_6 U $I_9 = \{a. d, f, b, c\}$, J_6 I $J_9 = \{a. d\}$ дает $[M_6]$,

I_6 I $I_9 = \{f\}$, J_6 U $J_9 = \{a, d, f, b, e\}$ дает $[M_9]$,

1_7 U $I_8 = \{a, d, f, b, e\}$, J_7 I $J_8 = \{f\}$ дает $[M_7]$,

I_7 I $I_8 = \{ a, d\}$, J_7 U $J_8 = \{a, d, f, b, c\}$ дает $[M_8]$,

I_7 U $I_9 = \{a, d, f, b, e\}$, J_7 I $J_9 = \{f\}$ дает $[M_7]$,

I_8 I $I_9 = \{f\}$, J_7 U $J_9 = \{a, d, f, b, e\}$ дает $[M_9]$,

I_8 U $I_9 = \{a, d, f\}$, J_8 I $J_9 = \{a, d, f, b\}$ содержится в $[M_1]$,

I_8 I $I_9 = \varnothing$.

Этап 5 (вторая итерация). Выпишем новое покрытие

$$C'' = \{[M_1], [M_6], [M_7], [M_8], [M_9], [M_{10}], [M_{11}]\}. \qquad (*)$$

Мы исключили подматрицы $[M_2]$, $[M_3]$, $[M_4]$, $[M_5]$ как такие, что содержатся в других подматрицах покрытия (*).

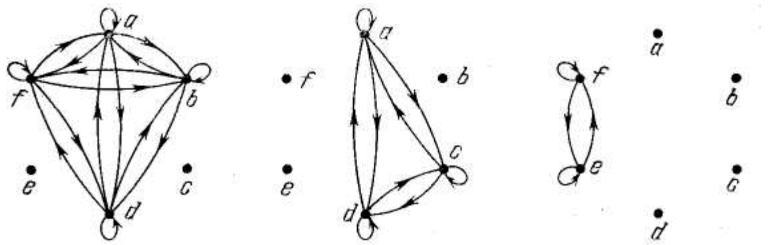
Этап 6 (первая итерация). Не тяжело удостовериться в том, что новых матриц получить больше нельзя. Итак, покрытие C" (*) состоит из следующих основных матриц:

$$[M_1] = \begin{array}{c|cccc|} & a & d & f & b \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ d & 1 & 1 & 1 & 1 \\ f & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}, \quad [M_6] = \begin{array}{c|cc|} & a & d \\ a & 1 & 1 \\ d & 1 & 1 \\ f & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{array}, \quad [M_7] = \begin{array}{c|c|} & f \\ a & 1 \\ d & 1 \\ f & 1 \\ b & 1 \\ e & 1 \end{array},$$

$$[M_8] = \begin{array}{c|ccccc|} & a & d & f & b & c \\ d & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}, \quad [M_9] = \begin{array}{c|ccccc|} & a & d & f & b & e \\ f & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array},$$

$$[M_{10}] = \begin{array}{c|ccc|} & a & d & c \\ a & 1 & 1 & 1 \\ d & 1 & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 & 1 \end{array}, \quad [M_{11}] = \begin{array}{c|cc|} & f & e \\ f & 1 & 1 \\ e & 1 & 1 \end{array}, \qquad (**)$$

В этом покрытии содержатся три квадратные подматрицы $[M_1]$, $[M_{10}]$ и $[M_{11}]$; они дают три непересекающихся подотношений. На рис. 3 представлены эти три подотношения, ни одно из которых не содержится в другом.



	a	b	c	d	e	f
a	1	1		1		1
b	1	1		1		1
c						
d	1	1		1		1
e						
f	1	1		1		1

	a	b	c	d	e	f
a	1		1	1		
b						
c	1		1	1		
d	1		1	1		
e						
f						

	a	b	c	d	e	f
a						
b						
c						
d						
e					1	1
f					1	1

Рис. 3.

Заметим, что выявление матриц $[M_6]=[M_8]'$ и $[M_7]=[M_9]'$ небесполезно, ими обеспечивается «стыковка» между подотношениями.

Второй алгоритм - алгоритм Пишá.

Этот алгоритм пригоден исключительно для симметрических квадратных матриц, которые представляют значительный интерес.

Рассмотрим верхнюю треугольную матрицу, такую, например, как на рис. 4.

	a	b	c	d	e	f
a		1	1	1	0	1
b			0	1	0	1
c				1	0	0
d					0	1
e						1
f						

Рис. 4.

Поочередно в каждом строке матрицы выделим нули. Рассматривая элементы матрицы как булевы переменные, свяжем булевым знаком суммирования Σ индекс строки и индексы столбцов, в которых находятся нулевые элементы этой строки, и полученные суммы объединим знаком булева произведения •, причем, если в строке нет нулей, будем считать, что сумма равна 1.

Упростим полученное в результате произведение, (используя для этого следующие правила упрощения булевых выражений: $x+x=x$, $x•x=x$, $x+xy=x$) приведя его к максимальной форме. Для каждого слагаемого в этой форме возьмем его дополнение. Таким образом получим максимальные подотношения, которые устанавливают покрытие.

Рассмотрим пример на рис. 2, для которого верхнетреугольная матрица представлена на рис. 4.

Для строки

a получим $a + e$,

b «*b +ce,*

c «*c + ef,*

d « *d+ e,*

e « 1,

f « 1.

Теперь имеем

$S=(a \& e)\cdot(b \& ce)\cdot (c \& ef)\cdot (d \& e)\cdot 1\cdot 1=(a \& e)\cdot (b \& ce)\cdot (c \& ef)\cdot(d \& e) =$

$= (ab \& ace \& be \& ce) (c \& ef)(d \& e) =$

$= (abc \& abef \& ce \& cef \& bce \& bef) (d \& e) = (abc \& bef \& ce) (d \& e) =$

$= abcd \& abce \& bdef \& bef \& ced \& ce = abcd \& bef \& ce.$

Подсчитаем сумму S', в которой слагаемыми будут дополнения соответствующих слагаемых суммы S. Получим

$$S' = ef \& acd \& abdf.$$

Это дает нам три подмножества

$$\{e, f\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d, f\},$$

которые определяют основные подматрицы, составляющие покрытие (см. $[M_{11}]$, $[M_{10}]$ и $[M_{11}]$ в (**)).

Замечание. Если нас интересуют элементы, общие для попарно не содержащихся друг в друге отношений, то их можно получить непосредственно, подсчитав пересечения

$$\{e, f\} \ \mathrm{I} \ \{a, c, d\} = \varnothing ,$$

$$\{a, c, d\} \ \mathrm{I} \ \{a, b, d, f\} = \{a, d\},$$

$$\{a, b, d, f\} \ \mathrm{I} \ \{e, f\} = \{f\}.$$

Поиск максимальных подотношений подобия в нечетком передпорядке $\tilde{R}$. Любой с двух предыдущих алгоритмов можно использовать для определения этих подотношений. Достаточно рассмотреть соответствующую булеву матрицу $\tilde{R}$, такую, что

$\mu_{\tilde{R}}$ *(x, y)* = $\mu_{\tilde{R}}$ *(y, x)*=1, если $\mu_{\tilde{R}}$ *(x, y)* = $\mu_{\tilde{R}}$ *(y, x)* > 0,

если $\mu_{\tilde{R}}(x, y) \neq \mu_{\tilde{R}}(y, x)$

или $\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \mu_{\tilde{R}}(y, x) = 0$, (***)

и

$\mu_{\tilde{R}}(x, y) = 0$ и $\mu_{\tilde{R}}(y, x) = 0$. (****)

Пример. Рассмотрим еще раз пример, приведенный на рис. 1.87, который мы повторили на рис. 5.

$\tilde{R}$	A	B	C	D
A	1	0,2	0,2	0,5
B	0,2	1	0,2	0,2
C	0,5	0,2	1	0,5
D	0,2	0,2	0,2	1

$\tilde{R}$	A	B	C	D
A	1	1	0	0
B	1	1	1	1
C	0	1	1	0
D	0	1	0	1

Рис. 5.

Здесь выписаны булева матрица, соответствующая отношению $\tilde{R}$, и полученная в соответствии с (***) и (****) матрица $\tilde{R}$.

Используем второй метод. Имеем

$$S = (a \vee cd)(c \vee d) = ac \vee ad \vee cd \vee cd = ac \vee ad \vee cd,$$

$$S' = bd \vee bc \vee ab.$$

Таким образом, в этом предпорядке имеется три максимальных подотношения подобия, определенных на обычных подмножествах:

$\{b, d\}$, $\{b, c\}$ и $\{a, b\}$.

Эти подотношения приведены на рис. 1.87.

14.6. Индивидуальные тестовые задачи

1. Используя понятие порядковой функции соответствующего обычного графа, представьте каждое следующее нечеткое отношение порядков в треугольной форме.

$\tilde{R}_1$	A	B	C	D	E
A	1	0,7	0,8	0,5	0,5
B	0	1	0,3	0	0,2
C	0	0,7	1	0	0,2
D	0,6	1	0,9	1	0,6
E	0	0	0	0	1

$\tilde{R}_2$	A	B	C	D	E	F
A	1	0,7	0,2	0	0,8	1
B	0	1	0,2	0	0	0
C	0	0,5	1	0	0	0
D	0	0,1	0,1	1	0,1	0,1
E	0	0	0	0	1	0,8
F	0	0	0	0	0	1

2. Для каждого из следующих рефлексивных отношений подсчитайте (max— min)-транзитивное замыкание. Таким образом получите отношение предпорядка.

а) Определите множество максимальных подотношений подобия.

б) Будут ли эти подотношения непересекающимися?

в) Можно ли отношение $\tilde{R}_1$ и (или) $\tilde{R}_2$ представить в блочно-треугольной форме?

$\tilde{R}_1$	A	B	C	D	E	F
A	1	0,5	0,4	0,6	0	0
B	0,5	1	0	0,6	0,2	0,7
C	0,5	0,3	1	0,1	0,5	0
D	0,2	0,6	0	1	0	0,8
E	0	0,2	0	0	1	0,1
F	0	0,7	0,2	0,8	0	1

$\tilde{R}_2$	A	B	C	D	E	F	G	H
A	1	0,2	0,3	0,8	0,6	0,7	0	0
B	0,1	1	0	0,4	0,5	0,7	0	0
C	0,4	0,5	1	0,3	0	1	0,9	1
D	0,3	0,4	0,2	1	0,5	0	0	0
E	0,6	0,5	0	0,5	1	0,8	0	0
F	0,7	0,7	1	1	0	1	0,8	0
G	0,3	0	0,8	0	0,9	0	1	0,8
H	0	0	0	0,9	0	0	0,8	1

3. Рассмотрите определенные ниже отношения сходства; найдите:

1) соответствующие отношения подобия посредством вычисления их транзитивных замыканий;

2) соответствующие отношения различия;

3) классы пар (X, Y), для которых расстояния d (X,Y) равны 0; 0,1; 0,2;..., 0,9; 1.

$\underset{\sim}{R}_1$	A	B	C	D	E	F	G
A	1	0	0,1	0	0,8	1	0,6
B	0	1	0	1	0	0,8	1
C	0,1	0	1	0,7	0,6	0	0,1
D	0	1	0,7	1	0	0,9	0
E	0,8	0	0,6	0	1	0,7	0,5
F	1	0,8	0	0,9	0,7	1	0,4
G	0,6	1	0,1	0	0,5	0,4	1

$\underset{\sim}{R}_2$	A	B	C	D	E	F	G
A	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4
B	0,9	1	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3
C	0,8	0,7	1	0,5	0,4	0,3	0,2
D	0,7	0,6	0,5	1	0,3	0,2	0,1
E	0,6	0,5	0,4	0,3	1	0,1	0
F	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	1	0
G	0,4	0,3	0,2	0,1	0	0	1

4. В упражнении 3 мы получили два отношения подобия и отсюда два отношения различия:

1) для каждого отношения подобия выпишите разложение по формуле (1.107). Результаты должны быть представлены в такой же форме, как на рис. 1.80;

2) для каждого из соответствующих отношений различия найдите графы (min — max)-расстояний по способу, который указано на рис. 1.88.

5. Пусть даны следующие семь нечетких сообщений:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
$\underset{\sim}{A}_1 =$	0,1	0,3	0,2	0	0,7	0,6	0,2	1	,
$\underset{\sim}{A}_2 =$	0,1	0	0	0	0,7	0,6	0,8	0,9	,
$\underset{\sim}{A}_3 =$	1	0	0,3	0	0,2	0	0	0,6	,
$\underset{\sim}{A}_4 =$	1	0,1	0,2	0,6	0,6	0	0	0,6	,
$\underset{\sim}{A}_5 =$	0,3	0,5	1	0,1	1	0,2	0,4	1	,
$\underset{\sim}{A}_6 =$	0,2	0,5	0	0,6	0,1	0	0,4	0,4	,
$\underset{\sim}{A}_7 =$	0,1	0,2	0,2	1	0,4	0,1	0,3	0,4	.

Сделайте выборку из этих сообщений, используя их относительные обобщенные Хемминговы расстояния:

1) применяя (min — max)-транзитивное замыкание отношения несходства;

2) не применяя это транзитивное замыкание, а рассматривая обычное (min — sum)-сложение.

Дайте ответ на те же вопросы, используя относительное евклидово расстояние между сообщениями.

6. Сообщения ($\widetilde{A}_1$, $\widetilde{A}_2$, ..., $\widetilde{A}_7$) из упражнения 5 преобразуйте в сообщения ($\widetilde{B}_1$, $\widetilde{B}_2$,.., $\widetilde{B}_5$) с помощью следующего отношения:

$\underset{\sim}{R}$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	1	0,9	0	0,7	0,1
x_2	0,5	0,1	0,6	0,8	0,5
x_3	0,4	0,9	1	0,8	0,6
x_4	0,7	0,4	0,9	1	0
x_5	1	0,8	0,6	0,2	0,6
x_6	0,6	0,2	1	0,3	1
x_7	0,2	0,8	0	1	0
x_8	0,3	1	0	0	0,2

Выберите пять сообщений ($\widetilde{B}_1$, $\widetilde{B}_2$,.., $\widetilde{B}_5$) так, как это было сделано для ($\widetilde{A}_1$, $\widetilde{A}_2$, ..., $\widetilde{A}_7$) в упражнении 5.

7. Рассмотрите следующие десять нечетких графов, принимая их за сообщения. Отберите эти сообщения, как в упражнении 5.

	y_1	y_2	y_3
x_1	0,6	0	1
x_2	0,3	1	0,4
x_3	0,3	0,2	0,6

$\underset{\sim}{G}_1$

0	0,1	0,7
1	0,3	0,2
1	0,8	0,5

$\underset{\sim}{G}_2$

0,6	0,1	0,7
1	0,3	0,2
0,6	0,7	0,5

$\underset{\sim}{G}_3$

0,5	0,1	0,9
0,3	1	0,4
0,2	0,1	0,5

$\underset{\sim}{G}_4$

0,6	0,1	0,8
0,7	0,7	0,3
0,4	0,5	0,6

$\underset{\sim}{G}_5$

0,1	0,3	0,7
0,5	0,3	0,2
0,9	1	0,6

$\underset{\sim}{G}_6$

0,3	0,1	0,7
0,3	0,3	0,2
1	0,8	0,6

$\underset{\sim}{G}_7$

0	0,1	0,7
0,9	0,3	0,2
1	0,7	0,5

$\underset{\sim}{G}_8$

0	0,1	0,8
0,8	0,3	0,3
1	0,7	0,5

$\underset{\sim}{G}_9$

0,5	0,2	0,7
0,7	0,7	0,4
0,4	0,5	0,6

$\underset{\sim}{G}_{10}$

8. Выполните упражнение 5 еще раз, используя алгебраическое ($a \hat{+} b = a + b — ab$) (min — sum)-транзитивное замыкание.

Приложение

1. Обзор основных свойств и операций нечетких отношений

1.1. Понятие нечеткого отношения

Рассмотрим декартово произведение нечетких множеств

Декартово произведение нечетких множеств – это нечеткое множество всех возможных кортежей, составленных из элементов исходных множеств, функция принадлежности которых вычисляются по соотношениям:

$$m(x_1, x_2, \dots , x_n) = min \{ m_1(x_1), m_2(x_2), \dots ,m_n(x_n)\}$$

Пример. Декартово произведение C нечеткого множества A ="хороший студент" на нечеткое множество B = "здоровый студент", (C = A × B)

Студент	Иванов	Петров	Павлов	Сидоров
m_A	1	0.8	0.5	0
m_B	0.2	0	0.7	0

m_C	0.2	0	0.7	0	0.2	0	0.7	0	0.2	0	0.5	0	0	0	0	0

Понятие нечеткого отношения

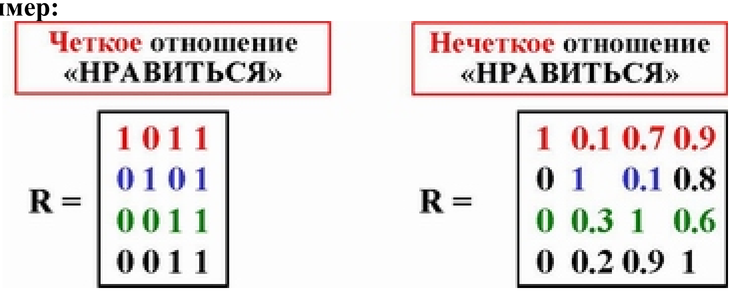
Нечетким отношением называется нечеткое подмножество декартова произведения доменов, характеризующееся функцией принадлежности.

Функция принадлежности подмножества связана с функцией принадлежности включающего его множества неравенством: $mG <= mA$.

Домены могут быть обычными множествами, когда отличие нечеткого отношения от обычного сводится к появлению дополнительного атрибута – значения функции принадлежности.
Нечеткое отношение над нечеткими множествами отличается от нечеткого отношения над четкими множествами тем, что в первом случае функция принадлежности ограничена значениями функций принадлежности исходных нечетких множеств.

1.2. Пример нечеткого отношения

Нечеткое отношение называется бинарным, если оно является обобщением обычного бинарного отношения с добавлением функции принадлежности.
Пример:



Определение бинарного нечеткого отношения

Бинарное нечеткое отношение - это трехместное отношение, являющееся подмножеством декартова произведения множеств X*X*M, где X - исходное множество (вершины графа), M - множества чисел от 0 до 1 (степени принадлежности дуг между вершинами). Если матрица обычного бинарного отношения состоит из нулей и единиц, то матрица бинарного нечеткого отношения содержит произвольные неотрицательные элементы $m_{i,j}$, не большие 1 .
Числовое нечеткое отношение R = "много больше" (xRy)

Пример бинарного нечеткого отношения над целыми числами

Нечеткое отношение R = "много больше" (xRy)						
[1,1]	[1,2]	[10,1]	[20,1]	[20,2]	[50,1]	[1,50]
0	0	0.9	0.98	0.95	1	0

y|x	1	2	5	10	20	50	100	200	500
1	0	0	0.95	0.97	0.98	1	1	1	1
2	0	0	0.5	0.95	0.97	0.99	1	1	1
5	0	0	0	0.6	0.8	0.97	0.98	1	1
10	0	0	0	0	0.7	0.95	0.97	0.98	1
20	0	0	0	0	0	0.5	0.95	0.97	1
50	0	0	0	0	0	0	0.5	0.96	0.98
100	0	0	0	0	0	0	0	0.7	0.97

1.3. Множества (графики) уровня нечеткого отношения

Графиками уровня Xa удобно пользоваться при формулировке и анализе некоторых задач принятия решений. Очевидны следующие правила работы с графиками уровня нечетких множеств: (X \/ Y)a = Xa \/ Ya (X /\ Y)a = Xa /\ Ya

Графики уровня бинарного нечеткого отношения определяются аналогично:

график Ra уровня a отношения R является обычным бинарным отношением, связывающим все пары, для которых степень принадлежности не меньше a.

График минимального уровня называется носителем бинарного отношения.

Пример графика уровня нечеткого отношения

Пусть матрица нечеткого отношения над X= {x,y,z,v} имеет вид:

m_R	x	y	z	v
x	1	0.5	0	0.2
y	0.3	1	1	0.4
z	0	0.6	0.5	0.1
v	1	0.7	0.3	0

График уровня 0.5 этого отношения строится следующим образом:

$R_{0.5}$ = (m_R >= 0.5)

$R_{0.5}$	x	y	z	v
x	1	1	0	0
y	0	1	1	0
z	0	1	1	0
v	1	1	0	0

1.4. Свойства нечетких бинарных отношений

Рефлексивность (Р) и антирефлексивность (АР)

Нечеткое отношение называется рефлексивным, если его функция принадлежности удовлетворяет условию (m(x,x) = 1), для всех вариантов x .

Симметричность, антисимметричность, асимметричность

Нечеткое отношение называется симметричным, если его матрица отношения симметрична (m(x,y)=m(y,x)) , для всех вариантов x, y , где m(x,y) - функция принадлежности.

Это значит, что пересечение исходного и инверсного отношений совпадает с исходным отношением.

Примером симметричного нечеткого отношения является отношение "сильно различаться по величине".

Асимметричное и антисимметричное отношения

Нечеткое отношение называется асимметричным, если асимметрична его матрица отношения (m(x,y) * m(y,x) = 0), для всех вариантов x, y .

Это значит, что пересечение исходного и инверсного отношений является пустым отношением.

Примером асимметричного нечеткого отношения является отношение "много больше". Всякое асимметричное отношение является антирефлексивным.

Нечеткое отношение называется антисимметричным, если антисимметрична его матрица отношения (m(x,y) * m(y,x) = 0), для всех несовпадающих вариантов x, y . Антисимметричность никак не связана с АР.

Асимметричная часть нечеткого отношения

Из всякого отношения легко выделить его симметричную часть Rs, функция принадлежности которой ms(x,y) вычисляется по формуле:

$$ms(x,y) = \min \{ m(x,y), m(y,x) \}$$

Другими словами, симметричная часть отношения является пересечением инверсного и исходного отношения.

Асимметричной частью Ras нечеткого отношения R называется разность между исходным отношением и его симметричной частью. Другими словами, асимметричная часть отношения является разностью исходного и инверсного отношения.

Отыскание асимметричной части нечеткого отношения.

Пример

$$\boxed{m_{as}(x,y) = \max \{ [m(x,y) - m(y,x)], 0 \}}$$

R	a	b	c	d
a	0.7	0.8	0.6	0
b	0.2	0.3	0.4	0.5
c	0.1	0.2	0.5	1
d	0.8	0.5	0.1	0.4

R_s	a	b	c	d
a	0.7	0.2	0.1	0
b	0.2	0.3	0.2	0.5
c	0.1	0.2	0.5	0.1
d	0	0.5	0.1	0.4

R_{as}	a	b	c	d
a	0	0.5	0.5	0
b	0	0	0.4	0
c	0	0	0	0.9
d	0.8	0	0	0

$R_{дв}$	a	b	c	d
a	0.3	0.8	0.9	0.2
b	0.2	0.7	0.8	0.5
c	0.4	0.6	0.5	1
d	0.8	0.5	0	0.6

Полносвязность, слабая полносвязность, транзитивность нечетких бинарных отношений

Свойство полносвязности можно определить через свойство асимметричности двойственного отношения.

Аналогично, слабая полносвязность эквивалентна свойству антисимметричности двойственного отношения.

Транзитивность и негатранзитивность определяются через соответствующие свойства носителя отношения, являющегося четким отношением.

Аналогично можно определить транзитивность уровня а, как транзитивность соответствующего графика отношения.

1.5. Операции над нечеткими отношениями

Операции объединения \/ и пересечения /\ нечетких отношений определяются аналогично соответствующим операциям для нечетких множеств.
Матрицы объединения и пересечения бинарных нечетких отношений вычисляются поэлементно с учетом правил:

$(x \vee y) = \max(x, y)$ $\qquad$ $(x \wedge y) = \min(x, y)$

Аналогия сохраняется и для операции дополнения. Пример:

R	a	b	c	d
a	0.7	0.8	0.6	0
b	0.2	0.3	0.4	0.5
c	0.1	0.2	0.5	1
d	0.8	0.5	0.1	0.4

$R_{доп}$	a	b	c	d
a	0.3	0.2	0.4	1
b	0.8	0.7	0.4	0.5
c	0.9	0.8	0.5	0
d	0.2	0.5	0.9	0.8

Пример операций объединения и пересечения нечетких отношений:

R_1	a	b	c	d
a	0.7	0.8	0.6	0
b	0.2	0.3	0.4	0.5
c	0.9	0.2	0.5	1
d	0.8	0.5	0.1	0.4

R_2	a	b	c	d
a	0.1	0.2	0.1	0
b	0.2	0.2	0.3	0.4
c	0.1	0.2	0	0.1
d	0	0.5	0.1	0.6

$R_1 \vee R_2$	a	b	c	d
a	0.7	0.8	0.6	0
b	0.2	0.3	0.4	0.5
c	0.9	0.2	0.5	1
d	0.8	0.5	0.1	0.6

$R_1 \wedge R_2$	a	b	c	d
a	0.1	0.2	0.1	0
b	0.2	0.2	0.3	0.4
c	0.1	0.2	0	0.1
d	0	0.5	0.1	0.6

Инверсное и двойственное отношения

Матрицу принадлежности инверсного отношения вычисляют путем транспонирования матрицы принадлежности исходного отношения.
Двойственным отношением называется дополнение инверсного исходного бинарного нечеткого отношения.

R	a	b	c	d
a	0.7	0.8	0.6	0
b	0.2	0.3	0.4	0.5
c	0.1	0.2	0.5	1
d	0.8	0.5	0	0.4

$R_{дв}$	a	b	c	d
a	0.3	0.8	0.9	0.2
b	0.2	0.7	0.8	0.5
c	0.4	0.6	0.5	1
d	1	0.5	0	0.6

1.6. Композиционные и декомпозиционные операции над бинарными нечеткими отношениями

Композицию можно определить разными способами:
1. Максиминное произведение отношений (*1)
2. Минимаксное произведение отношений (*2)

R_1	a	b	c	d
a	0.7	0.8	0.6	0

$(*_1)$

R_2	a
a	0.1
b	0.2
c	0.9
d	1

= max (
min(0.7, 0.1),
min(0.8, 0.2),
min(0.6, 0.9),
min(0, 1))

$(*_2)$ = min (
max(0.7, 0.1),
max(0.8, 0.2),
max(0.6, 0.9),
max (0, 1))

Максиминное и минимаксное произведения отношений (примеры)

R_1	a	b	c	d
a	0.7	0.8	0.6	0
b	0.2	0.3	0.4	0.5
c	0.9	0.2	0.5	1
d	0.8	0.5	0.1	0.4

R_2	a	b	c	d
a	0.1	0.2	0.1	0
b	0.2	0.2	0.3	0.4
c	0.9	0.2	0	0.1
d	1	0.5	0.1	0.6

$R_1 *_1 R_2$	a	b	c	d
a	0.6	0.2	0.3	0.4
b	0.5	0.5		
c				
d				

$(*_2)$	a	b	c	d
a	1	0.7	0.1	0.6
b	0.2	0.3	0.2	0.2
c	0.5	0.2	0,3	0.1
d	0.4	0.2	0.1	0.1

1.7. Сечения и проекции нечетких отношений

Горизонтальным сечением (Rx) бинарного нечеткого отношения R называется нечеткое множество с функцией принадлежности, построенной из значений функции принадлежности второго атрибута, когда первый атрибут равен x.

Вертикальным сечением (Ry) бинарного нечеткого отношения R называется нечеткое множество с функцией принадлежности, построенной из значений функции принадлежности первого атрибута, когда второй атрибут равен y.

Другими словами: функция принадлежности для Rx совпадает со строкой матрицы отношения, а функция принадлежности для Ry совпадает со столбцом матрицы отношения.

Проекции нечетких отношений

Проекции получаются путем объединения всех соответствующих сечений (горизонтальных или вертикальных).

R_1	a	b	c	d
a	0.7	0.8	0.6	0
b	0.2	0.3	0.4	0.5
c	0.9	0.2	0.5	1
d	0.8	0.5	0.1	0.4

Элементы	a	b	c	d
Горизонтальная проекция	0.9	0.8	0.6	1

Элементы	a	b	c	d
Вертикальная проекция	0.8	0.5	1	0.8

1.8. Максимумы и мажоранты нечетких отношений

Нечетким максимумом рефлексивного нечеткого отношения называется пересечение его вертикальных сечений.

R	a	b	c	d
a	0.7	0.8	0.6	0
b	0.2	0.3	0.4	0.5
c	0.9	0.2	0.5	1
d	0.8	0.5	0.1	0.4

Элементы	a	b	c	d
Максимум (рефлексивного!) отношения max{R}	0	0.2	0.2	0.1

Мажоранты нечетких отношений

Нечеткой мажорантой антирефлексивного нечеткого отношения называется дополнение горизонтальной проекции его асимметричной части Ras.

R	a	b	c	d
a	0	0.8	0.6	0
b	0.2	0	0.4	0.5
c	0.9	0.2	0	1
d	0.8	0.5	0.1	0

R_{as}	a	b	c	d
a	0	0.6	0	0
b	0	0	0.2	0
c	0.3	0	0	0.9
d	0.8	0	0	0

Элементы	a	b	c	d
Мажоранта отношения maj{R}	0.2	0.4	0.8	0.1

Мажоранты нечетких отношений

Принцип преемственности: носитель максимума нечеткого отношения совпадает с максимумом носителя этого отношения!

2. Выбора альтернатив в нечеткой среде и виды нечеткой величины

2.1. Основные понятия выбора альтернатив в нечеткой среде

Механизм выбора определяется как совокупность структуры на множестве вариантов и правила использования этой структуры при отборе или отбраковывании вариантов.
Нечеткая среда может проявляться через нечеткости:
1. множества предъявляемых вариантов,
2. используемой структуры,
3. используемого правила выбора
4. и их комбинаций (их 8).

Примерами нечеткой структуры является нечеткое отношение, нечеткие и лингвистические переменные, нечеткие величины, числа и интервалы.

Понятие нечеткой функции выбора

Нечеткая функция выбора производит отображение предъявлений в результаты выбора, которые представляются нечеткими множествами. Естественным ограничением для отображения множества предъявлений в множество выбора является то, что множество результатов выбора должно быть частью предъявленого множества.

Пример нечеткой функции непустого выбора в случае четких предъявлений:

Предъявления	{x,y,z}	{x,y}	{x,z}	{y,z}
Результат выбора	x 0.5, y 0.3, z 1	x 0.9, y 0.2	x 0.5, z 0.7	y 0.8, z 0.1

В случае нечетких предъявлений выбор ограничен!

2.2. Свойства бинарных нечетких механизмов выбора альтернатив

Механизм нечетких попарных предпочтений использует в качестве структуры нечеткое рефлексивное отношение и сводится к следующему:

1. Для каждого предъявления составляется нечеткое отношение путем удаления из исходной матрицы строк и столбцов вариантов, отсутствующих в предъявлении.

2. Для этого отношения находится нечеткий максимум. Механизм нечетких попарных блокировок имеет аналогичное описание, (составьте его самостоятельно).

Пример вычислений по механизму нечетких попарных предпочтений:

m_R	x	y	z	v
x	1	0.8	0.6	0
y	0.2	1	0.4	0.5
z	0.1	0.2	1	1
v	0.8	0.5	0.1	1

{x,y,z,v}	x	y	z	v
m	0	0.2	0.1	0.1

Результат выбора для предъявления {x,y,z}:

{x,y,z}	x	y	z
m	0.6	0.2	0.1

Результат выбора для предъявления {x,y,v}:

{x,y,v}	x	y	z
m	0	0.2	0.5

Для предъявления {x,z,v}:

{x,z,v}	x	z	v
m	0	0.1	0.1

m_R	x	y	z	v
x	1	0.8	0.6	0
y	0.2	1	0.4	0.5
z	0.1	0.2	1	1
v	0.8	0.5	0.1	1

Результат выбора для предъявления {x,y}:

{x,y}	x	y
m	0.8	0.2

Результат выбора для предъявления {x,z}:

{x,z}	x	z
m	0.6	0.1

Результат выбора для предъявления {x,v}:

{x,v}	x	v
m	0	0.1

Для предъявления {y,z}:

{y,z}	y	z
m	0.4	0.2

Для предъявления {y,v}:

{y,v}	y	v
m	0.5	0.5

Для предъявления {z,v}:

{z,v}	z	v
m	1	0.1

2.3. Функции принадлежности бесконечных нечетких множеств

Основные понятия бесконечных нечетких множеств

Примеры бесконечных нечетких множеств

Описание	Ядро
"Небольшое натуральное число"	{ 1, 2}
"Действительное число, приближенно равное 5"	{ 5 }
«Большое действительное число»	{ }
"Действительное число, немного меньшее, чем 5, но не равное ему"	{ }

2.4. Определения нечеткой и лингвистической переменных

Нечеткие переменные служат для манипулирования с нечеткими множествами и величинами. Они описываются тремя составляющими:
1.Имя (идентификатор),
2.Область определения (универсальное множество),
3.Значение (нечеткое множество, определяемое функцией принадлежности)
Примеры нечетких переменных:"Удобная дата проведения консультации D", (декабрь, январь) "Удобное время проведения консультации T ”, (8:00 ..17:00)

Лингвистические переменные

Лингвистические переменные являются обобщением нечетких переменных, допускающим генерирование новых нечетких переменных, путем комбинирования более простых нечетких переменных с использованием типовых связок или модификаторов.

Они описываются пятью составляющими:

1. имя,
2. множество имен простых используемых нечетких переменных,
3. область определения (универсальное множество) этих нечетких переменных,
4. синтаксическая процедура, описывающая способ формирования имен составных нечетких переменных из имен простых нечетких переменных,
5. семантическая процедура, описывающая способ формирования значений составных нечетких переменных из значений простых нечетких переменных.

Пример.

1.Время начала консультации
2.{"Рано", "Поздно", "Удобно", "Около 11", "Около12", "Около 14", "Около 15"}
3.{8:00 ... 18:00}
4.Используем связки И, ИЛИ, НЕ, и модификатор "ОЧЕНЬ"
5.Правила преобразования функций принадлежности, в соответствии с используемыми связками и модификаторами

2.5. Понятие и виды нечеткой величины

Нечеткой величиной называется такое нечеткое множество, которое определено на универсальном множестве всех действительных чисел. При этом нафункцию принадлежности не накладывается никаких ограничений.

Частные случаи нечетких величин:

Нечеткие интервалы,
Нечеткие числа,
Нечеткие целые числа,
Нечеткие положительные целые числа,
Нечеткие отрицательные целые числа,
Нечеткий нуль,
Нечеткая единица
. . .

Определения конкретных видов нечетких величин:

Нечетким интервалом называется нечеткая величина с выпуклой функцией принадлежности.
Нечетким числом называется нечеткий интервал с одномодальной функцией принадлежности.
Нечетким целым числом называется нечеткое число с носителем из целых чисел.
Нечетким положительным целым числом называется нечеткое число с носителем из положительных целых чисел.
Нечетким нулем называется нечеткое число, для которого ядро=мода = {0}
Нечеткой единицей называется нечеткое число, для которого ядро=мода = {1}
Ядро нечеткого числа совпадает с модой.

2.6. Вычисление степени принадлежности функции одной нечеткой переменной

Функции нечетких переменных являются частным случаем нечетких отношений и обобщением понятия обычных функций. Способ расширения обычных понятий на случай нечетких переменных называется принципом обобщения.
При обобщении понятия функции необходимо учитывать, что разным прообразам может соответствовать один и тот же образ. Это значит, что множество пар ["прообраз","образ"] образуется путем объединения соответствующих кусков отображения (функции). Объединению нечетких множеств соответствует операция Max(m1, m2) или операция Sup(m1, m2).

Пример вычисления степени принадлежности скалярной функции

Таким образом, при наличии нескольких значений прообраза (для одного и того же значения образа) необходимо использовать максимальное значение степени принадлежности.

Нечеткая величина	-3	-2	-1	0	1	2	3
Степень принад-лежности	0.9	0.2	0.3	0.4	0.6	0.7	0.8

Квадрат нечеткой величины	0	1	4	9
Степень принадлежности	0.4	0.7	0.7	0.9

2.7. Вычисление степени принадлежности функции двух нечетких переменных

Функция двух и большего числа переменных получается путем обобщения понятия функции одной переменной посредством замены области определения одного обобщенного аргумента на декартово произведение областей определения каждого исходного аргумента.

При декартовом перемножении нечетких множеств степень принадлежности кортежа вычисляется путем нахождения минимума степеней принадлежности значений каждого атрибута.

Простейшим примерами и частными случаями функций двух переменных являются операции (сложение, умножение, ...).

Пример. Сложение двух нечетких чисел.

Нечеткое число x1	-2	-1	0	1	2
Степень принадлежности	0.2	0.3	0.5	0.7	0.8

Нечеткое число x2	0	1	4
Степень принадлежности	0.4	0.6	0.8

Нечеткое число x1+x2	-2={[-1,0]}	-1={[-2,1] [-1,0]	0 ={[-1,1] [0,0]}	1	2	4	5	6
Степень принад-лежности	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.5	0.7	0.8

Пример. Упрощенная задача поиска неисправностей в автомобиле

Проявления неиспраностей: y_1 , y_2 , y_3

y_1 – двигатель не запускается
y_2 – двигатель работает неустойчиво
y_3 - двигатель не развивает полной мощности

Причины возникновения неиспраностей: x_1, x_2, x_3, x_4

x_1 - неисправность аккумулятора
x_2 - неисправность карбюратора
x_3 - низкое качество бензина
x_3 - неисправность системы зажигания

Нечеткое отношение (опыт механика)

Нечеткое отношение R показывает к каким последствиям может привести каждая из возможных причин неисправностей.

Проявления	y_1	y_2	y_3
Неисправность аккумулятора x_1	1	0.1	0.2
Неисправность карбюратора x_2	0.8	0.9	1
Низкое качество бензина x_3	0.7	0.8	0.5
Неисправность системы зажигания x_4	1	0.5	0.2

y_1 – двигатель не запускается
y_2 – двигатель работает неустойчиво
y_3 - двигатель не развивает полной мощности

Описание проблем клиента

Двигатель часто не запускается, хотя, если запустится, то работает достаточно устойчиво и, обычно, развивает полную мощность.

Результаты фаззификации этого описания :

Нечеткое множество z = «Проблемы»			
Элементы	y_1	y_2	y_3
Коэффициенты принадлежности	0.9	0.1	0.2

y_1 – двигатель не запускается

y_2 – двигатель работает неустойчиво

y_3 - двигатель не развивает полной мощности

$x * R = z$

Решение нечетких уравнений

$x * R = z$ $\quad [\, x_1\ x_2\ x_3\ x_4 \,] * R = [\, z_1\ \ z_2\ \ z_3 \,]$

R	z_1=0.9	z_2=0.1	z_3=0.2
x_1	1	0.1	0.2
x_2	0.8	0.9	1
x_3	0.7	0.8	0.5
x_4	1	0.5	0.2

$\max\{\min[1,x_1],\min[0.8,x_2],\min[0.7,x_3],\min[1,x_4]\} = 0.9$

$\max\{x_1,x_4\} = 0.9$ $\quad x_1 = 0.9$, или $\quad x_4 = 0.9$ $\quad$ <= 0.1

$\max\{\min[0.1,x_1],\min[0.9,x_2],\min[0.8,x_3],\min[0.5,x_4]\}=0.1$

$\max\{\min[0.2,x_1],\min[1,x_2],\min[0.5,x_3],\min[0.2,x_4]\}=0.2$

$\max\{0.2,x_2,\min[0.5,x_3],0.2\}=0.2$ $\quad \max\{x_2,x_3,x_4\}<=0.1$

2.8. Описание нечетких чисел и интервалов с помощью коэффициентов нечеткости

Понятие коэффициентов нечеткости. Коэффициенты нечеткости являются средством описания нечетких чисел и интервалов. Они характеризуют степень размытости границ соответствующих нечетких множеств. Для задания любого нечеткого множества необходимо иметь описания:

1. Области определения (основы),
2. Ядра (m=1),
3. Границ (m<1)

Для нечетких чисел и интервалов основа является числовым множеством.

Ядро нечеткого интервала является четким интервалом [a, b].

Пример нечеткого трапециевидного интервала.

Пример нечеткого треугольного числа

Это частный случай нечеткого интервала при a=b Поэтому описание нечеткого числа состоит из трех чисел: (a,a,c,d) = (a,c,d)

2.9. Представление термов лингвистических переменных

Операции над нечеткими интервалами [x, y, a, b]:

Операнды и операции	x	y	a	b
O1	x1	y1	a1	b1
O2	x2	y2	a2	b2
Сумма	x1 + x2	y1 + y2	a1 + a2	b1 + b2
Разность	x1 – x2	y1 - y2	a1 + b2	b1 + a2
Умножение	x1 * x2	y1 * y2	x1*a2+ + x2 *a1	y1*b2+ + y2 *b1
Деление	x1 / y2	y1 / x2	(x1 * b2 +y2 *a1)/ (y2)^2	(y1*a2+ x2 *ab)/ (x2)^2

Примеры операций над нечеткими интервалами :

	x	y	a	b
Сумма	x1 + x2	y1 + y2	a1 + a2	b1 + b2
Разность	x1 – x2	y1 - y2	a1 + b2	b1 + a2
Умножение	x1 * x2	y1 * y2	x1*a2+ + x2 *a1	y1*b2+ + y2 *b1
Деление	x1 / y2	y1 / x2	(x1 * b2 +y2 *a1)/ (y2)^2	(y1*a2+ x2 *ab)/ (x2)^2

Представление термов лингвистических переменных в виде нечетких интервалов и чисел

Термы	x	y	a	b
Около	x0	x0	<inf	<inf
Большое	x0	x0	<inf	=inf
Низкое	x0	x0	=inf	<inf
Приблиз. в диапазоне	x0	y0	<inf	<inf
Точно равен	x0	x0	0	0
Не меньше, чем	x0	inf	<inf	inf
Не превышает	- inf	y0	inf	<inf

2.10. Основные понятия нечеткой логики

Элементарные нечеткие высказывания аналогичны четким логическим высказываниям, но отличаются от них тем, что судить об их истинности или ложности можно только с некоторой степенью уверенности.
Таким образом, вместо 2-х значений истинности ("истина", "ложь") используется целый интервал значений [0, ... , 1]. Сложные нечеткие высказывания получаются в результате использования логических операций (конъюнкции - "И", дизъюнкции - "ИЛИ", отрицания - "НЕ"), которые сводятся к формулам преобразования степеней истинности, аналогичным преобразованиям степеней принадлежности для, соответственно, пересечения, объединения, дополнения нечетких множеств.

2.11. Основные этапы нечеткого вывода

Элементарные нечеткие высказывания аналогичны четким логическим высказываниям, но отличаются от них тем, что судить об их истинности или ложности можно только с некоторой степенью уверенности.
1. Формирование базы правил
2. Фаззификация входных переменных

3. Агрегирование подусловий
4. Активизация подзаключений, их аккумулирование
5. Дефаззификация выходных переменных

Пример. Упрощенная задача поиска неисправностей в автомобиле

1. База правил формируется на основе опыта механика и представляется нечетким отношением
2. Результаты фаззификации проблем представлялись нечетким множеством
3. Агрегирование подусловий
4. Активизация подзаключений, их аккумулирование
5. Дефаззификация выходных переменных

Этап 3 сводится в данном случае к составлению системы уравнений x *R = y по столбцам матрицы принадлежностей нечеткого отношения R:

Этап 4 сводится к преобразованию и решению полученной системы уравнений:

max{x1,min[0.8,x2],min[0.7,x3],x4}=0.9max{x1,x4}=0.9

Этап 5 сводится к выбору результата, который с большой долей уверенности указывает на неисправность аккумулятора.

Типовая структура системы нечеткого логического вывода

Пример применения процедуры нечеткого вывода при однокритериальном управлении смесителем воды

Варианты:
Сильно увеличить подачу горячей воды
Немного увеличить подачу горячей воды
Не изменять подачу горячей воды
Немного уменьшить подачу горячей воды
Сильно уменьшить подачу горячей воды
Критерий: температура воды на выходе смесителя.
База нечетких лингвистических правил:
ПРАВИЛО_1: ЕСЛИ "вода горячая " ТО "сильно уменьшить подачу горячей воды "
ПРАВИЛО_2: ЕСЛИ "вода не очень горячая" ТО "немного уменьшить подачу горячей воды"
ПРАВИЛО_3: ЕСЛИ "вода теплая" ТО "не изменять подачу горячей воды "
ПРАВИЛО_4: ЕСЛИ "вода прохладная" ТО "немного увеличить подачу горячей воды"
ПРАВИЛО_5: ЕСЛИ "вода холодная" ТО "сильно увеличить подачу горячей воды"

Термы и функции принадлежности первой лингвистической переменной (критерия):

	Трапециевидная функция принадлежности в зависимости от температуры (в оС)			
1. Вода холодная	0	10	0	20
2. Вода прохладная	35	35	15	15
3. Вода теплая	50	50	10	10
4. Вода не очень горячая	60	60	10	10
5. Вода горячая	70	100	10	0

Термы и функции принадлежности второй лингвистической переменной (вариантов):

Терм	Трапециевидная функция принадлежности в зависимости от угла поворота вентиля (в градусах)			
Сильно уменьшить подачу воды	90	72	inf	36
Немного уменьшить подачу воды	27	27	27	27
Не изменять подачу воды	0	0	18	18
Немного увеличить подачу воды	-27	-27	27	27
Сильно увеличить подачу воды	-72	-90	36	inf

Фаззификации первой лингвистической переменной (критерия)

Пусть текущая температура составляет 55°С Тогда результат фаззификации первой лингвистической переменной (критерия) представляется следующей таблицей принадлежности:

Терм	1	2	3	4	5
Степень принадлежности	0	0.5	0.5	0	0

Этап агрегирования подусловий не изменяет этой таблицы, так как подусловия отсутствуют.

Активизация правил 2 и 3

Вариант	1	2	3	4	5
Степень принадлежности	0	0.5	0.5	0	0

2.Немного уменьшить подачу горячей воды = 0.5
3.Не изменять подачу горячей воды = 0.5
Аккумулирование заключений нечетких правил можно выполнить путем вычисления полусуммы соответствующих нечетких величин. В результате получим нечеткую величину "угол поворота вентиля крана"=(13.5, 13.5, 22.5, 22,5)

Дефаззификация величины (13.5, 13.5, 22.5, 22.5) дает приблизительный результат: угол поворота вентиля крана = 13.5°.

Использование нечетких бинарных отношений при решении задачи о назначениях (распределение персонала)

Задача о назначениях известна достаточно давно, основные алгоритмы ее решения уже описаны на Хабарахабре (см. например Задача о назначениях). Тем не менее задача до сих пор актуальна при распределении сотрудников по должностям, в случае когда сотрудников и должностей и критериев очень много, обычные методы окажутся очень трудоемкими для лица, принимающего решение (ЛПР). Более того, на данный момент для решения такой задачи возможно использование генетического алгоритма и его модификации (интерактивный генетический алгоритм). То есть возникает достаточно сложная многокритериальная задача поиска оптимальной альтернативы, которую можно разбить на две задачи. Если вакансия одна, а претендентов много, то для ЛПР для выбора эффективным будет использование метода многокритериальный выбора альтернатив с использованием правил нечеткого вывода (Многокритериальный выбор альтернатив с использованием правил нечеткого вывода.).

В данной статье предпринимается попытка решить задачу о назначениях в случае нескольких должностей и нескольких вакансий с помощью методов нечеткой логики, а именно с помощью использования нечетких бинарных отношений.

Итак, что же такое нечеткое отношение?

В общем случае нечетким отношением или, более точно, нечетким k-арным отношением, заданным на множествах (универсумах) $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2,\ldots$, $\mathbf{X}_k$, называется некоторое фиксированное нечеткое подмножество декартова произведения этих универсумов. Другими словами, если обозначить произвольное нечеткое отношение через Q, то по определению $Q=\{<x_1, x_2,\ldots, x_k>, \mu_Q(<x_1, x_2,\ldots, x_k>)\}$, где $\mu_Q(<x_1, x_2,\ldots, x_k>)$ – функция принадлежности данного нечеткого отношения, которая определяется как отображение μ_Q: $\mathbf{X}_1\times\mathbf{X}_2\times\ldots\times\mathbf{X}_k \rightarrow[0, 1]$. Здесь через $<x_1, x_2, \ldots, x_k>$ обозначен кортеж из k элементов, каждый из которых выбирается из своего универсума: $x_1 \in \mathbf{X}_1$, $x_2 \in \mathbf{X}_2, \ldots, x_k \in \mathbf{X}_k$.

Бинарное нечеткое отношение. В общем случае бинарное нечеткое отношение задается на базисных множествах X1, X2 и определяется как нечеткое отношение $Q=\{<x_i, x_j>, \mu_Q(<x_i, x_j>)\}$. Здесь $\mu_Q(<x_i, x_j>)$ – функция принадлежности бинарного нечеткого отношения, которая определяется как отображение μ_Q: $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \rightarrow [0, 1]$, а через $<x_i, x_j>$ обозначен кортеж из двух элементов, при этом $x_1 \in \mathbf{X}_1$, $x_2 \in \mathbf{X}_2$.

Кроме того, для построения решения задачи нам потребуются композиции нечетких бинарных отношений:
Композиция двух бинарных нечетких отношений. Пусть *Q* и *R* – конечные или бесконечные бинарные нечеткие отношения. Причем нечеткое отношение $Q=\{<x_i, x_j>, \mu_Q(<x_i, x_j>)\}$ задано на декартовом произведении универсумов $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$, а нечеткое отношение $R=\{<x_j, x_k>, \mu_R(<x_j, x_k>)\}$ – на декартовом произведении универсумов $\mathbf{X}_2 \times \mathbf{X}_3$. Нечеткое бинарное отношение, заданное на декартовом произведении $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_3$ и обозначаемое через *Q* x *R*, называется композицией бинарных нечетких отношений *Q* и *R*, а его функция принадлежности определяется следующим выражением:

$$\mu_{Q\otimes R}(<x_i, x_k>) = \max_{x_j \in X_2} \left\{ \min \left\{ \mu_Q\left(<x_i, x_j>\right), \mu_R\left(<x_j, x_k>\right) \right\} \right\}$$

$$(\forall <x_i, x_k> \in X_1 \times X_3)$$

Определенную таким образом композицию бинарных нечетких отношений называют иногда (max-min)-композицией или максиминной сверткой нечетких отношений.
Альтернативные операции композиции двух бинарных нечетких отношений. Нечеткое бинарное отношение, заданное на декартовом произведении $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_3$ и обозначаемое через *Q* * *R*, называется (max-*)-композицией бинарных нечетких отношений *Q* и *R*, если его функция принадлежности определяется следующим выражением:

$$\mu_{Q*R}(<x_i, x_k>) = \max_{x_j \in X_2} \left\{ \mu_Q\left(<x_i, x_j>\right) * \mu_Q\left(<x_j, x_k>\right) \right\}$$

$$(\forall <x_i, x_k> \in X_1 \times X_3)$$

В частности, если в этом выражении вместо операции «*» использовать операцию алгебраического умножения, то получим определение (max-prod)-композиции.
(min-max)-композиция. Нечеткое бинарное отношение, заданное на декартовом произведении $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_3$ и обозначаемое через *Q* + *R*,

называется (min-max)-композицией бинарных нечетких отношений Q и R, если его функция принадлежности определяется следующим выражением:

$$\mu_{Q\oplus R}(<x_i,\, x_k>) = \min_{x_j \in X_2} \left\{ \max\left\{ \mu_Q(<x_i,\, x_j>), \mu_R(<x_j,\, x_k>) \right\} \right\}$$

$$(\forall <x_i,\, x_k> \in X_1 \times X_3)$$

Теперь перейдем непосредственно к задаче. Данный метод разработан для решения конкретной задачи в сфере управления персоналом, поэтому опишу его работу сразу на примере этой задачи. Итак, есть два множества: совокупность должностей и их профили и совокупность работников, которых нужно максимально эффективно распределить. Таким образом, входными данными являются данные множества, а выходными – степени соответствия кандидатов должностям.

В связи с вышесказанным, рассмотрим нечеткую модель, основанную на двух бинарных нечетких отношениях ***†*** и ***Ψ***. Первое из этих нечетких отношений строится на двух базисных множествах **X** = $\{x_1,\ldots, x_n\}$ и **У** = $\{ y_1,\ldots, y_m \}$, а второе – на двух базисных множествах **У** = $\{ y_1,\ldots, y_m \}$ и **Z** = $\{ z_1,\ldots, z_l \}$. Здесь **X** описывает множество специальностей, по которым проводится набор на работу, **У** – множество характеристик (свойств) должностей а **Z** – множество кандидатов на должности. В интересуемом нас контексте нечеткое отношение ***†*** содержательно описывает профили специальностей, а ***Ψ*** – профили кандидатов на должности. Для определения соответствия кандидатов должностям воспользуемся композициями исходных нечетких отношений. Так, (max-min)- и (max-prod)-композиции (см. пункт 2.2) дают информацию о степени соответствии кандидата вакансии и возможности его назначения, а (min-max)-композиция возможно позволяет определить работника, который не подходит на данную работу.

Таким образом, применяются три модели:

- max-min – модель
- max-prod – модель
- min-max – модель

Была написана небольшая программа для подсчета этих композиций, но я ее здесь описывать не буду, так как она очень простая (работа с матрицами) и пост и так уже очень длинный. Перейдем сразу к экспериментам с программой. Рассмотрим нечеткую модель, основанную на двух бинарных нечетких отношениях ***†*** и ***Ψ***. Первое из этих нечетких отношений строится на двух базисных множествах X и У, а второе – на двух базисных множествах **У** и **Z**. Здесь **X** описывает множество специальностей, по которым проводится набор на работу, **У** – множество психо-физиологических характеристик а **Z** – множество кандидатов на должности. В интересуемом нас контексте нечеткое отношение ***†*** содержательно описывает психо-физиологическое профилирование специальностей, а ***Ψ*** – психо-физиологическое профилирование кандидатов на должности. Для конкретности, пусть **X** = { менеджер, программист, водитель, секретарь-референт, переводчик }; **У** = { быстрота и гибкость мышления, умение быстро принимать решения, устойчивость и концентрация внимания, зрительная память, быстрота реакции, двигательная память, физическая выносливость, координация движений, эмоционально-волевая устойчивость, ответственность }; **Z** = { Петров, Иванов, Сидоров, Васильева, Григорьева }. Конкретные значения функций принадлежности $\mu_{\dagger}$ ($<x_i, y_j>$) и μ_{Ψ} ($<y_j, z_k>$) рассматриваемых нечетких отношений представлены следующими таблицами (табл. 3.1 и 3.2).

Указатель обозначений

{ ... } — множество

$\in$ — принадлежность множеству

$\notin$ — непринадлежность множеству

$\subseteq$ —символ включения

$\subset$ —символ строгого включения

$\cup$ — объединение множеств

I — пересечение множеств

\ — разность множеств

$\times$ — прямое произведение множеств

$\bar{X}$ — дополнение множества *X*

X^s — степень множества

$\varnothing$ — пустое множество

I—универсальное множество

R—множество вещественных чисел

sup *M* — верхняя граница множества *M*

inf *M* — нижняя граница множества *M*

$Пр_i$ *M* — проекция множества на ось *i*

$(a_1 \ldots a_n)$ — упорядоченное множество (кортеж, вектор)

Λ — пустой кортеж

$\forall$ — квантор общности

$\exists$ — квантор существования

$\rightarrow$ — следствие, отображение

$f \circ g$ — композиция функций *f* и *g* по связке $\circ$

$\equiv$ — символ отношения эквивалентности, тождества

$\leq$ — символ отношения порядка

$<$ — символ отношения строгого порядка

? — символ отношения доминирования

$d(x, y)$ — расстояние между элементами множества

$\| \mathbf{x} \|$ — норма величины **x**

E_n — евклидово *n*-мерное пространство

Список литературы

1. Горбатов В.А. Основы дискретной математики. - М.: Высшая школа, 1986.
2. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики. - М.:Энергия, 1980.
3. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. - М.:Энергия, 1980.
4. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика.- М.: Наука, 1990.
5. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера.-К.: Техника, 1977.
6. Кононюк А.Ю. Дискретна математика. В 2 ч. Ч.1, 2- К: 2009
7. Кононюк А.Ю. Вища математика. В 2 ч. Ч.1, 2- К: 2007.
8. Аверкин А.Н., Батыршин И.З. и др. Нечеткие множества в моделях управления и икусственного интелекта.- М.: Наука, 1986.
9. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств.- М.: Радио и связь, 1982.
10. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику.- М.: Наука, 1975.
11. Згуровский М.З. Интегрированные системы оптимального управления и проектирования.- К: Высшая школа, 1990.
13. Минский М. Фреймы для представления знаемый. - М.:Энергия, 1979.
14. Вильсон А. Дж. Энтропийные методы моделирования сложных систем.- М.: Наука, 1978.
15. В.Ю. Юрков, О.В. Лукина /Прикладная геометрия, вып. 8, N 18 (2006), стр. 9-36
16. Камени Д., Снелл Д., Томпсон Д. Введение в конечную математику.— М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
17. Шиханович Ю. А. Введение в современную математику. — М.: Наука, 1965.
18. Клинни С. К. Введение в математику. — М.: Изд-во иностр. лит., 1957.
19. Карр Ч., Хоув Ч. Количественные методы принятия решений в управлении и экономике. — М.: Мир, 1966.
20. Феликс Л. Элементарная математика в современном изложении.— М.: Просвещение, 1967.
21. Берж К. Теория графов и ее применение. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
22. Форд Л. Р., Фалкерсон Л. Р. Потоки в сетях. — М.: Мир, 1966.
16. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций

и функционального анализа. — М.: Наука, 1968.
17. Шрейдер Ю. А. Что такое расстояние?—М.: Физматгиз, 1963.
18. Шрейдер Ю. А. Равенство, сходство, порядок—М.: Наука, 1971.
19. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике.— М.: Наука, 1964.
20. Справочник по системотехнике/Под ред. Р. Макола. — М.: Советское радио, 1970.

Науково-навчальне видання

Кононюк Анатолій Юхимович

Дискретна математика

Книга 5

Відношення

(нечіткі)

(Російська мова)

Керівник видавничих проектів Маслаков Р.А..
Оригінал-макет виготовлено видавництвом «Освіта України»
Редагування авторське
Відповідальний за випуск.

Підписано до друку 10.06.2013 г.
Формат 60x84/16.
Умов. друк. арк. 16,5.
Тираж 300 пр. Замовлення №