

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ВІСНИК ОДЕСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Збірник наукових праць
заснований у січні 1997 р.

Том 16. Випуск 16

Математика і механіка

2011

Затверджено до друку вченою радою
Одеського національного університету імені І. І. Мечникова
від 25 жовтня 2011 р., протокол № 2

Редакційна колегія журналу

І. М. Коваль (головний редактор)
О. В. Запорожченко (заступник головного редактора)
В. О. Іваниця (заступник головного редактора)
Є. Л. Стрельцов (заступник головного редактора)
С. М. Андрієвський В. В. Глебов А. В. Тюрін
Ю. Ф. Ваксман В. Г. Кушнір Є. А. Черкез
Л. М. Голубенко В. В. Менчук Є. М. Черноіваненко
В. В. Заморев В. І. Труба

Редакційна колегія випуску

В. Є. Круглов (головний редактор)
В. М. Євтухов (заступник головного редактора)
С. К. Асланов М. І. Іванчов Е. О. Стороженко
А. Ashygaluyev І. Т. Кігурадзе В. І. Суцанський
Н. Д. Вайсфельд О. В. Костін Р. С. Хапко
П. Д. Варбанець Д. Д. Лещенко І. М. Черевко
О. В. Вербицький А. Д. Мілко В. В. Шарко
О. Н. Вітюк О. В. Онищук І. А. Шевчук
Г. О. Воропаєв А. П. Петравчук Г. А. Шинкаренко
І. М. Гашененко А. В. Плотніков
А. А. Дороговцев Г. Я. Попов

Відповідальний секретар – О. Д. Кічмаренко

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації:
серія КВ № 11456-329Р від 07.07.2006 р.

Адреса редколегії

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
вул. Дворянська, 2, м. Одеса, 65082

МАТЕМАТИКА

УДК 519.713.2

А. С. Антоненко

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

**ПОЛУГРУППА, ПОРОЖДЕННАЯ ВСЕМИ
МАЛОПОДВИЖНЫМИ АВТОМАТНЫМИ
ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ КОНЕЧНОГО ТИПА НАД
ДВУХСИМВОЛЬНЫМ АЛФАВИТОМ**

Антоненко О. С. Напівгрупа, породжена усіма малорухомими автоматними перетвореннями скінченного типу над двохсимвольним алфавітом. Доведено відсутність мінімальної породжуючої множини напівгрупи, породженої усіма малорухомими автоматними перетвореннями скінченного типу.

Ключові слова: скінченні автомати, автоматні перетворення, самоподібні напівгрупи.

Антоненко А. С. Полугруппа, порожденная всеми малоподвижными автоматными преобразованиями конечного типа над двухсимвольным алфавитом. Доказано отсутствие минимального порождающего множества полугруппы, порожденной всеми малоподвижными автоматными преобразованиями конечного типа.

Ключевые слова: конечные автоматы, автоматные преобразования, самоподобные полугруппы.

Antonenko A. S. Semigroup generated by all slowmoving automaton transformations of finite type over two-symbol alphabet. It is proved that there is no minimal generating set of semigroup generated by all slowmoving automata transformations of finite type.

Key words: finite automata, automaton transformations, selfsimilar semigroups.

ВВЕДЕНИЕ. Теория групп и полугрупп автоматных преобразований исследуется начиная с середины прошлого столетия. Одним из первых результатов стало отсутствие конечного множества порождающих элементов для группы (и полугруппы) конечно-автоматных преобразований [1, 2]. Обзор современных результатов в области групп и полугрупп автоматных преобразований представлен в работах [3, 4]. Одним из наиболее интересных результатов в теории полугрупп автоматных преобразований является теорема об отсутствии минимальных порождающих множеств в полугруппе $FTA(X)$, порожденной всеми конечно-автоматными преобразованиями над произвольным алфавитом X , где $|X| \geq 2$ [5]. Для группы, порожденной всеми обратимыми конечно-автоматными преобразованиями, пока неизвестно, существует или нет минимальное порождающее множество.

В статье [6] автором найдено порождающее множество для полугруппы SSl_2 , порожденной малоподвижными автоматными преобразованиями над двухсимвольным алфавитом, которое, впрочем, не является минимальным (неприводимым).

Целью данной статьи было дополнительное исследование порождающих множеств полугруппы SSl_2 и нахождения минимального порождающего множества либо доказательства, что его не существует. В данной статье улучшено порождающее множество из [6], рассмотрены свойства порождающих элементов и некоторые соотношения между ними. Основным результатом является доказательство того, что в SSl_2 не существует неприводимых порождающих множеств.

Мы будем рассматривать только конечные автоматы Мили с совпадающими входными и выходными алфавитами и будем обозначать их четверками $A = (X, Q, \pi, \lambda)$, где X – конечный алфавит, Q – конечное множество состояний, $\pi : X \times Q \rightarrow Q$ – функция перехода, $\lambda : X \times Q \rightarrow X$ – функция выхода. Автомат, начиная работать из некоторого состояния $q \in Q$, определяет преобразование конечных или бесконечных слов, называемое автоматным преобразованием. Если множество состояний автомата конечно, то автомат называется конечным, и, соответственно, преобразования, определяемые им, называются конечно-автоматными. Множество всех автоматных преобразований образует полугруппу относительно операции композиции, а множество всех конечно-автоматных преобразований – ее подполугруппу. Аналогично, множество всех обратимых автоматных преобразований образует группу. Группа (полугруппа), порождаемая преобразованиями, определяемыми автоматом во всех его состояниях, называется группой (полугруппой), порожденной автоматом. Обозначим через X^* – множество всех конечных слов над алфавитом X , а через X^ω – множество всех бесконечных слов над алфавитом X . Через T_Y обозначим полугруппу всех преобразований множества Y (симметрическую полугруппу).

Определение 1. [3] Пусть $f : X^* \rightarrow X^*$ ($f : X^\omega \rightarrow X^\omega$) – автоматное преобразование и $u = a_1 a_2 \dots a_m \in X^*$ – некоторое конечное слово. Ограничением (или проекцией) преобразования f на слове u называется преобразование $f|_u$, действующее на X^* (соответственно, X^ω) по формуле $f|_u(x_1 x_2 \dots) = \Pi_m f(a_1 a_2 \dots a_m x_1 x_2 \dots)$, где Π_m – оператор вычеркивания первых m букв слова (или ω -слова).

Для ограничений выполнены следующие свойства: $f(uw) = f(u) f|_u(w)$, $(f \circ g)|_u = f|_{g(u)} \circ g|_u$, где $f : X^* \rightarrow X^*$, $g : X^* \rightarrow X^*$ (или $f : X^\omega \rightarrow X^\omega$, $g : X^\omega \rightarrow X^\omega$), $u \in X^*$, $w \in X^*$ (соответственно, $w \in X^\omega$). Группа или полугруппа G автоматных преобразований называется самоподобной, если для любого элемента $g \in G$ и любого символа $x \in X$ выполнено $g|_x \in G$. Группа или полугруппа автоматных преобразований является самоподобной, тогда и только тогда, когда она порождена некоторым автоматом (возможно, бесконечным).

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

1. Классификация состояний.

Рассмотрим два типа состояний из классификации состояний автоматов [6].

Определение 2. Пусть $\pi : X \times Q \rightarrow Q$ – функция перехода автомата Мили. Назовем состояние $q \in Q$

1. состоянием покоя, если для каждого $x \in X$ выполнено $\pi(x, q) = q$ (т. е. автомат остается в этом состоянии под воздействием любого входного символа);

2. состоянием ожидания символа x , если $\pi(x, q) \neq q$, а для любого символа $x' \in X \setminus \{x\}$ выполнено $\pi(x', q) = q$ (т. е. автомат остается в состоянии q , пока на вход не поступит символ x).

Определение 3. Назовем автомат A малоподвижным, если все его состояния являются состояниями покоя или ожидания.

Другими словами, для каждого состояния q существует не более одного символа x такого, что $\pi(x, q) \neq q$.

Определение 4. Назовем преобразование $f : X^\omega \rightarrow X^\omega$ малоподвижным, если оно может быть определено малоподвижным автоматом.

Так как класс малоподвижных автоматов слишком обширен, то в данной работе исследуются только преобразования, порождаемые малоподвижными автоматами конечного типа.

Определение 5. [6] Назовем конечный автомат A автоматом конечного типа, если при любой последовательности входных символов и при любом начальном состоянии последовательность состояний, в которых находится автомат, стабилизируется.

Определение 6. [6] Преобразование бесконечных слов $f : X^\omega \rightarrow X^\omega$ назовем конечноавтоматным преобразованием конечного типа, если существует автомат конечного типа, определяющий преобразование f в некотором начальном состоянии.

Теорема 1. [6] Конечный автомат является автоматом конечного типа тогда и только тогда, когда его диаграмма Мура представляет собой ориентированный граф, не содержащий ориентированных циклов, кроме петель.

2. Малоподвижные автоматы конечного типа над двухсимвольным алфавитом и преобразования, ими определяемые.

Рассмотрим малоподвижные автоматы конечного типа (не обязательно обратимые) над двухсимвольным алфавитом $X = \{0, 1\}$. Для того, чтобы описать преобразования, определяемые такими автоматами, определим операторы, действующие над функциями из T_{X^ω} .

Пусть p – это некоторое преобразование из множества

$$T_X = T_2 = \left\{ id = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, inv = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Распространим действие преобразования p на множества X^* , X^ω посимвольно, т. е. для произвольных слов $u_1 u_2 \dots u_k \in X^*$, $v_1 v_2 \dots \in X^\omega$ определим $p(u_1 u_2 \dots u_k) = p(u_1) p(u_2) \dots p(u_k)$ и $p(v_1 v_2 \dots) = p(v_1) p(v_2) \dots$.

Определим операторы $px]$, где $p \in T_X$, $x \in X$, следующим образом:

$$px] : T_{X^\omega} \rightarrow T_{X^\omega}, \quad px]f = g,$$

где g действует по правилу

$$g(\bar{x}^n x w) = p(\bar{x}^n x) f(w), \quad \forall w \in X^\omega, n \geq 0, \quad g(\bar{x}^*) = p(\bar{x}^*)$$

и $\bar{x} = 1 - x$.

Таким образом, пока не встретился символ x , преобразование $px]f$ действует как преобразование p , первый символ x тоже преобразуется при помощи p , а все символы после него преобразовываются при помощи f .

Обозначим

$$W_S = \{px] | p \in T_2, x \in X\} = \{p0], p1] | p \in T_2\},$$

$$W_G = \{px] | p \in \{id, inv\}, x \in X\} = \{id0], id1], inv0], inv1]\}.$$

Теорема 2. [6] Пусть A малоподвижный автомат конечного типа, тогда любое преобразование f , определяемое им, представимо в виде

$$f = h_1 h_2 \dots h_k p, \text{ где } h_i \in W_S, p \in T_2, k \geq 0, \quad (1)$$

При этом если f обратимо, то все $h_i \in W_G$.

Верно также обратное утверждение, что если преобразование f представимо в виде (1), то оно может быть задано малоподвижным автоматом конечного типа. Причем если все $h_i \in W_G$, то f обратимо.

Введем еще одно обозначение для операторов из W_S :

$$px] = \begin{pmatrix} a \\ p(x) \\ x \end{pmatrix}, a = \begin{cases} 1, & p \in \{\alpha, \beta\} \\ 0, & p \in \{id, inv\}. \end{cases}$$

Будем считать, что $p^0 = id$, а $p^1 = p$, $p \in T_2$. Обозначим $\bar{x} = 1 - x$, $x \in X = \{0, 1\}$.

Теорема 3. [6] Для операторов из W_S выполнены следующие свойства:

1. Конечноавтоматное преобразование под действием оператора вида $p0]$ или $p1]$ переходит в конечноавтоматное.
2. $px_1]px_2] \dots px_k]p = p$, for all $p \in T_2, x_i \in X, i = \overline{1, k}$.
3. для всех $g \in T_{X^\omega}$, $a, b \in X$, $x \in X^\omega$, $n \geq 0$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} g \left(\bar{b}^n bx \right) = \bar{a}^n ag(x), \quad \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} g \left(\bar{b}^* \right) = \bar{a}^*,$$

4. для всех $g \in T_{X^\omega}$, $a, b \in X$, $x \in X^\omega$, $n \geq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} g \left(\bar{b}^n bx \right) = a^{n+1} g(x), \quad \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} g \left(\bar{b}^* \right) = a^*$$

5. $\begin{pmatrix} d \\ a \\ b \end{pmatrix} f \circ \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} d \\ a \\ c \end{pmatrix} (f \circ g)$, $\forall f, g \in T_{X^\omega}, a, b, c \in X$.

$$6. \text{inv}^x \circ \begin{pmatrix} d \\ a \\ b \end{pmatrix} f \circ \text{inv}^y = \begin{pmatrix} d \\ a+x \\ b+y \end{pmatrix} (\text{inv}^x \circ f \circ \text{inv}^y), \quad \forall f \in T_{X^\omega}, a, b, x, y \in X,$$

сложение здесь и далее производится по модулю 2.

Введем следующие обозначения,

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \text{inv}, & \alpha_1 &= \text{id0]inv}, & \alpha_2 &= \text{id0]id0]inv}, & \dots, & \alpha_n &= \text{id0]}^n \text{inv}, & \dots \\ \beta_0 &= \alpha 0] \text{id}, & \beta_1 &= \text{id0]}\alpha 0] \text{id}, & \beta_2 &= \text{id0]id0]}\alpha 0] \text{id}, & \dots, & \beta_n &= \text{id0]}^n \alpha 0] \text{id}, & \dots \\ \gamma_0 &= \alpha 0] \text{inv}, & \gamma_1 &= \text{id0]}\alpha 0] \text{inv}, & \gamma_2 &= \text{id0]id0]}\alpha 0] \text{inv}, & \dots, & \gamma_n &= \text{id0]}^n \alpha 0] \text{inv}, & \dots \\ \delta_0 &= \alpha, & \delta_1 &= \text{id0]}\alpha, & \delta_2 &= \text{id0]id0]}\alpha, & \dots, & \delta_n &= \text{id0]}^n \alpha, & \dots \\ & & \lambda_{1,i} &= \alpha_i, & \lambda_{2,i} &= \beta_i, & \lambda_{3,i} &= \gamma_i, & \lambda_{4,i} &= \delta_i, i \geq 0 \end{aligned}$$

Эти обозначения аналогичны соответствующим обозначениям [6], но с измененной нумерацией для β_i и γ_i .

$$\text{Очевидно, имеем } \lambda_{j,i+1} = \text{id0]}\lambda_{j,i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda_{j,i}, i \geq 0, 1 \leq j \leq 4.$$

Все α_i являются инволюциями, т. е. $\alpha_i^2 = \text{id}$, все β_i, δ_i – идемпотентами, т. е. $\beta_i^2 = \beta_i, \delta_i^2 = \delta_i$ (см. [6]). γ_i , очевидно, не являются идемпотентами.

Докажем $\gamma_i = \beta_i \alpha_{i+1}$. Действительно,

$$\beta_0 \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{id} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{inv} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{inv} = \gamma_0,$$

откуда $\gamma_i = \text{id0]}^i \gamma_0 = \text{id0]}^i (\beta_0 \alpha_1) = \text{id0]}^i \beta_0 \circ \text{id0]}^i \alpha_1 = \beta_i \alpha_{i+1}$.

Преобразования $\alpha_i, \beta_i, \delta_i$ имеют следующий развернутый вид:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= (\alpha_0, \alpha_0) \text{inv}, & \alpha_i &= (\alpha_{i-1}, \alpha_i), i > 0 \\ \beta_0 &= (\text{id}, \beta_0) \alpha, & \beta_i &= (\beta_{i-1}, \beta_i), i > 0 \\ \delta_0 &= (\delta_0, \delta_0) \alpha, & \delta_i &= (\delta_{i-1}, \delta_i), i > 0 \end{aligned}$$

Все малоподвижные преобразования конечного типа над двухсимвольным алфавитом могут быть представлены в виде композиции $\alpha_i, \beta_i, \delta_i$.

Теорема 4. Любое малоподвижное преобразование конечного типа $f = h_1 h_2 \dots h_k p$, где $h_i \in W_S, p \in T_2, k \geq 0$, представимо в виде

$$f = f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_r, r > 0, f_j \in \{\alpha_i, \beta_i, \delta_i \mid i = \overline{0, \infty}\}, j = \overline{1, r} \quad (2)$$

Точнее, если $h_i = \begin{pmatrix} c_{i-1} \\ b_{i-1} \\ a_{i-1} \end{pmatrix}$, $a_{i-1}, b_{i-1}, c_{i-1} \in X, i = \overline{1, k}$, тогда

$$f = L_0(c_0, a_0, b_0) \circ L_1(c_1, a_1, b_1) \circ \dots \circ L_{k-1}(c_{k-1}, a_{k-1}, b_{k-1}) \circ C_k(p) \circ R_{k-1}(b_{k-1}) \circ \dots \circ R_1(b_1) \circ R_0(b_0) \quad (3)$$

где

$$L_i(c, a, b) = \begin{cases} \alpha_i^a \circ \alpha_{i+1}^a, & \text{если } c = 0 \\ \alpha_i^a \circ \beta_i \circ \alpha_{i+1}^a, & \text{если } c = 1, \end{cases}$$

$$R_i(b) = \alpha_{i+1}^b \circ \alpha_i^b$$

$$C_i(p) = \begin{cases} id, & \text{if } p = id \\ \alpha_i, & \text{if } p = inv \\ \delta_i, & \text{if } p = \alpha \\ \alpha_i \circ \delta_i, & \text{if } p = \beta \end{cases}$$

Вид функции (3) превращается в вид функции (2) отбрасыванием id из композиции (3), кроме случая $f = id = \alpha_0 \alpha_0$.

Доказательство. Будем вести доказательство индукцией по числу k .

База индукции. Пусть $k = 0$. Тогда $f = p \in \{id, inv, \alpha, \beta\}$, и

$$id = C_0(id) = \alpha_0 \circ \alpha_0, \quad inv = \alpha_0 = C_0(inv), \quad \alpha = \delta_0 = C_0(\alpha),$$

$$\beta = inv \circ \alpha = \alpha_0 \circ \delta_0 = C_0(\beta),$$

т. е. f представимо в видах (2) и (3).

Предположим, что утверждение теоремы выполняется и докажем теорему для $k = l + 1$. Обозначим $g = h_2 h_3 \dots h_k p$, тогда $f = h_1 g$ и по предположению g представимо в виде $g = L_0(c_1, a_1, b_1) \circ L_1(c_2, a_2, b_2) \circ \dots \circ L_{k-2}(c_{k-1}, a_{k-1}, b_{k-1}) \circ C_{k-1}(p) \circ R_{k-2}(b_{k-1}) \circ \dots \circ R_0(b_1)$. Заметим, что $id0]L_i(c, a, b) = L_{i+1}(c, a, b)$, $id0]R_i(b) = R_{i+1}(b)$, $id0]C_i(p) = C_{i+1}(p)$, следовательно

$$id0]g = L_1(c_1, a_1, b_1) \circ L_2(c_2, a_2, b_2) \circ \dots \circ L_{k-1}(c_{k-1}, a_{k-1}, b_{k-1}) \circ C_k(p) \circ$$

$$\circ R_{k-1}(b_{k-1}) \circ \dots \circ R_1(b_1)$$

Рассмотрим два случая:

Пусть $h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} g = inv^a \circ \left(inv^a \circ \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} g \circ inv^b \right) \circ inv^b =$$

$$= inv^a \circ \left(\begin{pmatrix} 0 \\ a+a \\ b+b \end{pmatrix} (inv^a \circ g \circ inv^b) \right) \circ inv^b =$$

$$= \alpha_0^a \circ (id0] (\alpha_0^a \circ g \circ \alpha_0^b)) \circ inv^b =$$

$$= \alpha_0^a \circ \alpha_1^a \circ id0]g \circ \alpha_1^b \circ \alpha_0^b = L_0(0, a, b) \circ id0]g \circ R_0(b)$$

откуда следует (3).

Пусть $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$. Тогда

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} g &= \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} id \circ \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ b \end{pmatrix} g = \\ &= inv^a \circ \left(inv^a \circ \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} id \circ inv^b \right) \circ inv^b \circ inv^b \circ \left(inv^b \circ \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ b \end{pmatrix} g \circ inv^b \right) \circ inv^b = \\ &= inv^a \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (inv^a \circ id \circ inv^b) \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (inv^b \circ g \circ inv^b) \circ inv^b = \\ &= \alpha_0^a \circ \alpha 0] inv^{a+b} \circ \alpha_1^b \circ id 0] g \circ \alpha_1^b \circ \alpha_0^b = L_0(1, a, b) \circ id 0] g \circ R_0(b), \end{aligned}$$

откуда следует (3). Действительно, если $a = b$, то $a + b = 0$, $\alpha_0^a \circ \alpha 0] inv^{a+b} \circ \alpha_1^b = \alpha_0^a \circ \alpha 0] id \circ \alpha_1^b = \alpha_0^a \circ \beta_0 \circ \alpha_1^a = L(1, a, b)$, иначе если $a + b = 1$, то $\alpha_0^a \circ \alpha 0] inv^{a+b} \circ \alpha_1^b = \alpha_0^a \circ \alpha 0] inv \circ \alpha_1^b = \alpha_0^a \circ \gamma_0 \circ \alpha_1^b = \alpha_0^a \circ \beta_0 \circ \alpha_1 \circ \alpha_1^b = \alpha_0^a \circ \beta_0 \circ \alpha_1^{a+b} \circ \alpha_1^b = \alpha_0^a \circ \beta_0 \circ \alpha_1^a = L(1, a, b)$. \square

Разложение (3) не обязательно минимально. Для уменьшения количества элементов в (3) можно удалить фрагменты вида $\alpha_i \circ \alpha_i$, равные id .

3. Полугруппа, порожденная всеми малоподвижными автоматными преобразованиями конечного типа над двухсимвольным алфавитом.

Рассмотрим полугруппу, порожденную всеми малоподвижными автоматными преобразованиями конечного типа над двухсимвольным алфавитом. Обозначим ее через SSL_2 . По Теореме 4

$$SSL_2 = \langle \alpha_i, \beta_i, \delta_i : i = \overline{0, \infty} \rangle$$

Лемма 1. Для произвольных целых i, j таких, что $0 \leq i < j$, выполнено соотношение

$$\delta_i = \beta_i \beta_{i+1} \cdots \beta_{j-1} \delta_j$$

Доказательство. Докажем вначале, что $\delta_0 = \beta_0 \delta_1$. Действительно $\beta_0 \delta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} id \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha = \alpha 0] \alpha = \alpha = \delta_0$.

Тогда для любого $i \geq 0$ выполнено $\delta_i = id 0]^i \delta_0 = id 0]^i (\beta_0 \delta_1) = id 0]^i \beta_0 \circ id 0]^i \delta_1 = \beta_i \delta_{i+1}$, откуда следует утверждение леммы. \square

Таким образом, δ с меньшими индексами можно выразить через δ с большими индексами, но (как мы увидим далее) не наоборот. Значит, множество $\{\alpha_i, \beta_i, \delta_i : i = \overline{0, \infty}\}$ не является неприводимым порождающим множеством (так как из порождающего множества можно выбросить любое конечное количество элементов δ_i). Мы докажем, что полугруппа SSL_2 не содержит неприводимых порождающих множеств. Для этого более глубоко изучим свойства порождающих элементов $\alpha_i, \beta_i, \delta_i$.

Рассмотрим три серии подмножеств SSl_2 :

$$\begin{aligned} B_i &= \{g \in SSl_2 \mid g : X^i \rightarrow X^i \text{ — биективно}\} = \\ &= \{g \in SSl_2 \mid \forall w_1, w_2 \in X^i [g(w_1) = g(w_2) \Leftrightarrow w_1 = w_2]\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_i &= \{g \in SSl_2 \mid \exists x \in X^i : g|_x \text{ — константно}\} = \\ &= \{g \in SSl_2 \mid \exists x \in X^i, \forall w_1, w_2 \in X^* [g(xw_1) = g(xw_2)]\} \end{aligned}$$

$$D_i = B_i \cap C_i, \quad i = \overline{0, \infty}$$

Очевидно, выполнены следующие включения

$$\begin{aligned} B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots \\ C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset \dots \end{aligned}$$

Также выполнено $B_0 = SSl_2$ — совпадает со всей полугруппой (все элементы SSl_2 биективны на пустом слове), C_0 состоит из всех константных отображений из SSl_2 (будем считать проекцией элемента $g \in SSl_2$ на пустое слово сам элемент g), $\bigcap_{i=\overline{0, \infty}} B_i = GSlC_2$ — совпадает с группой обратимых элементов SSl_2 . Обозначим

$$C = \bigcup_{i=\overline{0, \infty}} C_i = \{g \in SSl_2 \mid \exists x \in X^* : g|_x \text{ — константно}\}$$

— множество элементов, имеющих константную проекцию. Непосредственно проверяется, что для порождающих элементов выполнены следующие включения:

1. $\alpha_i \in GSlC_2, \alpha_i \notin C$ для любого $i \geq 0$;
2. $\beta_i \in B_i, \beta_i \notin B_{i+1}, \beta_i \notin C$, для любого $i \geq 0$;
3. $\delta_i \in D_i, \delta_i \notin B_{i+1}$ для любого $i \geq 0$ и $\delta_i \notin C_{i-1}$ для любого $i \geq 1$.

Таким образом, множества D_i , а значит, и B_i, C_i непусты. Легко видеть, что B_i, C_i, D_i — подполугруппы SSl_2 . Действительно, если преобразования слов g и h биективны на словах длины i , то и их композиция gh биективна на словах длины i . Далее, если $g|_x$ константно для $x \in X^i$, то $(hg)|_x$ тоже константно для любого преобразования слов h , т. е. C_i является левым идеалом в SSl_2 . Также очевидно, что $SSl_2 \setminus B_i$ является двусторонним идеалом в SSl_2 , так как если $g \in SSl_2 \setminus B_i$, т. е. $g : X^i \rightarrow X^i$ — не биективно, то для любого $h \in SSl_2$ не могут быть биективными отображения $gh : X^i \rightarrow X^i$ и $hg : X^i \rightarrow X^i$.

Лемма 2. Для любых элементов $g, h \in SSl_2$ и неотрицательного целого i выполнено $g\delta_i h \in C$ (т. е. композиции, включающие в себя δ_i , имеют константные проекции).

Доказательство. Если $i = 0$, то δ_0 — левый ноль и $g\delta_0 h = g\delta_0$ и для любого $x \in X$ выполнено $(g\delta_0 h)(x) = (g\delta_0)(x) = g(0^*)$, т. е. $g\delta_0 h$ — константно.

Предположим теперь, что $i > 0$. Запишем h через в виде композиции образующих SSl_2 . Без ограничения общности можно считать, в этой композиции нет

элементов δ_j (иначе возьмем последний δ_j из композиции в качестве нового δ_i). Предположим сначала, что в разложении h нет элементов вида β_j , т. е. он обратим. Тогда по некоторому символу x (нулю или единице) проекция $g\delta_i h$ имеет вид $(g\delta_i h)|_x = g|_0 \circ \delta_i|_0 \circ h_x = g|_0 \circ \delta_{i-1} \circ h_x$, т. е. на месте δ_i стоит δ_{i-1} (мы будем говорить, что δ_i опустился), причем h' опять обратимо. Продолжая проектировать, так чтобы выбранный элемент δ опускался, получим константную проекцию вида $(g\delta_i h)|_w = g'\delta_0 h'$, т. е. получено $g\delta_i h \in C$. Если же в разложении h были элементы вида β_j , то будем проектировать элемент $g\delta_i h$ так, чтобы опускалось сначала последнее β_j до β_0 (это сделать можно, так как далее стоит обратимый элемент), а в следующей проекции β_0 исчезнет. При этом некоторые из остальных элементов β_j в h , возможно, опустятся или даже исчезнут, а δ_i превратится в $\delta_{i'}$, где $i' \leq i$. Таким образом, некоторая проекция $(g\delta_i h)|_{w'} = g'\delta_{i'} h'$, где в разложении h' количество элементов вида β_j строго меньше, чем в изначальном разложении элемента h . Если $i' > 0$, будем продолжать проектировать элемент $g'\delta_{i'} h'$, поочередно опуская элементы β_j из h' , пока они все не исчезнут, после чего опустим $\delta_{i'}$ и получим $(g\delta_i h)|_{w''} = g''\delta_0 h''$, т.е. $g\delta_i h \in C$. \square

Лемма 3. *Элемент $s \in SSL_2$ представим в виде композиции α_i и β_i тогда и только тогда, когда он не имеет константных проекций, т. е.*

$$\langle \alpha_i, \beta_i : i = \overline{0, \infty} \rangle = SSL_2 \setminus C.$$

Более того, любой элемент полугруппы $\langle \alpha_i, \beta_i : i = \overline{0, \infty} \rangle$ имеет либо тождественную проекцию, либо проекцию, равную α_0 . Множество C является двусторонним самоподобным идеалом SSL_2 и элементы из C не имеют обратимых проекций.

Доказательство. Пусть $s \in SSL_2 \setminus \langle \alpha_i, \beta_i : i = \overline{0, \infty} \rangle$. Тогда s имеет в представлении через порождающие элементы SSL_2 элемент δ_i , т. е. представим в виде $s = g\delta_i h$, откуда $s \in C$.

Предположим теперь, что $s \in \langle \alpha_i, \beta_i : i = \overline{0, \infty} \rangle$. Учитывая, что $\langle \alpha_i, \beta_i : i = \overline{0, \infty} \rangle$ самоподобная группа, любая проекция элемента s тоже принадлежит $\langle \alpha_i, \beta_i : i = \overline{0, \infty} \rangle$. Более того, последовательно опуская элементы β_i , мы получим обратимую проекцию, а затем, опуская элементы α_i до α_0 и учитывая, что $\alpha_0^2 = id$, мы получим либо тождественную проекцию, либо проекцию α_0 . Так как произвольная проекция $s|_w$ принадлежит $\langle \alpha_i, \beta_i : i = \overline{0, \infty} \rangle$, то она имеет проекцию $(s|_w)|_v \in \{id, \alpha_0\}$, и следовательно, не может быть константной, т. е. $s \in SSL_2 \setminus C$.

Так как δ_i в любой проекции всегда дает δ_j , где $j \leq i$, то любая проекция элемента из C снова принадлежит C , откуда C – двусторонний самоподобный идеал SSL_2 . Соответственно, проекция элемента из C не может быть обратимой, так как C не содержит обратимых элементов. \square

Теорема 5. *Полугруппа SSL_2 не содержит неприводимых порождающих множеств.*

Доказательство. Пусть X – некоторое произвольное порождающее множество полугруппы SSL_2 . Очевидно, что в X есть элемент из C , иначе $\langle X \rangle \subset SSL_2 \setminus C$ (так как $SSL_2 \setminus C$ – подполугруппа SSL_2). Пусть $x \in X \cap C$, и,

например, проекция $x|_w$ константна. Тогда $x \in C_i$ для некоторого i , равного длине слова w , и $x \notin B_{i+1}$, так как $x(w0) = x|_w(0) = x|_w(1) = x(w1)$. Очевидно, что для произвольных целых $j \leq 0$ и $k \leq i + 1$ элементы $\alpha_j, \beta_j, \delta_k \in \langle X \rangle$, т. е. выражаются в виде композиций элементов из X . Но так как $\alpha_j, \beta_j, \delta_k \in B_{i+1}$, $x \in SSL_2 \setminus B_{i+1}$, а $SSL_2 \setminus B_{i+1}$ — двусторонний идеал SSL_2 , то элементы $\alpha_j, \beta_j, \delta_k$ не могут выражаться через x , а следовательно, являются композицией элементов $X \setminus \{x\}$. Но множество $\{\alpha_j, \beta_j, \delta_k | j = \overline{0, \infty}, k = \overline{i+1, \infty}\}$ является порождающим для SSL_2 , откуда и $X \setminus \{x\}$ — порождающее множество полугруппы SSL_2 . Значит, произвольное порождающее множество X полугруппы SSL_2 не является неприводимым, что и требовалось доказать. \square

С другой стороны, $\{\alpha_i | i = \overline{0, \infty}\}$ — неприводимая система образующих группы $GSLC_2$ (см., например, [7], [8]). Очевидно, что α_i не могут выражаться через композицию элементов из $\{\alpha_i, \beta_i, \delta_i : i = \overline{0, \infty}\}$, содержащую хотя бы один элемент β_j или δ_j . Элементы β_i не могут выражаться через композицию, включающую в себя δ_j . Элемент β_i не может выражаться через композицию, включающую β_j , где $j < i$, так $\beta_i \in B_i$, а $\beta_j \notin B_i$. С другой стороны, элемент β_i не может быть выражен через композицию только элементов α_k и β_l , где $l > i$ и $k \geq 0$, так как $\alpha_k, \beta_l \in B_{i+1}$, а $\beta_i \notin B_{i+1}$. Таким образом, множество $\{\alpha_i, \beta_i | i = \overline{0, \infty}\}$ является неприводимым порождающим множеством полугруппы $\langle \alpha_i, \beta_i : i = \overline{0, \infty} \rangle$. Также для любого фиксированного k элемент δ_k не принадлежит $\langle \alpha_i, \beta_i : i = \overline{0, \infty} \rangle$, с другой стороны, α_i, β_i не могут выражаться через композицию, включающую δ_k , поэтому для любого фиксированного k множество $\{\alpha_i, \beta_i, \delta_k | i = \overline{0, \infty}\}$ является неприводимым порождающим множеством полугруппы $S_k = \langle \alpha_i, \beta_i, \delta_k : i = \overline{0, \infty} \rangle$, причем $S_k \subset S_{k+1}$ для любого неотрицательного целого k и $\bigcup_{k=0}^{\infty} S_k = SSL_2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. В данной статье установлено, что полугруппа, порожденная всеми малоподвижными автоматными преобразованиями конечного типа, не имеет неприводимого порождающего множества. Таким образом, порождающее множество указанное в статье, в некотором смысле "оптимально". В то же время группа, порожденная малоподвижными обратимыми автоматами конечного типа, имеет неприводимое порождающее множество.

Дальнейшими направлениями развития могут быть рассмотрение соотношений между элементами и порождающими элементами и обобщение результатов на случай произвольного конечного алфавита.

1. Гечег Ф. О группе взаимно однозначных преобразований, определенных конечными автоматами [текст] / Ф. Гечег // Кибернетика. — 1965. — № 1. — С. 37–39.
2. Заровный В. П. Автоматные подстановки и сплетения групп [текст] / В. П. Заровный // Кибернетика. — 1965. — № 1. — С. 29–36.
3. Григорчук Р. И. Автоматы, динамические системы и группы [текст] / Р. И. Григорчук, В. В. Некрашевич, В. И. Сушанский // Тр. Математ. ин-та им. В. А. Стеклова. — 2000. — 231. — С. 134–214.
4. Олийнык А. С. Полугруппы преобразований, задаваемых автоматами Мили над конечным алфавитом [текст] / А. С. Олийнык, И. И. Резников, В. И. Сушанский

// Алгебраїчні структури та їх застосування: Праці Українського математичного конгресу-2001. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – С. 80–99.

5. **Dassow J.** Completeness problems in the structural theory of automata [text] / J. Dassow // Berlin:Academia-Verlag, 1981.
6. **Antonenko A. S.** Groups and Semigroups Defined by some Classes of Mealy Automata [text] / A. S. Antonenko, Eu. L. Berkovich // Acta Cybernetica. – 2007. – V. 18. – P. 23–46.
7. **Беркович Е. Л.** Группа, порожденная малоподвижными автоматами конечного типа над двухсимвольным алфавитом [текст] / Е. Л. Беркович, А. С. Антоненко // Доклады одесского семинара по дискретной математике. – № 7 (Ноябрь 2008). – С. 4–13.
8. **Antonenko A.** Groups generated by slowmoving automata transformations [text] / A. Antonenko, E. Berkovich // 7th International Algebraic Conference in Ukraine. – Kharkov, 2009. – P. 14.

УДК 517.9

А. В. Арсирій*, **И. В. Молчанюк****, **А. В. Плотников****

*Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

**Одесская государственная академия строительства и архитектуры

ОБОСНОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ СХЕМЫ ПОЛНОГО УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ С ПРОИЗВОДНОЙ ХУКУХАРЫ

Арсирій А. В., Молчанюк І. В., Плотніков А. В. Обґрунтування можливості використання схеми повного усереднення для задачі керування лінійною системою із похідною Хукухари. У даній статті розглядається задача оптимального керування багатозначними траєкторіями із термінальним критерієм якості. Обґрунтовується метод повного усереднення для такого типу задач з малим параметром та неперіодичною правою частиною.

Ключові слова: диференціальні рівняння з похідною Хукухари, задачі керування, метод усереднення.

Арсирій А. В., Молчанюк И. В., Плотников А. В. Обоснование возможности применения схемы полного усреднения для задачи управления линейной системой с производной Хукухары. В данной статье рассматривается задача оптимального управления многозначными траекториями с терминальным критерием качества. Обосновывается метод полного усреднения для такого типа задач, содержащих малый параметр, для случая неперiodической правой части.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с производной Хукухары, задачи управления, метод усреднения.

Arsirii A. V., Molchanyuk I. V., Plotnikov A. V. Justifying of opportunity using the full averaging schema for the control problem of the linear system with the Hukuhara derivative. In the given article we consider the optimal control problem of the setvalued with the terminal criteria of quality. The method of complete averaging is justified for such type of control system, containing a small parameter for the cases with non-periodic right-hand side.

Key words: differential equation with the Hukuhara derivative, control problem, method of averaging.

ВВЕДЕНИЕ.

В 30-х годах XX века появились первые исследования по теории дифференциальных уравнений с многозначной правой частью, в которых была предпринята попытка обобщить существовавшие в то время результаты по теории дифференциальных уравнений.

Быстрому развитию многозначного анализа или аппарата математического анализа применительно к исследованию многозначных отображений способствовала возможность исследования задач оптимального управления с помощью дифференциальных включений.

Так, в [6] М. Hukuhara ввел производную и интеграл от многозначных отображений и исследовал их связь между собой. Впоследствии в работах

F. S. de Blasi и F. Iervolino [4, 22] были рассмотрены дифференциальные уравнения с производной Хукухары. Затем были введены различные определения решений этих уравнений и доказаны теоремы их существования [1, 3].

Для решения задач оптимального управления широко применяется метод усреднения. Математическое обоснование метода началось с фундаментальных результатов Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [18]. Для дифференциальных уравнений и включений с производной Хукухары теоремы, являющаяся аналогом первой теоремы Н. Н. Боголюбова, были доказаны в работах Kisielewicz M. [21, 8], Плотникова А. В. [1, 3] и Скрипник Н. В. [1, 9].

В статье обоснована возможность применения метода усреднения для линейных управляемых дифференциальных уравнений с производной Хукухары.

Вначале введем некоторые необходимые нам в дальнейшем определения и обозначения.

Пусть R^n — n -мерное вещественное евклидово пространство векторов $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ с нормой $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

Пусть $Conv(R^n)$ — пространство непустых компактных и выпуклых подмножеств евклидова пространства R^n с метрикой Хаусдорфа

$$h(A, B) = \min\{r \geq 0 \mid A \subset S_r(B), B \subset S_r(A)\},$$

где $A, B \in Conv(R^n)$, $S_r(a)$ — шар радиуса r с центром в точке a .

Определение 1. [4] Пусть $A, B \in Conv(R^n)$. Если существует множество $C \in Conv(R^n)$ такое, что $A = B + C$, то C называется разностью Хукухары множеств A и B и обозначается $A \stackrel{h}{\setminus} B$.

Определение 2. [4] Многозначное отображение $F(\cdot) : R^1 \rightarrow Conv(R^n)$ дифференцируемо по Хукухаре в точке $t \in R^1$, если существует $D_h F(t) \in Conv(R^n)$ такое, что пределы

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta t} (F(t + \Delta t) \stackrel{h}{-} F(t)), \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta t} (F(t) \stackrel{h}{-} F(t - \Delta t))$$

существуют и равны $D_h F(t)$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

Рассмотрим задачу оптимального управления линейной системой, описываемой дифференциальным уравнением с производной Хукухары стандартного вида:

$$D_h X(t, u) = \varepsilon[A(t)X(t, u) + B(t)u(t) + F(t)], \quad X(0, u) = X_0, \quad (1)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $t \in R_+ = [0, +\infty)$; $X(\cdot, u) : R_+ \rightarrow Conv(R^n)$ — многозначное отображение, определяющее состояние системы; $D_h X(t, u)$ — производная Хукухары; $A(t)$ — матрица ($n \times n$); $B(t)$ — матрица ($n \times m$); $u(\cdot) \in U \in Conv(R^m)$ — управляемое воздействие; $F(\cdot) : R_+ \rightarrow Conv(R^n)$ — многозначное отображение.

Определение 3. Множество суммируемых функций таких, что $u(t) \in U$ для почти всех $t \in R_+$, будем называть множеством допустимых управлений LU .

Определение 4. [1] Решением задачи (1) соответствующим допустимому управлению $u(\cdot) \in LU$, называется абсолютно непрерывное многозначное отображение $X(\cdot, u)$, удовлетворяющее (1) почти всюду на R_+ .

Предположение 1. Будем предполагать, что система (1) удовлетворяет условиям:

- 1) матрица $A(t)$ — измерима на R_+ ;
- 2) существует константа $a > 0$ такая, что $\|A(t)\| \leq a$ для почти всех $t \in R_+$;
- 3) матрица $B(t)$ — измерима на R_+ ;
- 4) существует константа $b > 0$ такая, что $\|B(t)\| \leq b$ для почти всех $t \in R_+$;
- 5) $U \in Conv(R^n)$;
- 6) многозначное отображение $F(\cdot)$ измеримо на R_+ ;
- 7) существует константа $f > 0$ такая, что $h(F(t), \{0\}) \leq f$ для почти всех $t \in R_+$.

1. Построение усредненного уравнения для рассматриваемого исходного уравнения.

Уравнению (1) поставим в соответствие усредненное уравнение

$$D_h Y(t, v) = \varepsilon[\bar{A}Y(t, v) + v(t) + \bar{F}], \quad Y(0, v) = X_0, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt, & \bar{F} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt, \\ v(t) \in V &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T B(t) U dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Установим соответствие между управлением $u(\cdot)$ исходного уравнения (1) и управлением $v(t)$ усредненного уравнения (2). Обозначим множество допустимых управлений уравнения (1) LU , а уравнения (2) — LV .

Управлению $u(\cdot)$ поставим в соответствие управление $v(\cdot)$ следующим образом:

- 1) Вычисляем

$$w_i = \frac{1}{T_1} \int_{iT_1}^{(i+1)T_1} B(t)u(t)dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{где } T_1 > 0 \text{ — константа.}$$

- 2) Строим управление $v(t) = \{v_i(t), \quad iT_1 \leq t < (i+1)T_1, \quad i = 0, 1, 2, \dots\}$, где $v_i(t)$ находим из условия:

$$\min_{\bar{v}(t) \in LV} \|w_i - \bar{v}(t)\| = \|w_i - v_i(t)\|.$$

Управлению $v(\cdot)$ поставим в соответствие управление $u(\cdot)$ следующим образом:

- 1) Вычисляем

$$w_i(t) = \frac{1}{T_1} \int_{iT_1}^{(i+1)T_1} v(t)dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{где } T_1 > 0 \text{ — константа.}$$

2) Строим управление $u(t) = \{u_i(t), \quad iT_1 \leq t < (i+1)T_1, \quad i = 0, 1, 2, \dots\}$, где $u_i(t)$ находим из условия:

$$\min_{\bar{u}(t) \in LU} \left\| \frac{1}{T_1} \int_{iT_1}^{(i+1)T_1} B(t)\bar{u}(t)dt - w_i \right\| = \left\| \frac{1}{T_1} \int_{iT_1}^{(i+1)T_1} B(t)u_i(t)dt - w_i \right\|.$$

2. Близость решений исходного и усредненного уравнений.

Оценим близость решений исходного и усредненного уравнений (1) и (2).

Теорема 1. Пусть выполняются условия предположения 1.

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ существует $\varepsilon_0(\eta, L) \in (0, \sigma]$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедливы следующие утверждения:

1) для любого допустимого управления $u(\cdot) \in LU$ существует допустимое управление $v_u(\cdot) \in LV$ такое, что справедлива оценка

$$h(X(t, u), Y(t, v_u)) \leq \eta; \quad (4)$$

2) для любого допустимого управления $v(\cdot) \in LV$ существует допустимое управление $u_v(\cdot) \in LU$ такое, что справедлива оценка

$$h(X(t, u_v), Y(t, v)) \leq \eta. \quad (5)$$

Доказательство. Представим решения исходного и усредненного уравнений в интегральной форме:

$$X(t, u) = X_0 + \varepsilon \int_0^t [A(s)X(s, u) + B(s)u(s) + F(s)]ds,$$

$$Y(t, v) = X_0 + \varepsilon \int_0^t [\bar{A}Y(s, v) + v(s) + \bar{F}]ds.$$

Оценим сверху решение исходного уравнения:

$$\begin{aligned} & h(X(t, u), \{0\}) \leq \\ & \leq h(X_0, \{0\}) + \varepsilon h \left(\int_0^t [A(s)X(s, u) + B(s)u(s) + F(s)]ds, \{0\} \right) \leq \\ & \leq h(X_0, \{0\}) + \varepsilon \int_0^t [\|A(s)\|h(X(s, u), \{0\}) + \|B(s)\|\|u(s)\| + h(F(s), \{0\})]ds \leq \\ & \leq h(X_0, \{0\}) + (bu_0 + f)L + \varepsilon a \int_0^t h(X(s, u), \{0\})ds. \end{aligned}$$

Отсюда, по лемме Гронуолла–Беллмана, следует, что

$$h(X(t, u), \{0\}) \leq (h(X_0, \{0\}) + L(bu_0 + f))e^{aL}.$$

Аналогично получим оценку для решения усредненного уравнения:

$$h(Y(t, v), \{0\}) \leq (h(X_0, \{0\}) + L(bu_0 + f))e^{\alpha L}.$$

Обозначим через $M = (h(X_0, \{0\}) + L(bu_0 + f))e^{\alpha L}$.

Тогда

$$h(X(t, u), \{0\}) \leq M, \quad h(Y(t, v), \{0\}) \leq M. \quad (6)$$

Разобьем промежутки $[0, L\varepsilon^{-1}]$ с шагом $\frac{L}{\varepsilon m}$ и обозначим $t_i = \frac{iL}{\varepsilon m}$, $i = 0, \dots, m$.

Оценим близость решений исходного и усредненного уравнений соответствующими допустимому исходному управлению $u(\cdot) \in LU$ и соответствующему ему допустимому усредненному $v_u(\cdot) \in LV$.

$$\begin{aligned} & h(X(t, u), Y(t, v_u)) \leq \\ & \leq \varepsilon h \left(\int_0^t [A(s)X(s, u) + B(s)u(s) + F(s)] ds, \int_0^t [\bar{A}Y(s, v_u) + v_u(s) + \bar{F}] ds \right) \leq \\ & \leq \varepsilon \left[h \left(\int_0^t A(s)X(s, u) ds, \int_0^t \bar{A}Y(s, v_u) ds \right) + \right. \\ & \left. + \left\| \int_0^t B(s)u(s) ds - \int_0^t v_u(s) ds \right\| + h \left(\int_0^t F(s) ds, \int_0^t \bar{F} ds \right) \right]. \quad (7) \end{aligned}$$

Теперь каждое слагаемое в (7) оценим отдельно с учетом (6). Предположим, что для некоторого k , $0 \leq k \leq m-1$, $t \in (t_k, t_{k+1})$.

$$\begin{aligned} & h \left(\int_0^t A(s)X(s, u) ds, \int_0^t \bar{A}Y(s, v_u) ds \right) \leq \\ & \leq h \left(\int_0^t A(s)X(s, u) ds, \int_0^t \bar{A}X(s, u) ds \right) + h \left(\int_0^t \bar{A}X(s, u) ds, \int_0^t \bar{A}Y(s, v_u) ds \right) \leq \\ & \leq \sum_{i=0}^{k-1} h \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X(s, u) ds, \int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{A}X(s, u) ds \right) + h \left(\int_{t_k}^t A(s)X(s, u) ds, \right. \\ & \left. \int_{t_k}^t \bar{A}X(s, u) ds \right) + h \left(\int_0^t \bar{A}X(s, u) ds, \int_0^t \bar{A}Y(s, v_u) ds \right). \quad (8) \end{aligned}$$

Обозначим через $X_i = X(t_i, u)$. Тогда

$$\begin{aligned} & h \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X(s, u) ds, \int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{A}X(s, u) ds \right) \leq \\ & \leq h \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X(s, u) ds, \int_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X_i ds \right) + h \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X_i ds, \int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{A}X_i ds \right) + \\ & \quad + h \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{A}X_i ds, \int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{A}X(s, u) ds \right). \end{aligned}$$

Так как $\bar{A} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt$ и $X_i \in Conv(R^n)$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X_i ds, \int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{A}X_i ds \right) = \frac{L}{\varepsilon m} \alpha_1 \left(\frac{L}{\varepsilon m} \right), \text{ где } \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_1(t) = 0.$$

То есть

$$\begin{aligned}
 & h \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X(s, u)ds, \int_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}X(s, u)ds \right) \leq h \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X(s, u)ds, \right. \\
 & \left. \int_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X_i ds \right) + h \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}X_i ds, \int_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}X(s, u)ds \right) + \frac{L}{\varepsilon m} \alpha_1 \left(\frac{L}{\varepsilon m} \right) \leq \\
 & \leq \varepsilon h \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} A(s) \int_{t_i}^s [A(q)X(q, u) + B(q)u(q) + F(q)]dq ds, \{0\} \right) + \\
 & + \varepsilon h \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A} \int_{t_i}^s [A(q)X(q, u) + B(q)u(q) + F(q)]dq ds, \{0\} \right) + \frac{L}{\varepsilon m} \alpha_1 \left(\frac{L}{\varepsilon m} \right) \leq \\
 & \leq \varepsilon \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} a \int_{t_i}^s [aM + bu_0 + f]dq ds \right) + \\
 & + \varepsilon \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} a \int_{t_i}^s [aM + bu_0 + f]dq ds \right) + \frac{L}{\varepsilon m} \alpha_1 \left(\frac{L}{\varepsilon m} \right) \leq \\
 & \leq 2\varepsilon a \left(\frac{L}{\varepsilon m} \right)^2 (aM + bu_0 + f) + \frac{L}{\varepsilon m} \alpha_1 \left(\frac{L}{\varepsilon m} \right). \tag{9}
 \end{aligned}$$

Далее, используя свойства опорных функций, получим, что

$$\begin{aligned}
 & h \left(\int_{t_k}^t A(s)X(s, u)ds, \int_{t_k}^t \overline{A}X(s, u)ds \right) \leq \int_{t_k}^t h(A(s)X(s, u)ds, \overline{A}X(s, u)ds) \leq \\
 & \leq \int_{t_k}^t \max_{\|\psi\|=1} |C(X(s, u), A^T(s)\psi) - C(X(s, u), \overline{A}^T\psi)| ds \leq \\
 & \leq \int_{t_k}^t h(X(s, u), 0) \max_{\|\psi\|=1} \|A^T(s)\psi - \overline{A}^T\psi\| ds \leq 2aM \frac{L}{\varepsilon m}. \tag{10}
 \end{aligned}$$

Наконец,

$$h \left(\int_0^t \overline{A}X(s, u)ds, \int_0^t \overline{A}Y(s, v_u)ds \right) \leq a \int_0^t h(X(s, u), Y(s, v_u))ds. \tag{11}$$

Таким образом, из (8),(9),(10),(11) получим, что

$$\begin{aligned}
 & h \left(\int_0^t A(s)X(s, u)ds, \int_0^t \overline{A}Y(s, v_u)ds \right) \leq \frac{2aL}{\varepsilon m} (L(aM + bu_0 + f) + M) + \\
 & + \frac{L}{\varepsilon} \alpha_1 \left(\frac{L}{\varepsilon m} \right) + a \int_0^t h(X(s, u), Y(s, v_u))ds. \tag{12}
 \end{aligned}$$

Теперь в (7) оценим второе и третье слагаемые:

$$\begin{aligned}
 & \left\| \int_0^t B(s)u(s)ds - \int_0^t v_u(s)ds \right\| \leq \\
 & \leq \sum_{i=0}^{k-1} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} B(s)u(s)ds - \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_u(s)ds \right\| + \left\| \int_{t_k}^t B(s)u(s)ds - \int_{t_k}^t v_u(s)ds \right\|.
 \end{aligned}$$

Так как $U \in Conv(R^m)$ и $v(t) \in V = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T B(t)U dt$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} B(s)u(s)ds - \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_u(s)ds \right\| = \frac{L}{\varepsilon m} \alpha_2 \left(\frac{L}{\varepsilon m} \right), \text{ где } \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_2(t) = 0.$$

То есть

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t B(s)u(s)ds - \int_0^t v_u(s)ds \right\| &\leq \left\| \int_{t_k}^t B(s)u(s)ds - \int_{t_k}^t v_u(s)ds \right\| + \\ &+ m \frac{L}{\varepsilon m} \alpha_2 \left(\frac{L}{\varepsilon m} \right) \leq \int_{t_k}^t [\|B(s)\| \|u(s)\| - \|v_u(s)\|] ds + \frac{L}{\varepsilon} \alpha_2 \left(\frac{L}{\varepsilon m} \right) \leq \\ &\leq 2bu_0 \frac{L}{\varepsilon m} + \frac{L}{\varepsilon} \alpha_2 \left(\frac{L}{\varepsilon m} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Далее

$$\begin{aligned} &h \left(\int_0^t F(s)ds, \int_0^t \bar{F}ds \right) \leq \\ &\leq h \left(\sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(s)ds, \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{F}ds \right) + h \left(\int_{t_k}^t F(s)ds, \int_{t_k}^t \bar{F}ds \right). \end{aligned}$$

Так как $\bar{F} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t)dt$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} F(s)ds, \int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{F}ds \right) = \frac{L}{\varepsilon m} \alpha_3 \left(\frac{L}{\varepsilon m} \right), \text{ где } \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_3(t) = 0.$$

То есть

$$\begin{aligned} &h \left(\int_0^t F(s)ds, \int_0^t \bar{F}ds \right) \leq \\ &\leq \int_{t_k}^t h(F(s), \bar{F})ds + \frac{L}{\varepsilon} \alpha_3 \left(\frac{L}{\varepsilon m} \right) \leq 2f \frac{L}{\varepsilon m} + \frac{L}{\varepsilon} \alpha_3 \left(\frac{L}{\varepsilon m} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Из (7),(12),(13),(14) следует, что

$$\begin{aligned} h(X(t, u), Y(t, v_u)) &\leq \varepsilon h \left(\int_0^t A(s)X(s, u)ds, \int_0^t \bar{A}Y(s, v_u)ds \right) + \\ &+ \varepsilon \left\| \int_0^t B(s)u(s)ds - \int_0^t v_u(s)ds \right\| + \varepsilon h \left(\int_0^t F(s)ds, \int_0^t \bar{F}ds \right) \leq \\ &\leq \frac{2aL}{m} (L(aM + bu_0 + f) + M) + L\alpha_1 \left(\frac{L}{\varepsilon m} \right) + a\varepsilon \int_0^t h(X(s, u), Y(s, v_u))ds + \\ &+ 2bu_0 \frac{L}{m} + L\alpha_2 \left(\frac{L}{\varepsilon m} \right) + 2f \frac{L}{\varepsilon m} + \frac{L}{\varepsilon} \alpha_3 \left(\frac{L}{\varepsilon m} \right) = L \left(\frac{2}{m} (aL + 1) (aM + bu_0 + f) + \right. \end{aligned}$$

$$+\alpha_1 \left(\frac{L}{\varepsilon m}\right) + \alpha_2 \left(\frac{L}{\varepsilon m}\right) + \alpha_3 \left(\frac{L}{\varepsilon m}\right) + a\varepsilon \int_0^t h(X(s, u), Y(s, v_u)) ds. \quad (15)$$

Тогда из леммы Гронуолла–Беллмана из (15) следует, что

$$\begin{aligned} & h(X(t, u), Y(t, v_u)) \leq \\ & \leq L \left(\frac{2}{m}(aL + 1)(aM + bu_0 + f) + \alpha_1 \left(\frac{L}{\varepsilon m}\right) + \alpha_2 \left(\frac{L}{\varepsilon m}\right) + \alpha_3 \left(\frac{L}{\varepsilon m}\right)\right) e^{a\varepsilon \int_0^t ds} = \\ & = L \left(\frac{2}{m}(aL + 1)(aM + bu_0 + f) + \right. \\ & \left. + \alpha_1 \left(\frac{L}{\varepsilon m}\right) + \alpha_2 \left(\frac{L}{\varepsilon m}\right) + \alpha_3 \left(\frac{L}{\varepsilon m}\right)\right) e^{aL}. \end{aligned} \quad (16)$$

Выберем количество точек разбиения m_0 таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{2L}{m_0}(aL + 1)(aM + bu_0 + f) \leq \frac{\eta}{e^{aL}}. \quad (17)$$

Затем при фиксированном m_0 выберем ε_0 так, чтобы для любого $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ выполнялось

$$L \left(\alpha_1 \left(\frac{L}{\varepsilon m}\right) + \alpha_2 \left(\frac{L}{\varepsilon m}\right) + \alpha_3 \left(\frac{L}{\varepsilon m}\right)\right) \leq \frac{\eta}{e^{aL}}. \quad (18)$$

Таким образом из (16) и (18) следует оценка (4).

Оценка (5) доказывается аналогично.

Теорема доказана.

3. Близость критериев качества.

Рассмотрим критерий качества для исходного уравнения (1)

$$I(u) = \Phi(X(T, u)) \rightarrow \max, \quad (19)$$

а также для усредненного уравнения

$$\bar{I}(v) = \Phi(Y(T, v)) \rightarrow \max, \quad (20)$$

где $\Phi(\cdot) : \text{Conv}(R^n) \rightarrow R^1$.

Теперь покажем близость решений задач (1),(19) и (2),(20) по значениям критериев качества.

Теорема 2. Пусть система (1) удовлетворяет условиям предположения 1 и пусть отображение $\Phi(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной λ . Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ существует $\varepsilon_0(\eta, L) \in (0, \sigma]$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $T \in [0, L\varepsilon_0^{-1}]$ справедливы следующие утверждения:

1) для оптимального управления $u^*(\cdot)$ исходной задачи (1),(19) существует допустимое управление $v_{u^*}(\cdot)$ усредненного уравнения (2) такое, что

$$|I(u^*) - \bar{I}(v_{u^*})| \leq \eta; \quad (21)$$

2) для оптимального управления $v^*(\cdot)$ усредненной задачи (2),(20) существует допустимое управление $u_{v^*}(\cdot)$ исходного уравнения (1) такое, что

$$|I(u_{v^*}) - \bar{I}(v^*)| \leq \eta; \quad (22)$$

3) для оптимальных управлений $u^*(\cdot), v^*(\cdot)$ исходной (1), (19) и усредненной (2), (20) задач справедливо неравенство

$$|I(u^*) - \bar{I}(v^*)| \leq \eta; \quad (23)$$

4) для оптимального управления $u^*(\cdot)$ и допустимого управления $u_{v^*}(\cdot)$ исходной задачи (1), (19) справедливо неравенство

$$|I(u^*) - I(u_{v^*})| \leq \eta. \quad (24)$$

Доказательство. Пусть $u^*(\cdot)$ и $v^*(\cdot)$ — оптимальные управления соответственно исходной (1), (19) и усредненной (2), (20) задач, а $X^*(\cdot, u^*)$ и $Y^*(\cdot, v^*)$ — порожденные ими многозначные оптимальные решения.

$$\begin{aligned} D_h X^*(t, u^*) &= \varepsilon[A(t)X^*(t, u^*) + B(t)u^*(t) + F(t)], & X^*(0, u^*) &= X^0, \\ D_h Y^*(t, v^*) &= \varepsilon[\bar{A}Y^*(t, v^*) + v^*(t) + \bar{F}], & Y^*(0, v^*) &= X^0. \end{aligned}$$

Пусть $v_{u^*}(\cdot)$ и $u_{v^*}(\cdot)$ — допустимые управления соответственно усредненной (2), (20) и исходной (1), (19) задач, соответствующие оптимальным управлениям $u^*(\cdot)$ и $v^*(\cdot)$, а $X^1(\cdot, u_{v^*})$ и $Y^1(\cdot, v_{u^*})$ — порожденные этими управлениями многозначные решения, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} D_h X^1(t, u_{v^*}) &= \varepsilon[A(t)X^1(t, u_{v^*}) + B(t)u_{v^*}(t) + F(t)], & X^1(t, u_{v^*}) &= X^0, \\ D_h Y^1(t, v_{u^*}) &= \varepsilon[\bar{A}Y^1(t, v_{u^*}) + v_{u^*}(t) + \bar{F}], & Y^1(t, v_{u^*}) &= X^0. \end{aligned}$$

Согласно теореме 1, о близости решений исходного и усредненного уравнения

$$h(X^*(t, u^*), Y^1(t, v_{u^*})) \leq \eta_1, \quad h(X^1(t, u_{v^*}), Y^*(t, v^*)) \leq \eta_1 \quad \forall t \in [0, T].$$

Так как отображение $\Phi(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной λ , то из этих неравенств следует, что

$$\begin{aligned} |I(u^*) - \bar{I}(v_{u^*})| &= |\Phi(X^*(T, u^*)) - \Phi(Y^1(T, v_{u^*}))| \leq \\ &\leq \lambda h(X^*(T, u^*), Y^1(T, v_{u^*})) \leq \lambda \eta_1, \\ |I(u_{v^*}) - \bar{I}(v^*)| &= |\Phi(X^1(T, u_{v^*})) - \Phi(Y^*(T, v^*))| \leq \\ &\leq \lambda h(X^1(T, u_{v^*}), Y^*(T, v^*)) \leq \lambda \eta_1. \end{aligned}$$

Обозначим $\eta = \lambda \eta_1$ и получим справедливость оценок (21) и (22).

Теперь покажем справедливость оценки (23). Так как $u^*(\cdot)$ и $v^*(\cdot)$ — оптимальные управления, то

$$I(u^*) \geq I(u_{v^*}), \quad \bar{I}(v^*) \geq \bar{I}(v_{u^*}).$$

Возможны два случая:

- 1) $\bar{I}(v_{u^*}) + \lambda \eta_1 \geq I(u^*) > \bar{I}(v^*) \geq \bar{I}(v_{u^*})$,
- 2) $I(u_{v^*}) + \lambda \eta_1 \geq \bar{I}(v^*) \geq I(u^*) \geq I(u_{v^*})$.

Объединяя оба случая и обозначая $\eta = \lambda \eta_1$, получаем оценки (23) и (24).

Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. В статье рассматривалась задача управления многозначными траекториями с терминальным критерием качества.

Обоснована возможность применения метода усреднения для данной задачи. То есть доказана теорема, аналогичная теореме Боголюбова, показывающая близость многозначных траекторий исходной и усредненной систем. Также доказана теорема о близости соответствующий критериев качества.

1. **Крылов Н. М.** Введение в нелинейную механику [текст] / Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов. – К. Изд-во АН УССР, 1937. – 363 с.
2. **Плотников А. В.** Дифференциальные уравнения с "четкой" и нечеткой многозначной правой частью. Асимптотические методы [текст] / А. В. Плотников, Н. В. Скрипник. – Одесса: Астропринт, 2009. – 191 с.
3. **Плотников В. А.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы [текст] / Плотников А. В., Витюк А. Н. – Одесса: Астро-Принт, 1999, – 354 с.
4. **Brandao Lopes Pinto A. J.** Uniqueness and existence theorems for differential equations with compact convex valued solutions [text] / Brandao Lopes Pinto A. J., de Blasi F. S., Iervolino F. – Boll. U. M. I., 1970. – № 4. – P. 534–538.
5. **de Blasi F. S.** Equazioni differenziali con soluzioni a valore compatto convesso [text] / de Blasi F. S., Iervolino F. – Boll. Unione Mat. Ital., 1969. – V. 2, № 4–5. – P. 491–501.
6. **Hukuhara M.** Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe [text] / Hukuhara M. // Func. Ekvacioj., 1967. – № 10. – P. 205–223.
7. **Kisielewicz M.** Description of a class of differential equations with set - valued solutions [text] / Kisielewicz M. // Lincei-Rend. Sc. fis. mat. enat. – 1975. – V. 58. – P. 158–162.
8. **Kisielewicz M.** Method of averaging for differential equations with compact convex valued solutions [text] / Kisielewicz M. // Rend. Mat. – 1976. – V. 9, № 3. – P. 397–408.
9. **Perestyuk N. A.** Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities (De Gruyter Studies in Mathematics: 40) [text] / Perestyuk N. A., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik N. V. – Berlin/Boston: Walter De Gruyter GmbH Co., 2011. – 307 p.

УДК 519.635.4

В. Г. Вавричук, Р. С. Хапко

Львівський національний університет імені І. Франка

ПРО ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПАРАБОЛІЧНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ У ПЛОСКИХ НЕРЕГУЛЯРНИХ ОБЛАСТЯХ

Вавричук В. Г., Хапко Р. С. Про чисельне розв'язування параболічної задачі Коші у плоских нерегулярних областях. Запропоновано ітераційний чисельний метод для параболічної задачі Коші на основі граничних інтегральних рівнянь. Наявність кутових точок на границі області враховується завдяки введенню певної вагової функції та згущенню сітки в околі кутової точки. Для розв'язування інтегральних рівнянь використовується метод Нистрьома з супер-алгебраїчним порядком збіжності. Наведено результати чисельних експериментів.

Ключові слова: задача Коші, рівняння теплопровідності, метод Роте, метод граничних інтегральних рівнянь, нерегулярна область, згущення сітки.

Вавричук В. Г., Хапко Р. С. О численном решении параболической задачи Коши в плоских нерегулярных областях. Предложен итерационный численный метод для параболической задачи Коши на основании граничных интегральных уравнений. Наличие угловых точек на границе области учитывается благодаря введению определенной весовой функции и сгущению сетки в окрестности угловой точки. Для решения интегральных уравнений используется метод Нистрьома с супер-алгебраическим порядком сходимости. Приведены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: задача Коши, уравнение теплопроводности, метод Роте, метод граничных интегральных уравнений, нерегулярная область, сгущение сетки.

Vavrychuk V. G., Chapko R. S. On the numerical solution of parabolic Cauchy problem in irregular domain. A numerical iterative method for the parabolic Cauchy problem based on boundary integral equations is proposed. The presence of corner points is handled with help of some weight function and mesh grading near by the angular points. Solving the integral equations is performed using Nyström method with super-algebraic convergence order. Results of numerical experiments are presented.

Key words: Cauchy problem, heat equation, Rothe's method, boundary integral equation method, irregular domain, mesh grading.

Вступ. Задача Коші для параболічного рівняння може полягати у знаходженні розв'язку, що задовольняє початковій умові в області D , а також граничній умові Коші на частині границі області. Раніше нами розглядалася така задача у двозв'язній [5] та частково необмеженій [11] плоских областях. При цьому основне обмеження полягало в тому, що частина границі з даними Коші не могла мати спільних точок з іншою частиною межі області. Крім того, накладалися суттєві умови на гладкість границі. У даній роботі здійснена спроба подолати зазначені обмеження, що внесло специфіку при розв'язанні як оберненої, так і прямої задач.

Нехай $D \subset \mathbb{R}^2$ однозв'язна обмежена опукла область, границя якої складається з $L \geq 2$ відкритих дуг $\Gamma_1, \dots, \Gamma_L$ з класу C^2 . Вважатимемо, що криві $\bar{\Gamma}_\ell$ та $\bar{\Gamma}_{\ell+1}$ для $\ell = 1, \dots, L$ (тут $\Gamma_{L+1} = \Gamma_1$) мають одну спільну точку $x^{(\ell)}$, а кут, який утворюється в даній точці, рівний θ_ℓ . Кожну з дуг Γ_ℓ розподілимо в одну

з двох множин: $\Gamma_\ell \subset \Gamma_C$, якщо на ній відомі дані Коші (C – “Cauchy”), в іншому випадку, якщо на Γ_ℓ не задано жодних граничних умов, вважатимемо що $\Gamma_\ell \subset \Gamma_I$ (I – “inaccessible”).

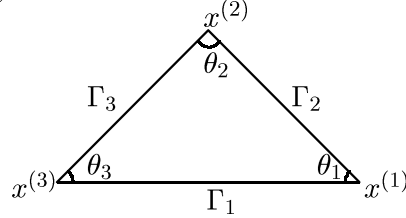


Рис. 1. Приклад нерегулярної області, $\Gamma_C = \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, $\Gamma_I = \Gamma_1$.

Нехай в області D справедливе параболічне рівняння

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \quad \text{в } D \times (0, T), \quad (1)$$

виконується однорідна початкова умова

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{для } x \in D \quad (2)$$

і задані граничні умови

$$u = f_1 \quad \text{і} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2 \quad \text{на } \Gamma_C \times (0, T), \quad (3)$$

тут $T > 0$ і f_1 узгоджується з початковою умовою. Незважаючи на те, що питання єдиності розв'язку задачі (1-3) є дослідженим [10], відомо, що вона є некоректною за Адамаром, оскільки порушується неперервна залежність розв'язку відносно заданих граничних функцій f_1 і f_2 .

1. Ітераційний метод. Застосування класичної регуляризації Тихонова до задачі (1-3) призводить до зміни оператора задачі, що суттєво ускладнює чисельне розв'язування отриманої коректної задачі. Альтернативою є ітераційні методи, які зберігають оператор задачі (1). Основна проблема при застосуванні, наприклад методу Ладвебера, полягає у необмеженості оператора, який моделює задачу Коші у просторах L^2 . Запропонований у [7, 8] підхід полягає у розгляді оператора у просторах з вагою і побудові відповідної ітераційної процедури. Простір L^2_β складається з функцій, для яких має місце

$$\|u\|_{L^2_\beta(D \times (0, T))} = \left(\int_{D \times (0, T)} r^{2\beta} |u|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

де $r(x) = \min_{\ell=1, \dots, L} \{|x - x^{(\ell)}|\}$, β – дійсне число.

На кожному кроці ітераційного методу потрібно розв'язувати такі мішані початково-крайові задачі

$$\begin{cases} \partial_t u_k - \Delta u_k = 0 & \text{в } D \times (0, T), \\ u_k = \eta_k & \text{на } \Gamma_I \times (0, T), \\ \frac{\partial u_k}{\partial \nu} = f_2 & \text{на } \Gamma_C \times (0, T), \\ u_k(x, 0) = 0 & \text{для } x \in D \end{cases} \quad (4)$$

і

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t v_k + \Delta v_k = 0 \quad \text{в } D \times (0, T), \\ v_k = 0 \quad \text{на } \Gamma_I \times (0, T), \\ \frac{\partial v_k}{\partial \nu} = \zeta_k \quad \text{на } \Gamma_C \times (0, T), \\ v_k(x, T) = 0 \quad \text{для } x \in D. \end{array} \right. \quad (5)$$

Нехай задано дані Коші $f_1 \in L^2_{\beta-3/2}(\Gamma_C \times (0, T))$, $f_2 \in L^2_{\beta-1/2}(\Gamma_C \times (0, T))$. Вибравши сталу β з проміжку $1/2 < \beta < 3/2$, будуватимемо наближення за наступним алгоритмом.

- Задаємо довільне початкове наближення $\eta_0 \in L^2_{\beta-3/2}(\Gamma_I \times (0, T))$.
- Перша апроксимація u_0 розв'язку u одержується, розв'язавши (4) з граничною умовою $u = \eta_0$ на $\Gamma_I \times (0, T)$.
- Далі знаходимо v_0 , розв'язавши (5) з другою граничною умовою зміненою на

$$\frac{\partial v_0}{\partial \nu} = \zeta_0 = r^{2(\beta-3/2)}(u_0 - f_1) \quad \text{на } \Gamma_C \times (0, T).$$

- При знайдених u_{k-1} і v_{k-1} апроксимація u_k знаходиться, розв'язавши (4) при

$$\eta_k = u_{k-1} + \gamma_L r^{2(3/2-\beta)} \frac{\partial v_{k-1}}{\partial \nu},$$

де $\gamma_L > 0$ деяка стала.

- Потім v_k знаходиться з (5) з граничною умовою

$$\frac{\partial v_k}{\partial \nu} = \zeta_k = r^{2(\beta-3/2)}(u_k - f_1) \quad \text{на } \Gamma_C \times (0, T).$$

Для дослідження збіжності ітераційного процесу визначимо оператор $K_\beta : L^2_{\beta-3/2}(\Gamma_I \times (0, T)) \rightarrow L^2_{\beta-3/2}(\Gamma_C \times (0, T))$, як

$$K_\beta \eta = u|_{\Gamma_C \times (0, T)} \quad \text{для } \eta \in L^2_{\beta-3/2}(\Gamma_I \times (0, T)),$$

тут u має задовольняти (4) при $f_2 = 0$.

Теорема 1. [7] *Нехай $1/2 < \beta < 3/2$, припустимо що параметр γ_L задовольняє $0 < \gamma_L < \|K_\beta\|^{-2}$. Тоді при точних вхідних даних для розв'язку задачі Коші $u \in L^2_{\beta-2}(D \times (0, T))$ і наближення u_k справджується*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u - u_k\|_{L^2_{\beta-2}(D \times (0, T))} = 0$$

для будь-якого початкового наближення $\eta_0 \in L^2_{\beta-3/2}(\Gamma_I \times (0, T))$.

Для η_k має місце збіжність до $u|_{\Gamma_I}$ в нормі простору $L^2_{\beta-3/2}(\Gamma_I \times (0, T))$. У випадку збурених даних Коші f_1^δ, f_2^δ , таких що

$$\|f_1 - f_1^\delta\|_{L^2_{\beta-3/2}(\Gamma_C \times (0, T))} + \|Gf_1 - Gf_1^\delta\|_{L^2_{\beta-1/2}(\Gamma_C \times (0, T))} \leq \delta,$$

де $n = 0, \dots, N-1$. Отже, нами отримано інтегральні рівняння, які містять ядра з логарифмічною особливістю і також алгебраїчну особливість у густині φ_n при підході до кутових точок [6], а саме для $\ell = 1, \dots, L$ має місце

$$\varphi_n(x) = \mathcal{O}(|x - x^{(\ell)}|^\lambda), \quad x \rightarrow x^{(\ell)}, \quad \lambda = \min \left\{ \frac{\pi}{2\theta_\ell}, \frac{\pi}{2(2\pi - \theta_\ell)} \right\} - 1. \quad (11)$$

З метою розробки в подальшому повністю дискретної чисельної схеми здійснимо параметризацію одержаних інтегральних рівнянь. Припустимо, що границя області D має параметричне подання

$$\Gamma_\ell = \{x_\ell(s) = (x_{\ell 1}(s), x_{\ell 2}(s)), x \in [0, \pi]\}, \quad \ell = 1, \dots, L.$$

Побудуємо заміну змінних [9], яка дасть можливість послабити особливість (11). Задавши кубічний поліном

$$\vartheta(s) = \left(\frac{1}{q} - \frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{\pi - 2s}{\pi} \right)^3 - \frac{1}{q} \left(\frac{\pi - 2s}{\pi} \right) + \frac{\pi}{2}, \quad (12)$$

де $0 \leq s \leq \pi$ і $q \geq 2$, визначимо перетворення

$$\gamma(s) = \pi \frac{[\vartheta(s)]^q}{[\vartheta(s)]^q + [\vartheta(\pi - s)]^q}, \quad 0 \leq s \leq \pi. \quad (13)$$

Поширимо $\gamma(s)$ на $[0, 2\pi]$ за правилом $\gamma(s) = \gamma(2\pi - s)$ при $\pi \leq s \leq 2\pi$. Таким чином, функцію γ можна вважати парною 2π -періодичною з класу $C^{q-1}[0, 2\pi]$, причому $\gamma^{(\ell)}(0) = \gamma^{(\ell)}(\pi) = \gamma^{(\ell)}(2\pi) = 0$ для $\ell = 1, \dots, q-1$. Слід зазначити, що спеціальний вигляд функції ϑ забезпечує більш рівномірний розподіл вузлів сітки в середині інтервалу $(0, \pi)$, завдяки чому одержуються дещо кращі чисельні результати, ніж при $\vartheta(s) = s$.

Застосування описаного підходу до (10) приводить до параметризованих систем інтегральних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=1}^L \int_0^{2\pi} H_0^{i\ell}(s, \sigma) \mu_{n\ell}(\sigma) d\sigma = G_{ni}(s), \quad \text{при } \Gamma_i \subset \Gamma_D, \\ \mu_{ni}(s) + \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=1}^L \int_0^{2\pi} K_0^{i\ell}(s, \sigma) \mu_{n\ell}(\sigma) d\sigma = G_{ni}(s), \quad \text{при } \Gamma_i \subset \Gamma_N, \end{array} \right. \quad (14)$$

де $i = 1, \dots, L$, $s \in [0, 2\pi]$ та $n = 0, \dots, N-1$. Густина $\mu_{n\ell}$ пов'язані з φ_n рівністю $\mu_{n\ell}(\sigma) = \frac{1}{2} \varphi_n(x_\ell(\gamma(\sigma))) |x'_\ell(\gamma(\sigma))| |\gamma'(\sigma)|$, а тому вони належать класу $C^{q-1}[0, 2\pi]$. Ядра інтегральних операторів обчислюються за формулами

$$\begin{aligned} H_n^{i\ell}(s, \sigma) &= 2\pi \Phi_n(x_i(\gamma(s)), x_\ell(\gamma(\sigma))), \\ K_n^{i\ell}(s, \sigma) &= 2\pi \frac{\partial \Phi_n(x_i(\gamma(s)), x_\ell(\gamma(\sigma)))}{\partial \nu(x_i(\gamma(s)))} |x'_i(\gamma(s))| |\gamma'(\sigma)|. \end{aligned} \quad (15)$$

Праві частини G_{ni} визначаються наступними співвідношеннями, для обчислення яких необхідне знання густин з попередніх часових шарів:

$$G_{ni}(s) = g_{ni}(s) - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{\ell=1}^L \int_0^{2\pi} \left[\begin{array}{l} H_{n-m}^{\ell} \\ K_{n-m}^{\ell} \end{array} (s, \sigma), \text{ якщо } \Gamma_i \subset \Gamma_D, \right. \\ \left. K_{n-m}^{\ell}(s, \sigma), \text{ якщо } \Gamma_i \subset \Gamma_N \right] \mu_{m\ell}(\sigma) d\sigma. \quad (16)$$

Тут до граничних даних ми застосували наступну заміну

$$g_{ni}(s) = \begin{cases} g_n^D(x_i(\gamma(s))), & \text{якщо } \Gamma_i \subset \Gamma_D, \\ g_n^N(x_i(\gamma(s))) |x'_i(\gamma(s))| |\gamma'(s)|, & \text{якщо } \Gamma_i \subset \Gamma_N. \end{cases}$$

Для того щоб в явному вигляді виділити логарифмічну особливість, введемо неперервні функції

$$H_{n0}^{\ell}(s, \sigma) = I_0(\varkappa r_{i\ell}(s, \sigma)) v_n(r_{i\ell}(s, \sigma)) + I_1(\varkappa r_{i\ell}(s, \sigma)) w_n(r_{i\ell}(s, \sigma)), \\ K_{n0}^{\ell}(s, \sigma) = [I_0(\varkappa r_{i\ell}(s, \sigma)) v_n^1(r_{i\ell}(s, \sigma)) + I_1(\varkappa r_{i\ell}(s, \sigma)) w_n^1(r_{i\ell}(s, \sigma))] \times \\ \times \langle \mathbf{r}_{i\ell}(s, \sigma), x'_i(\gamma(s))^\perp \rangle |\gamma'(s)|, \quad i, \ell = 1, \dots, L, n \in \mathbb{N},$$

де $\mathbf{r}_{i\ell}(s, \sigma) = x_i(\gamma(s)) - x_\ell(\gamma(\sigma))$, $r_{i\ell}(s, \sigma) = |\mathbf{r}_{i\ell}(s, \sigma)|$, I_0, I_1 — модифіковані функції Бесселя першого роду, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — позначає скалярний добуток, а v_n^1, w_n^1 — відомі поліноми. Тепер логарифмічна особливість в ядрах (15) при $s = \sigma$ і $s + \sigma = 2\pi$ зосереджена у ваговій функції

$$H_n^{\ell\ell}(s, \sigma) = \frac{1}{2} H_{n0}^{\ell\ell}(s, \sigma) \ln \frac{4}{e^2} [\cos s - \cos \sigma]^2 + H_{n1}^{\ell\ell}(s, \sigma),$$

аналогічно поступаємо і з $K_n^{\ell\ell}$. Гладкість ядер $H_{nk}^{\ell\ell}, K_{nk}^{\ell\ell}$ при $i, \ell = 1, \dots, L$, $n = 0, \dots, N-1$, $k = 0, 1$ обмежується лише величиною параметра q та тим, наскільки гладкими є Γ_i, Γ_ℓ . Неважко знайти наступні діагональні значення

$$H_{01}^{\ell\ell}(s, s) = \ln \frac{4 |\sin s|}{e \varkappa |x'_i(\gamma(s))| |\gamma'(s)|} - C_E, \quad K_{01}^{\ell\ell}(s, s) = \frac{\langle x'_i(\gamma(s)), x''_i(\gamma(s)) \rangle |\gamma'(s)|}{-2 |x'_i(\gamma(s))|},$$

де C_E — константа Ейлера, а для $n \geq 1$ має місце $H_{n1}^{\ell\ell}(s, s) = a_{n1}/\varkappa$, $K_{n1}^{\ell\ell}(s, s) = 0$, тут a_{n1} — один із коефіцієнтів многочлена w_n . Зауважимо, що дані вирази не буде необхідності обчислювати в кутах і центрі квадрата $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, де вони є невизначеними.

Для чисельного розв'язування інтегральних рівнянь скористаємось методом Нистрьома, що ґрунтується на тригонометричній інтерполяції з вузлами

$$s_j = \frac{j\pi}{M}, \quad j = 0, \dots, 2M-1, \quad M \in \mathbb{N}. \quad (17)$$

Для $f \in C[0, 2\pi]$ мають місце квадратурні формули

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) d\sigma \approx \frac{1}{2M} \sum_{j=0}^{2M-1} f(s_j), \quad (18)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) \ln \frac{4}{e} \sin^2 \frac{s_k - \sigma}{2} d\sigma \approx \sum_{j=0}^{2M-1} R_{|k-j|} f(s_j) \quad (19)$$

з відомими ваговими коефіцієнтами [3]. Приведені формули отримані шляхом тригонометричної інтерполяції гладкої частини підінтегральної функції і подальшого точного інтегрування. Для того, щоб скористатися формулою (19), враховується тригонометрична тотожність

$$\ln \frac{4}{e^2} [\cos s - \cos \sigma]^2 = \ln \frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} + \ln \frac{4}{e} \sin^2 \frac{s + \sigma}{2}.$$

Застосування цих квадратур у відповідних інтегралах системи (10) і подальша колокація з використанням вузлів (17) в якості точок колокації приводить до послідовності систем лінійних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{M-1} \mu_{ni}^{(j)} \left\{ (R_{|k-j|} + R_{k+j}) H_{00}^v(s_k, s_j) + \frac{H_{01}^v(s_k, s_j)}{M} \right\} + \\ + \sum_{\ell=1, \ell \neq i}^L \sum_{j=1}^{M-1} \mu_{n\ell}^{(j)} \frac{H_0^{\ell v}(s_k, s_j)}{M} = G_{ni}^{(k)}, \quad \text{при } \Gamma_i \subset \Gamma_D, \\ \mu_{ni}^{(k)} + \sum_{j=1}^{M-1} \mu_{ni}^{(j)} \left\{ (R_{|k-j|} + R_{k+j}) K_{00}^v(s_k, s_j) + \frac{K_{01}^v(s_k, s_j)}{M} \right\} + \\ + \sum_{\ell=1, \ell \neq i}^L \sum_{j=1}^{M-1} \mu_{n\ell}^{(j)} \frac{K_0^{\ell v}(s_k, s_j)}{M} = G_{ni}^{(k)}, \quad \text{при } \Gamma_i \subset \Gamma_N, \end{array} \right.$$

де $i = 1, \dots, L$, $k = 1, \dots, M - 1$, $\mu_{ni}^{(k)} \approx \mu_{ni}(s_k)$, а $G_{ni}^{(k)}$ вектори правих частин, що обчислюються за аналогічним принципом, використовуючи квадратури (18-19). Нами була врахована парність шуканих густин $\mu_{n\ell}$, завдяки чому вдалося вдвічі зменшити розмірність систем лінійних рівнянь. При необхідності описаний алгоритм можливо оптимізувати так, щоб кількість вузлів квадратурних формул була різною для кожної з кривих $\Gamma_1, \dots, \Gamma_L$, наприклад, для довших дуг варто вибрати більшу кількість вузлів квадратур.

Існування та єдиність розв'язків одержаних інтегральних рівнянь у просторах Соболева доводиться аналогічно до [1], також справедливе наступне твердження про оцінку похибки.

Теорема 2. [1] *Нехай найменший кут серед θ_ℓ , $\ell = 1, \dots, L$ рівний $(1 - \rho)\pi$, де $0 < |\rho| < 1$ і нехай $g_{n\ell} \in H^{p+5/2}(\Gamma_\ell)$ для $p \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$. Тоді для $q > (p + 1/2)(1 + |\rho|)$ справджується оцінка похибки $\|\mu_{n\ell} - \tilde{\mu}_{n\ell}\|_{H_e^q[0, 2\pi]} \leq C_n M^{-p}$, де $\mu_{n\ell}$ – точний розв'язок, а $\tilde{\mu}_{n\ell}$ – наближений, отриманий методом Нистрьома, $C_n > 0$ і $\ell = 1, \dots, L$.*

Для обчислення граничних значень, необхідних при розв'язанні задачі Коші, у поданні (9), спрямуємо x на $\Gamma_1, \dots, \Gamma_L$. Використавши властивості потенціалу

простого шару, одержимо

$$u_n(x_i(\gamma(s))) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^n \sum_{\ell=1}^L \int_0^{2\pi} H_{n-m}^{i\ell}(s, \sigma) \mu_{m\ell}(\sigma) d\sigma, \quad (20)$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial \nu}(x_i(\gamma(s))) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^n \sum_{\ell=1}^L \int_0^{2\pi} K_{n-m}^{i\ell}(s, \sigma) \frac{\mu_{m\ell}(\sigma)}{|\tilde{x}'_i(s)|} d\sigma + \frac{\mu_{ni}(s)}{|\tilde{x}'_i(s)|},$$

де $i = 1, \dots, L$, $\tilde{x}_i(s) = x_i(\gamma(s))$ і $s \in (0, \pi)$. Далі у наведених виразах виділяється логарифмічна особливість і застосовуються квадратурні формули (18-19).

3. Чисельні експерименти.

Приклад 1. Спершу розглянемо розв'язування прямих мішаних задач (7-8) при $N = 9$ і $\varkappa = \sqrt{10}$. Нехай область D — прямокутник зі сторонами (рис. 2)

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{(s, 0), \quad s \in [0, \pi]\}, & \Gamma_2 &= \{(\pi, s/2), \quad s \in [0, \pi]\}, \\ \Gamma_3 &= \{(-s, \pi/2), \quad s \in [0, \pi]\}, & \Gamma_4 &= \{(0, -s/2), \quad s \in [0, \pi]\}. \end{aligned} \quad (21)$$

У якості тестового точного розв'язку виберемо функції $u_n(x) = \Phi_n(x, x^*)$, тут $x^* = (-0.1, -0.1)$.

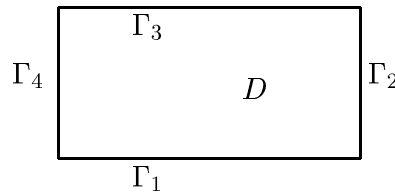


Рис. 2. Область у прикладах 1, 2.

На нижній стороні прямокутника Γ_1 задається умова Неймана $g_n^N(x) = \partial_{\nu(x)} \Phi_n(x, x^*)$, а на решті границі — умова Діріхле $g_n^D(x) = \Phi_n(x, x^*)$.

В таблиці 1 наведено похибки наближеного розв'язку u_n^M , обчислені в нормі

$$\varepsilon_M = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \|u_n^M - u_n\|_{L^2(D)}^2 \right\}^{1/2}.$$

Оцінка порядку збіжності здійснюється за формулою

$$ord_M = \frac{\ln \varepsilon_{M/2} - \ln \varepsilon_M}{\ln 2}.$$

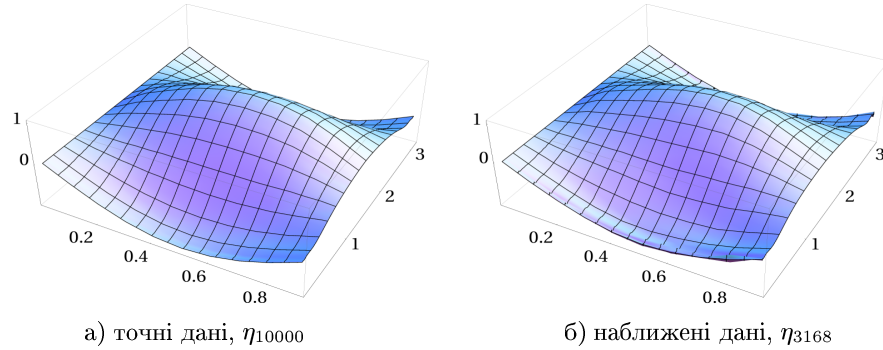
Помітно, що зі збільшенням параметра згладжування q порядок збіжності зростає. При цьому ord_M узгоджується з теоретичною оцінкою, приведеною в теоремі 2, адже згідно з нею очікуваний порядок збіжності становить 1.5, 2.2, 2.8, відповідно, для $q = 3, 4, 5$.

M	$q = 3$		$q = 4$		$q = 5$	
	ε_M	ord_M	ε_M	ord_M	ε_M	ord_M
32	$8.06 \cdot 10^{-6}$	7.0	$1.33 \cdot 10^{-5}$	7.1	$1.97 \cdot 10^{-5}$	5.6
64	$6.22 \cdot 10^{-8}$	9.0	$9.51 \cdot 10^{-8}$	9.9	$3.98 \cdot 10^{-7}$	10.1
128	$1.23 \cdot 10^{-10}$	5.1	$1.01 \cdot 10^{-10}$	9.3	$3.60 \cdot 10^{-10}$	15.9
256	$3.51 \cdot 10^{-12}$		$1.59 \cdot 10^{-13}$		$6.09 \cdot 10^{-15}$	

Таблиця 1. Чисельні результати прикладу 1

Приклад 2. Розглянемо задачу Коші в області (21) з прикладу 1. Необхідні нам дані Коші синтезуємо, використовуючи пряму задачу (7-8), для цього виберемо $T = 1$, $N = 9$, і на $\Gamma_D = \Gamma_1$ задамо $g_n^D(x) = -\sin(\pi t_n) \cos(x_1)$, а на $\Gamma_N = \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 - g_n^N(x) = \exp(-x_1^2)$. Тепер, знайшовши наближений розв'язок u_n^M задачі (7-8), можна покласти $f_1(\cdot, t_n) = u_n^M|_{\Gamma_N}$ та $f_2(x, t) = \exp(-x_1^2)$, тут $M = 64$, $q = 3$.

Параметри ітераційного методу вибиралися $\gamma_L = 1$, $\beta = 1.3$. Для симуляції неточних вимірів у f_1 вносився 5% випадковий шум. Результати роботи алгоритму зображені на рис. 3, а на рис. 4 наведено похибки в нормі $\|\cdot\|_{L^2_{\beta-3/2}(\Gamma_1 \times (0, T))}$ в залежності від номера ітерації.

Рис. 3. Реконструкція $u|_{\Gamma_1 \times (0,1)}$ для прямокутника

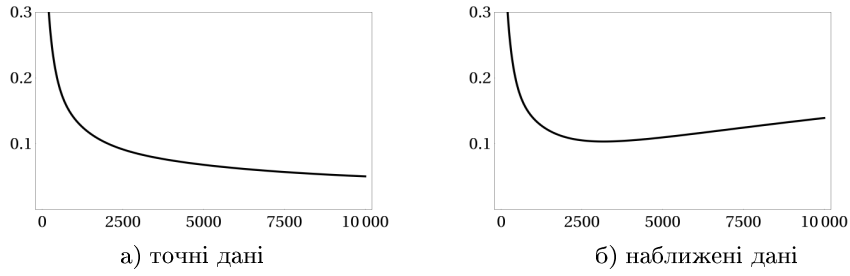


Рис. 4. Похибка $\|u - \eta_k\|_{L^2_{\beta-3/2}(\Gamma_1 \times (0,1))}$ для прямокутника

Приклад 3. Утворимо область D за допомогою таких частин лемніскати Жероно

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{(\sin 0.5s, -0.2 \sin s), \quad s \in [0, \pi]\}, \\ \Gamma_2 &= \{(\cos 0.5s, 0.5 \sin s), \quad s \in [0, \pi]\}, \end{aligned} \quad (22)$$

в такому разі $\theta_1 = \pi$, а θ_2 — гострий кут (див. рис. 5а).

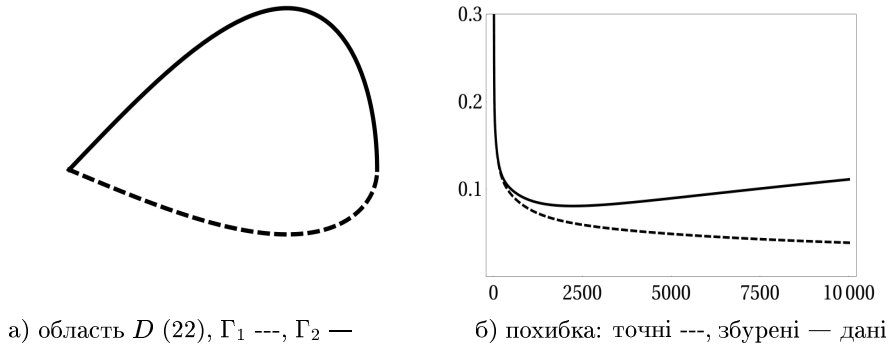


Рис. 5. Чисельні результати прикладу 3

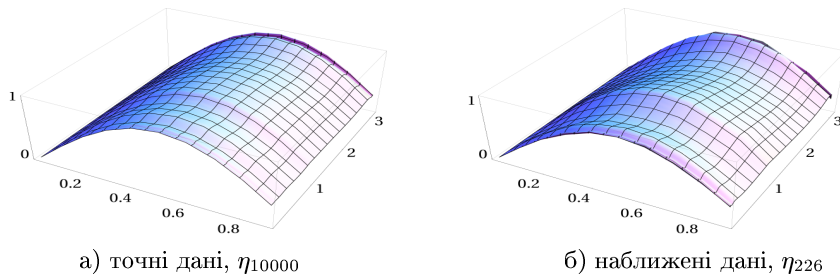


Рис. 6. Реконструкція $u|_{\Gamma_1 \times (0,1)}$ прикладу 3

Використаємо описаний у прикладі 2 підхід для синтезу даних Коші. При “точному” розв’язку задачі Коші $u(t, x)|_{\Gamma_1} = \sin(\pi t)$ та параметрах дискретизації $N = 9, M = 128, q = 3$ матимемо деякі вхідні дані $f_1(\cdot, t_n) = u_n^M|_{\Gamma_2}$ та $f_2 = 1$, де u_n^M — розв’язок відповідної прямої задачі.

Залишимо незмінними параметри ітераційного процесу $\beta = 1.3$ і $\gamma_L = 1$. Наближення $u|_{\Gamma_1 \times (0,1)}$ для точних вхідних даних та у випадку 5% похибки у f_1 наведено на рис. 6, при цьому для припинення ітераційного процесу використовувався принцип нев'язки (6). Порівнюючи значення $\|u - \eta_{226}\|_{L^2_{0,2}(\Gamma_1 \times (0,1))} \approx 0.116$ з графіком похибки на рис. 5б, помітно, що критерій нев'язки Морозова зупинив ітераційний процес дещо зашвидко, проте, як відомо, регуляризація є компромісом між похибкою даних на похибкою апроксимації.

Висновки. Наближений розв'язок нестационарної задачі Коші шукається, використовуючи ітераційний регуляризуючий метод. Даний метод побудований на основі граничних інтегральних рівнянь, що дозволило понизити розмірність задачі. Для згладження невідомих густин при підході до кутових точок здійснювалося згущення сітки. Це дозволило побудувати метод без насичення точності розв'язування інтегральних рівнянь.

Проведені чисельні експерименти підтверджують ефективність, стійкість та теоретичні оцінки для запропонованого методу. Було помічено, що краща якість реконструкції досягається, коли дані Коші відомі на більшій частині границі ∂D . Становить інтерес застосування описаного підходу до необмежених нерегулярних областей.

1. **Чапко Р.** The numerical solution of the axially symmetric linear sloshing problem by the boundary integral equation method [text] / R. Chapko, G. Datsiv // J. Integral Equations Appl. – 2008. – V. 20. – P. 409–436.
2. **Чапко Р.** Rothe's method for the heat equation and boundary integral equations [text] / R. Chapko, R. Kress // J. Integral Equations Appl. – 1997. – V. 9. – P. 47–69.
3. **Чапко Р.** On a quadrature method for a logarithmic integral equation of the first kind [text] / R. Chapko, R. Kress // In Agarwal, ed.: World Scientific Series in Applicable Analysis. Contributions in Numerical Mathematics. – 1993. – V. 2. – P. 127–140.
4. **Чапко Р.** On the numerical solution of initial boundary value problems by the Laguerre transformation and boundary integral equations [text] / R. Chapko, R. Kress // Integral and integrodifferential equations: Theory and applications. Gordon and Breach Sci. Publ. Amsterdam. – 2000. – V. 2. – P. 55–66.
5. **Чапко Р.** On the numerical solution of a mixed initial boundary value problem for the heat equation in a double-connected planar domain [text] / R. Chapko, V. Vavrychuk // Journal of Numerical and Applied Mathematics (Kyiv). – 2009. – V. 97. – P. 26–38.
6. **Costabel M.** Boundary integral equations for mixed boundary value problems in polygonal domains and Galerkin approximation [text] / M. Costabel, E. P. Stephan // Mathematical Models in Mechanics. Banach Center Publications. PWN-Polish Scientific Publishers. Warsaw. – 1985. – V. 15. – P. 175–251.
7. **Johansson B. T.** An iterative method for a Cauchy problem for the heat equation [text] / B. T. Johansson // IMA Journal of Applied Mathematics. – 2006. – V. 71. – P. 262–286.
8. **Johansson B.T.** Determining the temperature from Cauchy data in corner domains [text] / B. T. Johansson // International Journal of Computing Science and Mathematics. – 2010. – V. 3. – P. 122–131.

9. **Kress R.** Inverse scattering for a locally perturbed half-plane [text] / R. Kress, T. Tran // Inverse Problems. – 2000. – V. 16. – P. 1541–1559.
10. **Saut J.-C.** Unique continuation for some evolution equations [text] / J.-C. Saut, V. Scheuer // Journal of Differential Equations. – 1987. – V. 66. – P. 118–139.
11. **Вавричук В. Г** Про чисельне розв'язування задачі Коші для рівняння теплопровідності в частково необмежених областях на основі інтегральних рівнянь [текст] / В. Г. Вавричук, Р. С. Хапко // Доповіді НАН України. – 2011. – Вип. 11 (в друці).

УДК 519.635.4

В. В. Вербицкий*, **И. Н. Глушко****

*Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

**Одесский национальный политехнический университет

**АПОСТЕРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ АППРОКСИМАЦИИ
СМЕШАННЫМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
БИГАРМОНИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ**

Вербицкий В. В., Глушко И. М. Апостериорні оцінки апроксимації змішаним методом скінченних елементів бігармонічної крайової задачі. Побудовано апостериорний оцінювач похибки апроксимації за схемою С'ярле-Рав'ярта змішаного методу скінченних елементів задачі Діріхле для бігармонічного оператора. Отримано апостериорні оцінки зверху похибки скінченно-елементного розв'язку крайової задачі.

Ключові слова: апостериорний оцінювач похибки, метод С'ярле-Рав'ярта, змішаний метод скінченних елементів.

Вербицкий В. В., Глушко И. Н. Апостериорные оценки аппроксимации смешанным методом конечных элементов бигармонической краевой задачи. Построен апостериорный оценщик погрешности аппроксимации по схеме Сьярле-Равьярта смешанного метода конечных элементов задачи Дирихле для бигармонического оператора. Получены апостериорные оценки сверху погрешности конечно-элементного решения краевой задачи.

Ключевые слова: апостериорный оценщик погрешности, метод Сьярле-Равьярта, смешанный метод конечных элементов.

Verbitsky V. V., Glushko I. N. Aposteriori error estimation of a mixed finite element method approximation of a biharmonic boundary problem. Aposteriori error estimator for the approximation by Ciarlet-Raviart mixed finite element method of Dirichlet problem for the biharmonic operator is constructed. A posteriori upper bounds of errors of the finite element solution are obtained.

Key words: a posteriori error estimator, Ciarlet-Raviart method, mixed finite element method.

ВВЕДЕНИЕ.

Метод Сьярле-Равьярта, как вариант смешанного метода конечных элементов [8, 4, 5, 6], был предложен в работе [9] для задачи Дирихле бигармонического оператора. Априорные оценки сходимости метода получены в [14, 11, 10]. В работе [13] построен предобуславливатель для соответствующей системы линейных алгебраических уравнений. Апостериорные оценки конечно-элементных аппроксимаций — важная область исследований и неотъемлемая составляющая научных вычислений [3, 7, 15, 12].

Настоящая статья посвящена построению апостериорного оценщика погрешности аппроксимации методом Сьярле-Равьярта задачи Дирихле для бигармонического оператора. Апостериорный оценщик строится на основании невязки конечно-элементного решения. Затем с помощью полученного оценщика выводится апостериорная оценка сверху погрешности конечно-элементного решения.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим однородную задачу Дирихле для бигармонического оператора

$$\Delta^2 u = f \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

$$u = \partial_n u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (2)$$

Известно[1], что если Ω — выпуклый многоугольник и $f \in H^{-1}(\Omega)$, то слабое решение u краевой задачи (1)–(2) принадлежит пространству $H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ и

$$\|u\|_3 \leq c_1 \|f\|_{-1} \quad \forall f \in H^{-1}(\Omega), \quad (3)$$

где $c_1 > 0$ — константа.

Сделаем замену $p = -\Delta u$. Вместо (1) получим два уравнения

$$p = -\Delta u, \quad (4)$$

$$-\Delta p = f \quad \text{в } \Omega. \quad (5)$$

Пусть $f \in L_2(\Omega)$. Умножим уравнение (4) на произвольную функцию $\bar{p} \in H^1(\Omega)$, а уравнение (5) — на произвольную функцию $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$. Полученные уравнения проинтегрируем по области Ω . Применяв формулу Грина и учтя граничные условия (2), получим следующую вариационную задачу. Для $f \in L_2(\Omega)$ найти такие $(u, p) \in H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, что

$$\int_{\Omega} p \bar{p} dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{p} dx \quad \forall \bar{p} \in H^1(\Omega), \quad (6)$$

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla \bar{u} dx = \int_{\Omega} f \bar{u} dx \quad \forall \bar{u} \in H_0^1(\Omega). \quad (7)$$

Не составляет труда проверить, что если u — слабое решение краевой задачи (1)–(2) для $f \in L_2(\Omega)$, то $(u, p = -\Delta u)$ является решением вариационной задачи (6)–(7). Единственность решения вариационной задачи (6)–(7) легко получить, используя неравенство Фридрихса

$$\|u\|_{1,\Omega}^2 \leq c_2 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u dx \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

где $c_2 > 0$ — константа, зависящая только от области Ω . С другой стороны, если (u, p) — решение вариационной (6)–(7), то u — слабое решение краевой задачи (1)–(2) и $p = -\Delta u$ [9]. Кроме того, из (3) следует, что

$$\|p\|_{1,\Omega} = \|-\Delta u\|_{1,\Omega} \leq \|u\|_{3,\Omega} \leq c_1 \|f\|_{-1}.$$

Отсюда, учитывая, что $f \in L_2(\Omega)$, а значит

$$\begin{aligned} \|f\|_{-1} &= \sup_{0 \neq v \in H^1(\Omega)} \frac{\langle f, v \rangle}{\|v\|_{1,\Omega}} = \sup_{0 \neq v \in H^1(\Omega)} \frac{(f, v)}{\|v\|_{1,\Omega}} \leq \\ &\leq \sup_{0 \neq v \in H^1(\Omega)} \frac{\|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega}}{\|v\|_{1,\Omega}} \leq \|f\|_{0,\Omega}, \end{aligned}$$

получаем

$$\|p\|_{1,\Omega} \leq c_1 \|f\|_{0,\Omega} \quad (8)$$

Используя равенство (6) при $\bar{p} = u$, неравенства Фридрихса и Коши–Буняковского, получаем

$$\|u\|_{1,\Omega}^2 \leq c_2 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u \, dx = c_2 \int_{\Omega} pu \, dx \leq c_2 \|p\|_{0,\Omega} \|u\|_{0,\Omega}.$$

Отсюда

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq c_2 \|p\|_{0,\Omega}. \quad (9)$$

Пусть \mathcal{T}_h — регулярная триангуляция области Ω треугольниками K ([2], с. 127), h — параметр триангуляции ($0 < h < 1$). Определим конечномерные подпространства

$$S^{k,0}(\mathcal{T}_h) \subset H^1(\Omega),$$

$$S_0^{k,0}(\mathcal{T}_h) \subset H_0^1(\Omega),$$

где

$$S^{k,0}(\mathcal{T}_h) = \{u_h \in C^0(\bar{\Omega}) : u_h|_K \in P_k(K) \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

— пространство непрерывных сплайнов степени k ($k \geq 1$) и

$$S_0^{k,0}(\mathcal{T}_h) = \{u_h \in S^{k,0}(\mathcal{T}_h) : u_h = 0 \text{ на } \partial\Omega\}.$$

Задаче (6)–(7) поставим в соответствие следующую конечномерную вариационную задачу. Для $f \in L_2(\Omega)$ найти такие $(u_h, p_h) \in S_0^{2,0}(\mathcal{T}_h) \times S^{2,0}(\mathcal{T}_h)$, что

$$\int_{\Omega} p_h \bar{p}_h \, dx = \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \bar{p}_h \, dx \quad \forall \bar{p}_h \in S^{2,0}(\mathcal{T}_h), \quad (10)$$

$$\int_{\Omega} \nabla p_h \cdot \nabla \bar{u}_h \, dx = \int_{\Omega} f \bar{u}_h \, dx \quad \forall \bar{u}_h \in S_0^{2,0}(\mathcal{T}_h). \quad (11)$$

Изложенный способ аппроксимации бигармонической краевой задачи называется методом Сьярле–Равьярта [9, 10, 11, 14]. В работе [10] получены следующие априорные оценки погрешности конечно-элементной аппроксимации для сплайнов второй степени:

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq c_3 h^2 \|u\|_{3,\Omega},$$

$$\|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq c_4 h \|u\|_{3,\Omega},$$

где $c_3 > 0$, $c_4 > 0$ — константы, не зависящие от h .

Определим квази-интерполяционный оператор $I_h : L_1(\Omega) \rightarrow S^{1,0}(\mathcal{T}_h)$ следующим образом

$$I_h v = \sum_{a \in \mathcal{N}_h} \lambda_a \frac{1}{|\omega_a|} \int_{\omega_a} v \, dx,$$

где \mathcal{N}_h — множество узлов триангуляции \mathcal{T}_h , λ_a — ассоциируемая с узлом $a \in \mathcal{N}_h$ базисная функция пространства $S^{1,0}(\mathcal{T}_h)$, ω_a — носитель базисной функции λ_a . Оператор I_h удовлетворяет следующим локальным оценкам[3, стр.22]:

$$\|v - I_h v\|_{0,K} \leq c_5 h_K \|v\|_{1,\tilde{K}}, \quad (12)$$

$$\|v - I_h v\|_{0,\partial K} \leq c_6 h_E^{\frac{1}{2}} \|v\|_{1,\tilde{K}} \quad \forall v \in H^1(\Omega), \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad (13)$$

где h_K — диаметр треугольника K , \tilde{K} — объединение треугольников, имеющих хотя бы один общий узел с треугольником K .

2. Апостериорные оценки.

Погрешности $e_u \equiv u - u_h$ и $e_p \equiv p - p_h$ конечно-элементной аппроксимации (10)–(11) вариационной задачи (6)–(7) являются решением следующей задачи. Найти такие $(e_u, e_p) \in H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, что

$$\int_{\Omega} e_p \bar{p} dx = \int_{\Omega} \nabla e_u \cdot \nabla \bar{p} dx + \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \bar{p} dx - \int_{\Omega} p_h \bar{p} dx \quad \forall \bar{p} \in H^1(\Omega), \quad (14)$$

$$\int_{\Omega} \nabla e_p \cdot \nabla \bar{u} dx = \int_{\Omega} f \bar{u} dx - \int_{\Omega} \nabla p_h \cdot \nabla \bar{u} dx \quad \forall \bar{u} \in H_0^1(\Omega). \quad (15)$$

Заметим, что задача (14)–(15) отличается от задачи (6)–(7) только правой частью. Наша цель — получить оценки решения задачи (14)–(15). Запишем (10) следующим образом

$$0 = \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \bar{p}_h dx - \int_{\Omega} p_h \bar{p}_h dx \quad \forall \bar{p}_h \in S^{2,0}(\mathcal{T}_h). \quad (16)$$

Из (14) и (16) следует, что

$$\int_{\Omega} e_p \bar{p}_h dx = \int_{\Omega} \nabla e_u \cdot \nabla \bar{p}_h dx \quad \forall \bar{p}_h \in S^{2,0}(\mathcal{T}_h). \quad (17)$$

В равенстве (14) положим $\bar{p} = u$ и вычтем из него равенства (17) при $\bar{p}_h = u_h$ и (16) при $\bar{p}_h = I_h u$. В результате получим

$$\int_{\Omega} e_p e_u dx = \int_{\Omega} \nabla e_u \cdot \nabla e_u dx + \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla (u - I_h u) dx - \int_{\Omega} p_h (u - I_h u) dx. \quad (18)$$

Преобразуем последние два слагаемые правой части равенства (18). Каждый из интегралов по области Ω заменим суммой интегралов по треугольникам, к каждому из которых применим формулу Грина. Получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} p_h (u - I_h u) dx - \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla (u - I_h u) dx = \\ & = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_K (p_h + \Delta u_h)(u - I_h u) dx - \int_{\partial K} \frac{\partial u_h}{\partial n} (u - I_h u) ds \right\} = \\ & = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int R_K^{(1)}(u_h, p_h)(u - I_h u) dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_h, E \notin \partial \Omega} \int R_E^{(1)}(u_h)(u - I_h u) ds. \end{aligned}$$

Здесь $R_K^{(1)}(u_h, p_h) = p_h + \Delta u_h$, \mathcal{E}_h — множество сторон E триангуляции \mathcal{T}_h ,

$$R_E^{(1)}(u_h) = \frac{\partial u_h}{\partial n}|_{K'} - \frac{\partial u_h}{\partial n}|_K, \text{ если } E \text{ — общая сторона } K \text{ и } K'.$$

Используя интегральное неравенство Коши–Буняковского, локальные неравенства (12), (13) и неравенство Коши–Буняковского для сумм, получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K R_K^{(1)}(u_h, p_h)(u - I_h u) dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_h, E \notin \partial \Omega} \int E R_E^{(1)}(u_h)(u - I_h u) ds \leq \\ & \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|R_K^{(1)}(u_h, p_h)\|_{0,K} \|u - I_h u\|_{0,K} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h, E \notin \partial \Omega} \|R_E^{(1)}(u_h)\|_{0,E} \|u - I_h u\|_{0,E} \leq \\ & \leq c_5 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \|R_K^{(1)}(u_h, p_h)\|_{0,K} \|u\|_{1, \tilde{K}} + c_6 \sum_{E \in \mathcal{E}_h, E \notin \partial \Omega} h_E^{\frac{1}{2}} \|R_E^{(1)}(u_h)\|_{0,E} \|u\|_{1, \tilde{E}} \leq \\ & \leq \max\{c_5, c_6\} \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|R_K^{(1)}(u_h, p_h)\|_{0,K}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h, E \notin \partial \Omega} h_E \|R_E^{(1)}(u_h)\|_{0,E}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \times \\ & \times \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|u\|_{1, \tilde{K}}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h, E \notin \partial \Omega} \|u\|_{1, \tilde{E}}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Здесь \tilde{E} — объединение треугольников, имеющих со стороной E общую вершину. Заметим, что

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|u\|_{1, \tilde{K}}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h, E \notin \partial \Omega} \|u\|_{1, \tilde{E}}^2 \leq c_7 \|u\|_{1, \Omega}^2,$$

где константа c_7 равна наибольшему числу множеств \tilde{K} и \tilde{E} , которым принадлежит треугольник K . Значит,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} p_h(u - I_h u) dx - \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla(u - I_h u) dx \leq \\ & \leq c_8 \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|R_K^{(1)}(u_h, p_h)\|_{0,K}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h, E \notin \partial \Omega} h_E \|R_E^{(1)}(u_h)\|_{0,E}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{1, \Omega}, \end{aligned} \quad (19)$$

где c_8 — константа не зависящая от h .

Из (7) и (11)

$$\int_{\Omega} \nabla e_p \cdot \nabla \bar{u}_h dx = 0 \quad \forall \bar{u}_h \in S_0^{2,0}(\mathcal{T}_h). \quad (20)$$

Из (15), учитывая (20),

$$0 = \int_{\Omega} f \bar{u}_h dx - \int_{\Omega} \nabla p_h \cdot \nabla \bar{u}_h dx \quad \forall \bar{u}_h \in S_0^{2,0}(\mathcal{T}_h). \quad (21)$$

Полагая в (14) $\bar{p} = e_p$, а в (15) $\bar{u} = e_u$, получаем следующее

$$\int_{\Omega} e_p e_p dx = \int_{\Omega} \nabla e_u \cdot \nabla e_p dx + \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla e_p dx - \int_{\Omega} p_h e_p dx =$$

$$= \int_{\Omega} f e_p dx - \int_{\Omega} \nabla p_h \cdot \nabla e_u dx + \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla e_p dx - \int_{\Omega} p_h e_p dx,$$

т. е.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e_p e_p dx &= \int_{\Omega} f(u - u_h) dx - \int_{\Omega} \nabla p_h \cdot \nabla(u - u_h) dx + \\ &+ \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla(p - p_h) dx - \int_{\Omega} p_h(p - p_h) dx. \end{aligned}$$

Сложим последнее равенство с равенствами (16) при $\bar{p}_h = p_h - I_h p$ и (21) при $\bar{u}_h = u_h - I_h u$. Получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e_p e_p dx &= \int_{\Omega} f(u - I_h u) dx - \int_{\Omega} \nabla p_h \cdot \nabla(u - I_h u) dx + \\ &+ \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla(p - I_h p) dx - \int_{\Omega} p_h(p - I_h p) dx. \end{aligned} \quad (22)$$

Преобразуем первые два слагаемые правой части равенства (22), воспользовавшись формулой Грина.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(u - I_h u) dx - \int_{\Omega} \nabla p_h \cdot \nabla(u - I_h u) dx &= \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_K (f + \Delta p_h)(u - I_h u) dx - \int_{\partial K} \frac{\partial p_h}{\partial n} (u - I_h u) ds \right\} = \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K R_K^{(2)}(p_h)(u - I_h u) dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_h, E \notin \partial \Omega} \int_E R_E^{(2)}(p_h)(u - I_h u) ds. \end{aligned}$$

Здесь $R_K^{(2)}(p_h) = f + \Delta p_h$,

$$R_E^{(2)}(p_h) = \frac{\partial p_h}{\partial n}|_{K'} - \frac{\partial p_h}{\partial n}|_K,$$

если E — общая сторона треугольников K и K' .

Используя интегральное неравенство Коши–Буняковского, локальные неравенства (12), (13) и неравенство Коши–Буняковского для сумм, получаем

$$\begin{aligned} &\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K R_K^{(2)}(p_h)(u - I_h u) dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_h, E \notin \partial \Omega} \int_E R_E^{(2)}(p_h)(u - I_h u) ds \leq \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|R_K^{(2)}(p_h)\|_{0,K} \|u - I_h u\|_{0,K} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h, E \notin \partial \Omega} \|R_E^{(2)}(p_h)\|_{0,E} \|u - I_h u\|_{0,E} \leq \\ &\leq c_5 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \|R_K^{(2)}(p_h)\|_{0,K} \|u\|_{1,\tilde{K}} + c_6 \sum_{E \in \mathcal{E}_h, E \notin \partial \Omega} h_E^{\frac{1}{2}} \|R_E^{(2)}(p_h)\|_{0,E} \|u\|_{1,\tilde{E}} \leq \\ &\leq \max\{c_5, c_6\} \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|R_K^{(2)}(p_h)\|_{0,K}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h, E \notin \partial \Omega} h_E \|R_E^{(2)}(p_h)\|_{0,E}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \times \end{aligned}$$

$$\times \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|u\|_{1,\tilde{K}}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h, E \notin \partial\Omega} \|u\|_{1,\tilde{E}}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда, повторяя рассуждения сделанные при выводе оценки (19), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} f(u - I_h u) dx - \int_{\Omega} \nabla p_h \cdot \nabla(u - I_h u) dx \leq \\ & \leq c_8 \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|R_K^{(2)}(p_h)\|_{0,K}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h, E \notin \partial\Omega} h_E \|R_E^{(2)}(p_h)\|_{0,E}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{1,\Omega}. \end{aligned} \quad (23)$$

Аналогично оценкам (19), (23) получаем следующую оценку для последних двух слагаемых правой части равенства (22):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla(p - I_h p) dx - \int_{\Omega} p_h(p - I_h p) dx \leq \\ & \leq c_9 \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|R_K^{(1)}(u_h, p_h)\|_{0,K}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \|R_E^{(1)}(u_h)\|_{0,E}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \|p\|_{1,\Omega}, \end{aligned} \quad (24)$$

где c_9 — константа, не зависящая от h . Здесь

$$R_E^{(1)}(u_h) = -\frac{\partial u_h}{\partial n},$$

если $E \in \partial\Omega$.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \eta_1^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|R_K^{(1)}(u_h, p_h)\|_{0,K}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h, E \notin \partial\Omega} h_E \|R_E^{(1)}(u_h)\|_{0,E}^2, \\ \eta_2^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|R_K^{(2)}(p_h)\|_{0,K}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h, E \notin \partial\Omega} h_E \|R_E^{(2)}(p_h)\|_{0,E}^2, \\ \tilde{\eta}_1^2 &= \eta_1^2 + \sum_{E \in \partial\Omega} h_E \|R_E^{(1)}(u_h)\|_{0,E}^2. \end{aligned}$$

Используя неравенства Фридрикса, Коши–Буняковского и оценку (19), из (18) получаем

$$\begin{aligned} \|e_u\|_{1,\Omega}^2 &\leq c_2 \int_{\Omega} \nabla e_u \cdot \nabla e_u dx = \\ &= c_2 \left\{ \int_{\Omega} e_p e_u dx + \int_{\Omega} p_h(u - I_h u) dx - \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla(u - I_h u) dx \right\} \leq \\ &\leq c_2 \{ \|e_p\|_{0,\Omega} \|e_u\|_{0,\Omega} + c_8 \eta_1 \|u\|_{1,\Omega} \}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\|e_u\|_{1,\Omega}^2 \leq c_2 \{ \|e_p\|_{0,\Omega} \|e_u\|_{0,\Omega} + c_8 \eta_1 \|u\|_{1,\Omega} \}. \quad (25)$$

Используя неравенство Коши–Буняковского, оценки (23) и (24), из равенства (22) получаем

$$\|e_p\|_{0,\Omega}^2 \leq c_8 \eta_2 \|u\|_{1,\Omega} + c_9 \tilde{\eta}_1 \|p\|_{1,\Omega}. \quad (26)$$

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 1. *Существуют такие константы $c_{10} > 0$ и $c_{11} > 0$, зависящие только от области Ω и регулярности триангуляции \mathcal{T}_h , что*

$$\|e_p\|_{0,\Omega}^2 \leq c_{10}\alpha, \quad (27)$$

$$\|e_u\|_{1,\Omega} \leq c_{11} \left\{ \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta} \right\}, \quad (28)$$

где

$$\alpha = (\eta_2 + \tilde{\eta}_1)\|f\|_{0,\Omega}, \quad \beta = \eta_1\|f\|_{0,\Omega}.$$

Доказательство. Из (26), учитывая (9) и (8), получаем

$$\|e_p\|_{0,\Omega}^2 \leq c_1 c_2 c_8 \eta_2 \|f\|_{0,\Omega} + c_1 c_9 \tilde{\eta}_1 \|f\|_{0,\Omega}.$$

Отсюда сразу следует оценка (27), если положить $c_{10} = \max\{c_1 c_2 c_8, c_1 c_9\}$.

Из (25), учитывая (9), (8) и принятые в теореме обозначения, получаем

$$\|e_u\|_{1,\Omega}^2 \leq c_2 \|e_p\|_{0,\Omega} \|e_u\|_{1,\Omega} + c_1 c_2^2 c_8 \eta_1 \|f\|_{0,\Omega} \leq c_{12} \{\alpha \|e_u\|_{1,\Omega} + \beta\},$$

где $c_{12} = \max\{c_2, c_1 c_2^2 c_8\}$. Таким образом, для нормы погрешности конечно-элементной аппроксимации $\|e_u\|_{1,\Omega}$ получаем квадратичное неравенство

$$\|e_u\|_{1,\Omega}^2 - c_{12}\alpha \|e_u\|_{1,\Omega} - c_{12}\beta \leq 0.$$

Решая это неравенство, получаем следующие оценки

$$0 \leq \|e_u\|_{1,\Omega} \leq c_{12} \frac{\alpha}{2} + \sqrt{c_{12}^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + c_{12}\beta}.$$

Отсюда следует утверждение (28), если положить $c_{11} = \max\{c_{12}, \sqrt{c_{12}}\}$. \square

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Нами рассмотрена аппроксимация по схеме Сьярле-Равьярта смешанного метода конечных элементов задачи Дирихле для бигармонического оператора в многоугольной области. Конечно-элементные пространства образуют лагранжевые сплайны второй степени. С использованием невязки конечно-элементного решения построен апостериорный оценщик погрешности аппроксимации. Получены апостериорные оценки сверху погрешностей дискретного решения краевой задачи.

1. **Кондратьев В. А.** Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками [текст] / Кондратьев В. А. // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1967. – Т. 16. – С. 209–292.
2. **Сьярле Ф.** Метод конечных элементов для эллиптических задач [текст] / Ф. Сьярле. – М.: Мир, 1980. – 512 с.
3. **Ainsworth M.** A posteriori error estimation in finite element analysis [text] / Ainsworth M., Oden J. T. – John Wiley & Sons, 2000. – 240 p.

4. **Arnold D. N.** Mixed finite element methods for elliptic problems [text] / D. N. Arnold // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* – 1990. – V. 82. – P. 281–300.
5. **Arnold D. N.** Mixed finite element methods for linear elasticity with weakly imposed symmetry [text] / Arnold D. N., Falk R. S., Winther R. // *Math. Comput.* – 2007. – V. 76. – P. 1699–1723.
6. **Auricchio F.** Mixed Finite Element Methods, in *Encyclopedia of Computational Mechanics* [text] / Auricchio F., Brezzi F., Lovadina C. – Vol. 1, Chapter 9. – Wiley, 2004. – P. 237–278.
7. **Babuška I.** The Finite Element Method and its Reliability [text] / Babuška I., Strouboulis, T. – Oxford, Clarendon Press, 2001. – 736 p.
8. **Brezzi F.** Mixed and hybrid finite element methods [text] / Brezzi F., and Fortin M. – Berlin, Springer-Verlag, 1991. – 350 p.
9. **Ciarlet P.** A Mixed Finite Element Method for the Biharmonic Equation [text] / Ciarlet P., Raviart P. // *Symposium on Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations, C DE BOOR, Ed* , Academic Press, New York, 1974. – P. 125–143.
10. **Falk R. S.** Error estimates for mixed methods [text] / Falk R.S., Osborn J. E. // *RAIRO. – Anal. numer.* – 1980. – Vol. 14., № 3. – P. 249–277.
11. **Fix G. J.** Theory and applications of mixed finite element methods, in *Constructive Approaches to Mathematical Models* [text] / G. J. Fix, M. D. Gunzburger, R. A. Nicolaides. – New York, Academic Press, 1979. – P. 375–393.
12. **Grätsch T.** A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis [text] / Grätsch T., Bathe K.-J. // *Computers and Structures.* – 2005. – V. 83. – P. 235–265.
13. **Hanisch M. R.** Two-level additive Schwarz preconditioners for fourth-order mixed methods [text] / Hanisch M. R. // *Electronic Transactions on Numerical Analysis.* – 2006. – V. 22. – P. 1–16.
14. **Scholz R.** A Mixed Method for 4th Order Problems using Linear Finite Elements [text] / Scholz R. // *RAIRO.* – 1978. – V. 12. – P. 85–90.
15. **Verfürth R.** A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh refinement techniques [text] / Verfürth R. – Chichester: John Wiley & Sons, 1996. – 127 p.

УДК 517

И. В. Горохова*, Н. А. Роженко**

*Южноукраинский национальный педагогический
университет имени К. Д. Ушинского

**Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

МАЛЫЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССОЙ В ЦЕНТРЕ

Горохова И. В., Роженко Н. О. Малі поперечні коливання пружного стержня з зосередженою масою в центрі. Розглянута спектральна задача, пов'язана з описом малих поперечних коливань пружного стержня з зосередженою масою в середині. Лівий та правий кінці стержня закріплені шарнірно. Отримана асимптотична формула для власних значень цієї задачі.

Ключові слова: власні значення, операторний пучок, краєві умови, алгебраїчна кратність.

Горохова И. В., Роженко Н. А. Малые поперечные колебания упругого стержня с сосредоточенной массой в центре. Рассмотрена спектральная задача, связанная с описанием малых поперечных колебаний упругого стержня с сосредоточенной массой в центре. Левый и правый концы стержня закреплены шарнирно. Получена асимптотическая формула для собственных значений этой задачи.

Ключевые слова: собственные значения, операторный пучок, алгебраическая кратность, краевые условия.

Gorokhova I. V., Rozhenko N. A. Small transversal vibrations of the elastic rod with the mass concentrated at the middle point. A spectral problem describing small transversal vibrations of an elastic rod with a concentrated mass (bead) at the middle point of the rod is considered. The left and the right ends of the rod are hinge joined. An asymptotic formula for the eigenvalues of this problem is provided.

Key words: eigenvalues, operator pencil, algebraic multiplicity, boundary conditions.

ВВЕДЕНИЕ. Начиная с середины XX века в связи с революционным развитием науки и техники, в частности, с появлением космической техники, возникает необходимость в рассмотрении новых начально-краевых спектральных задач математической физики, содержащих спектральный параметр не только в уравнениях, но и в граничных условиях (см. [1] – [5]). Различные виды краевых условий при отсутствии демпфирования рассмотрены в [6]. Особый интерес представляет влияние вязкого трения на изучаемые физические объекты. В предлагаемой работе рассмотрена краевая задача, которая описывает малые поперечные колебания упругого стержня с грузом в центре, который может двигаться по вертикали с вязким трением. Исследования подобных задач с несущей массой на одном конце стержня проводились в [7] – [10].

Малые поперечные колебания упругого однородного стержня плотности $\rho = 1$, растянутого распределённой силой, пропорциональной $g(x) \geq 0$, $g \in C^1[0, l]$, описываются уравнением

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(g(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \quad (1)$$

Расстояние от правого и левого конца стержня до груза одинаковое. Здесь x – координата, возрастание которой на каждом из интервалов осуществляется от внешнего конца стержня к центру, t – время, $u(x, t)$ – поперечное смещение точки стержня, находящейся на расстоянии x от левого или правого конца в момент времени t . В центре находится массивное кольцо массы $m > 0$, которое может двигаться по вертикали с вязким трением в направлении, перпендикулярном равновесному положению стержня. Левый и правый концы стержня закреплены шарнирно.

Малые поперечные колебания упругого однородного стержня на левом интервале от конца к центру будем описывать уравнением

$$\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(g(x) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) = 0, \quad (2)$$

на правом интервале следующим уравнением

$$\frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(g(x) \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) = 0. \quad (3)$$

Шарнирное закрепление левого и правого концов описывается краевыми условиями

$$u_1(0, t) = u_2(0, t) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad (5)$$

условия сопряжения в сечении $x = l$:

$$u_1(l, t) = u_2(l, t), \quad (6)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=l} = - \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=l}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \Big|_{x=l}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} \Big|_{x=l} + g(x) \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=l} = \\ & = \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} \Big|_{x=l} + m \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \Big|_{x=l} - g(x) \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=l} - \beta \frac{\partial u_2}{\partial t} \Big|_{x=l}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $l > 0$ – длина стержня, $\beta > 0$ – коэффициент вязкого трения (демпфирования) кольца. После стандартного преобразования $u(x, t) = e^{i\lambda t} y(\lambda, x)$ получаем следующую спектральную задачу

$$y_1^{(4)} - \lambda^2 y_1 - (g y_1')' = 0, \quad (10)$$

$$y_2^{(4)} - \lambda^2 y_2 - (g y_2')' = 0, \quad (11)$$

$$y_1(\lambda, 0) = y_2(\lambda, 0) = 0, \quad (12)$$

$$y_1^{(2)}(\lambda, 0) = y_2^{(2)}(\lambda, 0) = 0, \quad (13)$$

$$y_1(\lambda, l) = y_2(\lambda, l) = 0, \quad (14)$$

$$y_1^{(1)}(\lambda, l) = -y_2^{(1)}(\lambda, l), \quad (15)$$

$$y_1^{(2)}(\lambda, l) = y_2^{(2)}(\lambda, l), \quad (16)$$

$$-y_1^{(3)}(l) + g(l)y_1'(l) = y_2^{(3)}(l) + m\lambda^2 y_2(l) - g(l)y_2'(l) - i\lambda\beta y_2(l). \quad (17)$$

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ. Асимптотика собственных значений.

Для нахождения асимптотики собственных значений решение задачи (10) – (17) будем искать в виде

$$y_1(\lambda, x) = A_1 S_1(\lambda, x) + A_2 S_2(\lambda, x) + A_3 S_3(\lambda, x) + A_4 S_4(\lambda, x), \quad (18)$$

$$y_2(\lambda, x) = B_1 S_1(\lambda, x) + B_2 S_2(\lambda, x) + B_3 S_3(\lambda, x) + B_4 S_4(\lambda, x). \quad (19)$$

Положим, что $g = const > 0$. Фундаментальная система решений уравнений (10) и (11) $y_k(\lambda, x)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) задается условиями: $y_k^{(n-1)}(\lambda, 0) = \delta_{k,n}$, ($k, n = 1, 2, 3, 4$), $\delta_{k,n} = 1$ при $k = n$ и $\delta_{k,n} = 0$, при $k \neq n$ (см. [11]). Прямое вычисление показывает, что

$$S_2(\lambda, x) = \frac{z_1^2 \text{sh}(z_2 x)}{z_2(z_1^2 - z_2^2)} - \frac{z_2^2 \text{sh}(z_1 x)}{z_1(z_1^2 - z_2^2)}, \quad (20)$$

$$S_4(\lambda, x) = \frac{\text{sh}(z_1 x)}{z_1(z_1^2 - z_2^2)} - \frac{\text{sh}(z_2 x)}{z_2(z_1^2 - z_2^2)}, \quad (21)$$

где

$$z_1 = \sqrt{\lambda} \left(1 + \frac{g}{4\lambda}\right) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad (22)$$

$$z_2 = i\sqrt{\lambda} \left(1 - \frac{g}{4\lambda}\right) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right). \quad (23)$$

Подставим (18), (19) в краевые условия (12) и (13) соответственно и получим

$$y_1(\lambda, 0) = A_2 S_2(\lambda, 0) + A_4 S_4(\lambda, 0), \quad (24)$$

$$y_2(\lambda, 0) = B_2 S_2(\lambda, x) + B_4 S_4(\lambda, 0). \quad (25)$$

Учитывая условия сопряжения (14) – (17), (24) и (25) будут иметь вид

$$\begin{aligned} A_2 S_2(\lambda, l) + A_4 S_4(\lambda, l) &= B_2 S_2(\lambda, x) + B_4 S_4(\lambda, l), \\ A_2 S_2^{(1)}(\lambda, l) + A_4 S_4^{(1)}(\lambda, l) &= -B_2 S_2^{(1)}(\lambda, l) - B_4 S_4^{(1)}(\lambda, l), \\ A_2 S_2^{(2)}(\lambda, l) + A_4 S_4^{(2)}(\lambda, l) &= B_2 S_2^{(2)}(\lambda, l) + B_4 S_4^{(2)}(\lambda, l), \\ -A_2 S_2^{(3)}(\lambda, l) - A_4 S_4^{(3)}(\lambda, l) + g(A_2 S_2^{(1)}(\lambda, l) + A_4 S_4^{(1)}(\lambda, l)) &= \\ = B_2 S_2^{(3)}(\lambda, l) + B_4 S_4^{(3)}(\lambda, l) - g(B_2 S_2^{(1)}(\lambda, l) + B_4 S_4^{(1)}(\lambda, l)) + \\ + (m\lambda^2 - i\lambda\beta)(B_2 S_2(\lambda, x) + B_4 S_4(\lambda, l)). \end{aligned}$$

Система имеет нетривиальное решение, если детерминант матрицы равен нулю, т. е. когда

$$\begin{vmatrix} s_2 & s_4 & -s_2 & -s_4 \\ s_2' & s_4' & s_2' & s_4' \\ s_2'' & s_4'' & -s_2'' & -s_4'' \\ -s_2''' + gs_2' & -s_4''' + gs_4' & -s_2''' + gs_2' - (m\lambda^2 - i\lambda\beta)s_2 & -s_4''' + gs_4' - (m\lambda^2 - i\lambda\beta)s_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристическое уравнение с учетом (20) – (21) будет иметь следующий вид

$$\begin{aligned} & [2 \operatorname{ch}(z_2 l) \operatorname{ch}(z_1 l) z_2 z_1^3 - 2 z_2^3 \operatorname{ch}(z_2 l) \operatorname{ch}(z_1 l) z_1 - \\ & - i \operatorname{sh}(z_1 l) \lambda \beta \operatorname{ch}(z_2 l) z_2 + \operatorname{sh}(z_1 l) m \lambda^2 \operatorname{ch}(z_2 l) z_2 - \\ & - \operatorname{sh}(z_2 l) z_1 m \lambda^2 \operatorname{ch}(z_1 l) + \\ & + i \operatorname{sh}(z_2 l) z_1 \lambda \beta \operatorname{ch}(z_1 l)] \operatorname{sh}(z_2 l) \operatorname{sh}(z_1 l) = 0 \end{aligned}$$

или с учетом (22) – (23) и после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} & \sin(zl) - \left(1 - 1/4 \frac{g}{\lambda}\right) \cos(zl) \left(1 + 1/4 \frac{g}{\lambda}\right)^{-1} - \frac{i\beta \sin(zl)}{\lambda m} + \\ & + i\beta \left(1 - 1/4 \frac{g}{\lambda}\right) \cos(zl) \lambda^{-1} \left(1 + 1/4 \frac{g}{\lambda}\right)^{-1} m^{-1} - 2i \cos(zl) \times \\ & \times \left(-i\lambda^2 \left(1 + 1/4 \frac{g}{\lambda}\right) \left(1 - 1/4 \frac{g}{\lambda}\right)^3 - i\lambda^2 \left(1 + 1/4 \frac{g}{\lambda}\right)^3 \left(1 - 1/4 \frac{g}{\lambda}\right)\right) \times \\ & \times \lambda^{-5/2} \left(1 + 1/4 \frac{g}{\lambda}\right)^{-1} m^{-1} = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$z = \sqrt{\lambda} \left(1 - \frac{g}{4\lambda}\right) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Найдем асимптотику корней уравнения (26). Для этого подставим в него:

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l} + A + \frac{B}{n} + \frac{C}{n^2} + \frac{D}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right). \quad (27)$$

Тогда, приравняв нулю коэффициенты перед степенями $1/n$ в (27), получим асимптотическую формулу:

$$\begin{aligned} \lambda_n = & \frac{\pi^2}{l^2} \left(n + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{4}{lm} - \frac{g}{2\pi n} - \frac{8}{\pi n m^2} + \frac{g}{8n} + \\ & + \frac{2}{\pi n^2 m^2} + \frac{g}{8\pi n^2} - \frac{4}{\pi^2 m^2 n^2} + \frac{32l}{3\pi^2 n^2 m^3} + \frac{2lg}{\pi^2 m n^2} - \\ & - \frac{g}{32n^2} + \frac{4il\beta}{\pi^2 n^2 m^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned} \quad (28)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. В представленной работе исследована задача, которая описывает малые поперечные колебания упругого стержня, растянутого распределенной силой с грузом в центре. Груз находится под влиянием вязкого трения. Получена асимптотическая формула (28) этой задачи, из которой видно, что по спектру задачи последовательно можно найти параметры задачи l, g, m, β , т. е. решить обратную задачу для $g = const$.

1. **Miloslavsky A. I.** On instability of linear pipes [text] / Miloslavsky A. I. // Kharkov. –1980. – P. 38–47. (Dinamika system, nesushikh podvizhnyju raspredelennuju nagruzku: Collected papers, Kharkov aviation institute.)
2. **Pivovarchik V. N.** Problem Connected with Oscillations of Elastic Beams with Internal and Viscous Damping [text] / Pivovarchik V. N. // Moscow University Bulletin. –1987. – V. 42. – P. 68–71.
3. **Griniv R. O.** On Operator Pencils Arising in the Problem of Beam Oscillations with Internal Damping [text] / Griniv R. O., Shkalikov A. A. // Matematicheskii zamekii. – 1994. – V. 56, № 2. – P. 114–131.
4. **Азизов Т. Я.** Эволюционные и спектральные задачи, порожденные проблемой малых движений вязкоупругой жидкости [текст] / Т. Я. Азизов, Н. Д. Копачевский, Л. Д. Орлова // Труды СПб. матем. об-ва. – 1998. – С. 3–33.
5. **Adamyan V.** On a class of non-self-adjoint quadratic matrix quadratic operator pencils arising in elasticity theory [text] / Adamyan V., Pivovarchik V., Tretter C. // J. Operator Theory. – 2002. – V. 47. – P. 325–341.
6. **Коллатц Л.** Задачи на собственные значения с техническими приложениями [текст] / Коллатц Л. М.: Наука, ГРФМЛ, 1968. – 503 с.
7. **Amara J. B.** Fourth Order Spectral Problem with Eigenvalue in the Boundary Conditions [text] / Amara J. B. // Functional Analysis and its Applications V. Kadets and W. Zelazko. – 2004. – V. 197. – P. 49–58. (North-Holland Mathematics Studies.)
8. **Möller M.** Spectral Properties of a Fourth Order Differential Equation [text] / M. Möller, V. Pivovarchik // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen Journal for Analysis and its Applications. European Mathematical Society. V. – 2006. – V. 25. – P. 341–366.
9. **Яковлев А. В.** Малые поперечные колебания вязкоупругого стержня с грузом на конце [текст] / Яковлев А. В. // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. – 2006. – Т. 2, № 15 (54). – С. 105–114.
10. **Gorokhova I. V.** Small transversal vibrations of elastic rod with point mass at one end subject to viscous friction [text] / Gorokhova I. V. // Журн. матем. физ., анал., геом. – 2009. – V. 4. – P. 375–385.
11. **Наймарк М. А.** Линейные дифференциальные операторы [текст] / М. А. Наймарк. – М.: Наука, 1969. – 512 с.

УДК 519.1

Т. О. Гришанович

Київський національний університет імені Т. Шевченка

ПРО ДЕЯКІ АЛГОРИТМИ ВІДШУКАННЯ ГАМІЛЬТОНОВИХ ЦИКЛІВ НА ЧИСЛОВИХ ГРАФАХ

Гришанович Т. О. Про деякі алгоритми відшукування гамільтонових циклів на числових графах. Робота присвячена проблемі відшукування гамільтонових циклів на числових графах. Зокрема, розглядаються алгоритм з поверненням, алгоритм Approx-TSP(G) та алгоритм із поліноміальним часом. Аналізується часова складність даних алгоритмів.

Ключові слова: гамільтоновий цикл, арифметичні графи, складність алгоритму.

Гришанович Т. А. О некоторых алгоритмах отыскания гамильтоновых циклов на числовых графах. Робота посвящена проблеме отыскания гамильтоновых циклов на арифметических графах. В частности, рассматриваются алгоритм с возвращением, алгоритм Approx-TSP(G) и алгоритм с полиномиальным временем. Анализируется временная сложность этих алгоритмов.

Ключевые слова: гамильтонов цикл, арифметические графы, сложность алгоритма.

Grishanovich T. O. About some algorithms of finding Hamilton cycles in numeric graphs. This work is devoted to finding Hamiltonian cycles on numeric graphs. In particular, the algorithm with returning, algorithm Approx-TSP(G) and polynomial algorithms are considered. Analyzed the time complexity of these algorithms.

Key words: Hamiltonian cycle, arithmetic graphs, time complexity of algorithm.

ВСТУП. Широке використання обчислювальної техніки поставило перед всією математикою і перед теорією графів зокрема проблему знаходження не довільних алгоритмів, які дозволяють розв'язати той чи інший клас задач, а таких, які б допускали ефективну практичну реалізацію. Так виникла проблема практичної розв'язності задач: відшукати ефективний або хоча б достатньо простий у практично важливих випадках алгоритм розв'язання задачі [9]. Крім того, безпосереднє і детальне представлення практичних систем, таких як розподілені мережі та системи зв'язку, приводять до графів великої розмірності, успішний аналіз яких в значній мірі залежить від існування «хороших» алгоритмів для них [9]. Традиційні способи представлення графів вимагають, як правило, значної кількості пам'яті, а отже, громіздких обчислень [7]. Тому у таких випадках досить ефективним є використання числових графів.

Вибір саме числових графів для проведення дослідження зумовлений тим, що вони дозволяють значно зменшити витрати кількості пам'яті, а отже, і витрати часу на проведення обчислень [7]. У роботі [5] продемонстровано, що для числових графів вдалось значно зменшити часову складність алгоритму розкладання графів за допомогою їхніх кістяків (у порівнянні з представленням графів у вигляді матриць суміжності). Тому виникає наступне питання: чи вдасться покращити ефективність за часом уже відомих алгоритмів відшукування гамільтонових циклів за у мови представлення графів у вигляді числових?

Задача відшукування гамільтонових циклів у графі є однією із найстаріших та модельних задач, а також має численні застосування як у самій теорії графів, так і у її прикладних галузях [12]. Найвідомішою проблемою, що ґрунтується на побудові гамільтонових циклів, є задача комівояжера.

У даній роботі описано алгоритми відшукування гамільтонових циклів, інтерпретовані для застосування їх на числових графах. Для проведення дослідження було обрано наступні алгоритми: алгоритм із поверненням [2], Approx-TSP(G) [2, 9] та алгоритм із поліноміальним часом [15]. Проведено аналіз часової складності таких алгоритмів для представлення графів у вигляді числових графів та здійснено порівняння отриманих результатів із складностями тих же алгоритмів за умови представлення графів у вигляді матриць суміжності.

Часова складність алгоритму, як функція від розміру вхідних даних, є однією із важливих мір складності алгоритму. Для того, щоб виконати її обчислення, слід визначити час, необхідний для виконання кожної із команд. Для обчислення складності алгоритму будемо використовувати логарифмічний ваговий критерій. Нехай $l(i)$ – логарифмічна функція на цілих числах, яка задається наступними рівностями:

$$l(i) = \begin{cases} \log |i| + 1, & \text{якщо } i \neq 0; \\ 1, & \text{якщо } i = 0. \end{cases}$$

Такий критерій базується на припущенні, що ціна виконання команди (її вага) прямо пропорційна довжині її операндів. [4]

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ. Для проведення дослідження було обрано наступні алгоритми: алгоритм із поверненням [2], Approx-TSP(G) [1, 2] та алгоритм і поліноміальним часом [15]. Кожен із цих алгоритмів був інтерпретований для застосування на такій структурі даних, як числові графи.

Будемо розглядати зв'язний ненавантажений числовий (натуральний арифметичний) граф $G = (X, U, f)$, що задається кількістю вершин, множиною твірних U , а його функція суміжності має вигляд: $f = (x_i + x_j), (x_i, x_j) \in X$.

Алгоритм із поверненням [2]. Для того, аби перерахувати усі гамільтонові цикли графа, даний алгоритм виконує наступні кроки:

1. Вершина x_1 вибирається в якості відправної і утворює перший елемент множини S . Ця множина буде зберігати у собі вершини ланцюга.
2. До S додається наступна можлива вершина, яка суміжна із x_1 . Під можливою будемо розуміти ту вершину, яка не входить до множини S .
3. На деякому кроці r виявиться, що неможливо включити вершину x_r до множини S . Це може трапитись у двох випадках:
 - (a) Відсутня вершина у графі (відсутня суміжна вершина).
 - (b) Ланцюг, що визначається послідовністю вершин в S , має довжину $n - 1$, тобто є гамільтоновим. Для цього випадку можливі 2 варіанти:
 - i. Існує ребро (x_1, x_r) , тому знайдений цикл — гамільтонів.
 - ii. Ребро (x_1, x_r) у графі відсутнє, гамільтонів цикл відшукати неможливо.

У випадках 3.a та і 3.b.ii слід вдатися до повернення, в той час як у випадку 3.a.i можна припинити пошук і надрукувати результат (якщо потрібно знайти лише один гамільтонів цикл), або (якщо потрібні всі такі цикли) зробити друк і вдатися до повернення:

1. Повернення полягає у видаленні останньої включеної вершини x_r з множини S , після чого залишається множина $S = x_1, \dots, x_{r-1}$.
2. Пошук закінчується в тому випадку, коли множина S складається тільки з вершини x_1 і не існує ніякої можливої вершини, яку можна додати до S , так що крок повернення робить множину S порожньою.

До ланцюга S може входити щонайбільше n вершин графа. Сам же алгоритм переглядає усі вершини графа, розглядаючи кожна із них як продовження максимального простого ланцюга. Нагадаємо, що для обчислення часової складності алгоритму використовується логарифмічний ваговий критерій. Підрахувавши кількість виконаних операцій та скориставшись наступною теоремою:

Теорема 1. [4] *Якщо $A(k) = a_m k^m + \dots + a_1 k + a_0$ є поліномом степені m , тоді $(k) = O(k^m)$,*

отримуємо наступне поліноміальне значення для часової складності такого алгоритму за умови представлення графів у вигляді натуральних арифметичних: $O(n^2)$, де n — кількість вершин графа. Для подання графів у вигляді матриць суміжності такий алгоритм має експоненціальне значення часової складності [2]. Зауважимо, що для обчислення часової складності наступних алгоритмів будемо здійснювати аналогічним чином.

Алгоритм Арпрох-TSP(G) [10]. Даний алгоритм було розроблено спеціально для розв'язання задачі комівояжера (дана задача заключається у знаходженні гамільтонового циклу мінімальної довжини [14]) у метричному просторі. (Задача комівояжера у метричному просторі є частковим випадком задачі комівояжер, де відстані вихідного графа задовольняють нерівності трикутника:

$$d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3),$$

де x_1, x_2, x_3 — вершини графа, $d(x_i, x_j)$ — відстань між заданими вершинами) [10]. Алгоритм Арпрох-TSP(G) складається із наступних кроків:

1. Побудувати мінімальний кістяк графа. Оскільки граф, що розглядається, є ненавантаженим, то для виконання цього кроку алгоритму достатньо побудувати звичайний кістяк графа. Для цього скористаємось алгоритмом пошуку в глибину. Вибирають та відвідують початкову (довільну) вершину графа x_0 . Після цього вибирають ребро (x_0, x_i) , інцидентне x_0 , та відвідують вершину x_i . Нехай x — остання відвіdana вершина. Виберемо довільне ребро (x, x_j) , інцидентне x , яке ще не розглядалось. Якщо вершина x_j уже відвідувалась, то шукаємо нове ребро, яке інцидентне x . Якщо y — не відвіdana вершина, ідемо до неї та розпочинаємо пошук з цієї вершини. У тому випадку, коли переміщення вперед є неможливим, повертаємось до вершини x (до тієї вершини, по якій ми прийшли до y) та розпочинаємо пошук з неї. В результаті ми повернемося до вершини x_0

та виявимо неможливість продовжувати пошук. Після цього шукаємо нову вершину x_1 , яка не відвідувалась раніше, та продовжуємо з неї пошук. Пошук закінчено у тому випадку, коли усі вершини графа були відвідані.

2. Продублювати кожне із ребер знайденого кістяка та в отриманому графі відшукати ейлерів цикл. (Ейлеровим називають цикл, який містить усі ребра та вершини графа[14].)

Виникає питання: чи існує у графі, що утворений із дерева шляхом подвоєння його ребер, ейлерів цикл?

Теорема 2 (Ейлера). [14] *Зв'язний граф є ейлеревим тоді і тільки тоді, коли кожна його вершина має парний степінь.*

Відомо, що кожне дерево із n вершинами має $(n-1)$ ребро. [14] Тобто у дереві кожна із вершин має степінь q , $q = \{1, 2, \dots, (n-1)\}$. Розглянемо граф, що утворився із дерева вихідного графа шляхом подвоєння кожного із його ребер. При подвоєнні усіх ребер графа степінь кожної із його вершин збільшиться вдвічі: $q = \{2, 4, \dots, 2(n-1)\}$. У такому випадку, якщо вершина у дереві і мала непарний степінь, то у новоутвореному графі її степінь стає парним. За теоремою Ейлера, ейлерів цикл у такому графі існує.

3. У знайденому ейлеревому циклі видалити усі вершини, які повторюються. Отриманий цикл буде гамільтоновим циклом вихідного графа.

Алгоритм Approx-TSP(G) відноситься до наближених алгоритмів, і для нього справедлива наступна теорема:

Теорема 3. [1] *Алгоритм Approx-TSP(G) розв'язує задачу комівояжера з помилкою не більше, ніж у 2 рази, якщо виконується нерівність трикутника.*

Для представлення графа у вигляді матриці суміжності [8] час виконання такого алгоритму відомий та становить $O(n^2)$, де n – кількість вершин графа. Оцінимо час роботи такого алгоритму для арифметичних графів. Кістяк для такого виду графів будується за час $O(n)$ [6]. Відшукання ейлеревого циклу має складність $O(m)$, де m – число ребер у графі. Оскільки пошук ейлеревого циклу здійснюється у графі, що утворений із його кістяка шляхом подвоєння ребер, то $m = 2(n-1)$. Тому алгоритм відшукання ейлеревого циклу тут має складність $O(n)$. Таким чином отримуємо складність алгоритму Approx-TSP(G) для натуральних арифметичних графів $O(n)$.

Алгоритм із поліноміальним часом [15]. Такий алгоритм передбачає виконання наступних кроків:

1. Знайти цикл, який довільним чином містить усі вершини графа. У такому циклі дві сусідні вершини можуть бути не суміжними у вихідному графі. Такі точки будемо називати «break point».
2. Для кожної такої точки, крім одної (її називають «main beak point»), додати нове ребро (слід запам'ятати додані ребра, оскільки кожного разу, видаляючи ребро, ми будемо розпочинати роботу алгоритму спочатку).

3. Виправити «main beak point»: вирізати сегмент (частину) із «main beak point» та вставити цей сегмент у деяке довільне місце у циклі.
4. Виправити наступну «main beak point».
5. Виправлення (пункти 2-3) здійснювати до того часу, поки не буде знайдено гамільтонів цикл на графа.

Виникає питання: яким чином здійснювати таку вставку та вирізання? Правило наступне: зробити кількість нових «break point» якнайменшим, і кожна нова «break point» повинна відрізнятись від усіх попередніх «main break point». При визначенні наступної «main break point» може трапитись так, що більш ніж одна «break point» підходить для цього. У такому випадку слід порівняти наступний, але лише один, крок для кожної із цих точок. Також слід уникати вставки одного і того ж сегменту у різні частини циклу послідовно.

Стосовно часу виконання такого алгоритму, то час побудови циклу, що містить усі вершини графа, становить $O(n)$, n – кількість вершин графа. Виправляючи кожного разу одну «break point», ми можемо додавати ребро щонайбільше n разів, максимальне ж число самих «break point» теж n . Таким чином, отримуємо часову складність $O(n^2)$.

Висновки. У запропонованій роботі здійснено порівняння часової ефективності алгоритмів відшукування гамільтонових циклів для двох способів представлення графів: матриці суміжності та числові графи. Зокрема, для роботи із числовими графами уже відомі алгоритми було інтерпретовано для роботи саме із такими структурами даних. Проведений аналіз отриманих результатів свідчить про те, що для алгоритму із поверненням та алгоритму Approx-TSP(G) значення часової складності для числових графів у порівнянні із поданням їх у вигляді матриць суміжності вдалось покращити: для алгоритму із поверненням отримали поліноміальне значення оцінки, а для Approx-TSP(G) отримали зменшення степеня полінома. Для алгоритму із поліноміальним часом, як для матриць суміжності, так і для натуральних арифметичних графів, отримали поліноміальне значення часової складності. Тобто використання числових графів дозволяє збільшити ефективність за часом розглянутих алгоритмів.

1. **Алгоритмы** Построение и анализ [текст] / Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К.; пер. с англ. И. В. Крисикова. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. — 1293 с.
2. **Асанов М. О.** Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы [текст] / Асанов М. О., Баранский В. А., Расин В. В. — М., Ижевск: РХД, 2001. — 288 с.
3. **Асельдеров З. М.** Представление и восстановление графов [текст] / З. М. Асельдеров. — К.: Наукова думка, 1991. — 312 с.
4. **Ахо А.** Построение и анализ вычислительных алгоритмов [текст] / Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.; пер. с англ. А. О. Слисенко. — М.: Мир, 1979. — 536 с.
5. **Гришанович Т. О.** Про часову складність алгоритму розкладання числових графів за допомогою їх кістяків [текст] / Т. О. Гришанович // Вісник Київського національного університету. — 2011. — № 2. — С. 83–87.

6. **Донец Г. А.** Об оценке сложности алгоритмов в арифметических графах [текст] / Г. А. Донец, Ю. И. Неженцев // Методы решения задач нелинейного и дискретного программирования. – 1991. – № 1. – С. 79–87
7. **Донец Г. А.** Об общем представлении числовых графов [текст] / Г. А. Донец, И. Э. Шулинок // Теорія оптимальних рішень. – 2004. – № 3. – С. 18–25.
8. **Касьянов В. Н.** Графы в программировании: обработка, визуализация и применение / В. Н. Касьянов, В. А. Евстигнеев. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 1106 с.
9. **Кристофидес Н.** Теория графов. Алгоритмический подход / Кристофидес Никос; пер. с англ. Г. О. Гаврилов. – М.: Мир, 1978. – 432 с.
10. **Куликов А. С.** Эффективные алгоритмы: конспект лекций [Электронный ресурс] / А. С. Куликов // Лаборатория математической логики. – Режим доступа: <http://logic.pdmi.ras.ru/>
11. **Неженцев Ю. И.** Об оценке сложности алгоритмов поиска в арифметических графах [текст] / Ю. И. Неженцев // Математические методы и программное обеспечение в системах принятия решения и проектирования. – К: Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова АН УССР. – 1990. – С. 14–24.
12. **Скобелев В. Г.** Локальные алгоритмы на графах [текст] / Скобелев В. Г. – Донецк.: ИПМП НАНУ, 2003. – 218 с.
13. **Шинкаренко В. І.** Особливості практичного застосування показників обчислювальної складності алгоритмів [текст] / В. І. Шинкаренко // Проблеми програмування. – 2008. – № 2–3. – С. 12–20.
14. **Эвнин А. Ю.** Дискретная математика: конспект лекций [текст] / А. Ю. Эвнин. – Челябинск: Издательство ЮУрГУ, 1998. – 177 с.
15. **Lizhi Du.** A Polynomial Time Algorithm for Hamilton Cycle (Path) [text] / Du Lizhi // IMECS 2010: International MultiConference of Engineers and Computer Scientists, marc 17-19, 2010: proceedings. – Hong Kong, 2010. – V. 1. – P. 21–25.

УДК 511.33

З. Ю. Дадаян

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ОБОВЩЕННАЯ ФУНКЦИЯ ПИЛЛАИ

Дадаян З. Ю. Узагальнена функція Піллаї. Вивчається розподіл значень функції S. S. Pillai над кільцем цілих гауссових чисел $\mathbb{Z}[i]$. Знайдені асимптотичні формули для суматорних функцій $\sum_{N(\alpha) \leq x} \frac{g(\alpha)}{N^a(\alpha)}$, де $a \in \mathbb{R}$.

Ключові слова: асимптотична формула, цілі гауссові числа, мультиплікативна функція.

Дадаян З. Ю. Обобщенная функция Пиллаи. Изучается распределение значений функции S. S. Pillai над кольцом целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i]$. Найденны асимптотические формулы для сумматорных функций $\sum_{N(\alpha) \leq x} \frac{g(\alpha)}{N^a(\alpha)}$, где $a \in \mathbb{R}$.

Ключевые слова: асимптотическая формула, целые гауссовы числа, мультипликативная функция.

Dadayan Z. Yu. Generalized Pillai's function. We study the value distribution of S. S. Pillai function defined over Gaussian integers $\mathbb{Z}[i]$. Some asymptotic formulae for summator functions $\sum_{N(\alpha) \leq x} \frac{g(\alpha)}{N^a(\alpha)}$, where $a \in \mathbb{R}$, are established.

Key words: asymptotic formula, gaussian integers, multiplicative function.

ВВЕДЕНИЕ. В 30-х годах прошлого века индийский математик S. S. Pillai (1901–1950) подробно изучал арифметическую функцию натурального аргумента

$$P(n) = \sum_{k=1}^n (k, n), \quad (1)$$

позже названную его именем.

Он доказал мультипликативность (1), получил формулы для ее вычисления, показал разложимость ее в произведение Дирихле. Кроме того, обнаружил ряд других нетривиальных свойств.

За последние 10 лет К. А. Broughan и О. Bordelles опубликовали ряд статей со своими результатами, где существенно продвинулись в изучении функции (1). В частности, ими были получены асимптотические формулы для сумматорной функции $\sum_{n \leq x} \frac{P(n)}{n^a}$, где a — фиксированный вещественный параметр, а $x \rightarrow \infty$.

В данной статье исследуется обобщение функции S. S. Pillai над кольцом целых гауссовых чисел.

Обозначения:

$\mathbb{Z}[i]$ — кольцо целых гауссовых чисел;

$N(\alpha) = |\alpha|^2$ — норма целого гауссового α ;

(α, β) — наибольший общий делитель $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$;

\wp – простое гауссовое;
 $\bar{\varphi}$ – функция Эйлера над $\mathbb{Z}[i]$:

$$\bar{\varphi}(\alpha) = N(\alpha) \prod'_{\wp|\alpha} \left(1 - \frac{1}{N(\wp)}\right),$$

где знак «'», который иногда будем опускать, означает, что произведение берется по неассоциированным простым делителям α ;

Id – тождественная функция: $Id(\alpha) = N(\alpha)$;

$f * h$ – произведение Дирихле функций f и h над $\mathbb{Z}[i]$: $f * h(\alpha) = \sum'_{\delta|\alpha} f(\delta) \cdot h\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)$;

$(f)^{-1} = \frac{1}{f}$ для любой мультипликативной функции f над $\mathbb{Z}[i]$;

символ O_ε означает, что постоянная в символе Ландау "O" может зависеть от параметра ε .

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

1. Функция $g(\alpha)$.

Пусть $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$. Введем в рассмотрение следующую функцию:

$$g(\alpha) = \sum'_{\beta \pmod{\alpha}} N((\beta, \alpha)). \quad (2)$$

Покажем, что функция g мультипликативна, используя определение мультипликативности. Пусть $\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2$, $(\alpha_1, \alpha_2) = 1$, $\alpha_1 \in \mathbb{Z}[i]$, $\alpha_2 \in \mathbb{Z}[i]$. Требуется показать, что

$$g(\alpha_1 \cdot \alpha_2) = g(\alpha_1) \cdot g(\alpha_2).$$

Имеем:

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= \sum'_{\beta \pmod{\alpha}} N((\beta, \alpha)) = \sum'_{\beta \pmod{\alpha_1 \cdot \alpha_2}} N((\beta, \alpha_1 \cdot \alpha_2)) = \\ &= \sum'_{\beta_1 \cdot \alpha_2 + \beta_2 \cdot \alpha_1 \pmod{\alpha_1 \cdot \alpha_2}} N((\beta_1 \cdot \alpha_2 + \beta_2 \cdot \alpha_1, \alpha_1 \cdot \alpha_2)) = \\ &= \sum'_{\beta_1 \pmod{\alpha_1}} \sum'_{\beta_2 \pmod{\alpha_2}} N((\beta_1 \cdot \alpha_2 + \beta_2 \cdot \alpha_1, \alpha_1 \cdot \alpha_2)) = \\ &= \sum'_{\beta_1 \pmod{\alpha_1}} \sum'_{\beta_2 \pmod{\alpha_2}} N((\beta_1 \cdot \alpha_2 + \beta_2 \cdot \alpha_1, \alpha_1)) \cdot N((\beta_1 \cdot \alpha_2 + \beta_2 \cdot \alpha_1, \alpha_2)) = \\ &= \sum'_{\beta_1 \pmod{\alpha_1}} \sum'_{\beta_2 \pmod{\alpha_2}} N((\beta_1 \cdot \alpha_2, \alpha_1)) \cdot N((\beta_2 \cdot \alpha_1, \alpha_2)) = \\ &= \sum'_{\beta_1 \pmod{\alpha_1}} N((\beta_1, \alpha_1)) \cdot \sum'_{\beta_2 \pmod{\alpha_2}} N((\beta_2, \alpha_2)) = \\ &= \left(\sum'_{\beta_1 \pmod{\alpha_1}} N((\beta_1, \alpha_1)) \right) \cdot \left(\sum'_{\beta_2 \pmod{\alpha_2}} N((\beta_2, \alpha_2)) \right) = g(\alpha_1) \cdot g(\alpha_2). \end{aligned}$$

Лемма 1. Пусть \wp – простое гауссово, $m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$g(\wp^m) = (m + 1) \cdot N(\wp^m) - m \cdot N(\wp^{m-1}). \quad (3)$$

Доказательство. Нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} g(\wp^m) &= \bar{\varphi}(\wp^m) \cdot 1 + \bar{\varphi}(\wp^{m-1}) \cdot N(\wp) + \bar{\varphi}(\wp^{m-2}) \cdot N(\wp^2) + \dots + \\ &\quad + \dots + \bar{\varphi}(\wp) \cdot N(\wp^{m-1}) + 1 \cdot N(\wp^m) = \\ &= N(\wp^m) - N(\wp^{m-1}) + (N(\wp^{m-1}) - N(\wp^{m-2})) \cdot N(\wp) + \\ &\quad + (N(\wp^{m-2}) - N(\wp^{m-3})) \cdot N(\wp^2) + \dots + \\ &+ (N(\wp) - 1) \cdot N(\wp^{m-1}) + N(\wp^m) = (m+1) \cdot N(\wp^m) - m \cdot N(\wp^{m-1}). \end{aligned}$$

Следствие 1. Пусть $\alpha = \wp_1^{m_1} \cdot \wp_2^{m_2} \cdot \dots \cdot \wp_k^{m_k} \in \mathbb{Z}[i]$. Тогда

$$g(\alpha) = \prod_{j=1}^k \left\{ (m_j + 1) \cdot N(\wp_j^{m_j}) - m_j \cdot N(\wp_j^{m_j-1}) \right\}. \quad (4)$$

Следствие 2. Пусть $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$. Тогда

$$g(\alpha) = \bar{\varphi} * Id(\alpha).$$

Следствие 3. Пусть $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$. Тогда $g(\alpha) = (\mu * Id \cdot \tau)(\alpha)$.

Доказательство. Это утверждение следует из предыдущего в силу ассоциативности произведения Дирихле.

Лемма 2. Имеет место следующая оценка:

$$\max \left\{ 2 - \frac{1}{N(\alpha)}, \left(\frac{3}{2} \right)^{\omega(\alpha)} \right\} \leq \frac{g(\alpha)}{N(\alpha)} \leq 12 \cdot \left(\frac{\log N(\alpha)}{\omega(\alpha)} \right)^{\omega(\alpha)}, \quad (5)$$

где $\omega(\alpha)$ – количество различных неассоциированных простых делителей $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$.

Доказательство. Пусть $\alpha = \prod_{j=1}^k \wp_j^{m_j}$, $g(\alpha) = \sum'_{\beta \pmod{\alpha}} N((\beta, \alpha))$. Здесь β по модулю α будет принимать ровно $N(\alpha)$ значений, одним из которых будет являться само α . Значит, $g(\alpha) \geq (N(\alpha) - 1) \cdot 1 + 1 \cdot N(\alpha) = 2 \cdot N(\alpha) - 1$, откуда

$$\frac{g(\alpha)}{N(\alpha)} \geq 2 - \frac{1}{N(\alpha)}.$$

С другой стороны, с учетом мультипликативности нормы, следствия 1, а также с учетом того, что для всех $j = \overline{1, k}$ $m_j \geq 1$, $N(\wp_j) \geq 2$, имеем:

$$\frac{g(\alpha)}{N(\alpha)} = \prod_{j=1}^k \left\{ (m_j + 1) - \frac{m_j}{N(\wp_j)} \right\} \geq \prod_{j=1}^k \left\{ (1 + 1) - \frac{1}{N(\wp_j)} \right\} \geq \left(\frac{3}{2} \right)^k, \text{ где } k = \omega(\alpha).$$

Итак, $\frac{g(\alpha)}{N(\alpha)} \geq 2 - \frac{1}{N(\alpha)}$ и $\frac{g(\alpha)}{N(\alpha)} \geq \left(\frac{3}{2} \right)^k$. Следовательно,

$$\max \left\{ 2 - \frac{1}{N(\alpha)}, \left(\frac{3}{2} \right)^{\omega(\alpha)} \right\} \leq \frac{g(\alpha)}{N(\alpha)}.$$

Докажем теперь вторую часть неравенства. Для некоторого простого $\wp \in \mathbb{Z}[i]$ и натурального m имеем

$$\frac{g(\wp^m)}{N(\wp^m)} = m + 1 - \frac{m}{N(\wp)} = m \cdot \left(1 - \frac{1}{N(\wp)} \right) + 1 \leq w \cdot m \cdot \log N(\wp), \quad (6)$$

$$\text{где } w = \begin{cases} 3, & \text{if } N(\wp) = 2 \\ 2, & \text{if } N(\wp) = 5 \\ 1, & \text{if } N(\wp) \geq 9 \end{cases} .$$

Последнее неравенство проверяется непосредственно. Хотя обосновать его можно легко, если проанализировать вещественную функцию

$f(x; m, c) = c \cdot m \cdot \log x - m \cdot (1 - \frac{1}{x}) - 1$, где $m \in \mathbb{N}$ — параметр, $c \in \mathbb{R}$ — константа.

Рассмотрим теперь следующую задачу Лагранжа:

$$\begin{aligned} f &= x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k \rightarrow \max_{x_i, i=1, \dots, k} \\ x_1 + x_2 + \dots + x_k &= s, \\ x_i &\geq 1 \quad \forall i = \overline{1, k}. \end{aligned} \tag{7}$$

Нетрудно показать, что решениями (7) будут $x_i^* = \frac{s}{k}$ ($i = 1, \dots, k$), при этом $f^* = (\frac{s}{k})^k$.

Вернемся к доказательству неравенства. Пусть в разложении α все $N(\wp_j) \geq 9$. Тогда с учетом (6) имеем:

$$\frac{g(\alpha)}{N(\alpha)} \leq \prod_{j=1}^k m_j \cdot \log N(\wp_j) = \prod_{j=1}^k \log N(\wp_j^{m_j}),$$

но с учетом (7) $\prod_{j=1}^k \log N(\wp_j^{m_j}) \leq \left(\frac{\log N(\alpha)}{k}\right)^k$, поэтому $\frac{g(\alpha)}{N(\alpha)} \leq \left(\frac{\log N(\alpha)}{\omega(\alpha)}\right)^{\omega(\alpha)}$. Пусть теперь в разложение α входит $\wp_1 = 1 + i$ в степени m_1 , $\wp_2 = 1 + 2i$ в степени m_2 , $\wp_3 = 1 - 2i$ в степени m_3 . Тогда в этом случае с учетом (6) и (7)

$$\frac{g(\alpha)}{N(\alpha)} \leq (3 \cdot m_1 \cdot \log N(\wp_1)) \cdot (2 \cdot m_2 \cdot \log N(\wp_2)) \cdot (2 \cdot m_3 \cdot \log N(\wp_3)) \cdot$$

$$\cdot \prod_{N(\wp_j) \geq 9} m_j \cdot \log N(\wp_j) = 12 \cdot \prod_{j=1}^k m_j \cdot \log N(\wp_j) \leq 12 \cdot \left(\frac{\log N(\alpha)}{\omega(\alpha)}\right)^{\omega(\alpha)} .$$

Заметим, что $\frac{g(\alpha)}{N(\alpha)} \leq c \cdot \left(\frac{\log N(\alpha)}{\omega(\alpha)}\right)^{\omega(\alpha)}$, где константа $c = c(\alpha)$ принимает значение из множества $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

Лемма 3. Функция $g(\alpha)$ для любого $\alpha \neq 0 \in \mathbb{Z}[i]$ удовлетворяет соотношению

$$\sum_{\delta|\alpha} g(\delta) = N(\alpha) \cdot \tau(\alpha).$$

Доказательство. Пусть $\alpha = \wp_1^{m_1} \cdot \wp_2^{m_2} \cdot \dots \cdot \wp_k^{m_k} \in \mathbb{Z}[i]$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{\delta|\alpha} g(\delta) &= \sum_{\delta|\wp_1^{m_1} \cdot \wp_2^{m_2} \cdot \dots \cdot \wp_k^{m_k}} g(\delta) = \prod_{j=1}^k \left(\sum_{\delta|\wp_j^{m_j}} g(\delta) \right) = \\ &= \prod_{j=1}^k \left(1 + \sum_{l=1}^{m_j} ((l+1) \cdot N(\wp_j^l) - l \cdot N(\wp_j^{l-1})) \right) = \\ &= \prod_{j=1}^k (1 + 2 \cdot N(\wp_j) - 1 + 3 \cdot N(\wp_j^2) - 2 \cdot N(\wp_j) + 4 \cdot N(\wp_j^3) - 3 \cdot N(\wp_j^2) + \dots \\ &+ (m_j + 1) \cdot N(\wp_j^{m_j}) - m_j \cdot N(\wp_j^{m_j-1})) = \prod_{j=1}^k (m_j + 1) \cdot N(\wp_j^{m_j}) = N(\alpha) \cdot \tau(\alpha). \end{aligned}$$

Заметим, что из $Id * Id(\alpha) = N(\alpha) \cdot \tau(\alpha)$ и леммы 3 следует, что

$$Id * Id(\alpha) = \sum_{\delta|\alpha} g(\delta).$$

2. Среднее значение $g(\alpha)$.

В этой секции мы строим асимптотическую формулу для $\sum_{N(\alpha) \leq x} g(\alpha)$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= \sum'_{\delta|\alpha} \bar{\varphi}(\delta) \cdot N\left(\frac{\alpha}{\delta}\right) \leq \sum'_{\delta|\alpha} N(\delta) \cdot N\left(\frac{\alpha}{\delta}\right) = \\ &= \sum'_{\delta|\alpha} N(\alpha) = N(\alpha) \cdot \tau(\alpha) = N(\alpha) \cdot O_\varepsilon(N^\varepsilon(\alpha)) = O_\varepsilon(N^{1+\varepsilon}(\alpha)), \end{aligned}$$

где $\varepsilon > 0$ – произвольное малое число.

Рассмотрим функцию $Z(s) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}[i]} \frac{1}{N^s(\alpha)}$, где $s \in \mathbb{C}$, $Res > 1$. Она называется дзета-функцией Дедекинда поля гауссовых чисел $\mathbb{Q}(i)$.

Ее квадрат является производящим рядом для функции делителей $\tau(\alpha)$:

$$Z^2(s) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}[i]} \frac{\tau(\alpha)}{N^s(\alpha)}. \quad (8)$$

Лай Дык Тхинь в [4] показал, что

$$\sum_{N(\alpha) \leq x} \tau(\alpha) = \pi^2 \cdot x \cdot \log x + c \cdot x + O(x^{\theta+\varepsilon}), \quad (9)$$

где $\theta \leq \frac{1}{3}$, $c = 2 \cdot \pi^2 \cdot C - \pi^2 + 8 \cdot \pi \cdot L'(1, \chi_4)$, C – постоянная Эйлера.

Лемма 4. Для всех действительных $x > 1$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\sum_{N(\alpha) \leq x} N(\alpha) \cdot \tau(\alpha) = -\frac{\pi^2 \cdot x^2 \cdot \log x}{2} + \frac{3 \cdot \pi^2 \cdot x^2}{4} + c \cdot x^2 + O_\varepsilon(x^{1+\theta+\varepsilon}).$$

Доказательство. Поскольку $Z^2(s) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}[i]} \frac{\tau(\alpha)}{N^s(\alpha)} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}[i]} \frac{N(\alpha) \cdot \tau(\alpha)}{N^{s+1}(\alpha)}$, то по формуле Перрона выводим для $d > 2$

$$\begin{aligned} \sum_{N(\alpha) \leq x} N(\alpha) \cdot \tau(\alpha) &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} Z^2(s-1) \cdot \frac{x^s}{s} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{d-iT}^{d+iT} Z^2(s-1) \cdot \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^d}{T \cdot (d-1)^2}\right) = \\ &= \frac{x}{2\pi i} \cdot \int_{d-1-iT}^{d-1+iT} Z^2(s) \cdot \frac{x^s}{s} ds - \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{d-1-iT}^{d-1+iT} Z^2(s) \cdot \frac{x^{s+1}}{s \cdot (s+1)} ds + \\ &\quad + O\left(\frac{x^d}{T \cdot (d-2)^2}\right). \end{aligned}$$

Первый интеграл оценен в работе Лай Дык Тхиня [4] как $O(x^{1-\varepsilon} \cdot T^{2+\varepsilon})$.

Второй интеграл (после перенесения контура интегрирования на прямую $Res = -\varepsilon$) имеет оценку

$$\begin{aligned} x \cdot res_{s=1} \left(Z^2(s) \cdot \frac{x^s}{s \cdot (s+1)} \right) + x \cdot res_{s=0} \left(Z^2(s) \cdot \frac{x^s}{s \cdot (s+1)} \right) + O(T^{1+\varepsilon}) = \\ = Z^2(0) \cdot x + O(T^{1+\varepsilon}) + \frac{\pi^2 \cdot x^2 \cdot \log x}{2} - \frac{3 \cdot \pi^2 \cdot x^2}{4} + c \cdot x^2. \end{aligned}$$

Поэтому при $T = x^{\frac{2}{3}}$ окончательно получаем утверждение леммы.

Лемма 5. Для любого вещественного $x > 1$ имеет место формула

$$\sum_{N(\alpha) \leq x} g(\alpha) = \sum_{N(\beta) \leq x} \mu(\beta) \cdot \sum_{N(\gamma) \leq \frac{x}{N(\beta)}} Id(\gamma) \cdot \tau(\gamma).$$

Доказательство. По следствию 3

$$g(\alpha) = \sum_{\beta|\alpha} \mu(\beta) \cdot Id\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \cdot \tau\left(\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{N(\alpha) \leq x} g(\alpha) &= \sum_{N(\alpha) \leq x} \sum_{\beta|\alpha} \mu(\beta) \cdot Id\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \cdot \tau\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \\ &= \sum_{N(\beta \cdot \gamma) \leq x} \mu(\beta) \cdot Id(\gamma) \cdot \tau(\gamma) = \\ &= \sum_{N(\beta) \cdot N(\gamma) \leq x} \mu(\beta) \cdot Id(\gamma) \cdot \tau(\gamma) = \sum_{N(\beta) \leq x} \mu(\beta) \cdot \sum_{N(\gamma) \leq \frac{x}{N(\beta)}} Id(\gamma) \cdot \tau(\gamma). \end{aligned}$$

Теорема 1. При $x \rightarrow \infty$ имеет место оценка

$$\sum'_{N(\alpha) \leq x} g(\alpha) = x^2 \cdot \left\{ \left(-\frac{\pi^2}{2} \cdot \log x + c + \frac{3\pi^2}{4} \right) \cdot \frac{1}{Z(2)} + \frac{\pi^2 \cdot Z'(2)}{2 \cdot Z^2(2)} \right\} + O_\varepsilon(x^{1+\theta+\varepsilon}),$$

где θ определено в лемме 4, $\varepsilon > 0$ – произвольное малое.

Доказательство. Применение леммы 5 дает

$$\begin{aligned} \sum_{N(\alpha) \leq x} g(\alpha) &= \sum_{N(\beta) \leq x} \mu(\beta) \cdot \sum_{N(\gamma) \leq \frac{x}{N(\beta)}} Id(\gamma) \cdot \tau(\gamma) = \\ &= \sum_{N(\beta) \leq x} \mu(\beta) \cdot \sum_{N(\gamma) \leq \frac{x}{N(\beta)}} N(\gamma) \cdot \tau(\gamma) = \\ &= \pi^2 \cdot x^2 \cdot \sum_{N(\beta) \leq x} \frac{\mu(\beta)}{N^2(\beta)} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \log x + \frac{1}{2} \cdot \log N(\beta) \right) + \\ &+ x^2 \cdot \left(c + \frac{3\pi^2}{4} \right) \cdot \sum_{N(\beta) \leq x} \frac{\mu(\beta)}{N^2(\beta)} + \sum_{N(\beta) \leq x} \mu(\beta) \cdot O_\varepsilon \left(\frac{x^{1+\theta+\varepsilon}}{(N(\beta))^{1+\theta+\varepsilon}} \right) = \\ &= \left(-\frac{\pi^2 \cdot x^2 \cdot \log x}{2} + x^2 \cdot \left(c + \frac{3\pi^2}{4} \right) \right) \cdot \sum_{N(\beta) \leq x} \frac{\mu(\beta)}{N^2(\beta)} + \\ &+ \frac{\pi^2 \cdot x^2}{2} \cdot \sum_{N(\beta) \leq x} \frac{\mu(\beta) \cdot \log N(\beta)}{N^2(\beta)} + O_\varepsilon \left(x^{1+\theta+\varepsilon} \cdot \sum_{N(\beta) \leq x} \frac{|\mu(\beta)|}{(N(\beta))^{1+\theta+\varepsilon}} \right) = \\ &= x^2 \cdot \left(-\frac{\pi^2 \cdot \log x}{2} + c + \frac{3\pi^2}{4} \right) \cdot \sum_{\beta \in \mathbb{Z}[i]} \frac{\mu(\beta)}{N^2(\beta)} + \frac{\pi^2 \cdot x^2}{2} \cdot \sum_{\beta \in \mathbb{Z}[i]} \frac{\mu(\beta) \cdot \log N(\beta)}{N^2(\beta)} + \\ &+ O \left(\frac{\log x}{x} \right) + O(x^{1+\theta+\varepsilon}) = \\ &= \frac{x^2}{Z(2)} \cdot \left(-\frac{\pi^2 \cdot \log x}{2} + c + \frac{3\pi^2}{4} \right) + \frac{\pi^2 \cdot x^2 \cdot Z'(2)}{2 \cdot Z^2(2)} + O(x^{1+\theta+\varepsilon}). \end{aligned}$$

Замечание 1. В рациональном случае О. Bordelles получил асимптотическую формулу со значением θ_0 , которое соответствует проблеме делителей над \mathbb{Z} (согласно результатам М. Н. Huxley [4] $\theta_0 = \frac{131}{416}$).

3. Среднее значение $G_a(x)$.

Обозначим для $a \in \mathbb{R}$ через

$$G_a(x) = \sum'_{N(\alpha) \leq x} \frac{g(\alpha)}{N^a(\alpha)}. \quad (10)$$

Рассмотрим ряд

$$G(s) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}[i]} \frac{g(\alpha)}{N^s(\alpha)}, \quad (\operatorname{Re}(s) > 2). \quad (11)$$

Используя следствие 2 и представление функции $\bar{\varphi}$ как произведение Дирихле тождественной функции и функции Мебиуса, получим для $\operatorname{Re} s > 2$:

$$\begin{aligned} G(s) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}[i]} \frac{g(\alpha)}{N^s(\alpha)} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}[i]} \frac{\sum_{\delta|\alpha} \bar{\varphi}(\delta) \cdot N\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)}{N^s(\alpha)} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}[i]} \frac{\sum_{\delta, \gamma=\alpha} \bar{\varphi}(\delta) \cdot N(\gamma)}{N^s(\alpha)} = \\ &= \left(\sum_{\delta \in \mathbb{Z}[i]} \frac{\bar{\varphi}(\delta)}{N^s(\delta)} \right) \cdot \left(\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}[i]} \frac{N(\gamma)}{N^s(\gamma)} \right) = Z(s-1) \cdot \left(\sum_{\delta \in \mathbb{Z}[i]} \frac{\bar{\varphi}(\delta)}{N^s(\delta)} \right) = \\ &= Z(s-1) \cdot \left(\sum_{\delta \in \mathbb{Z}[i]} \frac{\sum_{\beta|\delta} \mu(\beta) \cdot N\left(\frac{\delta}{\beta}\right)}{N^s(\delta)} \right) = Z^2(s-1) \cdot \sum_{\beta \in \mathbb{Z}[i]} \frac{\mu(\beta)}{N^s(\beta)} = \frac{Z^2(s-1)}{Z(s)}. \end{aligned}$$

Очевидно, что $G(s)$ имеет полюсы только в точке $s = 2$ и в тех точках, где $Z(s) = 0$, причем в точке $s = 2$ полюс второго порядка.

Известно, что для достаточно больших x

$$\sum_{N(\alpha) \leq x} 1 = \pi \cdot x + O\left(x^{\frac{1}{3}}\right), \quad (12)$$

$$\sum_{N(\alpha) \leq x} N(\alpha) = \frac{\pi \cdot x^2}{2} + O\left(x^{\frac{4}{3}}\right). \quad (13)$$

$$\sum_{N(\alpha) \leq x} \frac{1}{N(\alpha)} = \pi \log x + C_0 + O\left(x^{-\frac{2}{3}}\right), \quad (14)$$

где C_0 — вычислимая постоянная.

Лемма 6. $\forall x > 1 \sum'_{N(\alpha) \leq x} \frac{\bar{\varphi}(\alpha)}{N(\alpha)} = \frac{\pi \cdot x}{4Z(2)} + O\left(x^{\frac{1}{3}}\right)$.

Доказательство. Ясно, что $\frac{\bar{\varphi}(\alpha)}{N(\alpha)} = \sum'_{\delta|\alpha} \frac{\mu(\delta)}{N(\delta)}$, поэтому

$$\begin{aligned} \sum'_{N(\alpha) \leq x} \frac{\bar{\varphi}(\alpha)}{N(\alpha)} &= \sum'_{N(\alpha) \leq x} \sum'_{\delta|\alpha} \frac{\mu(\delta)}{N(\delta)} = \sum'_{N(\delta) \leq x} \frac{\mu(\delta)}{N(\delta)} \cdot \sum'_{N(\gamma) \leq \frac{x}{N(\delta)}} 1 = \\ &= \sum'_{N(\delta) \leq x} \frac{\mu(\delta)}{N(\delta)} \cdot \left\{ \pi \cdot \frac{x}{4N(\delta)} + O\left(\left(\frac{x}{N(\delta)}\right)^{\frac{1}{3}}\right) \right\} = \frac{\pi \cdot x}{4} \cdot \sum'_{N(\delta) \leq x} \frac{\mu(\delta)}{N^2(\delta)} + \\ &+ O\left(x^{\frac{1}{3}} \cdot \sum'_{N(\delta) \leq x} \frac{|\mu(\delta)|}{(N(\delta))^{\frac{4}{3}}}\right) = \frac{\pi \cdot x}{4Z(2)} + O\left(\frac{1}{x}\right) + O\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{\pi \cdot x}{4Z(2)} + O\left(x^{\frac{1}{3}}\right). \end{aligned}$$

Лемма 7. $\forall x > 1 \sum'_{N(\alpha) \leq x} \bar{\varphi}(\alpha) = \frac{\pi x^2}{8 \cdot Z(2)} + O\left(x^{\frac{4}{3}}\right)$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \sum'_{N(\alpha) \leq x} \bar{\varphi}(\alpha) &= \sum'_{N(\alpha) \leq x} \sum'_{\delta | \alpha} \mu(\delta) \cdot N\left(\frac{\alpha}{\delta}\right) = \sum'_{N(\delta) \leq x} \mu(\delta) \cdot \sum'_{N(\gamma) \leq \frac{x}{N(\delta)}} N(\gamma) = \\ &= \sum'_{N(\delta) \leq x} \mu(\delta) \cdot \left\{ \frac{\pi x^2}{8 \cdot N^2(\delta)} + O\left(\left(\frac{x}{N(\delta)}\right)^{\frac{4}{3}}\right) \right\} = \\ &= \frac{\pi x^2}{8} \cdot \sum'_{N(\delta) \leq x} \frac{\mu(\delta)}{N^2(\delta)} + O\left(x^{\frac{4}{3}} \cdot \sum'_{N(\delta) \leq x} \frac{|\mu(\delta)|}{(N(\delta))^{\frac{4}{3}}}\right) = \\ &= \frac{\pi x^2}{8 \cdot Z(2)} + O\left(x^2 \cdot \sum'_{N(\delta) > x} \frac{1}{N^{\frac{4}{3}}(\delta)}\right) = \frac{\pi x^2}{8 \cdot Z(2)} + O\left(x^{\frac{4}{3}}\right). \end{aligned}$$

Лемма 8. $\forall x > 1 \sum'_{N(\alpha) \leq x} g(\alpha) = \frac{\pi^2 \cdot x^2 \cdot \log x}{8 \cdot Z(2)} + O(x^2)$.

Доказательство. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \sum'_{N(\alpha) \leq x} g(\alpha) &= \sum'_{N(\alpha) \leq x} \sum'_{\delta | \alpha} N(\delta) \cdot \bar{\varphi}\left(\frac{\alpha}{\delta}\right) = \sum'_{N(\delta) \leq x} N(\delta) \cdot \sum'_{N(\gamma) \leq \frac{x}{N(\delta)}} \bar{\varphi}(\gamma) = \\ &= \sum'_{N(\delta) \leq x} N(\delta) \cdot \left\{ \frac{\pi x^2}{8 \cdot Z(2) \cdot N^2(\delta)} + O\left(\left(\frac{x}{N(\delta)}\right)^{\frac{4}{3}}\right) \right\} = \frac{\pi x^2}{8 \cdot Z(2)} \cdot \sum'_{N(\delta) \leq x} \frac{1}{N(\delta)} + \\ &+ O\left(x^{\frac{4}{3}} \cdot \sum'_{N(\delta) \leq x} N^{-\frac{1}{3}}(\delta)\right) = \frac{\pi^2 \cdot x^2 \cdot \log x}{8 \cdot Z(2)} + O(x^{\frac{4}{3}}) + O(x^2) = \\ &= \frac{\pi^2 \cdot x^2 \cdot \log x}{8 \cdot Z(2)} + O(x^2). \end{aligned}$$

Лемма 9. Для любых вещественных a и $x > 1$ справедлива формула

$$G_a(x) = \sum'_{N(\alpha) \leq x} (N(\alpha))^{1-a} \cdot \Phi_a\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right),$$

где $\Phi_a(x) = \sum'_{N(\alpha) \leq x} \frac{\bar{\varphi}(\alpha)}{N^a(\alpha)}$.

Доказательство.

$$G_a(x) \equiv \sum'_{N(\alpha) \leq x} \frac{g(\alpha)}{N^a(\alpha)} = \sum'_{N(\alpha) \leq x} N^{-a}(\alpha) \cdot \sum'_{\delta | \alpha} \bar{\varphi}(\delta) \cdot \frac{N(\alpha)}{N(\delta)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{N(\alpha) \leq x} \sum_{\delta | \alpha} \bar{\varphi}(\delta) \cdot \frac{N^{1-a}(\alpha)}{N(\delta)} = \sum_{N(\alpha) \leq x} \sum_{\delta | \alpha} \frac{\bar{\varphi}(\delta)}{N^a(\delta)} \cdot \frac{N^{1-a}(\alpha)}{N^{1-a}(\delta)} = \\
 &= \sum_{N(\alpha) \leq x} \sum_{\delta | \alpha} \frac{\bar{\varphi}(\delta)}{N^a(\delta)} \cdot N^{1-a} \left(\frac{\alpha}{\delta} \right) = \\
 &= \sum_{N(\gamma) \leq x} N^{1-a}(\gamma) \cdot \sum_{N(\delta) \leq \frac{x}{N(\gamma)}} \frac{\bar{\varphi}(\delta)}{N^a(\delta)} = \sum_{N(\gamma) \leq x} N^{1-a}(\gamma) \cdot \Phi_a \left(\frac{x}{N(\gamma)} \right).
 \end{aligned}$$

Лемма 10. Пусть a, b, x — такие положительные вещественные числа, что $a \cdot b = x$. Обозначим через $F(x) = \sum_{N(\alpha) \leq x} f(\alpha)$, $R(x) = \sum_{N(\alpha) \leq x} r(\alpha)$, $H(x) = \sum_{N(\alpha) \leq x} (f * r)(\alpha)$. Тогда справедливо соотношение

$$\begin{aligned}
 H(x) &\equiv \sum_{N(\alpha) \leq x} \sum_{\delta | \alpha} f(\delta) \cdot r \left(\frac{\alpha}{\delta} \right) = \\
 &= \sum_{N(\alpha) \leq a} f(\alpha) \cdot R \left(\frac{x}{N(\alpha)} \right) + \sum_{N(\alpha) \leq b} r(\alpha) \cdot F \left(\frac{x}{N(\alpha)} \right) - F(a) \cdot R(b).
 \end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство станет очевидным, если утверждение леммы записать в таком виде:

$$\begin{aligned}
 \sum_{N(\delta) \cdot N(\gamma) \leq x} f(\delta) \cdot r(\gamma) &= \sum_{N(\alpha) \leq a} f(\alpha) \cdot \sum_{N(\delta) \leq \frac{x}{N(\alpha)}} r(\delta) + \sum_{N(\alpha) \leq b} r(\alpha) \cdot \sum_{N(\delta) \leq \frac{x}{N(\alpha)}} f(\delta) - \\
 &- \sum_{N(\alpha) \leq a} \sum_{N(\beta) \leq b} f(\alpha) \cdot r(\beta).
 \end{aligned}$$

Действительно, последнее является тождеством, так как в правой и в левой ее частях суммируется одна и та же функция в одних и тех же точках.

Лемма 11. $\forall x > 1 \sum'_{N(\alpha) \leq x} \frac{\bar{\varphi}(\alpha)}{N^2(\alpha)} = \frac{\pi \log x + C_0}{4Z(??)} - \frac{\pi Z'(2)}{4Z^2(2)} + O \left(x^{-\frac{2}{3}} \right)$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 \sum'_{N(\alpha) \leq x} \frac{\bar{\varphi}(\alpha)}{N^2(\alpha)} &= \sum'_{N(\alpha) \leq x} \frac{\sum'_{\delta | \alpha} \mu(\delta) \cdot N \left(\frac{\alpha}{\delta} \right)}{N^2(\alpha)} = \sum'_{N(\alpha) \leq x} \sum'_{\delta | \alpha} \frac{\mu(\delta)}{N(\delta) \cdot N(\alpha)} = \\
 &= \sum'_{N(\alpha) \leq x} \sum'_{\delta | \alpha} \frac{\mu(\delta)}{N^2(\delta) \cdot \frac{N(\alpha)}{N(\delta)}} = \sum'_{N(\delta) \leq x} \frac{\mu(\delta)}{N^2(\delta)} \cdot \sum'_{N(\gamma) \leq \frac{x}{N(\delta)}} \frac{1}{N(\gamma)} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum'_{N(\delta) \leq x} \frac{\mu(\delta)}{N^2(\delta)} \cdot \left\{ \frac{\pi}{4} \cdot \log \frac{x}{N(\delta)} + \frac{C_0}{4} + O\left(\left(\frac{N(\delta)}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right) \right\} = \\
&= \sum'_{N(\delta) \leq x} \frac{\mu(\delta)}{N^2(\delta)} \cdot \left\{ \frac{\pi \log x - \pi \log N(\delta)}{4} + \frac{C_0}{4} + O\left(\left(\frac{N(\delta)}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right) \right\} = \\
&= \frac{\pi \log x + C_0}{4Z(2)} + O\left(\frac{\log x}{x^2}\right) - \frac{\pi Z'(2)}{4Z^2(2)} + O\left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \cdot \sum'_{N(\delta) \leq x} \frac{|\mu(\delta)|}{N^{\frac{4}{3}}(\delta)}\right) = \\
&= \frac{\pi \log x + C_0}{4Z(2)} - \frac{\pi Z'(2)}{4Z^2(2)} + O\left(\frac{\log x}{x^2}\right) + O\left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \cdot \sum'_{N(\delta) \leq x} \frac{1}{N^{\frac{4}{3}}(\delta)}\right) = \\
&= \frac{\pi \log x + C_0}{4Z(2)} - \frac{\pi Z'(2)}{4Z^2(2)} + O\left(x^{-\frac{2}{3}}\right).
\end{aligned}$$

Теорема 2. Для любого вещественного $x > 1$ имеет место формула

$$G_0(x) \equiv \sum'_{N(\alpha) \leq x} g(\alpha) = \frac{\pi^2 x^2 \cdot \log x}{32 \cdot Z(2)} + O(x^2).$$

Доказательство.

$$G_0(x) = \sum'_{N(\alpha) \leq x} N(\alpha) \cdot \Phi_0\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right) = \sum'_{N(\alpha) \leq x} N(\alpha) \cdot \sum'_{N(\delta) \leq \frac{x}{N(\alpha)}} \bar{\varphi}(\delta).$$

Применим лемму 10: $a = b = \sqrt{x}$, $F(x) = \sum'_{N(\alpha) \leq x} \bar{\varphi}(\alpha) = \frac{\pi x^2}{8 \cdot Z(2)} + O(x^{\frac{4}{3}})$,
 $R(x) = \sum'_{N(\alpha) \leq x} N(\alpha) = \frac{\pi x^2}{8} + O(x^{\frac{4}{3}})$. Имеем

$$\begin{aligned}
G_0(x) &= \sum'_{N(\alpha) \leq \sqrt{x}} \bar{\varphi}(\alpha) \cdot R\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right) + \sum'_{N(\alpha) \leq \sqrt{x}} N(\alpha) \cdot F\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right) - \\
&\quad - F(\sqrt{x}) \cdot R(\sqrt{x}) = \\
&= \sum'_{N(\alpha) \leq \sqrt{x}} \bar{\varphi}(\alpha) \cdot \left\{ \left(\frac{\sqrt{\pi x}}{\sqrt{8} \cdot N(\alpha)}\right)^2 + O\left(\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)^{\frac{4}{3}}\right) \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum'_{N(\alpha) \leq \sqrt{x}} N(\alpha) \cdot \left\{ \frac{\pi x^2}{8 \cdot Z(2) \cdot N^2(\alpha)} + \right. \\
& \left. + O\left(\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)^{\frac{4}{3}}\right)\right\} - \left\{ \frac{\pi x}{8 \cdot Z(2)} + O\left(x^{\frac{2}{3}}\right) \right\} \cdot \left\{ \frac{\pi x}{8} + O\left(x^{\frac{2}{3}}\right) \right\} = \\
& = \frac{\pi x^2}{8} \cdot \sum'_{N(\alpha) \leq \sqrt{x}} \frac{\bar{\varphi}(\alpha)}{N^2(\alpha)} + O\left(x^{\frac{4}{3}} \cdot \sum'_{N(\alpha) \leq \sqrt{x}} \frac{\bar{\varphi}(\alpha)}{N^{\frac{4}{3}}(\alpha)}\right) + \frac{\pi x^2}{8 \cdot Z(2)} \cdot \sum'_{N(\alpha) \leq \sqrt{x}} \frac{1}{N(\alpha)} + \\
& + O\left(x^{\frac{4}{3}} \cdot \sum'_{N(\alpha) \leq \sqrt{x}} \frac{1}{N^{\frac{1}{3}}(\alpha)}\right) - \frac{\pi^2 x^2}{64 \cdot Z(2)} + O\left(x^{\frac{5}{3}}\right) + O\left(x^{\frac{4}{3}}\right) = \\
& = \frac{\pi^2 x^2 \cdot \log x}{64 \cdot Z(2)} + \frac{\pi \cdot C_0 \cdot x^2}{32 \cdot Z(2)} - \frac{\pi^2 \cdot Z'(2) \cdot x^2}{32 \cdot Z^2(2)} + O(x^2) + \\
& + \frac{\pi^2 x^2 \cdot \log x}{64 \cdot Z(2)} + \frac{\pi \cdot C_0 \cdot x^2}{32 \cdot Z(2)} - \frac{\pi^2 \cdot x^2}{64 \cdot Z(2)} = \frac{\pi^2 x^2 \cdot \log x}{32 \cdot Z(2)} + O(x^2).
\end{aligned}$$

Теорема 3. Для любого достаточно большого x имеет место оценка

$$G_1(x) \equiv \sum'_{N(\alpha) \leq x} \frac{g(\alpha)}{N(\alpha)} = \frac{\pi^2 x \log x}{16Z(2)} + \frac{\pi \cdot C_0 \cdot x}{8Z(2)} - \frac{\pi^2 \cdot Z'(2) \cdot x}{16Z^2(2)} - \frac{\pi^2 \cdot x}{16Z(2)} + O\left(x^{\frac{2}{3}}\right).$$

Доказательство.

$$G_1(x) = \sum'_{N(\alpha) \leq x} \Phi_1\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right) = \sum'_{N(\alpha) \leq x} 1 \cdot \sum'_{N(\delta) \leq \frac{x}{N(\alpha)}} \frac{\bar{\varphi}(\delta)}{N(\delta)}.$$

Воспользуемся леммой 10:

$$a = b = \sqrt{x}, \quad F(x) = \sum'_{N(\alpha) \leq x} \frac{\bar{\varphi}(\alpha)}{N(\alpha)} = \frac{\pi \cdot x}{4Z(2)} + O\left(x^{\frac{1}{3}}\right),$$

$$R(x) = \sum'_{N(\alpha) \leq x} 1 = \frac{\pi \cdot x}{4} + O\left(x^{\frac{1}{3}}\right). \text{ Имеем}$$

$$G_1(x) = \sum'_{N(\alpha) \leq \sqrt{x}} \frac{\bar{\varphi}(\alpha)}{N(\alpha)} \cdot R\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right) + \sum'_{N(\alpha) \leq \sqrt{x}} F\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right) -$$

$$-F(\sqrt{x}) \cdot R(\sqrt{x}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum'_{N(\alpha) \leq \sqrt{x}} \frac{\bar{\varphi}(\alpha)}{N(\alpha)} \cdot \left\{ \frac{\pi \cdot x}{4N(\alpha)} + O\left(\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)^{\frac{1}{3}}\right) \right\} + \\
&\quad + \sum'_{N(\alpha) \leq \sqrt{x}} \left\{ \frac{\pi \cdot x}{4Z(2) \cdot N(\alpha)} + O\left(\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)^{\frac{1}{3}}\right) \right\} - \\
&\quad - \left\{ \frac{\pi \cdot \sqrt{x}}{4} + O\left(x^{\frac{1}{6}}\right) \right\} \cdot \left\{ \frac{\pi \cdot \sqrt{x}}{4Z(2)} + O\left(x^{\frac{1}{6}}\right) \right\} = \frac{\pi \cdot x}{4} \cdot \sum'_{N(\alpha) \leq \sqrt{x}} \frac{\bar{\varphi}(\alpha)}{N^2(\alpha)} + \\
&\quad + O\left(x^{\frac{1}{3}} \cdot \sum'_{N(\alpha) \leq \sqrt{x}} \frac{\bar{\varphi}(\alpha)}{N(\alpha)^{\frac{4}{3}}}\right) + \\
&\quad + \frac{\pi \cdot x}{4Z(2)} \cdot \sum'_{N(\alpha) \leq \sqrt{x}} \frac{1}{N(\alpha)} + O\left(x^{\frac{1}{3}} \cdot \sum'_{N(\alpha) \leq \sqrt{x}} \frac{1}{N(\alpha)^{\frac{1}{3}}}\right) - \\
&\quad - \frac{\pi^2 \cdot x}{16Z(2)} + O\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{\pi x}{4} \cdot \left(\frac{\pi \log \sqrt{x}}{4Z(2)} + \frac{C_0}{4Z(2)} - \frac{\pi Z'(2)}{4Z^2(2)} \right) + O\left(x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}}\right) + \\
&\quad + \frac{\pi x}{4Z(2)} \cdot \left(\frac{\pi \log \sqrt{x} + C_0}{4} \right) - \frac{\pi^2 x}{16Z(2)} + O\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = \\
&\quad = \frac{\pi^2 x \log \sqrt{x}}{16Z(2)} + \frac{\pi \cdot C_0 \cdot x}{16Z(2)} - \frac{\pi^2 \cdot Z'(2) \cdot x}{16Z^2(2)} + \\
&\quad + \frac{\pi^2 x \log \sqrt{x}}{16Z(2)} + \frac{\pi \cdot C_0 \cdot x}{16Z(2)} - \frac{\pi^2 \cdot x}{16Z(2)} + O\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{\pi^2 x \log x}{16Z(2)} + \frac{2 \cdot \pi \cdot C_0 \cdot x}{16Z(2)} - \\
&\quad - \frac{\pi^2 \cdot Z'(2) \cdot x}{16Z^2(2)} - \frac{\pi^2 \cdot x}{16Z(2)} + O\left(x^{\frac{2}{3}}\right).
\end{aligned}$$

Теорема 4. $\sum'_{N(\alpha) \leq x} \frac{g(\alpha)}{N^2(\alpha)} = \frac{\pi^2 \log^2 x}{16Z(2)} + \frac{\pi \cdot C_0 \cdot x}{8Z(2)} - \frac{\pi^2 \cdot Z'(2) \cdot \log x}{16Z^2(2)} + O(1)$.

Доказательство. Рассмотрим

$$G_2(x) = \sum'_{N(\gamma) \leq x} N^{-1}(\gamma) \cdot \sum'_{N(\delta) \leq \frac{x}{N(\gamma)}} \frac{\bar{\varphi}(\delta)}{N^2(\delta)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum'_{N(\gamma) \leq x} N^{-1}(\gamma) \cdot \left\{ \frac{\pi \log \frac{x}{N(\gamma)} + C_0}{4Z(2)} - \frac{\pi Z'(2)}{4Z^2(2)} + O\left(\left(\frac{x}{N(\gamma)}\right)^{-\frac{2}{3}}\right) \right\} = \\
&= \left(\frac{\pi \log x + C_0}{4Z(2)} - \frac{\pi Z'(2)}{4Z^2(2)} \right) \cdot \sum'_{N(\gamma) \leq x} N^{-1}(\gamma) - \frac{\pi}{4Z(2)} \cdot \sum'_{N(\gamma) \leq x} \frac{\log N(\gamma)}{N(\gamma)} + \\
&+ O\left(x^{-\frac{2}{3}} \cdot \sum'_{N(\gamma) \leq x} \frac{1}{N^{\frac{1}{3}}(\gamma)}\right) = \left(\frac{\pi \log x + C_0}{4Z(2)} - \frac{\pi Z'(2)}{4Z^2(2)} \right) \cdot \left(\frac{\pi \log x + C_0}{4} \right) + \\
&+ O(1) = \frac{\pi^2 \log^2 x}{16Z(2)} + \frac{2 \cdot \pi \cdot C_0 \cdot x}{16Z(2)} - \frac{\pi^2 \cdot Z'(2) \cdot \log x}{16Z^2(2)} + O(1).
\end{aligned}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Распределение значений функций $g(\alpha)$, исследованное в теоремах 1-4, может быть обобщено на случай, когда α принадлежит узкому сектору: $\varphi_1 \leq \arg \alpha \leq \varphi_2$, где $\varphi_2 - \varphi_1$ убывает к нулю вместе с ростом параметра x . Для этого надо использовать аппарат Z -функции Гекке в характеристиками величин $\lambda_m(\alpha)$.

1. **Bordelles O.** A Note on the Average Order Of the gcd-sum Function [text] / O. Bordelles // J. Integer Sequences. – 2007. – № 10. – Article 07.9.2. – P. 1–13.
2. **Broughan K. A.** The gcd-sum function [text] / K. A. Broughan // J. Integer Sequences. – 2001. – № 4. – Article 01.2.2. – P. 1–6.
3. **Huxley M. N.** Exponential sums and lattice points III [text] / M. N. Huxley // Proc. London Math. Soc. – 2003. – № 87. – P. 591–609.
4. **Лай Дык Тхинь.** О числе делителей в угле [текст] / Лай Дык Тхинь // ДАН СССР. – 1962. – Т. 143, № 1. – С. 28–30.

УДК 539.375

Ю. В. Діхтяренко
Уманський педагогічний університет

**МОДЕЛЮВАННЯ ПОЧАТКОВОЇ ПЛАСТИЧНОЇ СМУГИ У
КУТОВІЙ ТОЧЦІ МЕЖІ РОЗДІЛУ СЕРЕДОВИЩ З
МІЖФАЗНОЮ ТРІЩИНОЮ**

Діхтяренко Ю. В. Моделювання початкової пластичної смуги у кутовій точці межі розділу середовищ з міжфазною тріщиною. В умовах плоскої деформації розглянуто задачу про розрахунок початкової пластичної смуги в околі кутової точки межі розділу середовищ, з якої виходить міжфазна тріщина. Методом Вінера-Хопфа отримано розв'язок, з якого виведені рівняння для визначення довжини і кута нахилу смуги.

Ключові слова: пластична смуга, кутова точка, міжфазна тріщина.

Дихтяренко Ю. В. Моделирование начальной пластичной полосы в угловой точке границы раздела сред с межфазной трещиной. В условиях плоской деформации рассмотрена задача о расчете начальной пластичной полосы вблизи угловой точки границы раздела сред, из которой выходит межфазная трещина. Методом Винера-Хопфа получено решение, из которого выведены уравнения для определения длины и угла наклона полосы.

Ключевые слова: пластичная полоса, угловая точка, межфазная трещина.

Dichtiarenko Yu. V. Modeling of the initial plastic strip at the corner point of media-separating boundary with a interfacial crack. A static problem on the calculation of an initial plastic strip at the corner point of media-separating boundary with a interfacial crack is considered for the plain strain conditions. The equations for calculation of the plastic strip length and orientation are obtained by Wiener-Hopf method.

Key words: plastic strip, corner point, interfacial crack.

Вступ.

Важливим фактором, що впливає на тріщиностійкість тіл з дефектами типу тріщин, включень та інших гострокінцевих концентраторів напружень, є утворення в околі дефекту пластичної зони. Розрахунок пластичної зони є складною математичною задачею, тому в механіці руйнування широко використовуються її різноманітні моделі. Зокрема, широкої популярності набула модель Леонова-Панасюка-Дагдейла [1], яка допускає аналітичний розв'язок задачі про розрахунок вузької смуги пластичності. Вона базується на експериментально обґрунтованій гіпотезі локалізації, згідно з якою при невеликих навантаженнях пластичні деформації локалізовані у вузьких смугах пружнопластичного матеріалу [2-3]. За цією моделлю зону представляють лінією розриву переміщення, на якій напруження задовольняють певному критерію текучесті. В рамках даної моделі виконана велика кількість розрахунків пластичних зон в однорідних тілах (див. огляд [1]).

На сучасному етапі значна увага приділяється розрахункам пластичних зон в кінці тріщин, розташованих на плоскій межі розділу матеріалів у кусково-однорідних тілах та дослідженню їх впливу на міцність композитних з'єднань

[4-10]. В даній роботі в рамках моделі Леонова-Панасюка-Дагдейла методом Вінера-Хопфа виконано розв'язок задачі про розрахунок початкової пластичної зони-смуги в околі кутової точки ламаної межі розділу двох матеріалів, з якої вздовж однієї зі сторін кута виходить міжфазна тріщина. Аналогічна задача у випадку тріщини на плоскій межі розділу розглянута в [11], де здійснено аналітичний розрахунок тонкої бічної пластичної смуги, що моделює початковий етап розвитку пластичної зони.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ.

1. Постановка задачі. В умовах плоскої деформації розглядається задача про розрахунок початкової пластичної зони в околі вершини міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки межі розділу двох однорідних ізотропних середовищ з модулями Юнга E_1, E_2 і коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_2 . Припускається, що лише перший матеріал є пружнопластичним, тому в ньому на початковому етапі у відповідності з гіпотезою локалізації передбачається виникнення вузької смуги пластичності, яка поширюватиметься з вершини тріщини під кутом β до межі розділу. Ця початкова пластична смуга моделюється лінією розриву дотичного переміщення, на якій дотичне напруження дорівнює границі текучості першого матеріалу при зсуві τ_1 . Довжина лінії розриву l та її орієнтація підлягають визначенню в ході розв'язання задачі.

На початковому етапі розвитку довжина пластичної зони-смуги значно менша від довжини L тріщини та інших характерних розмірів тіла, і оскільки напружено-деформований стан досліджується лише в околі смуги, тому тіло будемо вважати кусково-однорідною площиною з межею розділу середовищ у формі сторін кута, з вершини якого в перший матеріал виходить лінія розриву скінченної довжини, а вздовж однієї зі сторін – півнескінчена тріщина (Рис. 1).

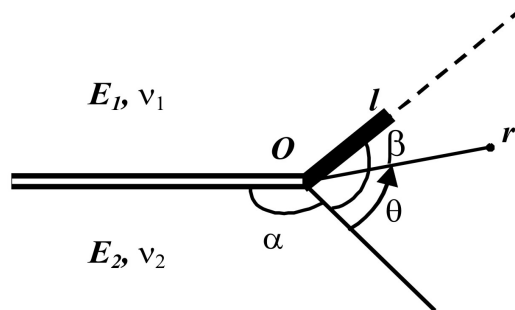


Рис. 1. Розрахункова схема задачі.

На нескінченості реалізується асимптотика, яка є асимптотичним розв'язком в околі вершини кута аналогічної задачі без пластичної смуги. Він визначається коренями λ_i характеристичного рівняння, які задовольняють умову $-1 < \text{Re}\lambda < 0$. Характеристичне рівняння має вигляд [12]:

$$D(\lambda) = 0, \quad (1)$$

$$D(\lambda) = -(1 + \kappa_1)^2 t_1 - 4(1 + \kappa_1)(e - 1)t_1 t_2 - e^2(1 + \kappa_2)^2 t_3 + 4(e - 1)^2 t_1 t_3 + \\ + 4e(1 + \kappa_2)(e - 1)t_3 t_4 + 2e(1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1)t_5,$$

$$t_1 = (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 (\lambda + 1) \alpha, t_2 = \sin^2 (\lambda + 1) (2\pi - \alpha), t_3 = \sin^2 (\lambda + 1) \alpha,$$

$$t_4 = (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 (\lambda + 1) (2\pi - \alpha), \\ t_5 = t_1 + \sin (\lambda + 1) \alpha \sin 2\lambda\pi \cos (\lambda + 1) (2\pi - \alpha),$$

$$e = \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1} \cdot \frac{E_1}{E_2}, \kappa_{1(2)} = 3 - 4\nu_{1(2)}.$$

Розрахунки показують, що вищезгаданих коренів може бути 2 або 3; причому два найменших корені λ_1 і λ_2 близькі по порядку величини до $-0,5$, а λ_3 – до 0 [12]. Відповідно, поведінку напружень поблизу вершини кута визначатимуть 2 або 3 сингулярних доданки. Зокрема, існує інтервал кутів розхилу $(\alpha_{\min}, \alpha_{\max})$, для яких у смузі $-1 < Re\lambda < 0$ існує два комплексно спряжених кореня ($\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$) рівняння (1), яким відповідають фізично некоректні просторові осциляції напружень і переміщень при наближенні до вершини кута, наслідком чого є недопустимий взаємний перетин берегів тріщини. Проте, як показує досвід численних досліджень міжфазної тріщини на плоскій межі розділу, це не перешкоджає отримувати фізично коректні результати на відстанях від кутової точки, що перевищують мінімальну відстань $Le^{-1/Im\lambda_1}$ [13]. В подальшому при обчисленнях орієнтації та довжини зони передруйнування розрізнятимемо випадки наявності у смузі $-1 < Re\lambda < 0$ лише дійсних або комплексних і дійсного коренів. Передбачається, що утворення зони передруйнування усуває вказані некоректні осциляції переміщень.

Приймаючи, що береги тріщини вільні від навантаження, на межі розділу забезпечене ідеальне зчеплення, що забезпечує неперервність напружень і переміщень, а на нескінченості задана асимптотика, що відповідає головним членам розв'язку задачі без зони передруйнування біля вершини кута, з якого виходить міжфазна тріщина, з урахуванням моделювання пластичної смуги відрізком розриву дотичного переміщення приходимо до статичної крайової задачі теорії пружності з граничними умовами:

$$\theta = -\alpha : \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0; \theta = 2\pi - \alpha : \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0;$$

$$\theta = 0 : \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \langle u_r \rangle = \langle u_\theta \rangle = 0;$$

$$\theta = \beta : \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \langle u_\theta \rangle = 0; \quad (2)$$

$$\theta = \beta, r < l : \tau_{r\theta} = \tau_1, \theta = \beta, r > l, \langle u_r \rangle = 0; \quad (3)$$

$$\theta = 0, r \rightarrow \infty : \tau_{r\theta} = \sum_i C_i F(\lambda_i, \beta) r^{\lambda_i} + o\left(\frac{1}{r}\right); \quad (4)$$

де $\langle f \rangle$ – стрибок величини f ; C_i – сталі, що характеризують інтенсивність зовнішнього силового поля і вважаються заданими за умовою задачі;

$$F(\lambda, \beta) = \frac{X}{(1 + \kappa_1) \Delta} \cdot \left\{ \left[e^2 (1 + \kappa_2)^2 - e(1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2) - 4(e - 1)^2 t_1 - 4e(1 + \kappa_2)(e - 1)t_3 \right] h_1 + \right. \\
 \left. + (1 + \kappa_1) [2t_1 h_2 + e(1 + \kappa_2) h_3] \right\}, \\
 X = \sqrt{\frac{(e + \kappa_1)}{8\pi(1 + e\kappa_2)}}, \Delta = 2(1 + \kappa_1)t_6 - e(1 + \kappa_2)t_7 + \\
 + 4(e - 1) [\lambda t_8 \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha) + \sin \lambda \alpha t_9], \\
 h_1 = 2\lambda(\lambda + 2) \sin \alpha \sin \beta \cos(\lambda + 1)(2\pi - \alpha - \beta) + \\
 + (\lambda + 2) \sin \lambda (2\pi - \alpha) \sin(\lambda + 2)\beta - \lambda \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha) \sin \lambda \beta, \\
 h_2 = -2(e - 1) [(\lambda + 2) \sin(\lambda + 1)(2\pi - \alpha + \beta) \sin(\alpha + \beta) + \\
 + 2\sin[(\lambda + 2)(2\pi - \alpha) - \beta] \sin(\lambda + 1)\beta] - (1 + \kappa_1) \cos(\lambda + 2)(2\pi - \alpha - \beta), \\
 h_3 = 2t_1 \cos(\lambda + 2)(2\pi - \alpha - \beta) + [(\lambda + 2) \sin(\lambda + 2)(\alpha + \beta) - \lambda \sin \lambda(\alpha + \beta)] \sin 2\lambda\pi, \\
 t_6 = \lambda \sin \alpha \cos(\lambda + 1)(2\pi - \alpha) - \sin \lambda \alpha \cos 2\lambda\pi, \\
 t_7 = (\lambda + 2) \sin \lambda (2\pi - \alpha) - \lambda \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha), \\
 t_8 = (\lambda + 2) \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda + 1)\alpha, \\
 t_9 = (\lambda + 2) \sin(\lambda + 1)(2\pi - \alpha) \sin(\lambda + 1)\alpha - \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha) \sin(\lambda + 2)\alpha.$$

В кінці пластичної смуги для напружень і зміщень реалізується асимптотика, яка являє собою асимптотично найбільший розв'язок однорідної задачі теорії пружності біля вершини напівнескінченої прямої лінії розриву дотичного переміщення в однорідному матеріалі. Зокрема, має місце асимптотика:

$$\theta = \beta, r \rightarrow l + 0: \tau_{r\theta} \sim \frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi(r-l)}}, \quad (5)$$

де k_{II} — коефіцієнт інтенсивності напружень в кінці лінії розриву, який має бути визначений в ході розв'язання задачі.

Розв'язок сформульованої крайової задачі теорії пружності шукається у вигляді суми розв'язків наступних двох задач. Перша відрізняється від неї тим, що в (3) замість першої умови приймається умова

$$\theta = \beta, \quad r < l: \quad \tau_{r\theta} = \tau_1 - \sum_i C_i F(\lambda_i, \beta) r^{\lambda_i}, \quad (6)$$

а на нескінченості напруження згасають як $o\left(\frac{1}{r}\right)$. Друга задача – аналогічна задача без лінії розриву, розв'язок якої відомий [14], тому достатньо знайти розв'язок першої задачі.

2. Розв'язок рівняння Вінера-Хопфа і розрахунок початкової пластичної зони. Для побудови розв'язку задачі використовується метод Вінера-Хопфа у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Мелліна [15, 16]. Застосовувавши до рівнянь рівноваги, умов сумісності деформацій, закону Гука, умов (2) перетворення Мелліна $f^*(p, \theta) = \int_0^\infty f(r, \theta) r^p dr$, де $f(r, \theta)$ – довільна компонента тензора напружень або вектора переміщення, та врахувавши умову (6) і другу умову (3), приходимо до функціонального рівняння Вінера-Хопфа першої задачі у комплексній області, що містить уявну вісь:

$$\Phi^+(p, \beta) + \frac{\tau_1}{p+1} - \sum_i \frac{C_i F(\lambda_i, \beta) l^{\lambda_i}}{p + \lambda_i + 1} = -t g p \pi G(p, \beta) \Phi^-(p, \beta) \quad (-\varepsilon_1 < \text{Re } p < \varepsilon_2), \quad (7)$$

$$\text{де } \Phi^+(p, \beta) = \int_1^\infty \tau_{r\theta}(\rho l, \beta) \rho^p d\rho, \quad \Phi^-(p, \beta) = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \left. \begin{array}{l} r = \rho l \\ \theta = \beta \end{array} \right| \rho^p d\rho,$$

$$G(p, \beta) = \frac{-D_1(p, \beta) \cos p\pi}{D(-1-p) \sin p\pi},$$

$$D_1(p, \beta) = \Delta_1 \Delta_2 \left(e(1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1) - (1 + \kappa_1)^2 \right) -$$

$$- (\Delta_2 \Delta_3 - \Delta_4 \Delta_5) (e^2(1 + \kappa_2)^2 - 4(e-1)^2 \Delta_1 -$$

$$- 4e(e-1)(1 + \kappa_2) \sin^2 p\alpha) - 4(e-1)(1 + \kappa_1) \Delta_1 (\Delta_4 \sin 2p\beta + \Delta_2 \sin^2 p\beta) +$$

$$+ e(1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1) (2\Delta_4 \Delta_6 - \Delta_2 \Delta_7),$$

$$\Delta_1(p) = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha, \quad \Delta_2(p) = p \sin 2(\alpha + \beta) - \sin 2p(2\pi - \alpha - \beta),$$

$$\Delta_3(p) = p^2 \sin^2 \beta - \sin^2 p\beta, \quad \Delta_4(p) = p^2 \sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2 p(2\pi - \alpha - \beta),$$

$$\Delta_5(p) = p \sin 2\beta + \sin 2p\beta, \quad \Delta_6(p) = p \sin \alpha \cos(\alpha + 2\beta) + \sin p\alpha \cos p(\alpha + 2\beta),$$

$$\Delta_7(p) = p^2 \sin \alpha \sin(\alpha + 2\beta) - \sin p\alpha \sin p(\alpha + 2\beta),$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – достатньо малі додатні числа.

Функція $G(it, \beta)$ є дійсною парною функцією t , яка прямує до 1 при $t \rightarrow \infty$, що дозволяє виконати факторизацію коефіцієнта рівняння Вінера-Хопфа за формулою Гахова [17]:

$$G(p, \beta) = \frac{G^+(p, \beta)}{G^-(p, \beta)} \quad (Re p = 0),$$

$$\exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln G(z, \beta)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G^+(p, \beta), & Re p < 0; \\ G^-(p, \beta), & Re p > 0. \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{За допомогою (8) та факторизації } tg(p\pi) = \frac{p}{K^+(p)K^-(p)}, \quad K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(1/2 \mp p)}$$

($\Gamma(z)$ — гамма-функція Ейлера) представимо рівняння Вінера-Хопфа (7) у вигляді:

$$\begin{aligned} & \frac{K^+(p)\Phi^+(p, \beta)}{pG^+(p, \beta)} + \frac{\tau_1}{p+1} \left[\frac{K^+(p)}{pG^+(p, \beta)} + \frac{K^+(-1)}{G^+(-1, \beta)} \right] - \\ & - \sum_i \frac{C_i F(\lambda_i, \beta) l^{\lambda_i}}{p + \lambda_i + 1} \left[\frac{K^+(p)}{pG^+(p, \beta)} + \frac{K^+(-\lambda_i - 1)}{(\lambda_i + 1)G^+(-\lambda_i - 1, \beta)} \right] = \\ & = - \frac{\Phi^-(p, \beta)}{K^-(p)G^-(p, \beta)} + \frac{\tau_1 K^+(-1)}{(p+1)G^+(-1, \beta)} - \\ & = \sum_i \frac{C_i F(\lambda_i, \beta) l^{\lambda_i} K^+(-\lambda_i - 1)}{(p + \lambda_i + 1)(\lambda_i + 1)G^+(-\lambda_i - 1, \beta)} \quad (Re p = 0). \end{aligned} \quad (9)$$

Функції у лівій і правій частині рівняння (9) аналітичні відповідно зліва і справа від уявної вісі комплексної змінної p . Отже, згідно з принципом аналітичного продовження вони дорівнюють єдиній функції, аналітичній у всій комплексній площині.

Використовуючи теорему абелевого типу [15] та асимптотику (5), отримаємо

$$\Phi^+(p, \beta) \sim \frac{k_{II}}{\sqrt{-2pl}} \quad (p \rightarrow \infty, Re p < 0), \quad (10)$$

звідки випливає, що функції у лівій і правій частинах рівняння (9) прямують до нуля при $p \rightarrow \infty$. Тому, за теоремою Ліувілля, єдина аналітична функція тотожно дорівнює нулю у всій площині p , що дозволяє знайти точний розв'язок рівняння (9):

$$\begin{aligned} \Phi^+(p, \beta) = & - \frac{pG^+(p, \beta)}{K^+(p)} \left\{ \frac{\tau_1}{p+1} \left[\frac{K^+(p)}{pG^+(p, \beta)} + \frac{K^+(-1)}{G^+(-1, \beta)} \right] - \right. \\ & \left. - \sum_i \frac{C_i F(\lambda_i, \beta) l^{\lambda_i}}{(p + \lambda_i + 1)} \left[\frac{K^+(p)}{pG^+(p, \beta)} + \frac{K^+(-\lambda_i - 1)}{(\lambda_i + 1)G^+(-\lambda_i - 1, \beta)} \right] \right\} \quad (Re p < 0); \end{aligned}$$

$$\Phi^-(p, \beta) =$$

$$= K^-(p)G^-(p, \beta) \left\{ \frac{\tau_1 K^+(-1)}{(p+1)G^+(-1, \beta)} - \sum_i \frac{C_i F(\lambda_i, \beta) l^{\lambda_i} K^+(-\lambda_i - 1)}{(p + \lambda_i + 1)(\lambda_i + 1)G^+(-\lambda_i - 1, \beta)} \right\}$$

($Re p > 0$).

Звідси випливає, що при $p \rightarrow \infty$

$$\Phi^+(p, \beta) \sim \frac{1}{\sqrt{-p}} \left\{ \sum_i \frac{C_i F(\lambda_i, \beta) l^{\lambda_i} K^+(-\lambda_i - 1)}{(\lambda_i + 1)G^+(-\lambda_i - 1, \beta)} - \frac{\tau_1 K^+(-1)}{G^+(-1, \beta)} \right\} \quad (p \rightarrow \infty).$$

Порівнюючи цей вираз з (10), знаходимо коефіцієнт інтенсивності напружень в кінці пластичної смуги:

$$k_{II} = \sqrt{2l} \left\{ \sum_i \frac{C_i F(\lambda_i, \beta) l^{\lambda_i} K^+(-\lambda_i - 1)}{(\lambda_i + 1)I(\lambda_i, \beta)} - \frac{\tau_1 K^+(-1)}{I(0, \beta)} \right\},$$

$$I(\lambda, \beta) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln G(it, \beta)}{it + (\lambda + 1)} dt \right\}.$$

Поклавши $k_{II} = 0$, отримаємо наступні трансцендентні рівняння для визначення її довжини $x = l/L$ (в одиницях довжини тріщини) в залежності від наявних коренів характеристичного рівняння (1) у смугі $-1 < Re \lambda < 0$:

а) характеристичне рівняння має 2 або 3 дійсні корені:

$$\sum_{i=1}^3 n_i F(\lambda_i, \beta) N(\lambda_i, \beta) x^{\lambda_i} = \frac{N(0, \beta)}{\tau},$$

де $n_i = \frac{C_i}{C_1} \frac{L^{\lambda_i}}{L^{\lambda_1}}$, $N(\lambda, \beta) = \frac{K^+(-\lambda-1)}{(\lambda+1)I(\lambda, \beta)}$, $\tau = \frac{C_1 L^{\lambda_1}}{\tau_1}$;

б) характеристичне рівняння має 2 комплексно-спряжених ($\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \lambda_r + i\lambda_m$, $C_1 = \bar{C}_2 = \frac{K_I + iK_{II}}{\sqrt{2\pi}L^{i\lambda_m}}$) і один або жодного дійсного кореня λ_3 :

$$x^{\lambda_r} \cos(\lambda_m \ln x + \varphi + \xi + \psi) + n_3 M x^{\lambda_3} = \frac{S}{\tau},$$

де $\varphi = \arg(F(\lambda_1, \beta))$, $\xi = \arg N(\lambda_1, \beta)$, $\psi = \arctg n$, $n = \frac{K_I}{K_{II}}$, $\tau = \frac{|K|L^{\lambda_r}}{\sqrt{2\pi}\tau_1}$, $n_3 = \frac{\sqrt{2\pi}C_3 L^{\lambda_3}}{|K| L^{\lambda_r}}$,

$$M = \frac{F(\lambda_3, \beta) N(\lambda_3, \beta)}{2|F(\lambda_1, \beta)||N(\lambda_1, \beta)|}, S = \frac{N(0, \beta)}{2|F(\lambda_1, \beta)||N(\lambda_1, \beta)|}.$$

Тут, згідно з широко вживаною в теорії міжфазних тріщин термінологією, введені комплексний коефіцієнт інтенсивності напружень $K = K_I + iK_{II}$ і фазовий кут ψ , який характеризує ступінь змішування мод навантаження [18].

Обчислення довжини пластичної смуги повинно здійснюватись узгоджено з вибором напрямку її розвитку. Для визначення кута між смугою і межею розділу середовищ використовується умова максимуму довжини смуги.

Виконавши зворотне перетворення Мелліна [16] трансформант напружень із залученням теореми про лишки, можна визначити головні члени розвинень

напружень у асимптотичні ряди в околі вершини тріщини після утворення пластичної зони. Зокрема, формула для нормального напруження має наступну структуру:

$$\sigma_{\theta}(r, \theta) = \sum_j C'_j(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2, L, \tau, C_i) f_j(\theta, \alpha, e_0, \nu_1, \nu_2) r^{\lambda'_j} + \tau \varphi_1(\theta, \alpha, e_0, \nu_1, \nu_2, C_i) + \varphi_2(r, \theta, \alpha, e_0, \nu_1, \nu_2, L, \tau, C_i),$$

де $e_0 = E_1/E_2$; C'_j, f_j, φ_j — відомі функції; φ_2 — функція, що наближається до нуля при $r \rightarrow 0$; λ'_j — корені характеристичного рівняння задачі

$$D_1(-\lambda'_j - 1, \beta) = 0, \tag{11}$$

що лежать у смугі $-1 < Re\lambda' < 0$. Відмінність зазначених коренів рівняння (11) від коренів рівняння (1) характеризує зміну характеру напружено-деформованого стану в околі кутової точки внаслідок утворення початкової пластичної смуги.

3. Аналіз отриманих результатів та висновки. Результати чисельних розрахунків кута нахилу і відносної довжини x смуги представлені на Рис. 2-5. При розрахунках покладалось $n_3 = 0$, оскільки вплив найменш сингулярного доданку в асимптотиці напружень (4), що відповідає найбільшому кореню характеристичного рівняння (1) зі смуги $-1 < Re\lambda < 0$, виявляється незначним [12].

З розрахунків кута β , представлених на Рис. 2-4, випливає, що напрямок смуги слабо залежить від відношення модулів Юнга середовищ і величини навантаження, заданого безрозмірним параметром τ , проте суттєво залежить від кута розхилу межі розділу та конфігурації навантаження, яке визначається множителем n_2 у випадку дійсних коренів характеристичного рівняння, або параметром змішування мод n у випадку комплексних коренів. При певних конфігураціях навантаження пластична зона-смуга поширюється вздовж межі розділу середовищ ($\beta = 0^\circ$).

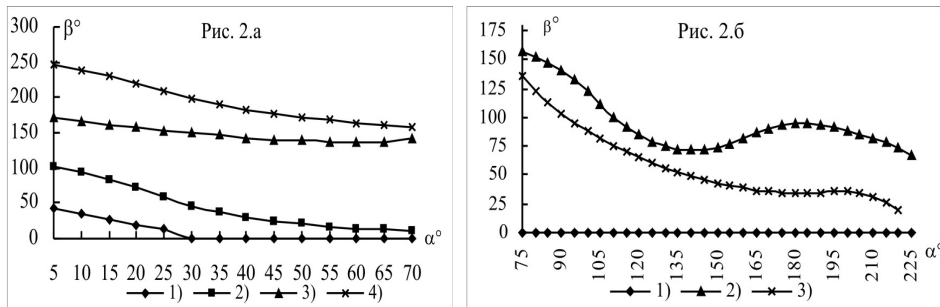


Рис. 2. Залежність кута нахилу пластичної смуги від кута розхилу межі розділу середовищ α ($E_1/E_2 = 0, 25$, $\nu_1 = \nu_2 = 0, 3$); а) випадок дійсних коренів рівняння (1): 1) $\tau = -0, 2$, $n_2 = 0$; 2) $\tau = -0, 2$, $n_2 = 1$; 3) $\tau = 0, 2$, $n_2 = 0$; 4) $\tau = 0, 2$, $n_2 = 1$; б) випадок комплексних коренів рівняння (1): 1) $\tau = -0, 2$, $n = 0$ і $n = 1$; 2) $\tau = 0, 2$, $n = 0$; 3) $\tau = 0, 2$, $n = 1$.

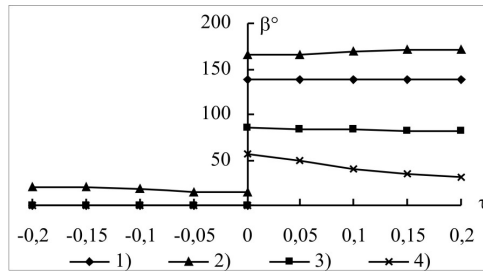


Рис. 3

Рис. 3. Залежність кута нахилу пластичної смуги від безрозмірного параметра навантаження τ ($E_1/E_2 = 0,25$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$): 1) $\alpha = 50^\circ$, $n_2 = 0$; 2) $\alpha = 50^\circ$, $n_2 = 1$; 3) $\alpha = 210^\circ$, $n = 0$; 4) $\alpha = 210^\circ$, $n = 1$.

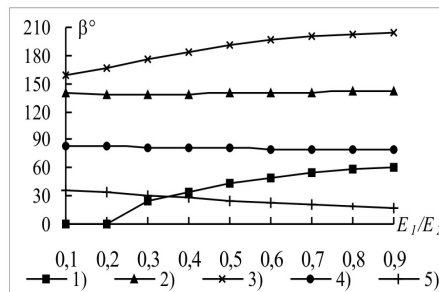


Рис. 4

Рис. 4. Залежність кута нахилу пластичної смуги від відношення модулів Юнга E_1/E_2 ($\nu_1 = \nu_2 = 0,3$): 1) $\alpha = 50^\circ$, $\tau = -0,2$, $n_2 = 1$; 2) $\alpha = 50^\circ$, $\tau = 0,2$, $n_2 = 0$; 3) $\alpha = 50^\circ$, $\tau = 0,2$, $n_2 = 1$; 4) $\alpha = 210^\circ$, $\tau = 0,2$, $n = 0$; 5) $\alpha = 210^\circ$, $\tau = 0,2$, $n = 1$.

Згідно з розрахунками (Рис. 5), довжина початкової пластичної зони нелінійно зростає із збільшенням зовнішнього навантаження, заданого безрозмірним параметром τ . Довжина пластичної смуги тим більша, чим менша межа текучості матеріалу. На довжину зони суттєво впливає конфігурація навантаження. Зокрема, при певних параметрах задачі вона може виявитись дуже малою, що слід розглядати як існування переваги у розвитку пластичної зони в іншому середовищі.

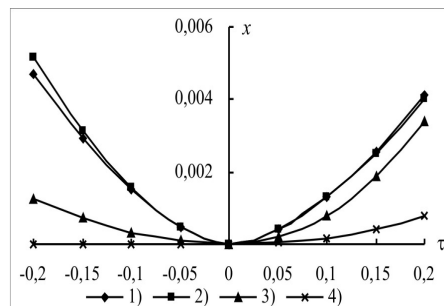


Рис. 5

Рис. 5. Залежність відносної довжини пластичної смуги від безрозмірного параметра навантаження τ ($E_1/E_2 = 0,25$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$): 1) $\alpha = 50^\circ$, $n_2 = 0$; 2) $\alpha = 50^\circ$, $n_2 = 1$; 3) $\alpha = 210^\circ$, $n_2 = 0$; 4) $\alpha = 210^\circ$, $n_2 = 1$.

Розрахунки коренів характеристичного рівняння (11) задачі представлені на Рис. 6, показують, що воно має у смугі $-1 < Re\lambda' < 0$ 2 або 3 дійсних кореня, які залежать не лише від конфігурації тіла (кута розхилу межі розділу середовищ і пружних параметрів з'єднаних матеріалів), але й від величини та конфігурації навантаження, оскільки останні суттєво впливають на орієнтацію початкової пластичної зони.

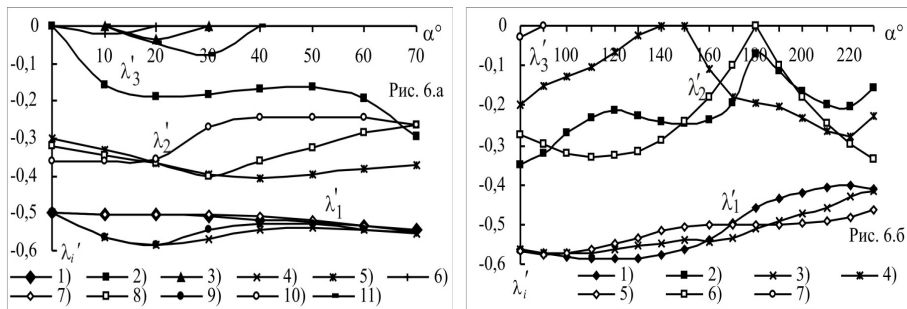


Рис. 6.

Рис. 6. Залежність показника сингулярності напружень λ'_i від кута розхилу межі розділу середовищ α ($E_1/E_2 = 0,25$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$): а) випадок дійсних коренів рівняння (1): 1-3) $\tau = 0,2$, $n_2 = 0$; 4-6) $\tau = 0,2$, $n_2 = 1$; 7-8) $\tau = -0,2$, $n_2 = 0$; 9-11) $\tau = -0,2$, $n_2 = 1$; б) випадок комплексних коренів рівняння (1): 1-2) $\tau = 0,2$, $n_2 = 0$; 3-4) $\tau = 0,2$, $n_2 = 1$; 5-7) $\tau = -0,2$, $n_2 = 0$ і $n_2 = 1$.

Висновки. Відсутність комплексних коренів характеристичного рівняння задачі означає, що поява початкової пластичної смуги усуває осциляції напружень і переміщень поблизу кутової точки. Проте, в її околі концентрація напружень залишається, але вона має тепер степеневий характер. Збереження концентрації означає, що розвиток пластичної зони в околі кутової точки буде продовжуватись шляхом збільшення геометричних розмірів початкової смуги при зростанні навантаження та появою нових пластичних смуг або зони крихкого передруйнування (process zone), які можуть бути розраховані аналогічним способом.

1. **Панасюк В. В.** Модель смуг пластичності в пружнопластичних задачах механіки руйнування [текст] / В. В. Панасюк, М. П. Саврук // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – № 1. – С. 49–68.
2. **Dugdale D. S.** Yielding of steel sheets containing slits [text] / D. S. Dugdale // J. Mech. and Phys. Solids. – 1960. – V. 8, № 2. – P. 100–104.

3. **Леонов М. Я.** Полосы пластичности при растяжении пластин с трещиновидным концентратором [текст] / М. Я. Леонов, П. М. Витвицкий, С. Я. Ярема // ДАН СССР. – 1963. – Т. 148, № 3. – С. 541–544.
4. **Evans A. G.** Interface adhesion: effects of plasticity and segregation [text] / A. G. Evans, J. W. Hutchinson, Y. Wei // Acta materialia. – 1999. – V. 47. – P. 4093–4113.
5. **Лобода В. В.** Определение зон предразрушения у края трещины между двумя упругими ортотропными телами [текст] / В. В. Лобода, А. Е. Шевелева // Прикл. механика. – 2003. – Т. 39, № 5. – С. 76–82.
6. **Tvergaard V.** Influence of plasticity on interface toughness in a layered solid with residual stresses [text] / V. Tvergaard // Int. J. of Solids and Structures. – 2003. – V. 40. – P. 5769–5779.
7. **Tvergaard V.** Predictions of mixed mode interface crack growth using a cohesive zone model for ductile fracture [text] / V. Tvergaard // J. of the Mechanics and Physics of Solids. – 2004. – V. 52. – P. 925–940.
8. **Chai H.** Interfacial mixed-mode fracture of adhesive bonds undergoing large deformation [text] / H. Chai // Int. J. of Solids and Structures. – 2003. – V. 40. – P. 6023–6042.
9. **Nakatani A.** Crack tip fields at a ductile single crystal-rigid material interface [text] / A. Nakatani, W. J. Drugan, E. Van der Gissen, A. Needleman // Int. J. of Fracture. – 2003. – V. 122. – P. 131–159.
10. **Бакиров В. Ф.** Модель Леонова-Панасюка-Дагдейла на границе соединения материалов [текст] / В. Ф. Бакиров, Р. В. Гольдштейн // Прикл. математика и механика. – 2004. – Т. 68, № 1. – С. 170–179.
11. **Каминский А. А.** О направлении развития тонкой пластической зоны предразрушения в вершине трещины на границе раздела различных сред [текст] / А. А. Каминский, М. В. Дудик, Л. А. Кипнис // Прикл. механика. – 2006. – Т. 42, № 2. – С. 14–23.
12. **Дудик М. В.** Розвиток зони передруйнування від міжфазної тріщини у кутовій точці межі розділу двох пружних середовищ [текст] / М. В. Дудик, Ю. В. Діхтяренко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – Т. 54, № 2. – С. 7–14.
13. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения [текст] / Г. П. Черепанов. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
14. **Діхтяренко Ю. В.** Особливості напруженого стану в околі кутової точки межі розділу середовищ, з якої виходить міжфазна тріщина [текст] / Ю. В. Діхтяренко // Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках: Материалы XIX Международ. науч. школы, 21-27 сентября 2009 г.: тезисы докл. – Симферополь: Таврич. нац. ун-т, 2009. – С. 98–100.
15. **Нобл Б.** Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных [текст] / Б. Нобл. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
16. **Уфлянд Я. С.** Интегральные преобразования в задачах теории упругости [текст] / Я. С. Уфлянд. – Л.: Наука, 1967. – 402 с.
17. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи [текст] / Ф. Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
18. **Rice J. R.** Elastic Fracture Mechanics Concepts for Interfacial Cracks [text] / J. R. Rice // Journal of Applied Mechanics. – 1988. – 55. – P. 98–103.

УДК 511.33

Саттар Абд Кибрат

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

РАСШИРЕННАЯ ТЕОРЕМА ВИНОГРАДОВА

Кибрат С. А. Розширена теорема Виноградова. В роботі доведено, що тригонометрична сума по цілим гаусовим числам з фіксованим значенням кількості простих дільників є нескінченно малою відносно кількості таких чисел. Цей результат можна розглядати як розширену теорему Виноградова.

Ключові слова: гаусові прості числа, тригонометрична сума, асимптотична формула.

Кибрат С. А. Расширенная теорема Виноградова. В работе доказывается, что тригонометрическая сумма по целым гауссовым числам с фиксированным значением количества простых делителей есть бесконечно малая величина относительно количества таких чисел. Этот результат можно рассматривать как расширенную теорему Виноградова.

Ключевые слова: гауссовы простые числа, тригонометрическая сумма, асимптотическая формула.

Kibrat S. A. Extended Vinogradov theorem. In work it is proved that the exponential sum on the Gaussian integers with the fixed value of an amount of the prime divisors is infinitesimal magnitude concerning an amount of such numbers. This result can be considered as the extended Vinogradov theorem.

Key words: gaussian prime numbers, exponential sum, asymptotic formula.

Знаменитая теорема И. М. Виноградова утверждает, что для любого иррационального Θ тригонометрическая сумма

$$\pi(x, \Theta) := \sum_{\substack{p \leq x \\ p\text{-простое}}} e^{2\pi i \Theta p}$$

имеет оценку $o(\pi(x))$, (здесь $\pi(x)$ обозначает количество простых чисел на отрезке $[1, x]$).

Пусть $\omega(n)$ обозначает количество различных простых делителей n . Ясно, что $\omega(n) = 1$ тогда и только тогда, когда n — простое число.

Дюпэн, Холл и Тененбаум [2] показали, что для любого иррационального Θ и всех $k \leq (1 - \varepsilon_0) \log \log x$, $0 < \varepsilon_0 < 1$ справедлива оценка

$$\pi_k(x, \Theta) := \sum_{\substack{n \leq x \\ \omega(n)=k}} e^{2\pi i \Theta n} = o(\pi_k(x)),$$

где $\pi_k(x)$ означает число натуральных чисел $n \leq x$, для которых $\omega(n) = k$.

Очевидно, что при $k = 1$ мы имеем результат Виноградова.

Нашей целью является доказательство аналогов теоремы Виноградова и результата Дюпэна, Холла, Тененбаума для тригонометрических сумм над $\mathbb{Z}[i]$.

Введем некоторые обозначения, которые мы будем использовать:

$N(\alpha)$ — норма $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$, т.е. $N(\alpha) = |\alpha|^2$;

$Sp(\alpha)$ — след α из $\mathbb{Q}(i)$ в \mathbb{Q} , $Sp(\alpha) = 2\Re\alpha$;

\mathfrak{p} всегда обозначает простое гауссово число;

для $\Theta \in \mathbb{R}$ через $\|\Theta\|$ обозначают расстояние Θ до ближайшего целого числа;

$e(\alpha) = e^{2\pi i\Re\alpha}$, $exp(x) = e^x$ для $x \in \mathbb{R}$;

функции μ (функция Мёбиуса) и φ (функция Эйлера), Λ (функция Мангольда) рассматриваются как аналоги классических арифметических функций;

штрих у суммы \sum' или произведения \prod' означает, что сумма или произведение берутся по неассоциированным значениям переменной.

Пусть Θ — иррациональное число. Тогда для любого $\tau > 1$, в силу неравенства Дирихле, найдётся рациональное $\frac{a}{g}$, $(a, g) = 1$, $g \leq \tau$ такое, что

$$\left| \Theta - \frac{a}{g} \right| \leq \frac{1}{g\tau} \leq \frac{1}{g^2}. \quad (1)$$

В последующем нам понадобится следующий аналог теоремы Давенпорта.

Лемма 1. (Давенпорт [1]). Пусть $1 < x_0 < x_1 < x$, $1 \leq g \leq x$, $(a, g) = 1$. Тогда для любой ограниченной функции $\lambda(\omega, x)$, $\omega \in \mathbb{Z}[i]$, т.е. $\lambda(\omega, x) \ll 1$ для $\forall \omega \in \mathbb{Z}[i]$, имеем

$$\sum_{0 < N(\alpha) < x_1} \left| \sum_{N(\omega) \leq \frac{x}{N(\alpha)}} \lambda(\omega, x) e\left(\frac{a}{g}\alpha\omega\right) \right| \ll x \left(\frac{1}{x_0} + \frac{x_1}{x} + \frac{1}{g} + \frac{g}{x} \right)^{\frac{1}{2}} (\log x)^2.$$

Это утверждение доказано в [1] для функции λ целого рационального аргумента, но метод доказательства дословно переносится на случай целых гауссовых чисел.

Пусть a, g — натуральные числа, $(a, g) = 1$, $h \in \mathbb{Z}[i]$. Рассмотрим следующую сумму

$$M_0\left(x, z, \frac{hq}{g}\right) := \sum_{N(\alpha) \leq x} z^{N(\alpha)} e\left(\frac{ah\alpha}{g}\right).$$

В [4] была построена асимптотическая формула:

$$M_0\left(x, z, \frac{ha}{g}\right) = x\ell(z, g, h)(\log x)^{z-1} + O_{\delta, b}(x(\log x)^{\Re z - 2}(\log \log x)^5), \quad (2)$$

где

$$\ell(z, g, h) = (1 - z) \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{Z}[i], \\ \beta | g}} \frac{z^{\omega(\beta)} \log N(\beta)}{N(\beta)} \cdot \frac{p(z, g) \cdot c_g(\beta)}{\overline{\varphi}(g)}$$

$$c_\gamma(\beta) := \sum_{\substack{\in \mathbb{Z}[i] \\ (\alpha, \gamma)=1}} e\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right) \text{ — сумма Рамануджана.}$$

$$p(z, \gamma) = A(z) \prod_{p|\gamma}' \left(1 - \frac{1}{N(p)}\right),$$

$$A(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \prod_p' \left(1 - \frac{z}{N(p)}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{N(p)}\right)^z,$$

$p(z, \gamma), A(z)$ — аналитичны в круге $|z| \leq 2 - \varepsilon_0$,

$$\bar{\varphi}(\gamma) = N(\gamma) \prod_{p|\gamma} \left(1 - \frac{1}{N(p)}\right) \text{ — обобщённая функция Эйлера в } \mathbb{Z}[i].$$

Замечание 1. Из выражения для $p(z, \gamma)$, $\gamma = g$ и оценок суммы Рамануджана (над кольцом $\mathbb{Z}[i]$) легко вывести неравенство

$$(g \log g)^{-2} \ll |\ell(z, g, h)| \ll (\log \log g)^4.$$

Теперь мы в состоянии доказать следующую теорему. Пусть $0 < y \leq 1$. Положим

$$T(x, y, \Theta) := \sum_{N(\alpha) \leq x} y^{\omega(\alpha)} \left| M_0 \left(\frac{x}{N(\alpha)}, y, \alpha\Theta \right) \right|.$$

Теорема 1. Пусть $\left| \Theta - \frac{a}{g} \right| \leq \frac{(\log x)^{10}}{g^2}$, $(a, g) = 1$. Тогда

- (i) $T(x, y, \Theta) \ll x(\log x)^{y-1}(\log \log x)^y$,
если $g > (\log x)^{11}$,
- (ii) $T(x, y, \Theta) \ll x(\log x)^{2y-1} \left(\frac{\tau(g)^2}{\varphi(g)} (\log \log g)^2 + (\log x)^{-\frac{y}{2}} \right)$,
если $g \leq (\log x)^{11}$

(здесь $\tau(g)$ и $\varphi(g)$ рассматриваются как функции над $\mathbb{Z}[i]$), т. е.

$$\varphi(g) = \bar{\varphi}(g) = g^2 \prod_{\substack{p|g, \\ p \equiv 3 \pmod{4}}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \times \prod_{\substack{p|g, \\ p \equiv 1 \pmod{4}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \varepsilon_2,$$

где

$$\varepsilon_2 = \begin{cases} 1, & \text{если } g \text{ — нечетное,} \\ \frac{1}{2}, & \text{если } g \text{ — четное.} \end{cases}$$

Доказательство. Сначала докажем утверждение (i). Имеем

$$T\left(x, y, \frac{a}{g}\right) = \sum_{N(\alpha) \leq x} y^{\omega(\alpha)} \sum_{N(\omega) \leq \frac{x}{N(\alpha)}} y^{\omega(\omega)} e\left(\frac{a\alpha\omega}{g}\right) := T_1 + T_2 + T_3, \quad (3)$$

где T_i , $i = 1, 2, 3$ определяются промежутком изменения $N(\alpha)$:

$$1 \leq N(\alpha) \leq (\log x)^{10}; \quad (\log x)^{10} < N(\alpha) \leq x(\log x)^{-10}; \quad x(\log x)^{-10}N(\alpha) \leq x.$$

Для $0 \leq y \leq 2 - \varepsilon_0$, $0 < \varepsilon_0 < 1$ имеем

$$\sum_{N(\omega) \leq x} y^{\omega(\alpha)} = x(\log x)^{y-1} \left(\Phi(y) + O\left(\frac{1}{\log x}\right) \right), \quad \Phi(y) \ll_{\varepsilon_0} 1.$$

Поэтому T_1 и T_3 можно оценить величиной $O_{\varepsilon_0} \left(\frac{x}{N(\alpha)} \left(\log \frac{x}{N(\alpha)} \right)^{y-1} \right)$.

Следовательно,

$$T_1 + T_3 \ll_{\varepsilon_0} x(\log x)^{y-1} (\log \log x)^y. \quad (4)$$

К внутренней сумме в T_2 применим лемму Давенпорта с $\lambda(\omega, x) = y^{\omega(\alpha)} \leq 1$ (ибо $y \leq 1$). Возьмём $x_0 = (\log x)^{10}$, $x_1 = x(\log x)^{-10}$.

И тогда получаем

$$T_2 \ll x(\log x)^2 \left(\frac{1}{(\log x)^{10}} + \frac{1}{g} + \frac{g}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \ll x(\log x)^{-3}.$$

В силу (4) теорема в случае (i) доказана. Для доказательства теоремы в случае (ii) положим

$$x_1 = \exp \sqrt{\log x}, \quad x_2 = x \exp \left(-2\sqrt{\log x} \right).$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_0 := \sum_{N(\alpha) < x_2} y^{\omega(\alpha)} \left| \int_{x_1}^{x_2} e \left(\left(\Theta - \frac{a}{g} \right) \alpha u \right) dM_0 \left(u, y, \frac{a\alpha}{g} \right) \right|. \quad (5)$$

Вычисляя внутренний интеграл интегрированием по частям (используем тривиальную оценку $M_0 \left(u, y, \frac{a\alpha}{g} \right)$ для нижнего предела интегрирования), получаем

$$\sum_0 = T(x, y, \Theta) + O \left(x(\log x)^{\frac{3y}{2}-1} \right). \quad (6)$$

С другой стороны, применение формулы для M_0 даёт

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{\frac{x}{N(\alpha)}} e \left(\left(\Theta - \frac{a}{g} \right) \alpha u \right) dM_0 \left(u, y, \frac{a\alpha}{g} \right) = \\ & = \ell(y, g, \alpha) \int_{x_1}^{\frac{x}{N(\alpha)}} e \left(\left(\Theta - \frac{a}{g} \right) \alpha u \right) d(u(\log u)^{y-1}) + \\ & + \int_{x_1}^{\frac{x}{N(\alpha)}} e \left(\left(\Theta - \frac{a}{g} \right) \alpha u \right) dR_g(u), \end{aligned} \quad (7)$$

где $R_g(u)$ — остаточный член в соотношении (2).

Интегрируя по частям последний интеграл, получаем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x_1}^{\frac{x}{N(\alpha)}} e\left(\left(\Theta - \frac{a}{g}\right)\alpha u\right) dR_g(u) \right| \ll \left| R_g\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right) \right| + |R_g(x_1)| + \\ & + 2\pi \left| \Theta - \frac{a}{g} \right| N(\alpha)^{\frac{1}{2}} \int_{x_1}^{\frac{x}{N(\alpha)}} |R_g(u)| du \ll \frac{x}{N(\alpha)} (\log x)^{-2}. \end{aligned} \quad (8)$$

(Мы учли, что $N(\alpha) \leq x \exp(-2\sqrt{\log x})$ и $\left| \Theta - \frac{a}{g} \right| \leq \frac{(\log x)^{10}}{x}$).

Кроме того,

$$\left| \int_{x_1}^{\frac{x}{N(\alpha)}} e\left(\left(\Theta - \frac{a}{g}\right)\alpha u\right) d(u(\log u)^{y-1}) \right| \ll \frac{x}{N(\alpha)} \left(\log \frac{x}{N(\alpha)}\right)^{y-1}, \quad (9)$$

если $N(\alpha) \leq x_2$.

Из (6) – (9) выводим

$$T(x, y, \Theta) \ll x \sum_{N(\alpha) \leq x_2} \ell(y, g, \alpha) \frac{y^{\omega(\alpha)}}{N(\alpha)} \left(\log \frac{x}{N(\alpha)}\right) + x (\log x)^{\frac{3}{2}-1}. \quad (10)$$

Теперь, используя очевидную оценку

$$\ell(y, g, \alpha) \ll \frac{(\log \log g)^2}{\varphi(g)} \left| \sum_{\substack{\beta|g \\ \beta \in \mathbb{Z}[i]}} c_\beta(\alpha) \right| \ll \frac{(\log \log g)^2}{\varphi(g)} (N(\alpha), g) \cdot 2^{\nu(g)}, \quad (11)$$

где $\nu(g)$ — число различных простых рациональных делителей g , мы получаем утверждение теоремы для случая (ii).

□

Пусть $k \geq 2$. Обозначим

$$\tilde{\pi}_k(x) := \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}[i], \\ \omega(\alpha)=k, \\ N(\alpha) \leq x}} 1, \quad \tilde{\pi}_k(x, \Theta) := \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}[i], \\ \omega(\alpha)=k, \\ N(\alpha) \leq x}} e(\Theta\alpha), \quad (12)$$

$$\hat{\pi}_k(x, \Theta) := \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}[i], \\ \omega(\alpha)=k, \\ N(\alpha) \leq x}} e(\Theta\alpha) \log N(\alpha). \quad (13)$$

Сначала будем предполагать, что $g > (\log x)^{11}$.

Воспользуемся известным соотношением для функции Мангольда $\Lambda(\alpha)$:

$$\sum'_{\beta|\alpha} \Lambda(\beta) = \log N(\alpha). \quad (14)$$

Пусть $x(\log x)^{-2} \leq u \leq x$, $u_0 = (\log x)^{10}$, $u_1 = u(\log x)^{-10}$. Тогда, используя (14), получаем

$$\begin{aligned} & \left| \hat{\pi}_k \left(u, \frac{a}{g} \right) \right| - \left| \sum_{\substack{\beta_1 \beta_2 = \alpha, \\ \omega(\beta_1 \beta_2) = k}} e \left(\frac{a \beta_1 \beta_2}{g} \right) \Lambda(\beta_1) \right| \ll \\ & \ll \sum_{u_0 \leq N(\beta_2) < u_1} \left| \sum_{\substack{N(\beta) \leq \frac{u}{N(\beta_1)}}} e \left(\frac{a \beta_2 \gamma}{g} \right) \log N(\mathfrak{p}) \right| + \sum_{u_0 \leq N(\beta_1) < u_1} \sqrt{\frac{u}{N(\beta_1)}} + \\ & + \sum_{\substack{N(\beta_1) < u_0 \\ \omega(\beta_2) = k-1}} \frac{u}{N(\beta_1)} + \sum_{\substack{u_1 \leq N(\beta_1) < u \\ \omega(\beta_1) \leq k-1}} \frac{u}{N(\beta_1)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для оценки первой суммы справа в (15) применяем лемму Давенпорта с $\lambda(p, u) = \frac{\log N(p)}{\log u}$. Вторую сумму в (15) оцениваем тривиально, а в оставшихся двух суммах применяем абелево суммирование и используем соотношения:

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_k(x) &= \frac{x}{\log x} \cdot \frac{(\log \log x)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \frac{\varphi_0((k-1)(\log \log x)^{-1})}{\Gamma(1+(k-1)(\log \log x)^{-1})} + \\ & + O_\delta \left(\frac{k^{\frac{3}{2}}}{(\log \log x)^2} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

если $1 \leq k \leq (2 - \delta) \log \log x$, $0 < \delta < 1$.

(эта формула для целых гауссовых чисел получается по схеме доказательства Selberg [3] в случае кольца целых рациональных чисел).

$$\sum_{\substack{N(\alpha) < N \\ \omega(\alpha) = j}} \frac{|\mu(\alpha)|}{N(\alpha)} \ll \frac{1}{j!} \left(\sum_{N(\mathfrak{p}) < N} \frac{1}{N(\mathfrak{p})} \right)^j \ll \frac{1}{j!} (\log \log N + C_0)^j, \quad (17)$$

$C_0 > 0 - Const.$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{N(\alpha) \leq k-1 \\ \omega(\alpha) < (\log x)^{10}}} \frac{1}{N(\alpha)} &= \sum_{\substack{N(\alpha \beta^2) < (\log x)^{10} \\ \omega(\alpha \beta^2) \leq k-1}} \frac{|\mu(\alpha)|}{N(\alpha \beta^2)} \ll \\ &\ll \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} (\log \log \log x + C)^j, \quad C > 0 - Const. \end{aligned} \quad (18)$$

Поэтому (см. обозначение (13))

$$\begin{aligned} \left| \hat{\pi}_k \left(u, \frac{a}{g} \right) \right| &\ll \frac{u}{(\log x)^2} + \sqrt{uu_1} + u \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} (\log \log \log x + C)^j + \\ &+ \frac{u}{\log x} \sum_{j=1}^{k-2} \frac{1}{j!} (\log \log x)^{j+1} \ll u \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} + (\log \log \log x + C)^j. \end{aligned}$$

С помощью формулы Стирлинга для $k!$ легко убедиться, что

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} + (\log \log \log x + C)^j = \left(\frac{(\log \log x)^{k-1}}{(k-1)!} \right)$$

для всех k , $2 \leq k < 2 \log \log x$.

Поэтому соотношение

$$\tilde{\pi}_k \left(a, \frac{a}{g} \right) = \frac{\tilde{\pi}_k \left(x, \frac{a}{g} \right)}{\log x} + \int_1^x \frac{\tilde{\pi}_k \left(u, \frac{a}{g} \right)}{u (\log^2 u)} du$$

показывает, что

$$\tilde{\pi}_k \left(x, \frac{a}{g} \right) = O \left(\tilde{\pi}_k(x) \right), \quad \text{если } g > (\log x)^{11}. \quad (19)$$

Для $g \leq (\log x)^{11}$ воспользуемся формулой (2) с $h = 1$, $b = 11$.

Мы имеем

$$M_0 \left(x, z, \frac{a}{g} \right) = x \ell(z, g, 1) (\log x)^{z-1} + O_{\varepsilon_0} \left(x (\log x)^{\Re z - 1} (\log \log x)^5 \right)$$

и, повторяя рассуждения из теоремы 1, случай (ii), получаем

$$M_0(x, z, \Theta) \ll_{\varepsilon_0} x \ell(z, g, 1) (\log x)^{\Re z - 1} + x (\log x)^{\Re z - 2} (\log \log x)^5. \quad (20)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \ell(z, g, 1) &= \frac{1}{\Gamma(z)} \prod_{\mathfrak{p}}' \left(1 - \frac{z}{N(\mathfrak{p})} \right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})} \right)^z \times \\ &\times \sum_{\substack{\delta_1 \delta_2 = g, \\ \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{Z}[i]}} \frac{z^{\omega(\delta_1)}}{N(\delta_1)} \cdot \frac{\mu(\delta_1)}{\varphi(\delta_2)} \prod_{\mathfrak{p} | \delta_2} \left(1 - \frac{z}{N(\mathfrak{p})} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Из определения

$$M_0(x, z, \Theta) := \sum_{N(\alpha) \leq x} z^{\omega(\alpha)} e^{\omega(\Theta, \alpha)}$$

видно, что

$$M_0(x, z, \Theta) = \sum \tilde{\pi}_k(x, \Theta) z^k$$

есть многочлен от комплексной переменной z , а потому его коэффициенты можно определить по формуле Коши. Таким образом, имеем

$$\tilde{\pi}_k(x, \Theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C M_0(x, z, \Theta) \frac{dz}{z^{k+1}}$$

где C — любой контур в комплексной плоскости, содержащий внутри точку $z = 0$. Возьмём в качестве C окружность радиуса $r := \frac{k-1}{\log \log x}$ с центром в точке $z = 0$. Тогда повторяя рассуждения из [4] при вычислении аналогичного интеграла, мы получим

$$|\tilde{\pi}_k(x, \Theta)| \leq \frac{x}{\log x} \cdot \frac{(\log \log x)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \{ (2 - \delta)^{\omega(g) - \nu(g)} (3 - \delta)^{\nu(g)} \varphi(g)^{-1} + \frac{\log \log x}{k} \cdot \frac{(\log \log \log x)^5}{\log x} \}. \quad (22)$$

Поскольку для иррациональных Θ увеличение точности приближения рациональными числами $\frac{a}{g}$ влечёт рост g , то соотношение (22) доказывает, что $\tilde{\pi}_k(x, \Theta) = o(\tilde{\pi}_k(x))$.

Таким образом, доказана следующая расширенная теорема Виноградова над кольцом целых гауссовых чисел.

Теорема 2. Пусть Θ — вещественное иррациональное число. Тогда для любого натурального k , $k \leq \log \log x$ имеем

$$\tilde{\pi}_k(x, \Theta) = o(\tilde{\pi}_k(x)).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Метод доказательства расширенной теоремы Виноградова, по-видимому, позволяет исследовать распределение значений $\epsilon(\Theta, \mathfrak{p})$, взвешенных функцией $f(x)$, $|x| \leq 1$.

1. **Davenport H.** On some infinite series involving arithmetical functions [text] / H. Davenport. — V. II. — Quart. J. Math., 8(1937). — P. 313–330.
2. **Dupain Y.** Sur le guirepartition modulo 1 de certaines fonetions de divisors [text] / Y. Dupain, R. R. Hall, G. Tenenbaum. — London Math. S., 1982. — V. 26. — P. 397–411.
3. **Selberg A.** Note on paper by L.G. Sathe [text] / A. Selberg. — J. Jndian Math. Soc., 1954. — V. 18. — P. 83–87.
4. **Варбанець П. Д.** Аналог теорема Виноградова над кільцем цілих гаусових чисел [текст] / П. Д. Варбанець, С. А. Кибрат, С. С. Сергеев. — Вісник Київського університету, Серія: фізико-математичні науки. — Вип. 4, 2011 (у друку).

УДК 517.51

Л. В. Матвиюк

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ РАВНОИЗМЕРИМЫХ ПЕРЕСТАНОВОК ФУНКЦИЙ ИЗ ОБОБЩЕННЫХ M -ПРОСТРАНСТВ ЛОРЕНЦА

Матвиюк Л. В. Про одну оцінку рівновимірних перестановок функцій з узагальнених M -просторів Лоренца. У багатовимірному випадку отримана оцінка рівновимірних перестановок функцій з узагальнених M -просторів Лоренца.

Ключові слова: оцінка рівновимірної перестановки функції, узагальнені M -простори Лоренца.

Матвиюк Л. В. Об одной оценке равноизмеримых перестановок функций из обобщенных M -пространств Лоренца. В многомерном случае получена оценка равноизмеримых перестановок функций из обобщённых M -пространств Лоренца.

Ключевые слова: оценка равноизмеримой перестановки функции, обобщенные M -пространства Лоренца.

Matviuk L. V. On an estimate of equimeasurable rearrangements of function from generalized Lorentz M -spaces. In the multidimensional case, it is obtained an estimate of equimeasurable rearrangements of functions from generalized Lorentz M -spaces.

Key words: equimeasurable rearrangements of functions, generalized Lorentz M -spaces.

ВВЕДЕНИЕ. Пусть функция $\psi(x)$ не убывает и неотрицательна на $(0, 1)$, а функция $M(x)$ возрастает и неотрицательна на $[0, +\infty)$, кроме того

$$M(+0) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} M(x) = +\infty.$$

Далее будем считать, что функции $M(x)$, $\psi(x)$ и число $\gamma \in [0, +\infty)$ таковы, что

$$\int_0^1 M(\psi(x)) \frac{dx}{x^\gamma} < +\infty. \tag{1}$$

Через $M_{\psi, \gamma}$ обозначим класс измеримых на единичном кубе $I_N = [0, 1]^N$, $N \in \mathbb{N}$, 1-периодических по каждой переменной функций $f \in L(I_N)$, для которых

$$\|f\|_{M_{\psi, \gamma}}^* = \int_0^1 M \left(\frac{\psi(x)}{x} \int_0^x f^*(t) dt \right) \frac{dx}{x^\gamma} < +\infty.$$

Здесь $f^*(t)$ — невозрастающая на $[0, 1]$ функция, равноизмеримая с функцией $|f(t)|$ на единичном кубе I_N (см., например, [1], с. 36). Заметим, что $\|f\|_{M_{\psi, \gamma}}^*$, вообще говоря, нормой не является.

В силу неравенства Харди (см. [1], с. 124) при $M(x) = x^p$ ($1 < p < \infty$), $\psi(x) = 1, \gamma = 0$ класс функций $M_{\psi, \gamma}$ совпадает с пространством $L_p([0, 1]^N)$. Если $M(x) = x^q, \gamma = 1, \psi(x) = x^{\frac{1}{p}}$ ($1 < p, q < \infty$), то класс функций $M_{\psi, \gamma}$ совпадает с пространством Лоренца $L_{p, q}$. Если $M(x) = x^p$ при $0 < p < \infty, \gamma = 1$, то

класс функций $M_{\psi, \gamma}$ совпадает с пространством Лоренца $\Lambda(\psi, p)$, а если к тому же $\beta_\psi = \overline{\lim} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\psi(2x)}{\psi(x)} < 2$, то (см. [2]) — с пространством Лоренца $\Lambda^*(\psi, p)$.

Пусть $f \in M_{\psi, \gamma}$. Модулем непрерывности функции f назовем

$$\omega_{M_{\psi, \gamma}}^*(f, \delta) = \sup_{\substack{0 \leq |hi| \leq \delta, \\ (i=1, \dots, N)}} \|\Delta_{\bar{h}} f\|_{M_{\psi, \gamma}}^*,$$

где $\Delta_{\bar{h}} f(\bar{x}) = f(\bar{x} + \bar{h}) - f(\bar{x})$, $\delta \in (0, 1)$.

Будем говорить, что функция $M(x)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, если существует постоянная $C_M \geq 0$ такая, что для всех $x \in (0, +\infty)$ выполняется неравенство

$$M(2x) \leq C_M M(x).$$

Здесь, и далее в тексте, через C_M , $C_{a,b}$ будем обозначать константу, зависящую только от M или от a и b , соответственно, не всегда одну и ту же даже в одном неравенстве.

Оценки равноизмеримых перестановок играют важную роль во многих задачах вложения и приближения классов функций, в частности, вложения классов функций из пространств Лебега (см., например, [3]) и пространств Лоренца (см., например, [4]) с заданными мажорантами модулей непрерывности. В работах [5]–[11] получены оценки равноизмеримых перестановок, позволившие доказать ряд теорем вложения.

Так, из результатов, полученных М. Мильманом в [5] следует, что для функции f из пространств Лоренца $\Lambda^*(\psi, p)$ при $\beta_\psi < 2$ в одномерном случае справедливы оценки

$$f^*\left(\frac{1}{2n}\right) - f^*\left(\frac{1}{n}\right) \leq \psi^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right) \omega_{\Lambda^*(\psi, p)}^*(f, \frac{1}{n}),$$

$$f^*(x) - f^*\left(\frac{1}{2}\right) \leq 8 \int_x^1 \psi^{-1}(t) \omega_{\Lambda^*(\psi, p)}^*(f, t) \frac{dt}{t}, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

Эти оценки аналогичны тем, которые имеются для функций из L_p в одномерном случае при $1 \leq p < \infty$, и были доказаны соответственно П. Л. Ульяновым [6] и Э. А. Стороженко [7].

Для функции $f \in L_p(I_N)$ при $1 \leq p < \infty$ В. И. Колядой [8] доказана более точная оценка

$$\int_0^x [f^*(t) - f^*(x)]^p dt \leq C \omega_p^p(f, \sqrt[p]{x}). \quad (2)$$

Автором в [11] доказана для функции $f \in \Lambda(\psi, p)$ при $0 < p < \infty$, $\beta_\psi < \infty$ в многомерном случае оценка

$$\sum_{n=s}^{\infty} \psi^p(2^{-nN}) \left[f^*(2^{-nN}) - f^*(2^{-(s-1)N}) \right]^p \leq C_{N, \psi, p} (\omega_{\Lambda(\psi, p)}^*)^p(f, 2^{-s}), \quad s \in \mathbb{N}.$$

В данной статье получена оценка такого типа для функций из более общих M -пространств Лоренца. Отметим, что в этом случае доказательство существенно усложняется и требует других методов.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ. Сформулируем основной результат.

Теорема. Пусть число $\gamma \in [0, +\infty)$, функция $\psi(x)$ не убывает и неотрицательна на $(0, 1)$, а функция $M(x)$ возрастает, неотрицательна на $[0, +\infty)$, $M(+0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} M(x) = +\infty$ и выполнено условие (1). Если функция $M(x)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, то для любой функции $f \in M_{\psi, \gamma}$ и для любого $s \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\sum_{n=s}^{\infty} M\left(\psi(2^{-nN})\left(f^*(2^{-nN}) - f^*(2^{-(s-1)N})\right)\right) 2^{nN(\gamma-1)} \leq \quad (3)$$

$$\leq C_{M, N, \gamma} \omega_{M_{\psi, \gamma}}^*(f, 2^{-s}).$$

Отметим, что при изучении вопроса о вложении классов функций с заданными мажорантами модулей непрерывности, в многомерном случае оказалось, что оценки типа (2) и (3) точны лишь в том случае, когда модуль непрерывности функции $\omega(\delta)$ при $\delta \rightarrow 0$ убывает не слишком быстро; не быстрее, например, чем δ^α ($0 < \alpha < 1$). Если же скорость убывания модуля непрерывности близка к предельной $\omega(\delta) = \underline{Q}(\delta)$, то этой оценки не достаточно для доказательства точных теорем вложения. Оценки, дополняющие в предельном случае оценку типа (2), были получены в ряде работ различных авторов [9, 10]. Наиболее полные оценки равноизмеримых перестановок обоих типов для функций $f \in L_p$ ($1 \leq p < \infty$), позволившие установить ряд точных теорем вложения, содержатся в работе [10]. Автором в [11] были получены оценки равноизмеримых перестановок для функций из пространств Лоренца $\Lambda(\psi, p)$ и $\Lambda^*(\psi, p)$, аналогичные тем, которые имеются в работе [10]. С помощью этих оценок получен ряд точных теорем вложения. Оценка типа (3) тоже может быть использована для доказательства теорем вложения классов функций $f \in M_{\psi, \gamma}$ с заданными мажорантами модулей непрерывности. Оценка, дополняющая оценку (3) в предельном случае, доказана автором при более сильных ограничениях на функцию $M(x)$, и будет опубликована позднее в другой работе.

Автор выражает глубокую благодарность профессору В. И. Коляде за полезные обсуждения результатов, полученных в данной работе.

Некоторые вспомогательные утверждения. Прежде чем перейти к доказательству оценки (3), отметим, что в работе [12] были доказаны следующие утверждения.

Лемма 1. Пусть число $\gamma \in [0, +\infty)$, функция $\psi(x)$ не убывает и неотрицательна на $(0, 1)$, а функция $M(x)$ возрастает, неотрицательна на $[0, +\infty)$, $M(+0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} M(x) = +\infty$ и выполнено условие (1). Если функция $M(x)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, то для любой функции $f \in M_{\psi, \gamma}$ имеем

$$\omega_{M_{\psi, \gamma}}^*(f, +0) = 0.$$

Это означает, что оценка (3) является содержательной.

Лемма 2. Пусть число $\gamma \in [0, +\infty)$, функция $\psi(x)$ не убывает и неотрицательна на $(0, 1)$, а функция $M(x)$ возрастает, неотрицательна на $[0, +\infty)$, $M(+0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} M(x) = +\infty$ и выполнено условие (1). Если функция $M(x)$

удовлетворяет Δ_2 -условию, то для любой функции $f \in M_{\psi, \gamma}$ существует константа $C_M > 0$ такая, что для всех $h \in (0, 1]$ выполняется неравенство

$$\omega_{M_{\psi, \gamma}}^*(f, 2h) \leq C_M \omega_{M_{\psi, \gamma}}^*(f, h). \quad (4)$$

Доказательство теоремы. Пусть функция $f \in M_{\psi, \gamma}$. Легко видеть, что в условиях теоремы для любой функции $f \in M_{\psi, \gamma}$ существует $C_M > 0$ такая, что

$$\omega_{M_{\psi, \gamma}}^*(|f|, h) \leq C_M \omega_{M_{\psi, \gamma}}^*(f, h)$$

при всех $h \in (0, 1]$. Поэтому, не ограничивая общности, можно предполагать, что функция f , принадлежащая классу $M_{\psi, \gamma}$, неотрицательна на I_N .

В силу монотонности функции f^* имеем:

$$\begin{aligned} I(s) &= \sum_{n=s}^{\infty} M \left(\psi(2^{-nN}) \left(f^*(2^{-nN}) - f^*(2^{-(s-1)N}) \right) \right) 2^{nN(\gamma-1)} \leq \\ &\leq \sum_{n=s}^{\infty} M \left(\psi(2^{-nN}) 2^{nN} \int_0^{2^{-nN}} \left(f^*(x) - f^*(2^{-(s-1)N}) \right) dx \right) 2^{nN(\gamma-1)}. \end{aligned}$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует множество $E_n \subset I_N$ (см. [1], с. 46) с мерой $|E_n| = 2^{-nN}$ такое, что

$$\int_0^{2^{-nN}} \left(f^*(x) - f^*(2^{-(s-1)N}) \right) dx = \int_{E_n} \left(f(\bar{x}) - f^*(2^{-(s-1)N}) \right) d\bar{x}.$$

Значит,

$$I(s) \leq \sum_{n=s}^{\infty} M \left(\psi(2^{-nN}) 2^{nN} \int_{E_n} \left(f(\bar{x}) - f^*(2^{-(s-1)N}) \right) d\bar{x} \right) 2^{nN(\gamma-1)}.$$

Пусть $I(\bar{x}, 2^{1-s})$ – N -мерный куб с центром в точке $\bar{x} \in E_n$ и длиной ребра 2^{2-s} . Тогда существует множество $B_{\bar{x}} \subset I(\bar{x}, 2^{1-s})$ такое, что для любого $\bar{u} \in B_{\bar{x}}$ выполняется неравенство $f(\bar{u}) \leq f^*(2^{-(s-1)N})$, причем мера $|B_{\bar{x}}| \geq \frac{1}{2} |I(\bar{x}, 2^{1-s})|$.

Тогда для всех $\bar{x} \in E_n$ ($n = s, s+1, \dots$) выполняется неравенство

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) - f^*(2^{-(s-1)N}) &\leq |B_{\bar{x}}|^{-1} \int_{B_{\bar{x}}} |f(\bar{x}) - f(\bar{u})| d\bar{u} \leq \\ &\leq 2 |I(\bar{0}, 2^{1-s})|^{-1} \int_{I(\bar{0}, 2^{1-s})} |f(\bar{x}) - f(\bar{x} + \bar{u})| d\bar{u}. \end{aligned}$$

Учитывая последнее неравенство и меняя порядок интегрирования, получим:

$$I(s) \leq \sum_{n=s}^{\infty} M \left(\psi(2^{-nN}) \frac{2^{nN+1}}{|I(\bar{0}, 2^{1-s})|} \int_{I(\bar{0}, 2^{1-s})} \left(\int_{E_n} |\Delta_{\bar{u}} f(\bar{x})| d\bar{x} \right) d\bar{u} \right) 2^{nN(\gamma-1)}.$$

Далее, переходя к верхней грани по $\bar{u} \in I(0, 2^{1-s})$ и учитывая монотонность функции $M(x)$, имеем

$$I(s) \leq \sum_{n=s}^{\infty} M\left(\psi(2^{-nN})2^{nN+1} \sup_{\bar{u} \in I(\bar{0}, 2^{1-s})} \int_{E_n} |\Delta_{\bar{u}} f(\bar{x})| d\bar{x}\right) 2^{nN(\gamma-1)}.$$

Так как при фиксированном $n \in \{s, s+1, \dots\}$ для любого $t \in [2^{-nN}, 2^{-(n-1)N}]$ выполняются неравенства

$$\psi(2^{-nN}) \leq \psi(t), \quad 2^{nN} \leq \frac{2^N}{t}, \quad 2^{nN(\gamma-1)} \leq C_{N,\gamma} \int_{2^{-nN}}^{2^{-(n-1)N}} \frac{dt}{t^\gamma}$$

и (см. [1], с. 46)

$$\int_{E_n} |\Delta_{\bar{u}} f(\bar{x})| d\bar{x} \leq \int_0^t (\Delta_{\bar{u}} f)^*(x) dx,$$

то, учитывая, что функция $M(x)$ возрастает на $[0, +\infty)$ и удовлетворяет Δ_2 -условию, получим:

$$\begin{aligned} I(s) &\leq C_{N,\gamma} \sum_{n=s}^{\infty} \int_{2^{-nN}}^{2^{-(n-1)N}} M\left(\psi(t) \frac{2^N}{t} \sup_{\bar{u} \in I(\bar{0}, 2^{1-s})} \int_0^t (\Delta_{\bar{u}} f)^*(x) dx\right) \frac{dt}{t^\gamma} \leq \\ &\leq C_{M,N,\gamma} \int_0^{2^{-sN}} M\left(\sup_{\bar{u} \in I(\bar{0}, 2^{1-s})} \frac{\psi(t)}{t} \int_0^t (\Delta_{\bar{u}} f)^*(x) dx\right) \frac{dt}{t^\gamma}. \end{aligned}$$

Зафиксируем $\bar{u} \in I(\bar{0}, 2^{1-s})$. Тогда для любого $t \in (0, 2^{-sN})$ существует (см. [1], с. 46) множество $E_t \subset I_N$ с мерой $|E_t| = t$ такое, что

$$\int_0^t (\Delta_{\bar{u}} f)^*(x) dx = \int_{E_t} |\Delta_{\bar{u}} f(\bar{x})| d\bar{x}.$$

Так как функция

$$\varphi(\bar{u}) = \int_{E_t} |f(\bar{x}) - f(\bar{x} + \bar{u})| d\bar{x}$$

непрерывна на $I(\bar{0}, 2^{1-s})$, то существует $\bar{u}_0 = \bar{u}_0(t) \in I(\bar{0}, 2^{1-s})$, такое, что $\sup_{\bar{u} \in I(\bar{0}, 2^{1-s})} \varphi(\bar{u}) = \varphi(\bar{u}_0)$. Следовательно,

$$M\left(\frac{\psi(t)}{t} \sup_{\bar{u} \in I(\bar{0}, 2^{1-s})} \varphi(\bar{u})\right) = M\left(\frac{\psi(t)}{t} \varphi(\bar{u}_0)\right).$$

Тогда имеем для всех $t \in (0, 1]$

$$M\left(\frac{\psi(t)}{t} \sup_{\bar{u} \in I(\bar{0}, 2^{1-s})} \int_{E_t} |\Delta_{\bar{u}} f(\bar{x})| d\bar{x}\right) \leq \sup_{\bar{u} \in I(\bar{0}, 2^{1-s})} M\left(\frac{\psi(t)}{t} \int_{E_t} |\Delta_{\bar{u}} f(\bar{x})| d\bar{x}\right).$$

Значит,

$$I(s) \leq C_{M,N,\gamma} \int_0^{2^{-sN}} \sup_{\bar{u} \in I(\bar{0}, 2^{1-s})} M\left(\frac{\psi(t)}{t} \int_{E_t} |\Delta_{\bar{u}} f(\bar{x})| d\bar{x}\right) \frac{dt}{t^\gamma}. \quad (5)$$

Далее, так как для любых $\bar{u}, \bar{v} \in I(\bar{0}, 2^{1-s})$ имеем

$$|\Delta_{\bar{u}} f(\bar{x})| \leq |\Delta_{\bar{u}+\bar{v}} f(\bar{x})| + |\Delta_{\bar{v}} f(\bar{x} + \bar{u})|,$$

то, в силу того, что функция $M(x)$ возрастает на $[0, +\infty)$ и удовлетворяет Δ_2 -условию, получаем, что для любого $\bar{v} \in I(\bar{0}, 2^{1-s})$ выполняется неравенство:

$$\begin{aligned} M\left(\frac{\psi(t)}{t} \int_{E_t} |\Delta_{\bar{u}} f(\bar{x})| d\bar{x}\right) &\leq M\left(\frac{\psi(t)}{t} \left(\int_{E_t} |\Delta_{\bar{u}+\bar{v}} f(\bar{x})| d\bar{x} + \int_{E_t} |\Delta_{\bar{v}} f(\bar{x} + \bar{u})| d\bar{x} \right)\right) \leq \\ &\leq C_M \left(M\left(\frac{\psi(t)}{t} \int_{E_t} |\Delta_{\bar{u}+\bar{v}} f(\bar{x})| d\bar{x}\right) + M\left(\frac{\psi(t)}{t} \int_{E_t} |\Delta_{\bar{v}} f(\bar{x} + \bar{u})| d\bar{x}\right) \right). \end{aligned}$$

Затем интегрируем последнее неравенство относительно \bar{v} по кубу $I(\bar{0}, 2^{1-s})$. В первом интеграле в правой части полученного неравенства сделаем замену переменной $\bar{z} = \bar{u} + \bar{v}$, а во втором учитываем то, что мера инвариантна относительно сдвига и функция $f(\bar{t})$ 1-периодическая по каждой переменной. Получим

$$\begin{aligned} &2^{(2-s)N} M\left(\frac{\psi(t)}{t} \int_{E_t} |\Delta_{\bar{u}} f(\bar{x})| d\bar{x}\right) \leq \\ &\leq C_M \int_{I(\bar{0}, 2^{1-s})} M\left(\frac{\psi(t)}{t} \int_{E_t} |\Delta_{\bar{u}+\bar{v}} f(\bar{x})| d\bar{x}\right) d\bar{v} + \\ &+ C_M \int_{I(\bar{0}, 2^{1-s})} M\left(\frac{\psi(t)}{t} \int_{E_t} |\Delta_{\bar{v}} f(\bar{x} + \bar{u})| d\bar{x}\right) d\bar{v} = \\ &= C_M \int_{I(\bar{u}, 2^{1-s})} M\left(\frac{\psi(t)}{t} \int_{E_t} |\Delta_{\bar{z}} f(\bar{x})| d\bar{x}\right) d\bar{z} + \\ &+ C_M \int_{I(\bar{0}, 2^{1-s})} M\left(\frac{\psi(t)}{t} \int_{E_t^{\bar{v}}} |\Delta_{\bar{v}} f(\bar{x})| d\bar{x}\right) d\bar{v}. \end{aligned}$$

Здесь через $E_t^{\bar{u}}$ обозначено множество, полученное из множества E_t сдвигом на вектор \bar{u} . Учитывая, что $I(\bar{u}, 2^{1-s}) \subset I(\bar{0}, 2^{2-s})$, имеем

$$\begin{aligned} & 2^{(2-s)N} M \left(\frac{\psi(t)}{t} \int_{E_t} |\Delta_{\bar{u}} f(\bar{x})| d\bar{x} \right) \leq \\ & \leq C_M \int_{I(\bar{0}, 2^{2-s})} M \left(\frac{\psi(t)}{t} \int_{E_t} |\Delta_{\bar{z}} f(\bar{x})| d\bar{x} \right) d\bar{z} + \\ & + C_M \int_{I(\bar{0}, 2^{2-s})} M \left(\frac{\psi(t)}{t} \int_{E_t^{\bar{v}}} |\Delta_{\bar{v}} f(\bar{x})| d\bar{x} \right) d\bar{v} \leq \\ & \leq C_M \int_{I(\bar{0}, 2^{2-s})} M \left(\frac{\psi(t)}{t} \int_0^t (\Delta_{\bar{z}} f)^*(x) dx \right) d\bar{z}. \end{aligned} \quad (6)$$

Затем, последовательно применяя неравенства (5), (6), меняя порядок интегрирования, переходя к верхней грани по $\bar{z} \in I(\bar{0}, 2^{1-s})$ и, наконец, используя неравенство (4), окончательно получаем

$$\begin{aligned} I(s) & \leq C_{M,N,\gamma} 2^{(s-2)N} \int_{I(\bar{0}, 2^{2-s})} \left(\int_0^1 M \left(\frac{\psi(t)}{t} \int_0^t (\Delta_{\bar{z}} f)^*(x) dx \right) \frac{dt}{t^\gamma} \right) d\bar{z} \leq \\ & \leq C_{M,N,\gamma} \sup_{\bar{z} \in I(\bar{0}, 2^{2-s})} \|\Delta_{\bar{z}} f\|_{M_{\psi,\gamma}}^* \leq C_{M,N,\gamma} \omega_{M_{\psi,\gamma}}^*(f, 2^{-s}) \leq \\ & \leq C_{M,N,\gamma} \omega_{M_{\psi,\gamma}}^*(f, 2^{-s}). \end{aligned}$$

Теорема доказана полностью.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. В настоящей работе в многомерном случае получена оценка равноизмеримых перестановок функций из обобщенных M -пространств Лоренца, аналогичная той, которая имеется в [10] для функции из L_p при $1 \leq p < \infty$, в [11] для функции из пространств Лоренца $\Lambda(\psi, p)$ при $0 < p < \infty$, $\beta_\psi < \infty$.

1. **Bennett C.** Interpolation of Operators [text] / Bennett C., Sharpley R. Academic Press, 1988. – 475 p.
2. **Simonov B. V.** On embedding of certain function classes in symmetric spaces [text] / B. V. Simonov // Analysis Mathematica. – 1986. – V. 12. – P. 3–22.
3. **Kolyada V. I.** Rearrangements of functions and embedding of anisotropic spaces of Sobolev type [text] / V. I. Kolyada // East journal on approximations. – 1998. – V. 4. – № 2. – P. 111–199.
4. **Simonov B. V.** On relations among moduli of continuity in Lorents spaces [text] / B. V. Simonov // Analysis Mathematica. - 2003. – V. 29. – P. 147–164.

5. **Milman M.** Inequalities for moduli of continuity and rearrangements [text] / M. Milman // *Notas de matematica*. – 1977. – № 12. – P. 1–5.
6. **Ульянов П. Л.** Вложение некоторых классов функций H_p^ω [текст] / П. Л. Ульянов // *Известия АН СССР. – Серия математика*. – 1968. – Т. 32. – С. 649–686.
7. **Стороженко Э. А.** Необходимые и достаточные условия для вложения некоторых классов функций [текст] / Э. А. Стороженко // *Известия АН СССР. – Серия математика*. – 1973. – Т. 39. – № 2. – С. 386–398.
8. **Коляда В. И.** О вложении в классы $\varphi(L)$ [текст] / Коляда В. И. // *Известия АН СССР. – Серия математика*. – 1975. – Т. 39. – № 2. – С. 418–437.
9. **Освальд П.** Модули непрерывности равноизмеримых функций и приближение функций алгебраическими многочленами в L^p : Дисс. канд. физ.-мат. наук: спец. 01.01.01 [текст] / П. Освальд. – Одесса, 1978. – 144 с.
10. **Коляда В. И.** Оценки перестановок и теоремы вложения [текст] / В. И. Коляда // *Матем. сборник*. – 1988. – Т. 136. – № 1. – С. 3–23.
11. **Матвиюк Л. В.** Теоремы вложения классов функций с заданными мажорантами модулей непрерывности (наилучших приближений): Дисс. канд. физ.-мат. наук: спец. 01.01.01. [текст] / Л. В. Матвиюк. – Одесса, 1990. – 115 с.
12. **Matviuk L. V.** Approximation of functions from generalized Lorentz M-spaces by Steklov means [text] / L. V. Matviuk // *East journal on approximations*. – 2010. – V. 16. – № 2. – P. 109–122.

УДК 517.94

В. В. Никоненко

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

**АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ
ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ АСИМПТОТИЧЕСКИ
ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПРИ $t \rightarrow +\infty$ КОРНЕЙ
ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**

Никоненко В. В. Асимптотика розв'язків двомірної лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь у випадку асимптотично еквівалентних при $(t \rightarrow +\infty)$ коренів характеристичного рівняння. Лінійна однорідна система (ЛОС) диференціальних рівнянь (1) розглядається у випадку, який є особливим для відомих методів.

Ключові слова: лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь, асимптотика розв'язків, асимптотично еквівалентні $(t \rightarrow +\infty)$ корені характеристичного рівняння.

Никоненко В. В. Асимптотика решений двумерной линейной однородной системы дифференциальных уравнений в случае асимптотически эквивалентных при $(t \rightarrow +\infty)$ корней характеристического уравнения. Линейная однородная система (ЛОС) дифференциальных уравнений (1) рассматривается в случае, который является особым для известных методов.

Ключевые слова: линейные однородные системы дифференциальных уравнений, асимптотика решений, асимптотически эквивалентные $(t \rightarrow +\infty)$ корни характеристического уравнения.

Nikonenko V. V. The asymptotics of the solutions of the two-dimension linear homogeneous system of the differential equations in case where roots of the characteristic equation are asymptotic equivalent $(t \rightarrow +\infty)$. The linear homogeneous system of the differential equations is considered in case which is singular for the known methods.

Key words: linear homogeneous system of the differential equations, asymptotics of the solutions, asymptotic equivalent $(t \rightarrow +\infty)$ roots of the characteristic equation.

ВВЕДЕНИЕ. Асимптотика решений n -мерных $(n \geq 2)$ ЛОС вида

$$\varepsilon(t)Y' = (P_0 + P_1(t))Y, \quad (1)$$

где: аргумент $t \in I = [t_0, +\infty) \subset \mathbb{R}$, скалярная функция $\varepsilon(t)$ и $n \times n$ матрицы P_0 (постоянная матрица), $P_1(t)$ в общем случае комплексные, $\varepsilon(t) \in C(I)$, $\varepsilon(t) \neq 0 (t \in I)$, $\int_{t_0}^{+\infty} |\varepsilon^{-1}(t)| dt = +\infty$, $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$, собственные значения $\lambda_i (i = \overline{1, n})$ матрицы P_0 простые, $P_1(t) = o(1)(t \rightarrow +\infty)$, $P_1(t) \in C^1(I)$, $P_1'(t) \in L_1(I)$ исследована достаточно полно методом теории L -диагональных систем [1], [2].

Случай наличия среди $\lambda_i (i = \overline{1, n})$ кратных корней является особым и изучен недостаточно за исключением случая, когда матрица $P_0 + P_1(t)$ мало отличается от жордановой матрицы с переменными диагональными элементами [1], [3]-[6].

Учитывая сложность изучения указанного особого случая, мы ограничились здесь рассмотрением двумерной системы вида (1), где матрица $P_0 = D^{-1}\Lambda D$, где Λ — Жорданова матрица, D — постоянная 2×2 матрица, $\det D \neq 0$ (такое представление всегда возможно и не уменьшает общности). Матрица Λ может быть треугольной или диагональной. Эти случаи рассматриваются отдельно. Матрица $P_1(t)$ рассматривается в форме $P_1(t) = \alpha(t)B + Q(t)$ (*), где $\alpha(t)$ — скалярная функция, B — постоянная матрица, $\|Q(t)\| = o(|\alpha(t)|)$ (см. далее условия 1)–7)). Представление (*) существенно для изучения решений системы (1), т. к. дает возможность использовать преобразование \mathfrak{Z} (обобщенное срезающее преобразование, такие преобразования мы использовали в [7] в связи с изучением задач другого типа). Срезающие преобразования степенного типа (частный случай) применялись в монографии [8].

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ. Рассматривается двумерная ЛОС вида

$$\varepsilon(t)Y' = (D^{-1}\Lambda D + \alpha(t)B + Q(t))Y, \quad (1)$$

где $t \in I = [t_0, +\infty)$, $Y = (y_1, y_2)^T$, скалярные функции $\varepsilon(t), \alpha(t)$, постоянные матрицы D, Λ, B и матрица $Q(t)$ в общем случае комплексные и выполнены такие условия:

$$1) \varepsilon(t) \in C^1(I), \varepsilon(t) \neq 0 (t \in I), \int_{t_0}^{+\infty} |\varepsilon^{-1}(t)| dt = +\infty;$$

$$2) D(t) = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}, \det D \neq 0, \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & e \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \neq 0, e \in \{1, 0\},$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, |b_{11}| + |b_{12}| + |b_{21}| + |b_{22}| > 0,$$

$$Q(t) = \begin{pmatrix} q_{11}(t) & q_{12}(t) \\ q_{21}(t) & q_{22}(t) \end{pmatrix} \in C(I);$$

$$3) \alpha(t) \in C^1(I), \alpha(t) \neq 0 (t \in I), \alpha(+\infty) = 0, \|Q(t)\| = o(|\alpha(t)|), \text{ где}$$

$$\|Q(t)\| = \max_{i,k} \{ |q_{ik}(t)| (i, k = 1, 2) \};$$

$$4) \exists \text{ конечный или бесконечный предел } \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon \frac{w'}{w^2} = a, \text{ где } w = w(t) = \alpha^{\frac{1}{2}}(t) \text{ (при определенном выборе корня } \alpha^{\frac{1}{2}}(t)).$$

В дальнейшем к условиям 1)-4) добавляются условия 5)-7) (случай 1), 5₁) – 6₁) (случай 2).

1. Случай $e = 1, a \neq \infty$.

С целью приведения системы (1) к L -диагональному виду [1], проделаем над столбцом неизвестных функций Y ряд преобразований.

Преобразование 1: $Y = DZ$, где $Z = (z_1, z_2)^T$ — столбец новых неизвестных функций, приводит систему (1) к системе вида:

$$\varepsilon(t)Z' = (\Lambda + \alpha(t)A + P(t))Z, \quad (2)$$

где

$$A = D^{-1}BD = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in C^{2 \times 2},$$

$$P(t) = D^{-1}Q(t)D = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{pmatrix} \in C(I), \quad \|P(t)\| = o(|\alpha(t)|).$$

Преобразование 2: $Z = \tilde{Y} \exp \int_{t_0}^t \frac{\lambda}{\varepsilon(\tau)} d\tau$, $\tilde{Y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)^T$ — столбец новых неизвестных функций. Тогда вместо (2) получим систему

$$\varepsilon(t)\tilde{Y}' = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha(t)A + P(t) \right) \tilde{Y},$$

которую можно записать в форме

$$\varepsilon(t)\tilde{Y}' = \left(\begin{pmatrix} \alpha(t)a_{11} & 1 + \alpha(t)a_{12} \\ \alpha(t)a_{21} & \alpha(t)a_{22} \end{pmatrix} + P(t) \right) \tilde{Y} = (A_1(t) + P(t))\tilde{Y},$$

где структура матрицы $A_1(t)$ очевидна.

Преобразование 3(срезающее): положим

$$\tilde{y}_1 = \xi_1, \quad \tilde{y}_2 = w(t)\xi_2,$$

где $\xi_i (i = 1, 2)$ — новые неизвестные функции, $w(t) = \alpha^{\frac{1}{2}}(t)$ (см. условие 4)).

Относительно неизвестных $\xi_i (i = 1, 2)$ получим систему

$$\varepsilon(t) \begin{pmatrix} \xi_1' \\ w(t)'\xi_2 + w(t)\xi_2' \end{pmatrix} = (A_1(t) + P(t)) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ w(t)\xi_2 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

которую последовательно преобразуем к виду(4)-(6):

$$\varepsilon \begin{pmatrix} \xi_1' \\ w\xi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11}\xi_1 + w(1 + \alpha a_{12})\xi_2 + p_{11}\xi_1 + p_{12}w\xi_2 \\ \alpha a_{21}\xi_1 + (w\alpha a_{22} - \varepsilon w')\xi_2 + p_{21}\xi_1 + p_{22}w\xi_2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$\varepsilon \begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11}\xi_1 + w(1 + \alpha a_{12})\xi_2 + p_{11}\xi_1 + p_{12}w\xi_2 \\ \frac{\alpha}{w}a_{21}\xi_1 + (\alpha a_{22} - \varepsilon \frac{w'}{w})\xi_2 + \frac{p_{21}}{w}\xi_1 + p_{22}\xi_2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\varepsilon \begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} wa_{11}\xi_1 + (1 + \alpha a_{12})\xi_2 + \frac{p_{11}}{w}\xi_1 + p_{12}\xi_2 \\ a_{21}\xi_1 + (wa_{22} - \varepsilon \frac{w'}{w^2})\xi_2 + \frac{p_{21}}{w^2}\xi_1 + \frac{p_{22}}{w}\xi_2 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

(для краткости записи аргумент t опущен). Очевидно, что в силу указанных в 3) условий:

$$\begin{aligned} wa_{11} &= o(1), \quad \alpha a_{12} = o(1), \quad wa_{22} = o(1), \\ \frac{p_{11}}{w} &= o(1), \quad p_{12} = o(1), \quad \frac{p_{21}}{w^2} = o(1), \quad \frac{p_{22}}{w} = o(1). \end{aligned}$$

Запишем систему (6) в следующей форме:

$$\varepsilon(t)\xi' = w(t)(\tilde{A}_1(t)\xi + \tilde{P}(t)\xi) = w(t)W(t)\xi, \quad (7)$$

где смысл матриц $\widetilde{A}_1(t)$ и $\widetilde{P}(t)$ очевиден. При этом очевидно также, что

$$W(+\infty) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & -a \end{pmatrix}.$$

Собственные значения этой матрицы $\mu_i (i = 1, 2)$ находим, решая уравнение $\mu^2 + a\mu - a_{21} = 0$. Получаем

$$\mu_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a_{21}}.$$

Далее будем предполагать, что выполняется условие

- 5) $\frac{a^2}{4} + a_{21} \neq 0$ (т. е. $\mu_1 \neq \mu_2$);
 6) $W'(t) \in L_1(I)$.

Для выполнения условия 6) достаточно предположить, что выполняется условие

- 6₀) все функции $\alpha', w', \left(\varepsilon \frac{w'}{w^2}\right)', \left(\frac{p_{11}}{w}\right)', (p_{12})', \left(\frac{p_{21}}{w^2}\right)', \left(\frac{p_{22}}{w}\right)'$ принадлежат

классу $L_1(I)$.

Известно, что в случае вещественной функции $f(t) \in C^1(I)$ для выполнения свойства $f'(t) \in L_1(I)$ достаточно, чтобы $f'(t)$ сохраняла знак при больших t в строгом или нестрогом смысле.

Известно также [1], что при выполнении условий 1)-6) систему (7) можно привести к L -диагональному виду, применяя преобразование 4.

Преобразование 4: $\xi = B(t)\tilde{\xi}$, где $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)^T$ — столбец новых неизвестных, $B(t)$ — матрица, столбцами которой являются собственные векторы матрицы $W(t)$, отвечающие собственным значениям этой матрицы $\tilde{\mu}_1(t), \tilde{\mu}_2(t)$, причем очевидно, что $\tilde{\mu}_i(+\infty) = \mu_i (i = 1, 2)$ и $\tilde{\mu}_1(t) \neq \tilde{\mu}_2(t)$, если t_0 достаточно велико. Функции $\tilde{\mu}_i(t) (i = 1, 2)$ являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} wa_{11} + \frac{p_{11}}{w} - \tilde{\mu} & 1 + \alpha a_{12} + p_{12} \\ a_{21} + \frac{p_{21}}{w} & wa_{22} - \varepsilon \frac{w'}{w^2} + \frac{p_{22}}{w} - \tilde{\mu} \end{vmatrix} = 0, \quad (\tilde{\mu})$$

которое равносильно уравнению

$$\tilde{\mu}^2 - \tilde{\mu} \left(wa_{22} - \varepsilon \frac{w'}{w^2} + \frac{p_{22}}{w} + wa_{11} + \frac{p_{11}}{w} \right) - \left(a_{21} + \frac{p_{21}}{w} \right) (1 + \alpha a_{12} + p_{12}) = 0.$$

В силу условий 3), 4) последнее уравнение можно записать в форме:

$$\tilde{\mu}^2 - \tilde{\mu}(-a + o(1)) - (a_{21} + o(1)) = 0 \implies \tilde{\mu}_i(+\infty) = \tilde{\mu}_i (i = 1, 2).$$

Очевидно, что матрицу $B(t)$ можно взять в форме:

$$B(t) = \begin{pmatrix} 1 + \alpha a_{12} + p_{12} & 1 + \alpha a_{12} + p_{12} \\ \tilde{\mu}_1 - wa_{11} - \frac{p_{11}}{w} & \tilde{\mu}_2 - wa_{11} - \frac{p_{11}}{w} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + o_{11}(1) & 1 + o_{12}(1) \\ \mu_1 + o_{21}(1) & \mu_2 + o_{22}(1) \end{pmatrix},$$

где все $o_{ik}(1)$ ($i, k = 1, 2$) — известные функции.

Преобразование 4 дает относительно $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)^T$ систему

$$\varepsilon(t)(B'(t)\tilde{\xi} + B(t)\tilde{\xi}) = w(t)W(t)B(t)\tilde{\xi},$$

которая равносильна системе

$$\tilde{\xi}' = \left(\frac{w(t)}{\varepsilon(t)} B^{-1}(t)W(t)B(t) - B^{-1}(t)B'(t) \right) \tilde{\xi},$$

или, учитывая выбор матрицы $B(t)$, системе

$$\tilde{\xi}' = \left(\begin{pmatrix} v_1(t) & 0 \\ 0 & v_2(t) \end{pmatrix} - B^{-1}(t)B'(t) \right) \tilde{\xi}, \quad (8)$$

где $v_i(t) = \frac{w(t)}{\varepsilon(t)} \tilde{\mu}_i(t)$ ($i = 1, 2$), $B^{-1}(t)B'(t) \in L_1(I)$ в силу условия 6).

Если выполнено также условие

7) $Re \frac{w(t)}{\varepsilon(t)} (\tilde{\mu}_1(t) - \tilde{\mu}_2(t))$ сохраняет знак (≥ 0 или ≤ 0) при больших t , то система (8) является L -диагональной ([1], гл. 1) и допускает ФСР вида

$$\tilde{W}(t) = \begin{pmatrix} e^{\int_{t_0}^t v_1(\tau) d\tau} & e^{\int_{t_0}^t v_2(\tau) d\tau} \\ e^{\int_{t_0}^t v_1(\tau) d\tau} & e^{\int_{t_0}^t v_2(\tau) d\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 + \delta_{11}(t)) & \delta_{12}(t) \\ \delta_{21}(t) & (1 + \delta_{22}(t)) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где $\delta_{ik}(t) = o(1)$ ($t \rightarrow +\infty, i, k = (1, 2)$) и эти функции допускают представление в виде равномерно сходящихся функциональных рядов в некотором промежутке $[t_1, +\infty) \subset I$, причем элементы всех указанных рядов являются бесконечно малыми функциями при $t \rightarrow +\infty$ (более детально асимптотика этих функций не изучается в [1], [2]).

В итоге находим ФСР системы (1) в форме

$$Y(t) = (Y_1(t), Y_2(t)) = D \exp \int_{t_0}^t \frac{\lambda}{\varepsilon(\tau)} d\tau \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & w(t) \end{pmatrix} B(t) \tilde{W}(t), \quad (10)$$

где $Y_i(t)$ ($i = 1, 2$) — линейно независимые решения системы (1). Рассмотрим подробно решения $Y_1(t)$, полагая $\beta_1(t) = \frac{\lambda}{\varepsilon(t)} + v_1(t)$, $u_1(t) = \exp \int_{t_0}^t \beta_1(\tau) d\tau$.

$$\begin{aligned} Y_1(t) &= \\ &= u_1(t) \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & w(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + o_{11} & 1 + o_{12} \\ \mu_1 + o_{21} & \mu_2 + o_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \delta_{11}(t) \\ \delta_{21}(t) \end{pmatrix} = \\ &= u_1(t) \begin{pmatrix} d_{11}(1 + o_{11}) + d_{12}w(\mu_1 + o_{21}) & d_{11}(1 + o_{12}) + d_{12}w(\mu_2 + o_{22}) \\ d_{21}(1 + o_{11}) + d_{22}w(\mu_1 + o_{21}) & d_{21}(1 + o_{12}) + d_{22}w(\mu_2 + o_{22}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cdot \begin{pmatrix} 1 + \delta_{11}(t) \\ \delta_{21}(t) \end{pmatrix} &= u_1(t) \begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \delta_{11}(t) \\ \delta_{21}(t) \end{pmatrix} = \\
&= u_1(t) \begin{pmatrix} g_{11}(t)(1 + \delta_{11}(t)) + g_{12}(t)\delta_{21}(t) \\ g_{21}(t)(1 + \delta_{11}(t)) + g_{22}(t)\delta_{21}(t) \end{pmatrix} = \\
&= \exp \int_{t_0}^t \beta_1(\tau) d\tau \begin{pmatrix} d_{11} + \gamma_{11}(t) \\ d_{21} + \gamma_{21}(t) \end{pmatrix}, \tag{11}
\end{aligned}$$

где смысл функций $g_{ik}(t)$ ($i, k = 1, 2$), введенных для краткости записи, очевиден, эти функции известны, причем $g_{ik}(+\infty) = d_{i1}$ ($i, k = 1, 2$),

$$\gamma_{11}(t) = g_{11}(t)\delta_{11}(t) + g_{12}(t)\delta_{21}(t) - d_{11} = o(1),$$

$$\gamma_{21}(t) = g_{21}(t)\delta_{11}(t) + g_{22}(t)\delta_{21}(t) - d_{21} = o(1).$$

Если $d_{11} \neq 0, d_{21} \neq 0$, то (см. (11)) для $Y_1(t)$ получена точная асимптотика. Аналогичный вывод можно сделать для $Y_2(t)$ если $d_{12} \neq 0, d_{22} \neq 0$. В итоге доказана следующая

Теорема 1. *Если выполнены условия 1)-7), то система (1) имеет два линейно независимых решения вида*

$$Y_1(t) = e^{\int_{t_0}^t \left(\frac{\lambda}{\varepsilon(\tau)} + \frac{w(\tau)}{\varepsilon(\tau)} \tilde{\mu}_1(\tau) \right) d\tau} \begin{pmatrix} d_{11} + o(1) \\ d_{22} + o(1) \end{pmatrix},$$

$$Y_2(t) = e^{\int_{t_0}^t \left(\frac{\lambda}{\varepsilon(\tau)} + \frac{w(\tau)}{\varepsilon(\tau)} \tilde{\mu}_2(\tau) \right) d\tau} \begin{pmatrix} d_{12} + o(1) \\ d_{22} + o(1) \end{pmatrix},$$

где $\tilde{\mu}_i(t)$ ($i = 1, 2$) являются корнями квадратного уравнения ($\tilde{\mu}$), причем $\tilde{\mu}_i(t) = \mu_i + o_i(1)$, ($i = 1, 2$), $\mu_1 \neq \mu_2$; если $d_{11}d_{21}d_{12}d_{22} \neq 0$, то полученные асимптотики являются точными.

Рассмотрим дополнительно тот случай, когда, например, для $Y_1(t)$ точная асимптотика не получена за счет того, что среди постоянных d_{11}, d_{21} есть одна равная нулю (условия $d_{11} = 0, d_{21} = 0$ одновременно выполняться не могут, т. к. $\det D \neq 0$). Пусть, например, $d_{11} = 0, d_{21} \neq 0$. Рассмотрим случай, когда дополнительное исследование несложно проделать. Изучим подробнее L -диагональную систему (8). Матрица $B^{-1}(t)B'(t) \in L_1(I)$ известна и может быть записана следующим образом

$$B^{-1}(t)B'(t) = \begin{pmatrix} \beta_{11}(t) & \beta_{12}(t) \\ \beta_{21}(t) & \beta_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad \beta_{ik}(t) \in L_1(I) \quad (i, k = 1, 2),$$

а система (8) в форме

$$\xi_1' = (v_1(t) + \beta_{11}(t))\xi_1 + \beta_{12}(t)\xi_2, \tag{12_1}$$

$$\xi_2' = \beta_{21}(t)\xi_1 + (v_2(t) + \beta_{22}(t))\xi_2, \tag{12_2}$$

Согласно теории L -диагональных систем ФСР этой системы имеет вид (9). Рассмотрим подробнее 1-е решение (1-й столбец) этой ФСР:

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_1 &= e^{\int_{t_0}^t v_1 d\tau} (1 + \delta_{11}(t)), \\ \tilde{\xi}_2 &= e^{\int_{t_0}^t v_1 d\tau} \delta_{21}(t),\end{aligned}$$

Для $\tilde{\xi}_1(t)$ получена точная асимптотика, что же касается $\tilde{\xi}_2(t)$, то пока известно только свойство $\delta_{21}(t) = o(1)(t \rightarrow +\infty)$. Подставляя выражение $\tilde{\xi}_1(t)$ в уравнение (12₂) и сокращая на $\exp \int_{t_0}^t v_1 d\tau$, можно взять в качестве $\delta_{21}(t)$ частное решение уравнения

$$\delta_{21}(t)' = \beta_{21}(t)(1 + \delta_{11}(t)) + (v_2(t) - v_1(t) + \beta_{22}(t))\delta_{21}$$

в форме

$$\delta_{21} = e^{\int_{t_0}^t (v_2 - v_1 + \beta_{22}) d\tau} \int_A^t (\beta_{21}(\tau)(1 + \delta_{11}(\tau))) e^{\int_{t_0}^{\tau} (v_1 - v_2 - \beta_{22}) d\tau} d\tau, \quad (13)$$

где A выбирается согласно [1] следующим образом

$$A = \begin{cases} t_0, & \text{если } I_0 = \int_{t_0}^{+\infty} \operatorname{Re}(v_2 - v_1) d\tau = -\infty, \\ +\infty, & \text{если } I_0 = +\infty \vee I_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

и при этом $\delta_{21}(t) = o(1)(t \rightarrow +\infty)$.

В случае вещественности всех функций в (13) (тогда $\operatorname{Re}(v_2 - v_1) = v_2 - v_1$) правило Лопиталья позволяет утверждать, что если $\beta_{21}(t) \neq 0$ (t большое) точную асимптотику для $\tilde{\xi}_2$ можно получить, если в (13) положить $\beta_{22}(t) \equiv 0$, $\delta_{11}(t) \equiv 0$. В комплексном случае требуется дополнительное исследование. Этот факт в теории L -диагональных систем обычно не отмечается.

2. Случай $e = 1, a = \infty$.

Запишем систему (5) в виде:

$$\begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\varepsilon} a_{11} \xi_1 + \frac{w}{\varepsilon} (1 + \alpha a_{12}) \xi_2 + \frac{p_{11}}{\varepsilon} \xi_1 + p_{12} \frac{w}{\varepsilon} \xi_2 \\ \frac{w}{\varepsilon} a_{21} \xi_1 + \left(\frac{\alpha}{\varepsilon} a_{22} - \frac{w'}{w} \right) \xi_2 + \frac{p_{21}}{w\varepsilon} \xi_1 + \frac{p_{22}}{\varepsilon} \xi_2 \end{pmatrix}, \quad (5_1)$$

Поскольку $\left| \frac{p_{11}}{\varepsilon} \right| = o\left(\left| \frac{\alpha}{\varepsilon} \right|\right) = o\left(\left| \frac{w}{\varepsilon} \right|\right)$, $\left| p_{12} \frac{w}{\varepsilon} \right| = o\left(\left| \alpha \frac{w}{\varepsilon} \right|\right) = o\left(\left| \frac{w}{\varepsilon} \right|\right)$, $\left| \frac{p_{21}}{w\varepsilon} \right| = o\left(\left| \frac{\alpha}{\varepsilon} \right|\right) = o\left(\left| \frac{w}{\varepsilon} \right|\right)$, $\left| \frac{p_{22}}{\varepsilon} \right| = o\left(\left| \frac{\alpha}{\varepsilon} \right|\right) = o\left(\left| \frac{w}{\varepsilon} \right|\right)$, то система (5₁) является L -диагональной, если выполнены условия:

$$5_1) \left| \frac{w}{\varepsilon} \right| = \left| \frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon} \right| \in L_1(I);$$

6₁) $Re \frac{w'}{w}$ сохраняет знак в I (t_0 достаточно велико) хотя бы в нестрогом смысле.

В итоге справедлива следующая

Теорема 2. Если система (1) удовлетворяет условиям 1)-4), 5₁), 6₁) и $a = \infty$, то система (1) с помощью преобразования

$$Y = D \exp \int_{t_0}^t \frac{\lambda}{\varepsilon(\tau)} d\tau \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

приводится к L -диагональной системе (5₁), которая допускает ФСР вида:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + o_{11}(1) & e^{-\int_{t_0}^t \frac{w'}{w} d\tau} o_{12}(1) \\ o_{21}(1) & e^{-\int_{t_0}^t \frac{w'}{w} d\tau} (1 + o_{22}(1)) \end{pmatrix},$$

где функции $o_{ik}(1)$ ($i, k = 1, 2$) допускают представление в виде равномерно сходящихся в некотором промежутке $[t_1, +\infty) \subset I$ функциональных рядов, элементы которых являются бесконечно малыми функциями при $t \rightarrow +\infty$.

В случае вещественной системы (1) для функций $o_{21}(1), o_{12}(1)$ можно получить точную асимптотику.

Дополним изложенное анализом условия 4) в случае степенных вещественных функций ε и α , удовлетворяющих условиям 1)-3):

$$\varepsilon = t^p, \quad p < 1, \quad \alpha = \frac{1}{t^q} \quad (q > 0), \quad w = \sqrt{\alpha} = t^{-\frac{q}{2}},$$

$$w^{-1} = t^{\frac{q}{2}}, \quad -\frac{w'}{w^2} = \frac{q}{2} t^{\frac{q}{2}-1}, \quad \varepsilon \frac{w'}{w^2} = -\frac{q}{2} t^{p+\frac{q}{2}-1}.$$

Случай $a \in \mathbb{R}$ выполняется, если $p + \frac{q}{2} - 1 \leq 0$, т. е. $0 < q \leq 2(1-p)$. Поэтому ясно, что существенная малость функции $\alpha(t)$ не требуется, в отличие от известных работ. Условие $a = \infty$ получается в случае $q > 2(1-p)$, т. е. условие 5₁) в случае степенных функций имеет вид $\frac{w}{\varepsilon} = \frac{1}{t^{\frac{q}{2}tp}} \in L_1(I)$, оно выполняется, если $\frac{q}{2} + p > 1$, т. е. $q > 2(1-p)$.

Таким образом случай 2 естественно дополняет случай 1.

Замечание 1. Случай $e = 0$ в статье не рассматривается, поскольку в этом случае система (1) приводится к виду, аналогичному (1) с заменой $\varepsilon(t)$ на функцию $\frac{\varepsilon(t)}{\alpha(t)}$, и дальнейшее исследование можно проделать, применяя изложенные выше результаты, если $\int_{t_0}^{\infty} \left| \frac{\alpha}{\varepsilon} \right| d\tau = \infty$. Случай $\int_{t_0}^{\infty} \left| \frac{\alpha}{\varepsilon} \right| d\tau < +\infty$ тривиален.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Настоящая работа открывает возможность для дальнейших исследований в данном направлении (случай систем размерности больше 2, случай нескольких асимптотически эквивалентных корней характеристического уравнения и т. д.).

1. **Рапопорт И. М.** О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений [текст] / И. М. Рапопорт. – Киев: Изд-во АН УССР, 1954. – 289 с.
2. **Федорюк М. В.** Асимптотические методы в теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений [текст] / М. В. Федорюк. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
3. **Devinantz A.** *Pasif. I. Math.* [text] / A. Devinantz. – 1965. – V. 18. – P. 75–89.
4. **Chiba K.** *Comm. Math. Univ. St. Paul* [text] / K. Chiba, T. Kimura. – 1970. – V. 18. – P. 62–80.
5. **Devinantz A.** *Indiana Univ. Math. J.* [text] / A. Devinantz, J. I. Kaplan. – 1972. – V. 22. – № 4. – P. 355–366.
6. **Евтухов В. М.** Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений в случае квазитордановой нормальной формы главной матрицы коэффициентов [текст] / В. М. Евтухов // ДАН СССР, 1990. – Т. 314. – № 2. – С. 279–283.
7. **Никоненко В. В.** Об асимптотическом представлении решений квазилинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Диссертация на соиск. уч. степени кан. физ.-мат. наук [текст] / В. В. Никоненко. – Тбилиси, 1988. – 169 с.
8. **Вазов В.** Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений [текст] / В. Вазов. – М.: Мир, 1968. – 464 с.

УДК 511.3

О. В. Савастру

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ЦЕЛЫЕ ГАУССОВЫЕ ЧИСЛА С ДЕЛИТЕЛЯМИ В УЗКИХ СЕКТОРАХ

Савастру О. В. Цілі гаусові числа з дільниками у вузьких секторах. Нехай A_1 та A_2 — це задані множини цілих гаусових чисел. Через $\tau_{A_1, A_2}(\omega)$ позначимо кількість уявлень ω у вигляді $\omega = \alpha\beta$, де $\alpha \in A_1, \beta \in A_2$. Побудована асимптотична формула для суматорної функції, яка відповідає функції $\tau_{A_1, A_2}(\omega)$, у випадку, коли $A_2 = \mathbb{Z}[i]$, A_1 — сектор розтвору φ у комплексній площині.

Ключові слова: гаусові числа, проблема дільників, асимптотична формула, функціональне рівняння.

Савастру О. В. Целые гауссовы числа с делителями в узких секторах. Пусть A_1 и A_2 — заданные множества целых гауссовых чисел. Обозначим через $\tau_{A_1, A_2}(\omega)$ — количество представлений ω в форме $\omega = \alpha\beta$, где $\alpha \in A_1, \beta \in A_2$. Построена асимптотическая формула для суматорной функции, соответствующей $\tau_{A_1, A_2}(\omega)$ в случае, когда $A_2 = \mathbb{Z}[i]$, A_1 — сектор раствора φ в комплексной плоскости.

Ключевые слова: гауссовы числа, проблема делителей, асимптотическая формула, функциональное уравнение.

Savastru O. V. Gaussian integers with divisors in narrow sectors. Let A_1 and A_2 be fixed sets of gaussian integers. $\tau_{A_1, A_2}(\omega)$ is the number of representations of ω in form $\omega = \alpha\beta$, where $\alpha \in A_1, \beta \in A_2$. We construct the asymptotic formula for summatory function for function $\tau_{A_1, A_2}(\omega)$ in case, when $A_2 = \mathbb{Z}[i]$, A_1 — fixed sector of complex plane.

Key words: gaussian numbers, divisor problem, asymptotic formula, functional equation.

ВВЕДЕНИЕ. Пусть A_1 и A_2 — два множества натуральных чисел. Обозначим через $\tau_{A_1, A_2}(n)$ — количество представлений натурального n в форме $n = m_1 m_2$, где $m_1 \in A_1, m_2 \in A_2$. Для исследования среднего порядка $\tau_{A_1, A_2}(n)$ обычно рассматривают сумматорную функцию

$$\sum_{n \leq x} \tau_{A_1, A_2}(n).$$

Для $A_1 = A_2 = \mathbb{N}$ мы получаем классическую задачу Дирихле о числе целых точек (u, v) под гиперболой $uv \leq x$, $u, v \geq 1$. Исторический обзор результатов по проблеме делителей Дирихле можно найти в монографии Е. Krätzel [5]. Наилучший результат к настоящему времени получен в работе [4]

$$\sum_{n \leq x} \tau_{\mathbb{N}, \mathbb{N}}(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + O(x^{\frac{131}{416}} (\log x)^{\frac{26947}{8320}}).$$

В работах [8], [6], [10], [9], [7] множества A_1, A_2 заменялись подмножествами из \mathbb{N} .

Вполне естественно изучать функцию $\tau_{A_1, A_2}(\omega)$ над кольцом целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i]$, где

$$A_1 = \mathbb{Z}[i], \quad A_2 = \{\alpha \in \mathbb{Z}[i] : \alpha \equiv \alpha_0 \pmod{\gamma}\}, \quad (\alpha_0, \gamma \in \mathbb{Z}[i]).$$

В работе [10] найдена асимптотическая формула для сумматорной функции

$$\sum_{\substack{\omega = \alpha\beta \\ \alpha \equiv \alpha_0 \pmod{\gamma} \\ N(\alpha\beta) \leq x}} 1 = \frac{\pi^2 x \log x}{N(\gamma)} + c(\alpha_0, \gamma) \frac{x}{N(\gamma)} + O\left(\left(\frac{x}{N(\gamma)}\right)^{\frac{1}{2} + \epsilon}\right) + \\ + O\left(\left(\frac{x}{N(\alpha_1)}\right)^\theta\right) + O(x^\epsilon),$$

где $\theta < \frac{1}{3}$, α_1 — число вида $\alpha_0 + \beta\gamma$, $\beta \in \{0, \pm 1, \pm i\}$ с наименьшей нормой, $c(\alpha_0, \gamma)$ — функция, ограниченная абсолютной константой.

Целью настоящей работы является построение асимптотической формулы для среднего значения $\tau_{A_1, A_2}(\omega)$ для случая $A_2 = \mathbb{Z}[i]$, $A_1 = S$ — сектор раствора φ :

$$S(\varphi) = S := \{\alpha \in \mathbb{Z}[i] : \varphi_1 < \arg \alpha \leq \varphi_2, \varphi = \varphi_2 - \varphi_1\}.$$

Для удобства мы в этом случае пишем $\tau_s(\omega)$ вместо $\tau_{A_1, A_2}(\omega)$.

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения:

$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ — кольцо целых гауссовых чисел;

$N(\alpha) = |\alpha|^2$ — норма $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$;

$\zeta(s)$ — дзета-функция Римана;

$L(s, \chi_4)$ — L -функция Дирихле с неглавным характером модуля 4;

$s = \sigma + it \in \mathbb{C}$, $\sigma = \Re s$, $t = \Im s$;

$e_q(z) := e^{2\pi i \frac{z}{q}}$, $\exp(x) := e^x$;

символ Виноградова " \ll " означает то же, что и символ Ландау " O ".

Приведем ряд вспомогательных утверждений.

Каждое ненулевое гауссовое число имеет ассоциированное с ним в каждой четверти комплексной плоскости. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq \frac{\pi}{2}$.

Пусть $\chi(\varphi)$ — характеристическая функция сектора S . Воспользуемся следующей леммой о "стаканчиках" Виноградова.

Лемма 1. [1] Пусть r — неотрицательное целое число, $\Omega > 0$, $0 < \Delta < \frac{1}{2}\Omega$, φ_1, φ_2 — вещественные числа, $\Delta \leq \varphi_2 - \varphi_1 \leq \Omega - 2\Delta$. Существует периодическая функция $f(\varphi) = f(\varphi; \varphi_1, \varphi_2)$ с периодом Ω , такая, что

- (i) $f(\varphi) = 1$ в промежутке $[\varphi_1, \varphi_2]$;
 $0 \leq f(\varphi) \leq 1$ в промежутках $[\varphi_1 - \Delta, \varphi_1]$, $[\varphi_2, \varphi_2 + \Delta]$;
 $f(\varphi) = 0$ в промежутке $[\varphi_2 + \Delta, \varphi_2 + \Omega - \Delta]$;

- (ii) $f(\varphi)$ разлагается в ряд Фурье вида

$$f(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \exp\left(2\pi i \frac{m\varphi}{\Omega}\right),$$

где $a_0 = \frac{1}{\Omega}(\varphi_2 - \varphi_1 + \Delta)$,

$$|a_m| \leq \begin{cases} \Omega^{-1}(\varphi_2 - \varphi_1 + \Delta), \\ 2(\pi|m|)^{-1}, \\ 2(\pi|m|)^{-1}(r\Omega(\pi|m|\Delta)^{-1})^r. \end{cases}$$

Следствие. Существуют числа θ_i , $|\theta_i| \leq 1$, $i = 1, 2$, такие что

$$\chi(\varphi) = f(\varphi; \varphi_1, \varphi_2) + \theta_1 f(\varphi; \varphi_1 - \Delta, \varphi_1) + \theta_2 f(\varphi; \varphi_2, \varphi_2 + \Delta). \quad (1)$$

Пусть $\delta, \delta_0 \in \mathbb{Q}[i]$, $m \in \mathbb{Z}$. В области $\Re s > 1$ определим функцию

$$Z_m(s; \delta, \delta_0) = \sum_{\substack{\omega \in \mathbb{Z}[i] \\ \omega \neq -\delta}} \frac{\exp(4mi \arg(\omega + \delta))}{N(\omega + \delta)} \exp(2\pi i \Re(\delta_0 \omega)). \quad (2)$$

Эту функцию мы называем Z -функцией Гекке со сдвигом [3]. $Z_m(s; \delta, \delta_0)$ допускает аналитическое продолжение во всю комплексную s -плоскость.

Лемма 2. [3] $Z_m(s; \delta, \delta_0)$ является целой функцией, если $m \neq 0$ и $\delta_0 \notin \mathbb{Z}[i]$. В случае $m = 0$ и $\delta_0 \in \mathbb{Z}[i]$ Z -функция Гекке $Z_0(s; \delta, \delta_0)$ аналитична во всей s -плоскости, кроме точки $s = 1$, где она имеет простой полюс с вычетом 1. Кроме того, для всех m, δ, δ_0 справедливо функциональное уравнение

$$\begin{aligned} & \pi^{-s} \Gamma(2|m| + s) Z_m(s; \delta, \delta_0) = \\ & = \pi^{-(1-s)} \Gamma(2|m| + 1 - s) Z_m(1 - s; -\overline{\delta_0}, \delta) \exp(-2\pi i \Re(\delta_0 \delta)). \end{aligned} \quad (3)$$

Из формулы Стирлинга для гамма-функции $\Gamma(s)$ до членов второго порядка $O(t^{-2})$ имеем для $|t| > 1$, $\sigma > 0$

$$\begin{aligned} & \Gamma(\sigma + it) = \sqrt{2\pi} t^{\sigma - \frac{1}{2}} \times \\ & \times \exp\left(i\left(t \log t - t + \frac{\pi}{2}\left(\sigma - \frac{1}{2}\right) + \left(\sigma - \sigma^2 - \frac{1}{6}\right)(2t)^{-1} + O(t^{-2})\right)\right) \exp\left(-\frac{\pi|t|}{2}\right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(2|m|+1-s)}{\Gamma(2|m|+s)} = \exp\left(it\left(2 - \log(4m^2 + t^2) + \frac{|2m|+1}{4m^2+t^2} + \frac{(2|m|+1)^2}{(4m^2+t^2)^2}\right)\right) \times \\ & \times \frac{1}{2}(4m^2 + t^2)^{1-2\sigma} \exp\left(\sigma - \frac{1}{2} + \frac{t^2}{16}(4m^2 + 2|m| + t^2)^{-1}\right) \times \\ & \times \left(1 + O(m^2 + t^2)^{-\frac{1}{2}}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Из определения (2) ясно, что можно считать, что $0 < N(\delta)$, $N(\delta_0) \leq 1$.

Пусть $\mathfrak{B} := \{0, \pm 1, \pm i\}$. Применение оценки для $|t| \geq 2$, $\sigma = 1$

$$Z_m^*(s; \delta, \delta_0) := Z_m(s; \delta, \delta_0) - \sum_{\omega \in \mathfrak{B}} \frac{e^{4mi \arg(\omega + \delta)}}{N(\omega + \delta)^s} e^{2\pi i \Re(\delta_0 \omega)} \ll \log^4(t^2 + m^2), \quad (5)$$

а также функционального уравнения (3), соотношения (4) и принципа Фрагмена-Линделефа в полосе $-1 \leq \Re(s) \leq 1$ дает

$$Z_m^*(s; \delta, \delta_0) \ll (m^2 + t^2)^{\frac{1-\sigma}{2}} (\log(m^2 + t^2))^{\frac{1-\sigma}{2}}. \quad (|m| \geq 1) \quad (6)$$

Лемма 3. При $x \rightarrow \infty$ имеем

$$T(x) = \sum_{N(\omega) \leq x} \tau(\omega) = \pi^2 x \log x + \pi x(8L'(1, \chi_4) + 2\gamma\pi - \pi) + O(x^{\frac{1}{2}} \log^4 x).$$

Доказательство. Поскольку для $\Re s > 1$

$$\sum_{\omega} \frac{\tau(\omega)}{N(\omega)^s} = Z_0^2(s; 0, 0) = (4\zeta(s)L(s, \chi_4))^2,$$

то применение формулы Перрона для рядов Дирихле с последующим переносом контура интегрирования на половинную прямую сразу дает утверждение леммы.

Лемма 4. Для функции $Z_m^*(s; \delta, \delta_0)$, определенной в (5) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{|m| \leq M} |Z_m^*(\frac{1}{2} + it; \delta, \delta_0)|^2 &\ll (M + |t|) \log^5(M + |t|), \\ \int_{-T}^T |Z_m^*(\frac{1}{2} + it; \delta, \delta_0)|^2 dt &\ll (T + |m|) \log^5(T + |m|), \end{aligned}$$

если $M + |t| \geq 4$.

Это утверждение доказывается аналогично лемме 10 из [2]. Теперь мы в состоянии доказать основные результаты.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ. Пусть $S(\varphi)$ — сектор раствора φ

$$S(\varphi) = \{\omega \in \mathbb{Z}[i] : \varphi_1 < \arg \omega \leq \varphi_2, \varphi = \varphi_2 - \varphi_1\}.$$

Мы имеем, в силу (1),

$$\begin{aligned} T(x, S) &= \sum_{N(\omega) \leq x} \tau_s(\omega) = \\ &= \sum_{N(\omega) \leq x} \sum_{\alpha | \omega} \chi_s(\arg \alpha) = \sum_{\substack{\omega = \alpha\beta \\ N(\alpha\beta) \leq x}} (f(\arg \alpha; \varphi_1, \varphi_2) + \theta_1 f(\arg \alpha; \varphi_1 - \Delta, \varphi_1) + \\ &\quad + \theta_2 f(\arg \alpha; \varphi_2, \varphi_2 + \Delta)) := \sum_0 + \theta_1 \sum_1 + \theta_2 \sum_2, \end{aligned} \quad (7)$$

где f — функция из леммы 1, ассоциированная, соответственно, с отрезками $[\varphi_1, \varphi_2]$, $[\varphi_1 - \Delta, \varphi_1]$, $[\varphi_2, \varphi_2 + \Delta]$.

Суммы \sum_0, \sum_1, \sum_2 исследуются одинаково, поэтому рассмотрим сумму \sum_0 . Мы имеем (по лемме 1):

$$\sum_0 = a_0 \sum_{N(\alpha\beta) \leq x} 1 + \sum_{|m| \geq 1} a_m \sum_{N(\alpha\beta) \leq x} e^{4mi \arg \alpha}, \quad (8)$$

где $a_0 = \frac{1}{\Omega}(\varphi_2 - \varphi_1 + \Delta)$, $\Omega = 2\pi$, значение Δ выберем позже. Ясно, что

$$\sum_{N(\alpha\beta) \leq x} 1 = \sum_{N(\omega) \leq x} \tau(\omega) = T(x). \quad (9)$$

Далее, мы имеем при $\Re s > 1$

$$Z_m(s; 0, 0)Z_0(s; 0, 0) := Z_m(s)Z_0(s) = \sum_{\omega} \frac{c_m(\omega)}{N(\omega)^s},$$

где $c_m(\omega) = \sum_{\alpha\beta=\omega} e^{4mi \arg \alpha}$.

Следовательно, для $c > 1$, $T > 1$ по формуле Перрона получаем

$$\sum_{N(\alpha\beta) \leq x} e^{4mi \arg \alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} Z_m(s)Z_0(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^c}{T(c-1)}\right), \quad |m| \geq 1. \quad (10)$$

Заметим, что лемма 1 с $r = 1$ дает

$$\left| \sum_{|m| \geq 1} a_m \cdot O\left(\frac{x^c}{T(c-1)}\right) \right| = \left(\sum_{1 \leq |m| \leq \Delta^{-1}} |a_m| + \sum_{|m| > \Delta^{-1}} |a_m| \right) \cdot O\left(\frac{x^c}{T(c-1)}\right) \ll \frac{x^c}{T(c-1)} \log(\Delta^{-1}). \quad (11)$$

Далее, в силу оценки (6), имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} Z_m(s)Z_0(s) \frac{x^s}{s} ds = \operatorname{res}_{s=1} (Z_m(s)Z_0(s) \frac{x^s}{s}) + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} Z_m(s)Z_0(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^c}{T}\right) + O\left((|m|+T)^{\frac{1}{2}} T^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}\right) = \\ & = \pi x Z_m(1) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+it} Z_m(s)Z_0(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left((|m|+T)^{\frac{1}{2}} T^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}\right) + O\left(\frac{x^c}{T}\right). \end{aligned} \quad (12)$$

Из (6) видно, что $Z_m(1) \ll \log(|m|+3)$. Поэтому абсолютно сходится ряд

$$\sum_{|m| \geq 1} a_m Z_m(1). \quad (13)$$

Осталось рассмотреть ряд

$$S := \sum_{|m| \geq 1} a_m \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} Z_m(s)Z_0(s) \frac{x^s}{s} ds. \quad (14)$$

Пусть $M \geq T$. По неравенству Коши и лемме 4 имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{|m| \leq M} |a_m| \cdot \int_1^T |Z_m(s)| \cdot |Z_0(s)| \frac{x^{\frac{1}{2}}}{t} dt \ll \sum_{|m| \leq T} + \sum_{T < |m| \leq M} \ll \\ & \ll x^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{|m| \leq T} |a_m| \cdot \sum_{|m| \leq T} \left(|a_m|^{\frac{1}{2}} \cdot \int_1^T |Z_m(s)| \cdot |Z_0(s)| \frac{dt}{t} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ & + x^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T < |m| \leq M} |a_m| \cdot \sum_{T < |m| \leq M} \left(|a_m|^{\frac{1}{2}} \cdot \int_1^T |Z_m(s)| \cdot |Z_0(s)| \frac{dt}{t} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь для $|m| \leq T$ мы применяем оценку $|a_m|$ из леммы 1 с $r = 0$, а при $T < |m| \leq M$ с $r = 1$. Получаем

$$\begin{aligned}
 |S| &\ll x^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{|m| \leq T} \frac{1}{|m|} \cdot \sum_{|m| \leq T} \frac{1}{|m|} \cdot \int_1^T |Z_m(\frac{1}{2} + it)|^2 \frac{dt}{t} \cdot \int_1^T |Z_0(\frac{1}{2} + it)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} + \\
 &+ x^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T < |m| \leq M} \frac{\Delta^{-1}}{m^2} \cdot \sum_{T < |m| \leq M} \frac{\Delta^{-1}}{m^2} \cdot \int_1^T |Z_m(\frac{1}{2} + it)|^2 \frac{dt}{t} \cdot \int_1^T |Z_0(\frac{1}{2} + it)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \ll \\
 &\ll x^{\frac{1}{2}} \log^7 T + x^{\frac{1}{2}} (\Delta^{-1})^2 \cdot \frac{1}{T^2} \log M \log^7 M \ll x^{\frac{1}{2}} (\log^7 T + \frac{\log^8 M}{T \Delta}).
 \end{aligned} \tag{16}$$

Для $m \geq M$ применяем лемму 1 (с $r = 1$) и лемму 4:

$$\begin{aligned}
 &\left| \sum_{|m| \geq M} a_m \cdot \int_1^T Z_m(\frac{1}{2} + it) \cdot Z_0(\frac{1}{2} + it) \frac{x^{\frac{1}{2} + it}}{\frac{1}{2} + it} dt \right| \ll \\
 &\ll \sum_{|m| \geq M} |a_m| \left(\int_1^T |Z_m(\frac{1}{2} + it)|^2 \frac{dt}{t} \cdot \int_1^T |Z_0(\frac{1}{2} + it)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \ll \\
 &\ll \sum_{|m| \geq M} \frac{\Delta^{-1}}{m^2} \left(\frac{|m|}{T} \cdot \log^{12} M \right)^{\frac{1}{2}} \ll \Delta^{-1} M^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} T^{-\frac{1}{2}} \log^6 M.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Положим $\Delta^{-1} = T = M$.

Поэтому из соотношений (14)–(17) следует

$$S \ll x^{\frac{1}{2}} \log^8 T. \tag{18}$$

Таким образом, полагая $T = x^{\frac{1}{2}}$, $c = 1 + \frac{1}{\log x}$

$$\begin{aligned}
 \sum_0 &= \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi} T(x) + \pi x \sum_{|m| \geq 1} a_m Z_m(1) + O(x^{\frac{1}{2}} \log^8 x) = \\
 &= \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi} (\pi^2 x \log x + \pi x (8L'(1, \chi_4) + 2\pi\gamma - \pi) + O(x^{\frac{1}{2}} \log^4 x)) + \\
 &\quad + (\varphi_2 - \varphi_1) x A_0(\varphi_2 - \varphi_1, \Delta) + O(x^{\frac{1}{2}} \log^8 x),
 \end{aligned} \tag{19}$$

где $A_0(\varphi_2 - \varphi_1, \Delta) = A_0(\varphi) + O(\Delta)$ ограничена при $\varphi_2 - \varphi_1 \rightarrow 0$ и $\Delta \rightarrow 0$.

Аналогичные представления имеют и суммы \sum_1, \sum_2 , но вместо $\varphi_2 - \varphi_1$ надо писать Δ . Выражение для $A_0(\varphi)$ можно получить, используя доказательство И. М. Виноградова приведенной выше леммы 1 для случая $r = 1$. Собирая вместе соотношения (7), (8), (19), мы приходим к теореме

Теорема. Пусть $S(\varphi)$ – сектор раствора $\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi$. Тогда

$$\begin{aligned}
 T(x, S(\varphi)) &= \sum_{N(\omega) \leq x} \tau_s(\omega) = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} (\pi x \log x + x (8L'(1, \chi_4) + 2\pi\gamma - \pi) + \\
 &\quad + A_0(\varphi)) + O(x^{\frac{1}{2}} \log^8 x).
 \end{aligned}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Схема доказательства теоремы позволяет получить асимптотическую формулу для сумматорной функции для $\tau_s(\omega)$, когда ω пробегает арифметическую прогрессию $\omega \equiv \omega_0 \pmod{\gamma}$.

1. **Виноградов И. М.** Избранные труды [текст] / Виноградов И. М. – М.: Изд. АН СССР, 1952. – 436 с.
2. **Colleman M. D.** The Rosser-Iwaniec sieve in numbr fields [text] / Coleman M. D. // Acta Arith. – V. 65. – 1993. – P. 53–83.
3. **Hecke E.** Eine neue Art von Zetafunctionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen, I, II [text] / Hecke E. // Math. Zeitsehr. – V. 1, 1918. – P. 357–376. – V. 6, 1920. – P. 11–51.
4. **Huxley M. N.** Exponential sums and lattice points III [text] / Huxley M. N. // Proc. London Math. Soc. – V. 87, 2003. – P. 591–609.
5. **Krätzel E.** Lattice points [text] / Krätzel E. – Kluwer Acad. Publ., Dordrecht-Boston-London, 1988.
6. **Nowak W. G.** On a result of Smith and Subbarao concerning a divisor problem [text] / W. G. Nowak // Can. Math. Bull. – V. 27, 1984. – P. 501–504.
7. **Nowak W. G.** Divisor problems in special sets of positive integers [text] / W. G. Nowak // Acta Arith. Univ. Comeniana. – V. 61, 1992). – P. 101–115.
8. **Smith R. A.** The average number of divisors in an arithmetic progression [text] / R. A. Smith, M. V. Subbarao // Can. Math. Bull. – V. 24, 1981. – P. 37–41.
9. **Varbanec P. D.** On the distribution of natural numbers in arithmetic progressions [text] / Varbanec P. D. // Acta Arith. – V. 57, 1991. – P. 245–256.
10. **Varbanec P. D.** Divisors of the Gaussian Integers in an Arithmetic Progression [text] / Varbanec P. D., Zarzycki P. // J. Number Theory. – V. 33, 1990. – P. 152–169.

УДК 511.11, 512.562

О. В. Синявский, В. Г. Ткаченко

Одесская национальная академия связи имени А. С. Попова

РЕКУРСИВНОЕ ПОСТРОЕНИЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ НА ОСНОВЕ ТИПОВ МОНОТОННЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Синявський О. В., Ткаченко В. Г. Рекурсивна побудова натуральних чисел на основі типів монотонних булевих функцій. У статті розглянуто рекурсивну побудову класів натуральних чисел. Введено поняття рангу числа, найбільших кратних кожного рангу, зсув-добуток допустимих пар чисел одного рангу. Оцінено кількість найбільших кратних чисел кожного рангу.

Ключові слова: класи натуральних чисел, монотонні булеві функції, типи монотонних булевих функцій, булевий куб, операція зсув-суми, дерево розкладання типів МБФ.

Синявский О. В., Ткаченко В. Г. Рекурсивное построение натуральных чисел на основе типов монотонных булевых функций. В статье рассмотрено рекурсивное построение классов натуральных чисел. Введено понятие ранга числа, наибольших кратных каждого ранга, сдвиг-произведение допустимых пар чисел одного ранга. Оценено количество наибольших кратных чисел каждого ранга.

Ключевые слова: классы натуральных чисел, монотонные булевы функции, типы монотонных булевых функций, булев куб, операция сдвиг-суммы, дерево разложения типов МБФ.

Sinyavsky O. V., Tkachenko V. G. Recursive construction of natural numbers based on types monotonous boolean functions. The article considers the construction of a recursive class of natural numbers. Introduced the concept of rank number, the largest multiple of every rank, shift-product of numbers of admissible pairs of the same rank. Estimated number of the largest multiples of each rank.

Key words: classes of natural numbers, monotonous Boolean function, types of monotonous Boolean functions, a Boolean cube, operation of shift-sum, tree of decomposition of types of MBF.

ВВЕДЕНИЕ. В теории чисел актуальными являются проблемы исследования распределения чисел. Исследуемое в работе построение натуральных чисел удобно применить для решения таких проблем.

В литературе известно теоретико-множественное построение Фреге-Рассела, а также аксиомы Пеано.

Однако в литературе не описано разбиение на классы натуральных чисел, при котором на каждом этапе получаем некоторое конечное множество натуральных чисел, в каждом из которых содержится одно простое, причём разбиение на классы зависит от выбранного порядка простых чисел.

Целью данной статьи является рекурсивное построение натуральных чисел на основе типов монотонных булевых функций (МБФ).

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.**1. Основные понятия.**

Вектор $\tilde{a} = (a_n, \dots, a_i, \dots, a_1)$, компоненты которого принимают значения из множества $\{0, 1\}$, будем называть входным набором булевой функции от n переменных. Множество всех таких входных наборов будем называть булевым кубом [1] ранга n . Сами входные наборы \tilde{a} назовём вершинами булева куба. Любую булеву функцию можем определить множеством входных наборов булева куба, на которых эта функция равна единицы. Расстоянием Хемминга [1] между двумя входными наборами \tilde{a} и \tilde{b} называется число $\rho(\tilde{a}, \tilde{b})$, равное количеству компонент, в которых они различаются. Вершины \tilde{a} и \tilde{b} называются соседними, если расстояние Хемминга $\rho(\tilde{a}, \tilde{b}) = 1$. Пару соседних вершин назовём ребром куба. Последовательность вершин куба $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_k$ называется цепью [1], если $\rho(\tilde{a}_i, \tilde{a}_{i+1}) = 1, i = \overline{1, k-1}$. Говорят, что вершина \tilde{a} предшествует вершине \tilde{b} ($\tilde{a} \leq \tilde{b}$), если для их компонент выполнено $a_i \leq b_i, i = \overline{1, n}$. Если \tilde{a} не предшествует \tilde{b} и \tilde{b} не предшествует \tilde{a} , то вершины \tilde{a} и \tilde{b} несравнимы. Любое множество несравнимых вершин булева куба [1] называется антицепью. Антицепь называется максимальной, если любая вершина булева куба сравнима с одной из вершин этой антицепи. Слоем булева куба назовём множество входных наборов с одинаковым количеством единиц. Примеры булевых кубов представлены на рис. 1.

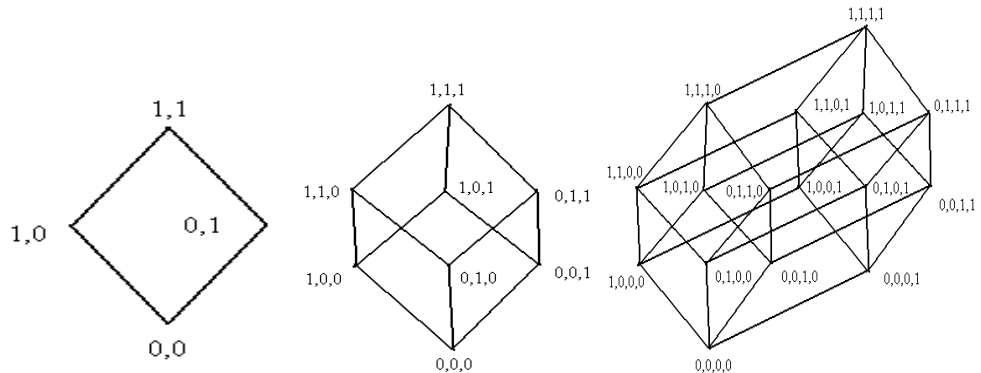


Рис. 1. Булевы кубы размерности 2, 3, 4.

В булевом кубе ранга n можно выделить n пар непересекающихся кубов ранга $n-1$. Для этого достаточно выбрать любую компоненту входного набора и определить нижний куб всеми входными наборами, где эта компонента равна 0, а верхний куб наборами, где она равна 1.

Рассмотрим один из способов описания МБФ [2] в виде минимальных входных наборов или соответствующего семейства подмножеств Шпернера. (Любое семейство подмножеств некоторого множества называется семейством подмножеств Шпернера, если ни одно из подмножеств семейства не содержится ни в каком другом подмножестве этого же семейства.) При этом если берется МБФ от n переменных, то произвольное подмножество семейства подмножеств Шпернера может содержать от 0 до n элементов. Семейство подмножеств Шпернера

соответствует некоторой антицепи на булевом кубе.

Назовем вектор $T = (a_0, a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$ из $n + 1$ компоненты, которые нумеруются слева направо от 0 до n , типом МБФ, если i -я компонента вектора a_i равна числу подмножеств из i элементов в соответствующем данной МБФ семействе подмножеств Шпернера. При этом одновременно i -я компонента вектора a_i равна числу минимальных входных наборов данной МБФ, лежащих на слое $n - i$ булевого куба ранга n .

Назовем число n рангом типа T , число v ненулевых компонент назовем весом типа T , номер i первой слева ненулевой компоненты назовем левой границей типа T , номер j первой справа ненулевой компоненты правой границей типа T , сумму m всех компонент типа T назовем мощностью типа. Тип T называется максимальным, если при увеличении любой его компоненты на 1, полученный вектор не будет являться типом.

Расширим понятия ранга, веса, левой границы, правой границы и мощности для любого вектора, у которого все компоненты неотрицательные целые числа.

Для любых двух векторов V_1, V_2 ранга n и таких, у которых правая граница $j(V_1)$ строго меньше левой границы $i(V_2)$, определим операцию сдвиг-суммы:

$$V = V_1 \oplus V_2 = (a_0, a_1, \dots, a_n) \oplus (b_0, b_1, \dots, b_n) = (b_0, a_0 + b_1, \dots, a_{n-1} + b_n, a_n) = (c_0, c_1, \dots, c_{n+1}).$$

Такую операцию с нулевым вектором $V_0 = (0, 0, \dots, 0)$ можно проводить как справа, так и слева:

$$V = V_1 \oplus V_0 = (a_0, a_1, \dots, a_n) \oplus (0, 0, \dots, 0) = (0, a_0, \dots, a_{n-1}, a_n) \\ V = V_0 \oplus V_1 = (0, 0, \dots, 0) \oplus (a_0, a_1, \dots, a_n) = (a_0, \dots, a_{n-1}, a_n, 0).$$

Лемма 1. *Операция сдвиг-суммы над любыми двумя допустимыми типами ранга n даёт тип ранга $n + 1$.*

Доказательство. Пусть $T = T_1 \oplus T_2 = (a_0, a_1, \dots, a_n) \oplus (b_0, b_1, \dots, b_n) = (c_0, c_1, \dots, c_{n+1})$. Произвольным образом разобьем булев куб ранга $n + 1$ на два куба ранга n . В верхнем кубе выберем МБФ типа T_1 , а в нижнем типа T_2 . Это всегда можно сделать по определению типа. По определению допустимой пары из неравенства $j(T_1) < i(T_2)$ следует, что ни один минимальный набор функции не больше ни одного минимального набора. Следовательно, объединение минимальных входных наборов функций и образует антицепь на булевом кубе ранга $n + 1$. Минимальные наборы этой антицепи задают функцию, которая по определению сдвиг-суммы имеет тип T . Лемма доказана.

В [3] показано, что для максимальных типов это разложение единственно. Для немаксимальных типов такое разложение может быть не единственным.

Будем считать, что тип МБФ T_1 больше типа T_2 МБФ, если каждая компонента типа T_1 не меньше соответствующей компоненты типа T_2 .

Пример 1. *В качестве примера возьмем МБФ f от 5 переменных, равную единице на входных наборах 00011, 00111, 01011, 10011, 01111, 10111, 11011, 11100, 11101, 11110 и 11111. Минимальными входными наборами функции f*

являются наборы 00011 и 11100, первый из которых находится на уровне 3, а второй на уровне 2 булевого куба. В символьном виде МБФ имеет вид $f = x_2x_1 \vee x_5x_4x_3$. Отсюда соответствующее семейство подмножеств Шпернера состоит из двух подмножеств, первое из которых содержит два элемента, а второе три элемента. Значит, тип $T(f)$ функции f равен $(0, 0, 1, 1, 0, 0)$. Ранг этого типа $n(T) = 5$, вес $v(T) = 2$, левая граница $i(T) = 2$, правая граница $j(T) = 3$. Такой же тип имеет и еще ряд МБФ, в частности, МБФ с минимальными входными наборами 00101 и 11001.

2. Разбиение натуральных на классы.

Известно каноническое представление натуральных чисел. Однако с помощью этого представления сложно разбить множество натуральных чисел на бесконечное множество конечных классов. Для построения множества натуральных чисел, при котором получаются указанные классы, введём следующие ограничения для каждого класса чисел:

- по количеству простых, входящих в каноническое представление чисел данного класса, что соответствует длине типа МБФ;
- по величине их степеней, что соответствует величине компонентам типа;
- по совокупности значений степеней простых (зависимость компонент в типе МБФ);
- ограничения для степеней конкретных простых чисел зависят от выбранного порядка для простых чисел.

При таком построении каждое натуральное число n -го класса описывает множество антицепей булевого куба размерности $\geq n$ -мерного.

Возьмём определённый набор простых чисел, причём количество чисел в этом наборе равно $n + 1$, где n – ранг типа. Теперь каждому типу МБФ поставим в соответствие натуральное число, в каноническом разложении которого степени простых будут соответствовать компонентам типа. Например, типу ранга 5 $(0, 0, \alpha, \beta, 0, 0)$ соответствует число $n = p_3^\alpha p_4^\beta$, при таком наборе простых: $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, \dots$. При этом если $\alpha = 3$ и $\beta = 3$, то данному типу соответствует число $n = p_3^3 p_4^3$, и это число не принадлежит никакому типу меньшего ранга. Но если $\alpha = 1$, а $\beta = 2$, то число $n = p_3 p_4^2$ соответствует данному типу ранга 5, но также соответствует типу $(0, 0, 1, 2, 0)$ 4-го ранга.

Определение 1. *Натуральное число N называется числом ранга n , если оно соответствует типу МБФ ранга n и не соответствует никакому типу МБФ меньшего ранга.*

Определение 2. *Если натуральное число имеет ранг n и соответствует максимальному типу ранга n , то оно называется наибольшим кратным ранга n .*

Определение 3. *Операция сдвиг-сумма типов для натуральных чисел преобразуется в операцию сдвиг-произведение чисел и в дальнейшем обозначается символом \otimes .*

Например, если порядок первых 3 простых есть 5, 2, 3, то из сдвиг-суммы типов $(1, 0) \oplus (0, 1) = (0, 2, 0)$ получим сдвиг-произведение чисел $2 \otimes 3 = 4$.

Определение 4. *Натуральными числами n -го ранга являются все делители наибольших кратных n -го ранга, не являющиеся числами меньшего ранга.*

Лемме 1 для натуральных чисел соответствует следующее утверждение. Каждое наибольшее кратное ранга n однозначно разлагается в сдвиг-произведение двух наибольших кратных ранга $n - 1$.

Введение типов МБФ ограничивает степени простых чисел, входящих в данный класс натуральных чисел. С помощью простой операции можно строить каждый следующий класс, используя только наибольшие кратные предыдущего класса.

Однако, кроме типов МБФ нам для такого представления нужно задать порядок простых чисел. Для удобства представления порядка простых введём двоичную бесконечную последовательность. Для каждого ранга задаётся порядок частью этой двоичной последовательности. Например, возьмём двоичную последовательность, состоящую из чередующихся в произвольном порядке нулей и единиц. И построим последовательность простых чисел так: если встречается в двоичной последовательности 0, будем записывать справа следующее простое, если встретится 1, то слева.

Например, возьмём такую двоичную последовательность 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, Соответствующая последовательность простых чисел равна: ... , 11, 5, 2, 3, 7, 13, Учитывая, что максимальные по значению компоненты типов МБФ тоже располагаются от центра, то такая последовательность будет минимизировать числа некоторого ранга по абсолютной величине, назовём такую последовательность минимизирующей.

В статье [4] доказана зависимость максимальных типов МБФ предыдущего ранга от последующего. А именно, сдвиг-сумма допустимых максимальных типов ранга $n - 1$ даёт только один максимальный тип n -го ранга. И наоборот, каждый такой тип n -го ранга однозначно разлагается на два типа $n - 1$ ранга. Используя это свойство, будем проводить рекуррентное построение рангов натуральных чисел указанным выше способом. Построение рангов натуральных чисел начнём с нулевого ранга. Для последовательности простых чисел ... , 11, 5, 2, 3, 7, 13, ... максимальные типы МБФ ранга 0 – (0) и (1), им соответствуют числа нулевого ранга $2^0 = 1$ и $2^1 = 2$. Для ранга 1 – максимальные типы МБФ (1,0) и (0,1) получаются с помощью сдвиг-суммы типов нулевого ранга $(0) \oplus (1) = (1, 0)$, $(1) \oplus (0) = (0, 1)$. Соответствующие числа ранга 1: $3^1 \cdot 2^0 = 3$, число $3^0 \cdot 2^1 = 2$ по определению относится ко второму рангу. Числа ранга 2. Максимальные типы $(0, 0) \oplus (1, 0) = (1, 0, 0)$, $(0, 1) \oplus (0, 0) = (0, 0, 1)$, $(1, 0) \oplus (0, 1) = (0, 2, 0)$, немасимальный тип: $(0, 1, 0)$. Числа ранга 2: $5^1 \cdot 2^0 \cdot 3^0 = 5$, $5^0 \cdot 2^2 \cdot 3^0 = 4$ остальные числа, по определению, относятся к меньшим рангам. Продолжая далее такое рекуррентное построение, получим числа ранга 3 – 6, 7, 8, 9, 27 и т. д.

Аксиомы построения.

1. Для построения задаётся произвольная двоичная последовательность, состоящая из нулей и единиц. Эта последовательность задаёт порядок множества простых чисел.

2. Числа 0 ранга составляют класс чисел S_0 , состоящий из 1 и простого числа $p_1 = 2$.

3. Для получения следующего класса S_n добавим простое число p_{n+1} . Если

n -й член двоичной последовательности равен нулю, то добавляем p_{n+1} к последовательности простых чисел слева, а если равен единице, то справа.

4. Наибольшие кратные класса S_n рекуррентно получается из наибольших кратных предыдущего класса S_{n-1} с помощью сдвиг-произведения допустимых пар наибольших кратных чисел этого класса. Остальные натуральные числа ранга n находятся по определению 4.

Построим графическое представление этого множества. Точкам будут соответствовать типы МБФ и соответствующие им натуральные числа. Два натуральных числа будут соединены тогда и только тогда, когда одно из них будет делителем другого.

Пример 2. Построим такое представление для типов МБФ ранга 4 и 5 с таким набором простых чисел: 11, 5, 2, 3, 7, 13. Располагаем простые по порядку их номеров в натуральном ряду и начинаем от центральной компоненты типа. Вершины пронумеруем.

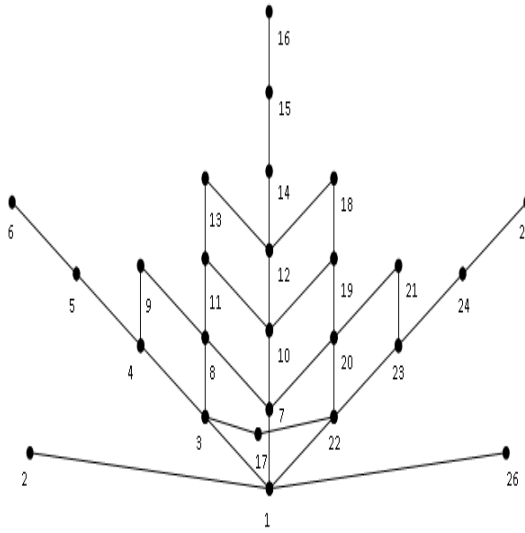


Рис. 2. Структура типов МБФ ранга 4.

Каждой вершине соответствует натуральное число и такой тип МБФ:

Таблица 1

№ п/п	Чис ло	Тип МБФ	№ п/п	Чис ло	Тип МБФ	№ п/п	Чис ло	Тип МБФ
1	1	(0,0,0,0,0)	10	4	(0,0,2,0,0)	19	12	(0,0,2,1,0)
2	11	(1,0,0,0,0)	11	20	(0,1,2,0,0)	20	6	(0,0,1,1,0)
3	5	(0,1,0,0,0)	12	8	(0,0,3,0,0)	21	18	(0,0,1,2,0)
4	25	(0,2,0,0,0)	13	40	(0,1,3,0,0)	22	3	(0,0,0,1,0)
5	125	(0,3,0,0,0)	14	16	(0,0,4,0,0)	23	9	(0,0,0,2,0)
6	625	(0,4,0,0,0)	15	32	(0,0,5,0,0)	24	27	(0,0,0,3,0)
7	2	(0,0,1,0,0)	16	64	(0,0,6,0,0)	25	81	(0,0,0,4,0)
8	10	(0,1,1,0,0)	17	15	(0,1,0,1,0)	26	7	(0,0,0,0,1)
9	50	(0,2,1,0,0)	18	24	(0,0,3,1,0)			

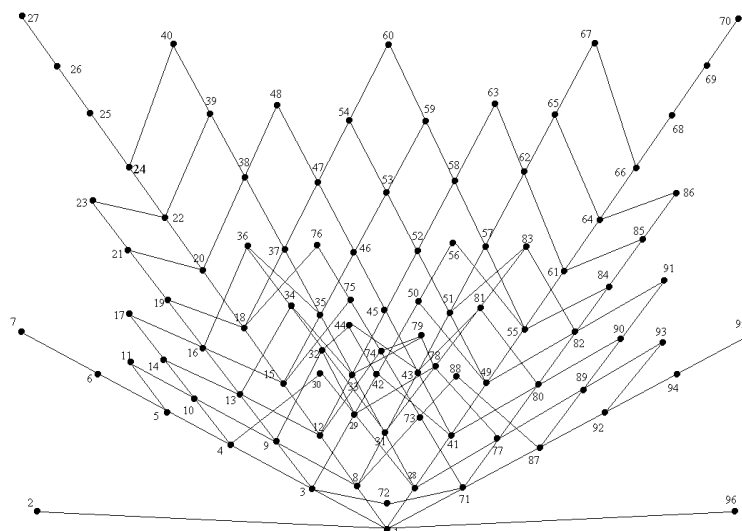


Рис. 3. Структура типов МБФ ранга 5.

Каждой вершине соответствует натуральное число и такой тип МБФ:

Таблица 2

№	Число	Тип МБФ	№	Число	Тип МБФ	№	Число	Тип МБФ
1	1	(0,0,0,0,0,0)	33	12	(0,0,2,1,0,0)	65	1458	(0,0,1,6,0,0)
2	11	(1,0,0,0,0,0)	34	60	(0,1,2,1,0,0)	66	2187	(0,0,0,9,0,0)
3	5	(0,1,0,0,0,0)	35	24	(0,0,3,1,0,0)	67	4374	(0,0,1,7,0,0)
4	25	(0,2,0,0,0,0)	36	120	(0,1,3,1,0,0)	68	6561	(0,0,0,8,0,0)
5	125	(0,3,0,0,0,0)	37	48	(0,0,4,1,0,0)	69	19683	(0,0,0,9,0,0)
6	625	(0,4,0,0,0,0)	38	96	(0,0,5,1,0,0)	70	59049	(0,0,0,10,0,0)
7	3125	(0,5,0,0,0,0)	39	192	(0,0,6,1,0,0)	71	7	(0,0,0,0,1,0)
8	2	(0,0,1,0,0,0)	40	384	(0,0,7,1,0,0)	72	35	(0,1,0,0,1,0)
9	10	(0,1,1,0,0,0)	41	9	(0,0,0,2,0,0)	73	14	(0,0,1,0,1,0)
10	50	(0,2,1,0,0,0)	42	45	(0,1,0,2,0,0)	74	28	(0,0,2,0,1,0)
11	250	(0,3,1,0,0,0)	43	18	(0,0,1,2,0,0)	75	56	(0,0,3,0,1,0)
12	4	(0,0,2,0,0,0)	44	90	(0,1,1,2,0,0)	76	112	(0,0,4,0,1,0)
13	20	(0,1,2,0,0,0)	45	36	(0,0,2,2,0,0)	77	21	(0,0,0,1,1,0)
14	100	(0,2,2,0,0,0)	46	72	(0,0,3,2,0,0)	78	42	(0,0,1,1,1,0)
15	8	(0,0,3,0,0,0)	47	144	(0,0,4,2,0,0)	79	84	(0,0,2,1,1,0)
16	40	(0,1,3,0,0,0)	48	288	(0,0,5,2,0,0)	80	63	(0,0,0,2,1,0)
17	200	(0,2,3,0,0,0)	49	27	(0,0,0,3,0,0)	81	126	(0,0,1,2,1,0)
18	16	(0,0,4,0,0,0)	50	135	(0,1,0,3,0,0)	82	189	(0,0,0,3,1,0)
19	80	(0,1,4,0,0,0)	51	54	(0,0,1,3,0,0)	83	378	(0,0,1,3,1,0)
20	32	(0,0,5,0,0,0)	52	108	(0,0,2,3,0,0)	84	567	(0,0,0,4,1,0)

№	Число	Тип МБФ	№	Число	Тип МБФ	№	Число	Тип МБФ
21	160	(0,1,5,0,0,0)	53	216	(0,0,3,3,0,0)	85	1701	(0,0,0,5,1,0)
22	64	(0,0,6,0,0,0)	54	432	(0,0,4,3,0,0)	86	5103	(0,0,0,6,1,0)
23	320	(0,1,6,0,0,0)	55	81	(0,0,0,4,0,0)	87	49	(0,0,0,0,2,0)
24	128	(0,0,7,0,0,0)	56	405	(0,1,0,4,0,0)	88	98	(0,0,1,0,2,0)
25	256	(0,0,8,0,0,0)	57	162	(0,0,1,4,0,0)	89	147	(0,0,0,1,2,0)
26	512	(0,0,9,0,0,0)	58	324	(0,0,2,4,0,0)	90	441	(0,0,0,2,2,0)
27	1024	(0,0,10,0,0,0)	59	648	(0,0,3,4,0,0)	91	1323	(0,0,0,3,2,0)
28	3	(0,0,0,1,0,0)	60	1296	(0,0,4,4,0,0)	92	343	(0,0,0,0,3,0)
29	15	(0,1,0,1,0,0)	61	243	(0,0,0,5,0,0)	93	1029	(0,0,0,1,3,0)
30	75	(0,2,0,1,0,0)	62	486	(0,0,1,5,0,0)	94	2401	(0,0,0,0,4,0)
31	6	(0,0,1,1,0,0)	63	972	(0,0,2,5,0,0)	95	16807	(0,0,0,0,5,0)
32	30	(0,1,1,1,0,0)	64	729	(0,0,0,6,0,0)	96	13	(0,0,0,0,0,1)

Полученные структуры являются полурешётками некоторых дистрибутивных решёток. Максимальным вершинам этих полурешеток отвечают максимальные типы. Соответствующие им числа являются наибольшими кратными 4-го и 5-го ранга.

Структуры данных полурешеток не изменятся, если заменить набор простых чисел 11, 5, 2, 3, 7, 13 произвольным набором простых чисел или даже произвольных, но различных образующих из свободной коммутативной полугруппы со счётным числом образующих.

Обозначим через $K1(n)$, $K2(n, i, j)$ количество максимальных типов, имеющие указанный ранг, левую и правую границы.

Для удобного представления $K2(n, i, j)$ используются матрицы распределения максимальных типов ранга n [5]. В них на пересечении строки i и столбца j находится элемент $K2(n, i, j)$. На рис. 4 показаны такие матрицы для рангов 4 и 5.

	0	1	2	3	4
0	1	0	0	0	0
1	0	1	2	1	0
2	0	0	1	2	0
3	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	1

	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	3	4	1	0
2	0	0	1	5	4	0
3	0	0	0	1	3	0
4	0	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	0	1

Рис. 4. Матрицы распределения максимальных типов ранга 4 и 5.

Такие матрицы обозначим Mn , где n – ранг типа, порядок такой матрицы есть $n + 1$. На рис. 4 представлены $M4$ и $M5$.

Используя рекуррентную формулу, полученную в лемме 5 из [4]:

$$K2(n, i, j) = \sum_{q=i}^j K2(n-1, i-1, q-1) \sum_{t=q}^j K2(n-1, t, j), \quad (1)$$

выведем матричную формулу, для построения матрицы Mn ранга типа n на основе матрицы $Mn-1$ ранга типа.

Введём две операции. Операция «звёздочка слева» обозначает операцию добавления строки сверху и столбца слева, а операция «звёздочка справа» обозначает операцию добавления строки снизу и столбца справа.

Обозначим через T_n верхнюю треугольную матрицу порядка $n + 1$ из единиц.

Лемма 2. *Справедливо рекуррентное матричное уравнение:*

$$M_n = *M_{n-1} \times (*T_{n-2} \times M_{n-1}) *, \quad (2)$$

где операция \times — обычное умножение матриц.

Доказательство. Легко проверить, что элемент с индексами во внутренней сумме произведения матриц $*T_{n-2} \times M_{n-1}$ равен $\sum_{t=q}^j K2(n-1, t, j)$. Отсюда, элемент матрицы с индексами i, j , т. е.

$$K2(n, i, j) \text{ равен } \sum_{q=i}^j K2(n-1, i-1, q-1) \sum_{t=q}^j K2(n-1, t, j).$$

Здесь во внешней сумме индексы соответствуют строке i и столбцу j матрицы сдвинутыми вправо на 1 из-за операции звёздочка слева. Лемма доказана.

Пример 3. *Получим матрицу M_5 из матрицы M_4 .*

$$*T_3 \times M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$*M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (*T_3 \times M_4) * = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_5 = *M_4 \times (*T_3 \times M_4) * = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Можно получить количество максимальных типов МБФ ранга n с левой границей i и с правой границей j , зная количество максимальных типов предыдущего ранга. Следовательно, мы можем знать количество наибольших кратных чисел. С увеличением ранга количество наибольших кратных $K1(n)$ сильно возрастает:

Таблица 3

Ранг	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Кол. наиб. кратн.	1	2	3	5	10	26	96	553	5461	100709	3718354

Как уже отмечалось, наибольшие кратные одного ранга однозначно раскладываются с помощью сдвиг-произведение на наибольшие кратные меньшего ранга. Приведём пример для максимальных типов 5 ранга.

Сдвиг-произведение определено тогда, когда определена сдвиг-сумма соответствующих им типов.

Таблица 4

$p \setminus p$	Сдвиг-сумма максимальных типов	Сдвиг-произведение наиб. кратных	№ типов по табл. 1 и 2
1	$(1,0,0,0,0) \oplus (0,4,0,0,0) = (0,5,0,0,0)$	$11 \otimes 625 = 5 * 625 = 3125$	2,6;7
2	$(1,0,0,0,0) \oplus (0,2,1,0,0) = (0,3,1,0,0)$	$11 \otimes 50 = 5 * 50 = 250$	2,9;11
3	$(1,0,0,0,0) \oplus (0,1,3,0,0) = (0,2,3,0,0)$	$11 \otimes 40 = 5 * 40 = 200$	2,13;17
4	$(1,0,0,0,0) \oplus (0,0,6,0,0) = (0,1,6,0,0)$	$11 \otimes 64 = 5 * 64 = 320$	2,16;23
5	$(1,0,0,0,0) \oplus (0,1,0,1,0) = (0,2,0,1,0)$	$11 \otimes 15 = 5 * 15 = 75$	2,17;30
6	$(1,0,0,0,0) \oplus (0,0,3,1,0) = (0,1,3,1,0)$	$11 \otimes 24 = 5 * 24 = 120$	2,18;36
7	$(1,0,0,0,0) \oplus (0,0,1,2,0) = (0,1,1,2,0)$	$11 \otimes 18 = 5 * 18 = 90$	2,21;44
8	$(1,0,0,0,0) \oplus (0,0,0,4,0) = (0,1,0,4,0)$	$11 \otimes 81 = 5 * 81 = 405$	2,25;56
9	$(1,0,0,0,0) \oplus (0,0,0,0,1) = (0,1,0,0,1)$	$11 \otimes 7 = 5 * 7 = 35$	2,26;72
10	$(0,4,0,0,0) \oplus (0,0,6,0,0) = (0,0,10,0,0)$	$625 \otimes 64 = 16 * 64 = 1024$	6,16;27
11	$(0,4,0,0,0) \oplus (0,0,3,1,0) = (0,0,7,1,0)$	$625 \otimes 24 = 16 * 24 = 384$	6,18;40
12	$(0,4,0,0,0) \oplus (0,0,1,2,0) = (0,0,5,2,0)$	$625 \otimes 18 = 16 * 18 = 288$	6,21;48
13	$(0,4,0,0,0) \oplus (0,0,0,4,0) = (0,0,4,4,0)$	$625 \otimes 81 = 16 * 81 = 1296$	6,25;60
14	$(0,4,0,0,0) \oplus (0,0,0,0,1) = (0,0,4,0,1)$	$625 \otimes 7 = 16 * 7 = 112$	6,26;76
15	$(0,2,1,0,0) \oplus (0,0,0,4,0) = (0,0,2,5,0)$	$50 \otimes 81 = 12 * 81 = 972$	9,25;63
16	$(0,2,1,0,0) \oplus (0,0,0,0,1) = (0,0,2,1,1)$	$50 \otimes 7 = 12 * 7 = 84$	9,26;79
17	$(0,1,3,0,0) \oplus (0,0,0,4,0) = (0,0,1,7,0)$	$40 \otimes 81 = 54 * 81 = 4374$	13,25;67
18	$(0,1,3,0,0) \oplus (0,0,0,0,1) = (0,0,1,3,1)$	$40 \otimes 7 = 54 * 7 = 378$	13,26;83
19	$(0,0,6,0,0) \oplus (0,0,0,4,0) = (0,0,0,10,0)$	$64 \otimes 81 = 729 * 81 = 59049$	16,25;70
20	$(0,0,6,0,0) \oplus (0,0,0,0,1) = (0,0,0,6,1)$	$64 \otimes 7 = 729 * 7 = 5103$	16,26;86
21	$(0,1,0,1,0) \oplus (0,0,0,0,1) = (0,0,1,0,2)$	$15 \otimes 7 = 14 * 7 = 98$	17,26;88
22	$(0,0,3,1,0) \oplus (0,0,0,0,1) = (0,0,0,3,2)$	$24 \otimes 7 = 189 * 7 = 1323$	18,26;91
23	$(0,0,1,2,0) \oplus (0,0,0,0,1) = (0,0,0,1,3)$	$18 \otimes 7 = 147 * 7 = 1029$	19,26;93
24	$(0,0,0,4,0) \oplus (0,0,0,0,1) = (0,0,0,0,5)$	$81 \otimes 7 = 2401 * 7 = 16807$	25,26;95
25	$(0,0,0,0,0) \oplus (1,0,0,0,0) = (1,0,0,0,0)$	$1 \otimes 11 = 1 * 11 = 11$	1,2;2
26	$(0,0,0,0,1) \oplus (0,0,0,0,0) = (0,0,0,0,1)$	$7 \otimes 1 = 13 * 1 = 13$	26,1;96

Докажем следующие утверждения.

Теорема 1. Структура типов МБФ изоморфна полурешётке натуральных чисел, упорядоченных по делимости.

Доказательство. Если мы для каждой вершины выше полученной решетки по всем компонентам продолжим до максимально возможного значения для

каждой компоненты данного типа МБФ, то получим дистрибутивную решётку делителей числа $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_n^{m_n}$, где $m_i, i = \overline{1, n}$ – максимальные значения каждой компоненты типа МБФ.

Так, приведенная выше структура является частью решетки делителей числа $11 \cdot 5^5 \cdot 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 7^5 \cdot 13 = 454\,138\,962\,076\,800\,000$.

Каждый узел, соответствующий максимальному типу, определяет дистрибутивную решётку делителей натурального числа. Следовательно, по теореме Стоуна эти дистрибутивные решётки есть подрешётки некоторой булевой решётки.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Всё множество натуральных чисел разбивается на бесконечное множество непересекающихся конечных классов, в каждом из которых находятся числа с одинаковым рангом. При этом в каждом классе содержится одно простое.*

Доказательство. При распределении простых по типам МБФ способом, описанным выше, а именно, распределяем по порядку простые числа, начиная от центральных компонент типа МБФ, в классе чисел ранга n количество чисел в классе ограничено компонентами типа, которые соответствуют степеням простых в каноническом разложении числа и учитывая, что максимальный тип ранга n не будет максимальным в типе ранга $n + 1$, поэтому у чисел ранга $n + 1$ в каноническое разложение будут входить простые с большими степенями, чем у чисел ранга n . Также по определению ранга числа любое натуральное может принадлежать только одному рангу, и хорошо известно, что каноническое разложение натурального числа единственно, поэтому эти классы не пересекаются. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть порядок простых чисел задаётся последовательностью, не оканчивающейся только нулями или единицами. Тогда любое натуральное число принадлежит одному какому-нибудь классу разбиения данного ранга.*

Доказательство. Пусть каноническое разложение натурального $n = \prod_{i \leq k} p_i^{\alpha_i}$.

Тогда вектор, соответствующий этому разложению, имеет вид: $T = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$. Такому вектору может соответствовать тип МБФ некоторого ранга: $(0, 0, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, 0, \dots, 0)$, где показатели степени могут быть переставлены в соответствии с двоичной последовательностью, задающей порядок простых.

Если взять какую-нибудь двоичную последовательность, то каждое простое становится в последовательности простых чисел самым левым или самым правым на некотором этапе построения. Если указанный порядок не оканчивается всеми нулями или единицами, то как справа, так и слева оказывается бесконечное число простых. Поскольку максимальный показатель степени равный единице может быть только для самых крайних простых, то для любого простого внутри этой последовательности показатель степени будет неограниченно возрастать. Следовательно, произведение простых может при дальнейшем построении оказаться как угодно большим. Что доказывает теорему.

Следствие 1. Если порядок будет задаваться двоичной последовательностью, оканчивающейся только нулями или единицами, то при указанном построении получим множество натуральных чисел, которое состоит из некоторого простого и других чисел, которые не делятся на это простое.

Следствие 2. Из теоремы 3 следует, что существует бесконечное множество разбиений натуральных чисел на классы.

Пример 4. Возьмём естественный порядок простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, ..., которому соответствует двоичная последовательность 1, 1, 1, 1, 1, 1, Если для данной последовательности выполним вышеуказанное построение, то получим только нечётные числа и число 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. В заключение отметим следующее. Разработаны аксиомы рекурсивного построения натуральных чисел. С помощью этого построения получается разбиение натуральных чисел на конечные классы, каждый из которых содержит одно простое число. Введены понятия ранга числа, наибольших кратных каждого ранга, сдвиг-произведения допустимых пар чисел одного ранга. Оценено количество наибольших кратных чисел каждого ранга. В дальнейших работах предполагается применить это распределение для оценки распределения простых чисел и для построения новых кодов из натуральных чисел.

1. **Иванов М. А.** Криптографические методы защиты информации в компьютерных системах и сетях [текст] / М. А. Иванов. – М.: КУДИЦ-ОБРАЗ, 2001. – 368 с.
2. **Ткаченко В. Г.** Отказы цифровых схем и представления монотонных булевых функций [текст] / В. Г. Ткаченко // Наукові праці ОНАЗ ім. О. С. Попова. – Одеса, 2006. – № 2. – С. 45–69.
3. **Ткаченко В. Г.** Деревья типов монотонных булевых функций и криптосистемы с блоками переменной длины [текст] / В. Г. Ткаченко, О. В. Синявский // Наукові праці ОНАЗ ім. О. С. Попова. – Одеса, 2009. – № 2. – С. 32–42.
4. **Ткаченко В. Г.** Перечисление типов монотонных булевых функций при синтезе цифровых схем [текст] / В. Г. Ткаченко // Наукові праці ОНАЗ ім. О. С. Попова. – Одеса, 2008. – № 2. – С. 54–69.
5. **Ткаченко В. Г.** Классификация монотонных булевых функций при синтезе цифровых схем [текст] / В. Г. Ткаченко // Наукові праці ОНАЗ ім. О. С. Попова. – Одеса, 2008. – № 1. – С. 35–43.

УДК 517.954

A. Ashyralyev*, Ö. Demirdağ**

*Department of Mathematics, Fatih University, Turkey

**Department of Mathematics, ITTU, Turkmenistan

A NOTE ON BOUNDARY VALUE PARABOLIC PROBLEMS

Ashyralyev A., Demirdağ Ö. До зауваження крайових параболічних задач. Розглядається крайова задача знаходження невідомого параметра для багатомірного параболічного рівняння з умовою Неймана. Вивчаються різницьві схеми першого і другого порядку точності наближеного розв'язку цієї задачі. Встановлюються оцінки стійкості для розв'язків цих різницьвих схем. Теоретичні висновки підтверджуються з численними результатами.

Ключові слова: крайові задачі, параболічні рівняння, різницьві схеми, оцінки стійкості, чисельний аналіз.

Ashyralyev A., Demirdağ Ö. К замечанию краевых параболических задач. The boundary value problem of determining the parameter for the multidimensional parabolic equation with the Neumann boundary condition is considered. The first and second orders of accuracy stable difference schemes for the approximate solution of this problem are investigated. The stability estimates for the solution of these difference schemes are obtained. The theoretical statements for the solution of these difference schemes are supported by the results of numerical examples.

Ключевые слова: краевые задачи, параболические уравнения, разностные схемы, оценки устойчивости, численный анализ.

Ashyralyev A., Demirdağ Ö. A note on boundary value parabolic problems.

Key words: boundary value problems, parabolic equations, difference schemes, stability estimates, numerical analysis.

Рассматривается краевая задача нахождения неизвестного параметра для многомерного параболического уравнения с условием Неймана. Исследуются разностные схемы первого и второго порядков точности приближенного решения этой задачи. Устанавливаются оценки устойчивости для решения этих разностных схем. Теоретические выводы подтверждаются с численными результатами.

Introduction.

The differential equations with parameters play a very important role in many branches of science and engineering. Some examples were given in temperature overspecification by Dehghan, M.[2], chemistry (chromatography) by Kimura T., and Suzuki, T. [3], physics (optical tomography) by Gryazin, Y.A., Klivanov, M.V., and Lucas, T.R. [4].

The differential equations with parameters have been studied extensively by many researchers (see, [8],[9], [10], [11], [12], [13],[14], [15], [16],[17], [21] and the references there in). However, such problems were not well-investigated in general.

As a result, considerable efforts have been expanded in formulating numerical solution methods that are both accurate and efficient. Methods of numerical solutions of parabolic problems with parameters have been studied by researchers (see, [5],[6], [7] and the references there in). Our goal in present paper is to investigate difference schemes for the approximate solution of the problem of determining the parameter for parabolic equations.

It is known that various boundary value problems of determining the parameter for parabolic equations can be reduced to the boundary value problem for the differential equation with parameter p

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t) + p, & 0 < t < 1, \\ u(0) = \varphi, & u(1) = \psi \end{cases} \quad (1)$$

in a Hilbert space H with self-adjoint positive definite operator A .

In the present paper the first and second orders of accuracy difference schemes for the approximate solution of the problem (1) are investigated. The stability estimates for the solution of these difference schemes are obtained. The theoretical statements for the solution of these difference schemes are supported by the results of numerical examples.

1. Rothe Difference Scheme for problem (1)

In this section, we consider the Rothe difference scheme

$$\begin{cases} \tau^{-1}(u_k - u_{k-1}) + Au_k = \varphi_k + p, & \varphi_k = f(t_k), \\ t_k = k\tau, & 1 \leq k \leq N, \quad N\tau = 1, \\ u_0 = \varphi, & u_N = \psi \end{cases} \quad (2)$$

for approximately solving problem (1).

Let $[0, 1]_\tau = \{t_k = k\tau, k = 1, \dots, N, N\tau = 1\}$ be the *uniform grid space* with step size $\tau > 0$, where N is a fixed positive integer. Let, $\mathcal{F}([0, 1]_\tau, H)$ denotes the linear space of grid functions $\varphi^\tau = \{\varphi_k\}_1^N$ with values in the Hilbert space H .

Let $\mathcal{C}_\tau(H) = \mathcal{C}([0, 1]_\tau, H)$ be the Banach space of bounded grid functions with the norm

$$\|\varphi^\tau\|_{\mathcal{C}_\tau(H)} = \max_{1 \leq k \leq N} \|\varphi_k\|_H.$$

For $\alpha \in [0, 1]$, let $\mathcal{C}^\alpha(H) = \mathcal{C}^\alpha([0, 1]_\tau, H)$ be the Hölder space with the following norm

$$\|\varphi^\tau\|_{\mathcal{C}^\alpha(H)} = \|\varphi^\tau\|_{\mathcal{C}_\tau(H)} + \max_{1 \leq k < k+r \leq N} \frac{\|\varphi_{k+r} - \varphi_k\|_H}{(r\tau)^\alpha}.$$

Denote $R = (I + \tau A)^{-1}$. The operator $I - R^N$ has an inverse $T_\tau = (I - R^N)^{-1}$ and the following formulas are satisfied:

$$p = T_\tau \left(A\psi - AR^N\varphi - \sum_{j=1}^N AR^{N-j+1}\varphi_j\tau \right), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} u_k &= R^k\varphi + \sum_{j=1}^k R^{k-j+1}\varphi_j\tau \\ &+ (I - R^k)T_\tau \left(\psi - R^N\varphi - \sum_{j=1}^N R^{N-j+1}\varphi_j\tau \right), \quad 1 \leq k \leq N. \end{aligned} \quad (4)$$

Theorem 1. For the solution $(\{u_k\}_{k=1}^N, p)$ of problem (2) in $C_\tau(H) \times H$ the estimates

$$\|p\|_H \leq M \left[\|\varphi\|_H + \|A\psi\|_H + \frac{1}{\beta} \|\{\varphi_k\}_{k=1}^N\|_{C_\tau^{\beta}(H)} \right], \quad (5)$$

$$\|\{u_k\}_{k=1}^N\|_{C_\tau(H)} \leq M \left[\|\varphi\|_H + \|\psi\|_H + \|\{\varphi_k\}_{k=1}^N\|_{C_\tau(H)} \right] \quad (6)$$

hold, where M is independent of τ, φ, ψ and $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$.

The proof of Theorem 1 is based on formulas (3) and (4) and the symmetry property of the operator A .

Now, we consider the application of Theorem 1. Let Ω be the unit open cube in the n -dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^n(x = (x_1, \dots, x_n) : 0 < x_k < 1, k = 1, \dots, n)$ with boundary $S, \bar{\Omega} = \Omega \cup S$. In $[0, 1] \times \Omega$, the boundary value problem for the multi-dimensional parabolic equation

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \sum_{r=1}^n (a_r(x)u_{x_r})_{x_r} + \delta u = p(x) + f(t,x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, 0 < t < 1, \\ u(0,x) = \varphi(x), u(1,x) = \psi(x), x \in \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial u(t,x)}{\partial \vec{n}} = 0, x \in S, 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (7)$$

is considered. Here $a_r(x), (x \in \Omega), \varphi(x), \psi(x) (x \in \bar{\Omega})$, and $f(t,x) (t \in (0,1), x \in \Omega)$ are given smooth functions and $a_r(x) \geq a > 0, \delta > 0, \vec{n}$ is the normal vector to S .

The discretization of problem (7) is carried out in two steps. In the first step, we define the grid space

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_h &= \{x = x_r = (h_1j_1, \dots, h_nj_n), j = (j_1, \dots, j_n), 0 \leq j_r \leq N_r, \\ N_r h_r &= 1, r = 1, \dots, n\}, \Omega_h = \bar{\Omega}_h \cap \Omega, S_h = \bar{\Omega}_h \cap S \end{aligned}$$

and introduce the Hilbert space $L_{2h} = L_2(\bar{\Omega}_h)$ of the grid functions

$\varphi^h(x) = \{\varphi(h_1j_1, \dots, h_nj_n)\}$ defined on $\bar{\Omega}_h$ equipped with the norm

$$\|\varphi^h\|_{L_{2h}} = \left(\sum_{x \in \Omega_h} |\varphi^h(x)|^2 h_1 \dots h_n \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Then, we assign the difference operator A_h^x , by the formula

$$A_h^x u^h = - \sum_{r=1}^n (\alpha_r(x)u_{x_r}^h)_{x_r, j_r} + \delta u^h(x),$$

where A_h^x is known as self-adjoint positive definite operator in L_{2h} , acting in the space of grid functions $u^h(x)$ satisfying the conditions $D^h u^h(x) = 0$ for all $x \in S_h$. Here $D^h u^h(x)$ is the approximation of $\frac{\partial u(x)}{\partial \vec{n}}$. With the help of the difference operator, we arrive the following boundary value problem

$$\begin{cases} u_t^h(t,x) + A_h^x u^h(t,x) = p^h(x) + f^h(t,x), 0 < t < 1, x \in \Omega_h, \\ u^h(0,x) = \varphi^h(x), u^h(1,x) = \psi^h(x), x \in \Omega_h \end{cases} \quad (8)$$

for an infinite system of ordinary differential equations.

In the second step, we replace (8) with the difference scheme (2)

$$\begin{cases} \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + A_h^x u_k^h(x) = f_k^h(x), \\ f_k^h(x) = f^h(t_k, x) + p^h(x), \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N, \quad N\tau = T, \quad x \in \Omega_h, \\ u_0^h(x) = \varphi^h(x), \quad u_N^h(x) = \psi^h(x), \quad x \in \Omega_h. \end{cases} \quad (9)$$

Theorem 2. *The solution pairs $(\{u_k^h(x)\}_0^N, p^h(x))$ of problem (9) satisfies the stability estimates*

$$\begin{aligned} \|p^h\|_{L_{2h}} &\leq M_1 \left[\|\varphi^h\|_{L_{2h}} + \|\psi^h\|_{L_{2h}} + \|A_h^x \psi^h\|_{L_{2h}} + \frac{1}{\beta} \|\{f_k^h\}_1^N\|_{C_\tau^\beta(L_{2h})} \right], \\ \|\{u_k^h\}_1^N\|_{C_\tau(L_{2h})} &\leq M_2 \left[\|\varphi^h\|_{L_{2h}} + \|\psi^h\|_{L_{2h}} + \|\{f_k^h\}_1^N\|_{C_\tau(L_{2h})} \right], \end{aligned}$$

where M_1 and M_2 does not depend on β , φ^h , ψ^h and f_k^h , $1 \leq k \leq N$. Here $C_\tau^\beta(L_{2h})$ is the grid space of grid functions $\{f_k^h\}_1^N$ defined on $[0, 1]_\tau \times \overline{\Omega_h}$ with norm

$$\begin{aligned} \|\{f_k^h\}_1^N\|_{C_\tau^\beta(L_{2h})} &= \|\{f_k^h\}_1^N\|_{C_\tau(L_{2h})} + \sup_{1 \leq k < k+r \leq N} \frac{\|f_{k+r}^h - f_k^h\|_{L_{2h}}}{(\tau\tau)^\beta}, \\ \|\{f_k^h\}_1^N\|_{C_\tau(L_{2h})} &= \max_{1 \leq k \leq N} \|f_k^h\|_{L_{2h}}. \end{aligned}$$

The proof of Theorem 2 is based on Theorem 1 and the symmetry properties of the operator A_h^x defined by formula (7).

2. Second order of accuracy difference scheme

In this section, our focus is the well-posedness of the second order of accuracy difference scheme

$$\begin{cases} \tau^{-1}(u_k - u_{k-1}) + A \left(I + \frac{\tau A}{2} \right) u_k = \left(I + \frac{\tau A}{2} \right) (\varphi_k + p), \\ \varphi_k = f \left(t_{k-\frac{1}{2}} \right), \quad t_{k-\frac{1}{2}} = k\tau - \frac{\tau}{2}, \quad 1 \leq k \leq N, \quad N\tau = 1, \\ u_0 = \varphi, \quad u_N = \psi \end{cases} \quad (10)$$

for approximately solving problem (1).

Let $D = (I + \tau A + \frac{(\tau A)^2}{2})^{-1}$. Since the operator $I - D^N$ has an inverse $T'_\tau = (I - D^N)^{-1}$ and the following formulas hold:

$$p = T'_\tau \left(A\psi - AD^N\varphi - \sum_{j=1}^N A \left(I + \frac{\tau A}{2} \right) D^{N-j+1} \varphi_j \tau \right), \quad (11)$$

$$u_k = D^k \varphi + \sum_{j=1}^k \left(I + \frac{\tau A}{2} \right) D^{k-j+1} \varphi_j \tau +$$

$$+(I - D^k)T'_\tau \left(\psi - D^N \varphi - \sum_{j=1}^N \left(I + \frac{\tau A}{2} \right) D^{N-j+1} \varphi_j \tau \right). \quad (12)$$

Theorem 3. For the solution $(\{u_k\}_{k=1}^N, p)$ of problem (10) in $C_\tau(H) \times H$ the estimates

$$\|p\|_{H \leq M} \left[\|\varphi\|_H + \|A\psi\|_H + \frac{1}{\beta} \|\{\varphi_k\}_{k=1}^N\|_{C_\tau^\beta(H)} \right], \quad (13)$$

$$\|\{u_k\}_{k=1}^N\|_{C_\tau(H)} \leq M \left[\|\varphi\|_H + \|\psi\|_H + \|\{\varphi_k\}_{k=1}^N\|_{C_\tau(H)} \right] \quad (14)$$

hold, where M is independent of τ, φ, ψ and $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$.

The proof of Theorem 3 is based on formulas (11) and (12) and the symmetry property of the operator A .

Now, we consider the application of Theorem 3. The boundary value problem (7) for the parabolic differential equation is considered. We replace (8) with the difference scheme (10)

$$\begin{cases} \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + A_h^x \left(I + \frac{\tau A_h^x}{2} \right) u_k^h(x) = \left(I + \frac{\tau A_h^x}{2} \right) (p^h(x) + f_k^h(x)), \\ f_k^h(x) = f^h(t_k - \frac{\tau}{2}, x), \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N, \quad N\tau = T, \quad x \in \Omega_h, \\ u_0^h(x) = \varphi^h(x), \quad u_N^h(x) = \psi^h(x), \quad x \in \Omega_h. \end{cases} \quad (15)$$

Theorem 4. The solution pairs $(\{u_k^h(x)\}_0^N, p^h(x))$ of problem (15) satisfies the stability estimates

$$\begin{aligned} \|p^h\|_{L_{2h}} &\leq M_1 \left[\|\varphi^h\|_{L_{2h}} + \|\psi^h\|_{L_{2h}} + \|A_h^x \psi^h\|_{L_{2h}} + \frac{1}{\beta} \|\{f_k^h\}_1^N\|_{C_\tau^\beta(L_{2h})} \right], \\ \|\{u_k^h\}_1^N\|_{C_\tau(L_{2h})} &\leq M_2 \left[\|\varphi^h\|_{L_{2h}} + \|\psi^h\|_{L_{2h}} + \|\{f_k^h\}_1^N\|_{C_\tau(L_{2h})} \right], \end{aligned}$$

where M_1 and M_2 is independent of β, φ^h, ψ^h and $f_k^h, 1 \leq k \leq N$.

The proof of Theorem 4 is based on Theorem 3 and the symmetry properties of the operator A_h^x defined by formula (7).

3. The numerical application

In the present section, for numerical analysis the mixed problem

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + u(t,x) = p(x) + f(t,x), \\ f(t,x) = \pi^2 e^{-t} \cos \pi x - \cos \pi x, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, 1], \\ u(0,x) = \cos \pi x, \quad u(1,x) = e^{-1} \cos \pi x, \quad x \in [0, 1], \\ \frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = \frac{\partial u(t,1)}{\partial x} = 0, \quad t \in [0, 1] \end{cases} \quad (16)$$

is considered. The exact solution of problem (16) is $u(t, x) = e^{-t} \cos \pi x$ and for the unknown function is $p(x) = \cos \pi x$. For the solution of (16), the difference scheme of the first order of accuracy

$$\begin{cases} \frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + u_n^k = \varphi_n^k, \\ \varphi_n^k = f(t_k, x_n) + p(x_n), \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N, \quad N\tau = 1, \\ x_n = nh, \quad 1 \leq n \leq M-1, \quad Mh = 1, \\ u_n^0 = \cos(\pi x_n), \quad u_n^N = e^{-1} \cos(\pi x_n), \quad x_n = nh, \quad 0 \leq n \leq M, \\ u_1^k - u_0^k = u_M^k - u_{M-1}^k = 0, \quad 0 \leq k \leq N \end{cases} \quad (17)$$

and second order of accuracy generated by five points

$$\begin{cases} \frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + u_n^k + \\ + \frac{\tau}{2} \left(\frac{u_{n+2}^k - 4u_{n+1}^k + 6u_n^k - 4u_{n-1}^k + u_{n-2}^k}{h^4} - \right. \\ \left. - 2 \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + u_n^k \right) = \varphi_n^k, \quad \varphi_n^k = f(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n) - \\ - \frac{\tau}{2} \left(\frac{f(t_k - \frac{\tau}{2}, x_{n+1}) - 2f(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n) + f(t_k - \frac{\tau}{2}, x_{n-1})}{h^2} \right) + \\ + \frac{\tau}{2} f(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n) + p(x_n) - \\ - \frac{\tau}{2} \left(\frac{p(x_{n+1}) - 2p(x_n) + p(x_{n-1}))}{h^2} - p(x_n) \right), \quad t_k = k\tau, \\ 1 \leq k \leq N, \quad N\tau = 1, \quad x_n = nh, \quad 2 \leq n \leq M-2, \quad Mh = 1, \\ u_n^0 = \cos(\pi x_n), \quad u_n^N = e^{-1} \cos(\pi x_n), \quad x_n = nh, \quad 0 \leq n \leq M, \\ 3u_0^k - 4u_1^k + u_2^k = 3u_M^k - 4u_{M-1}^k + u_{M-2}^k = 0, \\ 10u_0^k - 15u_1^k + 6u_2^k - u_3^k = 10u_M^k - 15u_{M-1}^k + 6u_{M-2}^k - u_{M-3}^k = 0, \\ 0 \leq k \leq N \end{cases} \quad (18)$$

are presented.

For obtaining the values of $p(x_n)$ for (17) and (18) we will use the following equation

$$p(x_n) = e^{-1}(\pi^2 + 1) \cos \pi x_n + \frac{v_{n+1}^N - 2v_n^N + v_{n-1}^N}{h^2} - v_n^N, \quad (19)$$

$$x_n = nh, \quad 1 \leq n \leq M-1,$$

where $\{v_n^k\}_{n=0}^M$ is the solution of the following difference scheme of the first order of accuracy

$$\begin{cases} \frac{v_n^k - v_n^{k-1}}{\tau} - \frac{v_{n+1}^k - 2v_n^k + v_{n-1}^k}{h^2} + v_n^k = \varphi_n^k, \\ \varphi_n^k = f(t_k, x_n), \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N, \quad N\tau = 1, \\ x_n = nh, \quad 1 \leq n \leq M-1, \quad Mh = 1, \\ v_n^N - v_n^0 = (e^{-1} - 1) \cos(\pi x_n), \quad x_n = nh, \quad 0 \leq n \leq M, \\ v_1^k - v_0^k = v_M^k - v_{M-1}^k = 0, \quad 0 \leq k \leq N \end{cases} \quad (20)$$

for (17) and is the solution of the second order of accuracy difference scheme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v_n^k - v_n^{k-1}}{h} - \frac{v_{n+1}^k - 2v_n^k + v_{n-1}^k}{h^2} + v_n^k + \\ + \frac{\tau}{2} \left(\frac{v_{n+2}^k - 4v_{n+1}^k + 6v_n^k - 4v_{n-1}^k + v_{n-2}^k}{h^4} - \right. \\ \left. - 2 \frac{v_{n+1}^k - 2v_n^k + v_{n-1}^k}{h^2} + v_n^k \right) = \varphi_n^k, \quad \varphi_h^k = f(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n) - \\ - \frac{\tau}{2} \left(\frac{f(t_k - \frac{\tau}{2}, x_{n+1}) - 2f(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n) + f(t_k - \frac{\tau}{2}, x_{n-1})}{h^2} - \right. \\ \left. - f(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n) \right), \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N, \quad N\tau = 1, \quad x_n = nh, \\ 2 \leq n \leq M-2, \quad Mh = 1, \\ v_n^N - v_n^0 = (e^{-1} - 1) \cos(\pi x_n), \quad x_n = nh, \quad 0 \leq n \leq M, \\ 3v_0^k - 4v_1^k + v_2^k = 3v_M^k - 4v_{M-1}^k + v_{M-2}^k = 0, \\ 10v_0^k - 15v_1^k + 6v_2^k - v_3^k = 10v_M^k - 15v_{M-1}^k + 6v_{M-2}^k - v_{M-3}^k = 0, \\ 0 \leq k \leq N \end{array} \right. \quad (21)$$

for (18).

3.1. The first order of accuracy difference scheme.

Applying the first order of accuracy difference scheme (20), we obtain $(N + 1) \times (M + 1)$ system of linear equations and we write them in the matrix form

$$Av_{n+1} + Bv_n + Cv_{n-1} = I\varphi_n, \quad 1 \leq n \leq M - 1, \quad (22)$$

$$v_0 = v_1, \quad v_M = v_{M-1},$$

where

$$C = A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)},$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)},$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 1 \\ y & z & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & z & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & y & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & y & z \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}.$$

Here,

$$x = -\frac{1}{h^2}, \quad y = -\frac{1}{\tau}, \quad z = \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} + 1,$$

$$v_s = \begin{bmatrix} v_s^0 \\ \dots \\ v_s^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1} \quad \text{for } s = n+1, n, n-1,$$

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} (e^{-1} - 1) \cos \pi x_n \\ \varphi_1^k \\ \dots \\ \varphi_{M-1}^k \\ \varphi_M^k \end{bmatrix}_{(M+1) \times 1}.$$

So, we have the second order difference equation with respect to n with matrix A, B and C coefficients. For the solution of the matrix equation, we seek the solution as of the form

$$\begin{cases} v_n = \alpha_{n+1} v_{n+1} + \beta_{n+1}, & n = M-1, \dots, 2, 1, \\ v_M = (I - \alpha_M)^{-1} \beta_M, \end{cases} \quad (23)$$

where α_j and β_j , $j = 1, \dots, M$ are calculated as

$$\begin{cases} \alpha_{j+1} = -(B + C\alpha_j)^{-1} (A), \\ \beta_{j+1} = (B + C\alpha_j)^{-1} (D\varphi_j - C\beta_j), \end{cases} \quad (24)$$

with α_1 is identity matrix and β_1 is zero matrix. Then, using (19) for values of $p(x_n)$ at grid points and replacing $p(x_n)$ in (17), we get $(N+1) \times (M+1)$ system of linear equations. It can be written in the matrix form

$$A_2 u_{n+1} + B_2 u_n + C_2 u_{n-1} = I \varphi_n, \quad 1 \leq n \leq M-1, \quad (25)$$

$$u_0 = u_1, \quad u_M = u_{M-1},$$

where

$$C_2 = C, \quad A_2 = A,$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ y & z & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & z & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & y & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & y & z \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)} .$$

Here,

$$y = -\frac{1}{\tau}, \quad z = \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} + 1,$$

$$u_s = \begin{bmatrix} u_s^0 \\ \dots \\ u_s^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1} \quad \text{for } s = n + 1, n, n - 1,$$

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \cos \pi x_n \\ \varphi_1^k \\ \dots \\ \varphi_{M-1}^k \\ \varphi_M^k \end{bmatrix}_{(M+1) \times 1} .$$

Again, applying formulas (23) and (24), we can obtain the solution u_n^k , $0 \leq k \leq \leq N$, $0 \leq n \leq M$.

3.2. The second order of accuracy difference scheme.

Applying the second order of accuracy difference scheme (21), we have again $(N + 1) \times (M + 1)$ system of linear equations and we write them in the matrix form

$$\begin{cases} Av_{n+2} + Bv_{n+1} + Cv_n + Dv_{n-1} + Ev_{n-2} = I\varphi_n, & 2 \leq n \leq M - 2, \\ -3v_0 + 4v_1 - v_2 = -3v_M + 4v_{M-1} - v_{M-2} = \tilde{0}, \\ 10v_0 - 15v_1 + 6v_2 - v_3 = 10v_M - 15v_{M-1} + 6v_{M-2} - v_{M-3} = \tilde{0}, \end{cases}$$

$$E = A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)} ,$$

$$D = B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)} ,$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)},$$

and

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 1 \\ \sigma & \gamma & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & \gamma & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \sigma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \sigma & \gamma \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}.$$

Here,

$$\alpha = \frac{\tau}{2h^4}, \beta = -\frac{1}{h^2} - \frac{2\tau}{h^4} - \frac{\tau}{h^2}, \gamma = \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} + \frac{3\tau}{h^4} + \frac{2\tau}{h^2} + \frac{\tau}{2} + 1, \sigma = -\frac{1}{\tau}.$$

For the solution of the matrix equation, we seek the solution as of the form

$$\begin{cases} v_n = \alpha_{n+1}v_{n+1} + \beta_{n+1}v_{n+2} + \gamma_{n+1}, \quad n = M-2, \dots, 0, \\ L = -(9I - 4\alpha_{M-2} - \beta_{M-2})(3I + \beta_{M-1}) + \\ \quad + (4I - \alpha_{M-1})(8I - 3\alpha_{M-2}), \\ v_{M-1} = L^{-1}((-3I - \beta_{M-1})(\gamma_{M-2}) + (8I - 3\alpha_{M-2})(\gamma_{M-1})), \\ 1v_M = L^{-1}((9I - 4\alpha_{M-2} - \beta_{M-2})(\gamma_{M-1}) - (4I - \alpha_{M-1})(\gamma_{M-2})), \end{cases} \quad (26)$$

where α_j, β_j and $\gamma_j, j = 1, \dots, M-1$ are calculated as

$$\begin{cases} L_j = C + D\alpha_j + E(\beta_{j-1} + \alpha_{j-1}\alpha_j), \\ \alpha_{j+1} = -(L_j)^{-1}(B + D\beta_j + E\alpha_{j-1}\beta_j), \\ \beta_{j+1} = -(L_j)^{-1}A, \\ \gamma_{j+1} = (L_j)^{-1}(I\varphi_j - D\gamma_j - E(\alpha_{j-1}\gamma_j + \gamma_{j-1})), \end{cases} \quad (27)$$

where

$$\alpha_1 = \frac{4}{3}I, \beta_1 = -\frac{1}{3}I, \gamma_1 = \tilde{0}$$

and

$$\alpha_2 = \frac{8}{5}I, \beta_2 = -\frac{3}{5}I, \gamma_2 = \tilde{0}.$$

Using (17) for values of $p(x_n)$ at grid points and replacing $p(x_n)$ in (18), we get $(N+1) \times (M+1)$ system of linear equations. It can be written in the matrix form

$$\begin{cases} A_2u_{n+2} + B_2u_{n+1} + C_2u_n + D_2u_{n-1} + E_2u_{n-2} = I\varphi_n, \quad 2 \leq n \leq M-2, \\ -3u_0 + 4u_1 - u_2 = \tilde{0}, \quad -3u_M + 4u_{M-1} - u_{M-2} = \tilde{0}, \\ 10u_0 - 15u_1 + 6u_2 - u_3 = \tilde{0}, \quad 10u_M - 15u_{M-1} + 6u_{M-2} - u_{M-3} = \tilde{0}, \end{cases}$$

where

$$A_2 = A, B_2 = B, D_2 = D, E_2 = E,$$

and

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \sigma & \gamma & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & \gamma & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \sigma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \sigma & \gamma \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)},$$

where

$$\gamma = \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} + \frac{3\tau}{h^4} + \frac{2\tau}{h^2} + \frac{\tau}{2} + 1, \sigma = -\frac{1}{\tau}.$$

Again, applying formulas (26) and (27), we can obtain the solution $u_n^k, 0 \leq k \leq \leq N, 0 \leq n \leq M$.

3.3. Error Analysis.

The numerical solutions are recorded for different values of N and M and u_n^k represents the numerical solutions of these difference schemes at (t_k, x_n) . Table 1 is constructed for $N = M = 20, 40$ and 80 respectively and the error is computed by the following formula

$$E = \max_{1 \leq k \leq N} \left\{ \sum_{n=1}^M |u(t_k, x_n) - u_n^k|^2 h \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Table 1. Error of the exact solution $u(t, x)$.

Method	N=M=20	N=M=40	N=M=80
1 st order of accuracy d.s.	0.0492	0.0243	0.0121
2 nd order of accuracy d.s.	0.0421	0.0097	0.0021

For their comparison, Table 2 is constructed when errors are computed by

$$E = \max_{\substack{1 \leq k \leq N \\ 1 \leq n \leq M}} |u(t_k, x_n) - u_n^k|.$$

Table 2. Error of the exact solution $u(t, x)$.

Method	N=M=20	N=M=40	N=M=80
1 st order of accuracy d.s.	0.0822	0.0419	0.0212
2 nd order of accuracy d.s.	0.0600	0.0147	0.0034

To support the numerical result, Table 3 is constructed for the error of $p(x)$ in maximum norm.

Table 3. Error of $p(x)$.

	N=20	N=40	N=80
1 st order of accuracy d.s.	0.0310	0.0166	0.0085
2 nd order of accuracy d.s.	0.0369	0.0126	0.0043

Thus, by using the second order of accuracy difference scheme the solution accuracy increases faster than the first order of accuracy difference scheme.

1. **Gorbachuk V. I.** Boundary value problems for operator differential equations [text] / V. I. Gorbachuk, M. L. Gorbachuk // Springer. – 1990. – P. 364.
2. **Dehghan M.** Determination of a control parameter in the two-dimensional diffusion equation [text] / M. Dehghan // Appl. Numer. Math. – 2001. – V. 37. – No. 4. – P. 489–502.
3. **Kimura T.** A Parabolic Inverse Problem Arising in a Mathematical Model for Chromatography [text] / T. Kimura and T. Suzuki // SIAM J. Appl. Math. – 1993. – V. 53. – No. 6. – P. 1747–1761.
4. **Gryazin Y. A.** Imaging the diffusion coefficient in a parabolic inverse problem in optical tomography [text] / Y. A. Gryazin, M. V. Klivanov and T. R. Lucas // Inverse Probl. – 1999. – V. 2. – No. 5. – P. 373–397.
5. **Cannon J. R.** Numerical procedures for the determination of an ... parabolic differential equations [text] / J. R. Cannon, Y. L. Lin, and S. Xu // Inverse Problems. – 1994. – V. 10. – P. 227–243.
6. **Chao-rong Ye** On the stability and convergence of a difference scheme for an one-dimensional parabolic inverse problem [text] / Chao-rong Ye and Zhi-zhong Sun // Appl. Math. Comput. – 2007. – V. 188. – No. 1. – P. 214–225.
7. **Dehghan M.** Finding a control parameter in one-dimensional parabolic equations [text] / M. Dehghan // Appl. Math. Comput. – 2003. – V.135. – No. 1-2. – P. 491–503.
8. **Eidelman Y. S.** Boundary Value Problems for Differential Equations with Parameters [text] / Y. S. Eidelman. // PhD Thesis. – Voronezh: Voronezh State University. – 1984. (Russian).
9. **Eidelman Y. S.** Two-point boundary value problem for differential equations with a parameter [text] / Y. S. Eidelman // Dopovidi Akademii Nauk Ukrainskoi RSR Seriya A-Fiziko-Matematichni ta Technichni Nauki. – 1983. – No. 4. – P. 15–18. (Russian).

10. **Prilepko A. I.** Inverse problems of potential theory [text] / A. I. Prilepko // *Mat. Zametki*. – 1973. – V. 14. – P. 755–767. (Russian).
11. **Iskenderov A. D.** The inverse problem of determining the right-hand sides of evolution equations in Banach space [text] / A. D. Iskenderov and R. G. Tagiev // *Nauchn. Trudy Azerbaidzhan. Gos. Univ.* – 1979. – No. 1. – P. 51–56. (Russian).
12. **Rundell W.** Determination of an unknown nonhomogeneous term in a linear partial differential equation from overspecified boundary data [text] / W. Rundell // *Applicable Anal.* – 1980. – V. 10. – P. 231–242.
13. **Prilepko A. I.** Some time-dependent inverse problems of hydrodynamics with final observation [text] / A. I. Prilepko and I. A. Vasin // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. – 1990. – V. 314. – P. 1075–1078; English transl *Soviet Math. Dokl.* – 1991. – V. 42.
14. **Prilepko A. I.** On certain inverse problems for parabolic equations with final and integral observation [text] / A. I. Prilepko and A. B. Kostin // *Mat. Sb.* – 1992. – V. 183. – No. 4. – P. 49–68; English transl *Russian Acad. Sci. Sb. Math.* – 1993. – V. 75.
15. **Prilepko A. I.** Uniqueness of the solution of an inverse problem for an evolution equation and applications to the transfer equation [text] / A. I. Prilepko, I. V. Tikhonov // *Mat. Zametki*. – 1992. – V. 51. – No. 2. – P. 77–87; English transl *Math. Notes*. – 1992. – V. 51.
16. **Orlovskii D. G.** On a problem of determining the parameter of an evolution equation [text] / D. G. Orlovskii // *Differentsialnye Uravneniya*. – 1990. – V. 26. – P. 1614–1621. (Russian).
17. **Eidelman Y. S.** Conditions for the solvability of inverse problems for evolution equations [text] / Yu. S. Eidelman // *Dokl. Akad. Nauk Ukrain. SSR Ser. A*. – 1990. – No. 7. – P. 28–31. (Russian).
18. **Ashyralyev A.** Well-Posedness of Parabolic Difference Equations [text] / A. Ashyralyev, P. E. Sobolevskii. – Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag., – 1994. – P. 349.
19. **Sobolevskii P. E.** The coercive solvability of difference equations [text] / P. E. Sobolevskii // *Dokl. Acad. Nauk SSSR*. – 1971. – V. 201. – No. 5. – P. 1063–1066. (Russian).
20. **Sobolevskii P. E.** Difference Methods for the Approximate Solution of Differential Equations [text] / P. E. Sobolevskii. – Voronezh: Voronezh State University. – 1975. (Russian).
21. **Ashyralyev A.** On a problem of determining the parameter of a parabolic equation [text] / A. Ashyralyev // *Ukrainian Mathematical Journal*. – 2010. – Vol. 62. – No. 9. – P. 1200–1210.
22. **Prilepko A. I.** Methods for solving inverse problems in mathematical physics [text] / A. I. Prilepko, D. G. Orlovskii, and I. A. Vasin // *Marcel Dekker*, 2000. – P. 744.

МЕХАНИКА

УДК 662.215.2

С. К. Асланов, Н. Н. Драгуновский, А. П. Царенко
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ
СМАЗКИ

Асланов С. К., Драгуновський М. М., Царенко О. П. Про одне узагальнення гідродинамічної теорії мастила. Гідродинамічну модель течії рідини із змінною в'язкістю в змащувальному зазорі побудовано з урахуванням сформованих тонких пристінних рідиннокристалічних шарів. Залежність коефіцієнту в'язкості від місцевої швидкості зсувної деформації та відстані до металевої поверхні забезпечує його суттєве збільшення у пристінних шарах. Побудована теорія дозволила у відповідності до експериментальних вимірів розраховувати товщину цих шарів змащення і міру упорядкованості їх структури.

Ключові слова: гідродинамічна теорія, мастило.

Асланов С. К., Драгуновский Н. Н., Царенко А. П. Об одном обобщении гидродинамической теории смазки. Гидродинамическая модель течения жидкости переменной вязкости в смазочном зазоре построена с учетом сформированных тонких пристенных жидкокристаллических слоев. Зависимость коэффициента вязкости от местной скорости сдвиговой деформации и расстояния до металлической поверхности обеспечивает его принципиальное увеличение в пристенных слоях. Построенная теория позволила в согласии с экспериментальными измерениями рассчитать толщину этих слоев смазки и меру упорядоченности их структуры.

Ключевые слова: гидродинамическая теория, смазка.

Aslanov S. K., Dragunovsky N. N., Tsarenko A. P. The generalization of the hydrodynamic theory of lubrication. Hydrodynamical model of the variable viscous fluid flow into a lubricating clearance with regard to formed thin wall-adjacent liquid-crystalline layers was constructed. The dependence for viscosity coefficient of local rate shear deformation and the distance up to metal surface is guaranteeing the principally viscosity increase of wall-adjacent layers. The constructed theory is making possible in accord experimental dimensions to calculate the thickness those lubricant layers and the degree ordering of the structure.

Key words: hydrodynamic theory, lubrication.

ВВЕДЕНИЕ. Наиболее распространенным видом взаимодействия трущихся поверхностей являются режимы смазывания, в которых действуют значительные тангенциальные напряжения. Основной износ поверхностей наблюдается при малых относительных скоростях их перемещений. В ряде практических трибоузлов реализуется квазистационарное граничное трение. Многокомпонентные смазочные смеси (синтетические жидкости, минеральные масла) способны образовывать полимолекулярные ориентационно-упорядоченные пристенные слои. Они являются по существу особой квазижидкокристаллической фазой [1, 2]. Формирование таких структурно-неоднородных слоев в тонких прослойках смазочных

жидкостей изменяет их свойства и определяет противоположные характеристики смазки и долговечность узлов трения. Толщина и упорядоченность этих приповерхностных слоев зависят от интенсивности анизотропного межмолекулярного взаимодействия жидкости и материала твердой (металлической) подложки, а тип ориентации — от микрорельефа поверхности. Учет влияния этих сверхтонких структурированных слоев позволяет углубить понимание процессов смазывания высоконагруженных узлов трения и установить повышенную вязкость в случаях гомеотропной ориентации на границе раздела твердой и жидкой фазы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ. Простейшее теоретическое объяснение указанных эффектов предлагается ниже построить на базе обобщения гидродинамической теории смазки. С этой целью рассматривается установившееся течение жидкой среды в узком (смазочном) зазоре толщины D между коаксиальными цилиндрами с характерной величиной радиуса R . Внутренний цилиндр (шип) считается неподвижным, а внешний (подшипник), вращаясь с угловой скоростью ω , служит причиной установления потока между цилиндрическими поверхностями. Относительная малость величины зазора, когда выполняется сильное неравенство ($D/R \ll 1$), позволяет локально пренебречь кривизной течения между цилиндрами. Поэтому естественно применить в качестве асимптотического представления рассматриваемой проблемы модель плоского течения вязкой жидкости между параллельными стенками, одна из которых неподвижна, а вторая движется со скоростью $V_* = \omega R$, т. е. воспользоваться моделью плоского сдвигового течения Куэтта.

Система координат связывается с неподвижной стенкой, вдоль которой направлена ось x , ось y — поперек потока. Рассматриваемое течение предполагается состоящим из трех областей: интервала "3" ($\delta \leq y \leq D - \delta$) центрального изотропного вязкого течения (с постоянным коэффициентом $\mu_3 = \mu_0 = const$) и двух структурированных пристенных слоев "1" ($0 \leq y \leq \delta$) и "2" ($D - \delta \leq y \leq D$) с толщиной δ соответственно у шипа и подшипника. Одинаковый характер этих слоев делает скоростной профиль потока $V(y)$ в зазоре двояксимметричным: как по отношению к срединной плоскости канала ($y = D/2$), так и по отношению к среднему поперечному сечению профиля.

Течение среды внутри пристенных слоев "1" и "2" будет моделироваться в рамках неньютоновой реологии жидкой среды с переменным коэффициентом вязкости. Зависимость для последнего должна отразить неинотропный характер пристенных потоков. Чтобы имитировать гомеотропный случай взаимодействия жидкой среды с обтекаемой твердой поверхностью, указанная зависимость должна обеспечивать обращение коэффициента вязкости на этой стенке в бесконечность, чему прямо соответствует обращение в нуль градиента скорости dV/dy . Такой подход призван отразить на гидродинамическом уровне наличие жесткокристаллической структуры молекулярного микрослоя, непосредственно прилипающего к обтекаемой поверхности. С удалением от нее имеет место плавный переход в жидкокристаллическое состояние, которое на границе структурированного слоя переходит в изотропное течение вязкой жидкости в средней области "3" зазора.

Отмеченная выше динамическая симметрия течения в зазоре позволяет ограничиться рассмотрением одной его половины $0 \leq y \leq (D/2)$, т. е. совокупностью структурированного слоя "1" ($0 \leq y \leq \delta$) и полуполосы $\delta \leq y \leq (D/2)$ области "3"

жидкости постоянной вязкости $\mu_3 = \mu_0$. Функциональное модельное выражение коэффициента вязкости μ_1 жидкости в пристенном слое "1" должно учитывать два фактора. С одной стороны, причиной структурирования служит взаимодействие потока жидкости с твердой поверхностью, так что выражение вязкости должно количественно включать эффект близости к этой поверхности $y = 0$, ибо с удалением от нее уменьшается ориентационная упорядоченность. С другой стороны, должны быть учтены реологические свойства текущей среды, выражаемые через скорость деформации, или градиент скорости dV_1/dy .

В частности, этого можно достигнуть, представляя коэффициент вязкости μ_1 структурированного слоя "1" следующим образом:

$$\mu_1 = const \cdot z^{-\varepsilon}, z = \int_0^y \frac{dV_1}{dy} dy = V_1(y) - V_1(0) \quad (1)$$

с помощью соответствующего скоростного профиля $V_1(y)$ и постоянного показателя степени ε , который подлежит определить. Функция $z(y)$ выражает суммарную скорость деформации, вычисляемую для каждого подслоя внутри структурированной зоны "1" (вплоть до ее границы $y = \delta$), который непосредственно прилегает к обтекаемой стенке $y = 0$. Тем самым вязкость оказывается фактически представленной в виде степенной функции относительной локальной скорости течения, и для $\varepsilon > 0$ гарантируется $\mu_1 \rightarrow \infty$ при $y = 0$. Константа в (1) определяется из контактного условия $\mu_1 = \mu_3 = \mu_0$ при $y = \delta$, а величина структурного параметра ε находится с использованием конкретных данных эксперимента.

Именно на базе степенной функции (1) удалось построить [3] теоретическое объяснение эффекта пристенного структурирования, приводящего к повышению сопротивления трения смазочного слоя.

Однако, недостатком такого теоретического описания динамики пристенного слоя является интегральный характер зависимости вязкости от скорости деформации, в то время как реологические свойства среды локальны. Поэтому в основу настоящего исследования положен следующий ее вариант:

$$\mu_1 = const \cdot y^{-\varepsilon_1} \left(\frac{dV_1}{dy} \right)^{-\varepsilon},$$

который явным образом включает как локальную скорость деформации, так и расстояние от обтекаемой стенки в данном месте. Причем присутствие последнего обязательно, поскольку формирование структуры пристенного слоя как раз и есть результат взаимодействия обтекающей жидкости и твердого поверхностного материала стенки $y = 0$.

В противном, т. е. при $\varepsilon_1 = 0$, сразу же утрачивается способность к структурированию. Действительно, уравнение для вязкого напряжения τ_j в рассматриваемой задаче об установившемся движении вязкой жидкой среды в зазоре есть

$$\frac{d\tau_j}{dy} = \frac{d}{dy} \left(\mu_j \frac{dV_j}{dy} \right) = 0$$

с первым интегралом, общим для областей $j = 1, 3$

$$\tau_j = \mu_j \frac{dV_j}{dy} = C_0 = const \quad (2)$$

Отсюда даже при произвольной зависимости $\mu_1(dV_1/dy)$ будем иметь $dV_1/dy = const$ и $\mu_1 = const$.

Вполне естественно принять неизвестные постоянные $\varepsilon_1 = \varepsilon$ для достижения инвариантности коэффициента вязкости относительно изменения пространственного масштаба y .

Таким образом, для пристенного слоя $0 \leq y \leq \delta$ можно окончательно записать

$$\mu_1 = const \cdot \left(y \frac{dV_1}{dy} \right)^{-\varepsilon}, \quad \text{или} \quad \mu_1 = \mu_0 \cdot \left\{ \frac{y}{\delta} \cdot \frac{dV_1/dy}{(dV_1/dy)_{y=\delta}} \right\}^{-\varepsilon}, \quad (3)$$

если выразить постоянный множитель с помощью условия непрерывности вязкости $\mu_1 = \mu_0$ на границу $y = \delta$, разделяющей структурированный слой "1" и поток "3" с постоянным коэффициентом вязкости $\mu_3 = \mu_0$.

Возникающая сопряженная математическая задача для уравнения (2) в областях "1", "3" формулируется следующими краевыми условиями:

$$V_1 = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad (4)$$

$$V_3 = V_*/2 \quad \text{при} \quad y = D/2, \quad (5)$$

$$V_1 = V_3 \quad \text{при} \quad y = \delta. \quad (6)$$

Первое из них отвечает прилипанию структурированного слоя к стенке. Второе — возникает из указанной выше симметрии течения в зазоре и вводит в решение проблемы характерную величину масштаба скорости V_* . Последнее условие отвечает непрерывности скоростного профиля на границе областей "1" и "3". Выполнение непрерывности касательного напряжения $\tau_1 = \tau_3$ на этой границе гарантируется общностью константы C_0 (2) для всего течения в целом. Отсюда в силу соответствующей непрерывности коэффициента вязкости $\mu_1 = \mu_3$ автоматически следует непрерывность градиента скорости: $dV_1/dy = dV_3/dy$ при $y = \delta$. Последнее отвечает гладкому сопряжению профилей скорости $V_1(y)$ и $V_3(y)$ на границе между структурированным слоем "1" и зоной "3" течения с постоянной вязкостью. Это в какой-то мере может служить модельным отражением экспериментально наблюдаемой размытости границы структурно-неоднородного слоя.

Для области постоянной вязкости $j = 3$ из уравнения (2) с учетом (5) находится линейный профиль скорости

$$V_3(y) = \frac{C_0}{\mu_0} \left(y - \frac{D}{2} \right) + \frac{V_*}{2}. \quad (7)$$

Из (2), (3) имеем

$$\frac{dV_1}{dy} = \frac{C_0}{\mu_0} \left(\frac{y}{\delta} \frac{dV_1}{dy} \right)^\varepsilon \left(\frac{dV_1}{dy} \Big|_{y=\delta} \right)^{-\varepsilon}. \quad (8)$$

Применяя (2) на границе $y = \delta$, получим

$$\frac{C_0}{\mu_0} = \frac{dV_1}{dy} \Big|_{y=\delta}. \quad (9)$$

Тогда, интегрируя (2) для $j = 1$ с учетом выражений (3), (8) и граничного условия (4), можно в результате найти

$$V_1(y) = \frac{C_0}{\mu_0}(1 - \varepsilon)\delta \cdot \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}. \quad (10)$$

Условие (6) сращивания решений (7), (10) позволяет определить неизвестную константу

$$C_0 = \frac{\mu_0 V_*}{D - 2\delta\varepsilon} \quad (11)$$

и окончательно выразить оба профиля скорости

$$V_1(y) = \frac{(1 - \varepsilon)V_*}{D/\delta - 2\delta\varepsilon} \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$$

$$V_3(y) = \frac{V_*}{2} \left[1 + \frac{1}{D/\delta - 2\varepsilon} \left(\frac{2y}{\delta} - \frac{D}{\delta} \right) \right]. \quad (12)$$

Поскольку скорость $V_1(y)$ должна быть убывающей функцией с приближением к стенке $y = 0$, обращаясь по (4) в нуль, соответственно (12) необходимо $\varepsilon < 1$. Это обеспечивает положительность V_1 , так как $(D/\delta) \geq 2$. Вязкость структурированного слоя μ_1 вблизи стенки ($y \rightarrow 0$) согласно (3), (10) имеет порядок

$$\mu_1 \sim () - \varepsilon \sim y^{-1-\varepsilon},$$

что может обеспечить неограниченный рост μ_1 лишь при $\varepsilon > 0$.

В то же время среднеинтегральное значение вязкости в слое "1" по его толщине может быть выражено с учетом (3), (12)

$$\langle \mu_1 \rangle = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \mu_1 dy = \frac{\mu_0}{\delta} \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} dy = \mu_0 \frac{1 - \varepsilon}{1 - 2\varepsilon} \left\{ 1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon}} \Big|_{y \rightarrow 0} \right\}.$$

Смысл может иметь исключительно $\varepsilon < 1/2$, ибо в противном случае интеграл расходится, и среднее значение вязкости во всем слое "1" $\langle \mu_1 \rangle \rightarrow \infty$. Итак, окончательно допустимым интервалом значений ε может служить

$$0 < \varepsilon < 1/2. \quad (13)$$

Следовательно, отношение $\langle \mu_1 \rangle / \mu_0$ оказывается больше единицы, свидетельствуя о повышенной вязкости пристенного структурно-неоднородного слоя, а значит, и всей смазочной прослойки. Причиной служит пристенная ориентационная упорядоченность жидкой смазки, в результате чего повышается ее противоизносная характеристика. Неограниченный рост коэффициента вязкости и соответствующее убывание градиента скорости (сдвиговой деформации) в непосредственной близости от обтекаемой твердой стенки может служить гидродинамическим модельным отражением жесткого прилипания к ней микроскопического слоя смазки, который и выполняет свою защитную роль для поверхностей шипа и подшипника.

Согласно (2) в рамках асимптотического подхода $D/R \ll 1$ напряжение вязкого трения одинаково во всем смазочном зазоре, так что суммарный закручивающий момент на единицу длины оси подшипника выражается по (11) следующим образом:

$$M = 2\pi R^2 \tau, \quad \text{где} \quad \tau = C_0 = \frac{\mu_0 V_*}{D - 2\varepsilon\delta}. \quad (14)$$

При отсутствии структурно-неоднородных пристенных слоев, если изотропное вязкое течение целиком заполняет смазочный зазор ($\mu = \mu_0 = \text{const}$, т. е. $\varepsilon = 0$)

$$M_0 = 2\pi R^2 C_0|_{\varepsilon=0} = \frac{\mu_0 V_*}{D}.$$

Моменту M из (14) можно придать форму, подобную M_0

$$M = 2\pi R^2 \frac{\mu_e V_*}{D}, \quad \text{где} \quad \mu_e = \frac{\mu_0}{1 - 2\varepsilon(\delta/D)}, \quad (15)$$

если ввести в рассмотрение соответствующий эффективный коэффициент вязкости μ_e для всей смазочной прослойки в целом; именно величина μ_e измеряется практически.

Тем самым увеличение относительного закручивающего эффекта вязких сил примет вид

$$\frac{M}{M_0} = \frac{\mu_e}{\mu_0}, \quad \text{или} \quad E = \frac{D}{2\varepsilon\delta} = \frac{1}{1 - (\mu_0/\mu_e)}, \quad (16)$$

если ввести в рассмотрение комплекс E .

В результате экспериментально определяемые [4] величины E и M_0 (т. е. μ_e и μ_0) оказываются связанными с неизвестными модельными параметрами ε и δ , которые теоретически отражают наличие неньютонова характера течения в пристенных слоях смазки. Вполне понятно, μ_0 может определяться однозначно при условии достаточной общей толщины D зазора ($D/\delta \ll 1$), когда влиянием микронных слоев пристенной структурной неоднородности уже можно пренебречь по сравнению с изотропной областью постоянной вязкости. Напротив, экспериментальное значение μ_e будет зависеть от средней скорости сдвиговой деформации среды $\gamma = \langle (dV/dy) \rangle$, которая в данном случае совпадает с суммарным ее значением (V_*/D). То же самое следует заметить и в отношении толщины δ пристенных неизотропных слоев.

Таким образом, вместе с изменением интенсивности сдвиговой деформации $\gamma = V_*/D$ будут изменяться измеряемая вязкость $\mu_e(\gamma)$ и толщина $\delta(\gamma)$. При отсутствии течения (когда можно считать γ близким к нулю) неподвижный пристенный структурированный слой характеризуется определенными предельными значениями эффективной вязкости $\mu_e|_{\gamma \rightarrow 0} = \mu_e^0$ и начальной толщины $\delta|_{\gamma \rightarrow 0} = \delta_0$. Последняя будет максимальной и одной и той же во всех прослойках данной смазки при $D \geq 2\delta_0$. В этих случаях эффективная вязкость $\mu_e^0(D)$ изменяется с толщиной D только за счет различной доли области постоянной вязкости μ_0 в прослойке. Что касается более тонких прослоек ($D \leq 2\delta_0$), то в них структурированные слои смыкаются между собой ($D = 2\delta_0$) или взаимно срезаются, а вязкость в них определяется своим средним по слою значением и их общей толщиной D (толщина каждого из срезанных слоев сохраняется ($D/2$)).

В результате равенство (16) приобретает свою предельную форму

$$E|_{\gamma \rightarrow 0} = E_0 = \frac{D}{2\varepsilon\delta_0} = \frac{1}{1 - (\mu_0/\mu_e^0)}. \quad (17)$$

Экспериментально устанавливаемая в изотермических опытах с прослойками смазки данного типа для их различных толщин предельная ($\gamma \rightarrow 0$) величина относительной эффективной вязкости μ_e^0/μ_0 позволяет рассчитать с помощью (17) неизвестные модельные параметры структурирования ε и δ_0 .

Действительно, в силу их постоянства для данного вида смазки зависимость $E_0 = E_0(D)$ при $D > 2\delta_0$ линейна. Начиная с $D = 2\delta_0$, т. е. достаточно тонкой прослойки, структурированные приповерхностные слои на шипе и подшипнике смыкаются, и при дальнейшем уменьшении D комплекс E_0 сохраняет приобретенное значение:

$$E_0 = 1/\varepsilon \quad \text{при} \quad D \leq 2\delta_0. \quad (18)$$

Таким образом, на плоскости (E_0, D) зависимость $E_0 = E_0(D)$ будет теоретически изображаться двумя прямыми (17) и (18) — наклонной и параллельной оси D , пересекающимися в точке $(D = 2\delta_0, E_0 = 1/\varepsilon)$, которая является определяющей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Построенная математическая модель, являющаяся физическим обобщением гидродинамической теории смазки, позволяет на базе реологических экспериментов произвести реальную количественную оценку модельных структурных параметров неоднородных пристенных слоев: их толщину δ_0 и степень упорядоченности в них ε . Поскольку смазочные зазоры имеют сверхтонкий (микронный) характер, такие эксперименты по определению μ_e^0/μ_0 удастся выполнить дискретно — для отдельных значений толщины D .

На рис. 1 проставлены расчетные зависимости $E_0 = E_0(D)$ в виде четырех точек, полученных при $D = 1, 5; 4, 5; 6, 5; 8, 5$ мкм для вазелинового масла с 1%-ной добавкой жидкого кристалла Н-37 (график 1) и с 1%-ной добавкой олеиновой кислоты (график 2) при температуре $22 \div 27^\circ\text{C}$.

Пересечение пунктирных прямых, проведенных в каждом случае по опытным данным, соответственно определяет: $\delta_0 = D \approx 3$ мкм, $\varepsilon = 1/0 \approx 0,46$ и $\delta_0 \approx 2,5$ мкм, $\varepsilon \approx 0,2$ [5]. При этом относительная погрешность составляет 10 % для δ_0 и (15÷20) % для ε . Близкие значения указанных модельных характеристик аналогично можно найти для моторного минерального масла SAE 15W-40: $\delta_0 \approx 2$ мкм, $\varepsilon \approx 0,26$.

Большая величина погрешности определения степени упорядоченности ε свидетельствует о том, что предлагаемое моделирование, давая достаточно адекватное описание сложнейшего процесса, не учитывает изменений показателя ε в пристенном неоднородном слое (особенно в самой близости от металлической подложки).

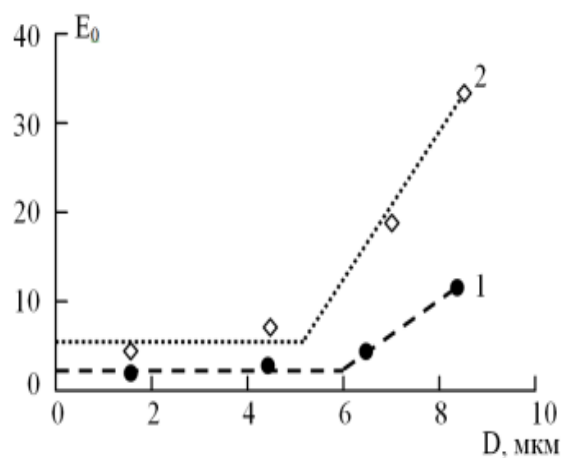


Рис. 1

1. **Кириян С. В.** Эпитропные жидкокристаллические слои синтетических масел и их влияние на сдвиговое течение [текст] / С. В. Кириян, Б. А. Алтоиз // Физика дисперсных систем. – Одесса, 2008. – № 45. – С. 72–77.
2. **Кириян С. В.** Реология моторных масел с квазижидкокристаллическим в триаде трения [текст] / С. В. Кириян, Б. А. Алтоиз // Трение и износ. – Белоруссия, 2010. – № 3. – С. 13–19.
3. **Altoiz В. А.** Structural rheological model of two-phase interlayer shear flow [text] / В. А. Altoiz, S. K. Aslanov, S. V. Kiriyan // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP). – 2011. – № 2. – P. 323–330.
4. **Алтоиз Б. А.** Ротационный вискозиметр для исследования микронных прослоек [текст] / Б. А. Алтоиз, С. К. Асланов, А. Ф. Бутенко // Физика дисперсных систем. – Одесса, 2005. – № 42. – С. 53–65.
5. **Кириян С. В.** Реологическая модель прослойки со структурированными слоями "переменной вязкости" [текст] / С. В. Кириян, Б. А. Алтоиз, С. К. Асланов // "Дисперсные системы". Материалы XXIV научной конференции стран СНГ. – Одесса, 2010. – С. 147–148.

УДК 531.381

Т. А. Козаченко*, Д. Д. Лещенко*, А. Л. Рачинская**

*Одесская государственная академия строительства и архитектуры

**Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ВОЗМУЩЕННЫЕ ВРАЩЕНИЯ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИССИПАТИВНЫХ МОМЕНТОВ

Козаченко Т. О., Лещенко Д. Д., Рачинська А. Л. Збурені обертання вовчка Лагранжа під дією нестационарних дисипативних моментів. Досліджується збурений рух вовчка Лагранжа під дією дисипативних моментів, які залежать від повільного часу. Здобута усереднена система рівнянь в першому наближенні для повільних змінних. Побудовано чисельне розв'язання усередненої системи рівнянь руху твердого тіла.

Ключові слова: збурений рух, усереднювання, момент.

Козаченко Т. А., Лещенко Д. Д., Рачинская А. Л. Возмущенные вращения волчка Лагранжа под действием нестационарных диссипативных моментов. Исследуется возмущенное движение волчка Лагранжа под действием диссипативных моментов, зависящих от медленного времени. Получена усредненная система уравнений первого приближения для медленных переменных. Построено численное решение усредненной системы уравнений движения твердого тела.

Ключевые слова: возмущенное движение, усреднение, момент.

Kozachenko T. A., Leshchenko D. D., Rachinskaya A. L. Perturbed rotation of Lagrange top under the action of nonstationary dissipative torques. Perturbed motion of Lagrange top under the action of dissipative torques depending on slow time investigated. The averaged system of equations of the first approximation is got for slow variables. The numerical solution of the averaged system of equations of motion of a rigid body is conducted.

Key words: perturbed motion, averaging, torque.

ВВЕДЕНИЕ. Значительное количество работ посвящено исследованию движений волчка Лагранжа с неподвижной точкой, обусловленных влиянием: а) момента, постоянного в связанных осях; б) линейного диссипативного момента; в) медленного времени [1-5]. Для исследования данных задач применяется метод усреднения [6, 7]. Асимптотические методы являются мощным аппаратом исследования проблем динамики твердого тела.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

1. Постановка задачи. Рассматривается движение динамически симметричного твердого тела относительно неподвижной точки под действием возмущающего момента сил. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned}
 A\dot{p} + (C - A)qr &= \mu \sin \theta \cos \varphi + \varepsilon M_1, \\
 A\dot{q} + (A - C)pr &= -\mu \sin \theta \sin \varphi + \varepsilon M_2, \\
 C\dot{r} &= \varepsilon M_3, \quad M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau), \quad (i = 1, 2, 3), \quad \tau = \varepsilon t, \\
 \dot{\psi} &= (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{cosec} \theta, \\
 \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi, \\
 \dot{\varphi} &= r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Динамические уравнения (1) записаны в проекциях на главные оси инерции тела. Здесь p, q, r — проекции вектора угловой скорости тела на главные оси; величины $\varepsilon M_i (i = 1, 2, 3)$ — проекции вектора возмущающего момента на те же оси, они зависят от медленного времени $\tau = \varepsilon t$ ($\varepsilon \ll 1$ — малый параметр, t — время); ψ, θ, φ — углы Эйлера; A — экваториальный, C — осевой момент инерции тела относительно точки O . Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент $\mu = mgl$, величина которого постоянна. Здесь m — масса тела, g — ускорение силы тяжести, l — расстояние от неподвижной точки O до центра тяжести тела.

Ставится задача исследования асимптотического поведения решений системы (1) при малом ε на интервале времени порядка ε^{-1} , с помощью метода усреднения [6, 7].

Для получения усредненной системы уравнений первого приближения для медленных переменных применяется подход, разработанный Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, Ф. Л. Черноушко [1]. Данная методика используется для усреднения системы (1) при возмущениях, зависящих от медленного времени τ и допускающих усреднение по углу нутации θ . Усредненная система уравнений имеет вид:

$$\frac{du_i}{d\tau} = U_i(u_1, u_2, u_3), \quad u_i(0) = u_i^0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2}$$

Здесь u_1, u_2, u_3 — вещественные корни кубического многочлена [8]

$$\begin{aligned}
 Q(u) &= A^{-2}[(2H - Cr^2 - 2\mu u)(1 - u^2)A - (G_z - Cru)^2], \\
 -1 &\leq u_1 \leq u_2 \leq 1 \leq u_3 < +\infty,
 \end{aligned}$$

G_z — проекция вектора кинетического момента на вертикаль Oz , H — полная энергия тела.

2. Движение твердого тела под действием диссипативных моментов. Рассмотрим возмущенное движение близкое к случаю Лагранжа под действием внешней среды. Возмущающие моменты $M_i (i = 1, 2, 3)$ являются линейно-диссипативными и медленно изменяются во времени:

$$M_1 = -a(\tau)p, \quad M_2 = -a(\tau)q, \quad M_3 = -b(\tau)r, \quad a(\tau), b(\tau) > 0, \quad \tau = \varepsilon t. \tag{3}$$

Здесь $a(\tau), b(\tau)$ — интегрируемые функции, зависящие от свойств среды и формы тела.

Первые три уравнения (1) с учетом (3) удовлетворяют условиям используемой методики [1] и приводятся к виду:

$$\begin{aligned}\dot{G}_z &= -\varepsilon ((a(\tau)p \sin \varphi + a(\tau)q \cos \varphi) \sin \theta + b(\tau)r \cos \theta), \\ \dot{H} &= -\varepsilon (a(\tau)(p^2 + q^2) + b(\tau)r^2), \\ \dot{r} &= -\varepsilon C^{-1} b(\tau)r.\end{aligned}\quad (4)$$

Третье уравнение (4) может быть проинтегрировано:

$$r = r^0 \exp(-\varepsilon C^{-1} \int_0^t b(\varepsilon t) dt). \quad (5)$$

Рассмотрим случай, когда $a(\tau)$, $b(\tau)$ имеют вид:

$$a(\tau) = a_0 + a_1 \tau, \quad b(\tau) = b_0 + b_1 \tau, \quad a_0, a_1, b_0, b_1 - const. \quad (6)$$

В результате преобразований получим следующую усредненную систему:

$$\begin{aligned}\frac{du_i}{d\tau} &= N(u_i) \left\{ A^{-1} (G_z - C r u_i) (w (G_z - C r v) + \varepsilon a_1 C r n / \alpha) + \right. \\ &\quad \left. + (u_i^2 - 1) (w (2H - C r^2 - 2\mu v) + 2\varepsilon a_1 \mu n / \alpha) + \right. \\ &\quad \left. + r (G_z - C r u_i) ((b_0 + \varepsilon b_1 K(k) / \alpha)(v - u_i) - \varepsilon b_1 n / \alpha) \right\}, \quad i = 1, 2, 3,\end{aligned}\quad (7)$$

где

$$\begin{aligned}N(u_1) &= \frac{-1}{A\mu(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)}, \\ w &= a_0 + \varepsilon a_1 K(k) / \alpha, \quad v = u_3 - (u_3 - u_1) E(k) / K(k), \\ n &= (u_3 - u_1) (E(\beta, k) - \beta E(k) / K(k)), \\ \alpha &= (\mu (u_3 - u_1) / (2A))^{1/2}, \quad \operatorname{sn}(\alpha t + \beta) = \operatorname{sn} am(\alpha t + \beta, k), \\ k^2 &= (u_2 - u_1)(u_3 - u_1)^{-1}, \quad 0 \leq k^2 \leq 1, \\ G_z &= \delta_2 (A\mu)^{1/2} (u_1 + u_2 + u_3 + u_1 u_2 u_3 + \delta_1 R)^{1/2} \times \\ &\quad \times \operatorname{sign}(1 + u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3), \\ H &= 0.5\mu ((u_1 + u_2 + u_3)(1 + AC^{-1}) + \\ &\quad + (\delta_1 R - u_1 u_2 u_3)(1 - AC^{-1})), \quad \delta_2 = \operatorname{sign} r, \\ r &= \delta_2 C^{-1} (A\mu)^{1/2} (u_1 + u_2 + u_3 + u_1 u_2 u_3 - \delta_1 R)^{1/2}, \\ R &= ((1 - u_1^2)(1 - u_2^2)(u_3^2 - 1))^{1/2}, \quad \delta_1 = \operatorname{sign}(G_z^2 - C^2 r^2).\end{aligned}\quad (8)$$

Здесь $N(u_2)$ и $N(u_3)$ получаются из $N(u_1)$ циклической перестановкой индексов у u_i ; величины δ_1, δ_2 в начальный момент определяются по начальным условиям для G_z, r ; sn — эллиптический синус, k — модуль эллиптических функций, $E(k), K(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, $E(\beta, k)$ — эллиптический интеграл второго рода.

После решения и исследования системы (7) для u_i исходные переменные G_z, H, r восстанавливаются по формулам (8). Медленные переменные u_i, G_z, H, r определяются с погрешностью порядка ε .

Также рассмотрим случай, когда $a(\tau)$, $b(\tau)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} a(\tau) &= a_0 + \Delta a_1 \exp(-\sigma\tau), & b(\tau) &= b_0 + \Delta b_1 \exp(-\sigma\tau), \\ a_0, \Delta a_1, b_0, \Delta b_1, \sigma &- \text{const.} \end{aligned} \quad (9)$$

Усредненная система (2) при этом записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{d\tau} &= N(u_i) \left\{ a_0 \left[z(u_i) (G_z - Crv) + (u_i^2 - 1)(2H - Cr^2 - 2\mu v) \right] + \right. \\ &\quad + b_0 r (u_i - v) (Cru_i - G_z) + \\ &\quad + \frac{\alpha(1 - \exp(-2\varepsilon\sigma K(k)/\alpha))}{2\varepsilon\sigma K(k)} \left(\Delta a_1 \left[z(u_i) (G_z - Cru_1) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (u_i^2 - 1)(2H - Cr^2 - 2\mu u_1) \right] + \Delta b_1 r (u_i - u_1) (Cru_i - G_z) \right) - \\ &\quad - \left(\Delta a_1 \left[z(u_i) Cr + (u_i^2 - 1) 2\mu \right] + \Delta b_1 r (Cru_i - G_z) \right) \times \\ &\quad \times \frac{\alpha(u_2 - u_1)}{2K(k)} \int_0^{2K(k)/\alpha} \exp(-\varepsilon\sigma t) \text{sn}^2(\alpha t + \beta) dt \Big\}, \quad i = 1, 2, 3, \\ v &= u_3 - (u_3 - u_1)E(k)/K(k), \quad z(u_i) = A^{-1} (G_z - Cr u_i). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $N(u_i)$, G_z , H , r , α , k определяются из формул (8).

Усредненные системы (7) и (10) проинтегрированы численно при разных начальных условиях и параметрах задачи. Рассмотрим три случая, соответствующие следующим начальным данным:

$$\text{а) } u_1^0 = 0.913, \quad u_2^0 = 0.996, \quad u_3^0 = 1.087, \quad \theta^0 = 5^0; \quad (11)$$

$$\text{б) } u_1^0 = 0, \quad u_2^0 = 0.5, \quad u_3^0 = 2, \quad \theta^0 = 60^0; \quad (12)$$

$$\text{в) } u_1^0 = -0.992, \quad u_2^0 = -0.985, \quad u_3^0 = 2.992, \quad \theta^0 = 170^0. \quad (13)$$

Предполагается, что в начальный момент волчок Лагранжа получил угловую скорость вращения относительно оси динамической симметрии, равную $r^0 = \sqrt{3}$, кроме того $A = 1.5$, $C = 1$, $\mu = 0.5$, $a_1 = b_1 = 1$, $\Delta a_1 = \Delta b_1 = \varepsilon\eta$, $a_0 = 0.125$, $b_0 = 0.1$, $\sigma = 0.1$, $\eta = 1$.

Численный расчет был проведен при различных значениях $\varepsilon \in [0, \dots 10^{-4}]$. На рисунке 1-3 изображены графики функций u_i ($i = 1, 2, 3$), G_z , H , r для указанных случаев при $\varepsilon = 10^{-4}$. При $\varepsilon = 0$ системы (7) и (10) упрощаются и соответствуют случаю линейной диссипации с постоянными коэффициентами [1].

На рис. 1 приведен результат численного интегрирования системы (7) при начальных условиях (11). Как видно, полная энергия тела, проекция вектора кинетического момента на вертикаль, угловая скорость вращения относительно оси динамической симметрии монотонно убывают. Величина u_3 достаточно быстро стремится к 1, u_2 медленнее стремится к -1, чем u_1 .

В случае начальных значений (12) результат численного интегрирования системы (7) изображен на рис. 2. Как и на рис. 1, переменная u_3 стремится к единице. Проекция вектора кинетического момента G_z и r монотонно убывают к нулю. Полная энергия H монотонно убывает, приближаясь к значению $H = -0.5$. Величины u_1 и u_2 стремятся к -1.

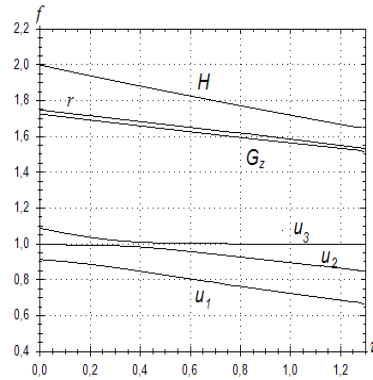


Рис. 1

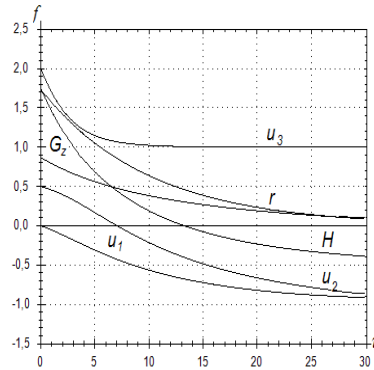


Рис. 2

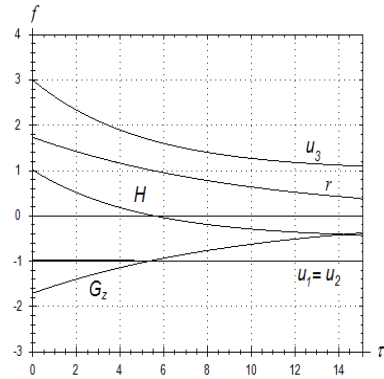


Рис. 3

На рис. 3 представлены графики функций u_i ($i = 1, 2, 3$), G_z , H , r , полученные при численном интегрировании системы (10) для начальных данных (13). Величина u_3 медленнее стремится к $+1$, чем на рис. 1 и 2. Проекция вектора кинетического момента на вертикаль G_z монотонно возрастает и стремится к нулю. Величины H и r монотонно убывают. На рис. 3 графики функций u_1 и u_2 совпадают, но при численном сопоставлении отличаются в третьем знаке после запятой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. При сравнении полученных результатов с результатами [1] можно отметить, что зависимость возмущающего момента от медленного времени приводит к появлению в усредненной системе уравнений первого приближения для медленных переменных дополнительных слагаемых, содержащих эллиптические интегралы первого и второго рода, которые при численном интегрировании сглаживают поведение функций u_i ($i = 1, 2, 3$), G_z , H . Под действием возмущающего момента (3) твердое тело стремится к устойчивому нижнему положению равновесия быстрее, чем в [1].

1. **Акуленко Л. Д.** Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, Ф. Л. Черноусько // Прикладная математика и механика. – 1979. – Т. 43, № 5. – С. 771–778.
2. **Акуленко Л. Д.** Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, Ф. Л. Черноусько // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – № 5. – С. 3–10.
3. **Лещенко Д. Д.** Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа [текст] / Д. Д. Лещенко, А. С. Шамаев // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – № 6. – С. 8–17.
4. **Сазонов В. В.** Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярным прецессиям Лагранжа [текст] / В. В. Сазонов, В. В. Сидоренко // Прикладная математика и механика. – 1990. – Т. 54, № 6. – С. 951–957.
5. **Акуленко Л. Д.** Эволюция вращений волчка Лагранжа под действием возмущающего момента сил, медленно изменяющегося во времени [текст] / Л. Д. Акуленко, Т. А. Козаченко, Д. Д. Лещенко // Вісник Одеськ. держ. ун-ту. – 2000. – Т. 5, Вип. 3., Фіз.-мат. науки. – С. 102–108.
6. **Боголюбов Н. Н.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний [текст] / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
7. **Волосов В. М.** Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем [текст] / В. М. Волосов, Б. И. Моргунов. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 507 с.
8. **Суслов Г. К.** Теоретическая механика [текст] / Г. К. Суслов. – М.: Гостехиздат, 1946. – 655 с.

УДК 531.38

А. В. Мазнев

Донецкий национальный университет

О ТРЕХ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

Мазнев В. О. Про три інваріантні співвідношення рівнянь руху гіростата під дією потенційних і гіроскопічних сил. Розглянуто задачу про рух гіростата з нерухомою точкою, що описується узагальненими рівняннями класу Кірхгофа–Пуассона, в припущенні залежності гіростатичного моменту від часу. Знайдено умови існування трьох лінійних інваріантних співвідношень спеціального вигляду і побудовано нові розв'язки рівнянь руху.

Ключові слова: гіростат, інваріантне співвідношення, гіростатичний момент.

Мазнев А. В. О трех инвариантных соотношениях уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Рассмотрена задача о движении гиростата, имеющего неподвижную точку, описываемая обобщенными уравнениями класса Кирхгофа–Пуассона, в предположении, что гиростатический момент зависит от времени. Найдены условия существования трех линейных инвариантных соотношений специального вида и построены новые решения уравнений движения.

Ключевые слова: гиростат, инвариантное соотношение, гиростатический момент.

Maznyev A. V. About three invariant parities of the movement equations of gyrost at under the influence of potential and gyroscopic forces. The problem about movement of gyrost at having a motionless point, which is described by Kirhgoф–Puasson's generalized equations, in assumption that gyrost atic moment depends on time is considered. Living conditions of three linear invariant parities of a special kind are found and new decisions of the equations of movement are constructed.

Key words: gyrost at, invariant correlation, gyrost atic moment.

ВВЕДЕНИЕ. Динамика твердого тела, как раздел аналитической механики, интенсивно развивается и получает многочисленные обобщения [1, 2, 3, 4, 5]. Одним из таких обобщений служит задача о движении гиростата под действием силы тяжести в случае постоянного гиростатического момента. Поскольку уравнения движения допускают три классических интеграла, то к их интегрированию применима теория интегрирующего множителя Якоби [1, 4, 5]. В решении многих прикладных проблем механики, например, при управлении ориентацией и стабилизации спутника роторами [2] важным обобщением является задача о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом. Эта задача рассматривалась Ж. Лиувиллем [6], В. Вольтерра [7], Н. Е. Жуковским [8]. В современной постановке задача о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом описана в работах П. В. Харламова [1, 9], В. В. Румянцева [2] и других. Частные типы движений гиростата изучали Э. И. Дружинин [10], О. С. Волкова [11, 12], О. С. Волкова и И. Н. Гашененко [13].

В данной работе рассмотрена задача о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, которая моделируется дифференциаль-

ными уравнениями класса Кирхгофа–Пуассона (см., например, работы [14, 15]), в обобщении, что гиростатический момент зависит от времени.

Интегрирование уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом усложняется в силу того, что для интегрирования этих уравнений недостаточно найти дополнительный интеграл. Поэтому исследование свойств движения гиростата с переменным гиростатическим моментом на основе построенных частных решений уравнений движения представляется актуальным.

В данной работе для обобщенных уравнений Кирхгофа–Пуассона изучены условия существования трех инвариантных соотношений специального вида. На их основе построены новые решения уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

1. Постановка задачи. Запишем уравнения движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в предположении, что гиростатический момент зависит от времени [9, 14, 15]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega} + \lambda(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}) - L\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu} + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}, \quad \dot{\lambda} = L, \quad (1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – момент количества движения тела-носителя; $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости, связанный с вектором \mathbf{x} соотношением $\boldsymbol{\omega} = a\mathbf{x}$ (a – гирационный тензор); $\lambda = \lambda(t)$ – функция, характеризующая величину гиростатического момента $\boldsymbol{\lambda} = \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$; L – проекция момента сил, действующего на носимые тела относительно оси вращения; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – постоянный единичный вектор; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – постоянный вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс; $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ – постоянные матрицы третьего порядка; точка над переменными характеризует производную по времени.

Уравнения (1), (2) допускают два интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k, \quad (3)$$

где k – произвольная постоянная. Для применения теории Якоби интегрирования уравнений динамики (1), (2) необходимо найти три дополнительных интеграла. Это обстоятельство принципиально отличает задачу (1), (2) от задачи о движении гиростата при $\lambda(t) = \text{const}$ [1, 3, 4, 5, 14, 16, 17].

Запишем уравнения (1), (2) в скалярном виде, в предположении, что

$$a = \text{diag}(a_1, a_2, a_3), \quad B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3), \quad C = \text{diag}(C_1, C_2, C_3)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = & (a_3 - a_2)x_2x_3 + \lambda(\alpha_2a_3x_3 - \alpha_3a_2x_2) - \dot{\lambda}\alpha_1 + B_3a_2x_2\nu_3 - \\ & - B_2a_3x_3\nu_2 + s_2\nu_3 - s_3\nu_2 + (C_3 - C_2)\nu_2\nu_3, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & (a_1 - a_3)x_3x_1 + \lambda(\alpha_3a_1x_1 - \alpha_1a_3x_3) - \dot{\lambda}\alpha_2 + B_1a_3x_3\nu_1 - \\ & - B_3a_1x_1\nu_3 + s_3\nu_1 - s_1\nu_3 + (C_1 - C_3)\nu_3\nu_1, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 = & (a_2 - a_1)x_1x_2 + \lambda(\alpha_1a_2x_2 - \alpha_2a_1x_1) - \dot{\lambda}\alpha_3 + B_2a_1x_1\nu_2 - \\ & - B_1a_2x_2\nu_1 + s_1\nu_2 - s_2\nu_1 + (C_2 - C_1)\nu_1\nu_2, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\nu}_1 &= a_3 x_3 \nu_2 - a_2 x_2 \nu_3, \\
\dot{\nu}_2 &= a_1 x_1 \nu_3 - a_3 x_3 \nu_1, \\
\dot{\nu}_3 &= a_2 x_2 \nu_1 - a_1 x_1 \nu_2.
\end{aligned} \tag{7}$$

Интеграл моментов из (3) запишется так

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{1}{\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2 \nu_2 + \alpha_3 \nu_3} \left[k - x_1 \nu_1 - x_2 \nu_2 - x_3 \nu_3 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (B_1 \nu_1^2 + B_2 \nu_2^2 + B_3 \nu_3^2) \right].
\end{aligned} \tag{8}$$

В данной статье поставлена задача об определении условий существования у уравнений (4)–(7) трех инвариантных соотношений

$$x_1 = b_0 + b_1 \nu_1, \quad x_2 = c_0 + c_2 \nu_2, \quad x_3 = d_0 + d_3 \nu_3. \tag{9}$$

2. Метод исследования. Согласно методу инвариантных соотношений [18] вычислим производную от (9) в силу уравнений (4)–(7)

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \dot{\lambda} &= \lambda (\beta_0 + \beta_2 \nu_2 + \beta_3 \nu_3) + \gamma_0 + \gamma_2 \nu_2 + \gamma_3 \nu_3 + \gamma_{23} \nu_2 \nu_3, \\
\alpha_2 \dot{\lambda} &= \lambda (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 \nu_1 + \varepsilon_3 \nu_3) + \sigma_0 + \sigma_1 \nu_1 + \sigma_3 \nu_3 + \sigma_{13} \nu_1 \nu_3, \\
\alpha_3 \dot{\lambda} &= \lambda (\eta_0 + \eta_1 \nu_1 + \eta_2 \nu_2) + \xi_0 + \xi_1 \nu_1 + \xi_2 \nu_2 + \xi_{12} \nu_1 \nu_2,
\end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \alpha_2 a_3 d_0 - \alpha_3 a_2 c_0, \quad \beta_2 = -\alpha_3 a_2 c_2, \quad \beta_3 = \alpha_1 a_3 d_3, \\
\gamma_0 &= d_0 c_0 (a_3 - a_2), \quad \gamma_2 = d_0 [c_2 (a_3 - a_2) - b_1 a_3 - a_2 B_2] - s_3, \\
\gamma_3 &= c_0 [d_3 (a_3 - a_2) + a_2 B_3 + a_2 b_1] + s_2, \\
\gamma_{23} &= c_2 d_3 (a_3 - a_2) + a_2 c_2 B_3 - a_2 d_3 B_2 - b_1 (a_3 d_3 - a_2 c_2) + C_3 - C_2,
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 &= \alpha_3 a_1 b_0 - \alpha_1 a_3 d_0, \quad \varepsilon_1 = \alpha_3 a_1 b_1, \quad \varepsilon_3 = -\alpha_1 a_3 d_3, \\
\sigma_0 &= b_0 d_0 (a_1 - a_3), \quad \sigma_1 = d_0 [b_1 (a_1 - a_3) + a_3 c_2 + a_3 B_1] + s_3, \\
\sigma_3 &= b_0 [d_3 (a_1 - a_3) - a_1 B_3 - a_1 c_2] - s_1, \\
\sigma_{13} &= b_0 d_3 (a_1 - a_3) + a_3 d_3 B_1 - a_1 b_1 B_3 - c_2 (a_1 b_1 - a_3 d_3) + C_1 - C_3,
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= \alpha_1 a_2 c_0 - \alpha_2 a_1 b_0, \quad \eta_1 = -\alpha_2 a_1 b_1, \quad \eta_2 = -\alpha_1 a_2 c_2, \\
\xi_0 &= b_0 c_0 (a_2 - a_1), \quad \xi_1 = c_0 [b_1 (a_2 - a_1) - a_2 d_3 - a_2 B_1] - s_2, \\
\xi_2 &= b_0 c_2 (a_2 - a_1) + a_1 b_0 d_3 + a_1 b_0 B_2 + s_1, \\
\xi_{12} &= b_1 c_2 (a_2 - a_1) + a_1 b_1 B_2 - a_2 c_2 B_1 - d_3 (a_2 c_2 - a_1 b_1) + C_2 - C_1.
\end{aligned} \tag{13}$$

Уравнения (10) имеют первый интеграл, порожденный соотношениями (8), (9)

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{1}{\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2 \nu_2 + \alpha_3 \nu_3} \left[k - b_0 \nu_1 - c_0 \nu_2 - d_0 \nu_3 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (B_1 - 2b_1) \nu_1^2 + \frac{1}{2} (B_2 - 2c_2) \nu_2^2 + \frac{1}{2} (B_3 - 2d_3) \nu_3^2 \right].
\end{aligned} \tag{14}$$

Внесем (9) в правые части уравнений (7)

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 &= a_3 d_0 \nu_2 - a_2 c_0 \nu_3 + (a_3 d_3 - a_2 c_2) \nu_2 \nu_3, \\ \dot{\nu}_2 &= a_1 b_0 \nu_3 - a_3 d_0 \nu_1 + (a_1 b_1 - a_3 d_3) \nu_1 \nu_3, \\ \dot{\nu}_3 &= a_2 c_0 \nu_1 - a_1 b_0 \nu_2 + (a_2 c_2 - a_1 b_1) \nu_1 \nu_2. \end{aligned} \quad (15)$$

Для анализа решения уравнений (9), (15) введем следующие соотношения

$$\nu_1 = \cos \theta, \quad \nu_2 = \sin \theta \cos \varphi, \quad \nu_3 = \sin \theta \sin \varphi, \quad (16)$$

где θ и φ новые переменные. Функции ν_i из (16) параметризуют геометрический интеграл из (3).

Без ограничения общности будем считать $\alpha_1 \neq 0$. Подставим $\dot{\lambda}$ из первого уравнения системы (10) во второе и третье уравнения этой системы. Учитывая в полученных соотношениях равенство (14) и выражения (16), имеем

$$\begin{aligned} & [b_2 \sin^2 \theta \cos 2\varphi - c_0 \sin \theta \cos \varphi - d_0 \sin \theta \sin \varphi + g_2(\theta)] \times \\ & \times [(\alpha_3 \beta_0 - \alpha_1 \eta_0) - \alpha_1 \eta_1 \cos \theta + (\alpha_3 \beta_2 - \alpha_1 \eta_2) \sin \theta \cos \varphi + \\ & + \alpha_3 \beta_3 \sin \theta \sin \varphi] + [(\alpha_3 \gamma_0 - \alpha_1 \xi_0) - \alpha_1 \xi_1 \cos \theta + \\ & + (\alpha_3 \gamma_2 - \alpha_1 \xi_2) \sin \theta \cos \varphi + \alpha_3 \gamma_3 \sin \theta \sin \varphi + \\ & + \frac{1}{2} \alpha_3 \gamma_{23} \sin^2 \theta \sin 2\varphi - \frac{1}{2} \alpha_1 \xi_{12} \sin 2\theta \cos \varphi] \times \\ & \times (\alpha_1 \cos \theta + \alpha_2 \sin \theta \cos \varphi + \alpha_3 \sin \theta \sin \varphi) = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & [b_2 \sin^2 \theta \cos 2\varphi - c_0 \sin \theta \cos \varphi - d_0 \sin \theta \sin \varphi + g_2(\theta)] \times \\ & \times [(\alpha_2 \beta_0 - \alpha_1 \varepsilon_0) - \alpha_1 \varepsilon_1 \cos \theta + \alpha_2 \beta_2 \sin \theta \cos \varphi + \\ & + (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_1 \varepsilon_3) \sin \theta \sin \varphi] + [(\alpha_2 \gamma_0 - \alpha_1 \sigma_0) - \alpha_1 \sigma_1 \cos \theta + \\ & + \alpha_2 \gamma_2 \sin \theta \cos \varphi + (\alpha_2 \gamma_3 - \alpha_1 \sigma_3) \sin \theta \sin \varphi + \\ & + \frac{1}{2} \alpha_2 \gamma_{23} \sin^2 \theta \sin 2\varphi - \frac{1}{2} \alpha_1 \sigma_{13} \sin 2\theta \sin \varphi] \times \\ & \times (\alpha_1 \cos \theta + \alpha_2 \sin \theta \cos \varphi + \alpha_3 \sin \theta \sin \varphi) = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{1}{4} [(B_2 - B_3) + 2(d_3 - c_2)], \\ g_2(\theta) &= k - b_0 \cos \theta + \frac{1}{2} (B_1 - 2b_1) \cos^2 \theta + \\ & + \frac{1}{4} [(B_2 + B_3) - 2(d_3 + c_2)] \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (19)$$

Потребуем, чтобы уравнения (17), (18) выполнялись для любых значений переменных θ, φ . Тогда получим систему уравнений, которой должны удовлетворять параметры задачи (1), (2) и инвариантных соотношениях (9). Выпишем

часть уравнений

$$\begin{aligned}
2b_2a_3d_3(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \alpha_2^2\gamma_{23} &= 0, \\
2b_2a_2c_2(\alpha_1^2 + \alpha_3^2) + \alpha_3^2\gamma_{23} &= 0, \\
\alpha_2\alpha_3(2a_2c_2b_2 + \gamma_{23}) = 0, \quad \alpha_2\alpha_3(2a_3d_3b_2 + \gamma_{23}) &= 0, \\
\alpha_2(a_1b_1b_2 - \xi_{12}) = 0, \quad \alpha_3(\gamma_{23} - \xi_{12}) &= 0, \\
\alpha_2(\sigma_{13} - \gamma_{23}) = 0, \quad \alpha_3(\sigma_{13} - a_1b_1b_2) &= 0 \dots,
\end{aligned} \tag{20}$$

где γ_{23} , σ_{13} , ξ_{12} имеют значения из систем (11)–(13). Многоточие в системе (20) обозначает уравнения, которые не выписаны в силу их громоздкости. Можно показать, что одним из решений является решение, которое характеризуется равенствами $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ и условиями, при выполнении которых функция λ из формулы (14) имеет вид

$$\lambda = \kappa_0 + \kappa_1\nu_1. \tag{21}$$

Выпишем полную систему условий на параметры при указанных выше условиях и на основании обозначений (11)–(13)

$$s_3 = 0, \quad d_0 = 0, \tag{22}$$

$$s_2 + c_0 [a_2(b_1 + \kappa_1) + d_3(a_3 - a_2) + a_2B_3] = 0, \tag{23}$$

$$s_2 - c_0 [b_1(a_2 - a_1) - a_2(d_3 + B_1) + a_2\kappa_1] = 0, \tag{24}$$

$$c_0 [b_0(a_2 - a_1) + a_2\kappa_0] = 0, \tag{25}$$

$$s_1 + b_0 [c_2(a_2 - a_1) + a_1(d_3 + B_2)] + \kappa_0a_2c_2 = 0, \tag{26}$$

$$s_1 - b_0 [d_3(a_1 - a_3) - a_1(c_2 + B_3)] + \kappa_0a_3d_3 = 0, \tag{27}$$

$$(a_2c_2 - a_3d_3)(b_1 + \kappa_1) + c_2d_3(a_3 - a_2) + a_2c_2B_3 - a_3d_3B_2 + C_3 - C_2 = 0, \tag{28}$$

$$c_2(a_3d_3 - a_1b_1) + b_1d_3(a_1 - a_3) - \kappa_1a_3d_3 + a_3d_3B_1 - a_1b_1B_3 + C_1 - C_3 = 0, \tag{29}$$

$$d_3(a_1b_1 - a_2c_2) + b_1c_2(a_2 - a_1) + \kappa_1a_2c_2 + a_1b_1B_2 - a_2c_2B_1 + C_2 - C_1 = 0. \tag{30}$$

Отметим, что при получении равенств (22) предполагалось, что $a_3 \neq a_2$. Итак, равенства (23)–(30) являются условиями существования инвариантных соотношений (9).

3. Случай $c_0 \neq 0$. Из уравнения (25) вытекает

$$\kappa_0 = \frac{b_0(a_1 - a_2)}{a_2}. \tag{31}$$

В силу структуры уравнений (23)–(30) из уравнений (23), (24) можно определить значение κ_1 , выраженное через остальные параметры задачи и не зависящее от s_1 . Из уравнений (26), (27) можно найти c_2 , которое не зависит от s_1 , и показать, что уравнения (28)–(30) зависимы.

Выпишем окончательный результат, учитывая условия (22)

$$\begin{aligned}
 s_3 &= 0, \quad d_0 = 0, \quad c_2 = \frac{1}{a_2} [a_2 (B_2 - B_3) - d_3 (a_3 - 2a_2)], \\
 c_0 &= -\frac{2s_2}{a_3 d_3 + a_1 b_1 + a_2 (B_2 + B_3)}, \quad b_0 = -\frac{s_1}{a_1 (B_2 + d_3)}, \\
 b_1 &= \frac{a_3 (a_3 - 2a_2) d_3^2 + a_3 d_3 (B_3 - B_1 - 2B_2) + 2a_2 (C_3 - C_1)}{a_1 [d_3 (a_3 - 2a_2) - 2a_2 B_2]}, \\
 b_* &= \frac{a_2 [2 (C_3 - C_1) - a_3 d_3 (B_1 - B_3)]}{d_3 (a_3 - 2a_2) - 2a_2 B_2}, \\
 & a_3 (a_2 - a_3) (2a_2 - a_3) d_3^3 + 2a_2 (a_2 - a_3) [a_2 B_1 + \\
 & + a_3 B_2 + (a_2 - a_3) B_3] d_3^2 + a_2 [2C_1 (a_2 - a_3) + \\
 & + C_2 (a_3 - 2a_2) + a_3 C_3 - a_2 (2a_3 - 3a_2) B_1 B_2 - a_2^2 B_1 B_3 + \\
 & + a_2 (a_2 - a_3) B_3 (3B_2 - B_3)] d_3 + a_2 [C_1 (B_2 - B_3) - \\
 & - 2C_2 B_2 + C_3 (B_2 + B_3) + a_2 B_2 (B_2 - B_3) (B_1 + B_3)] = 0, \\
 \kappa_1 &= \frac{1}{2a_1 a_2} [a_1 a_2 (B_1 - B_3) - b_* (2a_2 - a_1) + 2a_2 (a_1 - a_3) d_3].
 \end{aligned} \tag{32}$$

Поскольку предпоследнее уравнение из (32) имеет, по крайней мере, один действительный корень, то система условий (32) представляет собой действительные условия существования трех инвариантных соотношений (9).

Запишем уравнения (15) при $d_0 = 0$

$$\begin{aligned}
 \dot{\nu}_1 &= (-a_2 c_0 + p_0 \nu_2) \nu_3, \\
 \dot{\nu}_2 &= (a_1 b_0 + q_0 \nu_1) \nu_3, \\
 \dot{\nu}_3 &= a_2 c_0 \nu_1 - a_1 b_0 \nu_2 + r_0 \nu_1 \nu_2,
 \end{aligned} \tag{33}$$

где $p_0 = a_3 d_3 - a_2 c_2$, $q_0 = a_1 b_1 - a_3 d_3$, $r_0 = a_2 c_2 - a_1 b_1$. Система дифференциальных уравнений (33) имеет первый интеграл

$$2a_1 b_0 \nu_1 + 2a_2 c_0 \nu_2 + q_0 \nu_1^2 - p_0 \nu_2^2 = c_*, \tag{34}$$

где c_* — произвольная постоянная. Используя геометрическое соотношение $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$ и интеграл (34), найдем

$$\nu_2 = \frac{1}{p_0} \left(a_2 c_0 - \sqrt{\Phi(\nu_1)} \right), \tag{35}$$

$$\nu_3 = \frac{1}{|p_0|} \left[F(\nu_1) + 2a_2 c_0 \sqrt{\Phi(\nu_1)} \right]^{\frac{1}{2}}, \tag{36}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Phi(\nu_1) &= a_2^2 c_0^2 + p_0 (q_0 \nu_1^2 + 2a_1 b_0 - c_*), \\
 F(\nu_1) &= p_0 (r_0 \nu_1^2 - 2a_1 b_0 \nu_1 + p_0 + c_*) - 2a_2 c_0^2.
 \end{aligned}$$

Подставим выражения (35), (36) в первое уравнение системы (33)

$$\dot{\nu}_1 = -\frac{1}{|p_0|} \sqrt{\Phi(\nu_1)} \left[F(\nu_1) + 2a_2 c_0 \sqrt{\Phi(\nu_1)} \right]. \tag{37}$$

Из уравнения (37) можно определить $\nu_1(t)$ и подставить в формулы (35), (36), а затем внести в равенства (9), (21). В результате получим решение уравнений (1), (2) при наличии у них трех инвариантных соотношений (9).

4. Случай $c_0 = 0$. Из системы уравнений (22)–(30) получим

$$s_2 = 0, \quad s_3 = 0, \quad d_0 = 0, \quad b_0 = -\frac{s_1 p_0}{e}, \quad (38)$$

$$\kappa_0 = \frac{b_0}{p_0} [(2a_1 - a_3) d_3 - (2a_1 - a_2) c_2 + a_1 (B_2 - B_3)], \quad (39)$$

$$e = a_1 a_3 d_3^2 + a_1 (a_2 - a_3) c_2 d_3 - a_1 d_2 c_2^2 + a_1 (a_3 d_3 B_3 - a_2 c_2 B_3), \quad (40)$$

$$b_1 e_1 - \kappa_1 a_3 d_3 = e_0, \quad b_1 g_1 - \kappa_1 a_2 c_2 = g_0, \quad (41)$$

$$e_1 = d_3 (a_1 - a_3) - a_1 (B_3 + c_2), \quad e_0 = C_3 - C_1 - a_3 d_3 (B_1 + c_2), \quad (42)$$

$$g_1 = c_2 (a_2 - a_1) + a_1 (B_2 + d_3), \quad g_0 = C_1 - C_2 + a_2 c_2 (B_1 + d_3),$$

$$p_0 (\Delta_1 + \Delta_2) - \Delta [c_2 d_3 (a_3 - a_2) + a_2 c_2 B_3 - a_3 d_3 B_2 + C_3 - C_2] = 0, \quad (43)$$

$$\Delta = a_2 c_2 e_1 + a_3 d_3 g_1, \quad \Delta_1 = a_2 c_2 e_0 + a_3 d_3 g_0, \quad \Delta_2 = e_1 g_0 - e_0 g_1. \quad (44)$$

Из (38) следует, что обобщенный центр масс гиростата лежит на первой координатной оси. Условия (38)–(44) показывают, что величины $b_0, b_1, \kappa_0, \kappa_1$ зависят от параметров c_2, d_3 , связанных между собою равенством (43), в котором введены обозначения (44).

Для сведения задачи к квадратурам запишем уравнения Пуассона (33) при $c_0 = 0$

$$\dot{\nu}_1 = p_0 \nu_2 \nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = (a_1 b_0 + q_0 \nu_1) \nu_3, \quad \dot{\nu}_3 = (-a_1 b_0 + r_0 \nu_1) \nu_2, \quad (45)$$

Уравнения (45) имеют два интеграла: геометрический $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$ и $2a_1 b_0 \nu_1 + q_0 \nu_1^2 - p_0 \nu_2^2 = c^*$, где c^* — произвольная постоянная и поэтому их интегрирование сводится к квадратуре

$$\int_{\nu_1^{(0)}}^{\nu_1} \frac{d\nu_1}{\sqrt{\varphi_1(\nu_1)\varphi_2(\nu_1)}} = t - t_1, \quad (46)$$

где

$$\varphi_1(\nu_1) = q_0 \nu_1^2 + 2a_1 b_0 \nu_1 - c^*, \quad \varphi_2(\nu_1) = r_0 \nu_1^2 - 2a_1 b_0 \nu_1 + p_0 + c^*. \quad (47)$$

После обращения интеграла из (46) находим функцию $\nu_1(t)$, а функции $\nu_2(t), \nu_3(t)$ определяем из формул

$$\nu_2(t) = \sqrt{\frac{\varphi_1(\nu_1(t))}{p_0}}, \quad \nu_3(t) = \sqrt{\frac{\varphi_2(\nu_1(t))}{p_0}}.$$

Функцию $\lambda(t)$ можно найти из (21): $\lambda(t) = \kappa_0 + \kappa_1 \nu_1(t)$, а компоненты момента количества движения гиростата — из формул (9). Очевидно, что основные переменные задачи (1), (2) являются эллиптическими функциями времени. Действительность полученного решения вытекает из условия, что параметры c_2, d_3 связаны только одним соотношением (43), в котором разность $C_3 - C_2$ может принимать любое значение, а также из условия, что параметр c^* произволен.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. В статье получены два новых класса решений уравнений (1), (2), которые характеризуются линейными инвариантными соотношениями (9), (21) и выражаются эллиптическими функциями времени.

1. **Харламов П. В.** Лекции по динамике твердого тела [текст] / П. В. Харламов. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. университета, 1965. – 221 с.
2. **Румянцев В. В.** Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами [текст] / В. В. Румянцев // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. – 1970. – Вып. 2. – С. 83–96.
3. **Горр Г. В.** Классические задачи динамики твердого тела [текст] / Г. В. Горр, Л. В. Кудряшова, Л. А. Степанова. – Київ: Наук. думка, 1978. – 296 с.
4. **Козлов В. В.** Методы качественного анализа в динамике твердого тела [текст] / В. В. Козлов. – Ижевск: Изд-во РХД, 2000. – 256 с.
5. **Борисов А. В.** Динамика твердого тела [текст] / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. – 384 с.
6. **Liouville J.** Developpements sur un chapitre de la Mecanique de Poisson [text] / J. Liouville // J. math. pures et appl. – 1858. – V. 3. – P. 1–25.
7. **Volterra V.** Sur la theorie des variations des latitudes [text] / V. Volterra // Acta. Math. – 1899. – V. 22. – P. 201–358.
8. **Жуковский Н. Е.** О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью [текст] / Жуковский Н. Е. // Собр. соч: М.; Л.: Гостехиздат, 1949. – Т. 1. – С. 31–152.
9. **Харламов П. В.** Об уравнениях движения системы твердых тел [текст] / П. В. Харламов // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
10. **Дружинин Э. И.** О перманентных вращениях уравновешенного неавтономного гиростата [текст] / Э. И. Дружинин // Прикл. математика и механика. – 1999. – Т. 63. – Вып. 5. – С. 825–826.
11. **Волкова О. С.** Регулярные прецессии тяжелого гиростата вокруг вертикальной оси [текст] / О. С. Волкова // Труды ин-та прикладной математики и механики. – 2009. – Т. 19. – С. 30–35.
12. **Волкова О. С.** Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик [текст] / О. С. Волкова // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 80–86.
13. **Волкова О. С.** Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом [текст] / О. С. Волкова, И. Н. Гашененко // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 42–49.
14. **Харламов П. В.** О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью [текст] / П. В. Харламов // Журнал прикл. математики и техн. физики. – 1963. – № 4. – С. 17–29.
15. **Yehia H. M.** On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations [text] / H. M. Yehia // J. Mecan. Theor. Appl. – 1986. – V. 5, № 5. – P. 747–754.
16. **Горр Г. В.** Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел [текст] / Г. В. Горр, А. В. Мазнев, Е. К. Щетинина. – Донецк: ДонНУ, 2009. – 222 с.
17. **Горр Г. В.** Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку [текст] / Г. В. Горр, А. В. Мазнев. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
18. **Харламов П. В.** Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений [текст] / П. В. Харламов // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.

ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ АВТОРІВ (скорочений варіант)

Журнал “Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка” має мету інформувати читачів про нові наукові дослідження у сфері теоретичної і прикладної математики і механіки та суміжних дисциплін. У журналі друкуються статті та короткі повідомлення, в яких наведені оригінальні результати теоретичних досліджень і огляди з актуальних проблем за тематикою видання.

Журнал структуровано за такими напрямками:

1. Математика.
2. Механіка.
3. Короткі повідомлення.
4. Хроніка (ювілеї, знаменні дати та події тощо).

Статті публікуються українською, російською або англійською мовами.

До журналу приймаються раніше не опубліковані наукові роботи.

Авторський оригінал складається із двох друкованих примірників, підписаних авторами, та електронної версії на будь-якому електронному носії.

Електронна версія містить анкетні дані авторів: прізвище, ім'я, по-батькові, місце роботи, адресу для листування та телефон.

Текст статті має бути підготовлений за допомогою видавничої системи LaTeX у відповідності до вимог, які викладено на сайті журналу www.visnyk_math.onu.edu.ua або які можна отримати в редакційній колегії журналу. Загальний обсяг статті не повинен перевищувати 20 сторінок, а короткого повідомлення — 5–6 сторінок.

Структура статті:

- УДК;
- назва статті;
- список авторів;
- анотації українською, російською та англійською мовами, які містять назву, список авторів, резюме та список ключових слів відповідною мовою;
- основний текст статті повинен відповідати вимогам постанови Президії ВАК України “Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України” від 15.01.2003 р. № 7-05/1, тобто необхідно виділити вступ, основну частину і висновки. Основна частина повинна містити постановку проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор, виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується означена стаття; формулювання цілей статті (постановка завдання); виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів; висновки з цього дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямку. Посилання на літературу в тексті подаються порядковим номером в квадратних дужках;

— список літературних джерел укладається в порядку посилань або в алфавітному порядку та оформляється відповідно до державного стандарту України ДСТУ ГОСТ 7.1:2006 "Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання" та відповідає вимогам ВАК України (див. наказ № 63 від 26.01.2008).

Усі надіслані статті проходять рецензування.

Редколегія має право відхилити рукописи, якщо вони не відповідають вимогам журналу "Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка".

В одному номері журналу публікується тільки одна стаття автора, в тому числі у співавторстві.

Статті слід подавати до редакційної колегії журналу або надсилати за адресою:

Редакційна колегія журналу
"Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка"
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
вул. Дворянська, 2,
м. Одеса, 65026

Текст статті можна надіслати електронною поштою за адресою:

visnyk_math@onu.edu.ua

Рукописи статей та електронні носії авторам не повертаються.

Електронну версію журналу можна знайти на сайті:

www.visnyk_math.onu.edu.ua